Some questions of probability theory on special topological groups

Outline of Ph.D. Thesis

Mátyás Barczy

University of Debrecen
Faculty of Informatics

Debrecen, 2006

1. Introduction

In the present thesis we give an overview of our results from our dissertation *"Some questions of probability theory on special topological groups."* We start with a short introduction of the considered topics and then present our main results. The dissertation contains five chapters. The first chapter gives an overview of the subject, historical background and contains a summary of our results. Chapter 2, 3, 4 and 5 include our results which are based on our papers [1], [2], [3], [4] and [5].

In Chapters 2 and 3 we investigate questions concerning Gauss measures on special noncommutative Lie groups, such as on the Heisenberg group and on the affine group. In Chapter 4 we deal with proving (central) limit theorems for infinitesimal triangular arrays of random elements with values in a locally compact Abelian group, such as in the torus, in the group of p-adic integers and in the p-adic solenoid. In Chapter 4 we consider the problem of representation of weakly infinitely divisible probability measures on the above mentioned groups, as well. In Chapter 5 we prove an analogue of the portmanteau theorem on weak convergence of probability measures. Chapter 5 can be considered as an auxiliary result for Chapter 4.

In all what follows $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}_+$ and $\mathbb{R}$ denotes the set of positive integers, the set of integers, the set of nonnegative integers and the set of real numbers, respectively. The expression "a measure on a topological space" means a measure on the σ-algebra of Borel subsets of the topological space in question. By a Borel neighbourhood U of an element x of a topological space G we mean a Borel subset of G for which there exists an open subset $\widetilde{U}$ of G such that $x \in \widetilde{U} \subset U$.

2. Gauss measures on the Heisenberg group

Fourier transform of a probability measure on a locally compact group plays an important role in several problems concerning convolution and weak convergence of probability measures. In case of a locally compact Abelian group, an explicit formula is available for the Fourier transform of an arbitrary infinitely divisible probability measure (see Parthasarathy [18]). The case of non-Abelian groups is much more complicated. For Lie groups, Tomé [20] proposed a method how to calculate Fourier transforms based on Feynman's path integrals and discussed the physical motivation, but explicit expressions have been derived only in very special cases.

In Chapter 2 we consider the 3-dimensional Heisenberg group $\mathbb{H}$ which can be obtained by furnishing $\mathbb{R}^3$ with its natural topology and with the product

$$(g_1, g_2, g_3)(h_1, h_2, h_3) = \Big(g_1 + h_1, g_2 + h_2, g_3 + h_3 + \frac{1}{2}(g_1 h_2 - g_2 h_1)\Big).$$

Then $\mathbb{H}$ is a nilpotent Lie group. The Schrödinger representations $\{\pi_{\pm\lambda} : \lambda > 0\}$ of $\mathbb{H}$ are representations in the group of unitary operators of the complex Hilbert space $L^2(\mathbb{R})$ given by

$$[\pi_{\pm\lambda}(g)u](x) := \mathsf{e}^{\pm i(\lambda g_3 + \sqrt{\lambda} g_2 x + \lambda g_1 g_2/2)} u(x + \sqrt{\lambda} g_1)$$

for $g = (g_1, g_2, g_3) \in \mathbb{H}$, $u \in L^2(\mathbb{R})$ and $x \in \mathbb{R}$. The value of the Fourier transform of a probability measure μ on $\mathbb{H}$ at the Schrödinger representation $\pi_{\pm\lambda}$ is the bounded linear operator $\widehat{\mu}(\pi_{\pm\lambda}) : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$ given by

$$\widehat{\mu}(\pi_{\pm\lambda})u := \int_{\mathbb{H}} \pi_{\pm\lambda}(g)u \, \mu(\mathsf{d}g), \qquad u \in L^2(\mathbb{R}).$$

A family $(\mu_t)_{t\geqslant 0}$ of probability measures on $\mathbb{H}$ is said to be a *continuous convolution semigroup* if we have $\mu_s * \mu_t = \mu_{s+t}$ for all $s, t \geqslant 0$, and $\mu_t \xrightarrow{\mathsf{w}} \mu_0 = \delta_e$ as $t \downarrow 0$, where δ_e denotes the Dirac measure concentrated on the unit element $e = (0, 0, 0)$ of $\mathbb{H}$. (Here the notation $\xrightarrow{\mathsf{w}}$ means weak convergence.) A convolution semigroup $(\mu_t)_{t\geqslant 0}$ is called a *Gauss semigroup* if $\lim_{t\downarrow 0} t^{-1}\mu_t(\mathbb{H} \setminus U) = 0$ for all Borel neighbourhoods U of e. A probability measure μ on $\mathbb{H}$ is called *continuously embeddable* if there exists a continuous convolution semigroup $(\mu_t)_{t\geqslant 0}$ of probability measures on $\mathbb{H}$ such that $\mu_1 = \mu$. A probability measure on $\mathbb{H}$ is called a *Gauss measure* if it is continuously embeddable into a Gauss semigroup.

We derive an explicit formula for the Fourier transform of a Gauss measure on $\mathbb{H}$ at the Schrödinger representation. Using this explicit formula, we give necessary and sufficient conditions for the convolution of two Gauss measures to be a Gauss measure. Namely, we prove the following theorem (Theorem 2.2.1 in our dissertation).

Theorem. *Let μ' and μ'' be Gauss measures on $\mathbb{H}$. Then the convolution $\mu' * \mu''$ is a Gauss measure on $\mathbb{H}$ if and only if one of the following conditions holds:*

(C1) *there exist elements Y_0', Y_0'', Y_1, Y_2 in the Lie algebra of $\mathbb{H}$ such that $[Y_1, Y_2] = 0$, and the supports of μ' and μ'' are contained in $\exp\{Y_0' + \mathbb{R} \cdot Y_1 + \mathbb{R} \cdot Y_2\}$ and $\exp\{Y_0'' + \mathbb{R} \cdot Y_1 + \mathbb{R} \cdot Y_2\}$, respectively. (Equivalently, there exists an Abelian subgroup $\mathbb{G}$ of $\mathbb{H}$ such that the supports of μ' and μ'' are contained in "Eucledian cosets" of $\mathbb{G}$.)*

(C2) *there exist a Gauss semigroup $(\mu_t)_{t \geqslant 0}$ and $t', t'' \geqslant 0$ and a Gauss measure ν such that the support of ν is contained in the center of $\mathbb{H}$ and either $\mu' = \mu_{t'}$, $\mu'' = \mu_{t''} * \nu$ or $\mu' = \mu_{t'} * \nu$, $\mu'' = \mu_{t''}$ holds. (Equivalently, μ' and μ'' are sitting on the same Gauss semigroup modulo a Gauss measure with support contained in the center of $\mathbb{H}$.)*

(Here exp *denotes the exponential mapping from the Lie algebra of $\mathbb{H}$ into $\mathbb{H}$.)*

It turns out that a convolution of Gauss measures on the Heisenberg group is almost never a Gauss measure. We also give the Fourier transform of the convolution of two Gauss measures on the Heisenberg group including the case when the convolution is not a Gauss measure.

The structure of Chapter 2 is similar to Pap [16] in which he considered symmetric Gauss measures on the 3-dimensional Heisenberg group. Our main theorems are generalizations of the corresponding results for symmetric Gauss measures on Heisenberg group due to Pap [16].

The results of Chapter 2 are contained in our accepted paper [2].

3. Gauss measures on the affine group

A probability measure μ on a locally compact group G is continuously embeddable if there exists a continuous convolution semigroup $(\mu_t)_{t\geqslant 0}$ of probability measures on G such that $\mu_1 = \mu$.

For general locally compact groups G one does not know whether the embedding convolution semigroup of a continuously embeddable probability measure on G is unique. If $(\mu_t)_{t\geqslant 0}$ and $(\nu_t)_{t\geqslant 0}$ are convolution semigroups of probability measures on $(\mathbb{R}^d, +)$ then it is well-known that $\mu_1 = \nu_1$ implies $\mu_t = \nu_t$ for all $t \geqslant 0$. The same statement holds for locally compact Abelian groups without non-trivial compact subgroups (cf. Heyer [13, Theorem 3.5.15]). The question of unicity of embedding into stable and semi-stable semigroups on simply connected nilpotent Lie groups has been studied by Drisch and Gallardo [8], Nobel [15] and see also a detailed discussion by Hazod and Siebert [11, Section 2.6]. Pap [17] proved that a Gauss measure on a simply connected nilpotent Lie group has a unique embedding semigroup among Gauss semigroups. We prove the same result for the 2-dimensional affine group which is not nilpotent.

The 2-dimensional affine group F can be realized as the matrix group

$$F := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : a \neq 0,\, b \in \mathbb{R} \right\}.$$

Then F is a Lie group which is not nilpotent. Concerning uniqueness of embedding we prove the following theorem (Theorem 3.3.1 in our dissertation).

Theorem. *Let $(\mu_t)_{t\geqslant 0}$ and $(\nu_t)_{t\geqslant 0}$ be Gauss semigroups on the affine group F. If $\mu_1 = \nu_1$ then we have $\mu_t = \nu_t$ for all $t \geqslant 0$. In other words, a Gauss measure on the affine group F can be embedded only in a uniquely determined Gauss semigroup.*

The starting point of the proof this theorem is the fact that a Gauss Lévy process in the affine group satisfies a certain stochastic differential equation (SDE). We also give the solution of this SDE.

Moreover, we give a complete description of supports of Gauss measures on the affine group using Siebert's support formula (see Siebert [19]). Our results are completition of results due to Siebert [19].

The results of this chapter appeared in our paper [1].

4. Limit theorems on LCA2 groups

Let G be a second countable locally compact Abelian group (LCA2 group). The group operation in G will be denoted by $+$. In Chapter 4 we deal with proving (central) limit theorems on LCA2 groups. We also consider the question of giving a construction of weakly infinitely divisible probability measures on special LCA2 groups using only real valued random variables.

The main question of limit problems on G can be formulated as follows. Let $\{X_{n,k} : n \in \mathbb{N},\, k = 1, \ldots, K_n\}$ be a triangular array of rowwise independent random elements with values in G satisfying the infinitesimality condition

$$\lim_{n\to\infty} \max_{1\leqslant k\leqslant K_n} \mathrm{P}(X_{n,k} \in G \setminus U) = 0$$

for all Borel neighbourhoods U of the identity e of G. One searches for conditions on the array so that the convergence in distribution

$$\sum_{k=1}^{K_n} X_{n,k} \stackrel{\mathcal{D}}{\longrightarrow} \mu \qquad \text{as} \quad n \to \infty$$

to a probability measure μ on G holds. For a sequence $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$ of random elements in G and for a probability measure μ on G, the notation $X_n \stackrel{\mathcal{D}}{\longrightarrow} \mu$ means weak convergence $\mathrm{P}_{X_n} \stackrel{\mathsf{w}}{\longrightarrow} \mu$ of the distributions P_{X_n} of X_n, $n \in \mathbb{N}$ towards μ. Moreover, for a random element X in G, the notation $X \stackrel{\mathcal{D}}{=} \mu$ means that the distribution P_X of X is μ.

Let $\mathcal{L}(G)$ denote the set of all possible limits of row sums of rowwise independent infinitesimal triangular arrays in G. The following problems arise:

(P1) How to parametrize the set $\mathcal{L}(G)$, i.e., to give a bijection between $\mathcal{L}(G)$ and an appropriate parameter set $\mathcal{P}(G)$;

(P2) How to associate suitable quantities q_n to the rows $\{X_{n,k} : 1 \leqslant k \leqslant K_n\}$, $n \in \mathbb{N}$ so that

$$\sum_{k=1}^{K_n} X_{n,k} \xrightarrow{\mathcal{D}} \mu \quad \Longleftrightarrow \quad q_n \to q,$$

where $q \in \mathcal{P}(G)$ corresponds to the limiting distribution μ, and the convergence $q_n \to q$ is meant in an appropriate sense.

The problem (P1) has been solved by Parthasarathy (see Chapter IV, Corollary 7.1 in [18]). Gaiser [10, Satz 1.3.6] gave a partial solution to the problem (P2). He provided only some sufficient conditions for the convergence $\sum_{k=1}^{K_n} X_{n,k} \xrightarrow{\mathcal{D}} \mu$, which does not include the case where μ has a nondegenerate idempotent factor, i.e., a nondegenerate Haar measure on a compact subgroup of G as its factor. We give a proof of Gaiser's theorem [10, Satz 1.3.6], since it does not have an easy access and it is not complete. For a survey of results on limit theorems on a general LCA2 group, see, e.g., Bingham [6].

As new results we prove necessary and sufficient conditions for convergence of the row sums of symmetric arrays and Bernoulli arrays, where the limit measure can also be a nondegenerate normalized Haar measure on a compact subgroup. Concerning Bernoulli arrays we prove the following theorem (Theorem 4.5.1 in our dissertation).

Theorem. *Let* $x \in G$ *such that* $x \neq e$. *Let* $\{X_{n,k} : n \in \mathbb{N}, k = 1, \ldots, K_n\}$ *be a rowwise independent and identically distributed array of random elements in* G *such that* $K_n \to \infty$,

$$\mathrm{P}(X_{n,k} = x) = p_n, \qquad \mathrm{P}(X_{n,k} = e) = 1 - p_n,$$

and $p_n \to 0$. *Then the array* $\{X_{n,k} : n \in \mathbb{N}, k = 1, \ldots, K_n\}$ *is infinitesimal.*

If λ is a nonnegative real number then

$$\sum_{k=1}^{K_n} X_{n,k} \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathsf{e}(\lambda\delta_x) \qquad \Longleftrightarrow \qquad K_n\, p_n \to \lambda.$$

If the smallest closed subgroup H of G containing x is compact then

$$\sum_{k=1}^{K_n} X_{n,k} \xrightarrow{\mathcal{D}} \omega_H \qquad \Longleftrightarrow \qquad K_n\, p_n \to \infty.$$

(Here $\mathsf{e}(\lambda\delta_x)$ denotes the compound Poisson measure for the measure $\lambda\delta_x$, where δ_x is the Dirac measure concentrated on x, and ω_H is the normalized Haar measure on H.)

We also specify our results considering some classical topological groups such as the torus group, the group of p-adic integers and the p-adic solenoid.

The set $\mathbb{T} := \{\mathsf{e}^{ix} : -\pi \leqslant x < \pi\}$ equipped with the usual multiplication of complex numbers and with the relative topology as a subset of complex numbers is a compact Abelian group. This is called the one-dimensional torus group.

Let p be a prime. The group of p-adic integers is

$$\Delta_p := \big\{(x_0, x_1, \dots) : x_j \in \{0, 1, \dots, p-1\} \ \text{ for all } \ j \in \mathbb{Z}_+\big\},$$

where the sum $z := x + y \in \Delta_p$ for $x, y \in \Delta_p$ is uniquely determined by the relationships

$$\sum_{j=0}^{d} z_j p^j \equiv \sum_{j=0}^{d} (x_j + y_j) p^j \qquad \mathrm{mod}\ p^{d+1} \qquad \text{for all } \ d \in \mathbb{Z}_+.$$

For each $r \in \mathbb{Z}_+$, let

$$\Lambda_r := \{x \in \Delta_p : x_j = 0 \ \text{ for all } \ j \leqslant r-1\}.$$

The family of sets $\{x + \Lambda_r : x \in \Delta_p, r \in \mathbb{Z}_+\}$ is an open subbasis for a topology on Δ_p under which Δ_p is a compact, totally disconnected Abelian group.

The p-adic solenoid is a subgroup of $\mathbb{T}^\infty$, namely,

$$S_p := \big\{(y_0, y_1, \dots) \in \mathbb{T}^\infty : y_j = y_{j+1}^p \quad \text{for all} \quad j \in \mathbb{Z}_+\big\},$$

furnished with the relative topology as a subset of the locally compact group $\mathbb{T}^\infty$. Then S_p is a compact Abelian group.

On the above mentioned LCA2 groups, we derive limit theorems applying Gaiser's theorem and our general results for symmetric and Bernoulli arrays. We give only one example (Theorem 4.7.1 in our dissertation).

Theorem. *Let* $\{X_{n,k} : n \in \mathbb{N},\, k = 1, \dots, K_n\}$ *be a rowwise independent array of random elements in* Δ_p*. Suppose that there exists a Lévy measure* η *on* Δ_p *such that*

(i) $\max\limits_{1 \leqslant k \leqslant K_n} \mathrm{P}\Big(\big((X_{n,k})_0, \dots, (X_{n,k})_d\big) \neq 0\Big) \to 0$ *as* $n \to \infty$ *for all* $d \in \mathbb{Z}_+$,

(ii) $\displaystyle\sum_{k=1}^{K_n} \mathrm{P}\big((X_{n,k})_0 = \ell_0, \dots, (X_{n,k})_d = \ell_d\big)$
$\to \eta(\{x \in \Delta_p : x_0 = \ell_0, \dots, x_d = \ell_d\})$ *as* $n \to \infty$ *for all* $d \in \mathbb{Z}_+$, $\ell_0, \dots, \ell_d \in \{0, \dots, p-1\}$ *with* $(\ell_0, \dots, \ell_d) \neq 0$.

Then the array $\{X_{n,k} : n \in \mathbb{N},\, k = 1, \dots, K_n\}$ *is infinitesimal and*

$$\sum_{k=1}^{K_n} X_{n,k} \xrightarrow{\mathcal{D}} \pi_{\eta,\, g_{\Delta_p}} \qquad \text{as} \quad n \to \infty.$$

(Here $\pi_{\eta,\, g_{\Delta_p}}$ *denotes the generalized Poisson measure on* Δ_p *for the Lévy measure* η *and for the local inner product* g_{Δ_p}*.)*

Besides proving limit theorems, we give a construction of an arbitrary weakly infinitely divisible probability measure on the torus group and the group of p-adic integers. On the p-adic solenoid we give a construction of weakly infinitely divisible probability measures without nondegenerate idempotent factors. In our constructions we only use real valued random variables. Let us consider a probability measure μ on G and an infinitesimal rowwise independent array $\{X_{n,k} : n \in \mathbb{N},\, k = 1, \ldots, K_n\}$ of random elements with values in G. If the row sums $\sum_{k=1}^{K_n} X_{n,k}$ of this array converge in distribution to μ then μ is necessarily weakly infinitely divisible (see, e.g., Parthasarathy [18, Chapter IV, Theorem 5.2]). Moreover, Parthasarathy [18, Chapter IV, Corollary 7.1] gives a representation of an arbitrary weakly infinitely divisible probability measure on G in terms of a Haar measure, a Dirac measure, a symmetric Gauss measure and a generalized Poisson measure on G.

In Chapter 4 we consider special cases: the torus group, the group of p-adic integers and the p-adic solenoid. For each of the three groups, first we find a measurable homomorphism φ from an appropriate Abelian topological group (which is a certain product of some subgroups of $\mathbb{R}$) onto the group in question. Then we consider an arbitrary weakly infinitely divisible probability measure μ on the group in question (without a nondegenerate idempotent factor in case of the p-adic solenoid) and we find real valued random variables $Z_0, Z_1, \ldots$ such that the distribution of $\varphi(Z_0, Z_1, \ldots)$ is μ.

We note that, as a special case of our results, we have a new construction of the normalized Haar measure on the group of p-adic integers and the p-adic solenoid. Concerning the p-adic solenoid we prove the following result which is a part of Theorem 4.8.4 of our dissertation.

Theorem. *If $U_0, U_1, \ldots$ are independent real valued random variables such that U_0 is uniformly distributed on $[0, 2\pi]$ and $U_1, U_2, \ldots$ are uniformly distributed on $\{0, 1, \ldots, p-1\}$ then*

$$\varphi(U_0,\, U_1, \ldots) \stackrel{\mathcal{D}}{=} \omega_{S_p},$$

where the mapping $\varphi : \mathbb{R} \times \mathbb{Z}^\infty \to S_p$ is defined by

$$\begin{aligned}&\varphi(y_0, y_1, y_2, \ldots)\\ &\quad := \left(\mathrm{e}^{iy_0},\, \mathrm{e}^{i(y_0+2\pi y_1)/p},\, \mathrm{e}^{i(y_0+2\pi y_1+2\pi y_2 p)/p^2},\, \mathrm{e}^{i(y_0+2\pi y_1+2\pi y_2 p+2\pi y_3 p^2)/p^3}, \ldots\right)\end{aligned}$$

for $(y_0, y_1, y_2, \ldots) \in \mathbb{R} \times \mathbb{Z}^\infty$, and ω_{S_p} is the normalized Haar measure on S_p.

One can find another construction of the normalized Haar measure on the p-adic solenoid in Chistyakov [7, Section 3]. It is based on Hausdorff measures and rather sophisticated, while our simpler construction is based on a probabilistic method and reflects the structure of the p-adic solenoid.

The results of Chapter 4 are contained in our submitted papers [3] and [4].

5. Portmanteau theorem for unbounded measures

Weak convergence of probability measures on a metric space has a very important role in probability theory. The well-known *portmanteau theorem* due to A. D. Alexandroff (see, e.g., Dudley [9, Theorem 11.1.1]) provides useful conditions equivalent to weak convergence of probability measures; any of them could serve as the definition of weak convergence. Proposition 1.2.13 in the book of Meerschaert and Scheffler [14] gives an analogue of the portmanteau theorem for bounded measures on $\mathbb{R}^d$. Moreover, Proposition 1.2.19 in Meerschaert and Scheffler [14] gives an analogue for special unbounded measures on $\mathbb{R}^d$, more precisely, for extended real valued measures which are finite on the complement of any Borel neighbourhood of $0 \in \mathbb{R}^d$. We reformulate Proposition 1.2.19 in Meerschaert and Scheffler [14] in a more detailed form adding new equivalent assertions to it. Namely, we prove the following theorem (Theorem 5.2.1 in our dissertation).

Theorem. *Let* (X, d) *be a metric space and* x_0 *be a fixed element of* X*. Let* η_n*,* $n \in \mathbb{Z}_+$*, be measures on* X *such that* $\eta_n(X \setminus U) < \infty$ *for all* $U \in \mathcal{N}_{x_0}$ *and for all* $n \in \mathbb{Z}_+$*. Then the following assertions are equivalent:*

(i) $\int_{X\setminus U} f \, \mathsf{d}\eta_n \to \int_{X\setminus U} f \, \mathsf{d}\eta_0$ *for all* $f \in \mathcal{C}(X)$ *and for all* $U \in \mathcal{N}_{x_0}$ *with* $\eta_0(\partial U) = 0$,

(ii) $\eta_n|_{X\setminus U} \xrightarrow{\mathsf{w}} \eta_0|_{X\setminus U}$ *for all* $U \in \mathcal{N}_{x_0}$ *with* $\eta_0(\partial U) = 0$,

(iii) $\eta_n(X \setminus U) \to \eta_0(X \setminus U)$ *for all* $U \in \mathcal{N}_{x_0}$ *with* $\eta_0(\partial U) = 0$,

(iv) $\int_X f \, \mathsf{d}\eta_n \to \int_X f \, \mathsf{d}\eta_0$ *for all* $f \in \mathcal{C}_{x_0}(X)$,

(v) $\int_X f \, \mathsf{d}\eta_n \to \int_X f \, \mathsf{d}\eta_0$ *for all* $f \in \mathrm{BL}_{x_0}(X)$,

(vi) *the following inequalities hold:*

(*a*) *for all open neighbourhoods* U *of* x_0,

$$\limsup_{n\to\infty} \eta_n(X \setminus U) \leqslant \eta_0(X \setminus U),$$

(*b*) *for all closed neighbourhoods* V *of* x_0,

$$\liminf_{n\to\infty} \eta_n(X \setminus V) \geqslant \eta_0(X \setminus V).$$

(Here $\mathcal{N}_{x_0}$ *denotes the set of all Borel neighbourhoods of* x_0, $\mathcal{C}(X)$, $\mathcal{C}_{x_0}(X)$ *and* $\mathrm{BL}_{x_0}(X)$ *denote the spaces of all real valued bounded continuous functions on* X, *the set of all elements of* $\mathcal{C}(X)$ *vanishing on some Borel neighbourhood of* x_0, *and the set of all real valued bounded Lipschitz functions vanishing on some Borel neighbourhood of* x_0, *respectively. The notation* $\stackrel{\mathsf{w}}{\longrightarrow}$ *means weak convergence.)*

Our proof goes along the lines of the proof of the original portmanteau theorem (Dudley [9, Theorem 11.1.1]) and differs from the proof of Proposition 1.2.19 in Meerschaert and Scheffler [14].

By giving counterexamples we also show that some parts of Propositions 1.2.13 and 1.2.19 in Meerschaert and Scheffler [14] are not true, namely, the equivalence of (c) and (d) in their propositions is not valid.

The results of Chapter 5 are contained in our submitted paper [5].

Bibliography

[1] M. Barczy and G. Pap, Gaussian measures on the affine group: uniqueness of embedding and supports. *Publ. Math. Debrecen* **63**(1-2) (2003), 221–234.

[2] M. Barczy and G. Pap, Fourier transform of a Gaussian measure on the Heisenberg group, to appear in *Annales de L'Institut Henri Poincaré Probabilités et Statistiques.*

[3] M. Barczy, A. Bendikov and G. Pap, Limit theorems on locally compact Abelian groups, submitted to *Mathematische Nachrichten.*

[4] M. Barczy and G. Pap, Weakly infinitely divisible measures on some locally compact Abelian groups, submitted to *Bulletin of the Australian Mathematical Society.*

[5] M. Barczy and G. Pap, Portmanteau theorem for unbounded measures, submitted to *Statistics & Probability Letters.*

[6] M. S. Bingham, Central limit theory on locally compact abelian groups. In: Probability measures on groups and related structures, XI. Proceedings Oberwolfach, 1994, pp. 14–37, World Sci. Publishing, NJ, 1995.

[7] D. V. Chistyakov, Fractal geometry of images of continuous embeddings of p-adic numbers and solenoids into Euclidean spaces. *Theoret. and Math. Phys.* **109**(3) (1996), 1495–1507.

[8] T. Drisch and L. Gallardo, Stable laws on the Heisenberg groups. In: H. Heyer ed., Probability Measures on Groups VII. Proceedings, Oberwolfach 1983, *Lecture Notes in Math.* **1064**, pp. 56–79, Springer, Berlin–Heidelberg–New York, 1984.

[9] R. M. Dudley, *Real analysis and probability.* The Wadsworth & Brooks Cole Mathematics Series, Pacific Grove, 1989.

[10] J. Gaiser, Konvergenz stochastischer prozesse mit werten in einer lokalkompakten Abelschen gruppe. *Ph.D. Thesis*, Universität Tübingen, 1994.

[11] W. Hazod and E. Siebert, *Stable probability measures on Euclidean spaces and on locally compact groups. Structural properties and limit theorems.* Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2001.

[12] E. Hewitt and K. A. Ross, *Abstract harmonic analysis I.* Springer, 1963.

[13] H. Heyer, *Probability measures on locally compact groups.* Springer, 1977.

[14] M. M. Meerschaert and H.-P. Scheffler, *Limit distributions for sums of independent random vectors. Heavy tails in theory and practice.* John Wiley & Sons, Inc., New York, 2001.

[15] S. Nobel, Limit theorems for probability measures on simply connected nilpotent Lie groups. *J. Theoret. Probab.* **4** (1991), 261-284.

[16] G. Pap, Fourier transform of symmetric Gauss measures on the Heisenberg group. *Semigroup Forum* **64** (2002), 130–158.

[17] G. Pap, Uniqueness of embedding into a Gaussian semigroup on a nilpotent Lie group. *Arch. Math.* **62** (1994), 282–288.

[18] K. R. Parthasarathy, *Probability measures on metric spaces.* Academic Press, New York, 1967.

[19] E. Siebert, Absolute continuity, singularity, and supports of Gauss semigroups on a Lie group. *Monatsh. Math.* **93** (1982), 239-253.

[20] W. Tomé, *The representation independent propagator for general Lie groups.* World Scientific, Singapore, 1998.

List of papers of the author and citations to these papers

1. M. Barczy and M. Tóth, Local automorphisms of the sets of states and effects on a Hilbert space. *Rep. Math. Phys.* **48** (2001), 289-298.

    - M. Győry, Preserver problems and reflexivity problems on operator algebras and on function algebras. *Ph.D. Thesis*, University of Debrecen, 2003.
    - L. Molnár, Preserver problems on algebraic structures of linear operators and on function spaces. *Dissertation for the D.Sc. degree of the Hungarian Academy of Sciences*, 2005.
    - S. O. Kim, Automorphisms of Hilbert space effect algebras. *Linear Algebra Appl.* **402** (2005), 193–198.

2. M. Barczy and G. Pap, Gaussian measures on the affine group: uniqueness of embedding and supports. *Publ. Math. Debrecen* **63**(1-2) (2003), 221–234.

3. L. Molnár and M. Barczy, Linear maps on the space of all bounded observables preserving maximal deviation. *J. Funct. Anal.* **205** (2003), 380-400.

    - M. Győry, Preserver problems and reflexivity problems on operator algebras and on function algebras. *Ph.D. Thesis*, University of Debrecen, 2003.
    - L. Molnár, Preserver problems on algebraic structures of linear operators and on function spaces. *Dissertation for the D.Sc. degree of the Hungarian Academy of Sciences*, 2005.
    - M. A. Chebotar, K. Wen-Fong and L. Pjek-Hwee, Maps preserving zero Jordan products on Hermitian operators. *Illinois J. Math.* **49**(2) (2005), 445–452 (electronic).

4. M. Barczy and G. Pap, Connection between deriving bridges and radial parts from multidimensional Ornstein-Uhlenbeck processes. *Periodica Mathematica Hungarica* Vol. **50**(1-2) (2005), 47-60.

5. M. Barczy and G. Pap, Fourier transform of a Gaussian measure on the Heisenberg group, to appear in *Annales de L'Institut Henri Poincaré Probabilités et Statistiques.*

6. M. Barczy, A. Bendikov and G. Pap, Limit theorems on locally compact Abelian groups, submitted to *Mathematische Nachrichten.*

   - P. Becker-Kern, Explicit representation of roots on p-adic solenoids and non-uniqueness of embeddability into rational one-parameter subgroups. *Preprint,* URL: http://www.mathematik.uni-dortmund.de/lsiv/becker-kern/solenoid.pdf

7. M. Barczy and G. Pap, Weakly infinitely divisible measures on some locally compact Abelian groups, submitted to *Bulletin of the Australian Mathematical Society.*

   - P. Becker-Kern, Explicit representation of roots on p-adic solenoids and non-uniqueness of embeddability into rational one-parameter subgroups. *Preprint,* URL: http://www.mathematik.uni-dortmund.de/lsiv/becker-kern/solenoid.pdf

8. M. Barczy and G. Pap, Portmanteau theorem for unbounded measures, submitted to *Statistics & Probability Letters.*

List of talks of the author

I participated and gave a talk in the following international conferences with the following titles:

1. Convolution of Gauss measures on Heisenberg group, *XXI Seminar on Stability Problems of Stochastic Models,* Eger, Hungary, January 2001.

2. Convolution of Gauss measures on Heisenberg group, *The 12th European Young Statisticians Meeting,* Jánska Dolina, Slovakia, September 2001.

3. Brownian motions on the affine group, *International Conference on Probability Theory on Algebriac Topological Structures,* Bommerholz, Germany, March 2003.

4. By *"The research in pairs program (RiP)",* I was in Oberwolfach, Germany during August 2003 with Alexander Bendikov and Gyula Pap.

5. Central limit theorems in locally compact Abelian groups, *Conference on probability measures on groups and related structures on the occassion of Herbert Heyer's retirement,* Budapest, Hungary, August 2004.

6. Some questions of Markov bridges, *25th European Meeting of Statisticians,* Oslo, Norway, July 2005.

1. Bevezetés

Doktori értekezésünk téziseiben áttekintjük „*Some questions of probability theory on special topological groups*" című disszertációnk eredményeit. Először röviden bemutatjuk a tárgyalt témaköröket, majd főbb eredményeinket szerepeltetjük. Az értekezés öt fejezetből áll. Az első fejezetben a tématerület, a történeti háttér áttekintése és eredményeink összefoglalása szerepel. A második, harmadik, negyedik és ötödik fejezetben kaptak helyet eredményeink, melyek az [1], [2], [3], [4] és [5] cikkeinken alapulnak.

A második és harmadik fejezetben speciális nemkommutatív Lie-csoportokon, a Heisenberg-csoporton és az affin-csoporton értelmezett Gauss-mértékekkel kapcsolatos kérdéseket tárgyalunk. A negyedik fejezetben lokálisan kompakt Abel-csoportbeli értékű véletlen elemekből álló infinitezimális háromszögrendszerekre vonatkozóan bizonyítunk (centrális) határeloszlás-tételeket. Speciális esetekként a tórusz, a p-adikus egészek és a p-adikus szolenoid esetét tárgyaljuk. A negyedik fejezetben foglalkozunk a fenti csoportokon értelmezett gyengén korlátlanul osztható valószínűségi mértékek reprezentációjának kérdésével is. Az ötödik fejezetben a valószínűségi mértékek gyenge konvergenciájára vonatkozó portmanteau-tétel egy analógját bizonyítjuk be. Az ötödik fejezet a negyedik fejezet kiegészítéseként, segédleteként tekinthető.

A következőkben $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}_+$, illetve $\mathbb{R}$ jelöli a pozitív egész számok, az egész számok, a nemnegatív egész számok, illetve a valós számok halmazát. Topológikus-téren értelmezett mérték alatt a szóbanforgó topológikus-tér Borel-halmazaiból álló σ-algebrán adott mértéket értünk. Egy G topológikus-tér x elemének U Borel-környezetén G-nek olyan Borel-részhalmazát értjük, melyhez létezik olyan $\widetilde{U}$ nyílt részhalmaza G-nek, melyre $x \in \widetilde{U} \subset U$.

2. Gauss-mértékek a Heisenberg-csoporton

Lokálisan kompakt csoporton értelmezett valószínűségi mértékek Fourier-transzformáltja fontos szerepet játszik számos olyan problémában, mely ilyen csoportokon értelmezett valószínűségi mértékek gyenge konvergenciáját, illetve konvolúcióját vizsgálja. Lokálisan kompakt Abel-csoportok esetén tetszőleges korlátlanul osztható valószínűségi mérték Fourier-transzformáltjára létezik explicit formula (lásd, Parthasarathy [18]). A nemkommutatív csoportok esete sokkal bonyolultabb. Lie-csoportok esetén Tomé [20] javasolt egy eljárást a szóbanforgó Fourier-transzformáltak kiszámítására Feynman-féle pályaintegrálokat használva, tárgyalva módszerének fizikai motivációját is. Azonban Toménak csak nagyon speciális esetekben sikerült explicit képletet nyernie a szóbanforgó Fourier-transzformáltakra.

A második fejezetben a 3-dimenziós Heisenberg-csoporttal foglalkozunk. Ellátva $\mathbb{R}^3$-at a szokásos topológiával és a

$$(g_1, g_2, g_3)(h_1, h_2, h_3) = \Big(g_1 + h_1, g_2 + h_2, g_3 + h_3 + \frac{1}{2}(g_1 h_2 - g_2 h_1)\Big)$$

szorzással a 3-dimenziós Heisenberg-csoportot kapjuk, melyet $\mathbb{H}$-val jelölünk. Ismert, hogy $\mathbb{H}$ egy nilpotens Lie-csoport. A $\{\pi_{\pm\lambda} : \lambda > 0\}$ Schrödinger-reprezentációk $\mathbb{H}$ reprezentációi a $L^2(\mathbb{R})$ komplex Hilbert-tér unitér operátorainak csoportjában, melyek értelmezése

$$[\pi_{\pm\lambda}(g)u](x) := \mathsf{e}^{\pm i(\lambda g_3 + \sqrt{\lambda} g_2 x + \lambda g_1 g_2/2)} u(x + \sqrt{\lambda} g_1),$$

$g = (g_1, g_2, g_3) \in \mathbb{H}$, $u \in L^2(\mathbb{R})$ és $x \in \mathbb{R}$ esetén. Egy $\mathbb{H}$-n adott μ valószínűségi mérték Fourier-transzformáltja a $\pi_{\pm\lambda}$ Schrödinger-reprezentációban a $\widehat{\mu}(\pi_{\pm\lambda}) : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$,

$$\widehat{\mu}(\pi_{\pm\lambda})u := \int_{\mathbb{H}} \pi_{\pm\lambda}(g)u \, \mu(\mathsf{d}g), \qquad u \in L^2(\mathbb{R}),$$

korlátos lineáris operátor. A $\mathbb{H}$ Heisenberg-csoporton értelmezett valószínűségi mértékek $(\mu_t)_{t\geqslant 0}$ családját *folytonos konvolúciós félcsoport*nak nevezzük, ha $\mu_s * \mu_t = \mu_{s+t}$ minden $s, t \geqslant 0$ esetén és $\mu_t \xrightarrow{\mathsf{w}} \mu_0 = \delta_e$ amint $t \downarrow 0$, ahol δ_e az $e = (0, 0, 0) \in \mathbb{H}$ pontra koncentrálódó Dirac-mértéket, $\xrightarrow{\mathsf{w}}$ pedig a gyenge konvergenciát jelöli. Valószínűségi mértékek $(\mu_t)_{t\geqslant 0}$ konvolúciós félcsoportját *Gauss-félcsoport*nak nevezzük, ha $\lim_{t\downarrow 0} t^{-1}\mu_t(\mathbb{H} \setminus U) = 0$ az e pont összes U

Borel-környezetére. Azt mondjuk, hogy egy $\mathbb{H}$-n adott μ valószínűségi mérték *folytonosan beágyazható,* ha létezik olyan $\mathbb{H}$-n adott valószínűségi mértékekből álló $(\mu_t)_{t\geqslant 0}$ folytonos konvolúciós félcsoport, hogy $\mu_1 = \mu$. Egy $\mathbb{H}$-n adott valószínűségi mértéket *Gauss-mérték*nek nevezzük, ha folytonosan beágyazható egy Gauss-félcsoportba.

Explicit képletet adunk a $\mathbb{H}$ Heisenberg-csoporton értelmezett Gauss-mértékek Fourier-transzformáltjára a Schrödinger-reprezentációban. Ezen explicit képletet felhasználva szükséges és elegendő feltételeket származtatunk arra vonatkozóan, hogy mikor lesz két, a Heisenberg-csoporton értelmezett Gauss-mérték konvolúciója újra Gauss-mérték. Az alábbi tételt bizonyítjuk be (2.2.1 Tétel a disszertációban).

Tétel. *Legyenek μ' és μ'' Gauss-mértékek a $\mathbb{H}$ Heisenberg-csoporton. A $\mu' * \mu''$ konvolúció akkor és csak akkor Gauss-mérték $\mathbb{H}$-n, ha az alábbi feltételek valamelyike teljesül:*

(C1) *léteznek olyan Y_0', Y_0'', Y_1 és Y_2 elemek $\mathbb{H}$ Lie-algebrájában, hogy $[Y_1, Y_2] = 0$, és μ' tartója része $\exp\{Y_0' + \mathbb{R}\cdot Y_1 + \mathbb{R}\cdot Y_2\}$-nek, μ'' tartója pedig része $\exp\{Y_0'' + \mathbb{R}\cdot Y_1 + \mathbb{R}\cdot Y_2\}$-nek. (Ekvivalens módon, létezik olyan $\mathbb{G}$ kommutatív részcsoportja $\mathbb{H}$-nak, hogy μ' és μ'' tartója benne van $\mathbb{G}$ egy-egy ,,euklideszi”-mellékosztályában.)*

(C2) *létezik olyan $(\mu_t)_{t\geqslant 0}$ Gauss-félcsoport, $t', t'' \geqslant 0$ számok és ν Gauss-mérték $\mathbb{H}$-n, hogy ν tartója része $\mathbb{H}$ centrumának, és vagy $\mu' = \mu_{t'}$, $\mu'' = \mu_{t''} * \nu$ vagy $\mu' = \mu_{t'} * \nu$, $\mu'' = \mu_{t''}$ teljesül. (Ekvivalens módon, μ' és μ'' ugyanazon a Gauss-félcsoporton vannak modulo egy olyan Gauss-mérték, melynek tartója része $\mathbb{H}$ centrumának.)*

(Itt exp *az exponenciális leképezést jelöli $\mathbb{H}$ Lie-algebrájából $\mathbb{H}$-ba.)*

Kiderül, hogy Heisenberg-csoporton értelmezett Gauss-mértékek konvolúciója szinte sohasem Gauss-mérték. Megadjuk Gauss-mértékek konvolúciójának Fourier-transzformáltját abban az esetben is, mikor a konvolúció nem Gauss-mérték.

A második fejezet felépítése hasonló a Pap [16] cikkhez, mely a 3-dimenziós Heisenberg-csoporton értelmezett szimmetrikus Gauss-mértékeket vizsgálja. Tételeink a Pap [16] cikkben szereplő szimmetrikus Gauss-mértékekre vonatkozó megfelelő eredmények általánosításai.

A második fejezet eredményei elfogadott [2] cikkünkben jelennek meg.

3. Gauss-mértékek az affin-csoporton

Egy G lokálisan kompakt csoporton értelmezett μ valószínűségi mértéket folytonosan beágyazhatónak nevezünk, ha létezik olyan G-n értelmezett valószínűségi mértékekből álló $(\mu_t)_{t\geqslant 0}$ folytonos konvolúciós félcsoport, hogy $\mu_1 = \mu$.

Tetszőleges G lokálisan kompakt csoport esetén nem ismert, hogy egy G-n értelmezett, folytonosan beágyazható valószínűségi mérték beágyazó konvolúciós félcsoportja egyértelmű-e. Ha $(\mu_t)_{t\geqslant 0}$ és $(\nu_t)_{t\geqslant 0}$ a d-dimenziós euklideszi téren értelmezett valószínűségi mértékekből álló konvolúciós fécsoportok, úgy jólismert, hogy ha $\mu_1 = \nu_1$, úgy $\mu_t = \nu_t$ minden $t \geqslant 0$ esetén. Ugyanez az állítás igaz olyan lokálisan kompakt Abel-csoportok esetén is melyeknek nincsen nemtriviális kompakt részcsoportja (lásd, Heyer [13, Theorem 3.5.15]). Egyszerűen összefüggő nilpotens Lie-csoportok esetén stabilis, illetve szemi-stabilis félcsoportokba való egyértelmű beágyazhatóságot vizsgált Drisch és Gallardo [8], illetve Nobel [15], lásd továbbá a Hazod és Siebert [11, Section 2.6] részletes összefoglalót. Pap [17] megmutatta, hogy egy egyszerűen összefüggő nilpotens Lie-csoporton értelmezett Gauss-mérték egyértelműen ágyazható be egy Gauss-félcsoportba. A harmadik fejezetben ugyanezt az eredményt bizonyítjuk a 2-dimenziós affin-csoport esetén, mely nem nilpotens.

A 2-dimenziós affin-csoporton az alábbi mátrix-csoportot értjük

$$F := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : a \neq 0,\, b \in \mathbb{R} \right\}.$$

Ismert, hogy F egy Lie-csoport, mely nem nilpotens. Megmutatjuk, hogy egy affin-csoporton értelmezett Gauss-mérték egyértelműen ágyazható be egy Gauss-félcsoportba. Az alábbi tételt bizonyítjuk be (3.3.1 Tétel a disszertációban).

Tétel. *Legyenek* $(\mu_t)_{t\geqslant 0}$ *és* $(\nu_t)_{t\geqslant 0}$ *Gauss-félcsoportok az* F *affin-csoporton. Ha* $\mu_1 = \nu_1$, *akkor* $\mu_t = \nu_t$ *minden* $t \geqslant 0$ *esetén. Azaz egy affin-csoporton értelmezett Gauss-mérték egyértelműen ágyazható be egy Gauss-félcsoportba.*

Ezen tétel bizonyításának kiindulópontja, hogy egy affin-csoportbeli értékű Gauss–Lévy-folyamat kielégít egy sztochasztikus differenciálegyenletet, melynek megoldása is szerepel a disszertáció harmadik fejezetében. Továbbá az affin-csoporton értelmezett Gauss-mértékek tartójának teljes leírását is megadjuk, Siebert tartó-formuláját felhasználva.

A harmadik fejezet eredményei az [1] cikkünkben jelentek meg.

4. Határeloszlás-tételek LCA2-csoportokon

Legyen G egy második megszámlálható lokálisan kompakt Abel-csoport (LCA2-csoport) e egységelemmel. A csoportműveletet G-ben $+$ módon jelöljük. A negyedik fejezetben (centrális) határeloszlás-tételek bizonyításával foglalkozunk LCA2-csoportok esetén. Vizsgáljuk speciális LCA2-csoportokon értelmezett gyengén korlátlanul osztható valószínűségi mértékek olyan konstrukciójának megadását is, mely csak valós értékű valószínűségi változókat használ fel.

A határeloszlás-tételek témakörének fő kérdése a következőképpen fogalmazható meg egy G LCA2-csoportot alapul véve. Tekintsünk egy $\{X_{n,k} : n \in \mathbb{N}, k = 1, \dots, K_n\}$ G-beli értékű véletlen elemekből álló, soronként független háromszögrendszert, mely eleget tesz az infinitezimalitás feltételének, miszerint e minden U Borel-környezetére

$$\lim_{n\to\infty} \max_{1\leqslant k\leqslant K_n} \mathrm{P}(X_{n,k} \in G \setminus U) = 0.$$

Olyan feltételeket keresünk, melyek mellett a

$$\sum_{k=1}^{K_n} X_{n,k} \xrightarrow{\mathcal{D}} \mu \qquad \text{amint} \quad n \to \infty$$

eloszlásban való konvergencia teljesül valamilyen G-n értelmezett μ valószínűségi mértékkel. Tetszőleges G-beli értékű $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$ véletlen elemek és egy G-n értelmezett μ valószínűségi mérték esetén az $X_n \xrightarrow{\mathcal{D}} \mu$ jelölésen a $\mathrm{P}_{X_n} \xrightarrow{\mathsf{w}} \mu$ gyenge konvergenciát értjük, ahol P_{X_n} az X_n eloszlását jelöli minden $n \in \mathbb{N}$ esetén. Hasonlóan, tetszőleges G-beli értékű X véletlen elem esetén az $X \stackrel{\mathcal{D}}{=} \mu$ jelölésen azt értjük, hogy X eloszlása μ.

Jelölje $\mathcal{L}(G)$ a G-beli értékű véletlen elemekből álló soronként független, infinitezimális háromszögrendszerek lehetséges határértékeinek halmazát. Az alábbi kérdések merülnek fel természetes módon:

(P1) Hogyan paraméterezzük az $\mathcal{L}(G)$ halmazt, azaz hogyan adjunk meg bijekciót $\mathcal{L}(G)$ és valamilyen alkalmas $\mathcal{P}(G)$ paraméterhalmaz között?

(P2) Hogyan rendeljünk alkalmas q_n mennyiségeket az $\{X_{n,k} : k = 1, \ldots, K_n\}$, $n \in \mathbb{N}$, sorokhoz oly módon, hogy

$$\sum_{k=1}^{K_n} X_{n,k} \xrightarrow{\mathcal{D}} \mu \quad \Longleftrightarrow \quad q_n \to q,$$

teljesüljön, ahol $q \in \mathcal{P}(G)$ a μ határeloszláshoz tartozó paraméter, és a $q_n \to q$ konvergencia valamilyen alkalmas módon értendő?

A (P1) problémát teljes egészében megoldotta Parthasarathy (lásd, [18, Chapter IV, Corollary 7.1]). A (P2) probléma részleges megoldását találjuk Gaiser [10] disszertációjában. Gaiser csak bizonyos elégséges feltételeket bizonyított a $\sum_{k=1}^{K_n} X_{n,k} \xrightarrow{\mathcal{D}} \mu$ konvergencia teljesülésére vonatkozóan, csak az olyan eseteket tárgyalva, mikor μ-nek nem lehet nemdegenerált idempotens faktora, azaz G valamely kompakt részcsoportján adott nemdegenerált Haar-mérték nem fordulhat elő μ faktoraként. Szerepeltetjük Gaiser tételének [10, Satz 1.3.6] bizonyítását is, mert az nehezen hozzáférhető és nem teljes. Bingham [6] cikkében részletes áttekintését találjuk az LCA2-csoportokkal kapcsolatos határeloszlástételek témakörének.

Új eredményként szükséges és elegendő feltételeket bizonyítunk szimmetrikus-, illetve ún. Bernoulli-háromszögrendszerek sorösszegeinek eloszlásban való konvergenciájára vonatkozóan. Esetünkben a határeloszlás lehet valamilyen kompakt részcsoport nemdegenerált normalizált Haar-mértéke is. Bernoulli-háromszögrendszerek esetén a következő tételt bizonyítjuk be (4.5.1 Tétel a disszertációban).

Tétel. *Tekintsünk egy $x \in G$, $x \neq e$ elemet. Legyen $\{X_{n,k} : n \in \mathbb{N},\, k = 1, \ldots, K_n\}$ soronként független, azonos eloszlású G-beli értrékű véletlen elemekből álló háromszögrendszer, melyre $K_n \to \infty$ és*

$$\mathrm{P}(X_{n,k} = x) = p_n, \qquad \mathrm{P}(X_{n,k} = e) = 1 - p_n,$$

ahol $p_n \to 0$. Ekkor az $\{X_{n,k} : n \in \mathbb{N},\, k = 1, \ldots, K_n\}$ háromszögrendszer infinitezimális.

Ha λ egy nemnegatív valós szám, úgy

$$\sum_{k=1}^{K_n} X_{n,k} \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathsf{e}(\lambda\delta_x) \quad \iff \quad K_n\, p_n \to \lambda.$$

Ha G-nek az x elemet tartalmazó legszűkebb H zárt részcsoportja kompakt, úgy

$$\sum_{k=1}^{K_n} X_{n,k} \xrightarrow{\mathcal{D}} \omega_H \quad \iff \quad K_n\, p_n \to \infty.$$

(Itt $\mathsf{e}(\lambda\delta_x)$ a $\lambda\delta_x$ mértékhez tartozó összetett Poisson-mértéket jelöli (ahol δ_x az x pontba koncentrálódó Dirac-mérték), valamint ω_H a H részcsoport normalizált Haar-mértéke.)

Ezt követően speciális LCA2-csoportokat vizsgálunk: a tóruszt, a p-adikus egészek csoportját és a p-adikus szolenoidot.

A $\mathbb{T} := \{\mathsf{e}^{ix} : -\pi \leqslant x < \pi\}$ halmaz, felruházva a komplex számok szokásos szorzásával és a komplex számok halmazától örökölt topológiával, egy kompakt Abel-csoport, az ún. 1-dimenziós tórusz csoport.

Legyen p egy prímszám. A p-adikus számok csoportja a

$$\Delta_p := \big\{(x_0, x_1, \dots) : \quad x_j \in \{0, 1, \dots, p-1\} \quad \forall\ j \in \mathbb{Z}_+\big\}$$

halmaz, ahol tetszőleges $x, y \in \Delta_p$ esetén a $z := x + y \in \Delta_p$ összeg az alábbi kongruenciák által egyértelműen meghatározott:

$$\sum_{j=0}^{d} z_j p^j \equiv \sum_{j=0}^{d} (x_j + y_j) p^j \qquad \bmod p^{d+1}, \qquad \forall\ d \in \mathbb{Z}_+.$$

Minden $r \in \mathbb{Z}_+$ esetén legyen

$$\Lambda_r := \{x \in \Delta_p : \quad x_j = 0 \quad \forall\ j \leqslant r-1\}.$$

Az $\{x + \Lambda_r : x \in \Delta_p,\, r \in \mathbb{Z}_+\}$ alakú halmazok nyílt szubbázisát alkotják egy topológiának Δ_p-n. A fenti művelettel és topológiával Δ_p egy kompakt, teljesen széteső Abel-csoport.

A p-adikus szolenoid a következő részcsoportja $\mathbb{T}^\infty$-nek:

$$S_p := \big\{(y_0, y_1, \dots) \in \mathbb{T}^\infty : \quad y_j = y_{j+1}^p, \quad \forall\ j \in \mathbb{Z}_+\big\},$$

felruházva a $\mathbb{T}^\infty$ lokálisan kompakt csoporttól örökölt topológiával. Ekkor S_p egy kompakt Abel-csoport.

Vizsgáljuk azt a kérdést, hogy milyen következményei vannak Gaiser tételének és az általunk bizonyított szimmetrikus-, illetve Bernoulli-háromszögrendszerekre vonatkozó határeloszlás-tételeknek az előbb említett LCA2-csoportokon. Csak egyik eredményünket említjük (4.7.1 Tétel a disszertációban).

Tétel. *Legyen* $\{X_{n,k} : n \in \mathbb{N},\, k = 1, \dots, K_n\}$ *egy* Δ_p*-beli értékű véletlen elemekből álló soronként független háromszögrendszer. Tegyük fel, hogy létezik olyan* η *Lévy-mérték* Δ_p*-n, melyre*

(i) $\max\limits_{1 \leqslant k \leqslant K_n} \mathrm{P}\Big(\big((X_{n,k})_0, \dots, (X_{n,k})_d\big) \neq 0\Big) \to 0$ *amint* $n \to \infty$ *minden* $d \in \mathbb{Z}_+$ *esetén,*

(ii) $\displaystyle\sum_{k=1}^{K_n} \mathrm{P}\big((X_{n,k})_0 = \ell_0, \dots, (X_{n,k})_d = \ell_d\big)$
$\to \eta(\{x \in \Delta_p : x_0 = \ell_0, \dots, x_d = \ell_d\})$ *amint* $n \to \infty$ *minden* $d \in \mathbb{Z}_+$, $\ell_0, \dots, \ell_d \in \{0, \dots, p-1\}$, $(\ell_0, \dots, \ell_d) \neq 0$ *esetén.*

Ekkor az $\{X_{n,k} : n \in \mathbb{N},\, k = 1, \dots, K_n\}$ *háromszögrendszer infinitezimális és*

$$\sum_{k=1}^{K_n} X_{n,k} \xrightarrow{\mathcal{D}} \pi_{\eta,\, g_{\Delta_p}} \qquad \textit{amint} \ \ n \to \infty.$$

(Itt $\pi_{\eta,\, g_{\Delta_p}}$ *az* η *Lévy-mértékhez és* g_{Δ_p} *lokális belső szorzáshoz tartozó általánosított Poisson-mértéket jelöli* Δ_p*-n.)*

Határeloszlás-tételek bizonyításán kívül foglalkozunk még a negyedik fejezetben az előbb említett LCA2-csoportokon értelmezett gyengén korlátlanul osztható valószínűségi mértékek olyan konstrukciójának megadásával is, mely csak valós értékű valószínűségi változókat használ. Tekintsünk egy G-n értelmezett μ valószínűségi mértéket és egy $\{X_{n,k} : n \in \mathbb{N}, k = 1, \dots, K_n\}$ soronként független G-beli értékű véletlen elemekből álló infinitezimális háromszögrendszert. Ha ezen háromszögrendszer $\sum_{k=1}^{K_n} X_{n,k}$ sorösszegei eloszlásban konvergálnak μ-höz, úgy μ szükségszerűen gyengén korlátlanul osztható, lásd, pl., Parthasarathy [18, Chapter IV, Theorem 5.2]. Továbbá Parthasarathy [18, Chapter IV, Corollary 7.1] szerint tetszőleges G-n értelmezett gyengén korlátlanul osztható valószínűségi mérték előállítható G-n értelmezett Haar-mértékek, Dirac-mértékek, szimmetrikus Gauss-mértékek és általánosított Poisson-mértékek segítségével.

A negyedik fejezetben speciális esetekként a tóruszt, a p-adikus egész számok csoportját és a p-adikus szolenoidot tekintjük. Mindhárom csoport esetén először egy φ mérhető homomorfizmust keresünk, mely egy alkalmas Abel-csoportot (ami $\mathbb{R}$ bizonyos részcsoportjainak szorzata) képez a szóbanforgó topologikus csoportra. Ezután tekintve egy tetszőleges μ gyengén korlátlanul osztható valószínűségi mértéket a szóbanforgó topologikus csoporton (nemdegenerált idempotens faktor nélkülit a p-

adikus szolenoid esetén), olyan valós értékű $Z_0, Z_1, \ldots$ valószínűségi változókat keresünk, hogy $\varphi(Z_0, Z_1, \ldots)$ eloszlása μ legyen.

Megjegyezzük, hogy eredményeink speciális eseteként új előállítását kapjuk a p-adikus egészek csoportján, illetve a p-adikus szolenoidon értelmezett normalizált Haar-mértéknek. A p-adikus szolenoid esetén az alábbi eredményt bizonyítjuk, mely a disszertáció 4.8.4 Tételének egy részállítása.

Tétel. *Ha $U_0, U_1, \ldots$ olyan független, valós értékű valószínűségi változók, hogy U_0 egyenletes eloszlású $[0, 2\pi]$-n, és $U_1, U_2, \ldots$ egyenletes eloszlásúak a $\{0, 1, \ldots, p-1\}$ halmazon, úgy*

$$\varphi(U_0, U_1, \ldots) \stackrel{\mathcal{D}}{=} \omega_{S_p},$$

ahol $\varphi : \mathbb{R} \times \mathbb{Z}^\infty \to S_p$,

$$\varphi(y_0, y_1, y_2, \ldots)$$
$$:= \left(\mathrm{e}^{iy_0}, \mathrm{e}^{i(y_0+2\pi y_1)/p}, \mathrm{e}^{i(y_0+2\pi y_1+2\pi y_2 p)/p^2}, \mathrm{e}^{i(y_0+2\pi y_1+2\pi y_2 p+2\pi y_3 p^2)/p^3}, \ldots\right),$$

$(y_0, y_1, y_2, \ldots) \in \mathbb{R}\times\mathbb{Z}^\infty$ esetén, és ω_{S_P} a normalizált Haar-mérték S_p-n.

A p-adikus szolenoidon adott normalizált Haar-mérték egy másik konstrukciója található a Chistyakov [7, Section 3] cikkben. Az ottani konstrukció Hausdorff-mértékeken alapszik és elég bonyolult, míg a mi előállításunk valószínűségi módszereket használ es tükrözi a p-adikus szolenoid struktúráját.

A negyedik fejezet eredményeit a közlésre benyújtott [3] és [4] cikkeink tartalmazzák.

5. Portmanteau-tétel nemkorlátos mértékekre

Metrikus téren értelmezett valószínűségi mértékek gyenge konvergenciája nagyon fontos szerephez jut a valószínűségszámításban. A jólismert *portmanteau-tétel*, mely A. D. Alexandrofftól származik (lásd, pl., Dudley [9, Theorem 11.1.1]) jól használható ekvivalens feltételeket fogalmaz meg valószínűségi mértékek gyenge konvergenciájára vonatkozóan. Ezen ekvivalens feltételek közül bármelyik szolgálhatna a gyenge konvergencia definíciójaként. Meerschaert és Scheffler [14] könyvének 1.2.13 Állítása a portmanteau-tétel egy analógja $\mathbb{R}^d$-n értelmezett korlátos mértékekre. Ugyanezen könyv 1.2.19 Állítása speciális, $\mathbb{R}^d$-n értelmezett nemkorlátos mértékekre fogalmazza meg a portmanteau-tétel egy analógját, olyan kiterjesztett valós értékű mértékekre, melyek végesek a $0 \in \mathbb{R}^d$ pont tetszőleges Borel-környezetének komplementerén. Az ötödik fejezetben Meerschaert és Scheffler [14] könyve 1.2.19 Állítását újrafogalmazzuk, kiegészítve új ekvivalens feltételekkel. Az alábbi tételt bizonyítjuk be (5.2.1 Tétel a disszertációban).

Tétel. *Legyen (X, d) egy metrikus tér, x_0 egy rögzített pontja X-nek. Legyenek továbbá η_n, $n \in \mathbb{Z}_+$, olyan mértékek X-en, hogy $\eta_n(X \setminus U) < \infty$ minden $U \in \mathcal{N}_{x_0}$ és $n \in \mathbb{Z}_+$ esetén. Ekkor az alábbi állítások ekvivalensek:*

(i) $\int_{X\setminus U} f \,\mathsf{d}\eta_n \to \int_{X\setminus U} f \,\mathsf{d}\eta_0$ *minden* $f \in \mathcal{C}(X)$ *és minden* $U \in \mathcal{N}_{x_0}$, $\eta_0(\partial U) = 0$ *esetén,*

(ii) $\eta_n|_{X\setminus U} \xrightarrow{\mathsf{w}} \eta_0|_{X\setminus U}$ *minden* $U \in \mathcal{N}_{x_0}$, $\eta_0(\partial U) = 0$ *esetén,*

(iii) $\eta_n(X \setminus U) \to \eta_0(X \setminus U)$ *minden* $U \in \mathcal{N}_{x_0}$, $\eta_0(\partial U) = 0$ *esetén,*

(iv) $\int_X f \,\mathsf{d}\eta_n \to \int_X f \,\mathsf{d}\eta_0$ *minden* $f \in \mathcal{C}_{x_0}(X)$ *esetén,*

(v) $\int_X f \,\mathsf{d}\eta_n \to \int_X f \,\mathsf{d}\eta_0$ *minden* $f \in \mathrm{BL}_{x_0}(X)$ *esetén,*

(vi) *az alábbi egyenlőtlenségek igazak:*

(a) x_0 *minden* U *nyílt környezetére*

$$\limsup_{n\to\infty} \eta_n(X \setminus U) \leqslant \eta_0(X \setminus U),$$

(b) x_0 *minden* V *zárt környezetére*

$$\liminf_{n\to\infty} \eta_n(X \setminus V) \geqslant \eta_0(X \setminus V).$$

(Itt $\mathcal{N}_{x_0}$ az x_0 pont Borel-környezeteiből álló halmazt, $\mathcal{C}(X)$, $\mathcal{C}_{x_0}(X)$ és $\mathrm{BL}_{x_0}(X)$ az összes X-en értelmezett, valós értékű korlátos folytonos függvények halmazát, az olyan $\mathcal{C}(X)$-beli függvények halmazát, melyek eltünnek x_0 valamely Borel-környezetén, illetve az összes olyan valós értékű korlátos Lipschitz-függvény halmazát jelöli, melyek eltünnek x_0 valamely Borel-környezetén. A $\xrightarrow{\mathsf{w}}$ jelölés pedig gyenge konvergenciát jelent.)

Tételünk bizonyítása az eredeti portmanteau-tétel (Dudley [9, Theorem 11.1.1]) bizonyításának menetét követi, s bizonyításunk különbözik Meerschaert és Scheffler [14] könyve 1.2.19 Állításának bizonyításától.

Megjegyezzük, hogy a fejezetben ellenpéldát adva megmutatjuk, hogy a Meerschaert és Scheffler [14] könyv 1.2.19 Állításában és 1.2.13 Állításában szereplő (c) és (d) részek ekvivalenciája nem teljesül.

Az ötödik fejezet eredményeit a közlésre benyújtott [5] cikkünk tartalmazza.

Irodalomjegyzék

[1] M. Barczy and G. Pap, Gaussian measures on the affine group: uniqueness of embedding and supports. *Publ. Math. Debrecen* **63**(1-2) (2003), 221–234.

[2] M. Barczy and G. Pap, Fourier transform of a Gaussian measure on the Heisenberg group, megjelenik az *Annales de L'Institut Henri Poincaré Probabilités et Statistiques* folyóiratban.

[3] M. Barczy, A. Bendikov and G. Pap, Limit theorems on locally compact Abelian groups, benyújtva a *Mathematische Nachrichten* folyóirathoz.

[4] M. Barczy and G. Pap, Weakly infinitely divisible measures on some locally compact Abelian groups, benyújtva a *Bulletin of the Australian Mathematical Society* folyóirathoz.

[5] M. Barczy and G. Pap, Portmanteau theorem for unbounded measures, benyújtva a *Statistics & Probability Letters* folyóirathoz.

[6] M. S. Bingham, Central limit theory on locally compact abelian groups. In: Probability measures on groups and related structures, XI. Proceedings Oberwolfach, 1994, pp. 14–37, World Sci. Publishing, NJ, 1995.

[7] D. V. Chistyakov, Fractal geometry of images of continuous embeddings of p-adic numbers and solenoids into Euclidean spaces. *Theoret. and Math. Phys.* **109**(3) (1996), 1495–1507.

[8] T. Drisch and L. Gallardo, Stable laws on the Heisenberg groups. In: H. Heyer ed., Probability Measures on Groups VII. Proceedings, Oberwolfach 1983, *Lecture Notes in Math.* **1064**, pp. 56–79, Springer, Berlin–Heidelberg–New York, 1984.

[9] R. M. Dudley, *Real analysis and probability.* The Wadsworth & Brooks Cole Mathematics Series, Pacific Grove, 1989.

[10] J. Gaiser, Konvergenz stochastischer prozesse mit werten in einer lokalkompakten Abelschen gruppe. *Ph.D. Thesis*, Universität Tübingen, 1994.

[11] W. Hazod and E. Siebert, *Stable probability measures on Euclidean spaces and on locally compact groups. Structural properties and limit theorems.* Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2001.

[12] E. Hewitt and K. A. Ross, *Abstract harmonic analysis I.* Springer, 1963.

[13] H. Heyer, *Probability measures on locally compact groups.* Springer, 1977.

[14] M. M. Meerschaert and H.-P. Scheffler, *Limit distributions for sums of independent random vectors. Heavy tails in theory and practice.* John Wiley & Sons, Inc., New York, 2001.

[15] S. Nobel, Limit theorems for probability measures on simply connected nilpotent Lie groups. *J. Theoret. Probab.* **4** (1991), 261-284.

[16] G. Pap, Fourier transform of symmetric Gauss measures on the Heisenberg group. *Semigroup Forum* **64** (2002), 130–158.

[17] G. Pap, Uniqueness of embedding into a Gaussian semigroup on a nilpotent Lie group. *Arch. Math.* **62** (1994), 282–288.

[18] K. R. Parthasarathy, *Probability measures on metric spaces.* Academic Press, New York, 1967.

[19] E. Siebert, Absolute continuity, singularity, and supports of Gauss semigroups on a Lie group. *Monatsh. Math.* **93** (1982), 239-253.

[20] W. Tomé, *The representation independent propagator for general Lie groups.* World Scientific, Singapore, 1998.

Tudományos publikációk és hivatkozások jegyzéke

1. M. Barczy and M. Tóth, Local automorphisms of the sets of states and effects on a Hilbert space. *Rep. Math. Phys.* **48** (2001), 289-298.

   - M. Győry, Preserver problems and reflexivity problems on operator algebras and on function algebras. *Ph.D. Thesis*, University of Debrecen, 2003.
   - L. Molnár, Preserver problems on algebraic structures of linear operators and on function spaces. *Dissertation for the D.Sc. degree of the Hungarian Academy of Sciences*, 2005.
   - S. O. Kim, Automorphisms of Hilbert space effect algebras. *Linear Algebra Appl.* **402** (2005), 193–198.

2. M. Barczy and G. Pap, Gaussian measures on the affine group: uniqueness of embedding and supports. *Publ. Math. Debrecen* **63**(1-2) (2003), 221–234.

3. L. Molnár and M. Barczy, Linear maps on the space of all bounded observables preserving maximal deviation. *J. Funct. Anal.* **205** (2003), 380-400.

   - M. Győry, Preserver problems and reflexivity problems on operator algebras and on function algebras. *Ph.D. Thesis*, University of Debrecen, 2003.
   - L. Molnár, Preserver problems on algebraic structures of linear operators and on function spaces. *Dissertation for the D.Sc. degree of the Hungarian Academy of Sciences*, 2005.
   - M. A. Chebotar, K. Wen-Fong and L. Pjek-Hwee, Maps preserving zero Jordan products on Hermitian operators. *Illinois J. Math.* **49**(2) (2005), 445–452 (electronic).

4. M. Barczy and G. Pap, Connection between deriving bridges and radial parts from multidimensional Ornstein-Uhlenbeck processes. *Periodica Mathematica Hungarica* Vol. **50**(1-2) (2005), 47-60.

5. M. Barczy and G. Pap, Fourier transform of a Gaussian measure on the Heisenberg group, megjelenik az *Annales de L'Institut Henri Poincaré Probabilités et Statistiques* folyóiratban.

6. M. Barczy, A. Bendikov and G. Pap, Limit theorems on locally compact Abelian groups, benyújtva a *Mathematische Nachrichten* folyóirathoz.

   - P. Becker-Kern, Explicit representation of roots on p-adic solenoids and non-uniqueness of embeddability into rational one-parameter subgroups. *Preprint,* URL: http://www.mathematik.uni-dortmund.de/lsiv/becker-kern/solenoid.pdf

7. M. Barczy and G. Pap, Weakly infinitely divisible measures on some locally compact Abelian groups, benyújtva a *Bulletin of the Australian Mathematical Society* folyóirathoz.

   - P. Becker-Kern, Explicit representation of roots on p-adic solenoids and non-uniqueness of embeddability into rational one-parameter subgroups. *Preprint,* URL: http://www.mathematik.uni-dortmund.de/lsiv/becker-kern/solenoid.pdf

8. M. Barczy and G. Pap, Portmanteau theorem for unbounded measures, benyújtva a *Statistics & Probability Letters* folyóirathoz.

Előadások jegyzéke

Az alábbi nemzetközi konferenciákon, az alábbi előadásokkal vettem részt:

1. Convolution of Gauss measures on Heisenberg group, *XXI Seminar on Stability Problems of Stochastic Models,* Eger, Hungary, January 2001.

2. Convolution of Gauss measures on Heisenberg group, *The 12th European Young Statisticians Meeting,* Jánska Dolina, Slovakia, September 2001.

3. Brownian motions on the affine group, *International Conference on Probability Theory on Algebriac Topological Structures*, Bommerholz, Germany, March 2003.

4. A *"The research in pairs (RiP)"*-program keretében 2003. augusztusát Oberwolfachban (Németország) töltöttem Alexander Bendikovval és Pap Gyulával.

5. Central limit theorems in locally compact Abelian groups, *Conference on probability measures on groups and related structures on the occassion of Herbert Heyer's retirement,* Budapest, Hungary, August 2004.

6. Some questions of Markov bridges, *25th European Meeting of Statisticians,* Oslo, Norway, July 2005.