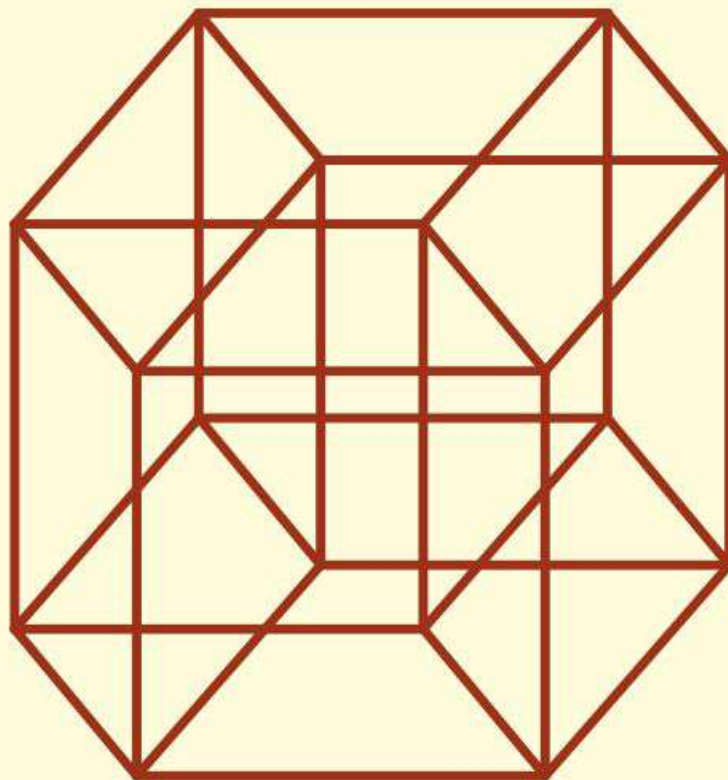


Szabó József

INFORMATIKAI MATEMATIKAI ALAPVETÉS



Szabó József

INFORMATIKAI
MATEMATIKAI ALAPVETÉS

DUPRESS

INFORMATIKAI MATEMATIKAI ALAPVETÉS

írta
Szabó József

2. javított kiadás



Debreceni Egyetem, Informatikai Kar
Debrecen, 2010.

Lektorálta:

Dr. Bácsó Sándor, egyetemi docens, tanszékvezető
Dr. Fazekas Gábor, egyetemi docens, dékánhelyettes

A második, javított kiadás a helyesírás és képlet kijavításain túl némi változást is tartalmaz, figyelembe véve azt, hogy az első kiadás óta a levelező és nappali hallgatóknak az anyagot többször, kb. nyolcszor is tanítottam.

Debrecen, 2009. december.

Prof. Dr. Szabó József
egyetemi magántanár

ISBN 978 963 318 074 7

© Debreceni Egyetemi Kiadó Debrecen University Press,
beleértve az egyetemi hálózaton belüli elektronikus terjesztés jogát is

Kiadta a Debreceni Egyetemi Kiadó Debrecen University Press
www.dupress.hu

Felelős kiadó: Dr. Virágos Márta

Készült a Debreceni Egyetem sokszorosítóüzemében, 2010-ben
10-588

" A matematika nemcsak megtanulható, hanem igen érdekes is"
idézet egy magyar szakos informatikus könyvtáros levelező hallgatótól

Előszó

A matematika átfogja az egész életet, társadalmat. Ma már megenni nélküle nem lehet, vagy nagy felelőtlenség. Pedig a matematika se nem természettudomány, se nem társadalomtudomány. Emberi absztrakció, de nagyon jó, mert segítségével eltalálták a Holdat is, a Marsot is. Ki lehet számolni egy betegség összetevőit, hogy a gyógyszer hatása az elvárt legyen. Nagy házakat, hidakat lehet építeni, modellezni lehet társadalmi folyamatokat, informatikai eszközöket, szoftvert és hardvert lehet készíteni, ami megkönnyíti az emberek munkáját.

De a matematikának más szerepe is van. Szigorú gondolkodásmódja fegyelmeztetebbé, alaposabbá teszi felhasználóját. Bizony az általános műveltséghez nagyon hozzátartozna. Nap mint nap tapasztaljuk a televízióban, rádióban, hogy a matematika alkalmazásaiban az emberek igen gyengék. Ha egy üzemből elbocsájtják a dolgozók 50%-át, majd egy-két év múlva ismét elbocsájtják a dolgozók 50%-át, akkor az üzemben még elég sokan maradtak, az eredeti létszám 25%-a. A fehér tagadása a nem fehér. Ha egy politikusra valamit mondanak, és ő azt mondja, hogy nem, az nem cáfolat csupán ellenmondás, ellene mond. Gyakori hiba a van olyan és a minden egyes azonosítása. Bizony sokkal több matematikát kellene tanulni.

De nem mennyiségileg, hanem minőségileg. A matematika fogalmakkal dolgozik. El lehet felejtetni sok mindent, de az egész szellemének meg kell maradni. Meg kell maradnia annak is, hogy a matematikát az emberek csinálták, ezért megtanulható. A természet vagy a társadalom sokkal bonyolultabb. Valamit tudunk róluk, aztán kiderül, hogy az nem is úgy volt, és kezdhjük az egészet előlről.

Az természetes dolog, hogy az informatikus könyvtáros hallgatóknak kell valami matematikát tanulni, hiszen tárgyaik 40%-a informatika jellegű és a nyelvezet miatt is, meg az összefüggések miatt is szükség van matematikai ismeretekre. Ez a matematikai tárgyalás azonban igyekszik olyan lenni, hogy azt a többségükben bölcsész beállítottságú hallgatók is megértsék. A könyvben sok történeti adat is van, a matematika történetére vonatkozóan, hiszen küzdelem árán jött létre a matematika is, és ebből is kívántunk egy kis ízelítőt adni. A magyarországi matematika élenjár a világban. Tartalmát tekintve olyan válogatás ez, amely az informatikában való eligazodást segíti. Olyan fejezetek is vannak benne, amelyeket egy klasszikus matematikatanár sohasem tanult. Az is igaz, hogy egy-egy fejezet a matematikatanár vagy a szakinformatikus tanulmányai-

Informatikai matematikai alapvetés

ban több féléves anyag. Vagyis ez egy informatikai szempontú matematikai alapvetés, nem matematikusok számára.

Végül nagyon remélem, hogy aki ezt a könyvet végigtanulja, a matematikának, annak gondolkodásmódjának nem ellensége, hanem barátja lesz. Nem helyezkedik arra az álláspontra, hogy én ezt úgy sem értem.

Abban, hogy én ezt a könyvecskét megírtam nagy szerepük van a levelező hallgatóknak, akik éveken át a vizsgákon igen jól szerepelnek, és biztos állíthatom, hogy nem félnek a matematikától, mert az egészre érvényes az első idézet.

1. Axióma, definíció, tétel, bizonyítás

A matematika egy nagyon nagy fokú absztrakció eredménye. A formákról és a mennyiségekről szól.

A mennyiségek a számok, mint pl. 5, 9, 1 stb. A számokat műveletek kapcsolhatják össze, de lehet a számoknak is saját tulajdonságuk. Az 5 egy olyan szám, amely csak 1-gyel és önmagával osztható, vagyis pontosan két osztója van. Sem a 9, sem az 1 nem ilyen. A 9 osztható 1-gyel és önmagával, de még 3-mal is. Az 1-nek nincs két osztója, hanem csak az 1 az osztója. Az 5 prímszám, a 9 összetett szám, az 1 pedig teljesen különleges. Ha vele megszorozok egy számot, akkor a szorzat annyi lesz, mint az eredeti.

A számok absztrakciók eredményei. A valóságban 5 nincs. De van, pl. 5 alma. És, ha az 5 almát el akarom osztani gyerekek között elvágás nélkül és egyenlően, azt a fenti tulajdonság szerint csak úgy tudom, hogy öt gyerekek adok egyet-egyet, vagy egynek adom oda az összest. És ez abból adódik, hogy az 5 prímszám.

Ami a formákat illeti, azok is minden valóságos tulajdonságuktól megvannak fosztva. Az emberiség igen sok kereket gyártott, amíg megalkotta a kör fogalmát. A téglalap a derékszögű négyszög. Ha egy ilyen négyszöget, pl. ház alapját kitűzünk, akkor annak a szemköztes oldalai közel egyenlők és az átlói is közel egyenlők lesznek. A matematika téglalapja ugyan nem létezik, de annak a szemköztes oldalai pontosan egyenlők, és az átlói is pontosan egyenlők. Az is igaz, hogy ha egy négyszög szemköztes oldalai egyenlők és az átlói is egyenlők, akkor az téglalap. Az utóbbi két mondat egymás megfordítása. Mivel mindkét állítás helyes, ezért azok egyenértékűek. A geometriai formák a mértani testek és síkidomok. Ezek nem léteznek, ezért tökéletesek. Ki lehet számítani a testek térfogatát, felszínét stb. És ezeket az ismereteket alkalmazni lehet a valóságos testekre, síkidomokra. Egy kavicsrakás térfogatának megbecsülésére, egy ház kifestéséhez szükséges anyagok összeállítására is.

A matematikai fogalmak igen jó és nagyon tartós absztrakciók. A parabola tengelyével párhuzamos vezérsugarak a paraboláról úgy verődnek tovább, hogy átmennek egy fix ponton. Ez egy geometriai tulajdonsága a parabolának. Archimédész azonban Sirakuza kikötőjében a katonákat úgy állította fel egy parabola mentén, hogy pajzsaikról a nap sugarai az ellenséges hajóhadra irányuljanak, hogy felgyújtsák azokat. A parabola tulajdonságait felhasználva sikerült az ellenség hajóiban jelentős károkat okozni, és az ellenséget megfutamítani. Ez a matematikai eredmények egy alkalmazása volt. Archimédész nevéhez igen sok alkalmazott matematikai eredmény fűződik.

A matematika szükségletekből és az önfejlődés útján jött létre. Gazdasági és geometriai felvetéseket kellett megoldani. Össze kellett számolni a vagyont, értékelni kellett annak a gyarapodását. Ha pedig építeni kellett, akkor a geometriára volt szükség. De akkor is az kellett, ha a folyók áradása elmosta a

Informatikai matematikai alapvetés

mezsgyét és újra kellett mérni a területet. Mindezekhez recepteket állítottak össze. Érdekes volt a háromszög területének a kiszámítása. A rövid oldalt meg kellett szorozni a hosszúval és osztani 2-vel. Ez a Nílus áradásainál nem nagyon rossz érték, hiszen a folyóra lenyúló hosszú csíkszerű parcellákra kellett alkalmazni, azaz a magasság és a hosszú oldal nem sokban tértek el egymástól. Az építkezésekkor a timpanon területének számításánál azonban már szemlátomást van eltérés. Ebben a mondatban szándékosan szerepel a szemlátomás szó. Ezt a matematika nem tűri, mivel a szemlátomás torz is lehet.

Axiómák

I.e. 300 körülre ért meg a geometria arra, hogy megkezdjék a megalapozását. Ez abból állt, hogy bizonyos dolgokat, mint igazakat elfogadtak és minden egyebet abból származtattak a logikus gondolkodás szerint.

Euklidesz volt az első, aki alapelvekből, axiómákból épített fel matematikai, geometriai rendszert. Igaznak fogadott el néhány dolgot és abból következtetett a mai napig is teljesen helytálló dolgokra. A matematika ebben is eltér a természettudományoktól, ugyanis a természetet nem érdekli, hogy mit tudunk róla, az megy a maga útján. Kromoszómák addig is voltak, amíg nem fedezték fel őket, a Föld kering a Nap körül, ha ez nem is így látszik ...

Brassai Sámuel bízta meg a Magyar Tudományos Akadémia Euklidesz Elemek munkájának magyarra fordításával. Az első magyar nyelvű kiadás 1865-ben történt. (a második 1983-ban). Euklidesz 5 axiómából indult ki. Mivel erre az időre tehető a magyar matematikai nyelv kialakulása is, itt a könyvtáros szakon nem árt az axiómák eredeti, első fordításban való leírása. Ezek az alábbiak:

1. Kívántassék meg, akármely ponttól akármely ponthoz egyent vonhatni.
2. És egy határozott egyent folyvást egyenesben megnyújthatni.
3. És minden középponttal és közzel kört írhatni.
4. És hogy minden derék szeglet egyenlő legyen.
5. És hogy ha két egyent úgy vág keresztül egy egyen, hogy az azonégyszögű belső szegleteket két deréknél kisebbé teszi, a két egyen határtalanul kinyújtva összeérjen affelé, amelyről a két deréknél kisebb szegletek vannak.

Több dolgot észre kell vennünk. Az ötödik leírása hosszabb, mint a megelőző négy együtt, ezért rögtön felvetődik, hogy nem lehetne-e levezetni a többiből. Ezt 2000 évig nem tudták levezetni, de akkor Bolyai János egy geometriai rendszert (abszolút geometria) alkotva bebizonyította, hogy az első négyből nem is lehet. Megállapíthatjuk azt is, hogy az axiómákat a gyakorlat nem támasztja alá maradéktalanul (ellent nem mond). Vegyük a másodikat. Senki sem tudja a meghosszabbításokat ellenőrizni. A harmadikra gondolva ki tudná

Informatikai matematikai alapvetés

megrajzolni azt a kört, amelynek középpontja az olvasó személy valamely pontja, egy pontja pedig mondjuk a Nap középpontja vagy más pontja.

Viszont be lehet bizonyítani az első négy alapján, hogy az egyenlő szárú háromszög alapján fekvő szögei egyenlők, hogy a háromszög két oldalának összege nagyobb, mint a harmadik oldal, hogy a háromszög belső szögeinek összege legfeljebb 180° . De, ha igaznak tekintjük az 5. axiómát, akkor a szögösszeg pontosan 180° . Kijön a Pitagorasz-tétel is, és az is, hogy a sík bármely körének területét elosztva az átmérőjével, ugyanazt a számot kapjuk.

A következő axiomatikus rendszer több mint 2000 év múlva születik meg. Pl. a természetes számok axiómarendszere Peanótól (1858-1932) való. Euklidész rendszerét Hilbert (1862-1943) tökéletesítette.

Definíció

A matematikában mindig megmondják, hogy miről van szó, definiálják a fogalmakat, megadják, hogy mi mit jelent. Euklidész axiómáit megelőzik a definíciók, értelmezések. Nézzünk néhányat.

1. *Pont* az, melynek semmi része.
2. *A vonal* szélesség nélküli hossz.
3. *A vonal végei pontok.*¹

És ez megy még tovább. Nem matematikai, hanem nyelvi érdekességénél fogva közlünk még néhányat.

1. *Buta szeglet* az, amely a deréknél nagyobb.
2. *A háromoldalú képletek közül egyenlő oldalú háromszeg* melynek mind a három oldala egyenlő.
3. *Kajcsos*, melynek egy oldala sem egyenlő a másikkal.
4. *Butaszegletű*, melynek egyik szeglete buta.²

A matematikában vannak azonban olyan definíciók is, amelyek nem elnevezések. A hatványozás ismételt szorzás az egész kitevőkre. Így egy sor tulajdonságot tudunk megállapítani. Amikor a hatványozást kiterjesztjük a nulla, negatív illetve tört kitevőjű hatványokra, azt úgy tesz-

¹ Hilbert tökéletesítése abból állt, hogy az axiómákban szereplő fogalmakat nem kell megmagyarázni. Azokat az axiómákban elfoglalt viszonyok határozzák meg, hiszen az axiómák azáltal jönnek létre, hogy a fogalmakat egyre egyszerűbbekkel írjuk le. Ugyanaz a helyzet, mint a filozófia alapfogalmaival, a tudattal és az anyaggal. Csak az egymás közötti viszonyok a lényegesek.

² A mértani testek közös neve terj, a síkidomoké pedig lapos terj. A képlet képződményt, alakzatot jelent.

Informatikai matematikai alapvetés

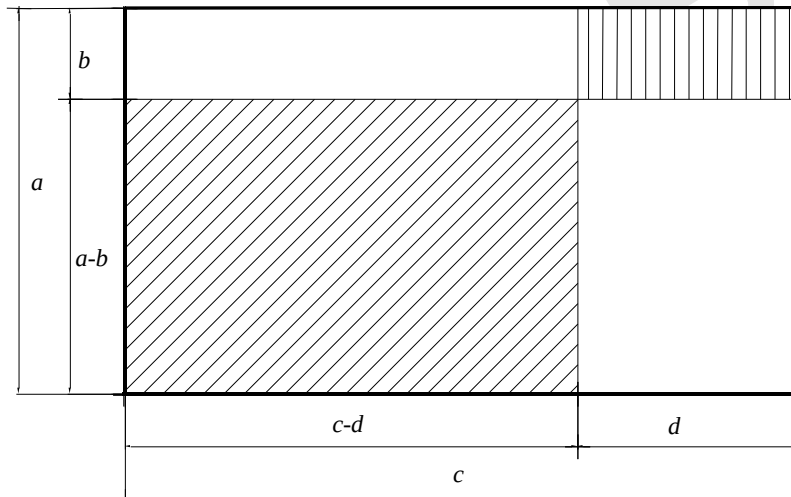
szük, hogy az ismert azonosságok majd azokra is érvényesek legyenek. Tehát:

$$a^0 = 1, \quad a^{-n} = \frac{1}{a^n}, \quad a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}.$$

Így értelmezzük őket, ez a definíciójuk.

Az emberek előbb tudtak a törtekkel számolni, mint a negatív számokkal. Az, hogy két pozitív szám szorzata is pozitív, érthető. Ha két embernek *tartozok* száz - száz forinttal, akkor 200 forint tartozásom van, vagyis a pozitív és negatív szám szorzata negatív.

De milyen lesz két negatív szám szorzata? Régen geometriai úton magyarázták a számolást is. Most mi is abban a stílusban járunk el. Vesszünk egy a és c oldalú téglalapot és levágunk belőle egy b és egy d szélességű sávot. Ki akarjuk számolni az $(a-b)(c-d)$ -t.



Az $(a-b)(c-d)$ a ferdén sraffozott területtel egyenlő.

Ezt kirakhatjuk a nagy téglalapból úgy, hogy abból elveszünk két csíkot.

$ac - bc - ad$. Ekkor azonban nem a ferdén sraffozott részt kapjuk meg, mivel a függőlegesen sraffozott részt duplán vontuk le. Ezt a db mennyiséget vissza kell adni. Így

$$(a-b)(c-d) = ac - bc - ad + db$$

Informatikai matematikai alapvetés

Levezettük két tag különbségének a szorzatát is. A pozitív számok szorzása problémamentes. A tartozás növelése is logikus, de a negatív szám negatív számmal való szorzása nem magától értetődő.

Ellentmondásra tehát akkor nem jutunk, ha abban állapodunk meg, hogy a negatív szorozva negatívval pozitívet ad.

Tétel, bizonyítás

Amikor a matematikai állításokat megfogalmazzuk, tételeket állítunk fel. Ennek rövidnek és egyértelműnek kell lennie. Az állítás persze csak akkor válik tétellé, ha be is bizonyítottuk. A bizonyítás azt jelenti, hogy elfogadott állításokra alapozva a logika következtetési szabályai szerint eljárva eljutunk az állításunkhoz. Ez akkor a legpontosabb, ha csak az axiómákra alapozunk. Ez azonban sokszor nagyon hosszadalmas lenne.³

Euklidesz a geometriai rendszerét feladatokon keresztül dolgozza fel. Ezek közül az első az egyenlő oldalú háromszög szerkesztése, a második szakasz felmérése egyenesre, a harmadik szakaszból kisebb szakasz elvétele. Ezeket szépen végig tudja bárki követni az axiómákból. És, ha az Elemekbe elég messzire elmegyünk, megtalálhatjuk a Thalész-tételt, a mértani közepeket, a szabályos ötszög és a tízszög szerkesztését, a szabályos poliédereket. Az algebrai ismeretek is geometriai megvilágításban vannak.

A matematikai állítások csak annyiban igazak, amennyire az axiómák igazak. De több fajta axiómarendszert lehet készíteni és ezek esetleg nagyon szoros kapcsolatba is kerülhetnek egymással. Amikor Descartes által megszületett a koordináta geometria, az történt, hogy a matematikai igazság kérdése áttevődött a valós számokkal való számolásra. Ma az axiómák igazságtartalmában relatív ellentmondás-mentességet mondhatunk csak ki. Pl. a geometria axiómarendszere akkor ellentmondásmentes, ha a természetes számok Peano-féle axiómarendszere is az. De, hogy a Peano-féle axiómarendszer ellentmondásmentes-e, a matematikán belül már nem lehet eldönteni.⁴

Mi nem járjuk be egyik matematikai rendszert sem, az axiómáknál sokkal több mindent feltételezünk. Minket megnyugtathat az a tény, hogy a matematika elég stabil pontja az emberi ismeretnek, hiszen segítségével, gigantikus épületeket, hidakat lehet tervezni, gazdasági elemzéseket lehet végezni és akár a Holdat is el lehet találni.

Azért megnézzünk néhány érdekes bizonyítást, különösképpen a stílusokat.

³ Pl. be kellene bizonyítani, hogy az egyenesnek kettőnél több pontja is van

⁴ Az utóbbi két mondat Ruzsa Imre debreceni előadásából való, amelyet az 1960-as években tartott az V. tanteremben.

Informatikai matematikai alapvetés

1. Tétel

Ha egy pozitív egész számból elvesszük a számjegyek összegét, akkor 9-cel osztható számot kapunk.

Bizonyítás

A szám egyesekből, tízesekből, százasokból, ezresekből stb. áll.

Tehát

$$\begin{aligned} & \dots + 1000x_4 + 100x_3 + 10x_2 + x_1 - \dots x_4 - x_3 - x_2 - x_1 = \\ & = \dots 999x_4 + 99x_3 + 9x_2 = 9(\dots 111x_4 + 11x_3 + x_2) \end{aligned}$$

Tehát a szám tényleg osztható 9-cel.

2. Tétel

Végtelen sok prímszám van.

Bizonyítás (Euklidész alábbi bizonyítását joggal nevezik a matematikai bizonyítások gyöngyszemének)

Tudni kell, hogy azokat a pozitív egész számokat hívják prímszámoknak, amelyeknek pontosan két osztójuk van. Ez nyilván az 1 és maga a szám.

Tegyük fel, hogy az állítás nem igaz, azaz véges sok prímszám van. Akkor ezeket fel lehet sorolni. Íme:

$$p_1, p_2, p_3, \dots, p_k$$

Képezzünk belőlük összeszorzásukkal egy számot, majd adjunk hozzá 1-et!

$$A = p_1 \times p_2 \times p_3 \times \dots \times p_k + 1$$

Az A nem osztható p_1 -gyel, mert az meg van benne

$p_2 \times p_3 \times \dots \times p_k$ -szor és még marad 1. De éppen így nem osztható a többi prímszámmal sem, mert mindig lesz maradék, az 1. Tehát akkor az A maga is prímszám. Helytelen volt az a feltevésünk, hogy fel lehet írni az összes prímszámot, tehát végtelen sok prímszám van.

Bizonyításunk *indirekt bizonyítás* volt és ezt, mint módszert sokszor fogjuk használni.

A prímszámokat nézve találunk köztük különlegeseket is. Van köztük páros is, igaz, hogy csak egy. Aztán vannak olyanok, hogy párban vannak, mert közöttük csak egy szám van. Ilyenek 3,5 aztán 5,7 aztán 11,13 aztán 17,19 stb. Ezeket a számokat ikerprímeknek hívják. Vajon ezek is végtelen sokan vannak? Ez ma is megoldatlan probléma, de az előbbi té-

telt már Euklidesz bebizonyította. Ma igyekeznek nagy ikerprímeket keresni. Ehhez számítógépeket és komoly matematikai apparátust használnak. Ez sport, matematikai sport.⁵ Vannak világcsúcstartók. Ilyen világcsúcstartó Járai Antal is, intézetünk egykori matematikusa. Az általa talált ikerprímszám kereken 13000 számjegyű. Hogy képünk legyen arról, hogy mekkora is ez a szám, veszünk egy közepes alakméretű könyvet. Egy ív, azaz 16 oldal 40000 kis m betű helyből áll. Ez az ikerprím szám akkor mintegy 5 oldalon írható fel. Még másként is megvilágítjuk a számot. A legközelebbi csillag 4 fényévre van tőlünk. (A Nap csak 8 percre) ha a csillag tőlünk való távolságát mm-ben kívánjuk kifejezni, akkor ahhoz csupán 20 számjegyre van szükség, és ez fél nyomtatott sor sincs. Négy év alatt a fény

$$3000000000000 \times 60 \times 60 \times 24 \times (3 \times 365 + 366) = \\ = 37869120000000000000 \text{ mm-t tesz meg.}$$

A 13000 jegyű iker prím megtalálása tehát igen nagy teljesítmény lehetett. De ez még mindig nem jelenti azt, hogy végtelen sok iker prím van.

3. Tétel

Ha n természetes szám, akkor $n^3 + 23n$ osztható 6-tal.

Bizonyítás:

Ha $n=1$, akkor a kifejezés értéke $1+23=24$, tehát osztható 6-tal.

Ha $n=2$, akkor a kifejezés értéke $8+46=54$, tehát osztható 6-tal

Tegyük fel, hogy az állítás $n=k$ -ra igaz, azaz a $k^3 + 23k$ osztható 6-tal.

Képezzük a $k+1$ esetét:

$$(k+1)^3 + 23(k+1) = k^3 + 3k^2 + 3k + 1 + 23k + 23 = \\ = k^3 + 23k + 3(k^2 + k) + 24 = k^3 + 23k + 3(k(k+1)) + 24$$

A kifejezés első két tagja feltevésünk szerint osztható 6-tal, a harmadik tag 3-mal és 2-vel osztható, mivel k vagy $k+1$ páros, a 24 osztható 6-tal, tehát az egész kifejezés osztható 6-tal.

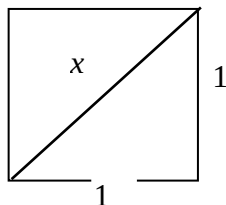
A bizonyítást a teljes indukció vagy matematikai indukció elve alapján végeztük.

⁵ Az interneten több kapcsolódó cikket találunk

Informatikai matematikai alapvetés

Kezdetben a pozitív egész számok alakultak ki, majd ezek általánosításaként a törtek. (és csak később a negatív számok)
Hamar kiderült azonban, hogy olyan "számokra" is szükség van, amelyek nem adhatók meg tört alakban.

Vegyünk egy egység oldalú négyzetet.



Az egységoldalú négyzet két oldala és egy átlója derékszögű háromszöget alkot, amelynek átlóját x -szel jelöltük. A Pitagorász-tétel alapján ez egy olyan szám, amelyet önmagával megszorozva 2-t kapunk.

A matematika nem díjazza a *nem tudom* szófordulatot, de a megalapozott *nem lehet* állításokat igen. Euklidész be tudta bizonyítani, hogy a fenti x szám nem létezik. Nem létezik akkor, amikor egy szám vagy egész vagy tört, hiszen más fajta szám Euklidész idejében még nem volt ismert.

Ezt a bizonyítást megnézzük: (Vagyis azt, hogy a $\sqrt{2}$ nem racionális szám)

Minden szám (racionális) két egész szám hányadosa. Ha van közös osztójuk, akkor azzal még egyszerűsítünk.

Legyen x egy olyan tört szám, amelyik már tovább nem egyszerűsíthető, azaz

$$x = \frac{p}{q}$$

A Pitagorász-tétel szerint

$$x^2 = \left(\frac{p}{q}\right)^2 = 1^2 + 1^2 = 1 + 1 = 2.$$

A négyzetre emelés után

$$p^2 = 2q^2.$$

A p^2 tehát egy páros szám. Mivel négyzet, ezért minden tényezője is négyzeten van, nemcsak 2-vel, hanem annak négyzetével, 4-gyel is osztható. Ebből következik azonban, hogy q is osztható 2-vel. És ezen a ponton ellentmondásra jutottunk. Helytelen volt a feltételezésünk. Vesszük az állításunk tagadását, azaz a 2 nem írható fel egy szám önmagával való szorzataként. Euklidész

Informatikai matematikai alapvetés

ezt úgy fejezte ki, hogy az egységoldalú négyzet átlója nem összemérhető a négyzet oldalával, azaz "inkommenzurábilis" hosszúság.

Egzisztencia-bizonyítás

Az Informatikai Karnak több mint 1700 hallgatója van. Olyanok, akik teljesen a karhoz tartoznak, mint a programtervező, programozó matematikus. És még olyan hallgatók, akiknek legalább az egyik szakjuk tartozik a karhoz. Ilyenek az informatikus könyvtárosok, informatikatanárok stb.

Bizonyítsuk be, hogy a Karhoz tartozó hallgatók között van 5 olyan hallgató, akiknek a születésnapja az év ugyanazon napjára esik.

A megoldáshoz nem kell a tanulmányi osztályra menni az adatokért. Az illetőket nem fogjuk tudni megnevezni, de a létezésüket tudjuk igazolni. Nekünk az a kedvezőtlen, ha a hallgatók szétszórtnak születnek. Tegyük fel, hogy az év minden napjára esik születésnap. Ehhez 365 vagy szökőév esetén 366 hallgató kell. A következő 365 vagy 366 embert ugyancsak egyenletesen terítjük. Ha ezt négyszer megtesszük, ahhoz csak 1464 hallgató kell. A következő hallgatónak is van születésnapja, és azon a napon már nem négyen, hanem többen ünnepelnek.

Szellemes az állítás az emberek hajáról. 80000 hajszerű embernél dúsabb hajú nincs. Bizonyítsuk be, hogy Debrecenben van három olyan ember, akinek a fején ugyanannyi hajszerű van.

Ezt a bizonyítási módot "skatulya elvnek" hívják.

2. Halmazok

A matematika előre pontosan meghatározott absztrakt fogalmakkal dolgozik. Vagyis egy matematikai vita közben nem fordulhat elő olyan a való életben gyakori helyzet, hogy "az attól függ, hogy mit értünk alatta". Két dolog lehetséges. A nehezebb az, amikor a fogalom nagyon alapvető, további fogalmakkal nem határozható meg. Ilyenkor az alapvető fogalmak egymáshoz való viszonyuk szerint vannak megadva. Ilyen alapvető fogalom a filozófiában az anyag és a tudat, a geometriában a pont, egyenes, sík, illeszkedik.

A halmaz is alapfogalom. Mi nem a teljesen tudományos, axiomatikus halmazelméletet, hanem az ún. naív halmazelméletet tanuljuk, vagy inkább bepillantunk.

Próbáljuk meghatározni az asztal fogalmát, azaz definiáljuk az asztalt. Hamar rájövünk, hogy az asztalra nem jellemző az, hogy hány lába van (0-tól sokig; vonaton az ablaknál 0, hosszú tárgyaló asztal 4-nél több lábú), hogy a lapja vízszintes-e (rajzasztal sokszor ferde), hogy felülete "sima" (kerti lécasztal) stb. Érdekes azonban, hogy az asztal fogalma minden 6-7 éves gyerek számára pontosan ismert abban az értelemben, hogy bármiről pontosan el tudja dönteni, hogy a kiszemelt valami asztal-e vagy nem.

Így vagyunk a halmaz fogalmával is. A halmaz matematikai alapfogalom, amelyet nem definiálunk, azonban úgy adjuk meg, hogy bármiről el lehetesen dönteni azt, hogy bele tartozik-e a szóban forgó halmazba vagy nem. A halmazokat rendszerint latin nagy betűkkel jelöljük, majd megadjuk az elemeik leírását. Pl.

$$A = \{1, 2, a, x\}$$

$$B = \{x \mid x \in \mathbb{R}, 0 < x < 1\}$$

$$C = \{a \text{ Debreceni Egyetem Informatikai Karának oktatói}\}$$

$$D = \{a \dots \text{heti ötöslottó sorsolásban résztvevő szelvényeinek halmaza}\}$$

$$E = \{a \dots \text{heti ötöslottó öttalálatos szelvényeinek halmaza}\}$$

Az A halmaznak négy eleme van, fel vannak sorolva. Ezt megtehetnénk a C esetében is. A B -nek eleme minden olyan valós szám, amely pozitív, de egynél kisebb. Az E -nek némely héten egyetlen eleme sincs. Az olyan halmazt, amelynek egyetlen eleme sincs, üres halmaznak nevezzük és $\emptyset$ -val jelöljük.

A halmazok közötti kapcsolatok:

1. *A* része *B*-nek:

$$A \subset B = C := \{\forall a \in A - \text{ra } a \in B \text{ is igaz}\}$$

Ez azt jelenti, hogy *C* mindazon *A*-beli elemekből áll, amelyek elemei *B*-nek is.

2. Halmazok egyenlősége:

Az *A* és *B* halmazt akkor mondjuk egyenlőnek, ha $A \subset B$ és ugyanakkor $B \subset A$ is teljesül.

(Úgy is szokták az egyenlőséget értelmezni, hogy ugyanazon elemekből állnak. De végtelen számosságú halmazok esetén ennek nem tudunk a végére járni. Illetve ki kell találni az előbbi definíciót.)

A halmazokon műveleteket hajthatunk végre. Ezek eredménye ismét halmaz. Tehát az eredmény elemeit kell definiálni.

3. Az *A* halmaz komplementere valamilyen, az *A*-nál általában bővebb *B* halmazra nézve:

$$\bar{A} := \{\forall x \in B, \text{ de } x \notin A\}$$

A komplementere olyan halmaz, amelynek az elemei az *A*-t mintegy "kipótolják" *B*-ig. *B*-ben benne vannak, de *A*-ban nem.

Gyakran szerepeltetünk egy olyan *H* halmazt, amelynek a vizsgálatba bevont, vagy bevonható minden halmaz része. Ezt a *H* halmazt teljes halmaznak nevezzük. Erre igaz, pl.

$$A \cup \bar{A} = H.$$

4. *A* unió *B*:

$$A \cup B = C := \{\forall x \in A \text{ vagy } \forall x \in B\}$$

Szavakban: *A* unió *B* az a *C* halmaz, amelynek minden olyan *x* eleme, amely eleme *A*-nak vagy eleme *B*-nek.

Informatikai matematikai alapvetés

5. A metszet B :

$$A \cap B = C := \{\forall x, \text{ amelyre } x \in A \text{ is és } x \in B \text{ is teljesül}\}$$

Szavakban: A metszet B az a C halmaz, amelynek minden olyan x eleme, amely eleme A -nak is és eleme B -nek is.

6. Halmazok különbsége:

$$A \setminus B = C := \{\forall x \in A, \text{ de } x \notin B\}.$$

C tehát olyan A -beli elemekből áll, amelyek nem esnek B -be.

7. Szimmetrikus differencia:

$$A \oplus B = C := \{A \setminus B \cup B \setminus A\}.$$

Néhány tulajdonság az unióra és a metszetre:

$A \cup B = B \cup A$	$A \cap B = B \cap A$	kommutativitás
$A \cup A = A$	$A \cap A = A$	idempotencia
$A \cup \emptyset = A$	$A \cap \emptyset = \emptyset$	
$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C$	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup C$	asszociativitás

8. Diszjunkt halmazok.

Az A és B halmazt diszjunktak vagy idegennek mondjuk egymáshoz, ha nincs közös elemük. Ezt képletszerűen többféle képen is kifejezhetjük. Pl.:

$$A \setminus B = A, \text{ vagy } A \cap B = \emptyset.$$

9. Descartes-szorzat (direkt-szorzat, keresztszorzat)

$A \times B = C = \{\text{az összes olyan pár, amelynek első eleme } A\text{-ból, második eleme } B\text{-ből való}\}.$

Pl. $A = \{0, 1, 2\}$ és $B = \{a, b, c\}$, akkor

$$A \times B = C := \left\{ \begin{pmatrix} 0a & 0b & 0c \\ 1a & 1b & 1c \\ 2a & 2b & 2c \end{pmatrix} \right\}$$

Informatikai matematikai alapvetés

A Descartes szorzatot ki lehet terjeszteni több halmazra is, és nemcsak véges halmazokra is.

Pl. $A = \{x \in R, 0 \leq x \leq 1\}$, $B = A$, $C = A$, akkor $A \times B \times C$ egy egység élű kocka pontjainak a halmazát jelenti.

Feladatok:

1. Igazoljuk, hogy $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$, $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$. (De Morgan azonosságok)
2. Igazoljuk, hogy $(A \setminus B) \cup (A \cap B) = A$.
3. Igazoljuk, hogy $(A \cap B) \setminus C = (A \setminus C) \cap (B \setminus C)$.
4. Igazoljuk, hogy $(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \cup C)$.
5. Igazoljuk, hogy ha $A \cup X = A \cup Y$ és $A \cap X = A \cap Y$, akkor $X = Y$.
6. Egy könyvtárban 67 ember dolgozik. Angolul tud 47, németül 35, mindkét nyelven 23 munkatárs. Hány fő nem tud sem angolul sem németül?
7. Oldjuk meg az alábbi egyenletet. Az egyenletben A és B adott halmazok, X a keresett halmaz
$$\overline{X \cup A} \cup \overline{X \cup \overline{A}} = B.$$

Halmazok számossága

A véges halmazok valahány elemet tartalmaznak, számosságuk az a valahány.
Pl.

$$A = \{a, b, c, aa, bb, cc\} \Rightarrow |A| = 6.$$

Azaz az A halmaz számossága 6. Világos, hogy véges halmazok uniója és metszete is véges.

A végtelen halmazok esete azonban sokkal bonyolultabb. Kiindulásul vehetjük a természetes számok halmazát. Ez a számlálás útján keletkezett halmaz. N -nel szokás jelölni és számosságát megszámlálhatóan végtelennek mondjuk, azaz

$$|N| = \text{megszámlálhatóan végtelen.}$$

És a matematikusok, filozófusok gondolkodtak.

Galilei a természetes számok alá odaírta a négyzetszámokat. Így

1 2 3 4 5 6 7 8 ...

1 4 9 16 25 36 49 64 ...

Mivel egyrészt a két számsor jól megfeleltethető egymásnak, ezért azt kellene mondani, hogy a két számosság egyenlő, másrészt a második sorban sokkal ke-

Informatikai matematikai alapvetés

vesebb szám van, mint az elsőben, hiszen hiányzik a 2, 3, 5, 6, 7, 8, stb., azt kellene mondani, hogy a másik számsor kevesebb elemű. Lehet, hogy több végtelen van? Ezen a ponton Galilei megijedt.

Leibnitz és Spinóza ellentmondásba keveredtek.

Kant a fenti ellenmondásban is alátámasztva látta a nézetét, miszerint a világ megismerhetetlen.

Bolzano azt mondta: úgy tűnik, hogy egy szakasznak nincs több pontja, mint a felének.

Georg Cantor (1845-1918) jutott legtovább, vagy egyáltalán elindult. Azt kellett definiálni, hogy mely végtelen halmazok számosságát tekintjük egyenlőnek. Bevezette az ekvivalens halmazok fogalmát.

Két halmazt ekvivalensnek mondunk, ha elemeik kölcsönösen egyértelműen feleltethetők meg egymásnak.

Ez más fogalom, mint a halmazok egyenlősége.

Vegyünk egy nagy termet székekkel, emberekkel, mint pl. az Aula. Szó-lítsuk fel az embereket, hogy üljenek le egy-egy székre. Ha álló ember marad, akkor ember van több, ha üres szék marad, akkor szék van több. A nagyságrend megállapításához nem kellett megszámolni sem az embereket, sem a székeket. Az ekvivalenciát összevetve az egyenlőséggel megállapíthatjuk, hogy

Az egyenlő halmazok ekvivalensek, de az ekvivalens halmazok nem egyenlők általában. Pl. a páros számok és a páratlan számok ekvivalensek, de egyetlen közös elemük sincs.

Tehát két végtelen halmaz számosságát akkor tekintjük egyenlőnek, ha a halmazok ekvivalensek.

Galilei problémája így megoldódott, a négyzetszámok számossága is megszámlálhatóan végtelen. És ilyen számosságú minden végtelen halmaz, ha elemei sorba rakhatók.

Az egész számok számossága is megszámlálhatóan végtelen, sorba rakhatók. Pl. így:

0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, 4, -4, ...

Ez nem nagyságrendi sorrend, de sorrend. Ha ebből kivesszük a páros számokat, egy megszámlálhatóan végtelen halmazt, a maradék ismét megszámlálhatóan végtelen. De el tudunk belőle venni végtelen halmazt úgy is, hogy ne végtelen halmaz maradjon, hanem véges. Vegyük el a fenti számsorból az abszolút értékben kettőnél nagyobb számokat, akkor a 0, 1, -1, 2, -2 számok, vagyis egy öt-elemű halmaz marad.⁶

⁶ A Tükröm, tükröm című filmben a matematika professzor így fakad ki a szépségével tisztában lévő tanítványára: "hányszor mondjam még magának, hogy ha egy végtelen halmazból elveszünk egy végtelen halmazt, akkor még mindig végtelen halmaz marad".

Vajon a racionális számok számossága is megszámlálhatóan végtelen? Ez nem attól függ, hogy sorba tudjuk-e őket rakni, hanem, hogy sorba rakhatók-e. Ízlelgessük a különbséget! A matematikában némely kérdés 2000 évig is kérdés volt, mert valamit nem tudtak megoldani.⁷ Akkor még a kérdés nyitott. A kérdés akkor kerül le a napirendről, ha azt igenlően vagy tagadólag megoldják. A kérdések többsége negatívan zárult. A kör négyszögesítése a π szerkeszthetőségén múlik. Csak 1882-ben derült ki, hogy a π transzcendens⁸ szám, és ezzel oldódott meg a kör négyszögesítése. Negatívan. A szögharmadolás és a kocka megkettőzése is negatívan zárult a felvetéstől mintegy 2000 évre.

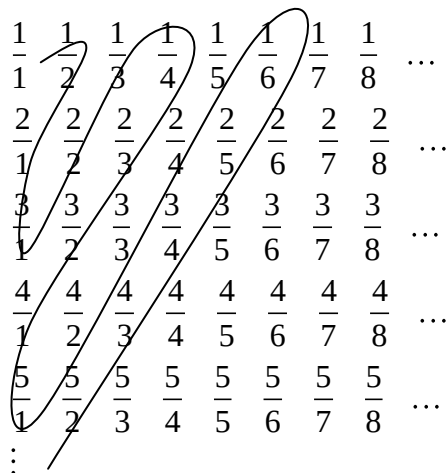
Nagyon ötletesen lehet sorba rakni a racionális számokat. Egy táblázatba gyűjtjük őket össze. A p/q racionális szám a táblázat p -edik sorának q -edik oszlopában található, azaz minden racionális szám szerepel a táblázatban. Innen már kínálkozik a sorrend, vagyis a bejárás stratégia. Ezt a számtáblázatba írt vonal mutatja. Az első néhány tag az alábbi:

$$\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{2}{1}, \frac{3}{1}, \frac{2}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{2}{3}, \frac{3}{2}, \frac{4}{1}, \frac{5}{1}, \frac{4}{2}, \dots$$

Az esztétika tanára, Barbra Streisand azonban ezt tudta és szép sikereket ért el a matematikatanárnál. Egyszer meg is ajándékozta a professzort egy kockára emlékeztető fejű mandzsettagombbal, amelyre az 1, 2, 3, 5 számokat vésette. "Jé ezek a prímszámok", lelkesedett a professzor. Mindkét mondatban matematikai hiba van. Mik a hibák?

⁷ A prímszámok számossága végtelen, de hogy az ikerprímeké az-e azt nem tudjuk. Egy szöveget megfelelni körzővel és vonalzóval gyerekjáték, megharmadolni azonban a 19. századig nem tudták. Azóta tudják, hogy nem lehet. Könnyű volt felvetni a kör négyszögesítését, vagyis a körrel azonos területű (kerületű) négyzet szerkesztését, vagy a kocka megkettőzését, azaz egy kocka élének ismeretéből a kétszer akkora térfogatú kocka élének megszerkesztését. De egyik feladat sem oldható meg.

⁸ Ha az egyenlet ismeretlenné az egyenletben az összeadás, kivonás, szorzás, osztás és gyökvonás kombinációjaként van felírva, akkor a gyököt algebrai számnak nevezik, ellenkező esetben transzcendens számnak. Pl. $x^2 + \sqrt{x} = 7$ gyökei algebrai számok, de az $x^2 + \sqrt{x} = \cos x$ gyökei már nem biztos, hogy azok. Körzővel, vonalzóval az Euklideszi lépésekkel csak bizonyos algebrai egyenletek gyökei szerkeszthetők, azaz egyetlen transzcendens szám sem.



Informatikai matematikai alapvetés

Ez a felírás akármilyen általános, mégsem tartalmazza az összes $[0,1]$ intervallumra eső számot. Sok számot nem tartalmaz, de, ha egyet is találunk, az is azt bizonyítja, hogy a valós számokat nem lehet sorrendbe rakni. Tekintsük azt a számot, amelyiknek első tizedes jegye eltér az első szám első tizedes jegyétől, a második tizedes jegye a második szám második tizedes jegyétől, és így tovább. Ezt a jelölést használjuk: $a = \neg b$, azaz a egyenlő nem b . Az alábbi szám nem szerepel a felírtak között:

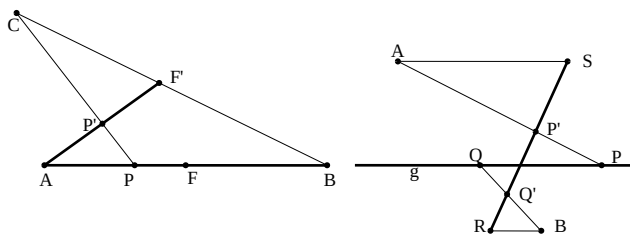
$$0.\neg x_{11}\neg x_{22}\neg x_{33}\neg x_{44}\neg x_{55}\dots$$

azaz, helytelen az az állítás, miszerint a valós számokat sorba lehet rakni. Ennél fogva a valós számok számossága más végtelen, mint a természetes számok számossága.

A valós számok halmazának számosságát **kontinuum** számosságnak nevezzük.

A $[0,1]$ szakasz pontjai és a $[0,1]$ intervallumra eső valós számok kölcsönösen egyértelműen megfeleltethetők egymásnak, ezért a szakasz pontjainak számossága is kontinuum.

Most lássuk Bolzano észrevételét, hogy a szakasznak nincs több pontja, mint a felének.



Ez akkor igaz, ha a szakasz és a fele között kölcsönösen egyértelmű kapcsolatot tudunk létrehozni. Vegyünk egy AB szakaszt az F felezéspontjával, majd az AF szakaszt mérjük fel A -ból, de ne az AB egyenesre. Nézzük az ábrát! A B és az elmozdított F pontra egyenest illesztünk és felvesszünk rajta egy C pontot. Ebből az AF tetszőleges P pontját az AB -re vetítve kapjuk P' -t. Ez a leképezés a szakasz és fele között kölcsönösen egyértelmű, tehát mindkét pont-halmaz számossága kontinuum.

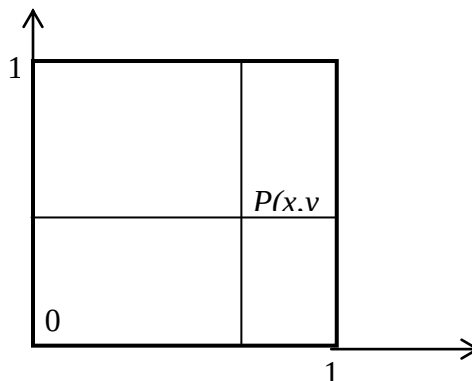
Az egyenes mint pont-halmaz is kontinuum számosságú.

Vegyünk egy egyenest és egy szakaszt, melynek végpontjai az egyenes különböző oldalára esnek. A szakasz végpontjain át húzzunk párhuzamosakat az adott egyenessel és vegyük fel rajtuk balra és fent az A és jobbra és lent a B pontot. A -ból vetítve a szakasz egyenes fölötti részét a jobboldali félegyenesre képezhetjük

Informatikai matematikai alapvetés

le kölcsönösen egyértelműen. B -ből indítva a vetítést, a szakasz másik része és a másik félegyenes között, mint pontthalmazok között létesíthetünk kölcsönösen egyértelmű kapcsolatot.

Az egységnégyzet pontjainak halmaza is kontinuum számosságú.



A négyzet tetszőleges pontja P az x, y koordinátákkal. Egy trükkel a koordinátpárból egyetlen számot készítünk. Ezt a módszert konkrét koordinátákon mutatjuk meg.

Legyen például

$$x=0.45836792558461745\dots$$

$$y=0.75968224685\dots$$

Az egy db valós számot úgy állítjuk elő, hogy a tizedes számjegyeket összevágjuk. Egyet az x -ből, egyet az y -ből.

$$A=0.475589366872922456\dots$$

Az A számot vissza is lehet fejteni. Így tehát a valós számok és a valós számpárok között kölcsönösen egyértelmű kapcsolatot hoztunk létre.⁹ Ezzel megmutattuk, hogy a négyzet pontjainak számossága kontinuum.

Hasonlóan a szakasz és az egyenes kapcsolatához, a bizonyítást kiterjeszthetjük a síkra is, azaz a sík pontjainak számossága is kontinuum. De kiterjeszthetjük a bizonyítást az egységkockára és magára a térre is. Vagyis a tér pontjainak számossága is kontinuum.

Azt gondolhatnánk, hogy akkor ez a két végtelen számosság van, a megszámlálhatóan végtelen és a kontinuum. De nem. Bebizonyítható, hogy egy kontinuum számosságú halmaz összes részhalmazainak számossága nagyobb, mint a kiindulási halmaz számossága. A legkisebbet a kontinuum számosságot alef zéróval ($\aleph_0$) jelöljük. És az index fut, felső korlát nincs.

⁹ Bizonyításunk némi pontosításra szorul a periodikus törtekkel kapcsolatban, de erre már nem térünk ki.

Informatikai matematikai alapvetés

Kérdés, hogy a megszámlálhatóan végtelen és a kontinuum számosság között van-e számosság. Több évtizedig volt nyitott ez a kérdés. Mivel alkalmas halmazt nem találtak, felállították a "**kontinuum hipotézis**"-t, azaz, hogy nincs közbülső számosság, de bebizonyítani sem azt, sem az ellenkezőjét nem tudták. Az axiomatikus halmazelmélet adta meg aztán a választ (20. század eleje) úgy, hogy lehet olyan axiómarendszer, amelyben van, és olyan is, amelyben nincs közbülső számosság.

Hasznos ismeret:

A pilótajáték, vagy iskolásoknál Szent Péter láncá abból áll, hogy valaki néhány embert beszervez, akiket arra kér, hogy azok is szervezzenek be embereket. A gyerekek esetében általában képes lapot kell küldeni a levélben az elsőnek, a nevet elhagyni és az ő nevét utoljára felírni mondjuk 5 példányban és a levelet 5 ismerősnek el kell küldeni azzal a felszólítással, hogy küldjön képes lapot az elsőnek ... és így tovább. A felnőttek pénzzel játsszák, olykor elhomályosító szöveggel. Hatásos lehet pl. hogy "már 3 éve tart és senki nem szakította meg" vagy "Argentínában Carmelo megszakította és rá pontosan 100 napra meghalt". A Föld lakossága véges halmaz. Kb. 6 milliárd. Ha mindenki csak 2 embert szervezne be, akkor is 33 lépés után már mindenki tagja a játéknak. ($2^{33} > 8$ milliárd) Vagyis a pilótajáték csak végtelen halmazra működik, ne vegyen részt benne senki.

3. A matematikai logika elemei

A matematikai logika a logikus gondolkodás formális tulajdonságait matematikai módszerekkel tárgyalja. Ítéletekkel dolgozik. Az ítélet olyan kijelentés, amelynek igazságtartalma egyértelműen eldönthető.

Kijelentő mondatok:

1. Szép idő van.
2. Jól nézel ki.
3. A menzán jól főznek.
4. A 17 prímszám.
5. Van legnagyobb prímszám.

Az első három megítélése bizonytalan.. A negyedik igaz, az ötödik nem igaz. Ezek tehát az ítéletek, míg az első három nem az. Minden ítélethez két érték valamelyike rendelhető. Ez lehet az (1, 0), vagy (igaz, hamis), vagy (pozitív, negatív), vagy (jelző fenn, jelző lenn) stb.

Az ítéletek között műveleteket értelmezünk, ezek:

1. Negáció p $\neg p$ (p, nem p),
2. Konjunkció $p \wedge q$ (p is és q is)
3. Diszjunkció $p \vee q$ (p vagy q)
4. Implikáció $p \rightarrow q$ (ha p, akkor q)
5. Ekvivalencia..... $p \leftrightarrow q$ (p és q akkor ekviva-

lens, ha vagy

mindkettő igaz, vagy

mindkettő hamis.)

Ezek kapcsolatát egy műveletáblában írjuk elő, amit akár definícióként, akár axiómákként kezelhetünk. A táblázatnak 4 sora van, mivel két ítélet igaz, hamis értéke 4 párban állhat.

p	q	$\neg p$	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \rightarrow q$	$p \leftrightarrow q$
i	i	h	i	i	i	i
i	h	h	h	i	h	h
h	i	i	h	i	i	h
h	h	i	h	h	i	i

A műveletekkel kapcsolatosan azonosságokat állapíthatunk meg. A legfontosabbak a De Morgan (dömorgan) azonosságok:

Informatikai matematikai alapvetés

$$\neg(p \wedge q) = \neg p \vee \neg q \text{ valamint } \neg(p \vee q) = \neg p \wedge \neg q.$$

Egyéb azonosságok:

$$\neg(\neg p) = p$$

$$(p \vee q) \vee r = p \vee (q \vee r)$$

$$p \leftrightarrow q = (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$$

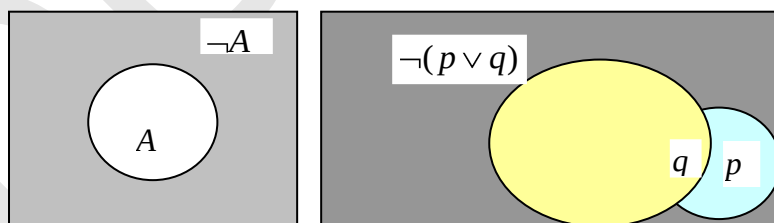
Példaként az utolsó azonosságot fogjuk igazolni. Az igazolás abból áll, hogy az ítélettábla mind a négy sorára be kell látni az egyenlőséget. Ezzel a bizonyítás véget is ér és teljes, mert a két ítélet több párba nem állítható egymással.

p	q	<i>bal oldal</i>	<i>jobb oldal</i>
i	i	i	$i \wedge i = i$
i	h	h	$h \wedge i = h$
h	i	h	$i \wedge h = h$
h	h	i	$i \wedge i = i$

Az ítélet táblázatban a mindkettő igaz, vagy mindkettő hamis jól beírhat, az jó definíciónak. A tételt használjuk a gyakorlatban, hogy ti. egyikből következik a másik, a másiktól pedig az egyik nem írható bele a táblázatba.

A matematikai logika a halmazokhoz is jól kapcsolódik.

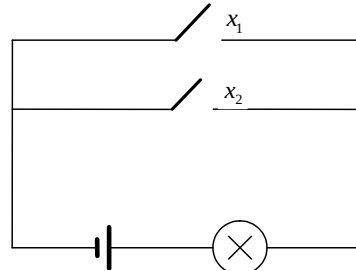
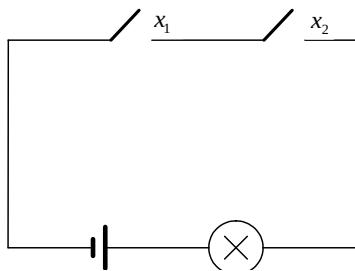
Ha pl. az állítás, hogy "ez a birka fehér", ennek a tagadása az, hogy "ez a birka nem fehér". És a tagadás nem szól a csíkos tigrisről, sem az én fekete cipőmről, jöllehet egyik sem fehér. Tehát a tagadás egy értelemszerűen bő halmazra vonatkozik. Ezt a legbővebb halmazt, a teljes halmazt egy téglalappal szemléltetjük. (az összes birkák halmaza) és ennek egy része, amit körlappal szemléltetünk (a fehér birkák halmaza).



A jobboldali ábrán a q és p ítéleteket látjuk, valamint ezek vagylogos bekövetkezésének tagadását.

Informatikai matematikai alapvetés

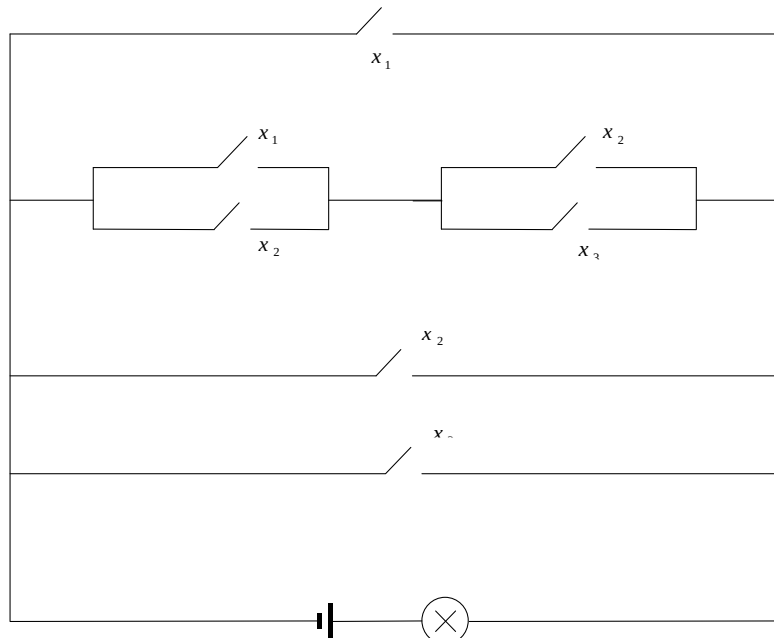
Áramkört lehet készíteni az összetett ítéletek kiértékelésére a konjunkciójára és a diszjunkciójára. Az áramkör égőből, áramforrásból és két kapcsolóból áll. Igaz értéket csukott, hamis értéket nyitott kapcsoló szemléltet. Ha az égő világít a kifejezés értéke igaz. A konjunkciót a baloldali áramkör, a soros kapcsolás modellezi, míg a diszjunkciót a jobboldali, a párhuzamos kapcsolás.



Vegyünk egy bonyolultabb feladatot. Mi az értéke az alábbi kifejezésnek, ha ismertek az x_1 , x_2 , x_3 logikai változók aktuális értékei?

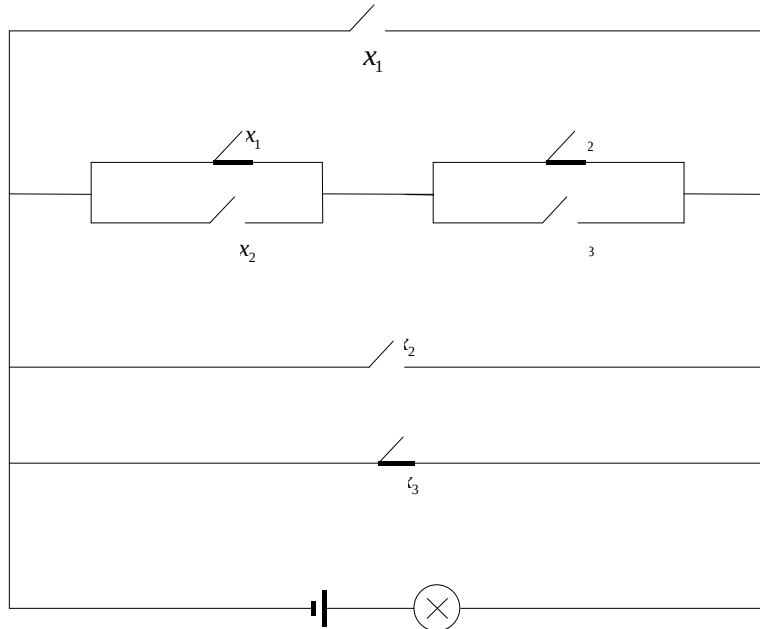
$$\neg x_1 \vee ((x_1 \vee \neg x_2) \wedge (x_2 \vee \neg x_3)) \vee \neg x_2 \vee x_3.$$

A kifejezésben 3 logikai változó van. Négy vagyos kapcsolatot fedezhetünk fel. A második maga is összetett, két ises részből áll. A három vagyos elemet párhuzamos, a másodikban a két isest soros kapcsolással, és ebben a két vagyos részt párhuzamos kapcsolásokkal modellezhetjük. Így kapjuk az alábbi ábrát. Ez az ítéleteknek nem a konkrét értékeit, hanem csak a kapcsolódásait tünteti fel.



Informatikai matematikai alapvetés

Most átállítjuk a kapcsolókat a konkrét esetnek megfelelően, azaz az igaz értékeket becsukjuk. Ezt a rajzon vastagabb kapcsolókkal tüntettük fel.



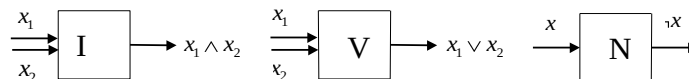
Azt feltételezzük, hogy x_1, x_2, x_3 mind igaz, a $\neg x_1, \neg x_2, \neg x_3$ alakok mind hamisak.

Feladat:

Készítsünk áramkört az alábbi kifejezéshez is! (házi feladat)

$$(x_1 \wedge x_2) \vee (x_2 \wedge \neg x_3) \vee (x_1 \wedge \neg x_3).$$

Most logikai építőköveket készítünk. Ezek technikai változatát kapuknak nevezzük. Bemegy az x_1 és x_2 és kijön $x_1 \wedge x_2$. Vagyis ez egy soros kapcsolás egy szimbolikus jelölésbe tömörítve. Ugyanígy bemegy az x_1 és x_2 és kijön $x_1 \vee x_2$. Végül bemegy az x és kijön $\neg x$.



Ezekből most felépítjük a kettes számrendszerbeli számok összeadását. Az összeadás számjegyenként történik. A számjegyek 1 vagy 0, és az eredmény is 1

Informatikai matematikai alapvetés

vagy 0, a maradék is 1 vagy 0. A számjegyeket szimbolikusan x_1 és x_2 -vel jelöljük, az eredményt $e(x_1, x_2)$ -vel, a maradékot $m(x_1, x_2)$ -vel. A lehetséges eseteket egy táblázatban foglaljuk össze.

x_1	x_2	$e(x_1, x_2)$	$m(x_1, x_2)$
0	0	0	0
0	1	1	0
1	0	1	0
1	1	0	1

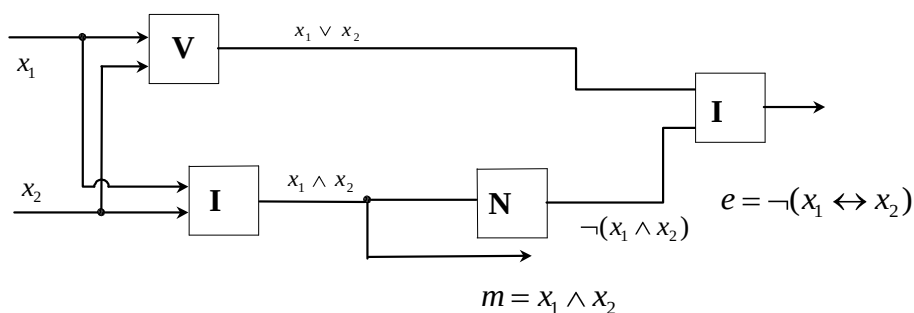
Láthatjuk, hogy

$$m(x_1, x_2) = x_1 \wedge x_2$$

$$e(x_1, x_2) = \neg(x_1 \leftrightarrow x_2),$$

de

$$e(x_1, x_2) = (x_1 \vee x_2) \wedge \neg(x_1 \wedge x_2).$$



Ezt az összeadó rendszert a 2. és 3. generációs gépekbe építették be. Nekünk a séma azzal az érdekességgel szolgál, hogy két szám összeadását igenekkel és nemekkel, isekkel és vagyokkal is ki lehet fejezni. Mert az természetes, hogy logikai elemeket össze tudunk fűzni, de most a számolásra láttunk példát. A matematikai logikával számolunk.

4. Számfajták, komplex számok

Az emberiség sokáig csak a pozitív egész számokat ismerte. A következő számfajta a törtszám volt, majd később a negatív számok következtek. Euklidész idejében i.e. 300 évvel csak ezek a számok voltak ismertek. A Pitagorasz-tétel ismert volt. Így Euklidész az egységoldalú négyzet átlóját ösz-szemérhetetlen mennyiségnek vette. Olyan mennyiség volt ez, amelynek négy-zete 2. Azt be tudták bizonyítani, hogy ez az érték nem lehet tört alakú, és ezt a magyar középiskolák mindegyikében bebizonyítják ma is.

A tizedes törteket nagyon későn, csak a középkorban találták fel. Európában Kopernikusz (1473-1543) használta először csillagászati számításokra, de a kínaiak 100 évvel előbb már ismerték. A számok pontos matematikai fogalmá-nak kialakulása még későbbi. Pl. a természetes számok axiómarendszerét Peano (1858 - 1932) adta meg. A valós számok mai fogalma Dedekind (1831-1916) illetve Cauchy (kosi) (1789-1857) nevéhez fűződik.

Az első és másodfokú egyenletek megoldása után kíváncsossá vált a magasabb fokú egyenletek megoldása is. És mint az exponált problémákkal len-ni szokott egyszerre több irányból is született eredmény.¹⁰ Az egyenlet típusa és a megoldás képlete az alábbi:

$$x^3 + px = q \quad x = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}.$$

A képletet Cardanoról nevezték el.

Alkalmazzuk ezt a képletet az $x^3 - 15x = 4$ konkrét egyenletre. Helyettesítsünk bele a képletbe!

$$x^3 - 15x = 4 \quad x = \sqrt[3]{\frac{4}{2} + \sqrt{\left(\frac{4}{2}\right)^2 + \left(\frac{-15}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{\frac{4}{2} - \sqrt{\left(\frac{4}{2}\right)^2 + \left(\frac{-15}{3}\right)^3}}.$$

¹⁰ Olaszországban számolási versenyeket tartottak. Aki különleges ismeretek birtokában volt, annak a pozíciója előnyös volt, ezért szigorúan titkolta az ismereteit. Ferro (1465?-1526), a bolo-gnai egyetem professzora megtalálta bizonyos harmadfokú egyenlet megoldását, amelyet csak élete végén mondott el egyik tanítványának, aki 1535-ben tudományos párbajra hívta ki Tartagliát (1499?-1557), aki a versenyre készülve felfedezte Ferro módszerét. Tartaglia nyerte a versenyt, de a módszere gyengébb volt, mint Ferroé. Cardano (1501-1576) milánói orvos, aki kedvtelésből foglalkozott matematikával végül megkapta Tartagliától a titkos módszert, azzal a feltétellel, hogy másnak nem adja át. Szavát nem tartotta meg és 1545-ben egy könyvben megírta a módszert, hozzátéve, hogy az Tartagliától való. Az ügyből tettelegesséig fajuló vita kerekedett.

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{2^2 + -5^3}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{2^2 + -5^3}} = \\ = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}.$$

A Cardano képletnek igen nagy hátránya az, hogy ha az egyenletnek három valós gyöke van, akkor azokat nem adja meg, negatív szám kerül a négyzetgyökjel alá. Ezt az esetet casus irreducibilis-nek nevezik.

Behelyettesítéssel azonban láthatjuk, hogy $x = 4$ megoldása a feladatnak és $(x - 4)$ gyöktényezővel osztva $x^3 - 15x - 4 = (x - 4)(x^2 + 4x + 1)$ szorzatra bontható az egyenlet. A másodfokú részt is megoldva megkapjuk a gyököket:

$$x_1 = 4$$

$$x_2 = \frac{-4 + \sqrt{16 - 4}}{2} = -2 + \sqrt{3} \approx -0.27$$

$$x_3 = \frac{-4 - \sqrt{16 - 4}}{2} = -2 - \sqrt{3} \approx -3.73$$

Most az egyenletnek három gyöke volt. Mivel egyet eltaláltunk, könnyen megoldottuk az egyenletet. De, ha nem találtuk volna el, maradt volna a fenti képlet, és nem kapjuk meg a gyököket.

Az egészen az a baja, hogy nem tudunk mit kezdeni a negatív szám négyzetgyökével.

A hatványozás ismételt szorzást jelent. És a negatív vagy tört kitevőre való hatványozás? Ezeket az ember *értelmezte, definiálta* úgy, hogy a már eddig ismert számolási szabályok ne csorbuljanak.

Ez fog történni a negatív számból való négyzetgyökvonással is.

Az első lépéseket Euler (1707-1783) tette meg, bevezetve egy $e^{i\varphi}$ alakú számot. Ez bonyolult és kevésbé tanítható volt. A Lipcsei Jablonowski Társulat pályázatot írt ki 1834-ben ezen újabb számok tanítására és a geometriai szerkesztések közötti kapcsolatok tisztázására. Erre a pályázatra magyar részről három munka érkezett. Bolyai Farkastól (1775-1856), Bolyai Jánostól (1802-1860) és Kerekes Ferentől (1784-1850). Kerekes a Debreceni Református Kollégium tanára volt, és ma a neve az Egyetem Díszudvarának falán olvasható. Ő nyerte el a pályadíj felét, pedig Bolyai János tanulmánya sokkal kiemelkedőbb volt. De nem ez az egyetlen munkája Bolyainak, amelyet kora nem értett meg és nem kellően értékelt. Bolyai János pályamunkájának címe Responsio, amelynek 6.§-ban már felismerhető a komplex számok valós számpárként való értelmezése, amint azt majd végül Hamilton 1837-ben adja meg. Sajnos a 9.§-ban, amely a

Informatikai matematikai alapvetés

pályázat legértékesebb része, a saját geometriájára hivatkozott, amit akkoriban jó, ha két ember megértett a világon, az apa Bolyai Farkas és Gauss.

A komplex számok definícióját a valós számokra építjük és megmondjuk, hogy hogyan kell velük számolni.

A komplex szám alatt rendezett (x, y) valós számpárt értünk, és rá az alábbi műveleti szabályokat írjuk elő:

1. $(a, b) = (c, d)$ akkor és csakis akkor, ha $a = c$, és $b = d$.
2. $(a, b) \pm (c, d) = (a \pm c, b \pm d)$
3. $(a, b) (c, d) = (ac - bd, bc + ad)$

A komplex számokat egy betűvel is szokás jelölni, ez rendszerint z , és mivel több szám is szerepel egyszerre, indexszel különböztetjük meg őket egymástól.

Vegyünk két olyan komplex számot, amelyek második tagja 0, és adjuk őket össze és szorozzuk is össze őket!

$$z_1 = (a, 0), \quad z_2 = (b, 0)$$

$$z_1 + z_2 = (a, 0) + (b, 0) = (a + b, 0)$$

$$z_1 * z_2 = (a, 0) * (b, 0) = (a * b - 0, 0 + 0) = (a * b, 0)$$

Megállapíthatjuk, hogy a művelet elvégzése után az eredmény ismét olyan típusú komplex szám, hogy a második tagja 0. Az első tag pedig az első tagok valós összege és szorzata. A komplex számok között ezek a valós számok. (mint a racionálisak között az 1 nevezőjük az egész számok.)

Ha az első tag nulla, akkor a szorzat második tagja 0, azaz valós szám.

$$z_1 = (0, a), \quad z_2 = (0, b)$$

$$z_1 * z_2 = (0 - a * b, a * 0 + 0 * b) = (-a * b, 0)$$

Szorozzuk meg a $(0, 1)$ komplex számot önmagával, azaz vegyük a négyzetét!

$$(0, 1) * (0, 1) = (0 - 1, 0 + 0) = (-1, 0).$$

Azt látjuk tehát, hogy míg a valós számok körében a -1 valós szám semminek sem a négyzete, addig van olyan komplex szám, amelynek -1 a négyzete. Hiszen a $(-1, 0)$ komplex szám, valós szám. Ezt a különleges komplex számot i -vel jelölik és imaginárius, vagy képzetes egységnek hívják. Tehát:

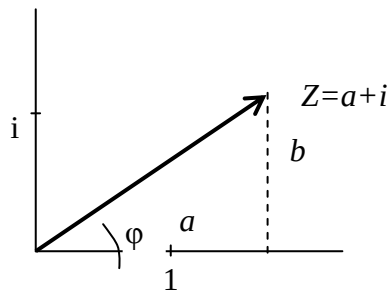
$$i^2 = -1, \quad \text{vagy} \quad i = \sqrt{-1}.$$

Informatikai matematikai alapvetés

Ezért pl.

$$\sqrt{-121} = \sqrt{-1}\sqrt{121} = i * 11 = 11i = (0,11)$$

A komplex számokat más alakban is fel lehet írni és koordinátarendszerben is lehet őket ábrázolni. A rajz az (a, b) komplex számot ábrázolja.



Úgy tűnik, hogy a komplex szám olyan, mint a vektor. A komplex számok azonossága, összege, különbsége ugyanaz, mint a vektoroké, a szorzás azonban már nem. A szám, vagy a vektor az a valós és az ib képzetes komponensek összege. És akkor ezt az irányszöggel, a vektornak a valós tengellyel bezárt szögével is ki lehet fejezni. Így a következő alakokat kapjuk:

$$z = (a, b)$$

$$z = a + ib$$

$$z = |z|(\cos \varphi + i \sin \varphi) \quad \text{Moivre (moavr) felírási mód, ahol } |z| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Az utóbbi alakkal igen szépen lehet szemléltetni a komplex számok szorzását. Nézzük!

$$\begin{aligned} z_1 * z_2 &= |z_1|(\cos \alpha + i \sin \alpha) * |z_2|(\cos \beta + i \sin \beta) = \\ &= |z_1||z_2|(\cos \alpha \cos \beta + i \sin \alpha \cos \beta + i \cos \alpha \sin \beta + i^2 \sin \alpha \sin \beta) = \\ &= |z_1||z_2|(\cos(\alpha + \beta) - \sin(\alpha + \beta)). \end{aligned}$$

Szavakban: Komplex számok szorzata olyan komplex szám, amelynek abszolút értéke a szorzandók abszolút értékeinek a szorzata, irányszöge pedig a szorzandók irányszögeinek összege.

Példák:

1. Számítsuk ki $\sqrt[3]{1}$ értékeit! Minden olyan számot megoldásnak tekintünk, amelynek harmadik hatványa 1.

A valós számok körében egy ilyen szám van az 1. De komplex számból több is van. A szám abszolút értéke 1, ezért figyelmünket az abszolút értékre nem kell fordítani. A fő szempont az irányszög. Az a szám a megoldás, amelynek az irányszöge olyan, hogy a háromszorosra 0 fokos, vagy a forgásszögekre gondolva 360 vagy 720 fokos. Így jó irányszög a 120 fok is, meg a 240 fok is. A megoldás így három szám:

$$x_1 = 1,$$

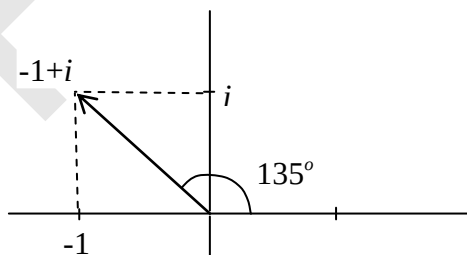
$$x_2 = \cos 120^\circ + i \sin 120^\circ,$$

$$x_3 = \cos 240^\circ + i \sin 240^\circ.$$

2. A Miénk a vár című cseh filmben az új matematikatanár felmérő dolgozatot írat.

Az egyik feladat így szól: Mennyi $\sqrt{-1+i}$?

Ábrázoljuk a számot a komplex számsíkon, majd térjünk át a szám trigonometrikus alakjára.



A feladat

$\sqrt{-1+i} = \sqrt{\sqrt{2}(\cos 135^\circ + i \sin 135^\circ)}$ kiszámítása, amely így már könnyű.

$$z_1 = \sqrt[4]{2}(\cos 67.5^\circ + i \sin 67.5^\circ) \approx 0.455 + i1.098$$

$$z_2 = \sqrt[4]{2}(\cos 247.5^\circ + i \sin 247.5^\circ) \approx -0.455 - i1.098$$

Informatikai matematikai alapvetés

3. Számítsuk ki a Cardano-képlet adta gyököket az $x^3 - 15x = 4$ egyenlet esetén!

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{2^2 + -5^3}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{2^2 + -5^3}} = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}.$$

A kiszámítandó részek $\sqrt[3]{2+11i}$ és $\sqrt[3]{2-11i}$.

Mindkét tagnak 3-3 eredménye van.

$$\sqrt[3]{2+11i} = \sqrt[3]{\sqrt{125}(\cos 79.7^\circ + i \sin 79.7^\circ)} = \sqrt[6]{125}(\cos 26.57^\circ + i \sin 26.57^\circ).$$

Ezt venni kell még $26.57 + 120 = 146.57$ fokkal és $26.57 + 240 = 266.57$ fokkal

1. $= 2.236(0.8944 + 0.4473i) = 2 + i$
2. $= 2.236(-0.83456 + 0.5509i) = -1.866 + 1.2319i$
3. $= 2.236(-0.0599 - 0.9982i) = -0.13397 - 2.2321i$

$$\sqrt[3]{2-11i} = \sqrt[3]{\sqrt{125}(\cos 280.3^\circ + i \sin 280.3^\circ)} = \sqrt[6]{125}(\cos 93.43^\circ + i \sin 93.43^\circ).$$

Ezt venni kell még $93.43 + 120 = 213.43$ fokkal és $93.43 + 240 = 333.43$ fokkal

- a. $= 2.236(-0.0598 + 0.9982i) = -0.13378 + 2.2321i$
- b. $= 2.236(-0.83456 - 0.5509i) = -1.866 - 1.2319i$
- c. $= 2.236(0.8944 - 0.4473i) = 2 - i$

A kapott értékekből összeadással összeválogathatjuk a gyököket.

Az $1 + c = 4$.

A $2 + b = -3.732$

A $3 + a = -2.6794$

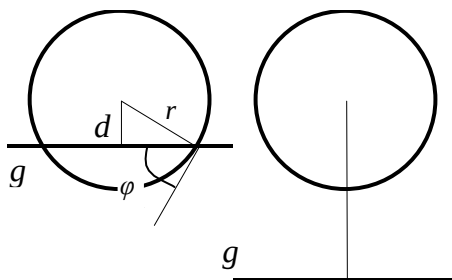
4. Mutatunk egy szöget, amelynek koszinusza 2, azaz $\cos \varphi = 2$. Ezt a középiskolában nagyon aláhúzzák, pedig csak arról van szó, hogy a szög komplex szám.

A szög szárait természetesen nem tudjuk megrajzolni, hiszen ez a szög képzetes lesz. Ha egy g egyenest elmetszünk egy körrel az ábra szerint, akkor a kerületi szögekre vonatkozó tételek alapján

$$\cos \varphi = \frac{d}{r}. \text{ Ez az érték a baloldali ábrán}$$

$1/2$, míg a jobboldali ábrán a g egyenes 2 sugáryira van a középponttól, tehát

$$\cos \varphi = \frac{d}{r} = \frac{2r}{r} = 2.$$



5. Formális nyelvek és automaták

Ábécék, szavak, formális nyelvek

Szimbólumok, jelek tetszőleges véges halmazát *ábécének*, a halmaz elemeit, a jeleket, pedig *betűknek* nevezzük. Az ábécé alapfogalom, halmaz, nem definiáljuk, a jelek alkotják, amelyek igen sokfélék lehetnek. Pl. írott jel, mágnesezettség, morzejel, az indiánok füstjelei, hajósok zászlólengetése, közlekedési rendőr jelei stb.

Az ábécé betűiből alkotott véges sorozatokat *szavaknak* hívjuk.

Bizonyos megfontolásokból szükség van *üres szóra* is, amelynek egyetlen betűje sincs. Ezt ε -nal jelöljük. (ε =epszilon). Az üres szó hossza nulla: $d(\varepsilon) = 0$. Egyébként $d(\alpha)$ az α hosszúságú szót jelöli.

Két szó egyenlő, ha betűi rendezetten egyenlők egymással, azaz

$$a_1 a_2 a_3 \dots a_l = b_1 b_2 b_3 \dots b_l \Leftrightarrow a_1 = b_1, a_2 = b_2, a_3 = b_3, \dots, a_l = b_l.$$

Szavak szorzatán a szavak egymás után való írását értjük:

$$\alpha = a_1 a_2 a_3 \dots a_l$$

$$\beta = b_1 b_2 b_3 \dots b_l$$

$$\alpha\beta = a_1 a_2 a_3 \dots a_l b_1 b_2 b_3 \dots b_l$$

Példák ábécére:

$$V_1 = \{0, 1\},$$

$$V_2 = \{if, then, else, for, do, a, b, c\}$$

Generatív grammatikák

A formális nyelvek leírására szolgálnak a generatív grammatikák.

Egy generatív grammatika áll:

- Az ábécéből, amelynek elemeit terminális jeleknek, röviden terminálisoknak nevezzük
- Egyéb jelekből, amelyek nem ezek, és ezeket nemterminálisoknak nevezzük
- Kezdő szimbólumból, ami egy nemterminális jel.
- Helyettesítési szabályokból

Informatikai matematikai alapvetés

Ezt röviden így írjuk:

$$G = \langle V, W, S, P \rangle,$$

ahol V a terminálisok halmaza, W a nemterminálisok halmaza, S a kezdőszimbólum, P pedig a helyettesítési vagy szóképzési szabályok halmaza. $S \in W$.

Példák:

$$G_1 = \langle \{a, b\}, \{S\}, S, \{S \rightarrow aSb, S \rightarrow ab\} \rangle$$

Ez a grammatika generálja pl. az *aaaabbbb* szót. A szót akár így is írhatjuk a^4b^4 . Imígyen generál:

$$S \rightarrow aSb \rightarrow aaSbb \rightarrow aaaSbbb \rightarrow aaaabbbb.$$

Az S -t vagy egyéb nem terminálist mindig beírhatjuk úgy, ahogyan azt a szóképzési halmaz valamely eleme megengedi. Az eljárás akkor befejezett, ha szó keletkezik, azaz már csupa terminális jelekből, betűkből áll.

Ennek a grammatikának nem szava a *bab*, *baba* vagy *abba*, jöllehet a betűkészslet megvan hozzájuk, magyarul meg még jelentenek is valamit. Az adott példában azonban észre vehetjük, hogy a helyettesítési szabály mindig egy a -val és egy b -vel növeli a szót, elől van valahány a és hátul ugyanannyi b .

$$G_2 = \langle \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}, \{S\}, S, \{S \rightarrow S0, S \rightarrow S1, S \rightarrow S2, S \rightarrow S3, S \rightarrow S4, S \rightarrow S5, S \rightarrow S6, S \rightarrow S7, S \rightarrow S8, S \rightarrow S9, S \rightarrow 1, S \rightarrow 2, S \rightarrow 3, S \rightarrow 4, S \rightarrow 5, S \rightarrow 6, S \rightarrow 7, S \rightarrow 8, S \rightarrow 9\} \rangle$$

Vajon szava-e e grammatikának 20040119, a mai dátum?

Igen, mert

$$S \rightarrow S9 \rightarrow S19 \rightarrow S119 \rightarrow S0119 \rightarrow S40119 \rightarrow S040119 \rightarrow S0040119 \rightarrow 20040119.$$

Hogyan kell a helyettesítési szabályokat bővíteni, hogy pontokat és szüneteket is tudjunk írni?

A terminálisak közé felvesszük a pont = . és space jeleket.

A helyettesítési szabályok közé is fel kell venni az $S \rightarrow S.$, $S \rightarrow S \text{ space}$, $S \rightarrow \text{space}$ elemeket, és akkor leírható a 2004. 01. 19. is. Próbáljuk ki!

$$G_3 = \langle \{., \text{space}\}, \{S\}, S, \{S \rightarrow S., S \rightarrow S \text{space}, S \rightarrow ., S \rightarrow \text{space}\} \rangle$$

Ehhez a grammatikához csak pontokból és szóközökből álló szavak alkothatók. Ha azonban ezt a grammatikát hozzáadjuk az előzőhöz, ami azt jelenti, hogy a

Informatikai matematikai alapvetés

megfelelő halmazokat egyesítjük, vesszük az uniójukat, akkor tudunk szabályos dátumozást írni.

A

$$G_4 = \langle \{1, 0\}, \{S\}, S, \{S \rightarrow S1, S \rightarrow S0, S \rightarrow 1, S \rightarrow 0\} \rangle$$

grammatika alkalmas bármilyen kettes számrendszerbeli szám leírására.

Nagyon jelentős a következő példa:

$$G_5 = \langle \{a_1, a_2, \dots, a_k\}, \{S, A_1, A_2, \dots, A_{k-1}\}, S, \{S \rightarrow a_1 A_1, A_1 \rightarrow a_2 A_2, \dots, A_{k-2} \rightarrow a_{k-1} A_{k-1}, A_{k-1} \rightarrow a_k\} \rangle$$

Ennek a grammatikának egyetlen szava van:

$$S \rightarrow a_1 A_1 \rightarrow a_1 a_2 A_2 \rightarrow a_1 a_2 a_3 A_3 \rightarrow \dots \rightarrow a_1 a_2 a_3 \dots a_{k-1} A_{k-1} \rightarrow a_1 a_2 a_3 \dots a_{k-1} a_k$$

A grammatikák összeadása és az utóbbi példa biztosítja azt, hogy elő tudjunk állítani véges eszközökkel véges mennyiségű szót tartalmazó nyelvet.

A nyelveket a grammatikájuk levezetési szabályai alapján osztályozni lehet. Ezt az osztályozást Chomsky lengyel matematikus adta meg. Mivel ezt a nyelvészek is használják, Chomskyt konstruktív nyelvésznek szokták emlegetni.

A nyelvek Chomsky -féle osztályozása:

Jelölések:

Az ϵ = üres szó, ω = szó, $a, b, c, \dots$ = terminálisok, $S, A, B, \dots$ = nemterminálisok.

Fogalmak:

Nyelvtan: a helyettesítési, képzési szabályok összessége.

Mondat: a képzési szabályok alapján kapott csak terminálisokból álló jelsorozat.

Nyelv: az összes lehetséges mondatok összessége.

A nyelvek osztályozása a levezetési, vagyis a szóképzési szabályok alapján történik. Négy nyelvosztályunk lesz. Ezek egymást tartalmazó nyelvosztályok, de, hogy mi az első abban eltérnek az irodalmak, vagyis, hogy a sorrendet a legszűkebbel vagy a legbővebbel kezdik. Az első az élő nyelvek osztálya.

1. *0-típus*, *általános* vagy mondat szerkezetű az a nyelv, amelyben sem a terminálisokra, sem a nemterminálisokra semmilyen kikötés nincs. Ide tartoznak az élő nyelvek. A helyettesítési szabályokat így írhatjuk le:

Informatikai matematikai alapvetés

$$\alpha A \beta \rightarrow \omega$$

ahol α, β, ω terminális jelekből alkotott szavak, az A pedig nemterminális jel.

2. *1-típusúnak vagy környezetfüggőnek* nevezzük azt a grammatikát, amelynek helyettesítési szabályai

$$\alpha A \beta \rightarrow \alpha \omega \beta$$

alakúak, ahol α, β, ω terminális vagy nem terminális, az A nemterminális. Ilyen pl.

$$G_6 = \langle \{a, b, c\}, \{S, A, B, C\}, S, \{S \rightarrow aSAC, S \rightarrow abC, CA \rightarrow BA, BA \rightarrow BC, BC \rightarrow AC, bA \rightarrow bb, C \rightarrow c\} \rangle$$

A negyedik helyettesítési szabályban A baloldali környezete B , a hatodikban pedig b . Mégis meg lehet mutatni, hogy a szavak generálásakor a helyettesítési szabályokat csak egy bizonyos sorrendben lehet alkalmazni. Ez a grammatika kizárólag $a^n b^n c^n$ alakú szavakat generál, ahol n természetes szám.

3. *2. típusú vagy környezetfüggetlen* a grammatika, ha a helyettesítési szabályok

$$A \rightarrow \omega$$

alakúak, ahol $A \in W$, $\omega \in (V \cup W)$, és $\omega \neq \varepsilon$. Pl. ilyen grammatika az alábbi:

$$G_7 = \langle \{0, 1\}, \{S\}, S, \{S \rightarrow SS, S \rightarrow 0S1, S \rightarrow 1S0, S \rightarrow 10, S \rightarrow 01\} \rangle.$$

Ez a grammatika már minden olyan szót generál, amely ugyanannyi 1-ből és 0-ból áll. Pl. a 00110110-t így:

$$S \rightarrow SS \rightarrow S10 \rightarrow SS10 \rightarrow S0110 \rightarrow 0S10110 \rightarrow 00110110.$$

Ugyancsak környezetfüggetlen:

$$G_2 = \langle \{if, then, else, for, do, a, b, c\}, \{S, A\}, S, \{S \rightarrow a, S \rightarrow if\ b\ then\ A, S \rightarrow if\ b\ then\ A\ else\ S, A \rightarrow a, A \rightarrow for\ c\ do\ S\} \rangle$$

4. *3. típusú vagy reguláris* az a grammatika, amelyben a levezetési szabályok

$$A \rightarrow aB \text{ vagy } A \rightarrow a$$

Informatikai matematikai alapvetés

alakúak, ahol $A, B \in W$ és $a \in V$.

Beláthatjuk, hogy a grammatikák között tartalmazási, hierarchikus viszonyok vannak, pontosan:

$\{\text{reguláris grammatika}\} \subset \{\text{környezetfüggetlen gr.}\} \subset \{\text{környezettfüggő gr.}\} \subset \{\text{általános gr.}\}$

Néhány szabály a reguláris nyelvekkel kapcsolatban.

Egy nyelvet olyan típusúnak mondunk, amilyen grammatika létezik hozzá, amelyik azt generálni képes. A nyelvet L -lel jelöljük. A szabályokat nem bizonyítjuk. Az érdeklődők bővebb képet Demetrovics - Denev - Pavlov: : A Számítástudomány matematikai alapjai c. könyvből kaphatnak. [3] .

Szabályok:

- Ha L' és L'' reguláris nyelvek, akkor uniójuk is reguláris. Ha a hozzájuk tartozó grammatikák $G' = \langle \{V'\}, \{W'\}, S', \{P'\} \rangle$ és $G'' = \langle \{V''\}, \{W''\}, S'', \{P''\} \rangle$ és $W' \cap (W'' \cup V'') = \emptyset$ valamint $W'' \cap (W' \cup V') = \emptyset$ és $S \notin W' \cup W'' \cup V' \cup V''$. Az egyesített grammatikánk legyen $G = \langle V' \cup V'', W' \cup W'' \cup \{S\}, S, P \rangle$. Itt még további kikötéseket kellene tenni. P -ben a két grammatika levezetési szabályai vannak egyesítve ismétlés nélkül, kezdő szimbólum csak egy lehet stb.
- Reguláris nyelvek szorzata is reguláris. Ennek magyarázatát a már előbb említett Demetrovics-féle könyvben találjuk. A szorzat szavai a tényezők egymás után való írásával nyerhetők.
- Minden véges nyelv reguláris. Emlékeztetünk a G_5 grammatikára és a most közölt 1. pontra a nyelvek uniójáról. Mi magunk is elő tudnánk állítani olyan reguláris nyelveket, amelyekhez tartozó grammatika csak előre megadott szavakat generál.

A programozási nyelvek a környezetfüggetlen nyelvek osztályába tartoznak.

Automaták

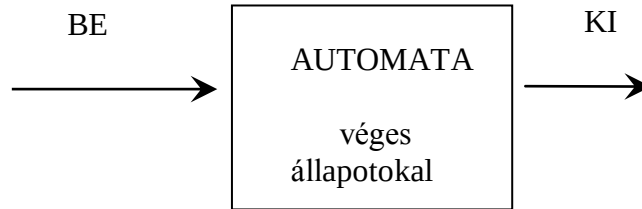
Definíció: Az automaták elmélete az információs gépek általános, absztrakt matematikai elmélete.

Az információs gép bemenő adatokból kimenő adatokat állít elő. Az elemi iskola alsó tagozatában is találkozunk automatával, amikor azt kérdezik, hogy mit csinált a gép, ha beadjuk a kettes és hármas számot és kijön az öt. Stb.

Egy adathalmaz véges sok jelből alkotott szavak halmaza, ezt kell majd felismerni, átalakítani. Az automatákban tehát véges számú bemenő adatból az au-

Informatikai matematikai alapvetés

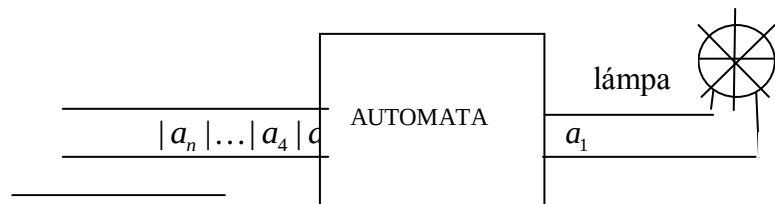
tomata véges belső állapotai szerint új kimenő adathalmaz jön létre.¹¹ A séma szerint:



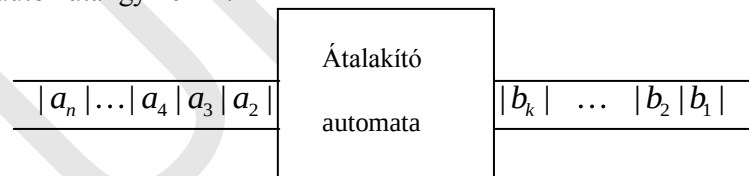
Az automátákat többféleképpen csoportosíthatjuk. Így vannak:

- felismerők
- átalakítók
- generátorok

felismerő automata: az $a_1a_2a_3\dots a_n$ jelsorozat hatására reagál, pl.a lámpa világít, ha a jelsorozatot felismeri

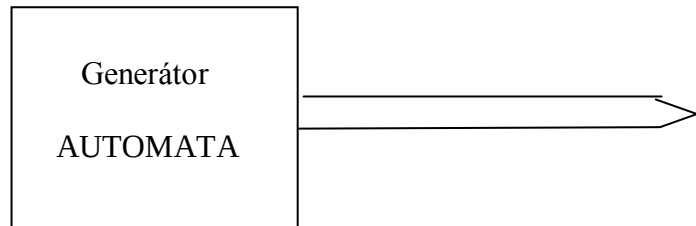


Az átalakító automata így néz ki:



A *generátornak* nincsenek bemenő adatai, a belső állapotokból generál kimenő jeleket. Tipikus és gyakran látott megjelenési formája a lottósorsolás. Szimbolikusan így néz ki:

¹¹ A véges automata kifejezés implikálja, hogy matematikailag végtelen sok belső állapottal rendelkező automata is elképzelhető.



Az automátákat csoportosítják másként is.

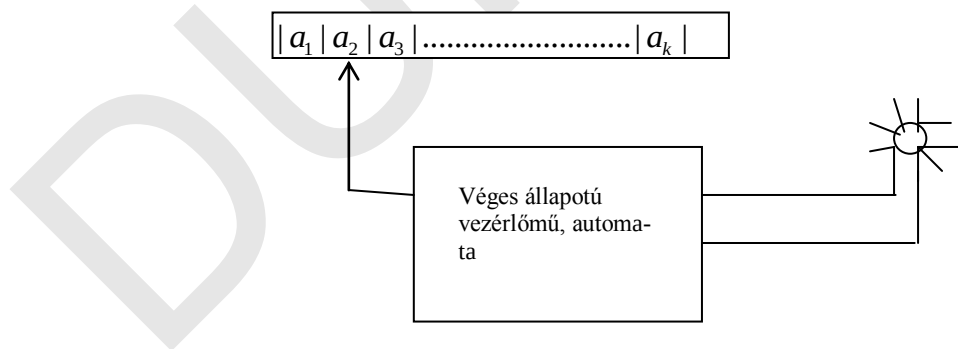
Így az automata lehet:

- determinisztikus vagy
- nemdeterminisztikus

Informatikában az automátákkal a formális nyelveket lehet feldolgozni, ezért most azokkal foglalkozunk és majd végül egy kis feldolgozást is végrehajtunk. Az automáták belső állapotairól, a jelekre való reagálásról ezután ejtünk majd szót.

A formális nyelvek felismerői, véges automaták

A véges automatákkal csak a formális nyelvek tanulmányozhatók. Sőt a véges automaták által elfogadott nyelvek osztálya pontosan megegyezik a reguláris nyelvek osztályával. Az automatának csak véges jelsorozatot adhatunk. A jeleket érzékeli és összeveti a belső állapotaival, memóriájával. A felismerés akkor sikeres, ha a szó is elfogyott és a memória is felszabadult.



Mielőtt tovább lépnénk, meg kell ismerkedni egy memória fajtával, matematikai szempontból. Ez a verem. A magyar szó nagyon jó. Van egy párja is, a halom.

Informatikai matematikai alapvetés

Ha az asztalon van egy halom papír, akkor abban egy iratot úgy kereshetünk meg, hogy oldalról, felülről, bármelyik helyről, bármelyik papírt elvehetjük és megnézhetjük. Ha azonban irataink egy veremben, dobozban vannak nehezebb a helyzetünk. Szükségünk van olyan információkra is, hogy hol járunk a doboz, verem kipakolásában. Az egyik legfontosabb mutató a verem alja jel, hiszen addig kell az iratokat átnézni. Ha azonban egy ilyen vermet átadunk, annak illik üresnek lenni.

A determinisztikus, felismerő véges automata, mint absztrakt fogalom, egy rendezett ötös, de némelyik eleme több részből is állhat. Tehát

$$V = \langle K, V, \delta, q_0, F \rangle,$$

ahol

K : a belső állapotok nem üres halmaza, *állapothalmaz*

V : a bemenő jelek véges halmaza, *ábécé*

δ : a V egy részét K -ba képező függvény, *átmeneti függvény*

q_0 : a K kezdő állapota

F : *végállapotok halmaza*, eszerint fogad el az automata vagy nem.

Példa véges determinisztikus automatára:

$$M = \langle \{q_0, q_1, q_2\}, \{a, b\}, \{z_0, z_1\}, \delta, q_0, z_0, \{q_0\} \rangle,$$

ahol q_0, q_1, q_2 a belső állapotok halmaza, a, b a bemenő jelek halmaza, z_0, z_1 veremjelek, δ átmeneti függvény, q_0 kezdő belső állapot, z_0 a veremalja jel, és végül q_0 a végállapot.

Most az M egy rendezett hetes, de nincs ellentmondás, hiszen ez lényegében egy ötös, csak megmondtuk, hogy a q -k közül melyik a kezdő és a z veremjelek közül melyik a veremalja jel.

Az átmeneti függvényt majd táblázattal fogjuk megadni, ettől azonban nem kell átmeneti függvényekről beszélni. A szinusz függvénynek sok értéke van, van 3 foknál is, 10-nél is stb. de attól még az egy függvény.

Az átmeneti függvényünk legyen:

1. $\delta(q_0, \varepsilon, z_0) \rightarrow \langle q_0, \varepsilon \rangle$
2. $\delta(q_0, a, z_0) \rightarrow \langle q_1, z_0 z_1 \rangle$
3. $\delta(q_1, a, z_1) \rightarrow \langle q_1, z_1 z_1 \rangle$
4. $\delta(q_1, b, z_1) \rightarrow \langle q_2, \varepsilon \rangle$
5. $\delta(q_2, b, z_1) \rightarrow \langle q_2, \varepsilon \rangle$
6. $\delta(q_2, \varepsilon, z_0) \rightarrow \langle q_0, \varepsilon \rangle$

Az átmeneti függvény hat argumentumra van megadva. Az olvasás a karaktersor bal első betűjével kezdődik és így is folytatódik. A másik feltétel az, hogy az automata kezdő állapotban legyen, a verem üres legyen. Est csak az első két eset teljesíti. Nézzük meg, hogy automatánk felismeri-e az *aabb* illetve az *abaab* szavakat.

Az *aabb* szó esete:

A szót csak a 2.-ba írhatjuk be, és akkor a kezdőállapot q_1 -re változik, az a bekerül a veremmemóriába és rákerül a z_1 veremjel. Ismét a -t olvasunk be, de a q_1 belső állapot és z_1 veremmutató esetén, csak a 3. Esettel léphetünk tovább. Ez nem állítja át a belső állapotokat, az a -t beteszi a verembe és hozzáír egy z_1 veremmutatót. A következő jel a b . Ezt csak a 4. és 5. tudná kezelni. De a belső állapotnak q_1 -nek és a veremjelnek z_1 -nek kell lennie. Tehát csak a 4.-kel folytathatjuk. q_1 -ből q_2 lesz, a b bekerül a verembe, az utolsó veremmutató eltűnik. A q_2, b, z_1 kombinációt kell figyelni. Van ilyen, az 5. A szó elfogyott, az automata állapota q_2 , a veremjel beáll a veremalja értékre. Egyetlen problémánk maradt, az automata nincs kezdőállapotban. Szerencsénkre azonban a 6. Ennek elérésére pont jó.

$$\begin{aligned} (q_0, aabb, z_0) &\xrightarrow{2.} (q_1, abb, z_0 z_1) \xrightarrow{3.} (q_1, bb, z_0 z_1 z_1) \xrightarrow{4.} (q_2, b, z_0 z_1) \xrightarrow{5.} \\ &\xrightarrow{5.} (q_2, \varepsilon, z_0) \xrightarrow{6.} (q_0, \varepsilon) \end{aligned}$$

Az *abaab* szó esete:

Ismét a 2.-kal kezdhetünk, a 4.-kel folytatjuk, de tovább nem mehetünk. A q_2, a, z_0 argumentumra nincs válasz.

$$(q_0, abaab, z_0) \xrightarrow{2.} (q_1, baab, z_0 z_1) \xrightarrow{4.} (q_2, aab, z_0) \xrightarrow{?}$$

Automatánk az *abaab* szót nem ismerte fel.

Informatikai matematikai alapvetés

Ha pl. a 3. mellett a 7

$$3. \delta(q_1, a, z_1) \rightarrow \langle q_1, z_1 z_1 \rangle$$

$$7. \delta(q_1, a, z_1) \rightarrow \langle q_2, z_1 z_1 \rangle$$

argumentummal is lenne átmeneti függvény és az automatánk a 3. helyett a 7. utat választaná, akkor az *aabb* szót nem ismerné fel, az 5. lépést már nem tudná végrehajtani. Ekkor az automatánk nem lenne determinisztikus.

Turing-gép

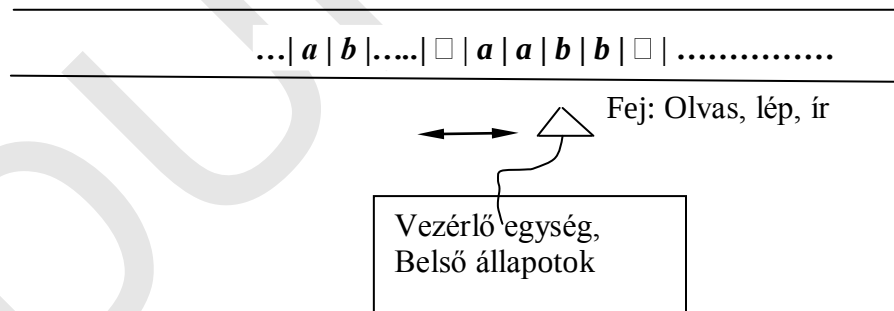
A Turing-gép nem vásárolható meg a boltban, mint pl. a varrógép vagy írógép, mivel absztrakt matematikai fogalom. A Turing-gépek bizonyos értelemben az egyszerű számítógépek informatikai modellje, felismerő és átalakító automaták. A fogalom 1936-ban született. A Turing-gép véges belső állapotokkal rendelkezik. Memóriája elegendően nagy, nem korlátos.

Három részből áll:

- Szalagmemória, azaz egy cellákra osztott végtelen szalag, és a cellákban a gép által megértett nyelv betűi vannak.
- Belső állapotok, a vezérlőegység állapotai.
- Író-olvasó fej, mely a szalagról jeleket olvas és visszaír.

A Turing-gép beolvas egy jelet a szalagtár aktuális cellájából és azt összeveti a belső állapotaival (átmenettábla, szoftver) és eszerint

- Átírja a leolvasott jelet egy cellába (másikba vagy ugyanide)
- Az olvasófej jobbra vagy balra lép vagy helyben marad.
- Átvált az aktuális állapotra
-



Példa:

A pozitív egész számok legyenek megadva az értéküknek megfelelő 1 (egyes)-sel. Legyen az összeadás jele + (pluszjel) és mindezek a Turing-gép számára értelmes jelek. $2+3$ tehát: $11+111$ alakban van a szalagon. Írjon a gép minden egyes helyett egyest a + jelre lépjen egyet balra. Az eredmény 11111 , azaz 5.

6. Determinánsok

Oldjuk meg az alábbi általános kétismeretlenes egyenletet!

$$ax + by = e$$

$$cx + dy = f$$

A megoldást az egyenlő együtthatók módszerével végezzük. Az egyenleteket d -vel illetve b -vel megszorozva együtthatók egyenlők lesznek és kapjuk:

$$ax + by = e / d$$

$$cx + dy = f / b$$

$$adx + bdy = ed$$

$$cbx + dby = fb$$

Az első egyenletből kivonva a másodikat, x kiemelése után megkapjuk x értékét.

$$adx - cbx = ed - fb \Rightarrow x(ad - cb) = ed - fb$$

$$x = \frac{ed - fb}{ad - cb}, \text{ hacsak } ad - bc \neq 0.$$

Hasonló módon határozhatjuk meg y -t is.

$$y = \frac{af - ec}{ad - cb}, \text{ hacsak } ad - bc \neq 0.$$

Determináns definíciója, tulajdonságai:

Másodrendű determináns: Ha négy mennyiségünk van, mint az előzőekben többször, két vonal közé téve a négy számból egyet képezünk. Ezt az egy számot determinánsnak nevezzük. Gyakran a rendezett számnégyest is determinánsként emlegetjük. Így:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

Erre alapozva az

$$ax + by = e$$

$$cx + dy = f$$

egyenletrendszer megoldása:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} e & b \\ f & d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a & e \\ b & f \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}.$$

A másodrendű determináns néhány tulajdonsága:

1. Nem változik a determináns értéke, ha az egyik sort hozzáadjuk a másikhoz.

$$\begin{vmatrix} a+c & b+d \\ c & d \end{vmatrix} = (a+c)d - (b+d)c = ad + cd - bc - dc = ad - bc.$$

2. Nem változik a determináns értéke, ha a sorokat és az oszlopokat felcseréljük, azt mondjuk, hogy vesszük a transzponáltját.

$$\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = ad - cb$$

3. Ha a determináns egyik sorának minden elemét megszorozzuk egy λ számmal, akkor az értéke λ -szorosára változik.

$$\begin{vmatrix} \lambda a & \lambda b \\ c & d \end{vmatrix} = \lambda ad - \lambda bc = \lambda(ad - bc)$$

4. Ha a determináns két sora arányos, azaz az egymás alatti elemek hányadosa egyenlő, most λ , akkor a determináns értéke nulla.

$$\begin{vmatrix} a & b \\ \lambda a & \lambda b \end{vmatrix} = a\lambda b - b\lambda a = 0.$$

Informatikai matematikai alapvetés

5. Az előbbi állítás megfordítása is igaz, azaz ha a determináns értéke nulla, akkor két sora arányos.

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc = 0. \Rightarrow ad = bc \Rightarrow \frac{a}{c} = \frac{b}{d}. \text{ Feltéve, hogy az elemek nem nullák.}$$

6. Ha a determináns két sorát megcseréljük, értéke -1 szerezére változik.

$$\begin{vmatrix} c & d \\ a & b \end{vmatrix} = cb - ad = -(ad - bc).$$

Az előző determinánsokat másodrendűeknek hívják, mert két soruk (és oszlopuk van). El lehet képzelni magasabb rendű determinánsokat is. Ezeknek valahány sora és ugyanannyi oszlopa van.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Hogy ebből hogyan képezünk egy számot, azt egy harmadrendű determinánson mutatjuk be:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{1+2} a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{1+3} a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

Az eljárást sorszerinti kifejtésnek hívják. Kiválasztunk egy sort, most az első. Ennek elemeivel szorzunk determinánsokat, amelyeket úgy kapunk az eredetiből, hogy elhagyjuk az elem sorát és oszlopát, megszorozzuk az elhagyott elemmel, majd ellátjuk előjellel, amely -1 nek annyiadik hatványa, mint az elem indexeinek összege. Ezt megtehetjük tetszőleges rendű determinánsra is. A determinánst bármelyik sora vagy oszlopa szerint is kifejtethetjük, mivel a determináns értéke transzponálás után változatlan. Amikor kiválasztunk egy elemet és az elem sorának és oszlopának elhagyásával determinánst képezünk, a *determinánst az illető elem adjungált al-determinánsának hívjuk*.

Informatikai matematikai alapvetés

A harmadrendű determináns kiszámítását még egyszerű megjegyezni. Ha ugyanis az előbbi három másodrendű determinánst részletezzük, lesz 3 pozitív és 3 negatív tagunk, és így

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}.$$

Írjuk az első és második oszlopot még egyszer le, így:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}$$

A pozitív tagokat fentről ferdén balról jobbra lefelé haladva, a negatívakat pedig fentről ferdén jobbról balra lefelé haladva találjuk. A harmadrendű determináns eme kiszámítási módját Sarrus-szabálynak mondják.

Mind a determinánsok tulajdonságai, mind a kiszámítási módja érvényes tetszőleges rendű determinánsokra is (a Sarrus-szabály csak harmadrendűre). Persze már egy ötödrendű determináns kiszámítása sem könnyű. Ekkor először inkább a leírt tulajdonságokat felhasználva igyekszünk a determinánst kellemesebb külsővé tenni.

Példa:
Számítsuk ki

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 7 & 0 & 6 & 9 \\ 5 & -4 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} \quad \text{-t!}$$

Az alig várható, hogy észrevegyük, miszerint, ha az első sor kétszeresét kivonjuk a másodikból, megkapjuk a harmadikat.

Informatikai matematikai alapvetés

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 7 & 0 & 6 & 9 \\ 5 & -4 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 & 8 \\ 7 & 0 & 6 & 9 \\ 5 & -4 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 & 8 \\ 5 & -4 & 0 & 1 \\ 5 & -4 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} * 0 = 0.$$

Ezzel ugyanis be van fejezve a számolás, a determináns 0, hiszen két sora arányos (egyenlő). A másik módszer nem olyan ötletes, de célravezető. Az első sort hozzáadjuk az utolsóhoz, és azt látjuk, hogy az utolsó sor elemei egyenlők. Ekkor az oszlopok kivonásával az utolsó oszlop elemei egy kivételével 0-vá tehetők. A harmadik oszlopot vontuk ki, mivel abban van egy 0, amitől a számolás egyszerűbbé válását is remélhetjük.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 7 & 0 & 6 & 9 \\ 5 & -4 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 7 & 0 & 6 & 9 \\ 5 & -4 & 0 & 1 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & -1 & 3 & 1 \\ 1 & -6 & 6 & 3 \\ 5 & -4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \end{vmatrix} = -1^{4+3} 4 \begin{vmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 1 & -6 & 3 \\ 5 & -4 & 1 \end{vmatrix} = \\ = -4(12 - 15 - 4 + 30 + 1 - 24) = 0.$$

Cramer szabály

Az elsőfokú egyenletrendszerek megoldását a kétismeretleneshez hasonlóan végezhetjük több ismeretlen esetén is. A módszert Cramer (krámer) szabálynak hívják. Ime:

Példa egy háromismeretlenes elsőfokú egyenletrendszer megoldására. A jegyzet végén ezt a módszert sokszor felhasználjuk egyenletrendszerek megoldására, tehát alaposan tanulmányozzuk. Legyen tehát megadva 3 egyenlet három ismeretlennel. Az egyenletek:

$$2x - y + 3z = -9$$

$$x + 3y - z = 17$$

$$3x + 2y - 4z = 26$$

Az együtthatók determinánsa:

$$D = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 3 & -1 \\ 3 & 2 & -4 \end{vmatrix} = -24 + 3 + 6 - 27 + 4 - 4 = -42.$$

Informatikai matematikai alapvetés

Elkészítjük a számlálót. Egy-egy oszlopot a jobboldali konstansokkal cseréljük fel.

$$D_x = \begin{vmatrix} -9 & -1 & 3 \\ 17 & 3 & -1 \\ 26 & 2 & -4 \end{vmatrix} = 108 + 26 + 102 - 234 - 18 - 68 = -84.$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 2 & -9 & 3 \\ 1 & 17 & -1 \\ 3 & 26 & -4 \end{vmatrix} = -136 + 27 + 78 - 153 - 36 + 52 = -168.$$

$$D_z = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -9 \\ 1 & 3 & 17 \\ 3 & 2 & 26 \end{vmatrix} = 156 - 51 - 18 + 81 - 68 + 26 = 126.$$

Amelyekből az ismeretlenek:

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{-84}{-42} = 2, \quad y = \frac{D_y}{D} = \frac{-168}{-42} = 4, \quad z = \frac{D_z}{D} = \frac{126}{-42} = -3.$$

Az egyenletrendszerek fenti megoldása igen nagy odafigyeléssel (mátrixok rangja a következő fejezetben) mindig használható, de az ismeretlenek számának növelésével a számolás rendkívül megnövekedhet.

A Gauss-féle elimináció

A Gauss-féle eliminációs módszer mindig használható. Ennek az a lényege, hogy az egyenletek szorzásával és egymásból való kivonásokkal egy olyan alakot kapjunk, amelyben az egyenletekből egyre több ismeretlent küszöbölünk ki, azaz elimináljuk.

Tekintsük a korábbi egyenletrendszert

$$2x - y + 3z = -9$$

$$x + 3y - z = 17$$

$$3x + 2y - 4z = 26$$

Informatikai matematikai alapvetés

Az első egyenletet végig osztjuk az x együtthatójával, azaz 2-vel

$$x - 0.5y + 1.5z = -4.5$$

$$x + 3y - z = 17$$

$$3x + 2y - 4z = 26$$

Most az első egyenlet annyiszorosát vonjuk ki a többiből, hogy az x eltűnjön, a másodikból az egyszeresét, a harmadikból háromszorosát, és akkor kapjuk az alábbi egyenletrendszert.

$$x - 0.5y + 1.5z = -4.5$$

$$0 + 3.5y - 2.5z = 21.5$$

$$0 + 3.5y - 8.5z = 39.5$$

Az első sort már nem változtatjuk. A második sort osztva az y együtthatójával kapjuk:

$$x - 0.5y + 1.5z = -4.5$$

$$0 + y - 2.5/3.5z = 21.5/3.5$$

$$0 + 3.5y - 8.5z = 39.5$$

Az első két sort már nem változtatjuk. A harmadikból levonjuk a második 3.5 szeresét.

$$x - 0.5y + 1.5z = -4.5$$

$$0 + y - 2.5/3.5z = 21.5/3.5$$

$$0 + 0 - 6z = 18$$

És innen jönnek szépen sorban a gyökök:

$$z = -3$$

$$y = 21.5/3.5 + 2.5/3.5(-3) = (21.5 - 7.5)/3.5 = 14/3.5 = 4$$

$$x = -4.5 + 0.5 * 4 - 1.5 * (-3) = -2.5 + 4.5 = 2$$

A számítógépeken ezt a módszert lehet alkalmazni. Ezen az úton akár a több száz egyenletet tartalmazó elsőfokú egyenletrendszer is megoldható.

Lineáris egyenlőtlenség rendszerek, lineáris programozás

A lineáris egyenletrendszerek megoldásához hasonlóan a lineáris egyenlőtlenség rendszerek megoldása is. A problémakör kissé más, a gazdasági életben való alkalmazása és annak jelentősége jól megérthető. Mindezt egy rendkívül leegyszerűsített példán mutatjuk be.

Két terméket gyártunk, X-et és Y-t. Az X-ből x darabot, az Y-ből y darabot. A gyártáshoz négy erőforrást (anyagot, energiát, munkaerőt, szállítást képzeljünk). Nevezzük ezeket A, B, C, D-nek. Tudjuk, hogy egy X-et 9 A-ból, 3 B-ből, 1 C-ből és 9 D-ből lehet előállítani, egy Y-t pedig 4 A-ból, 8 B-ből, 1 C-ből és 8 D-ből. Az erőforrások korlátosak, azaz belőlük csak valamennyi egység van. Legyen A-ból 360, B-ből 240, C-ből 45 és D-ből 440 egység. A kész termék értékesítésekor X esetén 6, Y esetén 5 egységet nyerünk. Ez a hasznunk és ebből szeretnénk minél többhöz hozzájutni. Ismereteinket táblázatba foglaljuk

	A forrás	B forrás	C forrás	D forrás
X fajta termék egy egységére	9	3	1	9
Y fajta termék egy egységére	4	8	1	8
A rendelkezésre álló össz forrás	360	240	45	440

A gyártás során a forrás felhasználása a következő

	A forrásból	B forrásból	C forrásból	D forrásból
A felhasznált forrás	$9x+4y$	$3x+8y$	$x+y$	$9x+8y$

Ezekből feltételi egyenlőtlenségeket lehet létrehozni, úgymint

$$9x + 4y \leq 360$$

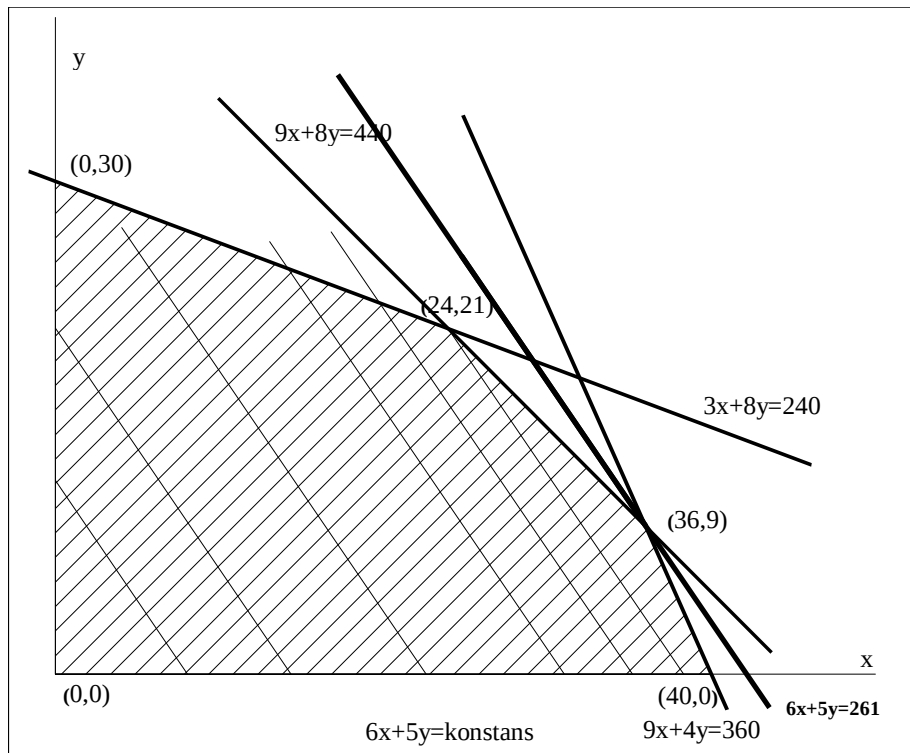
$$3x + 8y \leq 240$$

$$9x + 8y \leq 440$$

$$x + y \leq 45$$

$$0 \leq x, \quad 0 \leq y$$

Az egyenlőtlenségek a koordináta-rendszerben félsíkokat jelentenek, amelyek közös részében működhet a termelés.



kisebbszámot kapunk, ezért a feladat feltételeit a sraffozott részben található pontok x és y koordinátái elégítik ki. Az a kérdés, hogy a $6x+5y$ nyereségünk mikor maximális. Ha a $6x+5y$ valamilyen konkrét értéket vesz fel, akkor az egy egyenes lesz és az összes konkrét értékre kapott egyenesek párhuzamosak lesznek, hiszen meredekségük $-6/5$. Minél messzebb vagyunk az origótól, annál nagyobb lesz a konstans. Most ez a $(36,9)$ csúcspontban következik be, $6 \cdot 36 + 5 \cdot 9 = 216 + 45 = 261$. Ez az intézmény a legtöbb haszonra tehát akkor tesz szert, ha az X termékből 32 db-ot, az Y -ből pedig 9 darabot állít elő. Ekkor a nyeresége 261 egység lesz.

Csak a kétváltozós feladatok oldhatók meg ilyen szemléletesen és egyszerűen, de van matematikai módszer a sokváltozós feladatok megoldására is. (Lineáris programozás, szimplex-módszer, lineáris optimalizálás, szállítási problémák, magyar módszer címszavak)

7. Mátrixok

Definíció:

Egy olyan számtáblázatot, amelynek valahány sora és azzal megegyező vagy eltérő számú oszlopa van mátrixnak nevezünk. Az informatikában a mátrix neve tömb. A mátrix elemei nemcsak számok lehetnek.

Pl.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 8 & 0 & 4 \\ 7 & 9 & 1 & -2 \\ 1 & 4 & 0 & -3 \end{pmatrix}, \quad 3 \quad 9 \quad 7.8, \quad \begin{pmatrix} 7 & 4 & 5 & 9 & 0 \\ 5 & 5 & -4 & -6 & 8 \\ 3 & 4 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Az első egy kvadratus mátrix, sorainak és oszlopainak száma egyenlő. A másodiknak egyetlen sora van, vektornak is hívják. A harmadiknak 3 sora és 5 oszlopa van.

A mátrixokat nagy latin betűvel, az elemeikkel, vagy az általános elemükkel jelölik:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 9 & 7 \\ 3 & 2 & 5 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = b_{ik}$$

Két mátrix egyenlő, ha az azonos pozíciójú helyeken az elemeik megegyeznek. Ha tehát két mátrix akár a sorai számában, akár az oszlopai számában eltérő, akkor már fel sem merülhet az egyenlőségük.

Műveletek mátrixokkal:

Összeadás és kivonás (csak azonos típusú mátrixokra van értelmezve)

$A = (a_{ik})$ és $B = (b_{ik})$ esetén $A + B = C = (c_{ik} = a_{ik} + b_{ik})$, azaz a megfelelő pozíciójú elemeket összeadjuk vagy kivonáskor kivonjuk.

Pl.:

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 & 9 \\ 0 & -5 & 7 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 9 & -8 & 4 & 3 \\ -2 & 6 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & -3 & 7 & 12 \\ -2 & 1 & 8 & 1 \end{pmatrix}$$

Szorzás (speciális mátrixok között van értelmezve)

Ha az A mátrixnak m sora és n oszlopa van, ezt megszorozni csak olyan B mátrixszal lehet, amelynek n sora van. Ha ekkor a B oszlopainak száma s , akkor a szorzatmátrix m sorú és s oszlopú lesz. Ebből már látszik, hogy a mátrixok körében általában $AB \neq BA$, olyannyira, hogy az egyik esetleg nem is létezik a másik pedig igen.

Definíció:

Ha az A $m \times n$ típusú mátrix általános eleme a_{ik} és a B $n \times p$ típusú mátrix általános eleme b_{ik} , akkor a $C=AB$ $m \times p$ típusú lesz és a C szorzatmátrix c_{ik} általános eleme definíció szerint

$$c_{ik} = a_{i1}b_{1k} + a_{i2}b_{2k} + \dots + a_{in}b_{nk}.$$

Pl.:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \\ -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1*4+3*0 & 1*0+3*(-1) & 1*(-1)+3*0 \\ 2*4+0*0 & 2*0+0*(-1) & 2*(-1)+0*0 \\ (-1)*4+1*0 & (-1)*0+1*(-1) & (-1)*(-1)+1*0 \\ 0*4+2*0 & 0*0+2*(-1) & 0*(-1)+2*0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 4 & -3 & -1 \\ 8 & 0 & -2 \\ -4 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Mátrixot számmal is meg lehet szorozni. A számmal a mátrix minden egyes elemét meg kell szorozni. Mátrixok körében az osztás nincs értelmezve.

Mátrixok és a lineáris egyenletrendszerek

A lineáris egyenletrendszereket mátrix alakban is fel lehet írni. A már ismert egyenletrendszerünket így:

$$\begin{pmatrix} 2x - y + 3z = -9 \\ x + 3y - z = 17 \\ 3x + 2y - 4z = 26 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 3 & -1 \\ 3 & 2 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ 17 \\ 26 \end{pmatrix}$$

Ezt még tömörebben is kifejezhetjük, ha az együtthatók mátrixát A -val, az ismeretlenekét X -szel, a konstansokat pedig B -vel jelöljük:

$$AX=B.$$

Egységmátrix

Az olyan mátrixot, amelynek a főátlójában (balról jobbra le átlósan) csupa 1, egyéb helyeken pedig 0 áll, egységmátrixnak nevezzük. Az egységmátrix tehát kvadratikus. Ha egy mátrixot az egységmátrixszal szorozzuk a mátrix nem változik.

Pl.:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 3 \\ 9 & 5 \\ 8 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1*1+2*0 & 2*0+2*1 \\ 7*1+3*0 & 3*0+3*1 \\ 9*1+5*0 & 5*0+5*1 \\ 8*1+4*0 & 4*0+4*1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 3 \\ 9 & 5 \\ 8 & 4 \end{pmatrix}$$

Ha az első mátrixunk 2x2-es kvadratikus lett volna, akkor az egységmátrixszal jobbról is és balról is tudtunk volna szorozni.

Mátrix inverze

A mátrix inverze olyan mátrix, amelyikkel a mátrixot megszorozva egységmátrixot kapunk. Ez lehetőséget ad arra, hogy az $AX=B$ mátrixegyenletből kifejezzük az X mátrixot.

Jelöljük A inverzét A^{-1} -gyel és szorozzuk meg az egyenletet vele balról.

$$AX = B \Rightarrow A^{-1}AX = A^{-1}B \Rightarrow EX = A^{-1}B \Rightarrow X = A^{-1}B.$$

Az van hátra, hogy hogyan lehet az inverzmátrixot meghatározni. Erre több mód is van.

Inverz mátrixa csak kvadratikus mátrixnak van. Azok közül is, csak a nem nulla determinánsúaknak. Ezeket a mátrixokat regulárisoknak hívják. Most a már kétszer is megoldott egyenletrendszerünk együtthatóinak mátrixát vesszük elő. Az egyenletrendszerünk:

$$2x - y + 3z = -9$$

$$x + 3y - z = 17$$

$$3x + 2y - 4z = 26$$

Bevezetjük a következő mátrixokat:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 3 & -1 \\ 3 & 2 & -4 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -9 \\ 17 \\ 26 \end{pmatrix}.$$

Informatikai matematikai alapvetés

Példát adunk arra, hogy hogyan lehet az A mátrix inverzét meghatározni. Mivel A kvadratikusan és determinánsa -42 , azaz nem nulla, ezért lesz egy olyan 3×3 -as mátrix, amelynek A -val való szorzata egységmátrixot ad.

Írjuk egymás mellé az A -t és az egységmátrixot, egyetlen mátrixba, tehát egy 3×6 -osba.

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & -4 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Most a sorokkal elemi átalakításokat végzünk, amelyeket a determinánsoknál már tanultunk. Ezek a sorok számmal való szorzása, sorok felcserélése, sorok vagy többszörösük másik sorból való kivonása. Az a célunk, hogy a baloldali 3×3 -as rész egységmátrixszá váljon.

Az első és a második sort megcseréljük.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & -4 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Most az első sor dupláját kivonjuk a másodikból és a háromszorosát a harmadikból.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -7 & 5 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -7 & -1 & 0 & -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

A második sort elosztjuk -7 -tel, majd a 7 -szeresét levonjuk a harmadikból.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{5}{7} & -\frac{1}{7} & \frac{2}{7} & 0 \\ 0 & 0 & -6 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Az utolsó sort elosztva -6 -tal a mátrix baloldalán feltűnik az egységmátrix egy része.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{5}{7} & -\frac{1}{7} & \frac{2}{7} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{-1}{6} \end{pmatrix}.$$

Az utolsó sor $5/7$ -szeresét a másodikhoz 1-szeresét az elsőhöz.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & \frac{1}{6} & \frac{7}{6} & \frac{-1}{6} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{7} + \frac{5}{42} & \frac{2}{7} + \frac{5}{42} & \frac{-5}{42} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{-1}{6} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & \frac{7}{42} & \frac{49}{42} & \frac{-7}{42} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{-1}{42} & \frac{17}{42} & \frac{-5}{42} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{7}{42} & \frac{7}{42} & \frac{-7}{42} \end{pmatrix}.$$

Végül a második sor háromszorosát levonjuk az első sorból.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{10}{42} & \frac{-2}{42} & \frac{8}{42} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{-1}{42} & \frac{17}{42} & \frac{-5}{42} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{7}{42} & \frac{7}{42} & \frac{-7}{42} \end{pmatrix}.$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{10}{42} & \frac{-2}{42} & \frac{8}{42} \\ \frac{-1}{42} & \frac{17}{42} & \frac{-5}{42} \\ \frac{7}{42} & \frac{7}{42} & \frac{-7}{42} \end{pmatrix}.$$

Most képezzük az $X = A^{-1}B$ mennyiséget, majd leolvassuk az egyenletrendszer gyökeit.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{10}{42} & \frac{-2}{42} & \frac{8}{42} \\ \frac{-1}{42} & \frac{17}{42} & \frac{-5}{42} \\ \frac{7}{42} & \frac{7}{42} & \frac{-7}{42} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -9 \\ 17 \\ 26 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-90-34+208}{42} \\ \frac{9+289-130}{42} \\ \frac{-63+119-182}{42} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{84}{42} \\ \frac{168}{42} \\ \frac{-126}{42} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Tehát az egyenletrendszer gyökei $x = 2$, $y = 4$, és $z = -3$.

A mátrix rangja, a lineáris egyenletrendszer megoldhatóságának kritériuma

Eddig a lineáris egyenletrendszerek megoldására 3 módszert ismertünk meg. Nincs azonban ismeretünk arra, hogy egy egyenletrendszer egyáltalán mikor oldható meg. Ennek megválaszolására be kell vezetni a mátrix rangjának a fogalmát. Egy mátrixból determinánsokat képezhetünk, általában sok fajtát. Az első rendű determinánsok maguk az elemek. A másodrendűek két sorból és két oszlopból állnak és ezek eredetileg is sornak illetve oszlopnak a részei. Az eredeti mátrixból kiválasztunk két oszlopot és két sort. Ezek metszetében lévő elemek adják a másodrendű determinánst. A harmadrendű esetében három oszlopot és három sort választunk. A kiválasztott kvadratikus mátrixoknak vesszük a determinánsait, és figyeljük, hogy melyek a nem nullák.

Definíció:

A mátrix rangján a belőle képezhető legmagasabb rendű el nem tűnő (nem nulla értékű) determináns rendjét értjük.

Pl.

Mennyi a rangja az alábbi mátrixnak?

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Legfeljebb 3, mivel annál nagyobb rendű determináns nem képezhető belőle. De minden harmadrendű determináns értéke nulla, mert ha az első sorhoz hozzáadom a másodikat, megkapom az utolsó hatszorosát, tehát a determinánsoknál tanultak szerint minden harmadrendű determináns értéke 0. Másodrendű el nem tűnő determináns azonban van. Ilyen, pl. a bal felső sarokból

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 10 = -6 \neq 0, \quad \text{tehát a mátrix rangja } 2.$$

Bizonyítás nélkül közöljük a lineáris egyenletrendszer megoldhatóságának a szükséges és elégséges feltételét:

Tétel:

A lineáris egyenletrendszer akkor és csakis akkor oldható meg, ha az együtthatók mátrixának a rangja egyenlő az együtthatók és a szabad tagok (a jobboldalra írt konstansok) egyesített mátrixának a rangjával.

Pl. az

$$2x - y + 3z = -9$$

$$x + 3y - z = 17$$

$$3x + 2y - 4z = 26$$

egyenletünk esetében az alapmátrix

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 3 & -1 \\ 3 & 2 & -4 \end{pmatrix}, \text{ és a kibővített mátrix } \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -9 \\ 1 & 3 & -1 & 17 \\ 3 & 2 & -4 & 26 \end{pmatrix}$$

Mivel az első determinánsa - 42, és ez nem nulla, és ez a rész megvan a második mátrixban is, tehát a második rangja is 3, ezért az egyenletrendszer megoldható. Nem ez a helyzet az alábbi egyszerű egyenletrendszerrel:

$$3x + 2y = 5$$

$$6x + 4y = 2$$

A mátrixok pedig

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 4 \end{pmatrix} \text{ és a kibővített mátrix } \begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 6 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

Az első mátrix rangja 1, a másodiké pedig kettő. Ennek az egyenletrendszernek tehát nincs megoldása. Nem mindig látszik azonban a probléma ilyen egyszerűen. Most az egyenletek a koordináta-rendszerben párhuzamos egyeneseket jelentenek, a megoldás meg a metszéspont lenne, de a párhuzamos egyenesek nem metszik egymást.

Vektorok, skaláris szorzat, lineáris függetlenség, többdimenziós tér

Vektorokról a középiskolában mindenki tanult. Vektor alatt irányított szakaszt értünk. A matematikában használt vektornak van állása, irányítása és hossza. A fizika vektorának támadáspontja is van, azaz nem mindegy, hogy hol van a kezdőpontja. A matematika vektorai ún. szabad vektorok, a fizika vektorai kötött vektorok. A koordináta-rendszerben a vektorokat lehet szemléltetni és számokkal jellemezni. A síkon a vektorok számpárok, a térben számhármások. Ezeket a vektorok koordinátáinak hívjuk. Ha két vektor koordinátái rendre megegyeznek, akkor a vektorok is egyenlők. Az $\mathbf{a}(3,4)$ és $\mathbf{b}(6,8)$ vektorok egymás skalárszorosai. Azt mondjuk, hogy lineárisan függők, azaz egy alkalmas számmal az egyiket megszorozva megkapjuk a másikat. Most az $\mathbf{a}$ vektort 2-vel szorozva megkapjuk a $\mathbf{b}$ vektort.

A sík bármely vektorát kifejezhetjük két nem lineáris vektorának lineáris kombinációjaként.

A mondat azt jelenti, hogy két lineárisan független pl. $\mathbf{a}(3,4)$ és $\mathbf{b}(5,1)$ vektorok megfelelő skalárszorosainak összegével bármilyen $\mathbf{c}(x,y)$ vektort kifejezhetünk. Tehát $\alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b} = \mathbf{c}$. Ha pl. a $\mathbf{c}$ komponensei 21 és 11, és az összefüggést felírjuk a koordinátákra, akkor

$$\begin{aligned}\alpha 3 + \beta 5 &= 21 \text{ és} \\ \alpha 4 + \beta 1 &= 11.\end{aligned}$$

Az egyenletrendszer megoldása $\alpha = 2$ és $\beta = 3$. Tehát az $\mathbf{a}$ vektor kétszerese és a $\mathbf{b}$ vektor háromszorosa megadja a $\mathbf{c}$ vektort: $2\mathbf{a} + 3\mathbf{b} = \mathbf{c}$.

Könnyebbé válik a számolás, ha két koordináta esetén két speciális vektort választunk. Ezek az $\mathbf{i}(1,0)$ és $\mathbf{j}(0,1)$ egymásra merőleges egységvektorok.

A vektor hosszát vagy abszolút értékét a Pitagorasz tétel alapján számolhatjuk ki. Ha pl. $\mathbf{r}(x,y)$ vektor az adott vektor, akkor abszolút értéke

$$|\mathbf{r}| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Két vektor, $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ skaláris szorzatán az $|\mathbf{a}||\mathbf{b}|\cos\varphi$ mennyiséget értjük, ahol $|\mathbf{a}|$ és $|\mathbf{b}|$ a vektorok hosszát vagy abszolút értékét jelentik, a φ pedig a két vektor szöge.

Informatikai matematikai alapvetés

Merőleges vektorok skaláris szorzata 0, mivel $\cos\varphi=0$. A vektorokat a síkon az $\mathbf{i}$ és $\mathbf{j}$ lineáris kombinációival ki lehet fejezni. Ekkor ha $\mathbf{a} = e\mathbf{i} + f\mathbf{j}$, és a $\mathbf{b} = g\mathbf{i} + h\mathbf{j}$ a skaláris szorzatuk:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = (e\mathbf{i} + f\mathbf{j})(g\mathbf{i} + h\mathbf{j}) = eg\mathbf{ii} + fg\mathbf{ji} + eh\mathbf{ij} + fh\mathbf{jj} = eg\mathbf{ii} + fh\mathbf{jj} = eg + fh,$$

mivel $\mathbf{ij} = 0$, hiszen a két vektor merőleges egymásra. Tehát a vektorok skaláris szorzatát megkapjuk, ha a vektorok azonos helyen álló koordinátáit összeszorozzuk, majd összeadjuk őket.

Többdimenziós tér

A számpár a sík vektora, a számhármás a tér vektora, a számnégyes a négydimenziós tér vektora, az $\mathbf{r}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ rendezett szám n-es pedig az n-dimenziós tér vektora.

A többdimenziós tér matematikai absztrakció. Nem elképzelés, vagy térlátás dolga. A kettő és három dimenziós esetekben tanultak axiomatizálásával visszük át a fogalmakat a magasabb dimenziós terekre. Bővebben lineáris tér vagy vektortér címszavakkal kereshetünk információkat¹².

Norma:

Az $\mathbf{r}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ vektor normáján az $\|\mathbf{r}\| = \sqrt{(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \dots + x_n^2)}$ mennyiséget értjük.

Skaláris szorzat:

Az $\mathbf{r}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ és $\mathbf{s}(y_1, y_2, \dots, y_n)$ vektorok skaláris szorzatán az $\mathbf{rs} = x_1y_1 + x_2y_2 + \dots + x_ny_n$ mennyiséget értjük.

Lineáris függetlenség:

Az $\mathbf{r}_n$, n db. vektor lineárisan független, ha a $\sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbf{r}_i = 0$ egyenlőség csak $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$ esetén teljesül.

Bázis:

¹² Matematikai kislexikon, Műszaki Könyvkiadó, Budapest 1972.

Informatikai matematikai alapvetés

A tér lineárisan független vektorainak olyan rendszere, amelyek lineáris kombinációival a többi vektor bármelyike előállítható. Ahány ilyen vektor van, annyi dimenziós a tér.

Az n -dimenziós tér egy bázisa a

$(1, 0, 0, 0, \dots, 0)$

$(0, 1, 0, 0, \dots, 0)$

$(0, 0, 1, 0, \dots, 0)$

$\vdots$

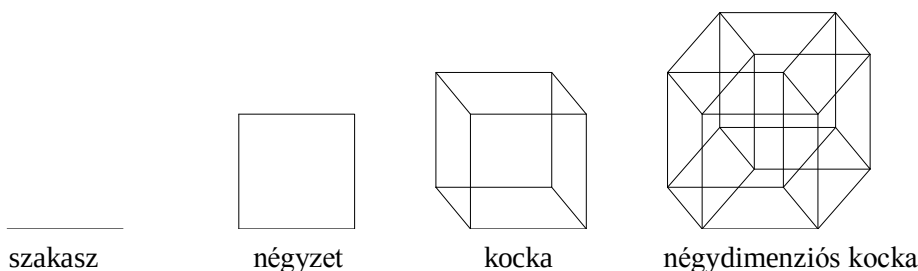
$(0, 0, 0, 0, \dots, 1)$

Ezek bármelyikének az összes többivel a skaláris szorzata 0, azaz az összes többire merőleges.

Ha a vektorokat, amelyekre a vizsgálatunk kiterjed mátrix alakba írjuk soronként, akkor a mátrix rangja és a vektorrendszer bázisvektorainak száma megegyeznek.

Az alakzatok elképzelése nem kérdés, mert nem merülhet fel. Lerajzolni vagy szerkeszteni azonban lehet. Ez első hallásra meglepőnek tűnik, bár a kockát a testet is le tudjuk rajzolni a síkra, a papírra, a háromdimenzióst a kétdimenziósra, és az összes műszaki alkotás rajza is síkon jelenik meg először terv formájában úgy, hogy abból a térbeli formát egyértelműen és méreletesen lehet elkészíteni.

A négyzet úgy jön létre a síkon, hogy a síkon felvesszünk egy szakaszt, ennek csúcspontjaiban a szakaszra merőlegeseket állítunk és az egyik oldalra szakasznyi hosszt felmérünk majd a kapott pontokat összekötjük. Kockát pl. axonometriában (ezt már az általános iskolában mindenki tanulta) tudunk rajzolni. Felvesszük a kocka egyik csúcspontját a belőle kiinduló három éllel és "értelemszerűen" megrajzoljuk a kocka axonometriáját. A négydimenziós kocka (nem elképzelni !!!) egyik csúcspontját felvesszük a papíron (síkon) a belőle kiinduló négy éllel és "értelemszerűen" megrajzoljuk a kocka axonometriáját. A négyzet oldalai szakaszok, a kocka "oldalai" négyzetek, a négydimenziós kocka "oldalai" háromdimenziós „kockák”.



8. Sorozatok és sorok

Definíció: Ha a pozitív egész számokhoz mennyiségeket (vagy más egyebet) rendelünk, akkor sorozatot kapunk.¹³

Vannak véges és végtelen sorozatok. A középiskolai tanulmányok során már mindenki találkozott számtani sorozattal is és mértani sorozattal is.

A **számtani sorozatot** úgy kapjuk, hogy veszünk egy első számot. Ebből a sorozat második elemét úgy kapjuk, hogy hozzáadunk egy (állandó) számot, a harmadikat úgy, hogy ezt a számot hozzáadjuk a másodikhoz, és így tovább. A sorozat elemeit kis latin betűvel szokás jelölni, és hogy hányadikról van szó, azt indexként tüntetjük fel. Számtani sorozatnál a hozzáadandó állandó szám neve differencia és d -vel szokás jelölni.

Képletben: $a_n = a_1 + (n-1)d$.

Néhány konkrét számtani sorozat:

1, 2, 3, ... vagy

-2, 8, 18, 28, 38, 48, ..., vagy

100, 99.9, 99.8, 99.7, ...

A **Mértani sorozatot** úgy kapunk, hogy veszünk egy első számot. Ebből a sorozat második elemét úgy kapjuk, hogy megszorozzuk egy (állandó) számmal, a harmadikat úgy, hogy ezzel a számmal megszorozzuk a másodikot, és így tovább. Mértani sorozatnál a szorzó állandó szám neve kvóciens és q -val szokás jelölni. (a szomszédos tagok hányadosa).

Képletben: $a_n = a_1 q^{n-1}$.

Néhány konkrét mértani sorozat:

1, 2, 4, ... vagy

-2, 8, -32, 128, ..., vagy

1, 0.9, 0.81, 0.729, 0.6561, ...

A középiskolából hozott ismeret a számtani és a mértani sorozat első n eleme összegének a kiszámítása is:

¹³ Ha számokat rendelünk hozzájuk, akkor ez a pozitív egész számokon értelmezett függvény. De geometriai alakzatot is hozzá lehet rendelni és így kaphatunk pl. pontsorozatot, körsorozatot, egyenessorozatot. A sorozatnak mindig van első, második, harmadik stb. eleme.

Informatikai matematikai alapvetés

A számtani sorozat első n elemének összegét az $s_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}$ képlet, a mér-

taniét pedig $s_n = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}$ képlet adja.

Még van néhány sorozat, amelynek egyszerű leírása van, és a szöveg alapján lehet a képletet felállítani. Pl. Fibonacci-sorozat¹⁴ (ehhez több természeti jelenség kapcsolható)

Példák egyéb sorozatokra:

$$a_n = n^3, \quad a_n = \sqrt{2n}, \quad a_n = (1+n)^2, \quad a_n = \frac{n}{n+1}.$$

Ezek a sorozatok se nem számtani se nem mértani sorozatok.

A számtani és a mértani sorozatot két egymás utáni eleme (pl. első és második) meghatározza. De ha egy sorozatnak csak néhány kezdeti elemét ismerjük, abból nem biztos, hogy felismerjük a képzési törvényt.

A végtelen sorozatokkal kapcsolatos általános fogalmak

A sorozatra akkor mondjuk, hogy **monoton**, ha az egymást követő elemekben egy nagyság szerinti szigorú, kivételt nem ismerő tendencia érvényesül. Azaz bármilyen $n < m$ indexek esetén

$a_n \leq a_m$ monoton növekvő, vagy

$a_n < a_m$ szigorúan monoton növekvő, vagy

$a_n \geq a_m$ monoton csökkenő, vagy

$a_n > a_m$ szigorúan monoton csökkenő.

A legtöbb sorozat azonban egyikbe sem illeszthető bele, azok a nem monoton sorozatok.

A másik egyszerű fogalom a sorozat **korlátossága**.

Felülről korlátos egy sorozat, ha van olyan K szám, amelynél a sorozat minden eleme kisebb. Természetesen, ha a sorozat felülről korlátos, akkor sok felső korlát van, hiszen ha K -nál minden elem kisebb, akkor bármely K -nál nagyobb számnál is.

Alulról korlátos egy sorozat, ha van olyan k szám, amelynél a sorozat minden eleme nagyobb. Természetesen, ha a sorozat alulról korlátos, akkor sok alsó korlát van, hiszen ha k -nál minden elem nagyobb, akkor bármely k -nál kisebb számnál is.

¹⁴ Fibonacci sorozat: $a_1 = 0$, $a_2 = 1$, az n -edik pedig az azt megelőző kettő összege.

Korlátos a sorozat, ha van alsó és felső korlátja is.

Torlódási pont. A fogalom azt fejezi ki, hogy van egy olyan szám, amely körül nagyon sok sorozatelem van. Pontosán kifejezve, hogy számolni is lehessen vele:

t az a_n sorozat torlódási pontja, ha $|t - a_n| < \varepsilon$ a sorozat végtelen sok elemére teljesül, bármilyen kicsi pozitív ε esetén is. Ettől még végtelen sok elem maradhat kívül is. Egy sorozatnak sok torlódási pontja lehet.

Konvergensnek nevezik a sorozatot, ha van határértéke. A sorozat határértéke hasonlít a torlódási ponthoz, de teljesen mást fog meg. Igyekszik az elemeket egy pont köré gyűjteni, csaknem mindet, vagyis itt nem maradhat ki túl sok elem a környezetből. Ha a határértéket A -val jelöljük, akkor

az a_n sorozat határértéke A , ha bármilyen kicsi pozitív ε -hoz meg lehet határozni olyan N természetes számot, hogy az ennél nagyobb indexű sorozatelemekre, azaz $N < n$ esetén, az a_n -re $|A - a_n| < \varepsilon$ teljesül, azaz ε -nál közelebb vannak A -hoz. Ezt így is írhatjuk:

$$A - \varepsilon < a_n < A + \varepsilon,$$

ahol olyan sorozatbeli a_n elemek szerepelnek, amelyek indexeire $N < n$ teljesül.

Azt, hogy az a_n sorozat határértéke A így írjuk:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A.$$

Van konvergens sorozat.. Az egyik legnevezetesebb sorozat az

$$a_n = \frac{1}{n}.$$

Ennek első néhány eleme a következő:

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots$$

A sorozat határértéke 0. Az

$$\left| 0 - \frac{1}{n} \right| = \frac{1}{n} < \varepsilon$$

teljesíthető, ugyanis az egyenlőtlenséget rendezve

$$1 < n\varepsilon \Rightarrow \frac{1}{\varepsilon} < n.$$

Vagyis, ha valaki pl. $\varepsilon = 0.000001$ -t választ, akkor $\frac{1}{0.000001} = 1000000 \leq N < n$. Azaz meghatározható az a véges számú sorozatelem, amelyik $\varepsilon = 0.000001$ -nél távolabb van 0-tól, és ezek száma nem több 1000000-nál.

Ezt a konkrét sorozatot **nullsorozatnak** hívják.

A konvergencia definíciójának kétségkívül korlátja, hogy azt tudjuk eldönteni viszonylag könnyen, hogy egy adott szám a kiszemelt sorozatnak határértéke-e. Azt eldönteni, hogy egy sorozatnak van-e határértéke sokszor igen nehéz.

Egy sorozatot **konvergensnek** nevezzük, ha van határértéke és **divergensnek**, ha nincs határértéke.¹⁵

Bizonyítás nélkül fogadjuk el, hogy ha az a_n sorozat határértéke A és a b_n sorozat határértéke B , akkor összegüknek van határértéke és az a határértékek összege. Hasonló állítás igaz sorozatok különbségére és is és szorzatára is. Hányadosra csak akkor, ha az osztó sorozat egyik eleme sem nulla, és annak a határértéke sem. Képletekbe írva:

Ha

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = B$$

akkor

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \pm b_n) = A \pm B,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n * b_n) = A * B.$$

Ha a sorozatelemek hányadosa, valamint a határértékek hányadosa is képezhető, akkor

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a_n}{b_n} \right) = \frac{A}{B}.$$

A szemlélet alapján kézenfekvő, hogy ha van három sorozatunk úgy, hogy minden n -re $a_n \leq b_n \leq c_n$ és $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$, $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = A$, akkor a közrefogott sorozatnak is van határértéke és az is A . Ezt a szabályt tréfásan rendőrszabálynak hívják. Az a_n és c_n mindketten az A rendőrsre mennek és mindig közöttük tartják a b_n gyanúsítottat.

¹⁵ Olykor csak a "széttartó" sorozatot hívják divergensnek. Természetesen az ilyen sorozatoknak sincs határértéke.

Kérdések(végtelen sorozatokra):

- Lehet-e az a sorozat konvergens, amelyiknek nincs torlódási pontja?
- Van-e olyan sorozat, amelynek nincs torlódási pontja?
- Lehet-e az a sorozat konvergens, amelynek kettő torlódási pontja is van?
- Lehet-e az a sorozat konvergens, amelyik nem korlátos?
- Ha egy sorozatnak csak egy torlódási pontja van, akkor az konvergens is?
- Lehet-e két divergens sorozat összege konvergens?

1 Példa:

Számítsuk ki $a_n = \frac{1}{n^2}$ sorozat határértékét!

Alkalmazva a fenti szabályokat $a_n = \frac{1}{n^2} = \frac{1}{n} * \frac{1}{n} \rightarrow 0 * 0 = 0$.

2. Példa:

Számítsuk ki $a_n = \frac{1}{n^2} + 9$ sorozat határértékét!

Az összeg első tagjának a határértéke az előző példa szerint 0. A második tag egy csupa 9 értékekből álló sorozat, amelynek határértéke 9, és így a keresett határérték 9.

3. Példa:

Számítsuk ki $a_n = \frac{4n^3 - 3n^2 + 2}{n^4 - 2n^3}$ sorozat határértékét!

Ez még a jól kezelhető típusfeladatok közé tartozik. A kifejezésen algebrai átalakításokat hajtunk végre. A számlálót is és a nevezőt is elosztjuk a legmagasabb fokú hatvánnyal, n^4 -nel. Így kapjuk

$$a_n = \frac{4n^3 - 3n^2 + 2}{n^4 - 2n^3} = \frac{4 - 3\frac{1}{n} + 2\frac{1}{n^4}}{1 - 2\frac{1}{n}} \rightarrow \frac{4 - 3*0 + 2*0}{1 - 2*0} = 4.$$

Vagyis a sorozat határértéke 4.

5. Példa

Mit tudunk mondani az $a_n = (-1)^n \left(\frac{1}{n} + 1\right)$ sorozatról?

Informatikai matematikai alapvetés

Válaszok:

- Korlátos, mivel $-10 < a_n < 10$.
- Torlódási pontja kettő is van a -1 és $+1$.
- Divergens.
- Nem monoton.

6. Példa

Mit tudunk mondani az $a_n = \begin{cases} n, & \text{ha } n \text{ páros} \\ \frac{1}{n}, & \text{ha } n \text{ páratlan} \end{cases}$ sorozatról?

Válaszok:

- Alulról korlátos, felülről nem.
- Egy torlódási pontja van.
- Nincs határértéke.

Nevezetes számok: $\sqrt{2}$, π , e

1. $\sqrt{2}$

Az egység oldalú négyzetnek van átlója, éspedig a Pitagorasz-tétel szerint a hossza egy olyan szám, amelynek a négyzete a befogók négyzetének összege, vagyis 2. Euklidész idejében egész és tört számokat ismertek, ezért ő az átló hosszát összemérhetetlen mennyiségnek jelölte meg. A tizedes számokat Európában először Kopernikusz (1473 - 1543)¹⁶ használta, de a kínaiak már 100 évvel korábban is ismerték. Ma az átló hosszát $\sqrt{2}$ -nek mondjuk. $\sqrt{2}$ az a szám, amelynek négyzete 2. $\sqrt{2}$ -t sorozattal fogjuk definiálni. Legyen

$$a_1 = 1 \rightarrow a_1^2 = 1$$

$$a_2 = 1.4 \rightarrow a_2^2 = 1.96$$

$$a_3 = 1.41 \rightarrow a_3^2 = 1.9881$$

$$a_4 = 1.414 \rightarrow a_4^2 = 1.999396$$

$\vdots$

A képzési szabály az, hogy hozzávesszük az előzőhöz azt a legnagyobb tizedesjegyet, amelyiknél a szám négyzete még nem több kettőnél. Sorozatunk

¹⁶ Sain Márton tv-előadásából.

tehát szigorúan monoton növekvő és korlátos. Bebizonyítható, hogy az ilyen sorozatok konvergensek. A jelen sorozat határértéke definíció szerint $\sqrt{2}$.

2. π

A sík körei mind hasonlóak, nagyságuk, és minden hosszúsági adatuk csak a sugártól függ. Ezért ha egy kör területét elosztjuk pl. a sugarával vagy az átmérőjével, mindig, minden körre azonos számot kapunk. Azt a görögök is tudták, hogy a kör területének és átmérőjének hányadosa állandó és a terület (=periféria) szó után ezt az állandót π -vel jelölték. Hogy ez az állandó mennyi az a különféle koroktól függött. A Bibliában is megtaláljuk a π -t. Az Ószövetség "Királyok I. könyvében (1 Kir 7, 23)" olvashatunk egy kerek építményről¹⁷, amely mindenütt 10 sing széles, körbefogva pedig a kerülete 30 sing. Azaz a $\pi = 30/10 = 3$. Nem kell tudnunk a π -hez, hogy mennyi a sing. Egyébként a

singcsont (alkar) hossza. A Rhind papiiruszon (ie. 1700 körül) a $\pi = \left(\frac{16}{9}\right)^2$ sze-

repel ($=3.16\dots$). Később $\pi = 3\frac{1}{7}$ ($=3.1428\dots$) volt. Archimédész (i.e. 287 -

212) a kör szabályos sokszögekkel való közelítéséből számolt. Szabályos 96 oldalú sokszöggel számolva azt kapta, hogy $3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{10}{70}$. Ludolf von

Ceulen (1540-1610) a π -t 35 tizedes jegyre határozta meg. Ezért a π -t Ludolf-féle számnak is hívják. Azt, hogy a π irracionális Lambert 1770-ben bizonyította be. És hogy még transzcendens¹⁸ is, azt pedig Lindemann 1882-ben. És ezzel megoldódott a kétféle körnégyesítősi probléma¹⁹ is. Eddig a kört nem tudták négyesíteni, de ettől az időponttól tudják, hogy nem is lehet négyesíteni, ui. Az 1 hosszúságú szakaszból körzővel és vonalzóval az euklideszi szerkesztési lépések útján egyetlen transzcendens értéket, transzcendens hosszúságú szakaszt sem lehet megszerkeszteni.

¹⁷ 1Kir 7, 23 Károli Gáspár fordításában: És csinálja egy öntött tengert, mely egyik szélétől fogva a másik széléig tíz sing volt, köröskörül kerek, és öt sing magas, és a területit harmincz sing zsinór érte vala körül.

¹⁸ Transzcendens egy szám, ha egyetlen egész együtthatós polinomnak sem zérushelye.

¹⁹ A körnégyesítősi feladat egy kör területével azonos területű négyzet szerkesztését jelenti az euklideszi geometriában körző és vonalzó felhasználásával. Körzővel adott középponttal adott ponton át kört rajzolhatunk, vonalzóval két adott ponton át egyenest rajzolhatunk. Szerkesztett pontok két egyenes metszéspontja, kör és egyenes metszéspontja, két kör metszéspontja. Ezeket a lépéseket csak véges sokszor szabad használni. Csak bizonyos algebrai egyenlet gyökei szerkeszthetők, a transzcendenseké nem.

3. e

Számítsuk ki

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Ez egy különösen érdekes és fontos feladat. De nagyon nehéz. Hogy valami képet alkossunk a sorozat első néhány elemét felírjuk

2, 2.25, 2.37037037, 2.44140625, 2.48832, ...

Az a sejtésünk, hogy a sorozat növekvő. Ezt be is tudjuk látni. Ismeretes, hogy a számtani közép nagyobb, mint a mértani, ha nem minden elem egyenlő. Vegyük

a számtani és a mértani közepét $n+1$ darab számnak, n db $\left(1 + \frac{1}{n}\right)$ -nek és az 1-nek. Akkor rájuk:

$$\frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right) + \left(1 + \frac{1}{n}\right) + \left(1 + \frac{1}{n}\right) + \dots + \left(1 + \frac{1}{n}\right) + 1}{n+1} > \sqrt[n+1]{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}$$

$$\frac{n+1+1}{n+1} = 1 + \frac{1}{n+1} > \sqrt[n+1]{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}$$

Mindkét oldalt $n+1$ -edik hatványra emelve

$$\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} > \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n,$$

azaz $a_{n+1} > a_n$, vagyis a sorozat valóban növekvő.

Megmutatjuk, hogy a sorozat korlátos is.

Vegyük n db. $\left(1 + \frac{1}{n}\right)$ és az $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$ számok számtani és mértani közepét.

$$\frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right) + \left(1 + \frac{1}{n}\right) + \left(1 + \frac{1}{n}\right) + \dots + \left(1 + \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}}{n+2} > \sqrt[n+2]{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \frac{1}{2} \frac{1}{2}}$$

A baloldali kifejezés számlálója $n+2$, egyenlő a nevezővel, ezért értéke 1, azaz

$$\sqrt[n+2]{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \frac{1}{4}} < 1, \text{ ahonnan } \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 4.$$

A sorozat tehát szigorúan monoton növekvő és korlátos. Az ilyen tulajdonságú sorozatnak van határértéke. Ez a sorozat azonban ezen a téren is különös, mert a határértéke egy eddig nem ismert szám. A határértéket Euler után **e**-nek nevez-

Informatikai matematikai alapvetés

zük, és ez egy logaritmus, a természetes alapú logaritmus alapszáma, amelynek a számítástechnikában is igen fontos szerepe van.²⁰ Jelleget tekintve a π -vel rokon. Mindkettő irracionális, de nem úgy, mint pl. a $\sqrt{2}$, hanem ezek még transzcendensek is, ami azt jelenti, hogy nincs olyan egész együtthatós polinom, amelynek gyökei lennének. A $\sqrt{2}$ gyöke az $x^2 - 2 = 0$ egész együtthatós egyenletnek. Az e közelítő értéke

$$e=2.718281828\dots$$

Végtelen sorok

Tekintsük az

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$$

sorozatot. Ha a vesszők helyett összeadás jelet teszünk **sor** kapunk. Tehát

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots$$

a sor.

Az egyik legfontosabb kérdés, hogy van-e a sornak összege, vagyis mennyi, ha van, e végtelen sok összeadandónak az összege. Nyugodtan gondolhatjuk azt is, hogy ha mindig adunk hozzá az addigiakhoz valamennyit, akkor végtelen nagy számot kapunk. De vegyünk egy 1 méteres pálcát. Törjük el a felénél és a felét tegyük le az asztalra. Most a maradékot törjük ketté, és a felét tegyük le folyta-

tásként. És így tovább. Le van tehát téve $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots$

Vagyis, ha a rudat mind letenném, akkor lenne a letettek hossza 1.

Ez az összeg úgy keletkezik, hogy egy sorozatot képezünk. Aszerint, ahogyan egyre több számunk lesz már összeadva. Általánosságban

²⁰ A 16. században a csillagászati számításokhoz volt szükség a számok bizonyos hatványaira, logaritmusokra. Pl. Bűrgi svájci matematikus a logaritmus alapszámát kényelmi szempontokból $a = \sqrt[10]{1.0001}$ -nek választotta, ami közelítőleg 2.71814593..., míg az $e=2.718281828\dots$, vagyis ezredekig megegyeznek. Hatalmas logaritmustáblázatot készítettek. 1624-ben E. Gunter logaritmus, szinusz és koszinusz skálákat készített, ami a logarléc alapjául szolgált. A logarléc aztán az 1960-as évekig, a zsebszámológépek elterjedéséig sok mérnök és alkalmazott matematikus munkaeszköze volt.

Informatikai matematikai alapvetés

$$s_1 = a_1,$$

$$s_2 = a_1 + a_2,$$

$$s_3 = a_1 + a_2 + a_3,$$

$$s_3 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4,$$

$\vdots$

$$s_n = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \dots + a_n.$$

A sor szeleteiből részösszegeket állítottunk elő. A **sor összege** alatt eme részösszegek sorozatának a határértékét értjük. Egy sornak tehát akkor van összege, ha a belőle képzett részösszegek (részletösszegek) sorozata konvergens.

Példa:

Készítsünk a mértani sorozatból sort, azaz $a_1 + a_1q + a_1q^2 + \dots + a_1q^{n-1} + \dots$ és számítsuk ki az összegét. Az első n tag összegének kell tehát a határértékét venni, azaz

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}.$$

Abban az esetben, ha $|q| > 1$ a kifejezésnek nem lesz határértéke, mivel q^n minden határon túl nő. Ha azonban $|q| < 1$, akkor q^n egyre kisebb lesz és határértéke 0. Ekkor

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1} = a_1 \frac{-1}{q - 1} = a_1 \frac{1}{1 - q}.$$

Példa:

Vizsgáljuk meg az összeg létezése szempontjából a következő sort:

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n \cdot (n+1)} + \dots$$

sort.

Minden tagot két tört különbségeként írhatunk fel, azaz

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$$

és így az az első n tagot könnyedén összeadhatjuk:

$$s_n = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1},$$

ahonnan

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 1 - \frac{1}{n+1} = 1.$$

Informatikai matematikai alapvetés

Ne gondoljuk, hogy a sorok összegét mindig ilyen egyszerűen lehet kiszámolni. Eddig azt tapasztaltuk, hogy ha egyre kisebbeket adunk az előzőekhez, akkor van összeg, de ez általában nem lesz igaz. Azt is megfigyelhettük volna azonban, hogy ha egyre nagyobbakat adunk az előzőekhez, akkor nincs összeg. Ez viszont igaz minden sor esetén. Biztosan tudjuk, hogy összeg csak akkor lehet, ha a sor általános tagja tart 0-hoz, de ez nem elégséges feltétel.

Van egy egyszerű és nagyon nevezetes sor, ez a harmonikus sor. Az alábbi:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots$$

Ennek a sornak nincs összege, bár az általános tag 0-hoz tart, mert a részösszegek sorozata nem lesz konvergens, minden határon túl nő.

A mi esetünkben a sorok a függvények értékeinek numerikus kiszámításakor játszanak majd fontos szerepet.

9. Függvénytani alapfogalmak

A függvény matematikai fogalma is, mint annyi más fogalom hosszú időn át alakult ki. Az adatok kapcsolatának kifejezésére használták. Ezek receptek voltak. Az ókorban már voltak számoló táblázatok, pl. a körök húrjairól. Ma is vannak ilyenek; pl. un köbözők a farönkök térfogatát, hordók űrtartalmát adják meg, no és az iskolai függvény táblázatok. A koordináta-rendszer gondolata Apollóniosznál fellelhető. Ptolemaiosz földrajzi szélességet és hosszúságot használt. Descartes, a koordináta-geometria feltalálója adta meg a függvény első definícióját, amikor a függvényt megfeleltetésnek definiálta. Ezután kialakult a függvénytan két nagy fejezete a differenciál és integrálszámítás. És jöttek újabb definíciók. Volt idő, amikor azt gondolták, hogy a mennyiségek közötti kapcsolatot a négy alapművelettel, hatványozással, gyökvonással ki lehet fejezni. Majd a húr rezgésének leírásánál kiderült, hogy ez nem elegendő. Még Bolyai Farkas 1832-ben a Tentamenben is így ír: Tágabb értelemben a függvény bármilyen operáció, amely időben és térben elképzelhető. A XVIII. században a matematikai felfedezések sokasága valósult meg. És közben elhalványult a matematikai szigor. Ezt a szigorú állította vissza Bolzano (1781-1848) az 1830-ban elkészült függvénytan kéziratában. Ez a kézirat azonban csak 1930-ban, 100 év múlva került napvilágra, ugyanis Bolzano cseh matematikust, filozófust, a prágai egyetem vallástörténet professzorát az osztrák elnyomás elleni elvei miatt 1819-ben állásából eltávolították, és minden nyilvános szerepléstől eltiltották. Így söpri az önkény és a hatalom a szőnyeg alá még a matematikai eredményeket is. Végülis, Bolzano munkáját nem ismerve a függvény fogalmát mai használatban Weierstrass (1815-1897) alkotta meg. Weierstrass munkásságával megalapozta a végtelen kicsi matematikai fogalmát és a vele való pontos számolást.

A függvény definíciója:

Ha a H_1 halmaz minden eleméhez hozzárendeljük a H_2 halmaz valamely elemét, akkor ezt a hozzárendelést függvénynek nevezzük.

A definícióban benne van, hogy H_1 különböző elemeihez hozzárendelhetjük a H_2 ugyanazon elemét is, de a H_1 egy eleméhez nem rendelhetjük hozzá H_2 két vagy több elemét. H_1 -et a függvény értelmezési tartományának, H_2 -t a függvény értékkészletének nevezzük.

Informatikai matematikai alapvetés

Jelölési módok:

$$f : H_1 \rightarrow H_2$$

$$x \rightarrow f(x)$$

$$y = f(x)$$

$$f(x) = \text{kifejezés}$$

A H_1 elemeit leginkább x -szel jelölik, és független változónak hívják. A H_2 elemeit pedig függő változónak mondják, és gyakorta y -nal jelölik. Előfordulhat, hogy H_1 elemét nem egy szám, hanem rendezett számpár vagy több szám határozza meg, ezek a többváltozós függvények. De lehet, hogy H_1 elemei komplex számok vagy vektorok. Az előbbieket a komplex függvények, az utóbbiak a vektorfüggvények. A megfeleltetett H_2 -beli elem is lehet sokféle, de egy H_1 -belihez mindig csak egyetlen H_2 -beli elem tartozik.

Példák függvényekre:

1.

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha } x \text{ racionális} \\ 0, & \text{ha } x \text{ irracionális} \end{cases}$$

Ez az ún. Dirichlet-féle függvény, a függvénytan "fekete báránya". Azon kívül, hogy a függvény fogalmának teljes mértékben eleget tesz, alig van valamije. Pl. nincs grafikonja, nincs határértéke, sehol sem folytonos, nem monoton, nem differenciálható, nem integrálható, csak ott van az útban, hogy bármit mondunk a függvénnel kapcsolatban, az rá is vonatkozzék, mert ő is függvény.

Nem mondhatjuk, pl. hogy a függvényt képlettel lehet megadni, nem mondhatjuk, hogy a függvény görbáját meg lehet rajzolni. Pedig a függvény definíciója igen szimpla kis ártatlan mondatnak tűnik.

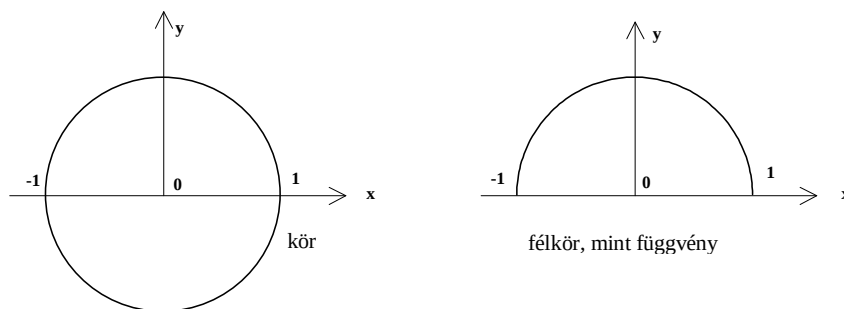
2.

Az $x^2 + y^2 = 1$ nem függvény, az $y = \sqrt{1-x^2}$ viszont függvény.

Az első kifejezés nem függvény, jóllehet az x, y számpárok között nagyon szoros a kapcsolat. Az egyenlet az egységsugarú kör egyenlete. Legyen, pl. $x=0.6$, akkor az összefüggést nemcsak az $y=0.8$, hanem az $y=-0.8$ is kielégíti, és ez a baj.

A komplex számok fejezetben azt tanultuk, hogy $\sqrt[n]{a}$ az a szám, amelynek n -edik hatványa a . És ilyen szám pontosan n db. van. Tehát négy-

zetgyök esetén kettő. Más a helyzet a függvénytanban. Azt mondjuk, hogy $\sqrt{a}$ az a nem negatív szám, amelynek négyzete a . És az is igaz, hogy a nem lehet negatív. Ily módon függvényt kapunk, mivel a gyökvonás eredménye is egy db. szám. Ezért a második kifejezés függvény. Ugyanis bármely $-1 \leq x \leq 1$ -hez tartozik egy és csak egy y érték. Pl. ha $x=0.6$, akkor az $y=0.8$, és nincs több eset.



Alapfogalmak:

1. Monotonitás, korlátosság:

Az $f(x)$ függvény *szigorúan monoton növekvő* (csökkenő) az a, b intervallumon, ha minden x_1, x_2 változópár $a \leq x_1 < x_2 \leq b$ esetén a függvényértékekre $f(x_1) < f(x_2)$ (csökkenőnél $f(x_1) > f(x_2)$) teljesül. ($\leq$ ill. $\geq$ esetén monoton)

Az $f(x)$ függvény *korlátos* az a, b intervallumon, ha van olyan K szám, amelyre $|f(x)| < K$ teljesül.

2. Páros, páratlan

Az $f(x)$ függvény *páros*, ha az értelmezési tartomány bármely x elemére $f(x) = f(-x)$.

Az $f(x)$ függvény *páratlan*, ha az értelmezési tartomány bármely x elemére $f(x) = -f(-x)$.

Vegyük észre, hogy a függvények többsége se nem páros, se nem páratlan. Ez nem meglepő, hiszen a számok többsége sem páros vagy páratlan. Sőt itt a többsége szó valóban nem a *sokat* jelenti. Az egész számok halmaza megszámlálhatóan végtelen, a valós számoké pedig kontinuum, azaz a se nem páros, se nem

páratlan számok számossága kontinuum. A páros tagadása a nem páros, nem pedig a páratlan.

Példák páros függvényre:

$$f(x) = x^2, \quad f(x) = x^4 - 4x^2 + 2, \quad f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}, \quad f(x) = \cos x.$$

Példák páratlan függvényre:

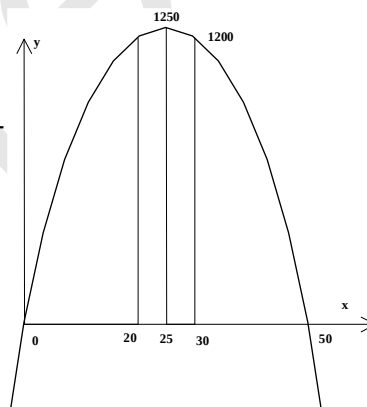
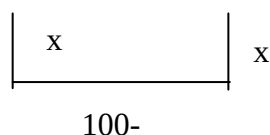
$$f(x) = x, \quad f(x) = x^3 - x, \quad f(x) = \frac{1}{x}, \quad f(x) = \sin x.$$

A páros és páratlan függvények közötti különbség a függvények grafikonján is jól látszik. A páros függvény grafikonja tükrös az x tengelyre, míg a páratlané az origóra.

3. Maximum, minimum

Lokális maximuma van $f(x)$ -nek x_0 -ban, ha x_0 -nak van olyan δ környezete, hogy a belőle vett bármely x esetére $f(x) \leq f(x_0)$ teljesül. Analóg a lokális minimum esete, amikor is pedig $f(x_0) \leq f(x)$.

Van egy tábla lemezünk, amelynek szélessége 100 cm és a hossza 200 cm. Ebből hajlítással ki kell alakítani egy u alakot. Ez egytartály része, a két végére egyéb zárólemez kerül.



A metszetét a bal fenti ábra mutatja. A térfogat változását csak a metszet alakja befolyásolja

A metszet területe: $T = x(100 - 2x) = 100x - 2x^2$.

Jobbra ennek a parabolának a grafikonját látjuk. Minden x értékhez tartozik parabolapont. De a feladatban x csak pozitív lehet és 50-nél is kisebb. A szélsőérték, most maximum $x=25$ -nél van. Ez a globális maximum, a parabola csúcspontja, csak egy

van belőle és a feladat geometriai jelentésétől független (pl. szakasz hossza pozitív).

Ha azt mondjuk, hogy legfeljebb 20 cm-t szabad felhajtani, akkor a $[0,20]$ intervallumon a 20-nál lesz a maximum, gyakorlati maximum.

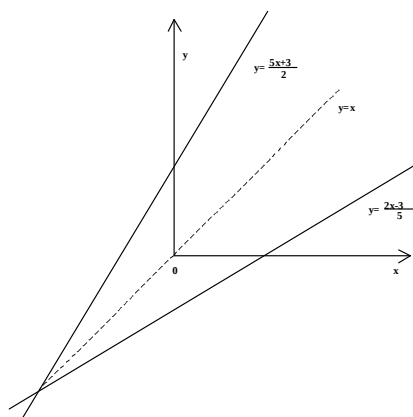
Ha pedig azt mondjuk, hogy legfeljebb 30 cm-t szabad felhajtani, akkor a $[0,30]$ intervallumon a 25-nél lesz a maximum, és ez a lokális maximum egybe esik a globálissal, azaz semmilyen x -nél nem kapnánk nagyobb függvényértéket. A lokális maximum tehát egy ponthoz van kötve és az a hely, ahol a függvény értéke a legnagyobb. A globális maximum az egész értelmezési tartományra vonatkozik. Az a hely, ahol a függvényérték a legnagyobb.

4. Függvény inverze

A függvénynél minden $x \in H_1$ -hez tartozik egy $f(x)$. Sok olyan függvény van azonban, hogy azt is pontosan meg lehet mondani az $f(x)$ -ből, hogy melyik x -hez tartozik. Vagyis a két halmaz elemei között kölcsönösen egyértelmű kapcsolat van.

Legyen a függvényünk pl.

$$y = \frac{2x-3}{5}$$



Ebből x -et kifejezhetjük, és pedig egyértelműen. Ekkor $x = \frac{5y+3}{2}$ -t kapunk. Ha ezt ugyanabban a koordinátarendszerben akarjuk ábrázolni, akkor y helyett x -et kell írni, és x helyett y -t, azaz a függvényünk

$$y = \frac{5x+3}{2}$$

A függvény inverzének a grafikonját az $y=x$ egyenesre való tükrözéssel kaphatjuk meg.

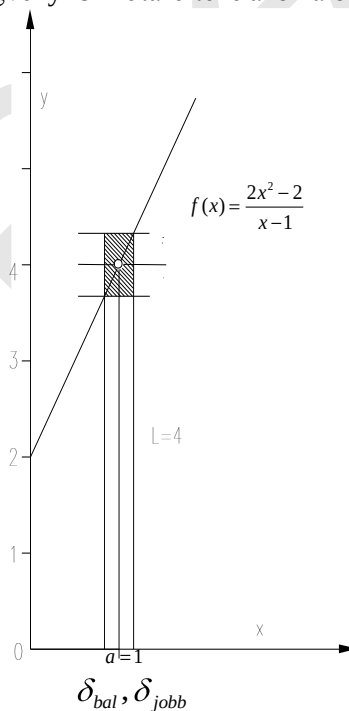
Csak szigorúan monoton függvénynek van inverze.

5. Függvény határértéke

A függvény határértékét Weierstrass fogalmazta meg az alábbi módon:

Az $x = a$ helyen az $f(x)$ függvény határértéke az L szám, ha bármely adott pozitív ε számhoz találhatunk olyan pozitív δ számot, hogy valahányszor $|x - a| < \delta$, akkor teljesül az $|L - f(x)| < \varepsilon$ egyenlőtlenség is.

A határértéket tehát ketten játsszák. Az egyik mondja az ε -t. Ha a másik erre mindig tud δ -t mondani vagy inkább tudhatna, akkor van a függvénynek határértéke azon a bizonyos helyen.



Informatikai matematikai alapvetés

Példa:

Bizonyítsuk be, hogy az

$$f(x) = \frac{2x^2 - 2}{x - 1}$$

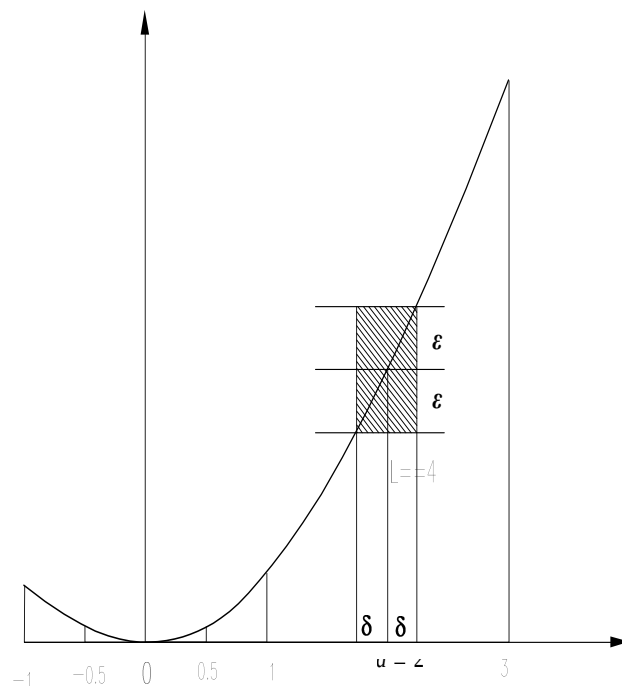
függvénynek az $x = a = 1$ helyen van határértéke és a határérték $L = 4$. Észre vehetjük, hogy az $a = 1$ helyen a függvény nincs is értelmezve, ennél fogva ott függvényérték sincs. De, ha lenne függvényérték, mondjuk 6, itt a határérték akkor is 4 lenne.

Legyen hát ε tetszőleges pozitív szám. Azt kell igazolnunk, hogy

$$\left| 4 - \frac{2x^2 - 2}{x - 1} \right| < \varepsilon$$
 összefüggésből meg tudunk

határozni egy alkalmas ε -től függő pozitív δ számot. A függvényen algebrai átalakításokat hajtunk végre, ami által a számolás némileg egyszerűbb lesz.

$$\begin{aligned} \frac{2x^2 - 2}{x - 1} &= \frac{2(x - 1)(x + 1)}{x - 1} \\ &\xrightarrow{\text{ha } x \neq 1} 2(x + 1) = \\ &= 2x + 2. \end{aligned}$$



Tehát az $|4 - (2x + 2)| < \varepsilon$ egyenlőtlenséggel kell foglalkozni. Ha az abszolút értéket felbontjuk, akkor két egyenlőtlenséget kapunk. Az egyik:

$$2x + 2 < 4 + \varepsilon \rightarrow 2x < 2 + \varepsilon \rightarrow x < 1 + \frac{\varepsilon}{2} \rightarrow \frac{\varepsilon}{2} = \delta_{jobb}$$

A másik:

$$4 - \varepsilon < 2x + 2 \rightarrow 2 - \varepsilon < 2x \rightarrow 1 - \frac{\varepsilon}{2} < x \rightarrow \frac{\varepsilon}{2} = \delta_{bal}$$

Azt kaptuk tehát, hogy bármely adott pozitív ε számhoz találhatunk olyan pozitív δ számot, amely a feltételeknek megfelel, és $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$.

Természetesen az ennél kisebb pozitív számok is jók.

A másik függvény az $y = x^2$. Határértéket az $a=2$ helyen nézzük. $L=4$.

Most az a két oldalán az δ -k különbözők. Ilyenkor a kisebb δ vagy annál kisebb pozitív szám lesz a megfelelő.

7. Függvények folytonossága.

Ez a határértékkel együtt a nagyon fontos fogalmak egyike. A definíció a következő:

Az x_0 helyen az $f(x)$ függvény folytonos, ha bármely adott pozitív ε számhoz találhatunk olyan pozitív δ számot, hogy valahányszor $|x - x_0| < \delta$, akkor teljesül az $|f(x_0) - f(x)| < \varepsilon$ egyenlőtlenség is.
A vizsgált helyen a függvénynek értelmezettnek kell lenni, határértékének is kell lennie, és x_0 -ban a függvény határértékével egyenlő az $f(x_0)$.

Az előző példa szerint az $y=2x+2$ függvény az $x=1$ helyen folytonos. De ezt ki lehet terjeszteni bármely x -re. A második példában az $y = x^2$ függvény az $x=2$ helyen folytonos, de minden x helyen is. Általában az elemi függvények az értelmezési tartományukon mindenütt folytonosak. Így folytonos pl.:

Informatikai matematikai alapvetés

$$y = x$$

$$y = \sin x$$

$$y = e^x$$

$$y = \ln x$$

A függvényvizsgálat hatékonyságát fokozza, hogy ha $f(x)$ és $g(x)$ folytonosak, akkor

$$cf(x)$$

$$f(x) \pm g(x)$$

$$f(x)g(x)$$

is folytonosak, sőt a hányados is folytonos ott ahol az osztó nem nulla.

Így akkor pl. folytonos

$$4x^7 + 2x^2 - 9x + 3$$

$$x^2 + \cos x$$

$$\ln x * \sin x * e^x$$

$$e^{-\frac{x^2}{2}}$$

De sehol sincs határértéke és sehol sem folytonos a Dirichlet-féle függvény, bár minden valós számra értelmezve van.

A határértéknek van egy igen szemléletes megfogalmazása is. Es a sorozat határértékére épít. Az $f(x)$ függvénynek az a helyen a határértéke A , ha **bármely** $x_n \rightarrow a$ esetén az $f(x_n) \rightarrow A$ teljesül. Ezt azonban a **bármely** miatt csak úgy tudjuk alkalmazni, ha kitaláljuk a legelső definíciónkat.

10. Differenciálszámítás

A függvények menetéről a monotonitás szolgál némi információval. Akár az is információ, hogy nincs monotonitás. Elgondolhatunk azonban mérőszámot ekkor is. A függvény egy intervallumra eső emelkedéséről vagy csökkenéséről informál a *differenciahányados*.

Legyen $x_1 < x_2$ és a függvényértékek $f(x_1)$ és $f(x_2)$, akkor a

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

hányadost *differenciahányadosnak* nevezzük. Ez szemléletesen azt fejezi ki, hogy a függvény az x_1x_2 intervallumon "átlagosan" mennyit változott. Ez a függvénygörbe húrjának a meredeksége. (baloldali ábra)

A differenciahányados kicsit általánosabban is fel lehet írni. Az x_1 helyett x -et írunk és az x_2 ettől h távolságra van. Azaz

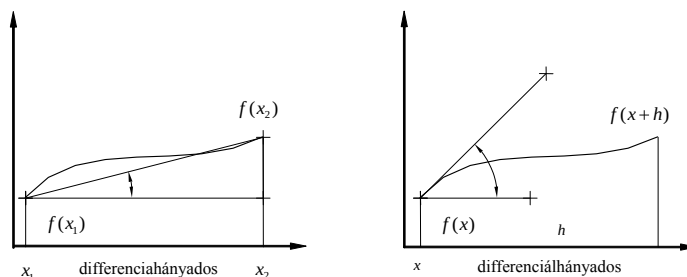
$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h}; \quad h \neq 0.$$

A két képlet ugyanaz, de az utóbbiban az x hely szabadon változik. Így a differenciahányados egy függvény lett és azt fejezi ki, hogy az x pont környezetében a függvény hogyan változik. Ha pedig ennek a határértékét vesszük, amikor is $h \rightarrow 0$ -hoz, akkor a függvény pontbeli viselkedését, érintőjének iránytangensét, meredekségének mértékét kapjuk meg.

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}, \text{ vagy } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Ezt a határértéket a függvény *differenciálhányadosának* nevezzük. A differenciálhányados az $(x_0, f(x_0))$ pontban az érintő meredekségét adja meg. Pontbeli fogalom.

Ha az országút 1 km-en 10 métert emelkedik, akkor az átlagos meredekség $10/1000 = 0.01 = 1\%$. Ez a differenciahányados. De ez úgy is kijöhet, hogy egy-két pontban ettől sokkal meredekebb részek is lehetnek. A pontbeli viszonyokat a differenciálhányados fejezi ki. (jobboldali ábra)



Informatikai matematikai alapvetés

Ha egy pontban a függvény deriváltja, az érintő irántangense pozitív, ott a függvény emelkedő, ha negatív, akkor csökkenő. Egy függvénynek nincs szükségképpen differenciálhányadosa. Ezt olykor szemléletesen is lehet látni. A differenciálhányados jelentése az érintő irántangense, és ha nincs érintő, akkor annak meredeksége sem értelmezhető. Erre egy egyszerű példa az $f(x) = |x|$ függvény az $x=0$ helyen.

A függvény pontos értelmezése a következő:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{ha } x \geq 0 \\ -x & \text{ha } x < 0 \end{cases}$$

A függvénynek az origóban töréspontja van. Előtte is van differenciálhányadosa utána is, de az origóban nincs. Geöcze Zoárd 1905-ben olyan u.n. "fűrész" függvényt definiált, amely értelmezési tartománya a valós számok egy tetszőlegesen nagy véges halmaza, és a függvény annak minden pontjában folytonos de sehol sem differenciálható. A differenciálhatóság szigorúbb fogalom, mint a folytonosság.

Ha az a pont, ahol a differenciálhányadost számoljuk végigfut az értelmezési tartományon megkapjuk a differenciálhányadosok függvényét, amelyet az eredeti függvény *derivált függvényének*, vagy röviden *deriváltjának* nevezünk.

Példa:

Számítsuk ki az

$$f(x) = x^2 + 4x + 1$$

függvény derivált függvényét.

Felírjuk a differenciahányadost az x és $x+h$ pontokhoz és vesszük a határértéket.

$$\begin{aligned} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= \frac{(x+h)^2 + 4(x+h) + 1 - (x^2 + 4x + 1)}{h} = \\ &= \frac{x^2 + 2xh + h^2 + 4x + 4h + 1 - x^2 - 4x - 1}{h} = \frac{2xh + h^2 + 4h}{h} \\ \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2xh + h^2 + 4h}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} 2x + h + 4 = 2x + 4 \end{aligned}$$

Tehát az $f(x) = x^2 + 4x + 1$ függvény derivált függvénye $2x+4$. A deriváltra több általánosan elfogadott jelölést használnak. Ilyenek: $f'(x)$, $\frac{dy}{dx}$, y' . Mi leginkább így használjuk:

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 + 4x + 1, \\ f'(x) &= 2x + 4. \end{aligned}$$

Ebből leolvashatjuk, hogy pl. a függvénynek az $x = -2$ helyen vízszintes érintője van. A függvény deriváltja $x = -2$ -ig negatív, tehát a függvény csökkenő, $x = -2$ után pedig pozitív tehát a függvény növekvő.

Deriválási szabályok:

A deriválási szabályok nagymértékben segítik a függvények deriváltjainak elkészítését. Vannak elemi függvények, mint az

x^n hatványfüggvény,

a^x exponenciális függvény,

$\sin x, \cos x$ trigonometrikus függvény,

$\log x$ logaritmus függvény.

Ezekből algebrai műveletekkel igen változatos függvényeket lehet összeállítani. A továbbiakban e műveleteket nézzük át. A szabályok a következők:

Legyen c konstans, $f(x)$ és $g(x)$ két deriválható függvény. Akkor

$$c' = 0$$

$$cf(x)' = cf'(x)$$

$$f(x) \pm g(x)' = f'(x) \pm g'(x)$$

$$f(x)g(x)' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)} \right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$$

Ezek közül bebizonyítjuk az összeg és a szorzat deriválására vonatkozó harmadik és negyedik sort.

$$\begin{aligned} f(x) + g(x)' &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) + g(x+h) - (f(x) + g(x))}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = \\ &= f'(x) + g'(x). \end{aligned}$$

azaz összeget vagy különbséget tagonként deriválunk.

Informatikai matematikai alapvetés

Nézzük a szorzatot!

$$f(x)g(x)' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h}$$

Most a számlálóhoz hozzáadunk nullát, és pedig a következő alakban:

$$0 = -f(x)g(x+h) + f(x)g(x+h)$$

$$f(x)g(x)' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x+h) + f(x)g(x+h) - f(x)g(x)}{h}$$

A számlálót átrendezzük:

$$f(x)g(x)' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \cdot g(x+h) + f(x) \cdot \frac{g(x+h) - g(x)}{h}$$

$$f(x)g(x)' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

A fejezet elején levezettük az $f(x) = x^2 + 4x + 1$ függvény derivált függvényét és az $2x+4$. Ez az út járható egyéb függvények számára is, de nem hatékony. A deriváltakat az elemi függvények deriváltjaiból a fenti műveletekkel gyorsabb meghatározni. Mivel az elemi függvények deriválási szabályainak levezetése nem egyszerű, csak a hatványfüggvény deriváltját vezetjük le, a többit pedig csak elfogadjuk. Ezek pedig:

$$x^{n'} = nx^{n-1}$$

$$e^{x'} = e^x$$

$$a^{x'} = a^x \ln a$$

$$\ln' x = \frac{1}{x}$$

$$\sin' x = \cos x$$

$$\cos' x = -\sin x$$

A hatványfüggvény deriváltja:

Tétel:

$$\text{Az } f(x) = x^n \text{ hatványfüggvény deriváltja } f'(x) = nx^{n-1}.$$

Bizonyítás:

A bizonyítást teljes indukcióval végezzük. $n=1$ -re az állítás igaz, ugyanis az $f(x) = x$ függvény deriváltja minden x -re 1.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x - x_0}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} 1 = 1.$$

Tegyük fel, hogy az állítás $n=k$ -ra igaz, azaz

$$x^k{}' = kx^{k-1}.$$

A teljes indukció elve szerint, ha ez az összefüggés öröklődik $k+1$ -re, akkor az állítás igaz. A $k+1$ -edik hatványt úgy kapjuk, hogy a k -adikot megszorozzuk x -szel. Akkor két függvény szorzatát kell deriválni a már levezetett szabály szerint, azaz

$$x * x^k{}' = 1 * x^k + x * kx^{k-1} = x^k + kx^k = (k+1)x^k.$$

Összetett függvény deriválása

Az összetett függvény nem elemi függvény, de ha annak egy részét tekintenénk változónak, akkor az elemi függvényre emlékeztetne. Pl. $\sin(2x+6)$ összetett függvény, sőt többszörösen is. Az értékét úgy számítjuk ki egy konkrét x -re, hogy először kiszámítjuk a $2x+6$ értékét, majd a következő lépésben ennek vesszük a szinuszt.

Vegyünk egy másik függvényt, legyen $(3x + \cos x)^5$. Itt először kiszámítjuk a zárójelben lévő részt, majd ennek vesszük az ötödik hatványát. A deriválási szabályokkal tudnánk deriválni az első esetben a $2x+6$ -ot, és a szinuszt is. A második esetben a zárójeles részt is, meg a hatványt is. Ha az első a trigonometrikus addíciós képletek szerint felbontanánk, vagy a másodiknál a hatványozást elvégeznénk ismét tudnánk őket deriválni. De az összetett függvény deriválási szabálya ezt leegyszerűsíti. Azt hiszem világos, hogy egy összetett függvény ilyen alakú:

$$f(x) = f(g(x)).$$

Azaz f a $g(x)$ -től függ és majd a g az x -től. És ezt így kell deriválni:

$$f'(x) = f'(g(x))g'(x)$$

Szöveggel: Vesszük a külső (utoljára számolt) függvény deriváltját, majd szorozzuk a belső függvény deriváltjával.

Az előbb említett konkrét függvényekre ez a következő:

$$(\sin(2x + 6))' = \cos(2x + 6) * 2,$$

$$(3x + \cos x)^5 = 5(3x + \cos x)^4 * (3 - \sin x)$$

Feladatok

Példa:

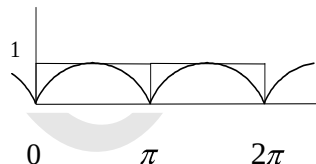
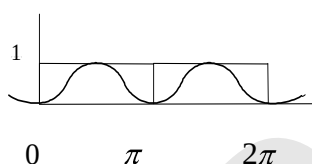
Határozzuk meg hogy a $\sin x$ függvény mekkora szög alatt metszi az x tengelyt!

$$\sin' x = \cos x, \rightarrow x = 0 \Rightarrow \cos 0 = 1, \Rightarrow \operatorname{tg} \varphi = 1 \Rightarrow \varphi = 45^\circ.$$

Példa:

Vajon a $\sin^2 x$ függvény grafikonja az x tengelyt érinti, vagy meredeken belevág?

Melyik a helyes ábra? A baloldali vagy a jobboldali?



Ezt a $\sin^2 x$ függvény deriválásával dönthetjük el.

$$\sin^2 x' = \sin x \sin x' = \sin' x \sin x + \sin x \sin' x = 2 \cos x \sin x.$$

Az első megállapításunk az lehet, hogy a $\sin^2 x$ mindenütt deriválható. A derivált értéke akkor 0, ha valamelyik tényező 0. A derivált értéke $\sin x$ miatt 0-nál, π -nél, 2π -nél 0, azaz a grafikon érintője maga az x tengely. Ha a $\cos x = 0$, a függvény maximumait kapjuk, tehát $\pi/2$ -nél, 1.5π -nél stb. a periódusosság miatt. A feltett kérdésre a válasz az, hogy a baloldali ábra a helyes.

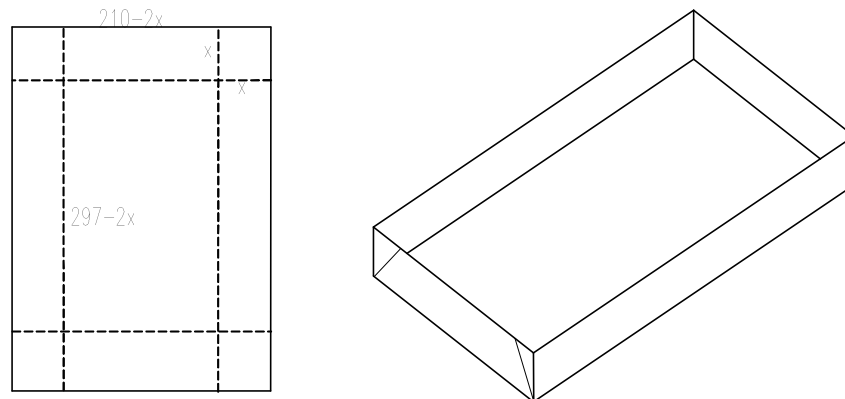
Példa:

Az A_4 -es papír széleit felhajtva dobozt formálunk belőle. Mekkora hajtsunk fel, hogy a doboz térfogata a lehető legnagyobb legyen?

A dobozkészítés vázlatát az alábbi két ábra szemlélteti. A baloldali a hajtogatás tervét, a jobboldali a kész dobozt.

Informatikai matematikai alapvetés

Az A_4 -es lap mérete 210x297 mm. Ebből mérünk le a szélénél egyenlő x távolságokat, amelyeket a jobboldali ábra szerint majd körben szépen felhajtunk. A doboz térfogata tehát $(210-2x)(297-2x)x$ lesz. Azt kell kiszámítani, hogy ez a kifejezés milyen x -re lesz a legnagyobb. Ezért kiszámoljuk a függvény deriváltját.



$$f(x) = (210 - 2x)(297 - 2x)x = 4x^3 - 1014x^2 + 62370x,$$

$$f'(x) = 12x^2 - 2028x + 62370 = 0,$$

$$x^2 - 169x + 5197.5 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{169 \pm \sqrt{169^2 - 4 \cdot 5197.5}}{2} = \frac{169 \pm \sqrt{7771}}{2} = \frac{169 \pm 88.15}{2}$$

A harmadfokú függvénynek két szélsőértéke van, a deriváltjának két zérushelye. De a geometriai feladatnak csak egy megoldása van.

A derivált zérushelyei $x_1 = 40.42$ és $x_2 = 128.57$. Nyilvánvaló, hogy az utóbbi mértékű felhajtás az adott méretű papírból lehetetlen.

A függvény szélsőértékei a fenti helyeken vannak. Ha milliméter helyett deciméterben számolunk, akkor a doboz térfogatát literben kapjuk. Dobozunk méretei tehát: szélessége = 1.2919 dm, hosszúsága = 2.1616 dm, magassága 0.4042 dm. Így a doboz térfogata $1.2919 \cdot 2.1616 \cdot 0.4042 = 1.1787$ liter.

Függvénysorok

A differenciálszámítás lehetőséget teremt arra, hogy függvényeket hatványfüggvények összegeként fejezzünk ki tetszőleges pontossággal. Ezáltal a trigonometrikus, a logaritmikus, az exponenciális kifejezések kiszámítása lehetővé válik. Ez ad módszert a π kiszámítására is. A probléma tehát az, hogy a függvényt

$$f(x) = a_k x^k + a_{k-1} x^{k-1} + a_{k-2} x^{k-2} + \dots + a_1 x + a_0$$

alakba írjuk. Adjunk hozzá minden x -hez 0 -t, de $-a+a$ alakban. Tehát

$$f(x) = a_k (x-a+a)^k + a_{k-1} (x-a+a)^{k-1} + a_{k-2} (x-a+a)^{k-2} + \dots + a_1 (x-a+a) + a_0$$

Ha a hatványozást elvégezzük, de $x-a$ -t egy tagnak vesszük, akkor kifejezésünk

$$f(x) = A_0 + A_1 (x-a) + A_2 (x-a)^2 + \dots + A_k (x-a)^k$$

alakú lesz, vagyis az $(x-a)$ k -adfokú polinomja. A továbbiakban felderítjük az együtthatók jelentését.

$$f(a) = A_0,$$

$$f'(x) = A_1 + 2A_2(x-a) + 3A_3(x-a)^2 + 4A_4(x-a)^3 + \dots,$$

$$f'(a) = A_1,$$

$$f''(x) = 2A_2 + 2 \cdot 3A_3(x-a) + 3 \cdot 4A_4(x-a)^2 + \dots,$$

$$f''(a) = 2A_2 \Rightarrow A_2 = \frac{f''(a)}{2},$$

$$f'''(a) = 2A_2 \Rightarrow A_2 = \frac{f'''(a)}{2},$$

$$f'''(x) = 2 \cdot 3A_3 + 2 \cdot 3 \cdot 4A_4(x-a) + \dots,$$

$$f'''(a) = 2 \cdot 3A_3 \Rightarrow A_3 = \frac{f'''(a)}{2 \cdot 3} = \frac{f'''(a)}{3!},$$

$\vdots$

$$f''''(a) = 2 * 3 * 4 * A_4 \Rightarrow A_4 = \frac{f''''(a)}{2 * 3 * 4} = \frac{f''''(a)}{4!},$$

$$\vdots$$

$$f^k(a) = 2 * 3 * 4 * \dots * k A_k \Rightarrow A_k = \frac{f^k(a)}{k!}.$$

Ezek után

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + f''(a)\frac{(x-a)^2}{2!} + f'''(a)\frac{(x-a)^3}{3!} + f''''(a)\frac{(x-a)^4}{4!} + \dots$$

A kapott függvényt Taylor-sornak hívják. Az persze kérdéses, hogy az x milyen messze lehet az a -tól, és az is, hogy egy adott pontosság eléréséhez a sor hányadik eleméig kell elmenni. Gyakrabban használják a függvényt sor speciális esetét, amikor az $a=0$. Az így kapott sort Maclaurin-sornak hívják. Ha az $a=0$ helyettesítést elvégezzük, megkapjuk az $f(x)$ Maclaurin-sorát:

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + f''(0)\frac{x^2}{2} + f'''(0)\frac{x^3}{3!} + f''''(0)\frac{x^4}{4!} + \dots$$

Példaként felírjuk néhány függvény Maclaurin-sorát

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \dots \quad (\text{minden } x\text{-re})$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots \quad (\text{minden } x\text{-re})$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots \quad (\text{minden } x\text{-re})$$

$$\ln(x+1) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \dots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} + \dots \quad (-1 < x \leq 1) - \text{re}$$

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2*4}x^2 + \frac{1*3}{2*4*6}x^3 - \dots + (-1)^{n-1} \frac{1*3*5*\dots*(2n-3)}{2*4*\dots*2n}x^n + \dots \quad (|x| < 1) - \text{re}$$

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \dots; \quad (-1 \leq x \leq 1)$$

Megjegyzés:

Eljárásunk alkalmas lenne arra is, hogy a fenti függvényeket a számítógépben vagy zsebszámológépekben alkalmazzuk, így definiáljuk. De a gyakorlatban a hatékonyabb Csebisev féle racionális kifejezéseket használják.

Az utolsó függvényt sorból kiszámíthatjuk a π értékét tetszőleges pontossággal.
 $\arctan 1 = \pi/4$

$$\pi = 4 \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \dots \right).$$

11. Integrálszámítás

A primitív függvény

Az $f(x)$ függvény primitív függvényén azt az $F(x)$ függvényt értjük, amelynek deriváltja $f(x)$. Jelekkkel: $F'(x) = f(x)$.

Ha $f(x)$ -nek $F(x)$ is és $G(x)$ is primitív függvénye, akkor ezek csak egy összeadandó számban térnek el egymástól. U.i. ha

$$F'(x) = G'(x) \Rightarrow F'(x) - G'(x) = 0,$$

de

$$F(x) - G(x)' = F'(x) - G'(x) = 0$$

$\Downarrow$

$$F(x) - G(x) = \text{konstans}, \Rightarrow F(x) = G(x) + \text{konstans}$$

Vagyis, ha egy függvénynek megtaláltuk egy primitív függvényét, akkor mindet megtaláltuk

Csak a primitív függvény megtalálása sokszor igen bonyolult feladat.

Amikor egy függvény primitív függvényét keressük így jelöljük:

$$\int f(x) dx,$$

és így olvassuk: integrál efix déix.

Ebben az $\int$ és a dx összetartozó jelek, mint pl. a $\sin x$ függvény nevében a három betű: $\sin$.

Néhány esetben egyszerűen meg is tudjuk mondani a primitív függvényt.

Ezek közül egy párat fel is soroljuk:

$$\int dx = \int 1 dx = x + c,$$

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c,$$

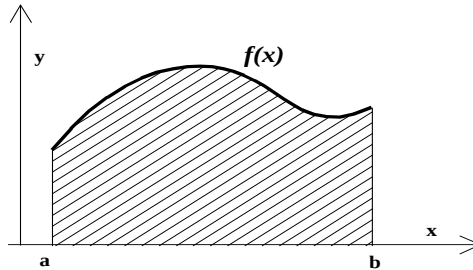
$$\int \sin x dx = -\cos x + c,$$

$$\int \cos x dx = \sin x + c,$$

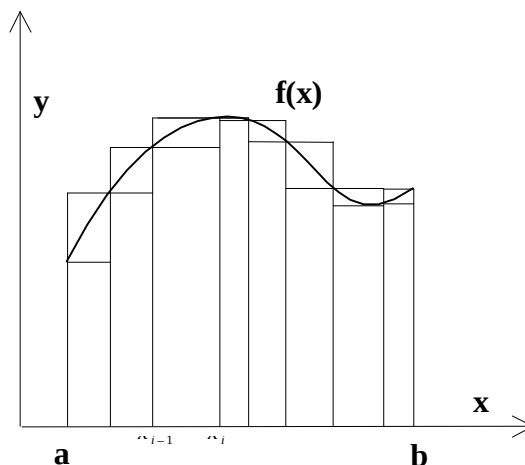
$$\int e^x dx = e^x + c.$$

Határozott integrál

Legyen $f(x)$ az $[a,b]$ intervallumon folytonos (ezért korlátos is) függvény. Feladatunkul kitűzzük a "görbealatti" terület kiszámítását. Ezt a tartományt egy ábrán szemléltetjük.



A területet úgy határozzuk meg, hogy a tartományt függőleges vonalakkal felosztjuk, téglalapokat képezünk. Egy felosztáshoz két téglalap tartozik. Az egyik magassága az intervallumon a minimális, a másiké a maximális függvényérték. A beírt téglalapok területének összege kisebb, a kívül írtaké nagyobb, mint a görbe alatti terület.



Jelöljük az $[ab]$ intervallum osztáspontjait $a = x_0, x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_i, \dots, x_n = b$ -vel, és az intervallumokon a függvény szélsőértékeit, a minimumot m_i -vel, a maximumot M_i -vel.

Vegyük a téglalapok területeinek összegét:

$$s_n = m_1(x_1 - x_0) + m_2(x_2 - x_1) + \dots + m_n(x_n - x_{n-1}) = \sum_{i=1}^n m_i(x_i - x_{i-1}),$$

$$S_n = M_1(x_1 - x_0) + M_2(x_2 - x_1) + \dots + M_n(x_n - x_{n-1}) = \sum_{i=1}^n M_i(x_i - x_{i-1}).$$

Ezeket az összegeket alsó illetve felső integrálközelítő összegnek nevezzük. Nyilván $s_n \leq S_n$.

A felosztás finomításával a két összeg eltérését igyekszünk egy korlát alá szorítani. A finomítás alatt azt értjük, hogy újabb osztáspontokat iktatunk be, növeljük n értékét, de úgy, hogy az intervallumok maximális hossza is 0-hoz tartson. Ha ekkor a fenti két összegnek van határértéke és azok egyenlők, akkor e határértéket nevezzük a függvény adott $[ab]$ intervallumon vett határozott integráljának. A Dirichlet függvényre ez pl. nem teljesül.

Az alsó illetve felső integrál közelítő összegek helyett gyakran vesznek egy közbülsőt, amikor az intervallum hosszát egy belső pontjában vett függvényértékkel szorozzák. Jelöljük az i -edik intervallum belső pontját ξ_i -vel és a függvényértékeket $f(\xi_i)$ -vel. Akkor a közbülső integrál közelítő összeggel a határozott integrál definíciója:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}).$$

Néhány tulajdonság.

A határozott integrál definíciójából közvetlenül látszik, hogy

$$\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx,$$

$$\int_a^b f(x)dx = - \int_b^a f(x)dx.$$

$$\int_a^b (f(x) + g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx,$$

$$\int_a^b \lambda f(x)dx = \lambda \int_a^b f(x)dx,$$

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a),$$

Informatikai matematikai alapvetés

ahol az utolsónál m a függvény minimumát M pedig a maximumát jelenti az $[ab]$ intervallumon.

Newton-Leibnitz formula

Tétel:

Ha az $f(x)$ integrálható $[ab]$ -n és $F(x)$ primitív függvénye $f(x)$ -nek, azaz $F'(x) = f(x)$, akkor

$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

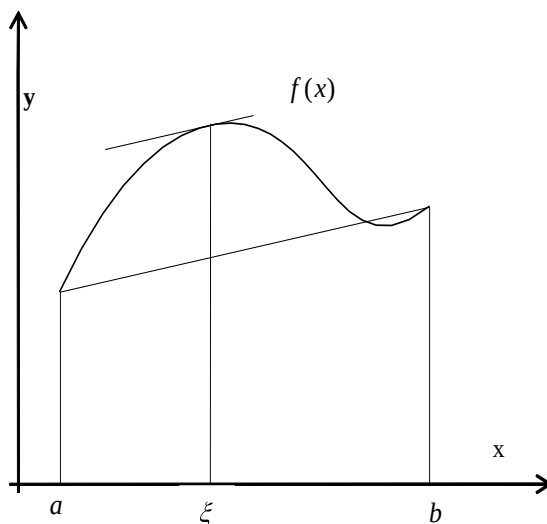
A képletet Newton-Leibnitz formulának hívják és a határozott integrál kiszámítására szolgál.

Bizonyítás:

A bizonyításhoz felhasználjuk az, ún. Lagrange-féle középérték tételt, azaz hogy egy $[ab]$ zárt intervallumon differenciálható $f(x)$ függvény esetén van az $[ab]$ -nek olyan ξ belső pontja, hogy

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi).$$

Ami szemléletesen azt jelenti, hogy a függvénygrafikon $[ab]$ -hez tartozó húrjával párhuzamos érintőjének az érintési pontja $[ab]$ -nek ξ belső pontja. Lásd a rajzot is.



Legyen az $[ab]$ intervallum felosztása

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b.$$

Legyen az $[x_{i-1}, x_i]$ intervallumon a függvény minimuma m_i és maximuma M_i .

Az $f(x)$ -re és az x_{i-1}, x_i intervallumra alkalmazva a Lagrange-féle középérték tételt, van olyan ξ_i , hogy

$$\frac{F(x_i) - F(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} = F'(\xi_i) = f(\xi_i).$$

Mivel $f(\xi_i)$ -re $m_i \leq f(\xi_i) \leq M_i$ áll fenn, ezért

$$m_i \leq \frac{F(x_i) - F(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} \leq M_i.$$

Az egyenlőtlenséget megszorozva az $x_i - x_{i-1}$ pozitív számmal, kapjuk:

$$m_i(x_i - x_{i-1}) \leq F(x_i) - F(x_{i-1}) \leq M_i(x_i - x_{i-1}).$$

Ha ezt az összes intervallumra felírjuk és összegezzük, akkor

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n m_i(x_i - x_{i-1}) &\leq F(b) - F(x_{n-1}) + F(x_{n-1}) - F(x_{n-2}) \dots \\ &+ F(x_1) - F(a) \leq \sum_{i=1}^n M_i(x_i - x_{i-1}). \\ \sum_{i=1}^n m_i(x_i - x_{i-1}) &\leq F(b) - F(a) \leq \sum_{i=1}^n M_i(x_i - x_{i-1}) \end{aligned}$$

Ha az integrál közelítő összegek határértékét vesszük, akkor

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a), \quad \text{ahol} \quad F'(x) = f(x).$$

A határozott integrálhoz a görbealatti terület meghatározása kapcsán jutottunk. De a lényeg az integrál közelítő összegben volt. Vagyis valahányszor az a képlet írja le a problémát, az mind a határozott integrálhoz vezet. Így térfogatot, munkavégzést (fizikai értelemben), energiát és még sok más egyebet is határozott integrállal lehet kiszámítani.

Példák:

1. Számítsuk ki, hogy egy szinuszhullám és az x-tengely mekkora területet zár közre.

Ki kell tehát számítani a $\sin x$ integrálját 0-tól π -ig, Azaz:

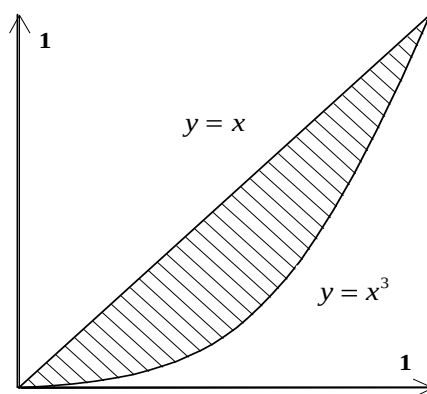
$$\int_0^{\pi} \sin x dx = -\cos x \Big|_0^{\pi} = -\cos \pi - (-\cos 0) = 1 + 1 = 2.$$

Az eredményünk meglepő, hiszen a függvényértékek zöme irracionális, és az integrációs felső határ is az, az eredmény pedig, a terület egész szám.

2. Számítsuk ki az $y = x^2$ görbe 0,1 intervallum alá eső területet.

$$\int_0^1 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{1}{3} - \frac{0}{3} = \frac{1}{3}. \quad (\text{ezt i.e. előtt 300 körül már kiszámolták})$$

3. Számítsuk ki az $y = x$ egyenes és az $y = x^3$ görbe által bezárt síkidom területét.



$$\int_0^1 x dx - \int_0^1 x^3 dx = \int_0^1 (x - x^3) dx = \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4} \right]_0^1 = \left(\frac{1^2}{2} - \frac{1^4}{4} \right) - \left(\frac{0^2}{2} - \frac{0^4}{4} \right) = \frac{1}{4}.$$

4. Számítsuk ki az $y = \frac{1}{x^2}$ függvény 1-től végtelenig terjedő görbealatti területét.

Ezt úgy tehetjük meg, hogy kiszámítjuk 1-től t -ig, majd vesszük a határértéket, ha t tart a végtelenhez. Tehát

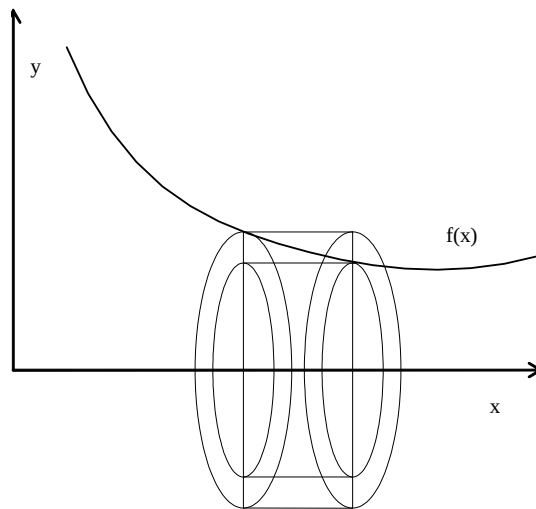
$$\int_1^t \frac{1}{x^2} dx = \int_1^t x^{-2} dx = \left[\frac{x^{-2+1}}{-2+1} \right]_1^t = \left[\frac{x^{-1}}{-1} \right]_1^t = \left[-\frac{1}{x} \right]_1^t = -\frac{1}{t} + 1,$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} -\frac{1}{t} + 1 = -0 + 1 = 1.$$

(Az $y = \frac{1}{x}$ függvény 1-től végtelenig terjedő görbealatti területe már végtelen nagyságú.)

Forgástest térfogata

Forgassuk meg az $f(x)$ függvényt az x tengely körül.



Az x tengelyen felosztást készítünk. Ezután az intervallumokhoz tartozó minimumokkal illetve maximumokkal korongokat hozunk létre. Ezek összessége adja a forgástest közelítő térfogatát. Az egyik belül lesz, a másik kívül. Egy korong térfogata, ha valami közbülső korongot veszünk $f^2(\xi_i)\pi(x_i - x_{i-1}) = g(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$. Ez a $g(x)$ függvény integrálja. Ha ezeket összegezzük és vesszük a finomításkor a határértéket, és $g(x)$ helyett visszaírjuk az $\pi f^2(x)$ -et, kapjuk:

$$V = \pi \int_a^b f^2(x) dx.$$

Példa:

Forgassuk meg az x tengely körül az $f(x) = \sqrt{x}$ függvényt és számítsuk ki a forgástest térfogatát 0-tól 1-ig.

Azt gondoljuk, hogy az adatok 1 deciméterben értendő, ezért a térfogat majd liter lesz. A forgástestet ábrával szemléltetjük

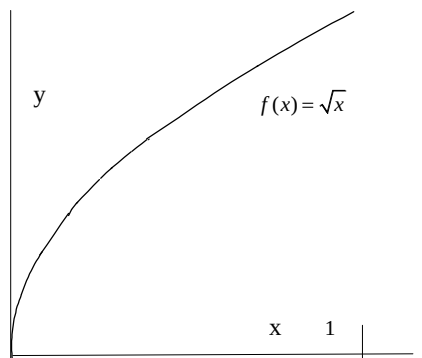
A térfogatot a levezetett képlet alapján így számoljuk:

$$V = \pi \int_0^1 f^2 dx = \pi \int_0^1 \sqrt{x}^2 dx$$

$$V = \pi \int_0^1 x dx = \pi \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^1 = \frac{\pi}{2} \approx 1.57$$

Tehát az edényünk bő másfél literes lett.

Ha a forgástestet 90 fokkal elforgatjuk, továbbá talpat és fogórészt képzelünk hozzá, akkor egy nagy kelyhet vagy sportgyőzelmi szimbólumot, kupát kapunk.



Példa:

Készítsünk a parabola felhasználásával egy 10 cm magas 1 deciliter térfogatú pezsgős poharat. Mekkora lesz a peremének az átmérője?

Ehhez nem a $\sqrt{x}$, hanem az $a\sqrt{x}$ függvényt kell megforgatni és az a -t úgy meghatározni, hogy a térfogat 0.1 liter legyen. Tehát:

$$0.1 = \pi \int_0^1 (a\sqrt{x})^2 dx = \pi \int_0^1 a^2 x dx = \pi \left[a^2 \frac{x^2}{2} \right]_0^1 = \pi \frac{a^2}{2}$$

$$a^2 = \frac{0.2}{\pi} = 0.063661977$$

$$a = 0.2523$$

Így a függvényérték az 1-nél $a\sqrt{x} = 0.2523 \cdot 1 = 0.2523$ deciméter, azaz bő 2.5 cm.

Tehát az 1 deciliteres 10 cm magas kelyhű pezsgőspohár felső peremének átmérője bő 5 cm.

12. Numerikus módszerek

Egyenletek gyöke

Az elsőfokú egyenlet megoldása elemi iskolai feladat, minden középiskolában tanítják a másodfokú egyenlet megoldó képletét, mi tanultuk a Cardano képletet, azonban hamar beleütközünk olyan egyenletekbe, amelyek megoldására nincsen képlet. Maga a Cardano képlet sem vezet eredményre, ha a harmadfokú egyenlet minden gyöke valós és csak a valós számokat ismerjük. Ma már azt is tudjuk, hogy általános alakú ötödfokú egyenlethez nem lehet megoldó képletet előállítani. És akkor még ott vannak a transzcendens egyenletek. Ha pl. egy korongból egy negyedrészt mint körszeletet el akarom venni, egy

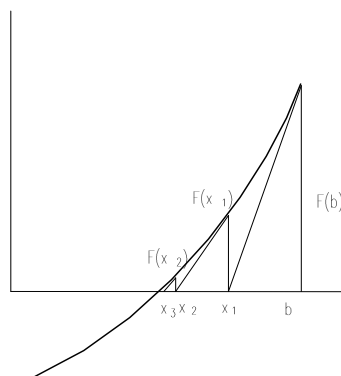
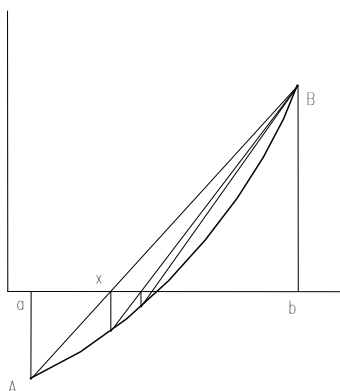
$$x - \cos x \sin x - \pi / 4 = 0$$

egyenletet kell megoldani. Itt x még csak középponti szöget jelent, amit majd át kell számolni a körszelet magasságának.

Két módszert ismertetünk. Az első a **húr módszer**. A számolás matematikai alapja az ún. Bolzano tétel, azaz, ha az $[ab]$ intervallumon folytonos függvény végpontjaiban a függvényértékek ellenkező előjelűek, akkor ott van zérushely. A függvény grafikonját a húrával, egyenessel helyettesítjük és vesszük az így nyert elsőfokú függvény zérushelyét:

$$x = b - f(b) \frac{a - b}{f(a) - f(b)}.$$

Ez az intervallum belső pontja. Vesszük e pontban a függvény értékét. Az előző végpontok közül elhagyjuk azt, amelyikben a függvényérték előjele a metszéspontbeli függvény értékkel megegyező, és kezdjük előlről. A számolás elvét a baloldali ábra szemlélteti.



Informatikai matematikai alapvetés

A másik módszer az **érintő módszer**. A függvénygörbe egy pontjában vesszük az érintőt, és ennek a zérushelyét. És így tovább.

Az x_n -hez tartozó $X_n(x_n, f(x_n))$ pontbeli érintő egyenlete:

$$y = f'(x_n)(x - x_n) + f(x_n).$$

Ez az x tengelyt az $y=0$ -nál metszi és az lesz az x_{n+1} hely, azaz

$$0 = f'(x_n)(x_{n+1} - x_n) + f(x_n)$$

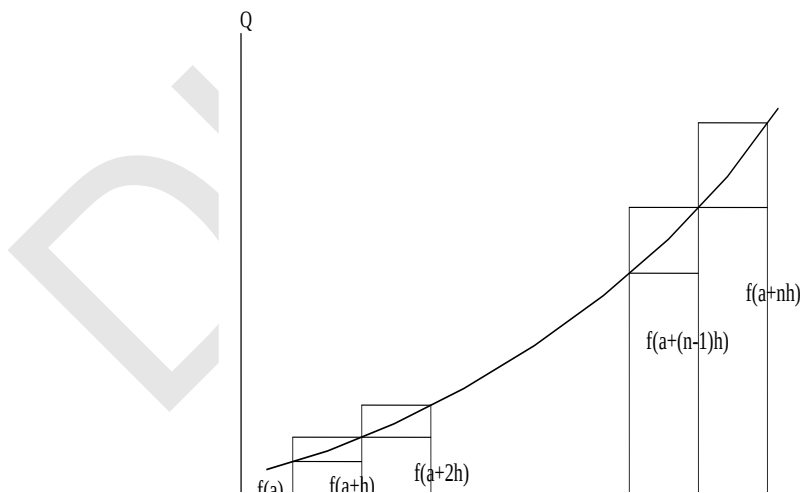
ahonnan

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

Ezt mutatja az ábra jobboldali része.

Numerikus integrál

Integrálni nem könnyű, sőt olykor az egyébként minden szép tulajdonságokkal rendelkező függvénynek esetleg nincs is zárt alakú (képlettel kifejezhető) primitív függvénye. Ilyen pl az e^{-x^2} függvény. Az alábbiakban megvizsgáljuk, hogy hogyan lehet a folytonos és monoton függvény **numerikus integrálját** kiszámítani.



Informatikai matematikai alapvetés

Az $[ab]$ intervallumot n egyenlő részekre osztjuk. Egy-egy rész hossza legyen h . Az alsó integrál közelítő téglalapjainak magasságai

$$f(a), f(a+h), f(a+2h), \dots, f(a+(n-1)h),$$

a felsőé pedig

$$f(a+h), f(a+2h), \dots, f(a+(n-1)h), f(a+nh).$$

Amikor a téglalapok területeit számoljuk, mindig h -val kell szorozni, így az egyik integrál közelítő összeg

$$h(f(a) + f(a+h) + f(a+2h) + \dots + f(a+(n-1)h)),$$

a másik pedig

$$h(f(a+h) + f(a+2h) + \dots + f(a+(n-1)h) + f(a+nh)).$$

Az integrál tényleges értéke e kettő között van. Ezért veszük a két összeg számtani közepét és azt tekintik az $f(x)$ $[ab]$ fölötti numerikus integráljának. Vesszük tehát az aritmetikai átlagukat:

$$\int_a^b f(x) \approx h(0.5 f(a) + f(a+h) + f(a+2h) + \dots + f(a+(n-1)h) + 0.5 f(a+nh)).$$

Példa

Az $[1,0]$ intervallumon számítsuk ki az x^2 függvény görbe alatti területét numerikusan úgy, hogy osszuk fel az intervallumot 10 részre. Ekkor tehát $h=0.1$.

A numerikus integrál:

$$T = 0.1(0 + 0.01 + 0.04 + 0.09 + 0.16 + 0.25 + 0.36 + 0.49 + 0.64 + 0.81 + 0.5) = 0.335$$

Az integrál pontos értékét is ismerjük, $1/3$. A kettő nem tér el lényegesen egymástól, de gyakorlati alkalmazáskor nem 10-részre osztják az intervallumot, hanem sokkal többre.

13. Kombinatorika

A kombinatorika véges számú elem valamilyen szempontú csoportosításával foglalkozik. Két fontos kérdés van mindig. Az egyik az, hogy hány csoportot lehet létrehozni, a másik az, hogy hogyan lehet azokat szisztematikusan, algoritmikusan elő is állítani. A feladatokat 3 típusba lehet sorolni.

Permutációk

A permutáció n elem sorba rendezése. Pl. ha elemeink a, b, c , akkor ezek néhány sorrendje:

abc, acb, cba, cab .

Amíg kevés elemünk van, könnyen legyártjuk a sorrendeket. Pl. az előbbi esetben még van több sorrend is. Pl. a bac és bca . De, ha lenne vagy 13 elemünk, akkor már bajban lennénk, ui. ezek sorrendjeit egy ember 100-nál is több évig írná napi 24 órában, ha 5 másodpercenként felírna egyet..

Keressünk általános szabályt a permutációk számának meghatározására!

Ha 1 elemünk van, akkor azt nincs mivel megcserélni, 1 sorrend van.

Ha 2 elemünk van, akkor a másodikat írhatom az első elem mögé is és elé is.

Így ab, ba .

Ha 3 van, akkor a harmadikat, c -t, kapcsolatba hozva az előbbi ab -vel írhatom előre, közbe és hátra, azaz

cab, acb, abc .

De ezt megtehetem a ba -val is. Tehát:

cba, bca, bac .

Így összesen $2 * 3 = 6$ sorrendünk lett.

Az a sejtésünk, hogy n elem permutációinak száma $1 * 2 * 3 * \dots * (n-1) * n = n!$. Szimbolikus írásban

$$P_n = n!$$

Most a $!$ -jel nem írásjel, hanem azt jelenti, hogy 1-től kezdve az egész számokat össze kell szorozni. A $P_n = n!$ pedig így olvasandó: n elem permutációinak száma n faktoriális. Most bebizonyítjuk a sejtésünket. A bizonyítás módszere a teljes indukció lesz.

Látjuk a leírt konkrét esetekből, hogy, ha $n=1$, akkor az állítás igaz, sőt ezt látjuk még $n=2$ és $n=3$ esetre is. Tegyük fel, hogy az állítás $n=k$ -ra igaz, azaz

$$P_k = k!$$

Informatikai matematikai alapvetés

Van tehát $k!$ sorrendünk. A $k+1$ -edik elemet beírhatom egyszer elsőnek, $k-1$ -szer közélsőnek és egyszer utolsóként. Vagyis egy elemből $k+1$ elem származik.

Összesen így $k! \cdot (k+1) = (k+1)!$ elemünk lesz, azaz $P_{k+1} = (k+1)!$. És ezzel az állítást bebizonyítottuk.

Ha a halmazban olyan elemek is vannak, amelyek sorrendje lényegtelen, akkor ismétléses permutációról beszélünk. Pl. ha emberekről van szó, akiket neveik alapján akarunk rendezni, de van közöttük két Kovács Lajos és három Sas Károly, és ha a csoport 15 főből áll és egyéb megegyezés már nincs, akkor a permutációk száma nem $15!$ lesz, hanem ezt el kell osztani $2!$ -sal a Kovács Lajosok és $3!$ -sal a Sas Károlyok miatt. Tehát

$$P_n^{i,j} = \frac{n!}{i! \cdot j!}$$

Ez a képlet tehát az n elem ismétléses permutációinak számát adja, ha az elemek között egyfajta ismétlődő elemből i db, és egy másik fajtából j db. van.

Példa:

Egy könyvtárban 5 munkahely van egymás melletti szobákban, és könyvtáros is 5 van. Felváltva dolgoznak, mindenki minden helyen. Hányfajta sorrendben dolgozhatnak.

Válasz: $5!$, azaz $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$ féle képen dolgozhatnak, vagyis egy abszolút igaz-ságos munkabeosztáshoz 120 napos munkabeosztásos rendszer kell.

Példa:

Hány db. hatjegyű szám képezhető a 0,1,2,3,4,5 számjegyekből, ha minden számjegynek különbözőnek kell lenni.

Válasz: $6!$ lenne a megoldás, ha nem lenne a 0 is megadva. Mivel a $6!$ -ban azok az esetek is benne vannak, amikor az első számjegy 0, ezeket le kell vonni. Ezek száma pedig annyi, ahányszor a 0 után a többi számot permutálni tudom, azaz $5!$. A megoldás tehát $6! - 5!$. Mivel $6! = 720$, és $5! = 120$, a kettő különbsége 600, vagyis ennyi db. a kíváncsúnak megfelelő szám írható fel.

Variációk

Ha adott n elemből k darabot választunk ki és azokat az összes lehetséges módon permutáljuk, akkor az n elem k -ad osztályú variációit képezzük. Triviális, hogy ha $k=n$, akkor a permutációt kapjuk.

Legyen 5 elemünk, az a, b, c, d, e . Képezzük ezek néhány harmadosztályú variációját.

Informatikai matematikai alapvetés

abd, adb, bad, bda, dab, dba
abc, acb, bac, bca, cab, cba
⋮
dca, dac, acd, adc, cda, cad.

Nem sok maradt ki, de pl. cbd még nem volt, és az e még egyben sem szerepelt. Még kevésbé tudnánk spontán összegyűjteni a variációkat, ha az elemek száma nagy lenne. Jelöljük az n elem k -ad osztályú variációinak számát V_n^k -vel. Ezek k tagú jelsorozatok. Ha mindegyikhez hozzáragasztjuk a kimaradt $n-k$ mennyiségű elemet az összes lehetséges sorrendben, akkor n elemű permutációkat kapunk, és mindet meg is kapjuk. Megegyezők sincsenek, mert az első k elemek sorrendjében eltérés van. Tehát

$$V_n^k (n-k)! = P_n = n!, \text{ ahonnan}$$

$$V_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

A gyakorlati számításokban gyakran szerepelnek az ismétléses variációk. Itt arról van szó, hogy valahány elemből csoportokat kell összeállítani, amelyben a kiindulási elemek többször is szerepelnek. Pl. a totózás jelei az 1, 2, x. És ezekből 14 elemes csoportokat (oszlopokat) kell összeállítani. Nyilvánvaló, hogy ekkor kell, hogy ismétlődő elemek is szerepeljenek, de azt akkor is meg lehet tenni, ha mondjuk 2 elemű csoportokat képezünk. De, ha az összes ötbetűs szavunkat tekintjük, ott is előfordulnak ismétlések. Vegyünk néhány példát ebből a bekezdésből: elemű, jelei, tenni, ekkor, arról stb.

Jelölje az n elem k -ad osztályú ismétléses variációinak számát $\bar{V}_n^k$.

Nyilvánvaló, hogy ha $k=1$, akkor

$$\bar{V}_n^1 = n.$$

A másodosztályú variációkat úgy kaphatjuk meg, hogy az elsőket mellé odairjuk az n elem mindegyikét. Pl. az első esetben szerepelt a 4, akkor eztán lesz

41, 42, 43, 44, 45, ... $4n$. Vagyis

$$\bar{V}_n^2 = \bar{V}_n^1 * n = n^2.$$

És ezt a módszert folytatva:

$$\bar{V}_n^k = n^k.$$

Példa:

Hány négyjegyű szám írható fel a 0, 1, 3, 5, 6, 9 számjegyekből, ha a szám minden jegye különböző.

Megoldás: Venni kell a 6 elem negyedosztályú variációit. Ez

$$V_6^4 = \frac{6!}{(6-4)!} = \frac{6!}{2!} = \frac{6*5*4*3*2*1}{2*1} = 360.$$

Majd ebből le kell vonni a 0-val kezdődők számát. Ez annyi ahányszor a 0 után 3-jegyű számot írhatok, de csak a nullától különböző 5 számból, azaz

$$V_5^3 = \frac{5!}{2!} = 5*4*3 = 60.$$

Tehát az adott számjegyekből 300 db. négyjegyű szám írható fel.

Példa:

Hány totó tipposzlopot kell kitölteni a biztos 13 találathoz? (És 13+1=14-hez?)

Megoldás: Három jelünk van, az 1, 2, x. A megoldás e három elem 13 osztályú ismétléses variációja, azaz

$$\bar{V}_3^{13} = 3^{13} = 1594323.$$

A 13+1-hez pedig

$$\bar{V}_3^{14} = 3^{14} = 4782969.$$

Példa:

Hány rendszám táblát tudnak ma kiadni Magyarországon azokból a táblákból, amelyek három betűvel kezdődnek és három számjeggyel folytatódnak, de mindhárom számjegy nem lehet 0?

Megoldás: 26 db alkalmas betű van, ezek harmadosztályú ismétléses variációinak száma:

$$\bar{V}_{26}^3 = 26^3 = 17576.$$

Ezek mindegyike mögé oda lehet írni a háromjegyű számot, azaz a 10 számjegyből képezett harmadosztályú ismétléses variációk számát, csökkentve 1-gyel a 000-val. Tehát

$$\bar{V}_{10}^3 - 1 = 10^3 - 1 = 1000 - 1 = 999.$$

És így a kettő szorzata $17\,576 \cdot 999 = 17\,558\,424$, azaz ennyi különböző rendszám táblát lehet legyártani a mondott feltételek mellett.

Kombinációk

A kombináció olyan csoportalkotás, amikor n elemből kiválasztunk k elemet, de most a sorrendre nem vagyunk tekintettel. Olyan, mint a lottóhúzás, nem érdekes, hogy azt a bizonyos 5, 6 vagy 7 számot milyen sorrendben húzták ki.

Ha tehát van 5 elemünk, az a, b, c, d, e és ezekből hármas csoportokat képezünk, pl. abc, bca, adb , akkor variáció szempontjából mind különbözők, de a kombináció szempontjából az első kettő azonos, mert ugyanazok az elemek alkotják őket. A harmadik és az első azonban már két kombináció.

Az a, b, c, d, e elemek harmadosztályú kombinációi a következők:

$abc, abd, abe, bcd, bce, cde, acd, ace, ade, bde$.

A fenti sort figyelmesen tanulmányozva láthatjuk a képzési szisztémát.

Általánosságban elmondhatjuk, hogy, ha az egyes kombinációkat permutáljuk, akkor éppen az ismétlés nélküli variációhoz jutunk. Tehát

$$C_n^k * k! = V_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}, \text{ ahonnan}$$

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}. \text{ Ezt az utolsó kifejezést röviden így írjuk}$$

$$C_n^k = \binom{n}{k}. \text{ És így olvassuk: } n \text{ alatt a } k.$$

Megállapodás szerint $0! = 1$, ezért

$$C_n^0 = \binom{n}{0} = \frac{n!}{n! * 0!} = 1, \text{ és } C_n^n = \binom{n}{n} = \frac{n!}{0! * n!} = 1.$$

Példa:

Számítsuk ki 5 elem összes kombinációinak számát!

Megoldás:

Ezt a kiválasztást tehát egyesével, kettesével stb. kell elképzelni, és így részletesen:

$$C_5^0 = \binom{5}{0} = 1,$$

$$C_5^1 = \binom{5}{1} = \frac{5}{1},$$

$$C_5^2 = \binom{5}{2} = \frac{5*4}{1*2} = 10,$$

$$C_5^3 = \binom{5}{3} = \frac{5*4*3}{1*2*3} = 10,$$

$$C_5^4 = \binom{5}{4} = \frac{5*4*3*2}{1*2*3*4} = 5,$$

$$C_5^5 = \binom{5}{5} = \frac{5*4*3*2*1}{1*2*3*4*5} = 1.$$

Példa:

A klasszikus lottóban 90 számból húznak ki 5 számot. Hány különböző szelvényt lehet készíteni.

Megoldás:

A feladat kombináció, 90 elem ötöd osztályú kombinációja, tehát

$$\binom{90}{5} = \frac{90!}{85!*5!} = \frac{90*89*88*87*86}{1*2*3*4*5} = 3*89*22*87*86$$

$$\binom{90}{5} = 43\,949\,268.$$

14. Valószínűesszámítás

A valószínűesszámítás a matematika igen fiatal ága, az axiomatikus megalapozása csak 1933-ban történt meg. Természetesen voltak előzmények is, és először azokról szólunk röviden.

Az első név, akivel találkozunk Pascal, Blaise (1623-1662)²¹.

A valószínűesszámítás első problémái a szerencsejátékokból származtak. Egy bizonyos De Méré lovag igen kedvelte a szerencsejátékokat. És egy bonyolultabb kérdésben Pascalhoz fordult: A játékos egy kockával játszik a bank ellen. Ha a játékos négy egymás utáni dobásból legalább egyszer 6-ost dob, a bank nyer. Hosszú távon kifizetődik-e ez a banknak? Pascal azt számolta ki, hogy mennyi a játékos **reménye**²², vagyis, hogy egyszer sem lesz 6-os dobás. Ezt

$\frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \approx 0.482$ -nak találta, vagyis a bank oldalán áll a nyeresé hosszú távon,

$(1-0.482=0.5118)$, és hát a bank egész nap játszik, míg a játékosok váltják egymást. Persze ennél sokkal nehezebb problémák is voltak. Pascal kimutatta, hogy független események vagylagos bekövetkezésének reményszámát a két esemény reményszámának az összege, míg együttes bekövetkezésükét (és ez van a fenti esetben) a szorzata adja. A következő személy Bernoulli, Jacob (1654-1705)²³, aki felállította a nagy számok első törvényét és könyvet írt a **találgatás tudományáról**.

Most nagyot lépünk. Az 1800-as évek a matematika szempontjából igen fontosak voltak. A geometria axiomatikus tárgyalása i.e. 300 körül már megtörtént, még ha nem is volt teljesen tökéletes, és az 1800-as években sok matematikai terület kapott egzakt matematikai alapot. De ezek között nem volt ott a

²¹ Pascal zseniális matematikus volt. A kúpszeletekre vonatkozó ún. Pascal-tételt 17 éves korában fedezte fel. Mi a tanulmányaink során a Pascal-féle háromszöggel találkoztunk, amellyel táblázatba lehet foglalni a kéttagú algebrai kifejezések hatványainak együtthatóit. Ő szerkesztette meg az első számológépet, amelynek több példánya fennmaradt. Drezdában a Zwinger technikai múzeumrészlegében is láthatunk egyet. Tőle származik a teljes indukció pontos megfogalmazása is. A fizikában, filozófiában és az irodalomban is megörökítette a nevét.

²² A reményszám 0 és 1 közé esik. Ezt a tizedes törtet átszámolják százalékra, és azt mondják pl. "én csak 10% esélyt adok a győzelemnek...".

²³ A Bernoulli család sok hírességet adott a tudományos világnak. Bernoulli Nicolaus volt az apa, akinek végülis 13 leszármazója ért el jelentős matematikai sikereket, de volt még a családban botanikus, anatómus, fizikus is. Jacob és Johann Bernoulli Leibnitz tanítványai voltak, lelkesen dolgozták ki a Leibnitz által felvetett problémákat. Jacob Bernoulli nevéhez fűződik a logaritmikus spirális tanulmányozása is. Sírkövén is annak a rajza van. Éppen a differenciál és integrálszámításban elért eredményeinek köszönhető, hogy felfedezte a nagy számok törvényének legegyszerűbb esetét. Könyvének címe: A találgatás tudománya.

Informatikai matematikai alapvetés

valószínűségszámítás. Ugyanakkor a *véletlenek matematikája* egyre nagyobb szerepet játszott a gazdasági élet számos területén. Hilbert, Dávid (1862-1943)²⁴ 1900-ban a párizsi II. Nemzetközi Matematikai Kongresszuson előterjesztett és kidolgozásra javasolt 23 olyan problémát, amelyek döntően hatottak az 1900-as évek matematikájára. Ezek között volt a valószínűségszámítás matematikai megalapozásának a kérdése is, vagyis az axiómarendszer létrehozása. Ezt a feladatot Kolmogorov, Andrej Nyikolajevics (1903-1987)²⁵ oldotta meg 1933-ban.

A valószínűségszámítás véletlen tömegjelenségekről szól, amelyeket azonos körülmények között bármikor megismételhetünk. Mivel a mai időjárás nem ismétlődik meg holnap, és egy sportesemény sem, azért még azt nem lehet megtiltani, hogy a meteorológus azt mondja, hogy valószínű, hogy holnap esik, vagy hogy győz a DVSC futball csapata, vagy egy versenyló, de ezek szubjektívításon alapuló kijelentések. A valószínűségszámítás ezekről nem szól.

Előkészítő fogalmak, eseményalgebra

Tömegjelenség: azonos körülmények között akárhányszor megismételhető vagy megfigyelhető jelenség.

Véletlen jelenség: a következő jelenség eredménye nem függ az eddigiektől.

Esemény: egy kísérlet valamely lehetséges kimenetele. Pl. kockadobásnál az A esemény, hogy páros szám az eredmény, B hogy prímszám.

Eseményalgebra: Az események között kapcsolatokat, műveleteket értelmezzünk.

Példáinkban az előző A és B események szerepelnek.

$A \subset B$. Ez most nem igaz, ez az esemény nem következik be. Üres eseménynek mondjuk. De, ha az A azt jelentené, hogy 2-t dobunk, akkor az A esemény része lenne a B -nek.

$A \cup B$. Ez vagy az A vagy a B esemény. Példánkban olyan dobás, amikor felül a 2,3,4,5,6 pontok (számok)vannak.

$A \cap B$. Ez olyan esemény, hogy mindkét esemény teljesedik, azaz kettést dobunk.

$A - B$. Ez azt jelenti, hogy az A esemény bekövetkezik, de a B nem. Ilyen most nem fordul elő, a $B - A$ esemény azonban olyan dobásokat jelent, amikor felülre 3 vagy 5 kerül.

²⁴ Hilbert a matematika legalapvetőbb kérdéseivel foglalkozott. Ő alkotta meg az euklideszi geometria axiómarendszerét is, de jelentős a tevékenysége a matematika és fizika számos területén. 1910-ben a Magyar Tudományos Akadémia neki ítélte a világ legjobb matematikusai számára alapított 10 000 aranykoronás Bolyai-díjat.

²⁵ Igen sok tanítványt nevelő orosz tudós volt. Nála volt aspiráns pl. Arató Mátyás, a Debreceni Egyetem Informatikai Karának professzora is..

H. A biztosan bekövetkező esemény jele. Teljes eseménynek is mondjuk.

Kockadobásnál a *H* tehát az 1,2,3,4,5,6 dobások akármelyikét jelöli. Példánkban ennek az *A* is része, meg a *B* is.

Elemi esemény az, amelynek valódi részeseménye már nincs, azaz tovább nem bontható. Mivel a kockának 6 lapja van, a kockadobás 6 elemi eseményből épül fel, azok uniója.

Komplementer esemény: Egy *A* esemény komplementer eseménye az az $\bar{A}$ esemény, melynek uniója *A*-val kiadja a *H* teljes eseményt, metszete pedig a $\emptyset$ lehetetlen eseményt.

Hasonló műveleteket tanultunk a halmazoknál is, és a matematikai logikában is. Ezért van eseményalgebra, halmazalgebra és logikai algebra is. A tárgya persze mindegyiknek más és más.

Kolmogorov axiómái:²⁶

1. Axióma: Az adott *H* eseménytér minden *A* eseményéhez hozzárendelünk egy $P(A)$ számot, melyet az *A* esemény valószínűségének nevezünk, és rá

$$0 \leq P(A) \leq 1$$

teljesül.

2. Axióma: A biztos esemény valószínűsége 1, azaz

$$P(H) = 1$$

3. Axióma: Ha *A* és *B* egymást kizáró események, azaz $A \cap B = \emptyset$, akkor

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B).$$

²⁶ Az axiómákkal szemben Hilbert 3 feltételt állított.

1. Legyenek az axiómarendszer axiómái függetlenek egymástól, azaz egyiket se lehessen igazolni a többi segítségével.
2. Legyen az axiómarendszer ellentmondásmentes, azaz ne lehessen belőle egy állítást és annak a cáfolatát is levezetni.
3. Legyen az axiómarendszer teljes, azaz minden az axiómarendszerben felvethető kérdésre az axiómarendszeren belül lehessen választ kapni.

Ez az álláspont 1931-ig tartotta magát, de akkor Gödel osztrák matematikus kimutatta, hogy minden axiómarendszerben fel lehet tenni olyan kérdést, amely igaz vagy hamis volta a rendszerben nem dönthető el. Ez a híres nemteljességi tétel.

Tulajdonképpen még egy axióma van, az első előtti, ami kimondja, hogy a *H* teljes halmaz részhalmazai egy algebrai struktúrát alkotnak, a részhalmazok egyesítése, metszete és különbsége is részhalmaza *H*-nak.

Látszólag pofon egyszerű az egész, mégis 300 évet kellett rá várni, Pascaltól számítva. Az események halmazok és ezekhez a halmazokhoz számok vannak rendelve, azok a valószínűségek.

Nézzünk néhány tételt!

- 1. Tétel:** Ha az A esemény valószínűsége $P(A)$, akkor az $\bar{A}$ komplementer eseménynek a valószínűsége $1 - P(A)$, azaz

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A).$$

Bizonyítás:

Ismert, hogy

$$A \cup \bar{A} = H \quad \text{és} \quad A \cap \bar{A} = \emptyset,$$

és így a 3. axióma szerint

$$P(H) = P(A \cup \bar{A}) = P(A) + P(\bar{A})$$

$$1 = P(A) + P(\bar{A})$$

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

- 2. Tétel:** A lehetetlen esemény valószínűsége 0, azaz $P(\emptyset) = 0$.

Bizonyítás:

Ismert, hogy

$$H \cup \emptyset = H \quad \text{és} \quad H \cap \emptyset = \emptyset,$$

és így a 3. axióma szerint

$$P(H) = P(H \cup \emptyset) = P(H) + P(\emptyset)$$

$$1 = 1 + P(\emptyset)$$

$$P(\emptyset) = 0$$

- 3. Tétel:** Ha az A, B, C események egymást páronként kizárják, akkor a három esemény uniójának valószínűsége megegyezik a három esemény valószínűségének összegével, azaz

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C).$$

Bizonyítás:

Két eseményt egybe veszünk. Ez a harmadikkal továbbra is diszjunkt marad, azaz kizárják egymást. Írásban:

$$P((A \cup B) \cup C) = P(A \cup B) + P(C),$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B),$$

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C).$$

Természetesen a tétel ugyanígy belátható véges sok páronként egymást kizáró eseményre is.

A valószínűség klasszikus kiszámítási módja

4. Tétel: (a valószínűség klasszikus kiszámítási módja)

Álljon a H eseménytér n db egyenlően valószínű egymást kizáró, azaz idegen elemi eseményből. (elemi az esemény, ha már tovább nem bontható). Egy A esemény pedig álljon k db előző elemi eseményből. Akkor

$$P(A) = \frac{k}{n}.$$

Bizonyítás:

Legyenek az elemi események $E_1, E_2, E_3, \dots, E_n$. Akkor az előbbi tétel értelmében

$$P(H) = P(E_1) + P(E_2) + \dots + P(E_n) = 1$$

Mivel minden elemi esemény valószínűsége egyenlő, azért az 1-en az összes osztozik, méghozzá egyenlően, azaz egynek-egynek $1/n$ jut, tehát

$$P(E_i) = \frac{1}{n}.$$

Az A eseményt k db elemi esemény alkotja, ezért valószínűsége $k \cdot 1/n$. Képletben:

$$P(A) = k \frac{1}{n} = \frac{k}{n}.$$

Laplace az axiómák megalkotása előtt a valószínűséget így fejezte ki: A valószínűség számítás nem más mint az **egyenlően valószínű** esetek megszámlálása. Ha egy esemény valószínűségét akarjuk meghatározni, akkor meg kell keresnünk az összes olyan esetet, amelyek ezt az eseményt eredményezik. Ezek a kedvező esetek. Az esemény valószínűségét a kedvező esetek számának és az összes esetek számának a hányadosa adja meg.

Informatikai matematikai alapvetés

Példa:

A szabályos dobókocka homogén anyagú és geometriailag szabályos. Oldallapjain 1-től 6-ig pöttyök találhatók. Mennyi a valószínűsége annak, hogy egyet dobva a dobott érték háromnál kisebb legyen.

Megoldás:

A H eseménytér 6 db egyenlően valószínű elemi eseményből áll, tehát egynek-egynek a valószínűsége $1/6$.

Háromnál kisebb a dobás, ha az 1 vagy 2, azaz a szóban forgó esemény két elemi eseményből áll, ezért bekövetkezésének valószínűsége $2/6=1/3$.

Példa:

Két dobókockával dobjunk egyszerre. Mennyi a valószínűsége annak, hogy a dobások összege prímszám lesz?

Megoldás:

Az egyik kockán is hat féle pont, és a másikon minden eset párként hat fajta eredmény lehet, azaz 36 elemi esemény van, és ezek valószínűsége is egyenlő. De azt is mondhatjuk, hogy 6 elemből kell kettőt kiválasztani, és azonosakat is lehet, és van első és második, azaz a sorrend is számít, vagyis ismétléses variációval állunk szemben, és azok száma 6^2 , azaz 36.

A kedvező esetek összegyűjtése kicsit nehezebb. Az összeg 2 és 12 között van, azaz a 2, 3, 5, 7, 11 prím számok jöhetnek ki.

2 csak 1+1,

3 már 1+2 és 2+1,

5 már 1+4, 2+3, 3+2, 4+1,

7 már 1+6, 2+5, 3+4, 4+3, 5+2, 6+1,

11 pedig 5+6 és 6+5.

Ez összesen 15 esetet jelent, azaz a keresett valószínűség

$$\frac{15}{36} = 0.41\bar{6} = 41.6\%.$$

Példa

Magyarországon jelenleg három fajta lottó van. Az ötösnél 90 számból kell 5 számot eltalálni, a hatosnál 45-ből 6-ot, a skandinávnál pedig 35-ből 7-et, de az utolsónál duplán húznak. Állítsuk sorrendbe az egy-egy szelvényre eső eltalálási valószínűségeket.

Megoldás:

Mivel a húzás sorrendje nem számít, ezért kombinációval számolhatunk. Azt kell kiszámolnunk, hogy hány különböző szelvényt kell kitölteni a biztos telitalálathoz.

Az ötös lottónál

Informatikai matematikai alapvetés

$$\binom{90}{5} = \frac{90!}{5! \cdot 85!} = \frac{90 \cdot 89 \cdot 88 \cdot 87 \cdot 86}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 6 \cdot 89 \cdot 11 \cdot 87 \cdot 86$$
$$\binom{90}{5} = 43\,949\,268.$$

A hatos lottónál

$$\binom{45}{6} = \frac{45!}{6! \cdot 39!} = \frac{45 \cdot 44 \cdot 43 \cdot 42 \cdot 41 \cdot 40}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} = 8\,145\,060.$$

A skandináv lottónál pedig

$$\binom{35}{7} / 2 = \frac{35!}{7! \cdot 28! \cdot 2} = \frac{35 \cdot 34 \cdot 33 \cdot 32 \cdot 31 \cdot 30 \cdot 29}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 2} = 3\,362\,260.$$

Nem lesz szemléletesebb, ha a reciprokokat, a valószínűségeket, sorba is állítjuk, hiszen az ember gondolkodásától azok az igen picike törtek távol állnak.

Példa:

A 32 lapos magyar (vagy inkább német) kártyából kiválasztunk taláalomra 8 lapot. Mennyi annak a valószínűsége, hogy közte van a zöld ász?

Megoldás:

8 lapot a pakliból $\binom{32}{8}$ féleképpen lehet kiválasztani. Ez tehát az összes elemi események száma. Kedvező az amelyekben a zöld ász van. Ezeket úgy számolhatjuk össze, hogy a zöld ász kivesszük majd hozzáteesszük a hetes csoportokhoz. Ilyen hetes csoport $\binom{31}{7}$ van, hiszen most már csak 31 lapból húzhatunk. És így a keresett valószínűség

$$\frac{\binom{31}{7}}{\binom{32}{8}} = \frac{31! \cdot 8! \cdot 24!}{32! \cdot 7! \cdot 24!} = \frac{8}{32} = \frac{1}{4} = 0.25.$$

Informatikai matematikai alapvetés

Példa (De Méré márkí feladata), de most a megoldásnál már az axiómákból levezetett képletre támaszkodunk
de Méré lovag igen kedvelte a szerencsejátékokat. Ha a játékos négy egymás utáni kockadobásból legalább egyszer 6-ost dob, a bank, vagyis a kaszinó nyer, egyébként a játékos. Hosszú távon kifizetődik-e ez a banknak, nyerő pozícióban van-e?

Megoldás:

Azt fogjuk megvizsgálni, hogy mennyi annak a valószínűsége, hogy négy egymás utáni dobásból se legyen hatos. Ez ismétléses variáció. A négyes dobásokból csoportokat alkotunk. Az összes elemi esemény összeszámlálásakor a sorrend is számít, ismétlődés is lehet, azaz az összes elemi események száma 6^4 . Akkor nincs hatos a sorozatban, ha a négyes csoportokat az 1,2,3,4,5 pöttyös dobásokból variáljuk, 5^4 . A megoldás így:

$$\frac{5^4}{6^4} = \left(\frac{5}{6}\right)^4 = 0.482253,$$

ennyi a valószínűsége annak, hogy a játékos nyerjen, a banké pedig 0.517747.

Mintavételek

A következő feladat egy mintavételi típusfeladat.

Példa:

Egy dobozban 100 külsőleg egyforma termék van, amelyből azonban 90 hibátlan és 10 hibás. Véletlenszerűen kihúzunk 5 terméket. Mennyi a valószínűsége annak, hogy ezen 5-ös mintában pontosan 2 hibás van?

Megoldás:

A mintát kétféleképpen lehet képezni, és eszerint két mintavétel van

A: visszatevés nélküli

B: visszatevéses.

Az A esetben a mintát vagy egyszerre emeljük ki vagy egyenként, de a kiemelteket már nem tesszük vissza, míg B esetben a mintát egyenként gyűjtjük. Kiemeljük a terméket, megvizsgáljuk, a szükséges adatokat felvesszük, majd visszatesszük, belekeverjük a többibe, vagyis mindig ugyanannyi alapsokaságból veszünk ki véletlenszerűen.

Mindkét mintavételt variációként kezeljük. Az A esetben ismétlés nem fordulhat elő, míg B esetben igen.

A: visszatevés nélküli esetben.

Az összes esetek száma 100 elem 5-öd osztályú ismétlés nélküli variációinak száma, azaz

$$\frac{100!}{95!}$$

Kedvezők azon minták, amelyben 2 a selejtes és 3 a jó. Vagyis 2-t a 10 selejtesből, a 3-t pedig a 90 jóból kell választani (az ilyen választás a sikeres). Bármelyik 2-höz bármelyik 3-t lehet választani, ezért a számuk

$$\frac{10!}{8!} \frac{90!}{87!}$$

Ez még nem az összes kedvező esetek száma, mert még nem vettük figyelembe a sorrendeket. Vagyis minden

jó,jó,selejt,selejt,selejt

mintát permutálni is kell a variáció miatt, amelyek száma mintánként

$$\frac{5!}{2!3!}$$

Ezért a kedvező esetek száma

$$\frac{5!}{2!3!} * \frac{10!}{8!} \frac{90!}{87!},$$

A keresett valószínűség pedig:

$$P_A = \frac{\frac{5!}{2!3!} \frac{10!}{8!} \frac{90!}{87!}}{\frac{100!}{95!}} \approx 0.0702.$$

A képletben átalakításokat hajtunk végre azért, hogy könnyebben megjegyezhető legyen.

$$\frac{\frac{5!}{2!3!} \frac{10!}{8!} \frac{90!}{87!}}{\frac{100!}{95!}} = \frac{5! \frac{10!}{2!8!} \frac{90!}{3!87!}}{\frac{100!}{95!}} = \frac{\binom{10}{2} \binom{90}{3}}{\binom{100}{5}}.$$

B: visszatevéseles esetben:

Az ismétlés nélküli variációk helyett ismétléseket kell venni, és így

$$P_B = \frac{\frac{5!}{2!3!} 10^2 90^3}{100^5} = 0.0729.$$

Informatikai matematikai alapvetés

Ezt a képletet még egy kicsit csinosítjuk, így:

$$P_B = \frac{5!}{2!3!} \left(\frac{10}{100}\right)^2 \left(\frac{90}{100}\right)^3 = \binom{5}{2} * 0.1^2 * 0.9^3.$$

Vagyis, ha az alapsokaság 10%-a selejtes (és 90% pedig nem), és 5 elemű mintát veszünk, és abban 2 legyen a selejtes, akkor a valószínűséget a fenti képlet szerint lehet kiszámolni.

Általánosságban, ha p századrész a selejtes, akkor a jó $1-p$ századrész, és ha n elemű mintát veszünk és benne k a selejtes, akkor

$$P_B = \binom{n}{k} * p^k * (1-p)^{n-k}.$$

Ezt a képletet Bernoulli állította fel. A B esemény bekövetkezési valószínűsége p , akkor tagadásának $1-p$. Azt fejezi ki a képlet, hogy mi a valószínűsége annak, hogy n kísérletből a B k -szor következik be.

Persze a gyakorlatban a selejtességet akarjuk megvizsgálni anélkül, hogy az egész terméket egyenként átnéznénk. Sok kísérletet végezve megbecsülhetjük a valószínűséget, n és k ismert. Ekkor egy magasabb fokú algebrai egyenletre jutunk, amit numerikus úton megoldhatunk.

Ha pl. azt találjuk, hogy az 5 elemű mintákban a 2 selejttest tartalmazók aránya 0.0725 (de nem két-három, hanem nagyon sok minta esetén), akkor egyenletünk

$$\frac{5!}{2!3!} p^2 (1-p)^3 = 0.0729$$

$$10 p^2 (1-p)^3 = 0.0729$$

$$p^2 (1-3p+3p^2-p^3) = 0.00729$$

$$-p^5 + 3p^4 - 3p^3 + p^2 = 0.00729$$

egyenlet megoldása a $p=0.1$.

Geometriai valószínűség

Olykor az alaphalmaz, a biztos esemény valamilyen geometriai alakzat, pont-halmaz. Ennek egy része a megfigyelt esemény, amelynek valószínűségére a kérdés vonatkozik. Az is egy pont-halmaz. Mindkettő kontinuum számosságú halmaz, ezért most a Kolmogorov axiómák nem használhatók. Illetve úgy használjuk őket, hogy a pont-halmazok területeit és azok hányadosát vesszük. A következő feladattal ez biztosan megvilágosodik.

Informatikai matematikai alapvetés

Példa

Az óra nagymutatója egyenletesen jár körbe körbe. Egyszer csak véletlenül megáll. Mennyi a valószínűsége annak, hogy ez akkor következik be, amikor az az 5 és 7 számok között lesz éppen?

Megoldás

A körlapot a sugaraival egyenlő részekre tudják felosztani. Ha percenként vesszük, az egész körlap 60 egység. Ebből az 5 és 7 közötti rész 10 egység. Így a keresett valószínűség $10/60$, azaz 0.16666 .

Példa

Mari és Pali egy könyvtárba járnak. A nyitvatartási időben mindketten fél-fél órát újságot olvasnak illetve várják a könyvet. A könyvtár 10 - 18-ig tart nyitva. Mennyi a valószínűsége annak, hogy találkoznak?

Megoldás:

Mari m órákor, Pali p órákor lép be a nyitás után, azaz $10+m$, ill. $10+p$ órákor.

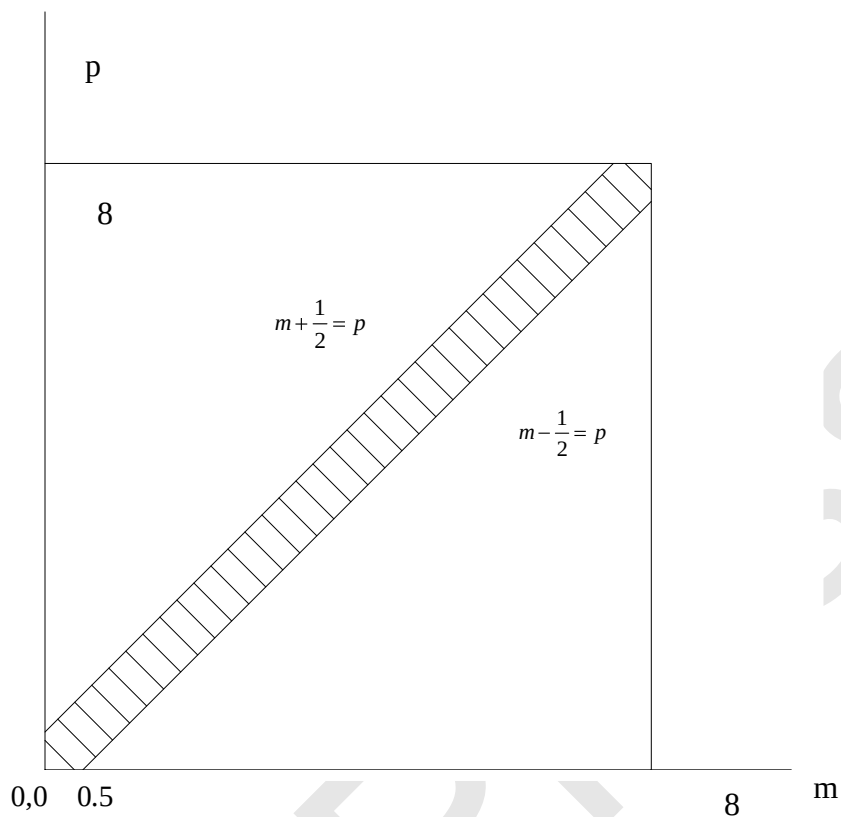
Akkor találkoznak, ha

$$|(10+m) - (10+p)| \leq \frac{1}{2},$$

$$|p-m| \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \leq p-m \leq \frac{1}{2}$$

$$m - \frac{1}{2} \leq p \leq m + \frac{1}{2}.$$

Rajzolunk egy ábrát, egy grafikont.



Az ábra vonalkázott része elégíti ki a feltételeket. A négyzet területe $8 \times 8 = 64$. A két háromszögé együtt $7.5 \times 7.5 = 56.25$. Így a vonalkázott rész $64 - 56.25 = 7.75$. A keresett valószínűség ezért $7.75 / 64 = 0.1211$, azaz kb. 12%.

Valószínűségi változó és eloszlásfüggvénye

Példa

Legyen a dobókockánk olyan, hogy két lapján 0, két lapján 1 és két lapján 2 pont van.

- Mennyi annak a valószínűsége, hogy hárommal dobva 4 legyen az összeg?
- Mennyi annak a valószínűsége, hogy hárommal dobva k legyen az összeg?

Informatikai matematikai alapvetés

Megoldás:

4 úgy jön ki, mint $2+2+0$, vagy $2+1+1$. De jó dobások még ezek permutációi is, azaz a kedvező elemi események száma

$$2 * \frac{3!}{2!} = 2 * 3 = 6.$$

Az összes esemény pedig ismétléses variáció, $3^3 = 27$. A választ így írjuk:

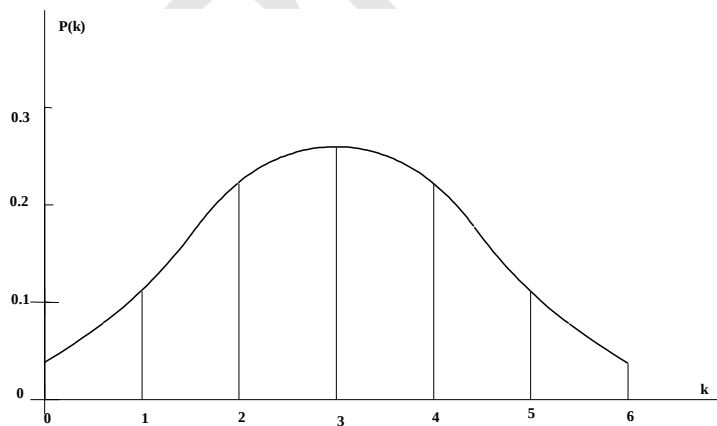
$$P(k=4) = \frac{6}{27} = \frac{2}{9} = 0.22.$$

A k véletlenszerűen felvehet minden 0 és 6 közé eső számot. A k értéke véletlen, *valószínűségi változónak* hívják. Most megnézzük a k -hoz tartozó valószínűségeket. Eredményeinket egy táblázatba foglaltuk:

$k=$	0	1	2	3	4	5	6
$P(k)=$	$1/27$	$3/27$	$6/27$	$7/27$	$6/27$	$3/27$	$1/27$

Észre vehetjük,

- hogy a 3 elérésének a legnagyobb a valószínűsége.
- A valószínűségek összege 1.
- Ha grafikont készítünk a 7 pontból, harangra emlékeztető alakzatot kapunk.



Azokat a valószínűségi változókat, amelyek értékeinek halmaza véges vagy megszámlálhatóan végtelen, *diszkrét valószínűségi változónak* nevezzük. Ha azonban a valószínűségi változók nem ilyenek, akkor folytonos valószínűségi változókról beszélünk. Az utóbbira tipikus példa a hőmérséklet, vagy az előző példák egyikében az óra megállása. (Nem a hőmérőn vagy az órán leolvasott adat, (hiszen az ember besorolja a higany-

szálat vagy a mutatót valamilyen feltüntetett értékek közé, de a mutatóra 1 és kettő között sohasem mondja, hogy éppen most négyzetgyök kettőt mutat) hanem maga a higanyszál ill. a nagymutató állása.)

A nagy számok törvénye

A nagy számoknak több törvénye van, és az első még Bernoullitól való.

Legyen az A esemény valószínűsége p . Végezzünk n számú kísérletet, amelyben vagy A vagy a komplementere következik be. A következők be az A m -szer, azaz m/n a bekövetkezés relatív gyakorisága. Legyenek ε és δ tetszőlegesen kicsiny pozitív számok, akkor annak a valószínűsége, hogy az m/n a p -től ε -nál többel tér el kisebb, mint δ . Képletben:

$$P\left\{\left|\frac{m}{n} - p\right| > \varepsilon\right\} < \delta, \text{ ha } n \text{ elég nagy.}$$

Ez azt jelenti, hogy a relatív gyakoriság nagy számú kísérlet esetén közel van a valószínűséghez.

1777-ből való Buffon feladata. Vízszintes síkra rajzoljunk d távolságra párhuzamos egyenes vonalakat. Dobáljunk a síkra egy d -nél rövidebb l hosszúságú tűt. Mennyi a valószínűsége annak, hogy a tűnek az egyenessel közös pontja lesz? Úgy találták, hogy ez $p = \frac{2l}{d\pi}$. Vagyis egy olyan képlethez jutottunk, amelyben a p -t nagy számú kísérlettel megközelítjük, akkor megkaphatjuk a π értékét is. Stephan Smith 1855-ben 3200 dobásból π -re 3.1553 értéket kapott.

A nagy számok törvényének másik formája lehet a következő, amellyel még számolni nem tudunk, de a lényegét megérthetjük: *Ha nagy számú megfigyelést végzünk, akkor az adatok többsége egy jól meghatározott intervallumba esik.*

Előkészítő fogalmak:

Valószínűségi változó várható értéke: Ha a ξ valószínűségi változóra n független kísérletet végzünk és ξ konkrét értékeire a $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ értékeket kapjuk, akkor a

Informatikai matematikai alapvetés

$$M(\xi) = \frac{\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n}{n}$$

számot, ha nagy n esetén valamely szám körül ingadozik, a ξ várható értékének nevezzük.

Valószínűségi változó szórása: Képezzük a $(\xi_i - M(\xi))^2$ mennyiségek aritmetikai átlagát. Ez lesz a szórásnégyzet. Vegyük ennek a négyzetgyökét. Ez a szórás, amelyet $D(\xi)$ -vel jelölünk.

Példa:

Kézi fűrészszel 1 méteres léceket kell levágni. Levágtunk 10 darabot és lemértük a hosszukat. Rendre a következő értékeket kaptuk: (milliméterben)

98, 99, 101, 102, 97, 100, 100, 101, 96, 99. A tapasztalati várható érték 99.3. A szórásnégyzet 2.863, a szórás pedig 1.69. Számoljunk utána!

Ne felejtsük, hogy ez csak mintapélda, 10 adat nem alkalmas következtetés levonására.

Csebisev-féle egyenlőtlenség:

A ξ valószínűségi változó egyik legfontosabb jellemzője a várható értéke, amelyet $M(\xi)$ -vel jelölünk. A ξ lehetséges értékei azonban ettől eltérnek. (Pl. 1 méteres rudakat vágok fából, de helyette mások sikerülnek, mint előbb). Az eltérés a *hiba*, tehát

$$h = |\xi_i - M(\xi)|.$$

A ξ valószínűségi változónak szórása $D(\xi)$.

A Csebisev egyenlőtlenség azt mondja ki, hogy annak a valószínűsége, hogy a hiba kisebb legyen a szórás t -szeresénél, legalább $1 - 1/t^2$. Képletbe írva pedig:

$$P(h < tD(\xi)) \geq 1 - \frac{1}{t^2}.$$

Ez pl. azt jelenti, felhasználva példa adatait, hogy kétszeres szórással számolva:

$$1 - \frac{1}{t^2} = 1 - \frac{1}{2^2} = 1 - \frac{1}{4} = 0.75.$$

$$P(h < 2 \cdot 1.69) \geq 1 - \frac{1}{2^2} = 0.75.$$

Informatikai matematikai alapvetés

Tehát 75% annak a valószínűsége, hogy a következő lécs hossza 96.62 mm-nél hosszabb és 103.38 mm-nél rövidebb lesz.

Másik alak:

$$P(|\xi - M(\xi)| \geq \varepsilon) \leq \frac{D^2(\xi)}{\varepsilon^2}$$

Itt azt számolhatjuk ki, hogy annak a valószínűsége, hogy 3 mm-nél nagyobb hibát követünk el, kisebb, mint 32%, azaz elég kicsi. Ha $\varepsilon = 3.38$, mint példánkban a szórás kétszerese, akkor 25% lesz annak a valószínűsége, hogy munkánk eredménye nem lesz hibahatáron belül.

A nagyszámok törvénye azt fejezi ki, nagyon nagy számú kísérlettel az esemény valószínűsége jó pontossággal meghatározható.

14. A matematikai statisztika elemei

A matematikai statisztika adattömegek feldolgozásával, értékelésével kapcsolatos matematikai módszerekkel foglalkozik. Matematikailag megalapozott módszereket ad a gazdasági és egyéb statisztikák számára. E fejezetben alapfogalmakkal és a legfontosabb eljárásokkal ismerkedünk meg.

Egyméretű eloszlások

1. Alapfogalmak

A statisztika fontos kiinduló pontja, hogy adataink jól áttekinthető formában legyenek felvéve és rendszerezve. Ez általában úgy történik, hogy adatainkat nagyság szerint rendezzük. Lehetnek persze megegyező adataink is. Ilyenkor az adatot csak egyszer szerepeltetjük, de azt is megadjuk, hogy az hányszor fordul elő.

Legyen valamilyen statisztikai adatsorunk az

$$x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$$

szimbólumokkal jelölve, amelyek előfordulási gyakoriságai az

$$s_1, s_2, s_3, \dots, s_n$$

mennyiségek.

Az észlelések számainak összegét N -nel szokás jelölni, tehát

$$N = s_1 + s_2 + s_3 + \dots + s_n = \sum_{i=1}^n s_i$$

Mivel az összegzés mindig 1-től n -ig tart, nem lesz félreértés, ha azt nem írjuk ki, de mindig odagondoljuk. Azaz röviden

$$\sum s_i$$

Szokás megadni, hogy egy-egy adat gyakorisága hogyan viszonylik az összes észleléshez. Ezt a számot relatív gyakoriságnak hívják, tehát

$$f_i = \frac{s_i}{\sum s_i} = \frac{s_i}{N}$$

Tétel: A relatív gyakoriságok összege 1.

Bizonyítás:

$$f_1 + f_2 + \dots + f_n = \frac{s_1}{N} + \frac{s_2}{N} + \dots + \frac{s_n}{N} = \frac{s_1 + s_2 + \dots + s_n}{N} = \frac{N}{N} = 1$$

Példa:

Informatikai matematikai alapvetés

Egy dolgozatírásakor, amikor a csoport létszáma 24 volt az alábbi jegyek születtek:

x_i	s_i	f_i
elégtelen(1)	2	0.08
elégséges(2)	5	0.21
közepes(3)	7	0.29
jó(4)	6	0.25
jeles(5)	4	0.17
Összeg=	24	1

A táblázat azt mutatja, hogy pl. a közepesek aránya, relatív gyakorisága 0.29 vagy mondjuk még azt is, hogy 29%.

Olykor kiszámítják még a relatív gyakoriságok un. kumulált sorozatát, ami

$$F_1 = f_1$$

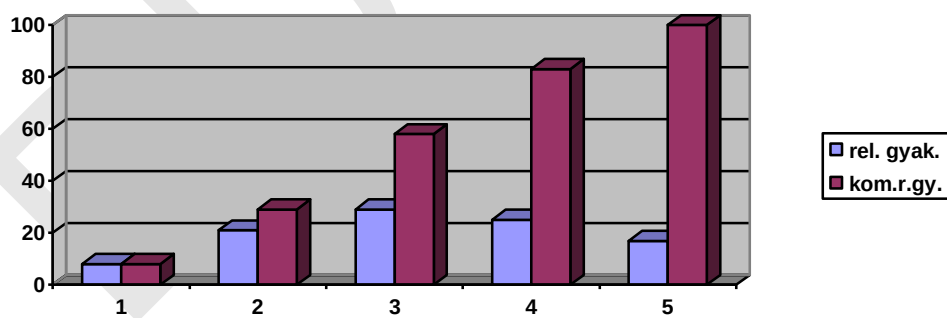
$$F_2 = f_1 + f_2$$

$$F_3 = f_1 + f_2 + f_3$$

$$\vdots$$

$$F_n = f_1 + f_2 + f_3 + \dots + f_n = 1$$

A közölt számpéldára alkalmazva az F_i értékek azt fejezik ki, hogy legfeljebb elégségest a vizsgázók 29%-a, legfeljebb középezt már 58 %-a ért el. Szép szemléltető grafikonokat is készíthetünk.



Informatikai matematikai alapvetés

A grafikonon vegyük észre, hogy a relatív gyakoriságok egy hullám alakot formálnak, míg a kumulált relatív gyakoriságok egy növekvő alakzatot írnak le.

Középértékek

A középértékek a statisztikai eloszlás valamely tulajdonságát igyekeznek kidomborítani. Közös jellemzőjük az, hogy olyan számok, amelyekkel minden természetes adat helyettesíthető valamilyen szempont szerint. Ezeket átlagoknak hívják. Igen sok átlag van, és valamilyen szempontból mind jelentős.

Az aritmetikai átlag

Azt az $\bar{x}$ számot, amellyel minden x_i észlelési adatot helyettesíthetünk úgy, hogy közben azok összege nem változik aritmetikai vagy számtani átlagnak nevezzük.

Eszerint

$$\begin{aligned} S_1x_1 + S_2x_2 + S_3x_3 + \dots + S_nx_n &= \\ &= S_1\bar{x} + S_2\bar{x} + S_3\bar{x} + \dots + S_n\bar{x} = \bar{x}(S_1 + S_2 + \dots + S_n) = \bar{x}N \end{aligned}$$

ahonnan kapjuk, hogy az aritmetikai átlagot így számíthatjuk ki:

$$\bar{x} = \frac{S_1x_1 + S_2x_2 + S_3x_3 + \dots + S_nx_n}{N}$$

Példák:

1. *példa:* Egyenlő arányban keverünk össze narancsitalt, és pedig 20, 30, 50 és 100%-osakat. Hány %-os lesz a keverékünk?

Négy egyenlő mennyiséget keverünk össze, egyszerű aritmetikai átlagot kell számolnunk, tehát

$$\bar{x} = \frac{20 + 30 + 50 + 100}{4} = 50\%$$

2. *példa:* 3 liter 100%-os narancslé és sok liter 20%-os van. Legfeljebb hány liter 35%-os narancslét tudunk keverni?

Ha x litert használunk fel a 20%-osból, akkor egyenletünk

$$35 = \frac{3 \cdot 100 + x \cdot 20}{3 + x},$$

ahonnan $x=13$ liter, vagyis ennyit keverünk el a 3 liter 100%-os narancsléhez, és így összesen 16 liter 35%-os narancslét kapunk.

3. *példa:* Egy cégnek két fiókintézménye van. Munkájukat átlagosan 112%-ra teljesítették. Az első fiók 104%-ra, a második 116%-ra. Együtt 7800 ezer Ft-ot termeltek. Mekkora volt az egyes fiókok termelése?

Mivel 104 és 116 átlaga nem 112, a két egység nem egyenlően termelt, vagyis most a súlyokat keressük. Ha az első egység termelése x , akkor a másodiké $7800 - x$. Így a feltételi egyenletünk:

$$\frac{104 \cdot x + 116 \cdot (7800 - x)}{7800} = 112,$$

ahonnan $x = 2600$. Tehát az első egység 2600 ezer Ft-t, a második 5200 ezer Ft-t teljesített.

Az aritmetikai átlag néhány tulajdonsága

Az alábbiakban közlendő tulajdonságok vagy egyszerűsítik a számolást vagy kellemes ellenőrzési eszközt adnak a kezünkbe. Némely tulajdonságot be is bizonyítunk, míg másokat csak közlünk.

Az aritmetikai átlag olyan szám, amellyel az elemeket helyettesítve azok összege változatlan marad. Legyen a számsorunk rendezett és minden előfordulást feltüntetünk. Tehát

$$x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq \dots \leq x_N$$

Vegyük mindegyik helyett az aritmetikai átlagot.

$$x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_N = \bar{x} + \bar{x} + \bar{x} + \dots + \bar{x} = N \cdot \bar{x}$$

(A). Ha az észlelési adatok egyenlők, akkor az a szám az aritmetikai átlaguk is.

(B). Ha van elem, amelyik kisebb, mint az átlag, akkor lenni kell nagyobbak is, vagyis az aritmetikai átlag a legkisebb és legnagyobb észlelési adat között van.

(C). Ha az észlelési adatokhoz hozzáadunk egy számot, akkor az új számok átlagát úgy kapjuk, hogy a régi átlaghoz hozzáadjuk ezt a számot. Ugyanígy járhatunk el, ha minden elemet megszorozzuk egy számmal, pl. 5000 helyett konzekvensen 5-tel számolunk minden adatnál levágva az ezreseket. A 3. példában is így tettünk.

Képletben:

$$\overline{x+a} = \bar{x} + a$$

$$\overline{x*a} = \bar{x} * a$$

(D). Az észlelési adatoknak az aritmetikai átlagtól való eltéréseinek az összege nulla.

Ezt az állítást be is bizonyítjuk. A bizonyítás igen rövid. Vesszük az eltérések összegét, és átalakítjuk:

$$\sum (x_i - \bar{x}) = \sum x_i - N\bar{x} = \sum x_i - N \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_N}{N} = \sum x_i - \sum x_i = 0.$$

Az észlelési adatok eloszlásáról bizonyos értelemben tehát az aritmetikai átlag nem sokat mond. Akár minden adat egyenlő, akár igen szórtak az adatok, az aritmetikai átlagtól való eltérések összege mindkét esetben 0. Ezt küszöböli ki a következő tulajdonság.

(E). Ha veszünk egy p számot és az adatok ettől való eltéréseit négyzetre emeljük és összeadjuk őket, akkor kapjuk a legkisebb összeget ha p éppen az aritmetikai átlag.

Képezzük az eltérések négyzeteinek az összegét!

$$\sum (x_i - p)^2.$$

Ez egy p -től függő szám, függvény lesz. Ha a négyzetre emeléseket elvégezzük p másodfokú függvényét kapjuk. Mivel p^2 együtthatója pozitív, a függvénynek minimuma van. Ez pedig ott van, ahol a deriváltja nulla.

$$f(p) = \sum (x_i - p)^2 = \sum (x_i^2 - 2x_i p + p^2) = \sum x_i^2 - \sum 2x_i p + \sum p^2$$

$$f'(p) = \sum -2x_i + \sum 2p = 0$$

$$\sum 2p = \sum 2x_i$$

$$Np = \sum x_i$$

$$p = \frac{\sum x_i}{N} = \bar{x}.$$

Szórás

Az előbbi számítás igen figyelemre méltó tulajdonságát emelte ki az aritmetikai átlagnak.

Ha az aritmetikai átlagtól való eltéréseket négyzetre emeljük az abszolút értékben 1-nél kisebb eltérések még kisebbek lesznek, a kiugró eltérések pedig dominánsabbak lesznek. Vagyis ez az összeg alkalmas annak a jellemzésére, hogy a sokaság mennyire heterogén, vagy homogén. A mérőszámot **szórásnak** hívják.

Definíciója:

A sokaság szórásán az elemek aritmetikai átlaguktól való eltérései négyzeteinek aritmetikai átlagából vont négyzetgyököt értjük. Képletben:

$$s_x = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2}{N}}$$

Hogy a sokaság szórása kicsi vagy nagy, attól is függ, hogy mik az adatok. Ha pl. városok egymástól való távolságai, akkor 10 méter az semmi, de, ha egy népcsoport tagjainak magassága lenne, az furcsán hatna.

Mértani vagy geometriai átlag

Igen gyakran használt, de sokszor rosszul használt átlag. Nézzünk egy példát. Valakinek a fizetését felemelték 10%-kal, majd egy év múlva ismét 10%-kal. Vagyis két év alatt 20% fizetésemelést kapott a megfigyelt személy. Hát nem.

Ha f volt a fizetése, akkor az első emelés után $1.1 \cdot f$, a második után pedig nyilván az akkori bérét növelték 10%-kal, azaz most már $1.1 \cdot (1.1 \cdot f)$ a fizetése, ami $1.21 \cdot f$, tehát a két 10%-os fizetésemelés az elsőhöz képest nem 20%, hanem 21%. Azt is megkérdezhetjük, hogy mennyivel kell emelni az éves fizetést, ha két év alatt 20%-ot akarunk elérni. Minthogy két egyenlő szám szorzatának kell 1.2-et adni, ezért, ha az 1.2-ből, négyzetgyököt vonunk, megkapjuk az évenkénti változást. Ez 9.5445% évenkénti emelésnek jön ki.

Definíció: Egy sokaság mértani közepén azt a számot értjük, amelyikkel helyettesítve a számokat a szorzatuk változatlan marad. Képletben:

$$x_1^{s_1} x_2^{s_2} \dots x_n^{s_n} = \bar{x}_g^{s_1} \bar{x}_g^{s_2} \dots \bar{x}_g^{s_n}$$

Magát a geometriai átlagot tehát így kapjuk:

$$\bar{x}_g = \sqrt[n]{x_1^{s_1} x_2^{s_2} \dots x_n^{s_n}}$$

Ezt rövidebben így írhatjuk:

$$\bar{x}_g = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^n x_i^{s_i}}.$$

A $\prod$ jel produktumnak olvasandó, azt jelenti, hogy argumentumait össze kell szorozni.

Egyéb átlagok:

A **harmonikus átlag** olyan szám, amellyel az észlelési adatokat helyettesítve azok reciprokainak az összege nem változik. Ezért így számolhatjuk ki:

$$s_1 \frac{1}{x_1} + s_2 \frac{1}{x_2} + s_3 \frac{1}{x_3} + \dots + s_n \frac{1}{x_n} = s_1 \frac{1}{\bar{x}_h} + s_2 \frac{1}{\bar{x}_h} + s_3 \frac{1}{\bar{x}_h} + \dots + s_n \frac{1}{\bar{x}_h} = N \frac{1}{\bar{x}_h}$$

$$\bar{x}_h = \frac{N}{\sum s_i \frac{1}{x_i}}$$

Példa:

Albert valami tárgyat 2 perc alatt készít el, míg ugyanezt Béla 4 perc alatt. Mennyi átlagos idő alatt készítik el a tárgyat?

Egy válasz lehetne az, hogy 2-nek és 4-nek az átlaga 3, vagyis 3 perc alatt készítenek el átlagosan egy-egy tárgyat.

Mi történik egy óra alatt ekkor? Mindketten egyenlően 20 tárgyat készítenek, vagyis ketten 40 darabot. Igen ám, de Albert maga 30-at, Béla pedig 15-öt, vagyis valóságosan 45-öt készítenek el. Ezt ketten csinálják, vagyis az egyik 60 perc alatt 22.5-et, azaz az átlagos elkészítési idő $60/22.5 = 2.66666$ perc.

A két adat harmonikus átlaga pedig:

$$\frac{2}{\frac{1}{2} + \frac{1}{4}} = \frac{2}{\frac{3}{4}} = \frac{8}{3} = 2\frac{2}{3}$$

Ilyen teljesítményes feladatokat a harmonikus átlaggal lehet kiszámolni.

Momentumok:

Valamely statisztikai eloszlás k -adrendű momentumán az észlelési adatok k -adik hatványának aritmetikai átlagát értjük. Képletben:

$$M_k = \frac{s_1 x_1^k + s_2 x_2^k + \dots + s_n x_n^k}{s_1 + s_2 + \dots + s_n} = \frac{\sum_{i=1}^n s_i x_i^k}{N}$$

Világos, hogy az elsőrendű momentum pontosan az aritmetikai átlag. A másodrendűt gyakran négyzetes momentumnak hívják. A páros rendű momentumok nem lehetnek negatívak.

Különös szerepet játszanak a centrális momentumok, amely alatt az aritmetikai átlagtól való eltérések momentumait értjük. Már találkoztunk a másodrendű centrális momentummal, amelynek külön neve is volt, a *szórás*.

Módusz és medián

A **medián** a nagyságrendbe állított adatsokaság középső eleme. Tehát nála nagyobb, vagy egyenlő elem annyi van mint kisebb vagy egyenlő. Ha az elemek száma páratlan, akkor van valódi középső elem és ez az $(N+1)/2$ -edik helyen álló elem. Ha páros számú adatból áll az alaphalmaz, akkor nincs valódi középső elem. Ekkor a két "középső" aritmetikai átlagát tekintik mediánnak.

A **módusz** a leggyakoribb adat. Az észlelési adatok grafikonja a környezetéhez képest kiemelkedik. Ha csak egy kiemelkedés van, akkor az eloszlást egymóduszúnak, ellenkező esetben többmóduszúnak mondjuk.

16. Regressziós analízis

Gyakori logikai játék, hogy valamilyen számsort vagy geometriai mintát folytatni kell. Legyen a számsorunk a következő:

4, 6, 10, 16, 26. Folytasd!

Észre vehetjük, hogy fel van írva két szám, a harmadik e kettő összege, a negyedik az ezt megelőző kettő összege, és így tovább, azaz a következő szám 42. De más logikus válasz is adható. Pl. a hatodik szám lehetne akár egy negatív szám is, mondjuk -7 . Ez utóbbiban az a logika, hogy az

$$F(x) = (x-4)(x-6)(x-10)(x-16)(x-26)(x+7)$$

polinomnak pontosan a felsorolt számok a zérushelyei. És ezt a logikai gondolatmenetet milyen könnyen lehet folytatni bármilyen számmal. Próbáljuk a függvényt megrajzoltatni pl. a Derive vagy egyéb programmal. A grafikonja szépen adja a gyököket, de igencsak hullámzik, tendenciát nem fejez ki.

Legyenek a síkon pontok megadva. Ha kettő van, illeszkedik rá egy

$$f(x) = ax + b$$

egyenes, ha 3, akkor illeszkedik rájuk egy

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

alakú parabola. Ha n db. pontunk van, de egymás fölött egy sincs, akkor is átvezethető rajtuk egy polinom alakú függvény, amelynek fokszáma $n-1$:

$$f(x) = a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \dots + a_1x + a_0$$

Igenám, de a statisztikai adatoknál nincs garantálva az adatok nemismétlődése, vagy adatpárok esetén csak az értékekben való különbözőség.

A Tejút számtalan csillagból áll. De ennek a sok csillagnak van egy íve, foltja, mintha egy láthatatlan cső fogná őket össze, vagy mintha egy út lenne, a Hadak Útja, a csillagok pedig lovak patkóinak szikrái. Csaba királyfi vitéz lovasai jönnek segíteni, ha bajba jut a magyar, mondja a legenda is.

Valami ilyesmit szeretnénk, függvényt szeretnénk felírni, amely jól közelíti a pontokat. Megengedi, hogy az adatok között egy érték többször is előforduljon, és ennek a párja is, vagyis valami tendenciát szeretnénk kifejezni. Nem baj, ha a függvény egyetlen ponton se megy át, de mindhez közel menjen és áttekinthető legyen.

Képzeljük el, hogy koordinátarendszerben van egy csomó pontunk, akár több száz is. Arra vagyunk kíváncsiak, hogy van-e közöttük valamilyen összefüggés. Arra gondolunk például, hogy nagyobb értékek párjai is nagyobbak (vagy esetleg kisebbek). Nem szorosan így, hanem tendenciózusan. Pl. aki jobban keres, az általában többet költ-e könyvekre, vagy aki jobban érettségizett az jobb eredményt ér-e majd el az egyetemen is, stb.

A Gauss-féle normálegyenletek

Rendelkezésünkre áll tehát az

$$x_i = x_1, x_2, x_3, \dots, x_N$$

$$y_i = y_1, y_2, y_3, \dots, y_N$$

összetartozó számpárok sorozata. Ezek a koordinátarendszerben mint pontok koordinátái egy pontthalmazt definiálnak. Olyan függvényt keresünk, amelyik grafikonja a pontthalmazt jól közelíti. Persze valahogyan ki kellene fejeznünk matematikailag, hogy mi a jól közelítő függvény. Ha pl. vesszük az $y_1, y_2, y_3, \dots, y_N$ értékek aritmetikai átlagát, akkor arról tudjuk, hogy az attól való eltérések összege 0. Ez biztosan nem jó, mert ez az erősen differenciált adatokra éppen úgy igaz, mint az egyenlőekre. Más lenne a helyzet, ha az eltérések abszolút értékeit vennénk. Ekkor azonban nem tudnánk szélsőértéket számítani, mivel a feltételi függvényünk teli lenne törésponttal, nem differenciálható helyekkel. Ha azonban az eltéréseket négyzetre emeljük, akkor a nagy eltéréseket hangsúlyosabbá, a kicsiket pedig még kisebbé, hangsúlytalanabbá tesszük és a függvényünk mindenütt differenciálható lesz.. A közelítést pedig valamilyen típusú függvénnyel végezzük, először egyenessel, vagyis elsőfokú függvénnyel.

Legyen az egyenlet, mint feljebb

$$y = ax + b$$

alakú. Akkor az eltérések négyzeteinek összege

$$\sum_{i=1}^{i=N} \delta_i^2 = \sum_{i=1}^{i=N} (y_i - (ax_i + b))^2 = f(a, b).$$

Így kapunk egy kétváltozós függvényt. Azt szeretnénk megtudni, hogy milyen a és b értékeknél lesz az összeg minimális. Ehhez deriváljuk a függvényt elő-

Informatikai matematikai alapvetés

ször az a majd a b változója szerint, és azt kell meghatározni, hogy a deriváltak mikor nullák. Ha az összegzés előtt a hatványozást elvégezzük, kapjuk

$$f(a, b) = \sum_{i=1}^{i=N} (y_i - (ax_i + b))^2 = \sum_{i=1}^{i=N} (y_i^2 - 2y_i(ax_i + b) + (a^2x_i^2 + 2ax_ib + b^2))$$

a szerint deriválva (és ami nem a az mind konstans) a függvényt tagonként:

$$f'_a(a, b) = \sum_{i=1}^{i=N} (-2y_ix_i + 2ax_i^2 + 2x_ib) = -2 \sum_{i=1}^{i=N} x_i y_i + 2a \sum_{i=1}^{i=N} x_i^2 + 2b \sum_{i=1}^{i=N} x_i.$$

És ez az érték legyen 0, azaz

$$2 \sum_{i=1}^{i=N} x_i y_i = 2a \sum_{i=1}^{i=N} x_i^2 + 2b \sum_{i=1}^{i=N} x_i.$$

Az egyenletet elosztjuk $2N$ -nel. Ezután kapjuk:

$$\overline{xy} = \overline{x^2}a + \overline{xb}.$$

Ez tehát az egyik feltételi egyenletünk. A másik a b szerinti deriválásból származik. Így:

$$f'_b(a, b) = \sum_{i=1}^{i=N} (-2y_i + 2ax_i + 2b) = -2 \sum_{i=1}^{i=N} y_i + 2a \sum_{i=1}^{i=N} x_i + 2bN.$$

Az egyenletet ismét elosztjuk $2N$ -nel. És aztán kapjuk:

$$\overline{y} = \overline{xa} + b.$$

A két egyenletet együtt Gauss-féle normálegyenleteknek hívják.

Ha tehát egy ponthalmazt egy $y = ax + b$ egyenletű egyenessel akarunk megközelíteni, akkor a legkisebb négyzetek elve szerint az egyenes egyenletében szereplő paramétereket az

$$\overline{y} = \overline{xa} + b.$$

$$\overline{xy} = \overline{x^2}a + \overline{xb}$$

egyenletrendszer megoldásával határozhatjuk meg.

Példa:

Egy 10 fős egyetemi csoport tagjait kérdeztük meg arról, hogy hány pontot szereztek a felvételin és, hogy az első egyetemi félévben milyen átlagot értek el. Az adat párokhoz kiszámítjuk a regressziós egyenest.

x jelöli a felvételin szerzett pontokat, y az egyetemen elért félévi átlagokat. 10 személy adatai vannak megadva. A Gauss-féle normálegyenletekhez kell az xy átlag és az x -négyzet átlag.

Informatikai matematikai alapvetés

A	B	C	D
x	y	xy	x^2
120	4,8	576	14400
120	4,5	540	14400
96	4	384	9216
85	2,4	204	7225
115	4,7	540,5	13225
105	4,2	441	11025
100	3,8	380	10000
110	4,5	495	12100
96	4,1	393,6	9216
107	4,2	449,4	11449
összeg			
1054	41,2	4404,5	112256
xatlag	yatlag	xyatlag	x^2atlag
105,4	4,12	440,45	11225,6
105,4	1		
11226	105,4	-116	
4,12	1		a=
440,45	105,4	-6,1	0,05326
105,4	4,12		b=
11225,6	440,45	163,4	-1,49397

Ezeket látjuk a táblázatban.

A Gauss-egyenletek az alábbiak:

$$105.4a + b = 4.12$$

$$11225,6a + 105.4b = 440.4$$

A táblázat alsó részén az egyenletrendszert oldjuk meg a determinánsok módszerével, azaz

Informatikai matematikai alapvetés

$$a = \frac{\begin{vmatrix} 4.12 & 1 \\ 440.45 & 105.4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 105.4 & 1 \\ 11225,6 & 105.4 \end{vmatrix}} = \frac{-6.202}{-116.44} = 0.05326$$

$$b = \frac{\begin{vmatrix} 105.4 & 4.12 \\ 11226 & 440.4 \end{vmatrix}}{-116} = \frac{173.958}{-116.44} = -1.49397$$

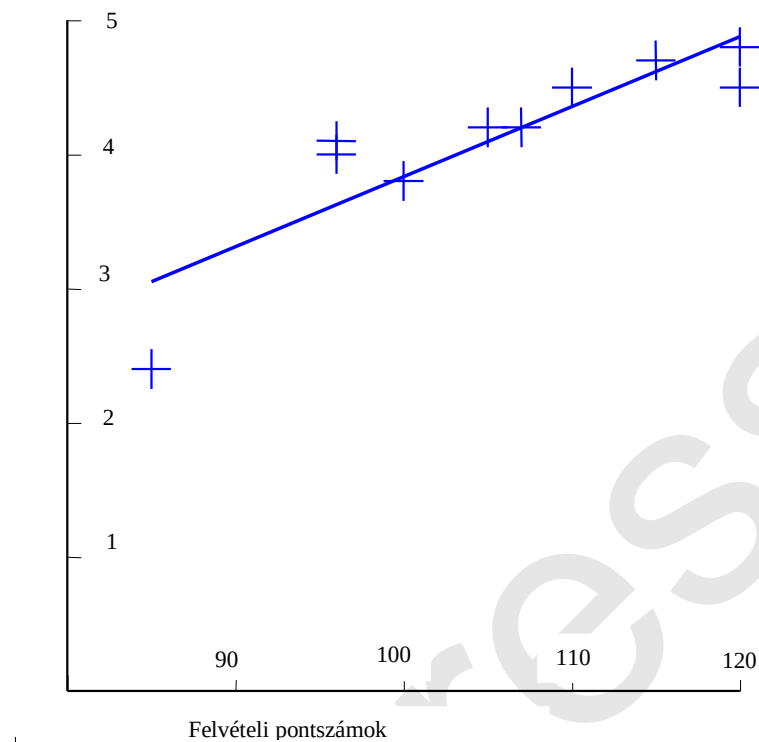
A táblázat Excel táblázat, vagyis a számok a számolásban valójában jóval több tizedes jeggyel szerepelnek.

A regressziós egyenes egyenlete tehát

$$y = 0.05326x - 1.49397.$$

Az x együttthatója a meredekség. Ez pozitív, vagyis a jobban felvételizők jobb eredményt érnek el. Ne felejtjük azonban el, hogy 10 emberből nem szabad statisztikát csinálni, ez csak mintapélda. Nincs még mérőszámunk arra sem, hogy ez az egyenes jól illeszkedik-e a pontokhoz. Mindössze azt tudjuk, hogy az összes egyenes közül ez a legjobb.

A pontokat és a kapott egyenest az alábbi ábra tartalmazza:



└

Némely nem lineáris függvényt bizonyos fogásokkal linearizálni lehet, vagyis elsőfokú függvénné lehet alakítani. Ilyen pl. az

$$y = ax^b$$

hatványfüggvény. Ha ugyanis itt vesszük mindkét oldal logaritmusát (e-alapút, hogy egyszerűbb legyen a számolás), akkor

$$\ln y = \ln a + b \ln x$$

$$Y = A + bX$$

egyenlethez jutunk. Venni kell tehát az x -ek és az y -ok logaritmusát és a számolással megkapjuk b -t és az a logaritmusát A -t.

Felsorolunk néhány függvényt, amelynél hasonló fogást lehet alkalmazni.

$$y = a + \frac{b}{x}, \quad y = \frac{1}{a + bx}, \quad y = ax^b, \quad y = ab^x.$$

Informatikai matematikai alapvetés

A következő táblázat az utolsó előttire, a hatványfüggvényre ad példát. Az x és y adatok után az $\ln x = X$ és $\ln y = Y$ szerepelnek, illetve az ezekből képzett X -négyzet és XY oszlopok. Ezek átlagaiból írható fel a két egyenlet, így:

$$\ln a + b \ln x = \ln y \Rightarrow A + bX = Y$$

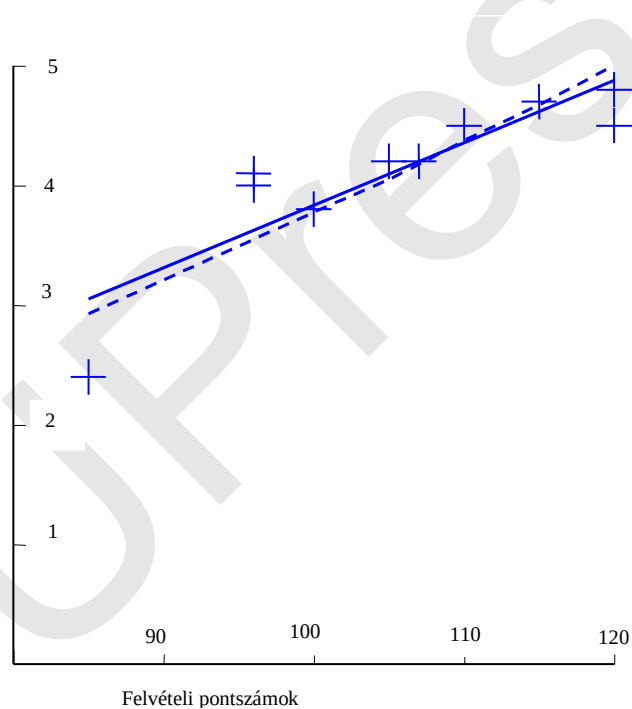
$$A + b\bar{X} = \bar{Y}$$

$$A\bar{X} + b\bar{X}^2 = \bar{XY}$$

$$A + 4.65b = 14$$

$$4.65A + 21.65b = 6.53$$

Ebből ismét a determinánsos módszerrel (Cramer szabály) kapjuk, hogy $A = -5.803911$, ahonnan $a = 0.003016$, $b = 1.548487$.



Azaz a közelítő hatványfüggvény egyenlete:

$$y = 0.003016x^{1.548487}.$$

Informatikai matematikai alapvetés

A függvény képét az ábrán a szaggatott vonal jelöli, a folytonos pedig a korábbi egyenes.

A számolások a táblázatban vannak.

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
x	y							X=lnx	Y=lny	X^2	XY	ax^b
120	4,8							4,78749 2	1,568615 9	22,92007 7	7,50973 6	5,00010 6
120	4,5							4,78749 2	1,504077 4	22,92007 7	7,20075 8	5,00010 6
96	4							4,56434 8	1,386294 4	20,83327 4	6,32753	3,53928 3
85	2,4							4,44265 1	0,875468 7	19,73715	3,88940 2	2,93139 4
115	4,7							4,74493 2	1,547562 5	22,51438 1	7,34307 9	4,68120 8
105	4,2							4,65396	1,435084 5	21,65934 7	6,67882 6	4,06611 3
100	3,8							4,60517	1,335001 1	21,20759 2	6,14790 7	3,77023 2
110	4,5							4,70048	1,504077 4	22,09451 6	7,06988 6	4,36982 6
96	4,1							4,56434 8	1,410987	20,83327 4	6,44023 6	3,53928 3
107	4,2							4,67282 9	1,435084 5	21,83532 9	6,70590 4	4,18666 8
össz- szeg												
1054	41,2							46,5237	14,00225	216,5550	65,3132	
xatlag	yatlag							Xatlag	Yatlag	X^2atlag	Xyatlag	
105,4	4,12							4,65237	1,400225	21,65550	6,53132	
105,4	1							1	4,652370			
0	105,4	11109						4,65237	21,65550	0,010952		
4,12	1		a=					1,40022 5	4,652370 3		A=	a=
0	105,4	434,2	0,0390					6,53132	21,65550	0,063567	-5,80391	0,00301
105,4	4,12		b=					1	1,400225		b=	
11226	440,4	163,4	-1,403					4,65237	6,531326	0,016959	1,54848	

Azt kellene eldönteni, hogy melyik a jobb közelítés. Tehát ott tartunk, hogy egy pontthalmazhoz ki tudjuk számolni adott függvénytípusból a legjobban közelítő

konkrét függvényt. De hogy két különböző típus közül melyik a jobb, azt még nem tudjuk megmondani. Erre a problémára lesz válasz a korrelációs együttható.

Korrelációs együttható

A korrelációs együtthatót az alábbi képlet szerint értelmezzük:

$$\eta_{y/x} = \sqrt{1 - \frac{S_y^2}{s_y^2}}$$

A képletben az y/x arra utal, hogy y az x függvénye (mert esetleg fordítva is lehetne).

Az s_y^2 az y adatok szórásnégyzete. A S_y^2 pedig az eltérések, vagyis a δ -k szórásnégyzete. Ha a pontok mind rajta vannak a közelítő függvényen, akkor minden $\delta = 0$, és így S_y^2 is 0. Tehát a korrelációs együttható értéke 1. Látható tehát, hogy az eltérés egyrészt viszonyítva van az y értékekhez, másrészt akkor szoros az illeszkedés, ha az eltérések viszonylag kicsik, azaz a S_y^2/s_y^2 hányados kicsi, azaz a négyzetgyökkel alatt az 1-ből alig kell levonni. Azt szokták mondani, hogy akkor jó az illeszkedés, ha a korrelációs együttható 0.9-nél nagyobb.

Az 1. táblázatban együtt van a már ismert adathalmaz egyenessel és hatványfüggvénnyel való közelítése is és a hozzájuk csatlakozó korrelációs együtthatók kiszámítása is.

Amikor egyenessel közelítünk, akkor ki kell számolni az egyenesre eső pontok y koordinátáit az adott x helyeken. Ezeket az értékeket az E oszlop tartalmazza. Ha ezt az értéket kivonjuk az y -ból megkapjuk a δ -kat, azaz az F oszlopot. A szórás kiszámításához venni kell a δ -k átlagát, ami 0.2714. Ebből kell kivonni a δ -kat és négyzetre is kell emelni, így kapjuk a G oszlopot. Ennek aritmetikai átlaga adja S_y^2 -et. A s_y^2 számítása kicsit egyszerűbb. A y -ok átlagából, a 4.12-ből kell levonni az y -okat és négyzetre kell őket emelni. Ez a H oszlop. Ennek aritmetikai átlaga az s_y^2 . Ezek után alkalmazva a képletet

$$\eta_{y/x} = \sqrt{1 - \frac{S_y^2}{s_y^2}} = \sqrt{1 - \frac{0.26015}{0.4176}} = \sqrt{0.377035} \approx 0.61404, \text{ ami bizony elég}$$

messze van az 1-től.

Informatikai matematikai alapvetés

Most kiszámoljuk a korrelációs együtthatót a hatványfüggvényre is. Az M oszlop tartalmazza a függvényértékeket, az eltéréseket pedig az N, amit most Delta-val jelöltünk. Ezek átlaga -0.0116 . Ezen átlagtól való eltérések négyzeteit tartalmazza az O oszlop, amelyből $S_y^2=0.11341$ adódik. És így

$$\eta_{y/x} = \sqrt{1 - \frac{S_y^2}{s_y^2}} = \sqrt{1 - \frac{0.11341}{0.4176}} = \sqrt{0.72841} \approx 0.85347 \text{ adódik, ami már jobb,}$$

mint az egyenesre, de még mindig messze van az 1-től.

Az utolsó példában a közelítést másodfokú függvénnyel végezzük. A keresett függvény alakja tehát

$$y = ax^2 + bx + c.$$

Ebből is elsőfokú függvény lesz, ha x^2 helyére egy új változót vezetünk be. Ekkor a Gauss-féle egyenletek felírása egyszerűvé válik. Egyébként éppen úgy lehetne levezetni, mint az egyenes esetében, azaz változónként kell deriválni, és a zérus helyeket megkeresni. Az egyenletrendszer az alábbi:

$$\bar{y} = a\bar{x}^2 + b\bar{x} + c$$

$$\overline{xy} = a\overline{x^3} + b\overline{x^2} + c\bar{x}$$

$$\overline{x^2y} = a\overline{x^4} + b\overline{x^3} + c\overline{x^2}$$

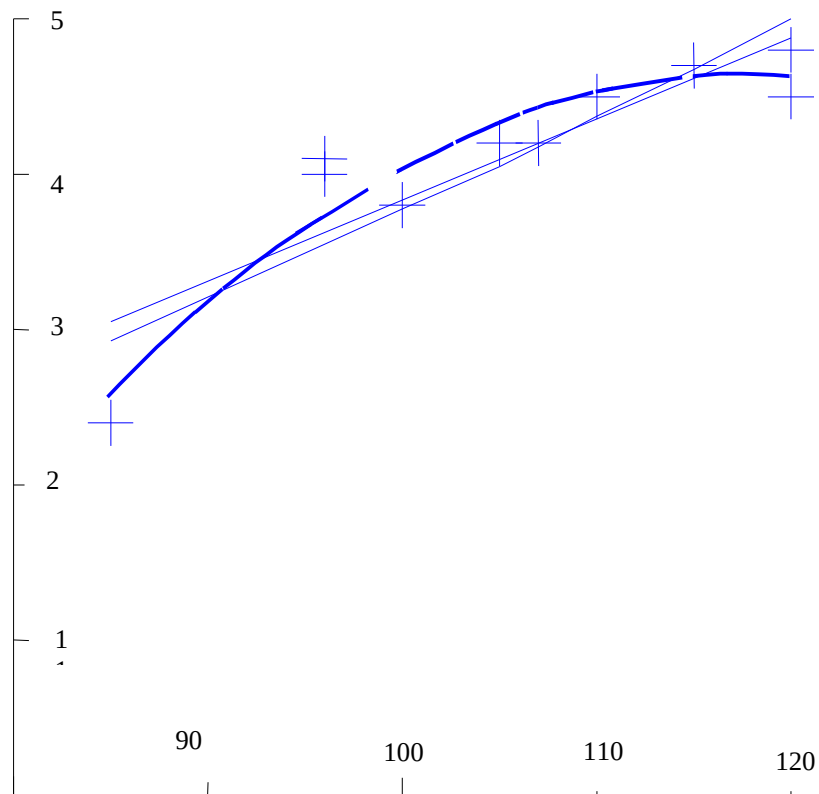
Most a , b , c az ismeretlenek, és a táblázatban elő kell állítani egy sor oszlopot. Nevezetesen xy , x^2 , x^3 , x^4 , x^2y oszlopokat. Az összeállítható egyenletrendszer determinánsai a táblázat alsó részében vannak. A másodfokú függvény paraméterei az alábbiak lettek:

$a=-0.00197$, $b=0.463235$, $c=-22.547618$.

A közelítő függvény egyenlete tehát:

$$y = -0.00197x^2 + 0.463235x - 22.547618.$$

A grafikonunk ezt a parabolát ábrázolja. Ránézésre is jobbnak tűnik, mint az egyenes vagy a hatványfüggvény.



Másodfokú függvénnyel való közelítés

A 2. táblázat H oszlopa ezeket az értékeket tartalmazza az ismert x helyeken.

I-ben vannak az eltérések, vagyis a H és B oszlop különbsége.

Ha megvan a deltaátlag, akkor kiszámíthatjuk az eltérések szórásnégyzetét, ami a J oszlop átlaga. Középen van és 0.0562236. Az y-ok átlagából levonva az y-okat és négyzetre emelve kapjuk a K oszlopot, amelynek átlaga az y-ok szórásnégyzete és egyenlő 0.4176-tal.

Így a korrelációs együttható: $\eta = 0.93025$, ami már elég jó.

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O
x	y	xy	x ²	ax+b	delta	Sy ²	sy ²	X=lnx	Y=lny	X ²	XY	ax ² b	Delta	Sy ²
120	4,8	576	14400	4,8851	0,0851	0,03469	0,4624	4,78749	1,56862	22,92008	7,50974	5,00011	0,20011	0,04481
120	4,5	540	14400	4,8851	0,3851	0,01294	0,1444	4,78749	1,50408	22,92008	7,20076	5,00011	0,50011	0,26182
96	4	384	9216	3,6274	0,8851	0,37669	0,0144	4,56435	1,38629	20,83327	6,32753	3,53928	-0,4607	0,20173
85	2,4	204	7225	3,0509	0,6509	0,14409	2,9584	4,44265	0,87547	19,73715	3,8894	2,93139	0,53139	0,29482
115	4,7	540,5	13225	4,6231	-0,077	0,12129	0,3364	4,74493	1,54756	22,51438	7,34308	4,68121	-0,0188	5,2E-05
105	4,2	441	11025	4,099	-0,101	0,13862	0,0064	4,65396	1,43508	21,65935	6,67883	4,06611	-0,1339	0,01496
100	3,8	380	10000	3,837	0,037	0,05492	0,1024	4,60517	1,335	21,20759	6,14791	3,77023	-0,0298	0,00033
110	4,5	495	12100	5,8169	1,3169	1,0932	0,1444	4,70048	1,50408	22,09452	7,06989	4,36983	-0,1302	0,01407
96	4,1	393,6	9216	3,6274	-0,473	0,55348	0,0004	4,56435	1,41099	20,83327	6,44024	3,53928	-0,5607	0,30155
107	4,2	449,4	11449	4,2038	0,0038	0,07166	0,0064	4,67283	1,43508	21,83533	6,7059	4,18667	-0,0133	3,1E-06
összeg														
1054	41,2	4404	112256		2,7136	2,60147	4,176	46,5237	14,0023	216,555	65,3133		-0,1158	1,13414
xatlag	yatlag	xyatlag	x ² atlag		datlag	Sy ² =	sy ² =	Xatlag	Yatlag	X ² atlag	XYatlag		Datlag	Sy ²
105,4	4,12	440,4	11226		0,2714	0,26015	0,4176	4,65237	1,40023	21,6555	6,53133		-0,0116	0,11341
105,4	1							1	4,65237					
11226	105,4	-116				eta ² =	0,37704	4,65237	21,6555	0,010952			Eta ² =	0,72841
4,12	1		a=			eta=	0,61404	1,40023	4,65237		A=	a=	Eta=	0,85347
440,4	105,4	-6,1	0,0524					6,53133	21,6555	-0,06357	-5,8039	0,00302		
105,4	4,12		b=					1	1,40023		b=			
11226	440,4	163,4	-1,403					4,65237	6,53133	0,01696	1,54849			

1. táblázat. Egyenessel és hatványfüggvénnyel való approximálás, valamint korrelációs együttható számítása.

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
x	y	xy	x ²	x ³	x ⁴	x ² y	ax ² +bx+c	delta	Sy ²	sy ²
120	4,8	576	14400	1728000	207360000	69120	4,6175297	-0,18247	0,0447172	0,4624
120	4,5	540	14400	1728000	207360000	64800	4,6175297	0,11763	0,0078385	0,1444
96	4	384	9216	884736	84934656	36864	3,7321842	-0,26782	0,0880961	0,0144
85	2,4	204	7225	614125	52200625	17340	2,5664797	0,16648	0,0189023	2,9584
115	4,7	540,5	13225	1520875	174900625	62157,5	4,6205957	-0,0794	0,0117502	0,3364
105	4,2	441	11025	1157625	121550625	46305	4,3306546	0,420596	0,1533518	0,0084
100	3,8	380	10000	1000000	100000000	38000	4,0376475	0,237647	0,0435362	0,1024
110	4,5	495	12100	1331000	146410000	54450	4,5249707	0,024971	1,619E-05	0,1444
96	4,1	393,6	9216	884736	84934656	37785,6	3,7321842	-0,36782	0,1574581	0,0004
107	4,2	449,4	11449	1225043	131079601	48085,8	4,420224	0,220224	0,0365689	0,0084
összeg										
1054	41,2	4403,5	112256	12074140	1310730788	474908		0,289941	0,5622356	4,176
xatlag	yatlag	xyatlag	x ² atlag	x ³ atlag	x ⁴ atlag	x ² yatlag		deltaatlag	Sy ²	sy ²
105,4	4,12	440,35	11225,6	1207414	131073079	47490,8		0,028994	0,0562236	0,4176
11225,6	105,4	1								
1207414	11225,6	105,4	-1695969			eta ² =	0,865365			
131073079	1207414	11226				eta=	0,93025			
4,12	105,4	1								
440,35	11225,6	105,4	3347,54	a=						
47490,79	1207414	11226		-0,00197						
11225,6	4,12	1				11225,6	105,4	4,12		
1207414	440,35	105,4	-785631,8	b=		1207414	11225,6	440,35	38240061	c=
131073079	47490,79	11226		0,463235		1,3E+08	1207414	47490,79		-22,547618

2. Táblázat. Másodfokú függvénnyel való approximáció és a korrelációs együttható kiszámítása.

17. Irodalom

Itt néhány olyan könyvet sorolunk fel, amelyet a hallgatóság haszonnal olvashat.

1. Reiman István: Matematika, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1992. 607 oldal
2. Krekó Béla és még sokan: Matematika, a Kereskedelmi és Vendéglátóipari Főiskola tankönyve, Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó, Budapest, I kötet 1970. 480 oldal, a II. kötet 1971. 362 oldal.
3. Demetrovics Jónos - Jordan Denev - Radiszlav Pavlov: A számítástudomány matematikai alapjai, Tankönyvkiadó, Budapest, 1985. 374 oldal.
4. Gimnáziumi tankönyvek, különösképpen a speciális matematikai osztályok számára írt könyvek.
5. Sain Márton: Nincs királyi út! Matematikatörténet, Gondolat, Budapest, 1986. 831 oldal.
6. Matematikai Kislexikon, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1972. 443 oldal.

Ez nem kötelező irodalom, csak azt mutatja, hogy a matematika tovább is tart még, és akkor annak a kevésnek a tanulásához, ami e könyvecskében van, jobb kedvvel látnak hozzá, jobban megbecsülik.

Tartalom

Előszó.....	5
1. Axióma, definíció, tétel, bizonyítás.....	7
Axiómák	8
Definíció	9
Tétel, bizonyítás	11
2. Halmazok.....	16
A halmazok közötti kapcsolatok:	17
Halmazok számossága	19
3. A matematikai logika elemei.....	26
4. Számfajták, komplex számok.....	31
5. Formális nyelvek és automaták.....	37
Ábécék, szavak, formális nyelvek	37
Generatív grammatikák	37
A nyelvek Chomsky -féle osztályozása:	39
Automaták.....	41
A formális nyelvek felismerői, véges automaták	43
Turing-gép.....	46
6. Determinánsok.....	47
Determináns definíciója, tulajdonságai:	47
Cramer szabály	51
A Gauss-féle elimináció.....	52
Lineáris egyenlőtlenség rendszerek, lineáris programozás	54
7. Mátrixok.....	56
Mátrixok és a lineáris egyenletrendszerek	57
Egység mátrix	58
Mátrix inverze.....	58
Vektorok, skaláris szorzat, lineáris függetlenség, többdimenziós tér ..	63
Többdimenziós tér	64
8. Sorozatok és sorok.....	66
A végtelen sorozatokkal kapcsolatos általános fogalmak	67
Nevezetes számok: $\sqrt{2}$, π , e	71
Végtelen sorok.....	74
9. Függvénytani alapfogalmak.....	77
10. Differenciálszámítás.....	86
Deriválási szabályok:	88
Összetett függvény deriválása.....	90
Feladatok.....	91
Függvénytörések.....	93
11. Integrálszámítás.....	95
A primitív függvény	95

Határozott integrál.....	96
Newton-Leibnitz formula.....	98
Forgástest térfogata	101
12. Numerikus módszerek.....	103
Egyenletek gyöke.....	103
Numerikus integrál	104
13. Kombinatorika.....	106
Permutációk	106
Variációk	107
Kombinációk	110
14. Valószínűségszámítás.....	112
Előkészítő fogalmak, eseményalgebra	113
A valószínűség klasszikus kiszámítási módja	116
Mintavételek.....	119
Geometriai valószínűség	121
Valószínűségi változó és eloszlásfüggvénye	123
A nagy számok törvénye	125
14. A matematikai statisztika elemei.....	128
Egyméretű eloszlások.....	128
Középértékek	130
Az aritmetikai átlag	130
Az aritmetikai átlag néhány tulajdonsága	131
Szórás	133
Mértani vagy geometriai átlag.....	133
Egyéb átlagok:.....	134
Momentumok:	135
Módusz és medián.....	135
16. Regressziós analízis.....	136
A Gauss-féle normálegyenletek	137
Korrelációs együttható.....	144
17. Irodalom.....	149