



Az

**Inequalities on two variable
Gini and Stolarsky means**

**(Egyenlőtlenségek kétváltozós
Gini és Stolarsky közepekre)**

című doktori (Ph.D.) értekezés tézisei

Czinder Péter

**DEBRECENI EGYETEM
TERMÉSZETTUDOMÁNYI KAR**

Debrecen, 2005

Introduction

There is an extended literature concerning the so-called Gini and Stolarsky means. (Their definitions were given first in [Gin38] and [Sto75], respectively.) These two variable homogenous means play important roles both in the theory of means and in the application of inequalities in various branches of mathematics.

We recall now the definition of these means. If x, y are positive numbers, then their Gini mean is defined by:

$$G_{a,b}(x, y) = \begin{cases} \left(\frac{x^a + y^a}{x^b + y^b} \right)^{\frac{1}{a-b}}, & \text{if } a \neq b, \\ \exp \left(\frac{x^a \log x + y^a \log y}{x^a + y^a} \right), & \text{if } a = b, \end{cases}$$

while their Stolarsky mean is the following:

$$S_{a,b}(x, y) = \begin{cases} \left(\frac{b(x^a - y^a)}{a(x^b - y^b)} \right)^{\frac{1}{a-b}}, & \text{if } (a-b)ab \neq 0, x \neq y, \\ \exp \left(-\frac{1}{a} + \frac{x^a \log x - y^a \log y}{x^a - y^a} \right), & \text{if } a = b \neq 0, x \neq y, \\ \left(\frac{x^a - y^a}{a(\log x - \log y)} \right)^{\frac{1}{a}}, & \text{if } a \neq 0, b = 0, x \neq y, \\ \sqrt{xy}, & \text{if } a = b = 0, \\ x, & \text{if } x = y. \end{cases}$$

This setting is a special case of a more general one. Namely, the above definition of the Gini mean can be extended in a natural way for any number of positive variables, while the Stolarsky – or, as it is also known in the literature: the difference mean – of n ($n \in \mathbb{N}$) positive numbers can be given by divided differences.

The power mean with exponent p of the positive numbers x and y can be obtained both as $G_{0,p}(x, y)$ and $S_{2p,p}(x, y)$. That is, the power means are included in both classes of means. Moreover, as it has recently been proved by Alzer and Ruscheweyh [AR01], the class of power means forms exactly the intersection of the classes of Gini and Stolarsky means.

In particular, $S_{2,1}$, $S_{0,0}$, and $S_{-2,-1}$ are the *arithmetic*, *geometric*, and *harmonic* means, respectively. The special settings $S_{1,0}$ and $S_{1,1}$ are called *logarithmic* and *identric* means.

The Gini and Stolarsky means provide us a large field for research. In my thesis I tried to collect and systematize the results of the previous years, obtained under the supervision of Professor Zsolt Páles. I put in the center of my studies the various comparison theorems for the Gini and/or Stolarsky means, and the generalized Minkowski inequalities regarding them. (This activity can

be followed with the help of [CzP00], [CzP03], [CzP*a], [CzP05], [CzP04], [Czin05], [Czin05b]).

My thesis consists of three main parts. Chapters 2, 3 and 4 serve as preliminaries for the rest of my work. In Chapters 5, 6 and 7 I present the results, obtained in the field of comparison of the Gini and/or Stolarsky means. Finally, Chapters 8, 9 and 10 deal with the generalized Minkowski-type inequalities.

In the cases when a property holds both for the Gini and the Stolarsky means, the notation $M_{a,b}$ (or sometimes simply: M) will be applied. If an additional specification is needed, $M = G$ stands, for instance, for the fact that the statement concerns only the Gini means.

1. Preliminaries

To handle (state and prove) our propositions, some preparations were needed. First of all, I collected some well-known, but important identities. Moreover, for sake of the organic treatment, I introduced the functions $\mathcal{E}$, $\mathcal{M}$ and $\mathcal{L}$, which play the key roles in the comparison theorems, defined by

$$\mathcal{E}(a, b) := \begin{cases} \frac{|a| - |b|}{a - b}, & \text{if } a \neq b, \\ \text{sign}(a), & \text{if } a = b, \end{cases} \quad \mathcal{M}(a, b) := \begin{cases} \min\{a, b\}, & \text{if } a, b \geq 0, \\ 0, & \text{if } ab < 0, \\ \max\{a, b\}, & \text{if } a, b \leq 0 \end{cases}$$

and

$$\mathcal{L}(a, b) := \begin{cases} \frac{a - b}{\log(a/b)}, & \text{if } 0 < ab \text{ and } a \neq b, \\ a, & \text{if } 0 < ab \text{ and } a = b, \\ 0, & \text{if } ab \leq 0. \end{cases}$$

Their basic properties (for example, continuity, convexity, monotonicity) were also examined in the thesis.

Many of the inequalities for the Gini and Stolarsky means can be deduced from certain asymptotic properties. Therefore, I listed some of the more important asymptotic properties. A few of them could be formulated in a uniform way. In this field we obtained that for any real numbers a and b the following statements hold:

THEOREM. [CzP00],[CzP05]

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0+} G_{a,b}(x, y) &= \begin{cases} y, & \text{if } \min\{a, b\} > 0, \\ y \cdot 2^{-\frac{1}{\max\{a,b\}}}, & \text{if } \min\{a, b\} = 0 \& \max\{a, b\} > 0, \\ 0, & \text{if } \min\{a, b\} < 0 \text{ or } (a, b) = (0, 0), \end{cases} \\ \lim_{x \rightarrow 0+} S_{a,b}(x, y) &= \begin{cases} y \cdot e^{-\frac{1}{\mathcal{L}(a,b)}}, & \text{if } \min\{a, b\} > 0, \\ 0, & \text{if } \min\{a, b\} \leq 0, \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lim_{z \rightarrow \infty} (M_{a,b}(x+z, y+z) - z) &= \frac{x+y}{2} \quad (x, y \in \mathbb{R}_+), \\
\lim_{z \rightarrow \infty} (G_{a,b}(x, y+z) - z) &= y, \quad (x, y \in \mathbb{R}_+), \\
\lim_{t \rightarrow 1} \frac{M_{a,b}(t, 1) - \frac{t+1}{2}}{(t-1)^2} &= \begin{cases} \frac{a+b-1}{8}, & \text{if } M = G, \\ \frac{a+b-3}{24}, & \text{if } M = S, \end{cases} \\
\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\log M_{a,b}(e^t, e^{-t})}{t} &= \mathcal{E}(a, b), \\
\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\log \frac{t + \log G_{a,b}(e^t, e^{-t})}{t - \log G_{a,b}(e^t, e^{-t})}}{2t} &= \mathcal{M}(a, b),
\end{aligned}$$

moreover, if $a, b > 1$, then

$$\lim_{z \rightarrow \infty} (G_{a,b}(x, y+z) - z) = y. \quad (x, y \in \mathbb{R}_+).$$

As an other big unit of the preliminary results, some versions of the Hermite-Hadamard inequality were presented. We introduced the concept of the odd and even functions with respect to a point. Namely, we say a function $f : \mathcal{J} \rightarrow \mathbb{R}$ to be *odd with respect to the point m* , if $t \mapsto f(m+t) - f(m)$ is odd, that is,

$$f(m-t) + f(m+t) = 2f(m) \quad (t \in (\mathcal{J} - m) \cap (m - \mathcal{J})),$$

while it is said to be *even with respect to the point m* , if $t \mapsto f(m+t)$ is even, that is,

$$f(m-t) = f(m+t) \quad (t \in (\mathcal{J} - m) \cap (m - \mathcal{J})).$$

The main "Hermite-Hadamard-type" result is involved in the following theorem:

THEOREM. [Czin05] *Let the function $f : \mathcal{J} \rightarrow \mathbb{R}$ be odd with respect to the element $m \in \bar{\mathcal{J}}$, $\varrho : \mathcal{J} \rightarrow \mathbb{R}$ a positive, locally integrable weight function, which is even with respect to m , and let $[a, b]$ be a subinterval of $\mathcal{J}$ with non-empty interior. Then the following statement is valid:*

If f is convex over the interval $\mathcal{J} \cap (-\infty, m]$ and concave over $\mathcal{J} \cap [m, \infty)$, then

$$\begin{aligned}
f(M_\varrho(a, b)) &\begin{matrix} \geq \\ (\leq) \end{matrix} \frac{1}{\int_a^b \varrho(x) dx} \int_a^b f(x) \varrho(x) dx \\
&\begin{matrix} \geq \\ (\leq) \end{matrix} \frac{b - M_\varrho(a, b)}{b - a} f(a) + \frac{M_\varrho(a, b) - a}{b - a} f(b),
\end{aligned}$$

if $\frac{a+b}{2} \begin{matrix} \geq \\ (\leq) \end{matrix} m$. The reversed inequalities are valid if f is concave over the interval $\mathcal{J} \cap (-\infty, m]$ and convex over $\mathcal{J} \cap [m, \infty)$.)

If, in particular, $\varrho(x) \equiv 1$, we obtain the "un-weighted" version of the previous theorem. As it turns out, this statement can perfectly be applied for the function

$$\mu_{x,y} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad t \mapsto \log M_{t,t}(x, y).$$

In this way, we can provide the following estimate for $M_{a,b}$:

THEOREM. [CzP04] *Let a, b be real numbers so that $a + b \begin{smallmatrix} \geq \\ \leq \end{smallmatrix} 0$. Then*

$$M_{\frac{a+b}{2}, \frac{a+b}{2}}(x, y) \begin{smallmatrix} \geq \\ \leq \end{smallmatrix} M_{a,b}(x, y) \begin{smallmatrix} \geq \\ \leq \end{smallmatrix} \sqrt{M_{a,a}(x, y)M_{b,b}(x, y)}$$

holds for any positive numbers x, y .

This inequality could be improved by means of the following version of the Hermite-Hadamard inequality:

THEOREM. [CzP05] *Let $f : \mathcal{J} \rightarrow \mathbb{R}$ be symmetric with respect to an element $m \in \bar{\mathcal{J}}$, furthermore, suppose that f is increasing. Then, for any interval $[a, b] \subset \mathcal{J}$,*

$$\left((b-m)^+ - (a-m)^+ \right) f(b) + \left((a-m)^- - (b-m)^- \right) f(a) \begin{smallmatrix} \geq \\ \leq \end{smallmatrix} \int_a^b f(x) dx$$

holds if $\frac{a+b}{2} \begin{smallmatrix} \geq \\ \leq \end{smallmatrix} m$.

Consequently,

THEOREM. [CzP05] *If $b < a$ and $a + b \begin{smallmatrix} \geq \\ \leq \end{smallmatrix} 0$, then, for all positive x, y ,*

$$\left(M_{a,a}(x, y) \right)^{\frac{a^+ - b^+}{a-b}} \left(M_{b,b}(x, y) \right)^{\frac{b^- - a^-}{a-b}} \begin{smallmatrix} \geq \\ \leq \end{smallmatrix} M_{a,b}(x, y),$$

therefore, we get the following estimates:

THEOREM. [CzP05] *For all real a, b with $b \leq a$, $(a, b) \neq (0, 0)$ and for all positive x, y ,*

- (i) $\left(M_{a,a}(x, y) \right)^{\frac{1}{2}} \left(M_{b,b}(x, y) \right)^{\frac{1}{2}} \leq M_{a,b}(x, y) \leq M_{a,a}(x, y)$, if $0 \leq b \leq a$,
- (ii) $\left(M_{a,a}(x, y) \right)^{\frac{1}{2}} \left(M_{b,b}(x, y) \right)^{\frac{1}{2}} \leq M_{a,b}(x, y)$
 $\leq \left(M_{a,a}(x, y) \right)^{\frac{a}{a-b}} \left(M_{b,b}(x, y) \right)^{\frac{-b}{a-b}}$, if $0 \leq -b \leq a$,
- (iii) $\left(M_{a,a}(x, y) \right)^{\frac{1}{2}} \left(M_{b,b}(x, y) \right)^{\frac{1}{2}} \geq M_{a,b}(x, y)$
 $\geq \left(M_{a,a}(x, y) \right)^{\frac{a}{a-b}} \left(M_{b,b}(x, y) \right)^{\frac{-b}{a-b}}$, if $0 \leq a \leq -b$,
- (iv) $\left(M_{a,a}(x, y) \right)^{\frac{1}{2}} \left(M_{b,b}(x, y) \right)^{\frac{1}{2}} \geq M_{a,b}(x, y) \geq M_{b,b}(x, y)$, if $b \leq a \leq 0$.

2. Comparison theorems

After these preparations, we were able to reformulate the known comparison theorems, both for the Gini and the Stolarsky means. (The original versions of these theorems – and their proofs – can be read in [Pal88c], [LSh83] and [Pal88b].)

For the Gini means, the main result is the following:

THEOREM. [CzP*a] *Let $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ be arbitrary parameters. Then the comparison inequality*

$$G_{a,b}(x, y) \leq G_{c,d}(x, y)$$

holds for all positive x and y if and only if a, b, c, d satisfy the following three conditions:

$$a + b \leq c + d, \quad \mathcal{E}(a, b) \leq \mathcal{E}(c, d), \quad \mathcal{M}(a, b) \leq \mathcal{M}(c, d).$$

Nevertheless originally we proved this theorem in a completely different way, in my thesis I presented a method, builded on the above-mentioned preliminaries. (In the case of the Stolarsky means, however, the "original" way was followed.) Having introduced the function

$$\mathcal{G}_{x,y} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad (a, b) \mapsto \mathcal{G}_{x,y}(a, b) := G_{a,b}(x, y),$$

we had that

THEOREM. [CzP05] *Suppose that $b \leq a$ and let the positive numbers x and y be fixed. The directional derivative of the function $\mathcal{G}_{x,y}$ in direction $d = (d_1, d_2)$ is nonnegative at the point (a, b) if and only if*

$$\begin{cases} (G_{a,a}(x, y))^{d_1} (G_{b,b}(x, y))^{-d_2} \geq (G_{a,b}(x, y))^{d_1-d_2}, & \text{if } a \neq b, \\ d_1 + d_2 \geq 0, & \text{if } a = b. \end{cases}$$

As a consequence of the previous statement, we obtain the following corollary:

THEOREM. [CzP05] *For $b \leq a$ with $(a, b) \neq (0, 0)$, define the vectors $u_{a,b}$ and $v_{a,b}$ in the following way:*

$$u_{a,b} = \begin{cases} (1, 0), & \text{if } 0 \leq b \leq a, \\ (1, \frac{b}{a}), & \text{if } 0 < -b < a, \\ (1, -1), & \text{if } 0 < a \leq -b, \\ (1, -1), & \text{if } b \leq a \leq 0, \end{cases} \quad v_{a,b} = \begin{cases} (-1, 1), & \text{if } 0 \leq b \leq a, \\ (-1, 1), & \text{if } 0 < -b \leq a, \\ (\frac{a}{b}, 1), & \text{if } 0 < a < -b, \\ (0, 1), & \text{if } b \leq a \leq 0. \end{cases}$$

Then the maps $(a, b) \mapsto u_{a,b}$ and $(a, b) \mapsto v_{a,b}$ are continuous on the domain indicated, furthermore, the directional derivative of the function $\mathcal{G}_{x,y}$, at the point (a, b) is nonnegative in the directions $u_{a,b}$ and $v_{a,b}$ for all fixed positive numbers x, y .

After this, the sufficiency of the conditions of the comparison theorem for Gini means can quickly be completed by means of the following statement:

THEOREM. [CzP05] *Let the positive numbers x and y be fixed and let (a, b) , (c, d) be two arbitrary points in $\mathbb{R}^2$. Suppose that the directional derivative of $\mathcal{G}_{x,y}$ is nonnegative in the direction $(c - a, d - b)$ at any point of the segment*

$$[(a, b), (c, d)] = \{(a + t(c - a), b + t(d - b)) \mid t \in [0, 1]\}.$$

Then

$$G_{a,b}(x, y) \leq G_{c,d}(x, y).$$

For sake of completeness, we presented a new proof also for the necessity of the conditions. This proof can easily be deduced from the asymptotic properties, listed above.

Unfortunately, this method, builded on the behavior of the directional derivatives, could not be followed in the case of Stolarsky means. We had to apply appropriate sequences instead to obtain the reformulated comparison theorem:

THEOREM. [CzP03] *Let $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ be arbitrary parameters. Then the comparison inequality*

$$S_{a,b}(x, y) \leq S_{c,d}(x, y)$$

holds for all positive x and y if and only if a, b, c, d satisfy the following three conditions:

$$a + b \leq c + d, \quad \mathcal{E}(a, b) \leq \mathcal{E}(c, d), \quad \mathcal{L}(a, b) \leq \mathcal{L}(c, d).$$

(The necessity, however, could similarly be proven as that of the theorem, concerning the Gini means.)

The third – and last – chapter on the comparison problem deals with the Gini mean – Stolarsky mean comparison problem. (In this direction the first steps were taken by Neuman and Páles, see [NP03]). Applying the appropriate asymptotic properties, we can easily obtain the following necessary conditions:

THEOREM. [CzP*a] *Suppose that the inequality*

$$G_{a,b}(x, y) \leq S_{c,d}(x, y)$$

holds for any positive x, y . Then

$$3(a + b) \leq c + d,$$

$$\mathcal{E}(a, b) \leq \mathcal{E}(c, d),$$

$$\min\{a, b\} \leq \min\{c, d\},$$

$$\text{if } \min\{a, b\} = 0 < \max\{a, b\} \text{ then } \max\{a, b\} \leq \log 2 \cdot \mathcal{L}(c, d).$$

To obtain sufficient conditions, we apply three propositions:

THEOREM. [CzP*a],[Czin05b] *The inequality*

$$G_{a,b}(x, y) \leq S_{3a,3b}(x, y)$$

holds for all positive x, y if and only if $a + b \leq 0$, while the reversed inequality holds if and only if $a + b \geq 0$. Moreover, the inequality

$$G_{a,b}(x, y) \leq S_{2a+b,a+2b}(x, y)$$

holds for all positive x, y if and only if $ab(a + b) \leq 0$, while the reversed inequality holds if and only if $ab(a + b) \geq 0$. Finally, for any positive variables x, y the following holds:

$$G_{-1+\frac{2}{\sqrt{5}}, -1-\frac{2}{\sqrt{5}}}(x, y) \leq S_{-3,-3}(x, y).$$

Applying these statements, we obtain that

THEOREM. [CzP*a],[Czin05b]

- (i) *Let a, b be positive numbers. Then there are no parameters c, d so that the Gini-Stolarsky comparison inequality be valid for all positive x, y .*
- (ii) *Let a, b be real numbers so that $\min\{a, b\} = 0 < \max\{a, b\}$. Then the Gini-Stolarsky comparison inequality is valid for all positive x, y if and only if*
 - (a) $3a \leq c + d$,
 - (b) $a \leq \log 2 \cdot \mathcal{L}(c, d)$.
- (iii) *Let a, b be real numbers so that $ab < 0$ and $a + b \geq 0$. If*
 - (a) $3(a + b) \leq c + d$,
 - (b) $\mathcal{L}\{a + 2b, 2a + b\} \leq \mathcal{L}(c, d)$,
 - (c) $\mathcal{E}(2a + b, a + 2b) \leq \mathcal{E}(c, d)$,*then the Gini-Stolarsky comparison inequality is valid for all positive x, y .*
- (iv) *Let a, b be real numbers so that $ab < 0$ and $a + b \leq 0$. Then the Gini-Stolarsky comparison inequality is valid for all positive x, y if and only if*
 - (a) $3(a + b) \leq c + d$,
 - (b) $\mathcal{E}(a, b) \leq \mathcal{E}(c, d)$.
- (v) *Let a, b be real numbers, $a, b \leq 0$. If*
 - (a) $3(a + b) \leq c + d$,
 - (b) $\mathcal{L}(2a + b, a + 2b) \leq \mathcal{L}(c, d)$,*then the Gini-Stolarsky comparison inequality is valid for all positive x, y*
- (vi) *Let a, b be real numbers, $a, b \leq 0$, $a/b \in [9 - 4\sqrt{5}, 9 + 4\sqrt{5}]$. Then the Gini-Stolarsky comparison inequality is valid for all positive x, y if and only if*

$$3(a + b) \leq c + d.$$

3. Generalized Minkowski inequalities

In the last three chapters we dealt with the generalized Minkowski inequality, both for the Gini and the Stolarsky means. First, we give a general approach to the problem: under what conditions will the inequality

$$M_{a_0, b_0}(x_1 + x_2, y_1 + y_2) \begin{matrix} \leq \\ (\geq) \end{matrix} M_{a_1, b_1}(x_1, y_1) + M_{a_2, b_2}(x_2, y_2)$$

be valid for all positive x_1, x_2, y_1, y_2 ?

This question is a generalization of the situation $(a_0, b_0) = (a_1, b_1) = (a_2, b_2)$, treated for Gini and Stolarsky means in [Los71b] and [LP96], respectively.

The first step towards the answer was the observation that the "Minkowski-property" can be translated into the language of convexity:

THEOREM. [CzP03] *Let $M : \mathbb{R}_+^2 \rightarrow \mathbb{R}$ be a two variable homogeneous mean. Then*

$$M(x_1 + x_2, y_1 + y_2) \begin{matrix} \leq \\ (\geq) \end{matrix} M(x_1, y_1) + M(x_2, y_2)$$

holds for all $x_1, y_1, x_2, y_2 \in \mathbb{R}_+$ if and only if the function

$$m(t) = M(t, 1) \quad (t \in \mathbb{R}_+, i = 0, 1, 2).$$

is convex (resp. concave) on $\mathbb{R}_+$.

Moreover, we have the following necessary conditions for the generalized Minkowski inequality:

THEOREM. [CzP03] *Let $M_0, M_1, M_2 : \mathbb{R}_+^2 \rightarrow \mathbb{R}$ be two variable homogeneous means such that M_0 is symmetric on $\mathbb{R}_+^2$, and differentiable at the point $(1, 1)$. Assume that*

$$M_0(x_1 + x_2, y_1 + y_2) \begin{matrix} \leq \\ (\geq) \end{matrix} M_1(x_1, y_1) + M_2(x_2, y_2)$$

holds for all $x_1, y_1, x_2, y_2 \in \mathbb{R}_+$. Then

$$M_0 \begin{matrix} \leq \\ (\geq) \end{matrix} M_i \quad \text{and} \quad A \begin{matrix} \leq \\ (\geq) \end{matrix} M_i \quad (i = 1, 2),$$

where A denotes the arithmetic mean.

The crucial point of the survey on the generalized Minkowski-inequality is the concept of the Minkowski-separator. This is defined as follows:

Let $M_0, M_1, M_2 : \mathbb{R}_+^2 \rightarrow \mathbb{R}$ be two variable means. A mean $M : \mathbb{R}_+^2 \rightarrow \mathbb{R}$ is called a *Minkowski-separator* (resp. *reversed-Minkowski-separator*) for

(M_0, M_1, M_2) if M satisfies the (reversed) Minkowski inequality, furthermore,

$$M_0 \begin{matrix} \leq \\ (\geq) \end{matrix} M, \quad \text{and} \quad M \begin{matrix} \leq \\ (\geq) \end{matrix} M_i \quad (i = 1, 2)$$

Namely, the existence of the separator guarantees the validity of the generalized Minkowski inequality, as it can be read in the next statement:

THEOREM. [CzP03] *Let $M_0, M_1, M_2 : \mathbb{R}_+^2 \rightarrow \mathbb{R}$ be two variable means. Suppose that there exists a (reversed-)Minkowski-separator for (M_0, M_1, M_2) . Then the (reversed) Minkowski inequality holds for all positive x_1, x_2, y_1, y_2 .*

In the rest of the thesis we study this generalized Minkowski inequality for the Gini and Stolarsky means. The two cases show a relevant difference: it turns out that the existence of the Minkowski-separator – that is, the sufficiency of the generalized Minkowski-inequality – coincides the necessity. For Stolarsky means, however, this equivalence does not hold.

For the Gini means, we can state the following theorem:

THEOREM. [CzP00] *Let $a_0, a_1, a_2, b_0, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$. Then*

$$G_{a_0, b_0}(x_1 + x_2, y_1 + y_2) \leq G_{a_1, b_1}(x_1, y_1) + G_{a_2, b_2}(x_2, y_2)$$

holds if and only if

- (i) $a_1, a_2, b_1, b_2 \geq 0$,
- (ii) $\max\{1, a_0 + b_0\} \leq \min\{a_1 + b_1, a_2 + b_2\}$,
- (iii) $\min\{a_0, b_0\} \leq \min\{1, a_1, b_1, a_2, b_2\}$.

For the analogous problem, regarding the Stolarsky means, we collect the necessary conditions both for the Minkowski and the reversed-Minkowski inequality to hold:

THEOREM. [CzP03] *Let $a_0, b_0, a_1, b_1, a_2, b_2 \in \mathbb{R}$. If the Minkowski inequality*

$$S_{a_0, b_0}(x_1 + x_2, y_1 + y_2) \leq S_{a_1, b_1}(x_1, y_1) + S_{a_2, b_2}(x_2, y_2)$$

holds for all $x_1, y_1, x_2, y_2 \in \mathbb{R}_+$, then

$$\begin{cases} \max\{a_0 + b_0, 3\} & \leq \min\{a_1 + b_1, a_2 + b_2\} \\ \max\{\mathcal{L}(a_0, b_0), \mathcal{L}(1, 2)\} & \leq \min\{\mathcal{L}(a_1, b_1), \mathcal{L}(a_2, b_2)\}. \end{cases}$$

If the reversed Minkowski inequality

$$S_{a_0, b_0}(x_1 + x_2, y_1 + y_2) \geq S_{a_1, b_1}(x_1, y_1) + S_{a_2, b_2}(x_2, y_2)$$

holds for all $x_1, y_1, x_2, y_2 \in \mathbb{R}_+$, then

$$\begin{cases} \min\{a_0 + b_0, 3\} \geq \max\{a_1 + b_1, a_2 + b_2\} \\ \min\{\mathcal{L}(a_0, b_0), \mathcal{L}(1, 2)\} \geq \max\{\mathcal{L}(a_1, b_1), \mathcal{L}(a_2, b_2)\} \\ \mathcal{E}(a_0, b_0) \geq \max\{\mathcal{E}(a_1, b_1), \mathcal{E}(a_2, b_2)\}. \end{cases}$$

The existence of the Minkowski and the reversed Minkowski separator, however, holds under different conditions:

THEOREM. [CzP03] For $(a_0, b_0, a_1, b_1, a_2, b_2) \in \mathbb{R}^6$ there exists a Minkowski-separator if and only if

$$\begin{cases} \max\{a_0 + b_0, 3\} \leq \min\{a_1 + b_1, a_2 + b_2\}, \\ \max\{\mathcal{L}(a_0, b_0), \mathcal{L}(1, 2), \mathcal{L}(1, a_0 + b_0 - 1)\} \\ \leq \min\{\mathcal{L}(a_1, b_1), \mathcal{L}(a_2, b_2)\} \end{cases}$$

For $(a_0, b_0, a_1, b_1, a_2, b_2) \in \mathbb{R}^6$ there exists a reversed-Minkowski-separator if and only if

$$\begin{cases} \min\{a_0 + b_0, 3\} \geq \max\{a_1 + b_1, a_2 + b_2\}, \\ \min\{\mathcal{L}(a_0, b_0), \mathcal{L}(1, 2)\} \geq \max\{\mathcal{L}(a_1, b_1), \mathcal{L}(a_2, b_2)\}, \\ \mathcal{E}(a_0, b_0) \geq \max\{\mathcal{E}(a_1, b_1), \mathcal{E}(a_2, b_2)\}, \\ \text{finally, if } \min\{a_0, b_0\} \geq 1 \text{ then} \\ \mathcal{L}(1, a_0 + b_0 - 1) \geq \max\{\mathcal{L}(a_1, b_1), \mathcal{L}(a_2, b_2)\}. \end{cases}$$

These conditions are sufficient for the Minkowski inequality and the reversed Minkowski inequality, respectively.

Az értekezés célkitűzései

A Gini- és Stolarsky-közepéről számtalan értekezés készült. (E fogalmak első ízben a [Gin38], illetve [Sto75] dolgozatokban láttak napvilágot.)

Ezek a kétváltozós, homogén középértékek egyaránt fontos szerepet játszanak a középértékek elméletében és a matematika legkülönbözőbb ágaihoz tartozó egyenlőtlenségek vizsgálatakor.

A következőképpen definiáljuk e fogalmakat: ha x, y pozitív számok, akkor a Gini-közepüket a

$$G_{a,b}(x, y) = \begin{cases} \left(\frac{x^a + y^a}{x^b + y^b} \right)^{\frac{1}{a-b}}, & \text{ha } a \neq b, \\ \exp \left(\frac{x^a \log x + y^a \log y}{x^a + y^a} \right), & \text{ha } a = b, \end{cases}$$

összefüggés, míg Stolarsky-közepüket az

$$S_{a,b}(x, y) = \begin{cases} \left(\frac{b(x^a - y^a)}{a(x^b - y^b)} \right)^{\frac{1}{a-b}}, & \text{ha } (a-b)ab \neq 0, x \neq y, \\ \exp \left(-\frac{1}{a} + \frac{x^a \log x - y^a \log y}{x^a - y^a} \right), & \text{ha } a = b \neq 0, x \neq y, \\ \left(\frac{x^a - y^a}{a(\log x - \log y)} \right)^{\frac{1}{a}}, & \text{ha } a \neq 0, b = 0, x \neq y, \\ \sqrt{xy}, & \text{ha } a = b = 0, \\ x, & \text{ha } x = y \end{cases}$$

formula adja meg.

A fenti, két változóra szorítkozó tárgyalásmód könnyen általánosítható, a Gini-közepék esetén kézenfekvő módon, míg a Stolarsky – vagy ahogy az irodalomban olykor nevezik: differencia-közép – esetén osztott differenciákkal. Ily módon értelmezhető tetszőleges n ($n \in \mathbb{N}$) pozitív szám Gini- és Stolarsky-közepé.

Az x és y pozitív számok p -edik hatványközepé egyaránt megadható $G_{0,p}(x, y)$ és $S_{2p,p}(x, y)$ alakban, vagyis a hatványközepék mindkét osztálynak elemei. Sőt, mi több, amint azt Alzer and Ruscheweyh [AR01] a közelmúltban bebizonyították, a Gini- és Stolarsky-közepék osztályának a hatványközepéken kívül nincs más közös eleme.

Speciálisan, az $S_{2,1}$, $S_{0,0}$, és $S_{-2,-1}$ közepéket rendre *számtani*, *mértani* és *harmonikus* közepéknek hívjuk, míg $S_{1,0}$ -t és $S_{1,1}$ -et *logaritmikus* és *identrikus* középnek nevezzük.

A Gini- és Stolarsky-közepék bőséges lehetőséget kínálnak a kutatásra. Disszertációmban megkíséreltem összegyűjteni és rendszerezni az elmúlt években Páles Zsolt professzor úr irányításával elért eredményeimet. Vizsgálataim középpontjában a Gini- és/vagy Stolarsky-közepék összehasonlítása, illetve az

ezekre a közepekre felírható általánosított Minkowski-egyenlőtlenségek álltak. (Ez a tevékenység a [CzP00], [CzP03], [CzP*a], [CzP05], [CzP04], [Czin05], [Czin05b] dolgozatokban követhető nyomon.).

Dolgozatom három fő részből áll. A 2., 3. és a 4. fejezetben a későbbiekhez szükséges előkészületeket végzem el. Az 5., 6. és a 7. fejezetben mutatom be a Gini- és/vagy Stolarsky-közepek összehasonlítása terén elért eredményeket. Végül a 8., 9. és a 10. fejezet az általánosított Minkowski-egyenlőtlenségekkel foglalkozik.

Azokban az esetekben, amikor valamely tulajdonság egyaránt teljesül mindkét középérték-fajtára, az $M_{a,b}$ (vagy néha egyszerűen: M) jelölésmóddal élek.

1. Előkészületek

Ahhoz, hogy állításainkat formába önteni és bizonyítani lehessen, némi előkészületekre volt szükség. Mindenekelőtt összegyűjtöttem néhány jól ismert, de fontos összefüggést. Továbbá, a következetes tárgyalásmód érdekében bevezettem az

$$\mathcal{E}(a, b) := \begin{cases} \frac{|a| - |b|}{a - b}, & \text{ha } a \neq b, \\ \text{sign}(a), & \text{ha } a = b, \end{cases} \quad \mathcal{M}(a, b) := \begin{cases} \min\{a, b\}, & \text{ha } a, b \geq 0, \\ 0, & \text{ha } ab < 0, \\ \max\{a, b\}, & \text{ha } a, b \leq 0 \end{cases}$$

és

$$\mathcal{L}(a, b) := \begin{cases} \frac{a - b}{\log(a/b)}, & \text{ha } 0 < ab \text{ és } a \neq b, \\ a, & \text{ha } 0 < ab \text{ és } a = b, \\ 0, & \text{ha } ab \leq 0 \end{cases}$$

összefüggések által definiált $\mathcal{E}$, $\mathcal{M}$ és $\mathcal{L}$ függvényeket, amelyek az összehasonlítási tételekben kulcsszerepet játszanak. Ezek alapvető tulajdonságait is (folytonosság, konvexitás, monotonitás) ezen a helyen vizsgáltam.

Több, Gini- és Stolarsky-közepekkel kapcsolatos egyenlőtlenség származtatható bizonyos aszimptotikus tulajdonságokból. Ezért összegyűjtöttem ezek közül a legfontosabbakat. Némelyik állítást egységes szerkezetben lehetett találni, oly módon, hogy azok mind a Gini-, mind a Stolarsky-közepekre érvényesek legyenek. A következőkre jutottam:

TÉTEL. [CzP00],[CzP05] *Bármely a, b valós paraméter esetén*

$$\lim_{x \rightarrow 0+} G_{a,b}(x, y) = \begin{cases} y, & \text{ha } \min\{a, b\} > 0, \\ y \cdot 2^{-\frac{1}{\max\{a,b\}}}, & \text{ha } \min\{a, b\} = 0 \text{ és } \max\{a, b\} > 0, \\ 0, & \text{ha } \min\{a, b\} < 0 \text{ vagy } (a, b) = (0, 0), \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0+} S_{a,b}(x, y) = \begin{cases} y \cdot e^{-\frac{1}{\mathcal{L}(a,b)}}, & \text{ha } \min\{a, b\} > 0, \\ 0, & \text{ha } \min\{a, b\} \leq 0, \end{cases}$$

$$\lim_{z \rightarrow \infty} (M_{a,b}(x+z, y+z) - z) = \frac{x+y}{2} \quad (x, y \in \mathbb{R}_+),$$

$$\lim_{z \rightarrow \infty} (G_{a,b}(x, y+z) - z) = y, \quad (x, y \in \mathbb{R}_+).$$

$$\lim_{t \rightarrow 1} \frac{M_{a,b}(t, 1) - \frac{t+1}{2}}{(t-1)^2} = \begin{cases} \frac{a+b-1}{8}, & \text{ha } M = G, \\ \frac{a+b-3}{24}, & \text{ha } M = S, \end{cases}$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\log M_{a,b}(e^t, e^{-t})}{t} = \mathcal{E}(a, b),$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\log \frac{t + \log G_{a,b}(e^t, e^{-t})}{t - \log G_{a,b}(e^t, e^{-t})}}{2t} = \mathcal{M}(a, b),$$

továbbá, ha $a, b > 1$, úgy

$$\lim_{z \rightarrow \infty} (G_{a,b}(x, y+z) - z) = y. \quad (x, y \in \mathbb{R}_+).$$

Az előkészületek egy másik nagy egységét a Hermite-Hadamard egyenlőtlenség különböző változatai alkotják. Megjelenik a pontra nézve páratlan, illetve páros függvény fogalma: akkor mondjuk, hogy az $f : \mathcal{J} \rightarrow \mathbb{R}$ függvény *páratlan az m pontra nézve*, ha a $t \mapsto f(m+t) - f(m)$ függvény páratlan, azaz,

$$f(m-t) + f(m+t) = 2f(m) \quad (t \in (\mathcal{J} - m) \cap (m - \mathcal{J})),$$

míg f -et m -re nézve *párosnak* hívjuk, ha $t \mapsto f(m+t)$ is páros, vagyis

$$f(m-t) = f(m+t) \quad (t \in (\mathcal{J} - m) \cap (m - \mathcal{J})).$$

A legfontosabb "Hermite-Hadamard-típusú" eredményt a következő tétel tartalmazza:

TÉTEL. [Czin05] Legyen az $f : \mathcal{J} \rightarrow \mathbb{R}$ függvény páratlan az $m \in \mathcal{J}$ pontra nézve, $\varrho : \mathcal{J} \rightarrow \mathbb{R}$ pedig egy pozitív, lokálisan integrálható súlyfüggvény, amely páros m -re nézve, és legyen $[a, b]$ egy nemüres belsejű részintervalluma $\mathcal{J}$ -nek. Ekkor a következő állítás érvényes:

Ha f konvex az $\mathcal{J} \cap (-\infty, m]$ intervallumon és konkáv $\mathcal{J} \cap [m, \infty)$ fölött, akkor

$$\begin{aligned} f(M_{\varrho}(a, b)) & \begin{matrix} \geq \\ (\leq) \end{matrix} \frac{1}{\int_a^b \varrho(x) dx} \int_a^b f(x) \varrho(x) dx \\ & \begin{matrix} \geq \\ (\leq) \end{matrix} \frac{b - M_{\varrho}(a, b)}{b - a} f(a) + \frac{M_{\varrho}(a, b) - a}{b - a} f(b), \end{aligned}$$

ha $\frac{a+b}{2} \begin{matrix} \geq \\ (\leq) \end{matrix} m$. A fordított irányú egyenlőtlenségek igazak, ha f konkáv $\mathcal{J} \cap (-\infty, m]$ -n és konvex $\mathcal{J} \cap [m, \infty)$ -n.)

Speciálisan, ha $\varrho(x) \equiv 1$, úgy az előző tétel súlyozatlan verzióját kapjuk. Mint kiderül, ez az állítás kitűnően alkalmazható a

$$\mu_{x,y} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad t \mapsto \log M_{t,t}(x, y).$$

függvényre. Ily módon a következő becslést kapjuk $M_{a,b}$ -re:

TÉTEL. [CzP04] *Legyenek az a, b valós számok olyanok, melyekre $a + b \begin{smallmatrix} \geq \\ (\leq) \end{smallmatrix} 0$. Ekkor*

$$M_{\frac{a+b}{2}, \frac{a+b}{2}}(x, y) \begin{smallmatrix} \geq \\ (\leq) \end{smallmatrix} M_{a,b}(x, y) \begin{smallmatrix} \geq \\ (\leq) \end{smallmatrix} \sqrt{M_{a,a}(x, y)M_{b,b}(x, y)}$$

érvényes minden pozitív x, y számra.

Ezt az egyenlőtlenséget a Hermite-Hadamard egyenlőtlenség következő változatával javítani lehet:

TÉTEL. [CzP05] *Legyen $f : \mathcal{I} \rightarrow \mathbb{R}$ páratlan az $m \in \mathcal{I}$ pontra nézve, továbbá, tegyük fel, hogy f növekszik. Ekkor bármely $[a, b] \subset \mathcal{I}$ intervallum esetén*

$$((b-m)^+ - (a-m)^+)f(b) + ((a-m)^- - (b-m)^-)f(a) \begin{smallmatrix} \geq \\ (\leq) \end{smallmatrix} \int_a^b f(x)dx$$

érvényes, ha $\frac{a+b}{2} \begin{smallmatrix} \geq \\ (\leq) \end{smallmatrix} m$.

Következésképpen,

TÉTEL. [CzP05] *Ha $b < a$ és $a + b \begin{smallmatrix} \geq \\ (\leq) \end{smallmatrix} 0$, akkor minden pozitív x, y -ra*

$$(M_{a,a}(x, y))^{\frac{a^+ - b^+}{a-b}} (M_{b,b}(x, y))^{\frac{b^- - a^-}{a-b}} \begin{smallmatrix} \geq \\ (\leq) \end{smallmatrix} M_{a,b}(x, y),$$

így a következő becslésekhez jutunk:

TÉTEL. [CzP05] *Minden a, b valós számra, melyre $b \leq a$, $(a, b) \neq (0, 0)$, és minden pozitív x, y esetén*

- (i) $(M_{a,a}(x, y))^{\frac{1}{2}} (M_{b,b}(x, y))^{\frac{1}{2}} \leq M_{a,b}(x, y) \leq M_{a,a}(x, y)$, ha $0 \leq b \leq a$,
- (ii) $(M_{a,a}(x, y))^{\frac{1}{2}} (M_{b,b}(x, y))^{\frac{1}{2}} \leq M_{a,b}(x, y) \leq (M_{a,a}(x, y))^{\frac{a}{a-b}} (M_{b,b}(x, y))^{\frac{-b}{a-b}}$, ha $0 \leq -b \leq a$,
- (iii) $(M_{a,a}(x, y))^{\frac{1}{2}} (M_{b,b}(x, y))^{\frac{1}{2}} \geq M_{a,b}(x, y) \geq (M_{a,a}(x, y))^{\frac{a}{a-b}} (M_{b,b}(x, y))^{\frac{-b}{a-b}}$, ha $0 \leq a \leq -b$,
- (iv) $(M_{a,a}(x, y))^{\frac{1}{2}} (M_{b,b}(x, y))^{\frac{1}{2}} \geq M_{a,b}(x, y) \geq M_{b,b}(x, y)$, ha $b \leq a \leq 0$.

2. Összehasonlítási tételek

Ezek után az előkészületek után átfogalmazhatók a Gini- és Stolarsky-közepekre érvényes összehasonlítási tételek. (E tételek és bizonyítások eredeti formájukban a [Pal88c], [LSh83] and [Pal88b] dolgozatokban olvashatók.)

Gini-közepekre a fő eredményünk a következő:

TÉTEL. [CzP*a] Legyenek $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tetszőleges paraméterek. A

$$G_{a,b}(x, y) \leq G_{c,d}(x, y)$$

összehasonlítási egyenlőtlenség pontosan akkor áll fenn minden x és y esetén, ha a, b, c, d -re fennáll a következő három feltétel:

$$a + b \leq c + d, \quad \mathcal{E}(a, b) \leq \mathcal{E}(c, d), \quad \mathcal{M}(a, b) \leq \mathcal{M}(c, d).$$

Bár ezt a tételt eredetileg teljesen más módszerrel is bizonyítottuk, dolgozatomban a bizonyításra egy, a fentiekre épülő módszert használtam. (A Stolarsky-közepek esetén viszont az „eredeti” eljárást alkalmaztam.) Bevezetve a

$$\mathcal{G}_{x,y} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad (a, b) \mapsto \mathcal{G}_{x,y}(a, b) := G_{a,b}(x, y),$$

függvényt, a következőt kapjuk:

TÉTEL. [CzP05] Tegyük fel, hogy $b \leq a$ és rögzítsük az x és y be pozitív számokat. A $\mathcal{G}_{x,y}$ függvény irány menti deriváltja a $d = (d_1, d_2)$ irányban pontosan akkor nemnegatív az (a, b) pontban, ha

$$\begin{cases} (G_{a,a}(x, y))^{d_1} (G_{b,b}(x, y))^{-d_2} \geq (G_{a,b}(x, y))^{d_1 - d_2}, & \text{ha } a \neq b, \\ d_1 + d_2 \geq 0, & \text{ha } a = b. \end{cases}$$

A tétel következményeként adódik az alábbi állítás:

TÉTEL. [CzP05] Az $b \leq a$, $(a, b) \neq (0, 0)$ számokra definiáljuk az $u_{a,b}$ és $v_{a,b}$ vektorokat a következőképpen

$$u_{a,b} = \begin{cases} (1, 0), & \text{ha } 0 \leq b \leq a, \\ (1, \frac{b}{a}), & \text{ha } 0 < -b < a, \\ (1, -1), & \text{ha } 0 < a \leq -b, \\ (1, -1), & \text{ha } b \leq a \leq 0, \end{cases} \quad v_{a,b} = \begin{cases} (-1, 1), & \text{ha } 0 \leq b \leq a, \\ (-1, 1), & \text{ha } 0 < -b \leq a, \\ (\frac{a}{b}, 1), & \text{ha } 0 < a < -b, \\ (0, 1), & \text{ha } b \leq a \leq 0. \end{cases}$$

Ekkor az $(a, b) \mapsto u_{a,b}$ és $(a, b) \mapsto v_{a,b}$ leképezések folytonosak értelmezési tartományukon, továbbá a $\mathcal{G}_{x,y}$ függvény irány menti deriváltja az (a, b) pontban nemnegatív az $u_{a,b}$ és $v_{a,b}$ irányokban bármely x, y pozitív számok rögzítése esetén.

Ezek után a Gini-közepek összehasonlítási tételében a feltételek elégségessége hamar megkapható a következő állítás segítségével:

TÉTEL. [CzP05] Rögzítsük az x és y pozitív számokat és legyen $(a, b), (c, d) \in \mathbb{R}^2$ két tetszőleges pontja. Tegyük fel, hogy a $G_{x,y}$ függvény irány menti deriváltja nemnegatív az $(c - a, d - b)$ irányban az

$$[(a, b), (c, d)] = \{(a + t(c - a), b + t(d - b)) \mid t \in [0, 1]\}.$$

szakasz minden pontjában. Ekkor

$$G_{a,b}(x, y) \leq G_{c,d}(x, y).$$

A teljesség kedvéért a feltételek szükségességét is új módszerrel bizonyítottam. Ez a bizonyítás könnyen véghez vihető a fent összegyűjtött aszimptotikus tulajdonságokból.

Sajnos ez a módszer, amelyet az irány menti deriváltak viselkedésére építettünk, a Stolarsky-közepekre nem bizonyult alkalmazhatónak. Ehelyett alkalmas sorozatokat lehetett felhasználni a következő összehasonlítási tétel bizonyításához:

TÉTEL. [CzP03] Legyenek $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tetszőleges paraméterek. Ekkor az

$$S_{a,b}(x, y) \leq S_{c,d}(x, y)$$

összehasonlítási egyenlőtlenség pontosan akkor teljesül minden pozitív x és y számra, ha a, b, c, d eleget tesz a következő három feltételnek:

$$a + b \leq c + d, \quad \mathcal{E}(a, b) \leq \mathcal{E}(c, d), \quad \mathcal{L}(a, b) \leq \mathcal{L}(c, d).$$

(A szükségességet viszont a Gini-közepekre vonatkozó analóg tételé mintájára lehet bizonyítani.)

Az összehasonlítási tétellel foglalkozó harmadik és egyben utolsó fejezet a Gini-közép – Stolarsky-közép összehasonlítási problémával foglalkozik. Az első lépéseket ebben az irányban Neuman és Páles tették meg (ld. [NP03]). Alkalmazva a megfelelő aszimptotikus tulajdonságokat, könnyen megkapjuk az alábbi szükséges feltételeket:

TÉTEL. [CzP*a] Tegyük fel, hogy a

$$G_{a,b}(x, y) \leq S_{c,d}(x, y)$$

egyenlőtlenség fennáll minden x, y pozitív számra. Ekkor

$$3(a + b) \leq c + d,$$

$$\mathcal{E}(a, b) \leq \mathcal{E}(c, d),$$

$$\min\{a, b\} \leq \min\{c, d\},$$

$$\text{és ha } \min\{a, b\} = 0 < \max\{a, b\}, \text{ akkor } \max\{a, b\} \leq \log 2 \cdot \mathcal{L}(c, d).$$

Elégséges feltételek megalkotásához a következő három állítást használhatjuk fel:

TÉTEL. [CzP*a],[Czin05b] A

$$G_{a,b}(x, y) \leq S_{3a,3b}(x, y)$$

egyenlőtlenség pontosan akkor érvényes minden pozitív x, y esetén, ha $a + b \leq 0$, míg a fordított egyenlőtlenség pontosan akkor igaz, ha $a + b \geq 0$. Továbbá, a

$$G_{a,b}(x, y) \leq S_{2a+b,a+2b}(x, y)$$

egyenlőtlenség pontosan akkor érvényes minden pozitív x, y esetén, ha $ab(a + b) \leq 0$, míg a fordított egyenlőtlenség pontosan akkor igaz, ha $ab(a + b) \geq 0$. Végül, minden pozitív x, y számra fennáll, hogy

$$G_{-1+\frac{2}{\sqrt{5}}, -1-\frac{2}{\sqrt{5}}}(x, y) \leq S_{-3,-3}(x, y).$$

Ezen állítások felhasználásával kapjuk, hogy

TÉTEL. [CzP*a],[Czin05b]

- (i) Legyenek a, b pozitív számok. Ekkor nem léteznek olyan c, d paraméterek, melyekre a Gini-Stolarsky összehasonlítási egyenlőtlenség minden pozitív x, y -ra teljesülne.
- (ii) Legyenek a, b olyan számok, melyekre $\min\{a, b\} = 0 < \max\{a, b\}$. Ekkor a Gini-Stolarsky összehasonlítási egyenlőtlenség pontosan akkor teljesül minden pozitív x, y -ra, ha
 - (a) $3a \leq c + d$,
 - (b) $a \leq \log 2 \cdot \mathcal{L}(c, d)$.
- (iii) Legyenek a, b olyan számok, melyekre $ab < 0$ és $a + b \geq 0$. Ha
 - (a) $3(a + b) \leq c + d$,
 - (b) $\mathcal{L}\{a + 2b, 2a + b\} \leq \mathcal{L}(c, d)$,
 - (c) $\mathcal{E}(2a + b, a + 2b) \leq \mathcal{E}(c, d)$,
 akkor a Gini-Stolarsky összehasonlítási egyenlőtlenség minden pozitív x, y esetén érvényes.
- (iv) Legyenek a, b olyan számok, melyekre $ab < 0$ és $a + b \leq 0$. Ekkor a Gini-Stolarsky összehasonlítási egyenlőtlenség pontosan akkor teljesül minden pozitív x, y -ra, ha
 - (a) $3(a + b) \leq c + d$,
 - (b) $\mathcal{E}(a, b) \leq \mathcal{E}(c, d)$.
- (v) Legyenek a, b valós számok, $a, b \leq 0$. Ha
 - (a) $3(a + b) \leq c + d$,
 - (b) $\mathcal{L}(2a + b, a + 2b) \leq \mathcal{L}(c, d)$,
 akkor a Gini-Stolarsky összehasonlítási egyenlőtlenség minden pozitív x, y esetén érvényes.

(vi) Legyenek a, b pozitív számok, $a, b \leq 0$, $a/b \in [9 - 4\sqrt{5}, 9 + 4\sqrt{5}]$. Ekkor a Gini-Stolarsky összehasonlítási egyenlőtlenség pontosan akkor teljesül minden pozitív x, y -ra, ha

$$3(a + b) \leq c + d.$$

3. Általánosított Minkowski-egyenlőtlenségek

Az utolsó három fejezet a Gini-, illetve Stolarsky-közepre felírható Minkowski-típusú egyenlőtlenséggel foglalkozik. Először általánosan közelítjük meg a kérdést: milyen feltételek mellett teljesül az

$$M_{a_0, b_0}(x_1 + x_2, y_1 + y_2) \begin{matrix} \leq \\ (\geq) \end{matrix} M_{a_1, b_1}(x_1, y_1) + M_{a_2, b_2}(x_2, y_2)$$

egyenlőtlenség minden pozitív x_1, x_2, y_1, y_2 esetén?

Ez a kérdés az $(a_0, b_0) = (a_1, b_1) = (a_2, b_2)$ eset általánosítása, melyről Gini-, illetve Stolarsky-közepiek esetén a [Los71b] és a [LP96] dolgozatokban olvashatunk.

Az első lépést az az észrevétel jelenti, mely szerint a "Minkowski-tulajdonság" a konvexitás nyelvén a következőképpen fogalmazható meg:

TÉTEL. [CzP03] Legyen $M : \mathbb{R}_+^2 \rightarrow \mathbb{R}$ egy kétváltozós, homogén közép. Ekkor

$$M(x_1 + x_2, y_1 + y_2) \begin{matrix} \leq \\ (\geq) \end{matrix} M(x_1, y_1) + M(x_2, y_2)$$

pontosan akkor áll fenn minden pozitív $x_1, y_1, x_2, y_2 \in \mathbb{R}_+$ esetén, ha az

$$m(t) = M(t, 1) \quad (t \in \mathbb{R}_+, i = 0, 1, 2).$$

függvény konvex (konkáv) $\mathbb{R}_+$ -en.

Továbbá, az általánosított Minkowski-egyenlőtlenséghez az alábbi szükséges feltételek teljesülnek:

TÉTEL. [CzP03] Legyenek $M_0, M_1, M_2 : \mathbb{R}_+^2 \rightarrow \mathbb{R}$ olyan kétváltozós homogén közepiek, melyekre M_0 szimmetrikus $\mathbb{R}_+^2$ -n és differenciálható az $(1, 1)$ pontban. Tegyük fel, hogy

$$M_0(x_1 + x_2, y_1 + y_2) \begin{matrix} \leq \\ (\geq) \end{matrix} M_1(x_1, y_1) + M_2(x_2, y_2)$$

fennáll minden $x_1, y_1, x_2, y_2 \in \mathbb{R}_+$ esetén. Ekkor

$$M_0 \begin{matrix} \leq \\ (\geq) \end{matrix} M_i \quad \text{és} \quad A \begin{matrix} \leq \\ (\geq) \end{matrix} M_i \quad (i = 1, 2),$$

ahol A a számtani közepet jelöli.

Az általánosított Minkowski-egyenlőtlenségek vizsgálatának középponti fogalma a Minkowski-szeparátor fogalma. Ezt a következőképpen definiáljuk:

Legyenek $M_0, M_1, M_2 : \mathbb{R}_+^2 \rightarrow \mathbb{R}$ kétváltozós közepiek. Egy $M : \mathbb{R}_+^2 \rightarrow \mathbb{R}$ közepet Minkowski-szeparátornak (illetve fordított Minkowski-szeparátornak) hívunk

(M_0, M_1, M_2) -re nézve, ha M eleget tesz a (fordított) Minkowski-egyenlőtlenségnek, valamint

$$M_0 \begin{matrix} \leq \\ (\geq) \end{matrix} M \quad \text{és} \quad M \begin{matrix} \leq \\ (\geq) \end{matrix} M_i \quad (i = 1, 2).$$

A szeparátor létezése az általánosított Minkowski-egyenlőtlenség teljesülését vonja maga után, amint az a következő állításból kiderül:

TÉTEL. [CzP03] *Legyenek $M_0, M_1, M_2 : \mathbb{R}_+^2 \rightarrow \mathbb{R}$ kétváltozós közepek. Tegyük fel, hogy létezik (fordított)Minkowski-szeparátor az (M_0, M_1, M_2) hármaskra nézve. Ekkor a (fordított) Minkowski-egyenlőtlenség minden pozitív x_1, x_2, y_1, y_2 esetén fennáll.*

Dolgozatom hátralevő részében az általánosított Minkowski-egyenlőtlenséget a Gini- és a Stolarsky-közepekre vizsgálom. E két eset között lényeges eltérés mutatkozott: kiderült, hogy a Gini-közepek esetén a Minkowski-szeparátor létezése – vagyis az általánosított Minkowski-egyenlőtlenség elégségségi feltétele – egybeesik a szükségességgel. A Stolarsky-közepek esetén azonban ez az ekvivalencia nem teljesül.

TÉTEL. [CzP00] *Legyen $a_0, a_1, a_2, b_0, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$. Ekkor*

$$G_{a_0, b_0}(x_1 + x_2, y_1 + y_2) \leq G_{a_1, b_1}(x_1, y_1) + G_{a_2, b_2}(x_2, y_2)$$

akkor és csak akkor teljesül, ha

- (i) $a_1, a_2, b_1, b_2 \geq 0$,
- (ii) $\max\{1, a_0 + b_0\} \leq \min\{a_1 + b_1, a_2 + b_2\}$,
- (iii) $\min\{a_0, b_0\} \leq \min\{1, a_1, b_1, a_2, b_2\}$.

A Stolarsky-közepekre vonatkozó analóg probléma esetén mind a Minkowski-, mind a fordított Minkowski-egyenlőtlenség szükséges feltételeit összegyűjtöttük:

TÉTEL. [CzP03] *Legyen $a_0, b_0, a_1, b_1, a_2, b_2 \in \mathbb{R}$. Ha a*

$$S_{a_0, b_0}(x_1 + x_2, y_1 + y_2) \leq S_{a_1, b_1}(x_1, y_1) + S_{a_2, b_2}(x_2, y_2)$$

Minkowski-egyenlőtlenség fennáll minden $x_1, y_1, x_2, y_2 \in \mathbb{R}_+$ esetén, akkor

$$\begin{cases} \max\{a_0 + b_0, 3\} \leq \min\{a_1 + b_1, a_2 + b_2\} \\ \max\{\mathcal{L}(a_0, b_0), \mathcal{L}(1, 2)\} \leq \min\{\mathcal{L}(a_1, b_1), \mathcal{L}(a_2, b_2)\}. \end{cases}$$

Ha a

$$S_{a_0, b_0}(x_1 + x_2, y_1 + y_2) \geq S_{a_1, b_1}(x_1, y_1) + S_{a_2, b_2}(x_2, y_2)$$

fordított Minkowski-egyenlőtlenség áll fenn minden $x_1, y_1, x_2, y_2 \in \mathbb{R}_+$ esetén, akkor

$$\left\{ \begin{array}{l} \min\{a_0 + b_0, 3\} \geq \max\{a_1 + b_1, a_2 + b_2\} \\ \min\{\mathcal{L}(a_0, b_0), \mathcal{L}(1, 2)\} \geq \max\{\mathcal{L}(a_1, b_1), \mathcal{L}(a_2, b_2)\} \\ \mathcal{E}(a_0, b_0) \geq \max\{\mathcal{E}(a_1, b_1), \mathcal{E}(a_2, b_2)\}. \end{array} \right.$$

A Minkowski, illetve fordított Minkowski-szeparátor létezése azonban más feltételek mellett garantálható:

TÉTEL. [CzP03] *Az $(a_0, b_0, a_1, b_1, a_2, b_2) \in \mathbb{R}^6$ szám-hatoshoz pontosan akkor létezik Minkowski-szeparátor, ha*

$$\left\{ \begin{array}{l} \max\{a_0 + b_0, 3\} \leq \min\{a_1 + b_1, a_2 + b_2\}, \\ \max\{\mathcal{L}(a_0, b_0), \mathcal{L}(1, 2), \mathcal{L}(1, a_0 + b_0 - 1)\} \\ \leq \min\{\mathcal{L}(a_1, b_1), \mathcal{L}(a_2, b_2)\} \end{array} \right.$$

Az $(a_0, b_0, a_1, b_1, a_2, b_2) \in \mathbb{R}^6$ szám-hatoshoz pedig pontosan akkor létezik fordított Minkowski-szeparátor, ha

$$\left\{ \begin{array}{l} \min\{a_0 + b_0, 3\} \geq \max\{a_1 + b_1, a_2 + b_2\}, \\ \min\{\mathcal{L}(a_0, b_0), \mathcal{L}(1, 2)\} \geq \max\{\mathcal{L}(a_1, b_1), \mathcal{L}(a_2, b_2)\}, \\ \mathcal{E}(a_0, b_0) \geq \max\{\mathcal{E}(a_1, b_1), \mathcal{E}(a_2, b_2)\}, \\ \text{végül, ha } \min\{a_0, b_0\} \geq 1, \text{ akkor} \\ \mathcal{L}(1, a_0 + b_0 - 1) \geq \max\{\mathcal{L}(a_1, b_1), \mathcal{L}(a_2, b_2)\}. \end{array} \right.$$

Ezek a feltételek elégségesek a Minkowski- (illetve fordított Minkowski-) egyenlőtlenség teljesüléséhez.

Bibliography

- [AR01] H. Alzer and St. Ruscheweyh, *On the intersection of two-parameter mean value families*, Proc. Amer. Math. Soc. **129** (2001), no. 9, 2655–2662 (electronic). MR **2002c**:26024
- [Czin05b] P. Czinder, *A contribution to the Gini mean - Stolarsky mean comparison problem*, J. Math. Anal. Appl. (2005), submitted.
- [Czin05] ———, *A weighted Hermite-Hadamard-type inequality for convex-concave symmetric functions*, Publ. Math. Debrecen (2005), submitted.
- [CzP*a] P. Czinder and Zs. Páles, *Some comparison inequalities for Gini and Stolarsky means*, Math. Inequal. Appl., submitted.
- [CzP00] ———, *A general Minkowski-type inequality for two variable Gini means*, Publ. Math. Debrecen **57** (2000), no. 1-2, 203–216. MR **2001i**:26017
- [CzP03] ———, *Minkowski-type inequalities for two variable Stolarsky means*, Acta Sci. Math. (Szeged) **69** (2003), no. 1-2, 27–47. MR **2004d**:26019
- [CzP04] ———, *An extension of the Hermite-Hadamard inequality and an application for Gini and Stolarsky means*, J. Inequal. Pure Appl. Math. **5** (2004), no. 2, Article 42, pp. 8 (electronic).
- [CzP05] ———, *Local monotonicity properties of two variable Gini means and the comparison theorem revisited*, J. Math. Anal. Appl. **301** (2005), no. 2, 427–438.
- [Gin38] C. Gini, *Di una formula compressiva delle medie*, Metron **13** (1938), 3–22.
- [LSh83] E. Leach and M. Sholander, *Extended mean values II*, J. Math. Anal. Appl. **92**
- [Los71b] L. Losonczi, *Über eine neue Klasse von Mittelwerten*, Acta Sci. Math. (Szeged) **32** (1971), 71–81. MR **47**:421
- [LP96] L. Losonczi and Zs. Páles, *Minkowski's inequality for two variable Gini means*, Acta Sci. Math. (Szeged) **62** (1996), no. 3-4, 413–425. MR **98c**:26012
- [LP98] ———, *Minkowski's inequality for two variable difference means*, Proc. Amer. Math. Soc. **126** (1998), no. 3, 779–789. MR **98e**:26022
- [NP03] E. Neuman and Zs. Páles, *On comparison of Stolarsky and Gini means*, J. Math. Anal. Appl. **278** (2003), no. 2, 274–284. MR **2004k**:26039
- [Pal82b] Zs. Páles, *A generalization of the Minkowski inequality*, J. Math. Anal. Appl. **90** (1982), no. 2, 456–462. MR **84j**:26024
- [Pal88b] ———, *Inequalities for differences of powers*, J. Math. Anal. Appl. **131** (1988), no. 1, 271–281. MR **89f**:26023
- [Pal88c] ———, *Inequalities for sums of powers*, J. Math. Anal. Appl. **131** (1988), no. 1, 265–270. MR **89f**:26024
- [Sto75] K. B. Stolarsky, *Generalizations of the logarithmic mean*, Math. Mag. **48** (1975), 87–92. MR **50** #10186