On the Derived Length of Lie Solvable Group Algebras

Doktori (PhD) értekezés tézisei

Juhász Tibor

Debreceni Egyetem
Természettudományi Kar
Debrecen, 2006.

1 Introduction

The investigation of the Lie properties of group algebras as a special polinomial identity was started after the description of group algebras satisfying a polinomial identity, but the invention of the relation between the property of unit group and the associated Lie algebra of group algebras led to an extended intensity of the observation in the '80s. Under general conditions it is not easy even to decide whether an element is a unit or not, so to determine of its inverse would be extremely difficult, such as the computation of the group commutators. However, the so-called Lie commutators can be calculated without the knowledge of the elements' inverses. Considering the results connected to the series which are constructed with the help of Lie commutators we can have conclusions for the corresponding series of the group of units, for example, derived series, upper and lower central series, etc. This method was first applied by A.A. Bódi and I.I. Khripta [4]. Furthermore, Lie methods were used by C. Bagiński [1] and J. Kurdics [9, 10] for the investigation of the derived length, the nilpotency class and the Engel length of the group of units. For additional results on the Lie structure of group algebras we refer the reader to the articles [2, 5, 6, 7, 8, 11, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24].

In this thesis we investigate the Lie derived length and the upper Lie nilpotency index of group algebras. Before we present the new results we give a short survey of the basic concepts and notations.

2 Basic facts and notations

Let G be a group and F a field. By the *group algebra* of G over F, which we write as FG, we mean the set of all the formal sums $\sum_{g\in G}\alpha_g g$, where only finitely many coefficients $\alpha_g \in F$ are nonzero, and the group elements are considered to be linearly independent over F, addition is in the natural way, and multiplication is by use of the distributive laws and the calculation $g_i g_j$ $(g_i, g_j \in G)$ according to the product in G. In the special case when F is a field of characteristic $\mathrm{char}(F) = p$ and G contains an element of order p, FG is called *modular group algebra*.

Evidently, the set

$$\omega(FG) = \Big\{\sum_{g\in G}\alpha_g g \mid \sum_{g\in G}\alpha_g = 0\Big\}$$

is a two-sided ideal of FG, which is said to be the *augmentation ideal*. It is well-known that $\omega(FG)$ is nilpotent if and only if G is a finite p-group and $\mathrm{char}(F) = p$. Denote by $t_N(G)$ the nilpotency index of $\omega(FG)$. For example, if $G = \langle a_1 \rangle \times \cdots \times \langle a_n \rangle$ and the order of a_i is p^{m_i}, then $t_N(G) = 1 + \sum_{i=1}^{n}(p^{m_i} - 1)$.

For any normal subgroup H of G the set

$$\mathfrak{I}(H) = \{(h-1)x \mid h \in H,\ x \in FG\}$$

is a two-sided ideal of FG. Evidently, $\mathfrak{I}(H) = \omega(FH)FG$.

Our group theoretical notation is mostly standard: by $\gamma_n(G)$ we mean the n-th term of the lower central series of G; by G' the commutator subgroup of G (which coincides with $\gamma_2(G)$); by $C_G(H)$ the centralizer of the subset H in G; by C_n the cyclic group of order n.

The upper integral part of a real number r is denoted by $\lceil r \rceil$.

For $x, y \in FG$ the element $[x, y] = xy - yx$ will be called the *Lie commutator* of x and y. Let us introduce in FG the new operation $[x, y] = xy - yx$. Then FG is a Lie algebra with respect to the operations $+$ and $[\ ,\ ]$, which is said to be the *associated Lie algebra* of FG. For the sequence (x_i) of elements of FG we define the *left n-normed Lie commutator* by induction as

$$[x_1, x_2, \dots, x_n] = \big[[x_1, x_2, \dots, x_{n-1}], x_n\big].$$

3 Lie derived lengths of group algebras

Define the *Lie derived series* and the *strong Lie derived series* of the group algebra FG respectively, as follows: let $\delta^{[0]}(FG) = \delta^{(0)}(FG) = FG$ and

$$\delta^{[n+1]}(FG) = \big[\delta^{[n]}(FG), \delta^{[n]}(FG)\big],$$
$$\delta^{(n+1)}(FG) = \big[\delta^{(n)}(FG), \delta^{(n)}(FG)\big]FG.$$

We say that FG is *Lie solvable* if there exists $m \in \mathbb{N}$ such that $\delta^{[m]}(FG) = 0$ and the number $\mathrm{dl}_L(FG) = \min\{m \in \mathbb{N} \mid \delta^{[m]}(FG) = 0\}$ is called the *Lie derived length* of FG. Similarly, the group algebra FG is said to be *strongly Lie solvable* of derived length $\mathrm{dl}^L(FG) = m$ if $\delta^{(m)}(FG) = 0$ and $\delta^{(m-1)}(FG) \neq 0$.

According to the inclusion $\delta^{[n]}(FG) \subseteq \delta^{(n)}(FG)$, a strongly Lie solvable group algebra FG is Lie solvable too and $\mathrm{dl}_L(FG) \leq \mathrm{dl}^L(FG)$. It would be also interesting to know when the equality $\mathrm{dl}_L(FG) = \mathrm{dl}^L(FG)$ does hold, but this question is still open.

M. Sahai [16] proved the relation

$$\mathfrak{I}(G')^{2^n - 1} \subseteq \delta^{(n)}(FG) \subseteq \mathfrak{I}(G')^{2^{n-1}} \quad \text{for all } n > 0, \tag{1}$$

from which it follows that a group algebra FG is strongly Lie solvable if and only if either G is abelian or the ideal $\mathfrak{I}(G')$ is nilpotent, that is G' is a finite p-group and $\text{char}(F) = p$. The description of the Lie solvable group algebras is due to I.B.S. Passi, D.S. Passman and S.K. Sehgal [14]: a group algebra FG is Lie solvable if and only if one of the following conditions holds: (i) G is abelian; (ii) G' is a finite p-group and $\text{char}(F) = p$; (iii) G has a subgroup of index two whose commutator subgroup is a finite 2-group and $\text{char}(F) = 2$.

In general, we have very little information about the Lie derived length of group algebras. The first and, at the same time, the more significant results on this topic can be found in papers [19] and [21] of A. Shalev.

Throughout this part by FG we always mean a strongly Lie solvable group algebra.

From (1) it follows immediately that

$$\lceil \log_2(t_N(G') + 1) \rceil \leq \text{dl}^L(FG) \leq \lceil \log_2(2t_N(G')) \rceil$$

and so

$$\text{dl}_L(FG) \leq \lceil \log_2(2t_N(G')) \rceil.$$

Applying the method used A. Shalev in the proof of Lemma 2.2 in [19] we have that if G is nilpotent of class two, then

$$\text{dl}_L(FG) \leq \text{dl}^L(FG) = \lceil \log_2(t_N(G') + 1) \rceil.$$

In particular, if G is an abelian-by-cyclic p-group with $p > 2$ then

$$\text{dl}_L(FG) = \lceil \log_2(t_N(G') + 1) \rceil,$$

as it was stated in [21].

In the second chapter of this thesis we extend these results above to a larger class of groups. We obtain the following

Theorem. *Let G be a nilpotent group whose commutator subgroup is a finite p-group,* $\text{char}(F) = p$ *and assume that $\gamma_3(G) \subseteq (G')^p$. Then*

$$\text{dl}_L(FG) \leq \text{dl}^L(FG) = \lceil \log_2(t_N(G') + 1) \rceil,$$

and if G is an abelian-by-cyclic p-group with $p > 2$ then

$$\text{dl}_L(FG) = \text{dl}^L(FG) = \lceil \log_2 t_N(G') + 1 \rceil.$$

The investigation of the third chapter was motivated by the following result of A. Shalev [19]: if G is nilpotent of class two with cyclic commutator subgroup of order p^n, then $\text{dl}_L(FG) = \lceil \log_2(p^n + 1) \rceil$. We generalize this result and determine both the Lie derived length and the strong Lie derived length of group algebras in the case when the commutator subgroup of the basic group is cyclic of odd order. To present our result we need the series $\left(s_l^{(m)}\right)$ whose l-th member

$$s_l^{(m)} = \begin{cases} 1 & \text{if } \ l = 0; \\ 2s_{l-1}^{(m)} + 1 & \text{if } \ s_{l-1}^{(m)} \text{ is divisible by } \ 2^m; \\ 2s_{l-1}^{(m)} & \text{otherwise.} \end{cases}$$

Theorem. *Let G be a group with cyclic commutator subgroup of order p^n, where p is an odd prime, and let F be a field of characteristic p.*

(i) If $G/C_G(G')$ has order p^r (that is G is nilpotent), then

$$\mathrm{dl}_L(FG) = \mathrm{dl}^L(FG) = \lceil \log_2(p^n + 1) \rceil.$$

(ii) If the order of $G/C_G(G')$ is divisible by some odd prime $q \neq p$, then

$$\mathrm{dl}_L(FG) = \mathrm{dl}^L(FG) = \lceil \log_2(2p^n) \rceil.$$

(iii) If $G/C_G(G')$ has order $2^m p^r$ with $m > 0$, then

$$\mathrm{dl}_L(FG) = \mathrm{dl}^L(FG) = d + 1,$$

where d is the minimal integer for which $s_d^{(m)} \geq p^n$ holds.

In the fourth chapter we study the group algebras of characteristic two. If G is a nilpotent group with (not necessary cyclic) commutator subgroup of order 2^n, we obtain the description of the group algebras FG which have the highest possible value of $\mathrm{dl}_L(FG)$, namely, $n+1$.

Theorem. *Let G be a nilpotent group with commutator subgroup of order 2^n and let F be a field of characteristic two. Then $\mathrm{dl}_L(FG) = n+1$ if and only if one of the following conditions holds:*

(i) G' is the noncyclic group of order 4 and $\gamma_3(G) \neq 1$;

(ii) G' is cyclic of order less than 8;

(iii) G' is cyclic, $n \geq 3$ and G has nilpotency class at most n.

As a consequence, we get a necessary and sufficient condition for $\mathrm{dl}_L(FG)$ to coincide with $\mathrm{dl}^L(FG)$, provided that G' is cyclic.

Corollary. *Let G be a group with cyclic commutator subgroup of order p^n, and let F be a field of characteristic p. Then $\mathrm{dl}_L(FG) = \mathrm{dl}^L(FG)$ if and only if one of the following conditions is satisfied:*

(i) p *is odd;*

(ii) $p = 2$ *and* $n \leq 2$*;*

(iii) $p = 2$, $n \geq 3$ *and the nilpotency class of* G *is at most* n.

According to (1), if G is a nonabelian group and $\mathrm{char}(F) = p > 0$, then $\lceil \log_2(p+1) \rceil \leq \mathrm{dl}^L(FG)$. The characterization of the group algebras of minimal strong Lie derived length is also a consequence of our result.

Corollary. *Let FG be a strongly Lie solvable group algebra of characteristic $p > 0$. Then $\mathrm{dl}^L(FG) = \lceil \log_2(p+1) \rceil$ if and only if one of the following conditions holds:*

(i) $p = 2$ *and* G' *is central elementary abelian subgroup of order* 4*;*

(ii) G' *is of order* p *and*

- *a) either* G' *is central;*
- *b) or* $G/C_G(G')$ *has order* $2^m p^r$ *with* $m > 0, r \geq 0$*, and the minimal integer* d *such that* $s_d^{(m)} \geq p$*, satisfies the inequality* $2^d - 1 < p$.

In [11] F. Levin and G. Rosenberger described the group algebras with derived length two, moreover, it was also proved there that $\mathrm{dl}_L(FG) = 2$ if and only if $\mathrm{dl}^L(FG) = 2$. M. Sahai in [16] gave the complete list of the strongly Lie solvable group algebras of strong Lie derived length three for odd characteristic, and showed that the statements $\delta^{[3]}(FG) = 0$ and $\delta^{(3)}(FG) = 0$ are equivalent, provided that $\mathrm{char}(F) \geq 7$. All the other cases the question is still open. The characterization of the group algebras of Lie derived length three seems to be a difficult problem. A partial solution can be found in the fifth chapter.

Theorem. *Let G be a group with cyclic commutator subgroup of order p^n and let F be field of characteristic p. Then $\mathrm{dl}_L(FG) = 3$ if and only if one of the following conditions holds:*

(i) $p = 7$, $n = 1$ *and* G *is nilpotent;*

(ii) $p = 5$, $n = 1$ *and either* $x^g = x^{-1}$ *for all* $x \in G'$ *and* $g \notin C_G(G')$ *or* G *is nilpotent;*

(iii) $p = 3$, $n = 1$ *and* G *is not nilpotent;*

(iv) $p = 2$ *and one of the following conditions is satisfied:*

a) $n = 2$;

b) $n = 3$ *and* G *is of class* 4;

c) G *has an abelian subgroup of index two.*

We also proved the following theorems, which can give new information about the derived length in some cases.

Theorem. *Let* G *be a group and* $\mathrm{char}(F) = 2$. *If* H *is a subgroup of index two of* G *whose commutator subgroup* H' *is a finite* 2*-group, then*

$$\mathrm{dl}_L(FG) \leq \lceil \log_2 t(H') \rceil + 3.$$

Theorem. *Let* G *be a group with cyclic commutator subgroup of order* 2^n, $G_\beta = \{g \in G \mid x^g = x^{5^i}$ *for some* $i \in \mathbb{Z}\}$ *and let* $\mathrm{char}(F) = 2$. *Then* G_β *is a subgroup of index not greater than two and if* G'_β *has order* 2^r, *then*

$$r + 1 \leq \mathrm{dl}_L(FG) \leq r + 3.$$

Let G_i be a finite nonabelian 2-group of order 2^m and exponent 2^{m-2} from the list in [12]. The group algebras of this class of groups have been examined by several authors. Our results enable us to determine the derived length of FG_i over a field F of characteristic two. With the original notations of [12] we obtain that

$$\mathrm{dl}_L(FG_i) = \begin{cases} 2, & \text{if either } i \in \{2,3\} \text{ and } \ m = 4 \text{ or } i \in \{1,4,5,9,10\}; \\ 4, & \text{if } \quad i \in \{15,16,18,20,24,25\} \quad \text{and} \quad m > 5; \\ 3, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

4 Lie nilpotency indices of group algebras

In the sixth chapter we study the Lie nilpotency indices of Lie nilpotent group algebras. Let $(FG)^{[1]} = FG$ and for $n > 1$ let $(FG)^{[n]}$ be the ideal of FG generated by all the Lie commutators $[x_1, \ldots, x_n]$ with $x_1, \ldots, x_n \in FG$. Then the ideal $(FG)^{[n]}$ is the *n-th lower Lie power* and the series

$$FG = (FG)^{[1]} =\supseteq (FG)^{[2]} \supseteq \cdots \supseteq (FG)^{[n]} \supseteq \cdots$$

is called the *lower Lie power series* of the group algebra FG.

By induction, we define the *n-th upper Lie power* $(FG)^{(n)}$ of FG as the ideal generated by all the Lie commutators $[x, y]$, where $x \in (FG)^{(n-1)}$, $y \in FG$ and $(FG)^{(1)} = FG$. The series

$$FG = (FG)^{(1)} \supseteq (FG)^{(2)} \supseteq \cdots \supseteq (FG)^{(n)} \supseteq \cdots$$

is the *upper Lie power series* of FG.

The group algebra FG is called *Lie nilpotent* if there exists n such that $(FG)^{[n]} = 0$ and the least integer of this kind is called the *Lie nilpotency index* of FG and it is denoted by $t_L(FG)$. Similarly, FG is said to be *upper Lie nilpotent* and its *upper Lie nilpotency index* is $t^L(FG) = m$ if $(FG)^{(m)} = 0$ but $(FG)^{(m-1)} \neq 0$. For the noncommutative modular group algebra FG the next theorem from A.A. Bódi and I.I. Khripta [5] is well-known: The following statements are equivalent: (i) FG is Lie nilpotent; (ii) FG is upper Lie nilpotent; (iii) G is a nilpotent group whose commutator subgroup is a finite p-group and $\mathrm{char}(F) = p$.

According to [24], if FG is Lie nilpotent and G' has order p^n, then

$$t^L(FG) \leq p^n + 1.$$

A. Shalev in [17] began to study the question when a Lie nilpotent group algebra has the maximal upper Lie nilpotency index. The complete description of such group algebras was given by V. Bódi and E. Spinelli in [8]. Joining this research we determine the group algebras whose upper Lie nilpotency index is 'almost maximal', that is, it takes the next highest possible value, namely $p^n - p + 2$, where p^n is the order of the commutator subgroup of the basic group.

Theorem. *Let FG be a Lie nilpotent group algebra over a field F of positive characteristic p. Then FG has upper almost maximal Lie nilpotency index if and only if one of the following conditions holds:*

(i) $p = 2$, *G is of class* 2 *and* $G' = C_2 \times C_2$;

(ii) $p = 2$, *G is of class* 4, $G' = C_4 \times C_2$ *and* $\gamma_3(G) = C_2 \times C_2$;

(iii) $p = 2$, *G is of class* 4 *and* $G' = C_2 \times C_2 \times C_2$;

(iv) $p = 3$, *G is of class* 3 *and* $G' = C_3 \times C_3$.

Bevezetés

A csoportalgebra Lie-tulajdonságainak – mint speciális polinom azonosságoknak – a vizsgálata a polinom azonosságnak eleget tevő csoportalgebrák leírása után kezdődött, de annak intenzívvé válását a csoportalgebrák egységcsoportja és asszociált Lie-algebrája közötti összefüggések felfedezése eredményezte a '80-as években. A csoportkommutátorokkal ellentétben az úgynevezett Lie-kommutátorok az elemek inverzeinek ismerete nélkül számolhatók, és a segítségükkel felépített sorozatokra vonatkozó eredmények alapján következtetések vonhatók le az egységcsoport megfelelő sorozataira. Ezt a módszert először A.A Bódi és I.I. Khripta alkalmazták [4]-ben a feloldható egységcsoporttal rendelkező csoportalgebrák leírására. Az egységcsoport feloldható hosszával C. Baginski [1]; nilpotencia osztályával I.I. Khripta, A.A. Bódi és J. Kurdics; az egységcsoport Engel-hosszával J. Kurdics foglalkozott és jutott eredményre Lie-módszereket alkalmazva (l. [4, 6, 9, 10]). A csoportalgebra Lie-struktúrájával kapcsolatos eredmények találhatók az irodalomjegyzékben felsorolt dolgozatokban.

Az értekezés tárgya a csoportalgebrák Lie-feloldható hosszának és felső Lie-nilpotencia indexének a vizsgálata. Az eredmények ismertetése előtt tekinsük át az ehhez szükséges jelöléseket, definíciókat.

2 Alapfogalmak és jelölések

Legyen G egy csoport és F egy test. Jelölje FG az összes $\sum_{g\in G}\alpha_g g$ alakú formális összegek halmazát, ahol csak véges sok $\alpha_g \in F$ együttható nem nulla. Tekintsük a csoportelemeket lineárisan függetleneknek F felett, és értelmezzük FG-ben az összeadást a szokásos módon, a szorzást pedig a csoportszorzás disztributív kiterjesztésével. Ekkor FG algebra az F felett, melyet a G csoport F test feletti *csoportalgebrájának* nevezünk. Abban az esetben, ha az F test karakterisztikája $\mathrm{char}(F) = p$ és G tartalmaz p-rendű elemet, *moduláris csoportalgebráról* beszélünk.

Jelölje $\omega(FG)$ mindazon elemeit FG-nek, melyek $\sum_{g\in G}\alpha_g g$ alakú felírásában az α_g együtthatók összege nulla. Világos, hogy $\omega(FG)$ ideálja FG-nek, melyet a csoportalgebra *fundamentális ideáljának* nevezünk. Mint az jól ismert, $\omega(FG)$ pontosan akkor nilpotens, ha G véges p-csoport és az F test karakterisztikája p; ekkor a nilpotencia indexét $t_N(G)$-vel fogjuk jelölni. Például, ha $G = \langle a_1\rangle \times \cdots \times \langle a_n\rangle$ és a_i rendje p^{m_i}, akkor $t_N(G) = 1 + \sum_{i=1}^{n}(p^{m_i} - 1)$.

Legyen H normális részcsoportja a G-nek. Ekkor a

$$\{(h-1)x \mid h \in H,\ x \in FG\}$$

halmaz ideálja FG-nek, melyet $\mathfrak{I}(H)$-val fogunk jelölni. Világos, hogy $\mathfrak{I}(H) = \omega(FH)FG$.

A következő csoportelméleti jelöléseket használjuk: $\gamma_n(G)$ a G alsó centrállláncának n-edik tagja; $G' = \gamma_2(G)$ a kommutátor-részcsoportja; $C_G(H)$ pedig a G csoport H részhalmazának centralizátora G-ben; C_n az n-ed rendű ciklikus csoport. Jelölje továbbá $\lceil r \rceil$ az r valós szám felső egészrészét.

Az $[x, y] = xy - yx$ elemet, ahol $x, y \in FG$, az x és y *Lie-kommutátorának* nevezzük. Könnyen belátható, hogy ha FG-ben a szorzás helyett az $[x, y]$ műveletet tekintjük, akkor FG Lie-algebra az F test felett, melyet az FG *asszociált Lie-algebrájának* mondunk. Legyenek $X, Y \subseteq FG$. Ekkor $[X, Y]$ az $[x, y]$ Lie-kommutátorok által generált additív részcsoportot jelenti, ahol $x \in X$ és $y \in Y$. Az FG tetszőleges (x_i) sorozatára indukció segítségével értelmezzük az *n-ed rendű Lie-kommutátorokat*, úgymint

$$[x_1, x_2, \ldots, x_n] = \big[[x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}], x_n\big].$$

3 A csoportalgebra Lie-feloldható hossza

Legyen $\delta^{[0]}(FG) = \delta^{(0)}(FG) = FG$ és ha $n \geq 0$ akkor legyen

$$\delta^{[n+1]}(FG) = \big[\delta^{[n]}(FG), \delta^{[n]}(FG)\big],$$
$$\delta^{(n+1)}(FG) = \big[\delta^{(n)}(FG), \delta^{(n)}(FG)\big]FG.$$

A $\delta^{[n]}(FG)$ sorozatot az FG *Lie-derivált sorozatának*, míg a $\delta^{(n)}(FG)$ sorozatot FG *erős Lie-derivált sorozatának* nevezzük. Azt mondjuk, hogy FG *Lie-feloldható*, ha létezik olyan m természetes szám, hogy $\delta^{[m]}(FG) = 0$, és ekkor a $\mathrm{dl}_L(FG) = \min\{m \in \mathbb{N} : \delta^{[m]}(FG) = 0\}$ számot az FG *Lie-feloldható hosszának* nevezzük. Hasonlóan, ha $\delta^{(m)}(FG) = 0$ de $\delta^{(m-1)}(FG) \neq 0$, akkor FG *erősen Lie-feloldható*, melynek *erős Lie-feloldható hossza* $\mathrm{dl}^L(FG) = m$.

Világos, hogy $\delta^{[n]}(FG) \subseteq \delta^{(n)}(FG)$ bármely n esetén, ezért minden erősen Lie-feloldható csoportlagebra Lie-feloldható is és $\mathrm{dl}_L(FG) \leq \mathrm{dl}^L(FG)$. A kérdés, hogy mikor teljesül az egyenlőség néhány speciális esettől eltekintve nyitott.

M. Sahai [16] megmutatta, hogy minden pozitív n-re

$$\mathfrak{I}(G')^{2^n-1} \subseteq \delta^{(n)}(FG) \subseteq \mathfrak{I}(G')^{2^{n-1}} \tag{1}$$

teljesül. Ebből következik, hogy az FG csoportalgebra akkor és csak akkor erősen Lie-feloldható, ha vagy G Abel-csoport vagy $\mathfrak{I}(G')$ nilpotens ideál, azaz G' véges p-csoport és $\mathrm{char}(F) = p$. A Lie-feloldható csoportalgebrák leírása I.B.S. Passi, D.S. Passman és S.K. Sehgal [14] nevéhez fűződik: FG

pontosan akkor Lie-feloldható, ha a következő állítások egyike teljesül: (*i*) G Abel-csoport; (*ii*) G' véges p-csoport és $\mathrm{char}(F) = p$; (iii) G-nek van olyan kettő indexű részcsoportja, melynek kommutátor-részcsoportja véges 2-csoport és $\mathrm{char}(F) = 2$.

Általában nagyon kevés eredmény ismert a csoportalgebrák Lie-feloldható hosszáról. Az első és egyben az eddigi legjelentősebb eredmények A. Shalev [19] és [21] dolgozataiban találhatók.

Legyen a továbbiakban FG erősen Lie-feloldható csoportalgebra.

A (1) tartalmazás következménye, hogy

$$\lceil \log_2(t_N(G') + 1) \rceil \leq \mathrm{dl}^L(FG) \leq \lceil \log_2(2t_N(G')) \rceil$$

és így

$$\mathrm{dl}_L(FG) \leq \lceil \log_2(2t_N(G')) \rceil.$$

A. Shalev [19] dolgozatában szereplő 2.2. lemma bizonyításának módszerét követve kapjuk, hogy ha G nilpotens másodosztályú csoport, akkor

$$\mathrm{dl}_L(FG) \leq \mathrm{dl}^L(FG) = \lceil \log_2(t_N(G') + 1) \rceil.$$

Sőt, ha p páratlan prím és a G olyan p-csoport, amely egy Abel-csoport ciklikus csoporttal való bővítése, akkor

$$\mathrm{dl}_L(FG) = \lceil \log_2(t_N(G') + 1) \rceil.$$

Az értekezés második fejezetben megmutatjuk, hogy a fenti állítások a csoportalgebrák egy bővebb osztályára is érvényesek: G nilpotencia osztálya nem kell, hogy szügségképpen kettő legyen, elég ha a $\gamma_3(G) \subseteq (G')^p$ tartalmazás teljesül. Eredményünk a következő:

Tétel. *Legyen G nilpotens csoport, melynek kommutátor-részcsoportja véges p-csoport, és legyen F egy p karakterisztikájú test. Tegyük fel, hogy $\gamma_3(G) \subseteq (G')^p$. Ekkor*

$$\mathrm{dl}_L(FG) \leq \mathrm{dl}^L(FG) = \lceil \log_2(t_N(G') + 1) \rceil,$$

és speciálisan, ha p páratlan prím és a G olyan p-csoport, amely egy Abel-csoport ciklikus csoporttal való bővítése, akkor

$$\mathrm{dl}_L(FG) = \mathrm{dl}^L(FG) = \lceil \log_2 t_N(G') + 1 \rceil.$$

A harmadik fejezetben azon csoportalgebrák Lie-feloldható hosszát tanulmányozzuk, melyek alapcsoportjának kommutátor-részcsoportja ciklikus.

Vizsgálatainkat A. Shalev [19] következő állítása motiválta: ha G nilpotens másodosztályú csoport p^n rendű ciklikus kommutátor-részcsoporttal, akkor

$$\mathrm{dl}_L(FG) = \lceil \log_2(p^n + 1) \rceil.$$

Először megmutatjuk, hogy ha p páratlan, akkor a G nilpotencia osztályára vonatkozó feltevés nem szükséges. Ezt követően azzal az esettel foglalkozunk, amikor G nem nilpotens. Igazoljuk, hogy ekkor $\mathrm{dl}_L(FG)$ és $\mathrm{dl}^L(FG)$ értéke $\lceil \log_2(3p^n/2) \rceil$ és $\lceil \log_2(2p^n) \rceil$ között van. Mivel a $\lceil \log_2(3p^n/2) \rceil$ és $\lceil \log_2(2p^n) \rceil$ egészek különbsége legfeljebb egy, az egyenlőtlenség már „majdnem" egyértelműen meghatározza $\mathrm{dl}_L(FG)$ és $\mathrm{dl}^L(FG)$ értékeit. A pontos leírást a $G/C_G(G')$ faktorcsoport rendjének függvényében sikerült megkapni. Az eredmény ismertetéséhez szükségünk van az $(s_l^{(m)})$ sorozatra, melynek l-edik tagja

$$s_l^{(m)} = \begin{cases} 1 & \text{ha } \ l = 0; \\ 2s_{l-1}^{(m)} + 1 & \text{ha } \ s_{l-1}^{(m)} \text{ osztható } \ 2^m \text{ -nel;} \\ 2s_{l-1}^{(m)} & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Tétel. *Legyen G olyan csoport, melynek kommutátor-részcsoportja p^n rendű ciklikus csoport, ahol p páratlan prím, és legyen az F egy p karakterisztikájú test.*

(i) Ha a $G/C_G(G')$ csoport rendje p^r (azaz G nilpotens) akkor

$$\mathrm{dl}_L(FG) = \mathrm{dl}^L(FG) = \lceil \log_2(p^n + 1) \rceil.$$

(ii) Ha a $G/C_G(G')$ csoport rendjének van p-től különböző páratlan prímosztója, akkor

$$\mathrm{dl}_L(FG) = \mathrm{dl}^L(FG) = \lceil \log_2(2p^n) \rceil.$$

(iii) Ha a $G/C_G(G')$ csoport rendje $2^m p^r$ és $m > 0$, akkor

$$\mathrm{dl}_L(FG) = \mathrm{dl}^L(FG) = d + 1,$$

ahol d az a legkisebb egész szám, melyre $s_d^{(m)} \geq p^n$ teljesül.

A negyedik fejezetben a maximális Lie-feloldható hosszal rendelkező, kettő karakterisztikájú csoportalgebrákat vizsgáljuk. Igazoljuk a következő tételt:

Tétel. *Legyen a G nilpotens csoport, melynek kommutátor-részcsoportja 2^n rendű, és legyen F egy kettő karakterisztikájú test. Az FG csoportalgebra Lie-feloldható hossza pontosan akkor maximális, vagyis $n+1$, ha az alábbi állítások egyike teljesül.*

(i) G' negyedrendű elemi Abel-csoport és $\gamma_3(G) \neq 1$;

(ii) G' legfeljebb negyedrendű ciklikus csoport;

(iii) G' ciklikus, $n \geq 3$ és G nilpotencia osztálya legfeljebb n.

Az előző két tétel következményeként választ kapunk arra a kérdésre, hogy mikor teljesül a $\mathrm{dl}_L(FG) = \mathrm{dl}^L(FG)$ egyenlőség, abban az esetben, ha G' ciklikus csoport.

Következmény. *Legyen G olyan csoport, melynek kommutátor-részcsoportja p^n rendű ciklikus csoport, és legyen F egy p karakterisztikájú test. A $\mathrm{dl}_L(FG) = \mathrm{dl}^L(FG)$ egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha igaz a következő állítások egyike.*

(i) p páratlan;

(ii) $p = 2$ és $n \leq 2$;

(iii) $p = 2$, $n \geq 3$ és G nilpotencia osztálya legfeljebb n.

A (1) következménye, hogy az FG nemkommutatív, erősen Lie-feloldható csoportalgebrára érvényes a $\lceil \log_2(p+1) \rceil \leq \mathrm{dl}^L(FG)$ egyenlőtlenség, ahol $p > 0$ az F test karakterisztikája. Eddigi eredményeinkből megkapható azoknak a csoportalgebráknak a jellemzése, melyek erős Lie-feloldható hossza minimális, azaz éppen $\lceil \log_2(p+1) \rceil$.

Következmény. *Legyen FG egy erősen Lie-feloldható csoportalgebra, melynek karakterisztikája $p > 0$. A $\mathrm{dl}^L(FG) = \lceil \log_2(p+1) \rceil$ egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha igaz az alábbi állítások egyike:*

(i) $p = 2$ és G' centrális negyedrendű elemi Abel-csoport;

(ii) G' rendje p és

a) vagy G' centrális;

b) vagy a $G/C_G(G')$ fartorcsoport rendje $2^m p^r$, ahol $m > 0$, $r \geq 0$, és a legkisebb d egész szám, melyre $s_d^{(m)} \geq p^n$, eleget tesz a $2^d - 1 < p$ egyenlőtlenségnek.

Világos, hogy $\mathrm{dl}_L(FG)$ és $\mathrm{dl}^L(FG)$ pontosan akkor egyenlő eggyel, ha G Abel-csoport. A kettő Lie- illetve erős Lie-feloldható hosszal rendelkező csoportlagebrákat F. Levin és G. Rosenberger adták meg [11] dolgozatukban. Páratlan karakterisztika esetén M. Sahai [16] cikkében leírta azokat a csoportalgebrákat, melyek erős Lie-feloldható hossza három. Sőt, azt is megmutatta, hogy a $\delta^{[3]}(FG) = 0$ és a $\delta^{(3)}(FG) = 0$ állítások ekvivalensek, ha $\mathrm{char}(F) \geq 7$. A kérdés, hogy $\mathrm{dl}_L(FG)$ mikor három minden egyéb esetben nyitott. Válasz erre a következő tétel, abban az esetben, ha az alapcsoport kommutátor-részcsoportja ciklikus.

Tétel. *Legyen G olyan csoport melynek kommutátor-részcsoportja p^n rendű ciklikus csoport és legyen az F egy p karakterisztikájú test. Az FG csoportalgebra Lie-feloldható hossza akkor és csak akkor három ha a következő állítások valamelyike igaz.*

(i) $p = 7$, $n = 1$ *és G nilpotens;*

(ii) $p = 5$, $n = 1$ *és vagy G nilpotens vagy minden $x \in G'$ és $g \notin C_G(G')$ esetén $x^g = x^{-1}$;*

(iii) $p = 3$, $n = 1$ *és G nem nilpotens;*

(iv) $p = 2$ *és teljesül az alábbi állítások egyike:*

- *a)* $n = 2$;
- *b)* $n = 3$ *és G nilpotencia osztálya* 4;
- *c) G-nek van kettő indexű Abel-részcsoportja.*

Bizonyítottuk még a következő tételeket, melyek bizonyos esetben hasznosak lehetnek a Lie-feloldható hossz meghatározására.

Tétel. *Ha G-nek van olyan H kettő indexű részcsoportja, melynek kommutátor-részcsoportja véges 2-csoport, valamint az F test karakterisztikája kettő, akkor*

$$\mathrm{dl}_L(FG) \leq \lceil \log_2 t(H') \rceil + 3.$$

Tétel. *Legyen a G olyan csoport, melynek kommutátor-részcsoportja 2^n rendű ciklikus csoport, $G_\beta = \{g \in G \mid x^g = x^{5^i}$ valamely $i \in \mathbb{Z}$-re$\}$ és legyen az F egy kettő karakterisztikájú test. Ekkor G_β legfeljebb kettő indexű részcsoportja G-nek és ha a G'_β rendje 2^r, akkor*

$$r + 1 \leq \mathrm{dl}_L(FG) \leq r + 3.$$

A fejezet eredményeinek alkalmazásával végül meghatározzuk a 2^m rendű 2^{m-2} exponensű csoportok kettő karaktrisztikájú test feletti csoportalgebráinak Lie-feloldható hosszát. A szóban forgó csoportok leírása megtalálható a [12] dolgozatban, csoportalgebráikat már több szerző is vizsgálta. A [12] jelölését használva eredményünk a következő:

$$\mathrm{dl}_L(FG_i) = \begin{cases} 2, & \text{ha } i \in \{2,3\} \text{ és } \; m=4, \text{ vagy } i \in \{1,4,5,9,10\}; \\ 4, & \text{ha } \quad i \in \{15,16,18,20,24,25\} \quad \text{és} \quad m > 5; \\ 3, & \text{egyébként.} \end{cases}$$

4 A csoportalgebra Lie-nilpotencia indexe

A hatodik fejezetben egy másik Lie-tulajdonság vizsgálatára térünk át. Legyen $(FG)^{[1]} = FG$, és ha $n > 1$, akkor $(FG)^{[n]}$ az FG n-ed rendű Lie-kommutátorai által generált ideál, melyet a csoportalgebra *n-edik alsó Lie-hatványának* nevezzük. Az *FG n-edik felső Lie-hatványát* indukcióval definiáljuk: legyen $(FG)^{(1)} = FG$ és $FG^{(n)}$ az $[x, y]$ Lie-kommutátorokkal generált ideál, ahol $x \in (FG)^{(n-1)}$ és $y \in FG$.

Azt mondjuk, hogy *FG (alsó) Lie-nilpotens*, ha van olyan n természetes szám, melyre $(FG)^{[n]} = 0$. A legkisebb ilyen számot *FG alsó Lie-nilpotencia indexének* nevezzük, és $t_L(FG)$-vel jelöljük. Hasonlóan, *FG felső Lie-nilpotens*, melynek *felső Lie-nilpotencia indexe* $t^L(FG) = m$, ha $(FG)^{(m)} = 0$, de $(FG)^{(m-1)} \neq 0$. A.A. Bódi és I.I. Khripta [5] igazolták, hogy az FG nemkommutatív moduláris csoportalgebrában a következő állítások ekvivalensek: (i) FG Lie-nilpotens; (ii) FG felső Lie-nilpotens; (iii) G nilpotens csoport, melynek kommutátor-részcsoportja véges p-csoport és $\mathrm{char}(F) = p$.

Világos, hogy $(FG)^{[n]} \subseteq (FG)^{(n)}$ minden n esetén, így $t_L(FG) \leq t^L(FG)$. Sőt, A.K. Bhandari és I.B.S. Passi [2] megmutatták, hogy ha $\mathrm{char}(F) > 3$, akkor $t_L(FG) = t^L(FG)$; más esetben a kérdés nyitott.

Ha FG Lie-nilpotens csoportalgebra és G' rendje p^n, akkor [24] szerint

$$t_L(FG) \leq t^L(FG) \leq p^n + 1.$$

Azoknak a Lie-nilpotens csoportalgebráknak a tanulmányozását, melyek felső Lie-nilpotencia indexe maximális (azaz $p^n + 1$), A. Shalev kezdete meg [17] dolgozatában, teljes leírásukat azonban V. Bódi és E. Spinelli [8] adták meg. Ehhez kapcsolódva jellemezzük azokat a csoportalgebrákat, melyek felső Lie-nilpotencia indexe „majdnem” maximális, azaz a következő lehetséges legnagyobb érték, konkrétan $p^n - p + 2$, ahol p^n az alapcsoport kommutátor-részcsoportjának a rendje.

Tétel. *Legyen FG Lie-nilpotens csoportalgebra a pozitív p karakterisztikájú F test felett. Az FG felső Lie-nilpotencia indexe akkor és csak akkor majdnem maximális, azaz $p^n - p + 2$, ha az alábbi állítások egyike teljesül.*

(i) $p = 2$, *G nilpotencia osztálya* 2 *és* $G' = C_2 \times C_2$;

(ii) $p = 2$, *G nilpotencia osztálya* 4, $G' = C_4 \times C_2$ *és* $\gamma_3(G) = C_2 \times C_2$;

(iii) $p = 2$, *G nilpotencia osztálya* 4 *és* $G' = C_2 \times C_2 \times C_2$;

(iv) $p = 3$, *G nilpotencia osztálya* 3 *és* $G' = C_3 \times C_3$.

List of papers of the author

1. Juhász, T. On the derived length of Lie solvable group algebras. Publ. Math. Debrecen 68 (2006), no. 1-2, 243–256.

2. Bovdi, V.; Juhász, T.; Spinelli, E. Modular group algebras with almost maximal Lie nilpotency indices. Algebr. Represent. Theory 9 (2006), no. 3, 259-266.

3. Juhász, T. Rencent results on the derived length of Lie solvable group algebras. *to appear* in Acta Math. Acad. Paedagog. Nyházi. (N.S.) 22 (2006), no. 3.

4. Balogh, Zs.; Juhász, T. Lie derived lengths of group algebras of groups with cyclic derived subgroup. (submitted)

List of conference talks of the author

1. *The derived length of Lie soluble group algebras*, International Conference on Algebras, Modules and Group Rings, July 14 – 18, 2003, Lisbon, Portugal.

2. *A csoportalgebra Lie feloldható hossza*, Országos algebra szeminárium, MTA Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézet, 2004. április 26., Budapest.

3. *On the derived length of Lie solvable group algebras*, Groups and Group Rings XI, June 4 – 11, 2005, Bedlewo, Poland.

4. *On the derived length of Lie solvable group algebras*, Workshop on Lie algebras, their classification and applications, July 25 – 27, 2005, Trento, Italy.

References

[1] Bagiński, C. A note on the derived length of the unit group of a modular group algebra. Comm. Algebra 30 (2002), no. 10, 4905–4913.

[2] Bhandari, A. K.; Passi, I. B. S. Lie-nilpotency indices of group algebras. Bull. London Math. Soc. 24 (1992), no. 1, 68–70.

[3] Bovdi, A. A. Group algebras with an Engel group of units. J. Aust. Math. Soc. 80 (2006), no. 2, 173–178.

[4] Bovdi, A. A.; Khripta, I. I. Group algebras of periodic groups with solvable unit groups. Math. Zametki. 22 (1977) no. 3, 725–731.

[5] Bovdi, A. A.; Khripta, I. I. Generalized Lie nilpotent group rings. (Russian) Mat. Sb. (N.S.) 129(171) (1986), no. 1, 154–158, 160.

[6] Bovdi, A. A.; Kurdics, J. Lie properties of the group algebra and the nilpotency class of the group of units. J. Algebra 212 (1999), no. 1, 28–64.

[7] Bovdi, V. Modular group algebras with almost maximal Lie nilpotency indices. II. to appear in Scientiae Mathematicae Japonicae (SCMJ)

[8] Bovdi, V.; Spinelli, E. Modular group algebras with maximal Lie nilpotency indices. Publ. Math. Debrecen 65 (2004), no. 1-2, 243–252.

[9] Kurdics, J. Engel properties of group algebras. I. Publ. Math. Debrecen 49 (1996), no. 1-2, 183–192.

[10] Kurdics, J. Engel properties of group algebras. II. Ring theory (Miskolc, 1996). J. Pure Appl. Algebra 133 (1998), no. 1-2, 179–196.

[11] Levin, F.; Rosenberger, G. Lie metabelian group rings. Group and semigroup rings (Johannesburg, 1985), 153–161, North-Holland Math. Stud., 126, North-Holland, Amsterdam, 1986.

[12] Ninomiya, Y. Finite p-groups with cyclic subgroups of index p^2. Math. J. Okayama Univ. 36 (1994), 1–21 (1995).

[13] Passi, I. B. S. Group rings and their augmentation ideals. Lecture Notes in Mathematics, 715. Springer, Berlin, 1979. vi+137 pp.

[14] Passi, I. B. S.; Passman, D. S.; Sehgal, S. K. Lie solvable group rings. Canad. J. Math. 25 (1973), 748–757.

[15] Rossmanith, R. Lie centre-by-metabelian group algebras in even characteristic. I, II. Israel J. Math. 115 (2000), 51–75, 77–99.

[16] Sahai, M. Lie solvable group algebras of derived length three. Publ. Mat. 39 (1995), no. 2, 233–240.

[17] Shalev, A. Applications of dimension and Lie dimension subgroups to modular group algebras. Ring theory 1989 (Ramat Gan and Jerusalem, 1988/1989), 84–95, Israel Math. Conf. Proc., 1, Weizmann, Jerusalem, 1989.

[18] Shalev, A. Lie dimension subgroups, Lie nilpotency indices, and the exponent of the group of normalized units. J. London Math. Soc. (2) 43 (1991), no. 1, 23–36.

[19] Shalev, A. The derived length of Lie soluble group rings. I. J. Pure Appl. Algebra 78 (1992), no. 3, 291–300.

[20] Shalev, A. The nilpotency class of the unit group of a modular group algebra. III. Arch. Math. (Basel) 60 (1993), no. 2, 136–145.

[21] Shalev, A. The derived length of Lie soluble group rings. II. J. London Math. Soc. (2) 49 (1994), no. 1, 93–99.

[22] Sharma, R. K.; Srivastava, J. B. Lie ideals in group rings. J. Pure Appl. Algebra 63 (1990), no. 1, 67–80.

[23] Sharma, R. K.; Srivastava, J. B. Lie centrally metabelian group rings. J. Algebra 151 (1992), no. 2, 476–486.

[24] Sharma, R. K.; Bist, V. A note on Lie nilpotent group rings. Bull. Austral. Math. Soc. 45 (1992), no. 3, 503–506.