

DEBRECENI EGYETEM
MŰSZAKI KAR
MŰSZAKI ALAPTÁRGYI TANSZÉK

Dr. Szíki Gusztáv Áron
Szántó Attila

MÉRNÖKI FIZIKA



Debreceni Egyetemi Kiadó
Debrecen University Press

2019

Tartalomjegyzék

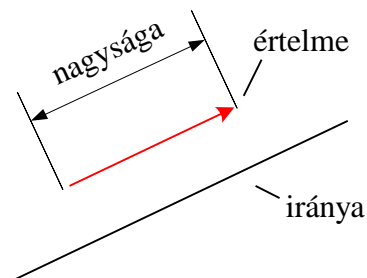
| | |
|---|----|
| 1. Matematikai bevezetés – Vektoralgebra..... | 4 |
| 1.1 A vektor fogalma..... | 4 |
| 1.2 A vektor leírása koordinátákkal | 4 |
| 1.3 Vektorműveletek..... | 5 |
| 2. Geometriai optika | 12 |
| 2.1 Fényvisszaverődés és fénytörés törvényei, a teljes visszaverődés jelensége..... | 12 |
| 2.2 Képpalkotás tükörrel és lencsékkel..... | 18 |
| 2.2.1 Síktükör képpalkotása..... | 18 |
| 2.2.2 Gömbtükör képpalkotása..... | 19 |
| 2.2.3 Lencsék képpalkotása | 22 |
| 3. A klasszikus mechanika alapjai | 28 |
| 3.1 Anyagi pont kinematikája..... | 29 |
| 3.1.1 Mozgásleírás skaláris mennyiségekkel | 29 |
| 3.1.1.1 Anyagi pont pálya menti sebessége és gyorsulása..... | 29 |
| 3.1.1.2 Egyenletes és egyenletesen változó mozgások | 32 |
| 3.1.2 Mozgásleírás vektormennyiségekkel..... | 36 |
| 3.1.2.1 Hely-idő függvény és vektoriális sebesség..... | 37 |
| 3.1.2.2 Vektoriális gyorsulás | 38 |
| 3.1.3 Speciális mozgások..... | 40 |
| 3.1.3.1 Mozgás állandó g gyorsulással..... | 40 |
| 3.1.3.2 Körmozgás..... | 44 |
| 3.2 Anyagi pont kinetikája | 49 |
| 3.2.1 Newton törvényei, erőtvények, anyagi pont egyensúlya..... | 49 |
| 3.2.1.1 Newton törvényei..... | 49 |
| 3.2.1.2 Erőtvények..... | 50 |
| 3.2.1.3 Anyagi pont egyensúlya..... | 56 |
| 3.2.2 Munka, energia, teljesítmény | 65 |
| 3.2.2.1 A munka fogalma..... | 65 |
| 3.2.2.2 Munkatétel..... | 67 |
| 3.2.2.3 A mechanikai energia-megmaradás tétele..... | 72 |
| 4. Elektrosztatika | 73 |
| 4.1 Elektromos térerősség fogalma és kiszámítása..... | 73 |
| 4.2 Elektromos feszültség és potenciál | 77 |
| 5. Transzportfolyamatok..... | 79 |

| | |
|---|-----|
| 5.1 Elektromos töltéstranszport állandósult állapotban – Elektromos egyenáram | 86 |
| 5.1.1 Elektromos egyenáram, Ohm törvénye..... | 86 |
| 5.1.2 Egyenáramú hálózatok, Kirchhoff törvényei | 89 |
| 5.2 Hőtranszport állandósult állapotban | 93 |
| 5.2.1 Hővezetés..... | 94 |
| 5.2.2 Hőátadás | 98 |
| 5.2.3 Hősugárzás..... | 101 |
| Irodalomjegyzék | 108 |

1. Matematikai bevezetés – Vektoralgebra

1.1 A vektor fogalma

A **vektor** egy irányított szakasz, amelyet nagyságával, irányával és értelmével jellemezünk. A szakasz hossza a vektor **nagysága**, **iránya** a vele párhuzamos egyenes, **értelmét** a szakasz végén található nyílhegy rögzíti.

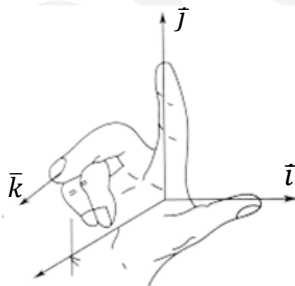


1. ábra. A vektor jellemzői

1.2 A vektor leírása koordinátákkal

A vektor leírásához bevezetjük az \bar{i} , \bar{j} , \bar{k} **bázisvektorokat** az alábbiak szerint:

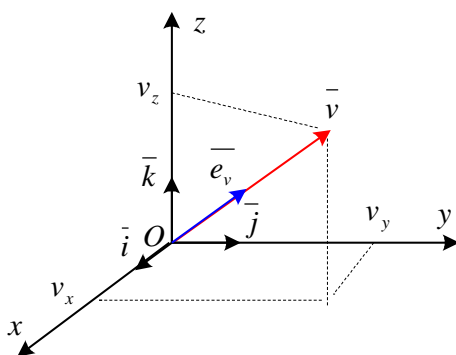
- \bar{i} , \bar{j} és \bar{k} egységvektorok: $|\bar{i}| = |\bar{j}| = |\bar{k}| = 1$
- \bar{i} , \bar{j} és \bar{k} páronként merőlegesek egymásra
- \bar{i} , \bar{j} és \bar{k} jobbsodrású rendszert alkotnak



2. ábra. Jobbsodrású rendszer

A \bar{v} vektor felírható az \bar{i} , \bar{j} , \bar{k} bázisvektorokkal az alábbiak szerint:

$$\bar{v} = v_x \cdot \bar{i} + v_y \cdot \bar{j} + v_z \cdot \bar{k} \quad (1.1)$$



3. ábra. A vektor koordinátái

Az 1.1 egyenletben v_x , v_y és v_z a \vec{v} vektor koordinátái. Oszlopvektoros jelöléssel:

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} \quad (1.2)$$

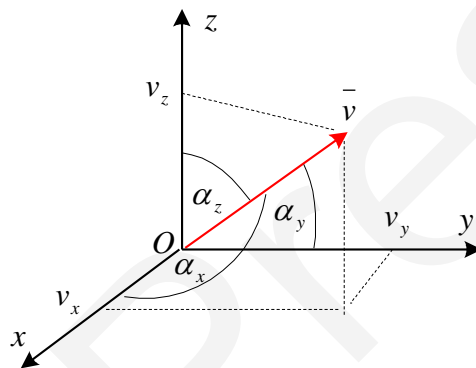
A vektor nagyságát a koordinátáiból az alábbiak szerint számíthatjuk:

$$|\vec{v}| = v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} \quad (1.3)$$

A \vec{v} vektor irányába mutató egységvektort az alábbi összefüggés értelmezi:

$$\vec{e}_v = \frac{\vec{v}}{v}$$

Jelöljük a \vec{v} vektor x , y és z koordinátatengelyekkel bezárt szögeit rendre α_x , α_y és α_z -vel:



4. ábra. A \vec{v} vektor koordinátatengelyekkel bezárt szögei

A $\cos \alpha_x$, $\cos \alpha_y$ és $\cos \alpha_z$ kifejezések értéke az alábbiak szerint számítható:

$$\cos \alpha_x = \frac{v_x}{v}, \quad \cos \alpha_y = \frac{v_y}{v}, \quad \cos \alpha_z = \frac{v_z}{v} \quad (1.4)$$

Az \vec{e}_v egységvektor felírható az \vec{i} , \vec{j} , \vec{k} bázisvektorokkal:

$$\vec{e}_v = \frac{\vec{v}}{v} = \frac{v_x \cdot \vec{i} + v_y \cdot \vec{j} + v_z \cdot \vec{k}}{v} = \cos \alpha_x \cdot \vec{i} + \cos \alpha_y \cdot \vec{j} + \cos \alpha_z \cdot \vec{k} \quad (1.5)$$

Az (1.3) és (1.5) egyenletek alapján:

$$|\vec{e}_v| = \sqrt{\cos^2 \alpha_x + \cos^2 \alpha_y + \cos^2 \alpha_z} = 1 \quad (1.6)$$

Az (1.6) egyenletből az alábbi azonosság adódik:

$$\cos^2 \alpha_x + \cos^2 \alpha_y + \cos^2 \alpha_z = 1 \quad (1.7)$$

1.3 Vektorműveletek

Vektorok összeadása

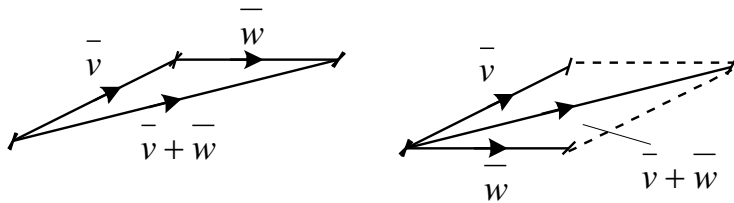
Számítással:

$$\begin{aligned} \vec{v} + \vec{w} &= (v_x \cdot \vec{i} + v_y \cdot \vec{j} + v_z \cdot \vec{k}) + (w_x \cdot \vec{i} + w_y \cdot \vec{j} + w_z \cdot \vec{k}) \\ &= (v_x + w_x) \cdot \vec{i} + (v_y + w_y) \cdot \vec{j} + (v_z + w_z) \cdot \vec{k} \end{aligned}$$

Oszlopvektoros alakban:

$$\vec{v} + \vec{w} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} w_x \\ w_y \\ w_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_x + w_x \\ v_y + w_y \\ v_z + w_z \end{pmatrix} \quad (1.8)$$

Szerkesztéssel:



Vektorok kivonása

Számítással:

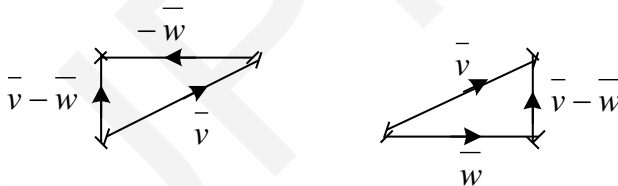
$$\begin{aligned} \vec{v} - \vec{w} &= (v_x \cdot \vec{i} + v_y \cdot \vec{j} + v_z \cdot \vec{k}) - (w_x \cdot \vec{i} + w_y \cdot \vec{j} + w_z \cdot \vec{k}) \\ &= (v_x - w_x) \cdot \vec{i} + (v_y - w_y) \cdot \vec{j} + (v_z - w_z) \cdot \vec{k} \end{aligned}$$

Oszlopvektoros alakban:

$$\vec{v} - \vec{w} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} w_x \\ w_y \\ w_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_x - w_x \\ v_y - w_y \\ v_z - w_z \end{pmatrix} \quad (1.9)$$

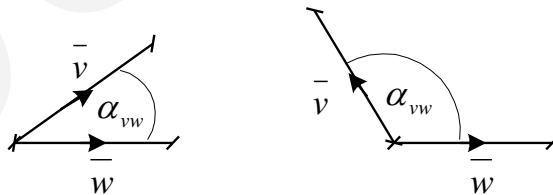
Szerkesztéssel:

Felhasználjuk, hogy $\vec{v} - \vec{w} = \vec{v} + (-\vec{w})$:



Vektorok szöge

Két vektor által bezárt szög 0° és 180° között változhat.



Vektorok skaláris szorzása

A \vec{v} és \vec{w} vektorok skaláris szorzatát az 1.10 összefüggés értelmezi:

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = |\vec{v}| \cdot |\vec{w}| \cdot \cos \alpha_{vw} \quad (1.10)$$

A fenti definícióból a következőket állapíthatjuk meg:

- Ha $0^\circ \leq \alpha_{vw} < 90^\circ$ akkor $0 < \vec{v} \cdot \vec{w}$
- Ha $\alpha_{vw} = 90^\circ$ akkor $\vec{v} \cdot \vec{w} = 0$
- Ha $90^\circ < \alpha_{vw} \leq 180^\circ$ akkor $\vec{v} \cdot \vec{w} < 0$

Skaláris szorzat kiszámítása a vektor koordinátáiból

1.1 tétel:

A \vec{v} és \vec{w} vektorok skaláris szorzata a vektorok koordinátáiból a következő összefüggéssel számítható:

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = v_x \cdot w_x + v_y \cdot w_y + v_z \cdot w_z \quad (1.11)$$

Bizonyítás:

$$\vec{i} \cdot \vec{j} = |\vec{i}| \cdot |\vec{j}| \cdot \overbrace{\cos 90^\circ}^0 = 0 \rightarrow \vec{i} \cdot \vec{k} = \vec{j} \cdot \vec{k} = 0$$

$$\vec{i} \cdot \vec{i} = \overbrace{|\vec{i}|}^1 \cdot \overbrace{|\vec{i}|}^1 \cdot \overbrace{\cos 0^\circ}^1 = 1 \rightarrow \vec{j} \cdot \vec{j} = \vec{k} \cdot \vec{k} = 1$$

$$\begin{aligned} \vec{v} \cdot \vec{w} &= (v_x \cdot \vec{i} + v_y \cdot \vec{j} + v_z \cdot \vec{k}) \cdot (w_x \cdot \vec{i} + w_y \cdot \vec{j} + w_z \cdot \vec{k}) = \\ &= v_x \cdot w_x \cdot \overbrace{\vec{i} \cdot \vec{i}}^1 + v_x \cdot w_y \cdot \overbrace{\vec{i} \cdot \vec{j}}^0 + v_x \cdot w_z \cdot \overbrace{\vec{i} \cdot \vec{k}}^0 + v_y \cdot w_x \cdot \overbrace{\vec{j} \cdot \vec{i}}^0 + v_y \cdot w_y \cdot \overbrace{\vec{j} \cdot \vec{j}}^1 \\ &+ v_y \cdot w_z \cdot \overbrace{\vec{j} \cdot \vec{k}}^0 + v_z \cdot w_x \cdot \overbrace{\vec{k} \cdot \vec{i}}^0 + v_z \cdot w_y \cdot \overbrace{\vec{k} \cdot \vec{j}}^0 + v_z \cdot w_z \cdot \overbrace{\vec{k} \cdot \vec{k}}^1 \\ &= v_x \cdot w_x + v_y \cdot w_y + v_z \cdot w_z \end{aligned}$$

Vektorok szögeinek kiszámítása a vektorok koordinátáiból

1.2 tétel:

A \vec{v} és \vec{w} vektorok által bezárt szög a következő összefüggéssel számítható:

$$\cos \alpha_{vw} = \frac{v_x \cdot w_x + v_y \cdot w_y + v_z \cdot w_z}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} \cdot \sqrt{w_x^2 + w_y^2 + w_z^2}}, \quad \text{ha } \vec{v} \neq \vec{0}, \vec{w} \neq \vec{0} \quad (1.12)$$

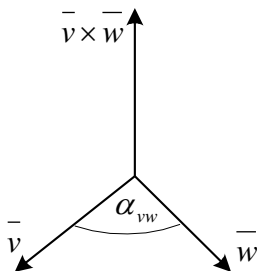
Bizonyítás:

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = |\vec{v}| \cdot |\vec{w}| \cdot \cos \alpha_{vw} \Rightarrow \cos \alpha_{vw} = \frac{\vec{v} \cdot \vec{w}}{|\vec{v}| \cdot |\vec{w}|} = \frac{v_x \cdot w_x + v_y \cdot w_y + v_z \cdot w_z}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} \cdot \sqrt{w_x^2 + w_y^2 + w_z^2}}$$

Vektorok vektoriális (kereszt) szorzata

A \vec{v} és \vec{w} vektorok vektoriális szorzata a $\vec{v} \times \vec{w}$ vektor, amelyet az alábbiak szerint értelmezünk:

- $|\vec{v} \times \vec{w}| = |\vec{v}| \cdot |\vec{w}| \cdot \sin \alpha_{vw}$
- $\vec{v} \times \vec{w}$ merőleges a \vec{v} és \vec{w} vektorok által meghatározott síkra
- \vec{v} , \vec{w} és $\vec{v} \times \vec{w}$ jobbsodrású rendszert alkotnak



5. ábra. A $\vec{v} \times \vec{w}$ vektor iránya és értelme

1.3 tétel: A vektoriális szorzás antikommutatív:

$$\vec{v} \times \vec{w} = -\vec{w} \times \vec{v}$$

Bizonyítás:

A fenti összefüggés a vektoriális szorzat definíciójából közvetlenül adódik.

1.4 tétel:

Ha a \vec{v} vektor párhuzamos a \vec{w} vektorral, akkor $\vec{v} \times \vec{w} = \vec{0}$.

Bizonyítás:

Ha \vec{v} vektor párhuzamos \vec{w} vektorral, akkor $\alpha_{vw} = 0^\circ$ vagy 180° .

$$\Rightarrow |\vec{v} \times \vec{w}| = |\vec{v}| \cdot |\vec{w}| \cdot \overbrace{\sin \alpha_{vw}}^0 = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{v} \times \vec{w} = \vec{0}$$

A vektoriális szorzat kiszámítása a vektorok koordinátáiból

1.5 tétel:

A vektoriális szorzat az alábbi összefüggéssel számítható a vektorok koordinátáiból:

$$\vec{v} \times \vec{w} = \begin{pmatrix} v_y \cdot w_z - v_z \cdot w_y \\ v_z \cdot w_x - v_x \cdot w_z \\ v_x \cdot w_y - v_y \cdot w_x \end{pmatrix} \quad (1.13)$$

Bizonyítás:

$$\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}, \quad \vec{i} \times \vec{k} = -\vec{j}, \quad \vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}$$

$$\vec{j} \times \vec{i} = -\vec{k}, \quad \vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}, \quad \vec{k} \times \vec{j} = -\vec{i} \quad (1.3 \text{ tétel szerint.})$$

$$\vec{i} \times \vec{i} = \vec{j} \times \vec{j} = \vec{k} \times \vec{k} = \vec{0} \quad (1.4 \text{ tétel szerint.})$$

$$\begin{aligned} \vec{v} \times \vec{w} &= (v_x \cdot \vec{i} + v_y \cdot \vec{j} + v_z \cdot \vec{k}) \times (w_x \cdot \vec{i} + w_y \cdot \vec{j} + w_z \cdot \vec{k}) = \\ &= v_x \cdot w_x \cdot \overbrace{\vec{i} \times \vec{i}}^0 + v_x \cdot w_y \cdot \overbrace{\vec{i} \times \vec{j}}^{\vec{k}} + v_x \cdot w_z \cdot \overbrace{\vec{i} \times \vec{k}}^{-\vec{j}} + v_y \cdot w_x \cdot \overbrace{\vec{j} \times \vec{i}}^{-\vec{k}} + v_y \cdot w_y \cdot \overbrace{\vec{j} \times \vec{j}}^0 \\ &+ v_y \cdot w_z \cdot \overbrace{\vec{j} \times \vec{k}}^{\vec{i}} + v_z \cdot w_x \cdot \overbrace{\vec{k} \times \vec{i}}^{\vec{j}} + v_z \cdot w_y \cdot \overbrace{\vec{k} \times \vec{j}}^{-\vec{i}} + v_z \cdot w_z \cdot \overbrace{\vec{k} \times \vec{k}}^0 \\ &= (v_y \cdot w_z - v_z \cdot w_y) \cdot \vec{i} + (v_z \cdot w_x - v_x \cdot w_z) \cdot \vec{j} + (v_x \cdot w_y - v_y \cdot w_x) \cdot \vec{k} \end{aligned}$$

Következtetésképp:

$$\vec{v} \times \vec{w} = \begin{pmatrix} v_y \cdot w_z - v_z \cdot w_y \\ v_z \cdot w_x - v_x \cdot w_z \\ v_x \cdot w_y - v_y \cdot w_x \end{pmatrix} \quad (1.14)$$

Eljárás a vektori szorzat kiszámítására

A vektoriális szorzat az 1.12. összefüggéssel számítható. Problémát jelent, hogy a fenti összefüggés nehezen megjegyezhető. Most bemutatunk egy eljárást, amelyre lényegesen könnyebb emlékezni, és amely hasonló a mátrixok determinánsának kifejtéséhez:

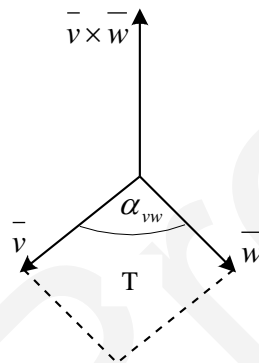
$$\begin{aligned}\bar{v} \times \bar{w} &= \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ v_x & v_y & v_z \\ w_x & w_y & w_z \end{vmatrix} = \bar{i} \cdot \begin{vmatrix} v_y & v_z \\ w_y & w_z \end{vmatrix} - \bar{j} \cdot \begin{vmatrix} v_x & v_z \\ w_x & w_z \end{vmatrix} + \bar{k} \cdot \begin{vmatrix} v_x & v_y \\ w_x & w_y \end{vmatrix} \\ &= \bar{i} \cdot (v_y \cdot w_z - v_z \cdot w_y) - \bar{j} \cdot (v_x \cdot w_z - v_z \cdot w_x) + \bar{k} \cdot (v_x \cdot w_y - v_y \cdot w_x) \\ &= \begin{pmatrix} v_y \cdot w_z - v_z \cdot w_y \\ v_z \cdot w_x - v_x \cdot w_z \\ v_x \cdot w_y - v_y \cdot w_x \end{pmatrix}\end{aligned}$$

A vektoriális szorzat nagyságának geometriai jelentése

1.6 tétel:

A \bar{v} és \bar{w} vektorok vektoriális szorzatának nagysága egyenlő az általuk kifeszített paralelogramma területével.

$$|\bar{v} \times \bar{w}| = T$$



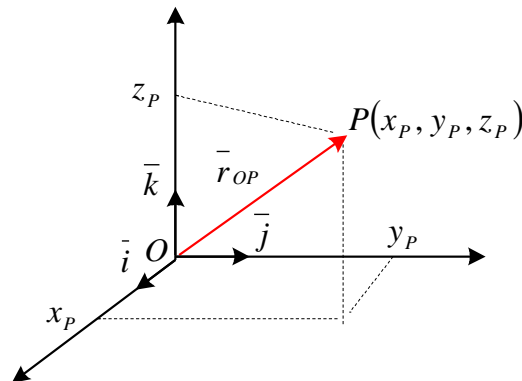
Bizonyítás:

Felírva a vektori szorzat nagyságát, és felhasználva a paralelogramma terület képletét:

$$|\bar{v} \times \bar{w}| = |\bar{v}| \cdot |\bar{w}| \cdot \sin \alpha_{vw} = T \quad (1.15)$$

Helyvektor

A P pont \bar{r}_{OP} helyvektora definíció szerint a koordinátarendszer kezdőpontjából a P pontba mutató vektor.



6. ábra. Helyvektor

$$\vec{r}_{OP} = x_P \cdot \vec{i} + y_P \cdot \vec{j} + z_P \cdot \vec{k},$$

Oszlopvektoros alakban:

$$\vec{r}_{OP} = \begin{pmatrix} x_P \\ y_P \\ z_P \end{pmatrix} \quad (1.16)$$

Számítási feladatok

1. feladat

Adott három vektor koordinátaival:

$$\vec{a} = 2,5 \cdot \vec{i} + 4,2 \cdot \vec{j} - 3 \cdot \vec{k}$$

$$\vec{b} = -3,5 \cdot \vec{i} + 5 \cdot \vec{j} + 6 \cdot \vec{k}$$

$$\vec{c} = 3,2 \cdot \vec{i} + 2 \cdot \vec{j} - 4,8 \cdot \vec{k}$$

- Számítsuk ki a $(\vec{a} - \vec{b}) \cdot \vec{c}$ vektort.
- Számítsuk ki a $\vec{a} \times \vec{b}$ és $\vec{b} \times \vec{a}$ vektorokat.
- Számítsuk ki azon \vec{e}_1 és \vec{e}_2 egységvektorokat, amelyek merőlegesek az \vec{a} és \vec{b} vektorok síkjára.
- Számítsa ki az \vec{e}_1 és \vec{c} vektorok által bezárt szöveget.

Megoldás:

a)

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2,5 \\ 4,2 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -3,5 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 3,2 \\ 2 \\ -4,8 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} (\vec{a} - \vec{b}) \cdot \vec{c} &= \left(\begin{pmatrix} 2,5 \\ 4,2 \\ -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3,5 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} 3,2 \\ 2 \\ -4,8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -0,8 \\ -9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3,2 \\ 2 \\ -4,8 \end{pmatrix} \\ &= 6 \cdot 3,2 + (-0,8) \cdot 2 + (-9) \cdot (-4,8) = 60,8 \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} \vec{a} \times \vec{b} &= \begin{pmatrix} 2,5 \\ 4,2 \\ -3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -3,5 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2,5 & 4,2 & -3 \\ -3,5 & 5 & 6 \end{vmatrix} \\ &= \vec{i} \cdot \begin{vmatrix} 4,2 & -3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} - \vec{j} \cdot \begin{vmatrix} 2,5 & -3 \\ -3,5 & 6 \end{vmatrix} + \vec{k} \cdot \begin{vmatrix} 2,5 & 4,2 \\ -3,5 & 5 \end{vmatrix} \\ &= \vec{i} \cdot (4,2 \cdot 6 - (-3 \cdot 5)) - \vec{j} \cdot (2,5 \cdot 6 - (-3 \cdot -3,5)) + \vec{k} \\ &\quad \cdot (2,5 \cdot 5 - (4,2 \cdot -3,5)) = 40,2 \cdot \vec{i} - 4,5 \cdot \vec{j} + 27,2 \cdot \vec{k} \end{aligned}$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} 40,2 \\ -4,5 \\ 27,2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{b} \times \vec{a} = -(\vec{a} \times \vec{b}) = \begin{pmatrix} -40,2 \\ 4,5 \\ -27,2 \end{pmatrix}$$

c)

$$\bar{e}_1 = \frac{\bar{a} \times \bar{b}}{|\bar{a} \times \bar{b}|} = \frac{\begin{pmatrix} 40,2 \\ -4,5 \\ 27,2 \end{pmatrix}}{\sqrt{(40,2)^2 + (-4,5)^2 + (27,2)^2}} = \frac{\begin{pmatrix} 40,2 \\ -4,5 \\ 27,2 \end{pmatrix}}{48,73} = \begin{pmatrix} 0,825 \\ -0,092 \\ 0,558 \end{pmatrix}$$

$$\bar{e}_2 = -\bar{e}_1 = \begin{pmatrix} -0,825 \\ 0,092 \\ -0,558 \end{pmatrix}$$

d)

$$\cos \alpha_{e_1 c} = \frac{\bar{e}_1 \cdot \bar{c}}{|\bar{e}_1| \cdot |\bar{c}|} = \frac{0,825 \cdot 3,2 + (-0,092 \cdot 2) + (0,558 \cdot -4,8)}{1 \cdot \sqrt{(3,2)^2 + (2)^2 + (-4,8)^2}} = -0,0367 \Rightarrow \alpha_{e_1 c} = 92,1^\circ$$

2. feladat

Két pont adott koordinátáival:

$A = (-2; 4; 8)$, $B = (4; -8; 4)$.

- Számítsuk ki az A és B pontok távolságát!
- Számítsuk ki az \vec{r}_{OA} és \vec{r}_{OB} vektorok által bezárt szöget!
- Számítsuk ki azt az egységvektort, amely merőleges az OAB síkra!

Megoldás:

Javasoljuk, hogy készítsen ábrát a megoldás előtt.

a)

$$\vec{r}_{OA} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix}, \vec{r}_{OB} = \begin{pmatrix} 4 \\ -8 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$d_{AB} = |\vec{r}_{AB}| = |\vec{r}_{OB} - \vec{r}_{OA}| = \left| \begin{pmatrix} 4 \\ -8 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} 6 \\ -12 \\ -4 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{(6)^2 + (-12)^2 + (-4)^2} = 14$$

b)

$$\cos \alpha_{AOB} = \frac{\vec{r}_{OA} \cdot \vec{r}_{OB}}{|\vec{r}_{OA}| \cdot |\vec{r}_{OB}|} = -0,089 \Rightarrow \alpha_{AOB} = 95,1^\circ$$

c)

$$\bar{e}_1 = \frac{\vec{r}_{OA} \times \vec{r}_{OB}}{|\vec{r}_{OA} \times \vec{r}_{OB}|} = \begin{pmatrix} 0,894 \\ 0,447 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\bar{e}_2 = -\bar{e}_1 = \begin{pmatrix} -0,894 \\ -0,447 \\ 0 \end{pmatrix}$$

3. feladat

Három pont adott koordinátáival:

$A = (3; 5; 0)$, $B = (0; -2; 3)$, $C = (-4; 0; 2)$

Számítsuk ki az ABC háromszög területét!

Megoldás:

Készítsünk ábrát a megoldás előtt.

$$\vec{r}_{OA} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{r}_{OB} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{r}_{OC} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{r}_{AB} = \vec{r}_{OB} - \vec{r}_{OA} = \begin{pmatrix} -3 \\ -7 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \vec{r}_{AC} = \vec{r}_{OC} - \vec{r}_{OA} = \begin{pmatrix} -7 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$T_{\Delta} = \frac{|\vec{r}_{AB}| \cdot |\vec{r}_{AC}| \cdot \sin \alpha_{BAC}}{2} = \frac{|\vec{r}_{AB} \times \vec{r}_{AC}|}{2} = 18,59$$

2. Geometriai optika

Az **optika** vagy **fénytan** a fizikának a fény és általában az elektromágneses hullámok terjedésével és közeghatáron való viselkedésével (fényvisszaverődés, fénytörés) foglalkozó tudományága. A fény kettős természetű, egyaránt mutat hullám és részecske tulajdonságot. A **geometriai optikában** eltekintünk a fény hullámtermészetétől, és a lényegesen egyszerűbb fénysugár modellt alkalmazzuk. A **fénysugár** egy ideálisan vékony párhuzamos fénynyaláb, amelyet egy irányított geometriai egyenessel modellezünk.

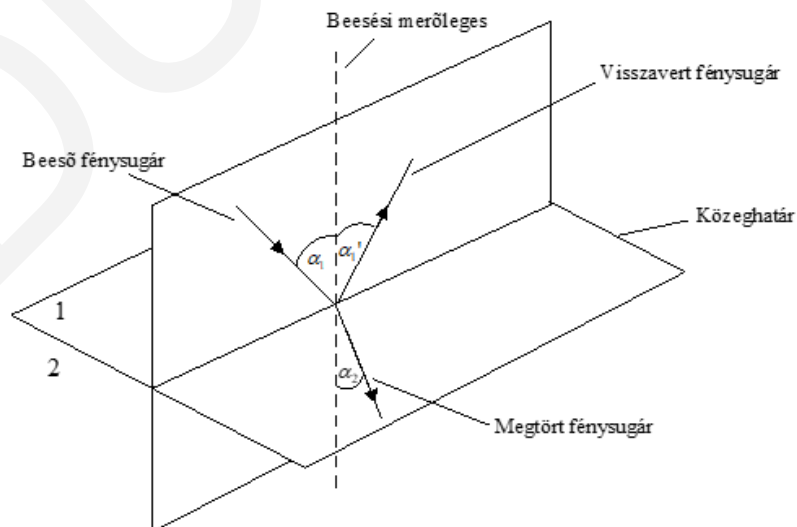
2.1 Fényvisszaverődés és fénytörés törvényei, a teljes visszaverődés jelensége

Amikor a fénysugár két optikailag eltérő tulajdonságú közeg határfelületéhez érkezik, akkor az alábbi folyamatok mehetnek végbe:

- Az első közegből érkező fénysugár részlegesen vagy teljes mértékben visszaverődik a közeghatárról.
- A fénysugár megtörik a közeghatáron és behatol a második közegbe.

A törvényeket az alábbi három pontban foglalhatjuk össze:

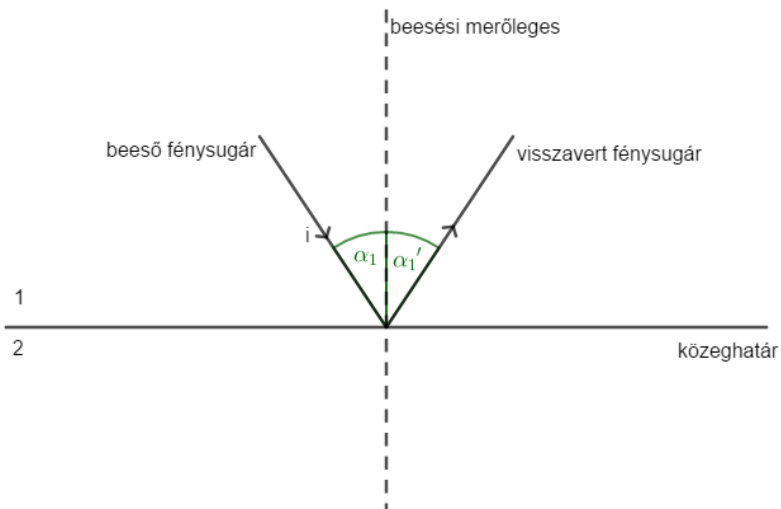
- A beeső, a visszavert és a megtört fénysugár, valamint a beesési merőleges egy síkba esnek.



7. ábra. Fénysugár viselkedése közeghatáron

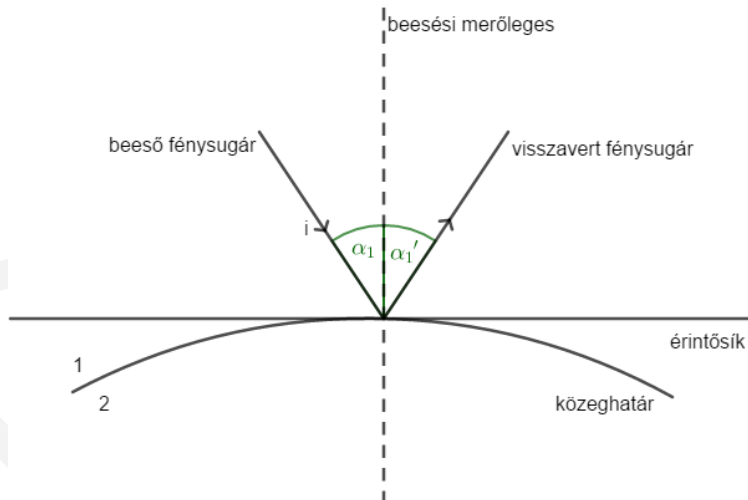
- A beesési és visszaverődési szögek egymással egyenlők (fényvisszaverődés törvénye)

$$\alpha_1 = \alpha_1' \quad (2.1)$$



8. ábra. Fénysugár visszaverődése sík közeghatárról

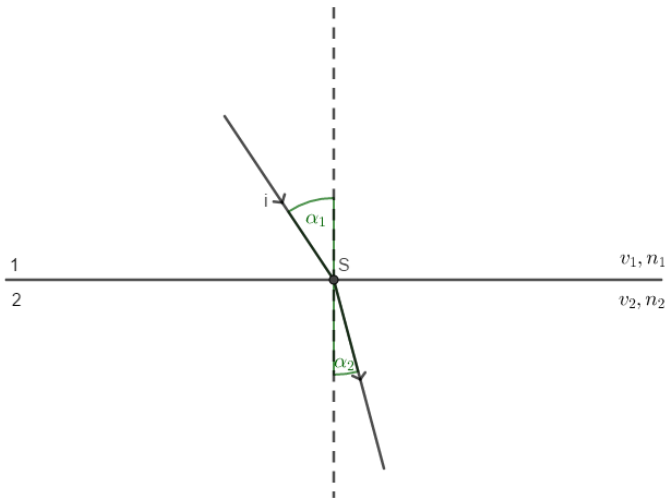
- Ha a közeghatár nem sík, hanem görbült felület, akkor a beesési merőleges a felület adott pontbeli érintősíkjára merőleges.



9. ábra. Fénysugár visszaverődése görbült közeghatárról

- A beesési és törési szög szinuszainak hányadosa megegyezik a fény egyes és kettős közegben mért terjedési sebességeinek hányadosával.

$$\frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} = \frac{v_1}{v_2} \quad (2.2)$$



10. ábra. Fénysugár törése közeghatáron

Optikai szempontból egy átlátszó közeget az abszolút törésmutatójával jellemezzük, amit a vákuumban mért (c), valamint az adott közegben vett (v) fénysebességek hányadosaként értelmezzük.

$$n = \frac{c}{v} \quad (2.3)$$

A fenti definícióból adódóan a vákuum abszolút törésmutatója 1.

$$n = \frac{c}{c} = 1 \quad (2.4)$$

Az alábbi táblázat néhány, optikai szempontból fontosabb közeg abszolút törésmutatóját mutatja.

| KÖZEG | TÖRÉSMUTATÓ (n) |
|----------------|---------------------|
| Vákuum | 1 |
| Levegő | 1,0003 |
| Víz | 1,33 |
| Üveg (korona) | 1,52 |
| Üveg (optikai) | 1,66 |

Különböző közegek abszolút törésmutatói

A nagyobb abszolút törésmutatójú közeget optikailag sűrűbbnek, míg a kisebbet optikailag ritkábbnak nevezzük. Szokás még értelmezni egy közegnek egy másik közegre vonatkozó relatív törésmutatóját. Például a kettes közeg egyes közegre vonatkozó relatív törésmutatója:

$$n_{2,1} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{\frac{c}{n_1}}{\frac{c}{n_2}} = \frac{n_2}{n_1} \quad (2.5)$$

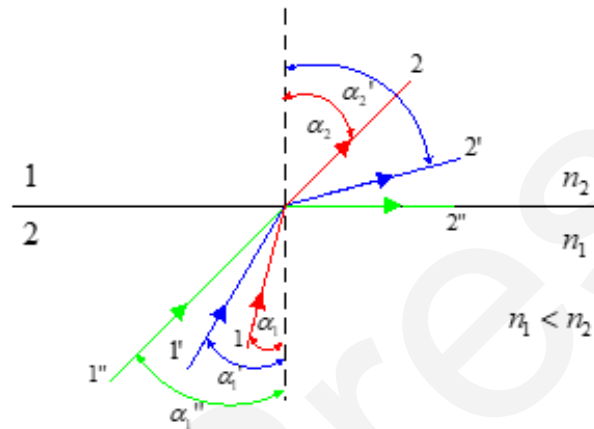
Azaz a relatív törésmutató az abszolút törésmutatók hányadosa a 2.5 összefüggés szerint. A relatív törésmutató felhasználásával a Snellius-Descartes törvény az alábbi formában írható:

$$\frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{n_2}{n_1} = n_{2,1} \quad (2.6)$$

Azaz a beesési és törési szög szinuszaik hányadosa megegyezik a kettes közeg egyes közegre vonatkozó relatív törésmutatójával.

Teljes visszaverődés jelensége

Érkezik a fénysugár egy optikailag ritkábból egy optikailag sűrűbb közegbe.



11. ábra. Teljes visszaverődés közegethatáron

Ahogy az ábráról leolvasható, az α_1 beesési szöget növelve az α_2 törési szög is növekszik. Egy $\alpha_{határ}$ beesési szögnél a törési szög eléri a 90° -os értéket, azaz a fénysugár nem hatol be a kettes közegbe. Az $\alpha_{határ}$ -nál nagyobb vagy azzal egyenlő beesési szögeknél a fénysugár teljes egészében visszaverődik a közegethatárról. Az $\alpha_{határ}$ szöveget a **teljes visszaverődés határszögének** nevezzük.

A határszög kiszámítása:

$$\frac{\sin \alpha_{határ}}{\sin 90^\circ} = \frac{n_2}{n_1} = n_{2,1} \quad (2.7)$$

Tehát:

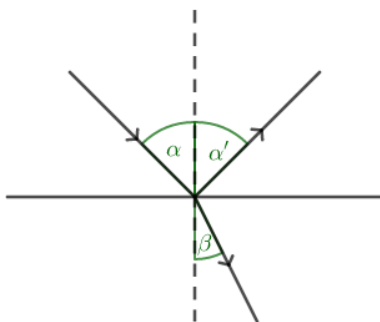
$$\sin \alpha_{határ} = n_{2,1} \Rightarrow \alpha_{határ} = \arcsin(n_{2,1}) \quad (2.8)$$

Feladatok

1. feladat

Egy víz alatt is használható optikai eszköz ablaka vastag kvarcüvegből készült síklap, amelyre egy vízből érkező fénysugár 45° fokos beesési szöggel érkezik.

Adatok: $n_{viz} = 1,33$, $n_{üveg} = 1,63$



- a) Mekkora a fénysugár visszaverődési szöge?
 b) Mekkora az üveglapba bejutó fénysugár törési szöge?

Megoldás:

- a) A visszaverődési szög egyenlő a beesési szöggel, tehát:

$$\alpha' = \alpha = 45^\circ$$

- b) Az üveg vízre vonatkozó relatív törésmutatója az abszolút törésmutatók hányadosa, azaz:

$$n_{\text{üveg,víz}} = \frac{n_{\text{üveg}}}{n_{\text{víz}}} = \frac{1,63}{1,33} = 1,226$$

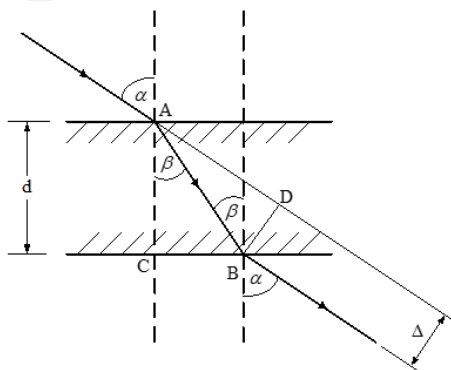
A Snellius-Descartes törvény alapján:

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = n_{\text{üveg,víz}} \Rightarrow \beta = \arcsin \frac{\sin \alpha}{n_{\text{üveg,víz}}} = \arcsin \frac{\sin 45^\circ}{1,226} = 35,22^\circ$$

2. feladat

Egy d vastagságú üveglapot vízbe helyezünk. A vízből érkező fénysugár α beesési szöggel érkezik.

Adatok: $n_{\text{víz}} = 1,33$, $n_{\text{üveg}} = 1,63$, $d = 10[\text{mm}]$, $\alpha = 60^\circ$



- a) Mekkora a fénysugár törési szöge az üveg túlsó oldalán?
 b) Mekkora az eltolódás a két fénysugár között?

Megoldás:

a) Az üveg vízre vonatkozó relatív törésmutatója:

$$n_{\text{üveg,víz}} = \frac{n_{\text{üveg}}}{n_{\text{víz}}} = \frac{1,63}{1,33} = 1,226$$

A Snellius-Descartes törvény alapján:

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = n_{\text{üveg,víz}} \Rightarrow \beta = \arcsin \frac{\sin \alpha}{n_{\text{üveg,víz}}} = \arcsin \frac{\sin 60^\circ}{1,226} = 44,94^\circ$$

Az üveg túlsó oldalához a fénysugár β beesési szöggel érkezik.

A víz üvegre vonatkozó relatív törésmutatója:

$$n_{\text{víz,üveg}} = \frac{n_{\text{víz}}}{n_{\text{üveg}}} = \frac{1,33}{1,63} = 0,816$$

A Snellius-Descartes törvény alapján:

$$\frac{\sin \beta}{\sin \gamma} = n_{\text{víz,üveg}} \Rightarrow \gamma = \arcsin \frac{\sin \beta}{n_{\text{víz,üveg}}} = \arcsin \frac{\sin 44,94^\circ}{0,816} = 60^\circ$$

Azaz a γ törési szög megegyezik a korábbi α beesési szöggel, ebből adódóan az üveglapra beérkező és onnan távozó fénysugarak párhuzamosak egymással.

b) ABC derékszögű háromszögben:

$$\frac{d}{AB} = \cos \beta \Rightarrow AB = \frac{d}{\cos \beta} = \frac{10}{\cos 44,94^\circ} = 14,13[\text{mm}]$$

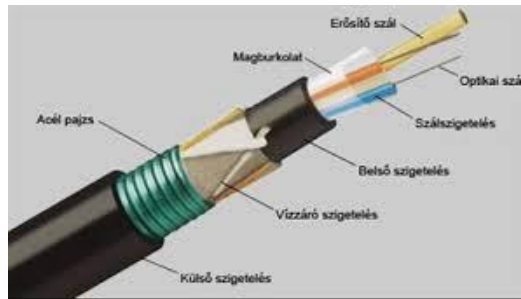
ABD derékszögű háromszögben az A csúcsnál lévő szög egyenlő $\alpha - \beta$ -val, így:

$$\frac{\Delta}{AB} = \sin(\alpha - \beta) \Rightarrow \Delta = AB \cdot \sin(\alpha - \beta) = 14,13 \cdot \sin(60^\circ - 44,94^\circ) = 3,67[\text{mm}]$$

Érdekességek

A teljes visszaverődés jelenségének egy fontos műszaki alkalmazása az optikai szál. Az optikai szál egy igen tiszta, néhány tíz (a technológia megjelenése idején még néhány száz) mikrométer átmérőjű üvegszálból és az ezt körülvevő, kisebb optikai törésmutatójú héjból álló vezeték. Működési elve a fénysugár teljes visszaverődésén alapul: A fénykábel egyik végén belépő fénysugár a vezeték teljes hosszán többszöri teljes visszaverődést szenved el, így a vezeték hajlítása esetén is – minimális energiavesztéssel – a szál másik végén fog kilépni.

Ezt a tulajdonságot kihasználva az optikai szálak rendkívül alkalmasak digitális információ-továbbításra. A fénysugárnak köszönhetően hatékonyabbak, mint a hagyományos rézvezetőjű csavart érpáras UTP-kábelek. A telekommunikációban jóformán minden hosszútávú gerinchálózat optikai kábeleket használ az adattovábbításra hatékonysága, valamint nagy távolságokon az egységnyi sávzélességre jutó jóval alacsonyabb fajlagos költségei miatt. [https://hu.wikipedia.org/wiki/Optikai_sz%C3%A1l] Az alábbi ábra egy optikai szál felépítését szemlélteti:



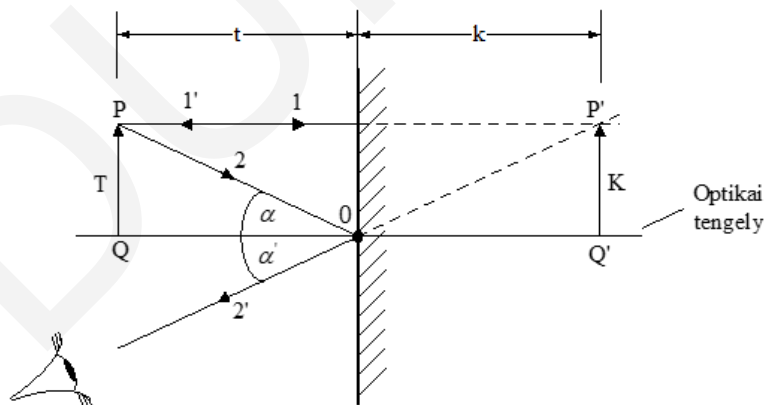
12. ábra. Az optikai szál felépítése

2.2 Képkötés tükrökkel és lencsékkel

Egy optikai eszköz egy tárgyról alkothat **valódi** és **látszólagos (virtuális)** képet. A valódi kép esetében a tárgy egy adott pontjáról (P) érkező széttartó fénysugarat az optikai eszköz újra egy pontba gyűjti össze (P'). A P' pont ekkor a P pont valódi képe. A valódi kép egy ernyőn felfogható. Virtuális kép esetében a tárgyponttól (P) érkező széttartó fénysugarak az optikai eszköz után is széttartóak maradnak. A széttartó fénysugarak a szemünkbe jutnak, és a szem, mint optikai eszköz leképezi őket az ideghártyára. (Ekkor valódi kép csak az ideghártyán keletkezik.) A szemünk a tárgypont képét ott érzékeli, ahol a szemünkbe érkező széttartó sugarak optikai eszköz mögötti meghosszabbításai metszik egymást (P'). A P' a P pont virtuális képe.

2.2.1 Síktükör képkötése

Az alábbi ábrán megszerkesztettük egy tárgy (T) síktükör által alkotott képét (K).



13. ábra. Síktükör képkötése

A fényvisszaverődés törvénye szerint, az optikai tengellyel párhuzamos fénysugár önmagába verődik vissza, míg az optikai középpontba (O) beeső és onnan visszavert sugár optikai tengellyel bezárt szögei egymással egyenlők ($\alpha' = \alpha$). Az ábrán látható, hogy síktükör esetében a kép virtuális. Felhasználva, hogy

a $OPQ\Delta$ háromszög hasonló a $OP'Q'\Delta$ háromszöghöz, a **nagyítás** is kiszámítható az alábbiak szerint:

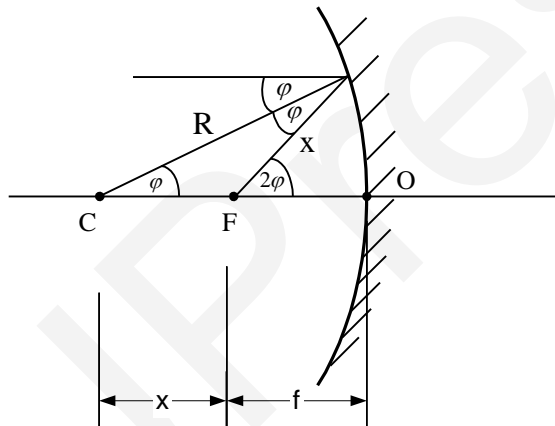
$$N = \frac{K}{T} = \left| \frac{k}{t} \right| = 1 \quad (2.9)$$

A nagyítás a képnagyság és a tárgynagyság hányadosaként értelmezzük. A tárgy távolság mindig pozitív mennyiségként értelmezett, míg valós kép esetén a képtávolság pozitív, látszólagos kép esetén pedig negatív előjelet kap, ezért szükséges a 2.9 egyenletben az abszolút érték jel.

2.2.2 Gömbtükör képalkotása

Homorú gömbtükör

A homorú gömbtükör az optikai tengellyel párhuzamos fénysugarakat közelítőleg egy pontban, a fókuszpontban (F) gyűjti össze. A közelítés annál pontosabb minél kisebb a tükör félnyílásszöge (φ).



14. ábra. Homorú gömbtükör geometriai jellemzői és fókuszpontja

Feltételezve, hogy a φ félnyílásszög kicsi, ($\varphi < 10^\circ$) a fókuszpont már ténylegesen egy geometriai pontnak tekinthető. Határozzuk meg ekkor a fókuszpont görbületi középponttól (C) mért távolságát (x)! A $CFA\Delta$ háromszögben a szinusztételt alkalmazva:

$$\frac{x}{R} = \frac{\sin \varphi}{\sin(180^\circ - 2\varphi)} \Rightarrow x = R \cdot \frac{\sin \varphi}{\sin(180^\circ - 2\varphi)} \quad (2.10)$$

felhasználva, hogy

$$\sin(180^\circ - 2\varphi) = \sin(2\varphi) \quad (2.11)$$

$$x = R \cdot \frac{\sin \varphi}{\sin(2\varphi)} \quad (2.12)$$

Ha $\varphi \leq 10^\circ$, akkor $\sin \varphi \approx \varphi$, tehát:

$$x \approx R \cdot \frac{\varphi}{2\varphi} = \frac{R}{2} \quad (2.13)$$

Azaz a fókuszpont távolság:

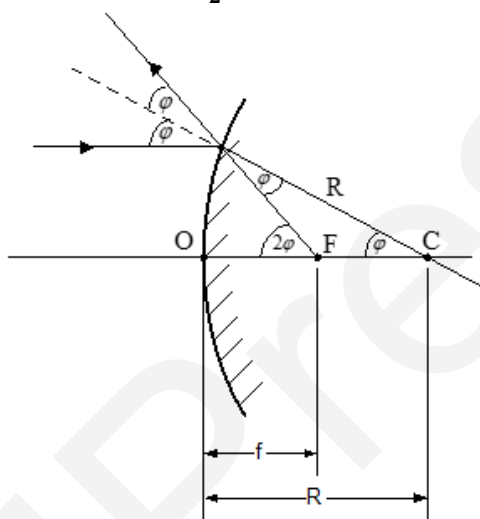
$$f = R - x \approx R - \frac{R}{2} = \frac{R}{2} \quad (2.14)$$

A továbbiakban feltételezzük, hogy a tükör félnyílásszögére teljesül, hogy $\varphi \leq 10^\circ$, így a fókusz távolság a görbületi sugár fele.

Domború gömbtükör

A domború gömbtükör az optikai tengellyel párhuzamosan érkező sugárnyalábot széttartóvá teszi. A visszavert sugarak tükör mögötti meghosszabbításai azonban közelítőleg egy pontban, a fókuszpontban (F) metszik egymást. Ha a tükör félnyílásszöge kisebb, mint 10° , akkor a fókuszpont egy geometriai pontnak tekinthető, amelynek optikai középponttól mért távolsága:

$$f = \frac{R}{2} \quad (2.15)$$

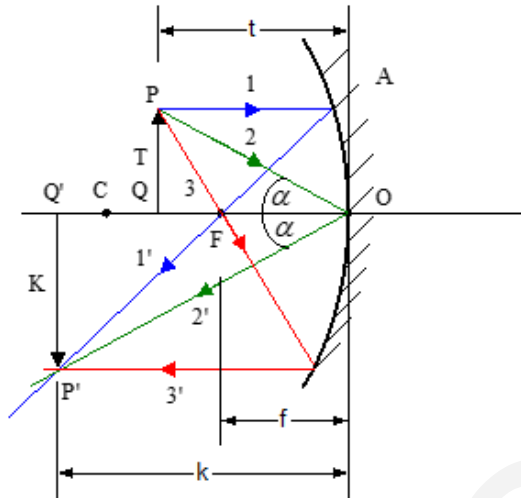


15. ábra. Domború gömbtükör fókuszpontja

Gömbtükör leképezési törvénye:

Szerkesszük meg a homorú gömbtükör egy tárgytól (T) alkotott képét (K)! A szerkesztéshez szükségünk lesz a nevezetes sugármenetekre. Ezek az alábbiak (16. ábra):

- Az optikai tengellyel párhuzamos fénysugár (1) a fókuszponton (F) keresztül verődik vissza.
- Az optikai középpontba (O) beeső fénysugár (2) az optikai tengelyre szimmetrikusan verődik vissza.
- A fókuszponton (F) keresztül érkező fénysugár (3) az optikai tengellyel párhuzamosan verődik vissza.



16. ábra. Homorú gömbtükör nevezetes sugármenetei

Az $FQ'P'\Delta$ és az $FOA\Delta$ háromszögek hasonlóak, tehát:

$$\frac{K}{T} = \frac{k-f}{f} \quad (2.16)$$

Az $OP'Q'\Delta$ és az $OPQ\Delta$ háromszögek hasonlóak, tehát:

$$\frac{K}{T} = \frac{k}{f} \quad (2.17)$$

A két egyenletet összevetve:

$$\frac{k}{t} = \frac{k-f}{f} = \frac{k}{f} - 1 \quad (2.18)$$

Mindkét oldalt osztva k-val:

$$\frac{1}{t} = \frac{1}{f} - \frac{1}{k} \quad (2.19)$$

Tehát:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{t} + \frac{1}{k} \quad (2.20)$$

A fenti összefüggés a gömbtükör **leképezési törvénye**.

Homorú gömbtükör esetén a leképezési törvény alkalmazásánál az alábbi **előjelszabályokat** kell figyelembe venni:

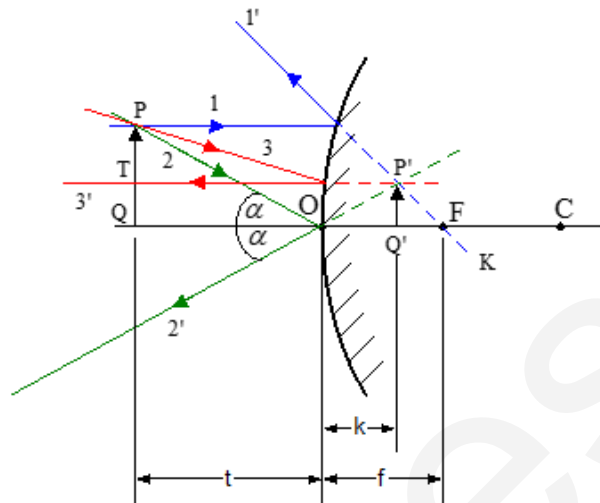
- A görbületi sugár, így a fókusz távolság is pozitív.
- A tárgy távolság mindig pozitív.
- Valódi kép esetén a képtávolság pozitív, virtuális kép esetén negatív.

Szerkesszük meg a domború gömbtükör egy tárgyról alkotott képét! A szerkesztéshez itt is szükségünk lesz a nevezetes sugármenetekre. Ezek az alábbiak (17. ábra).

Nevezetes sugármenetek:

- Az optikai tengellyel párhuzamos fénysugár (1) úgy verődik vissza, mintha a fókuszpontból (F) indult volna.

- Az optikai középpontba (O) beeső fénysugár (2) az optikai tengelyre szimmetrikusan verődik vissza.
- A fókuszpontba (F) irányuló fénysugár (3) az optikai tengellyel párhuzamosan verődik vissza.



17. ábra. Domború gömbtükör nevezetes sugármenetei

Domború gömbtükör esetén a leképezési törvény pont olyan formában igaz, mint homorú gömbtükör esetén, azaz:

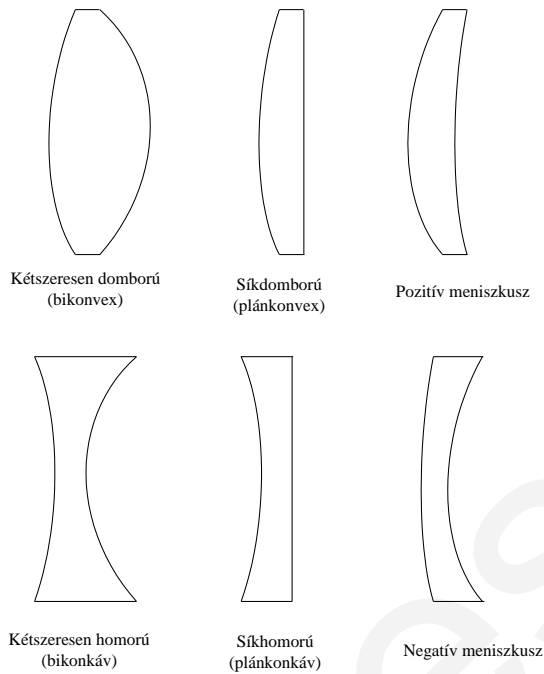
$$\frac{1}{f} = \frac{1}{k} + \frac{1}{t} \quad (2.21)$$

Domború gömbtükör esetén a leképezési törvény alkalmazásával az alábbi előjelszabályokat kell figyelembe venni:

- A görbületi sugár így fókusz távolsága is negatív.
- A tárgytávolság mindig pozitív.
- Valódi kép esetén a képtávolság pozitív, virtuális esetén negatív.

2.2.3 Lencsék képképzése

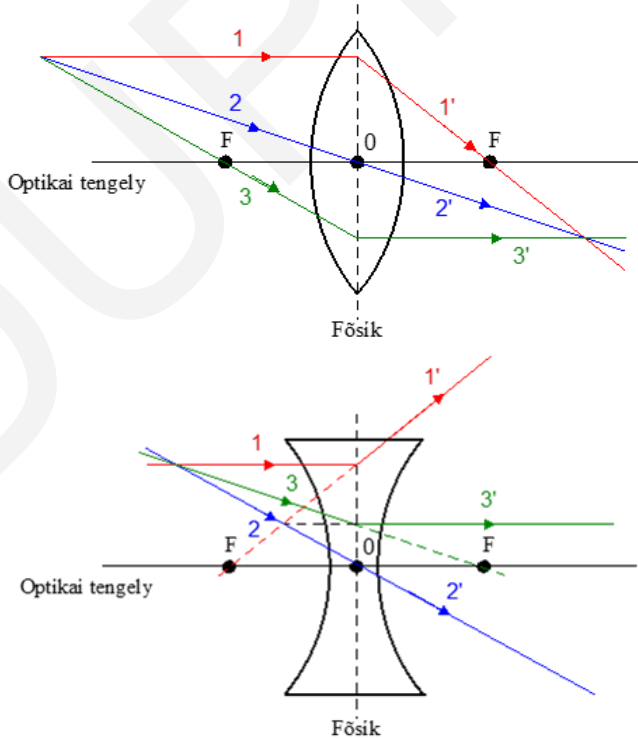
Az **optikai lencse** egy áttetsző anyagból készülő, két gömb vagy egy gömb és egy síkfelülettel határolt lemez, amely a rá eső fénysugarakat össze-, vagy széttartóvá teszi. A lencsét, amelyek összetartóvá teszik a fénysugarakat, gyűjtő-, amelyek széttartóvá, szórólencséknek nevezzük. A gyűjtőlencsék – feltéve, hogy optikailag sűrűbb anyagból készülnek, mint a környező közeg – középen vastagabbak, mint a szélükön. Ebből adódóan azok domború lencsék. Szórólencsék esetén fordított a helyzet, így azok homorú lencsék. Az alábbi ábra a különböző lencsetípusokat szemlélteti.



18. ábra. Gyűjtő és szórólencsék típusai

Nevezetes sugármenetek:

Az alábbi ábrák a gyűjtő és szórólencse nevezetes sugármeneteit mutatják:



19. ábra. Gyűjtő és szórólencse nevezetes sugármenetei

Gyűjtőlencse

- Az optikai tengellyel párhuzamosan érkező fénysugarak közelítőleg egy ponton a fókuszponton (F) haladnak át.
- Az optikai középpontba (O) beeső fénysugarak irányváltás nélkül haladnak tovább.
- A fókuszponton keresztül érkező fénysugarak az optikai tengellyel párhuzamosan haladnak tovább.

Itt bizonyítás nélkül közöljük, de belátható, hogy a két fókuszpont optikai középponttól mért távolsága egymással egyező.

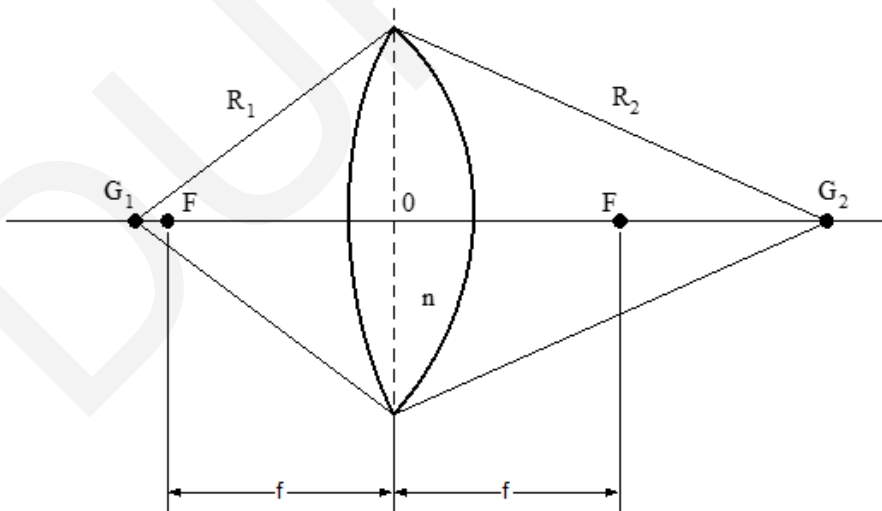
Szórólencse

- Az optikai tengellyel párhuzamosan érkező sugár úgy halad tovább, mintha a fókuszpontból (F) érkezett volna.
- Az optikai középpontba (O) beeső fénysugarak irányváltás nélkül haladnak tovább.
- A fókuszpontba irányuló fénysugarak az optikai tengellyel párhuzamosan haladnak tovább.

Lencse törőértékének (dioptria) kiszámítása

Itt csak az ideálisan vékony lencsék esetével foglalkozunk. Ideálisan vékony lencséről akkor beszélünk, ha annak vastagsága elhanyagolható az átmérőjéhez képest. A fenti esetben a lencse törőértéke (fókusz távolságának reciproka) az alábbi összefüggéssel számítható:

$$D = \frac{1}{f} = (n - 1) \cdot \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right), D = \left[\frac{1}{m} \right] \quad (2.22)$$



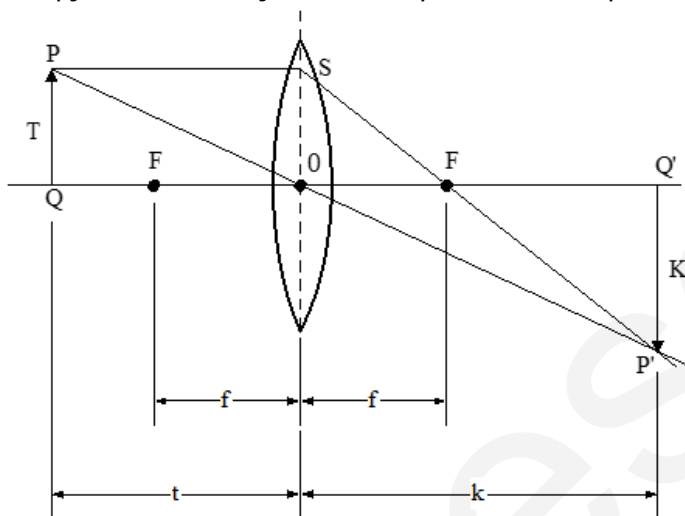
20. ábra. Lencse jellemző adatai a törőérték kiszámításához

A fenti összefüggésben n a lencse anyagának közegre vonatkozó relatív törésmutatója, R_1 és R_2 a lencse határoló felületeinek görbületi sugara. Domború felület esetén a görbületi sugár pozitív, míg homorú esetén negatív. Ha a

határoló felület sík, akkor $R = \infty$. A fentiekből adódóan a gyűjtő lencsék fókusz távolsága pozitív, míg a szórólencséké negatív.

Lencsék leképezési törvénye:

Az alábbi ábra alapján levezethetjük a vékony lencsék leképezési törvényét:



21. ábra. Gyűjtőlencse által alkotott kép szerkesztése

Az OFS és $Q'FP'$ háromszögek hasonlóak, tehát:

$$\frac{K}{T} = \frac{k-f}{f} \quad (2.23)$$

Az OQP és $OQ'P'$ háromszögek szintén hasonlóak, vagyis:

$$\frac{K}{T} = \frac{k}{t} \quad (2.24)$$

A két egyenletet összevetve:

$$\frac{K}{T} = \frac{k-f}{f} = \frac{k}{f} - 1 \quad (2.25)$$

A fenti egyenletből:

$$\frac{1}{t} = \frac{1}{f} - \frac{1}{k} \Rightarrow \frac{1}{f} = \frac{1}{t} + \frac{1}{k} \quad (2.26)$$

Azaz vékony lencsékre ugyanaz a leképezési törvény érvényes, mint gömbtükrökre.

Előjelszabályok a leképezési törvény alkalmazásához:

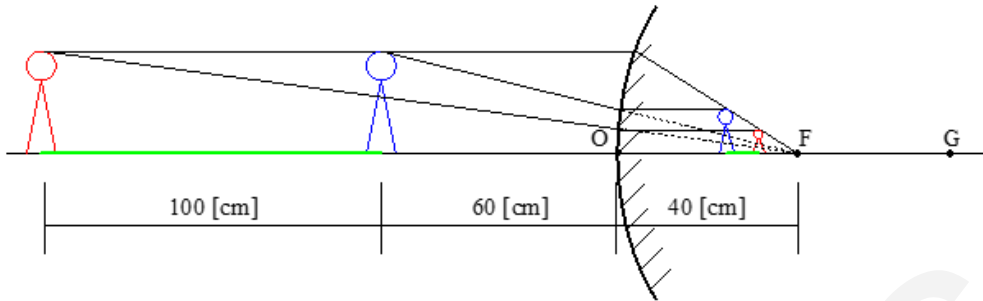
- Domború lencse fókusz távolsága pozitív, szóró lencsée negatív
- A tárgy távolság mindig pozitív
- Valódi kép esetén a képtávolság pozitív, virtuális esetén negatív.

Feladatok

1. feladat

Egy méterrúd elhelyezünk egy konvex gömbtükör optikai tengelyében. A tükör fókusz távolsága $40[cm]$. A méterrúd tükörhöz közelebbi vége $60[cm]$ távolságra

van a tükör felszínétől. A méterrúd két végére egy-egy 5[cm] magas sakkfigurát helyezünk, az optikai tengelyre merőlegesen álló helyzetben.



- a) Milyen hosszú lesz a méterrúd tükör által létrehozott virtuális képe?
 b) Milyen magasak a sakkfigurák a virtuális képen és hogyan helyezkednek el?

Megoldás:

a) A leképezési törvényből:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{t} + \frac{1}{k} \Rightarrow k = \frac{t \cdot f}{t - f}$$

$$f = -40[\text{cm}]$$

$$t_1 = 60[\text{cm}]$$

$$k_1 = \frac{t_1 \cdot f}{t_1 - f} = \frac{60 \cdot (-40)}{60 - (-40)} = \frac{-2400}{100} = -24[\text{cm}]$$

$$f = -40[\text{cm}]$$

$$t_2 = 160[\text{cm}]$$

$$k_1 = \frac{t_2 \cdot f}{t_2 - f} = \frac{160 \cdot (-40)}{160 - (-40)} = \frac{-6400}{200} = -32[\text{cm}]$$

A méterrúd képének hossza:

$$|k_2 - k_1| = |-32 - (-24)| = 8[\text{cm}]$$

b) A tükör nagyítása:

$$N = \frac{K}{T} = -\frac{k}{t}$$

A közelebbi figura:

$$T_1 = 5[\text{cm}]$$

$$t_1 = 60[\text{cm}]$$

$$k_1 = -24[\text{cm}]$$

$$N_1 = -\frac{k_1}{t_1} = -\frac{-24}{60} = 0,4$$

$$K_1 = T_1 \cdot N_1 = 5 \cdot 0,4 = 2[\text{cm}]$$

A távolabbi figura:

$$T_2 = 5[\text{cm}]$$

$$t_2 = 160[\text{cm}]$$

$$k_2 = -32[\text{cm}]$$

$$N_2 = -\frac{k_2}{t_2} = -\frac{-32}{160} = 0,2$$

$$K_2 = T_2 \cdot N_2 = 5 \cdot 0,2 = 1[\text{cm}]$$

2. feladat

Egy domború gömbtükrő fókusz távolsága $-25[\text{cm}]$. Milyen távol helyeztük el a tárgyat a tükrőtől, ha a tárgy virtuális képe $15,38[\text{cm}]$ -re jelenik meg?

Megoldás:

$$f = -25[\text{cm}]$$

$$l = -15,38[\text{cm}] \text{ (negatív, mivel virtuális a kép)}$$

A leképezési törvény:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{t} + \frac{1}{k}$$

$$\frac{1}{t} = \frac{1}{f} - \frac{1}{k} = \frac{1}{-25} - \frac{1}{-15,38} = -0,04 + 0,065 = 0,025$$

$$t = \frac{1}{0,025} = 40[\text{cm}]$$

Vagyis a tükrőtől a tárgyat $40[\text{cm}]$ -re helyeztük el.

3. feladat

Egy mindkét oldalán domború vékony gyűjtőlencsét nagyítóként használunk. A lencse elülső és hátsó felületének görbületi sugara 20 és $15[\text{cm}]$. A lencse anyagának abszolút törésmutatója $n_{lencse} = 1,52$

a) Mennyi a lencse fókusz távolsága levegőben?

b) Mennyi a lencse fókusz távolsága vízben? ($n_{víz} = 1,33$)

c) Függ-e a fókusz távolság attól, hogy a lencse melyik oldalát fordítjuk a fény felé?

Megoldás:

$$a) f = \frac{1}{(n-1) \cdot \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right)} = \frac{1}{(1,52-1) \cdot \left(\frac{1}{20} + \frac{1}{15}\right)} = \frac{1}{0,06} = 16,5[\text{cm}]$$

b) A lencse vízre vonatkozó törésmutatója:

$$n_{lencse,víz} = \frac{n_{lencse}}{n_{víz}} = \frac{1,52}{1,33} = 1,14$$

$$f = \frac{1}{(n-1) \cdot \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right)} = \frac{1}{(1,14-1) \cdot \left(\frac{1}{20} + \frac{1}{15}\right)} = \frac{1}{0,016} = 61,2[\text{cm}]$$

$$c) f = \frac{1}{(n-1) \cdot \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right)} = \frac{1}{(1,52-1) \cdot \left(\frac{1}{20} + \frac{1}{15}\right)} = \frac{1}{0,06} = 16,5[\text{cm}]$$

$$f = \frac{1}{(n-1) \cdot \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right)} = \frac{1}{(1,52-1) \cdot \left(\frac{1}{15} + \frac{1}{20}\right)} = \frac{1}{0,06} = 16,5[\text{cm}]$$

Azaz nincs különbség.

4. feladat

Egy 15[cm] fókusztávolságú gyűjtő- és egy szintén 15[cm] fókusztávolságú szórólencséből álló optikai eszköz képző képalkotását vizsgáljuk. A két lencse egymástól mért távolsága 60[cm]. A gyűjtőlencsétől 25[cm] távolságra elhelyezünk egy 1,5[cm] magasságú tárgyat.

- Hol jelenik meg az eszköz által alkotott éles kép?
- Valós vagy virtuális a kép?
- Mekkora lesz a mérete?
- Normál vagy fordított állású?

Megoldás:

a) L_1 lencse $f_1 = 15[cm]$, $t_1 = 25[cm]$

a képtávolság:

$$\frac{1}{f_1} = \frac{1}{t_1} + \frac{1}{k_1} \Rightarrow k_1 = \frac{t_1 \cdot f_1}{t_1 - f_1} = \frac{25 \cdot 15}{25 - 15} = 37,5[cm]$$

L_2 lencse $f_2 = -15[cm]$, $t_2 = 60 - 37,5 = 22,5[cm]$

a képtávolság:

$$\frac{1}{f_2} = \frac{1}{t_2} + \frac{1}{k_2} \Rightarrow k_2 = \frac{t_2 \cdot f_2}{t_2 - f_2} = \frac{22,5 \cdot (-15)}{22,5 - (-15)} = -9[cm]$$

Tehát a kép a két lencse között lesz, a második lencsétől 9[cm]-re.

b) Mivel a képtávolság negatív, ezért a kép virtuális lesz.

c) L_1 lencse nagyítása:

$$N_1 = -\frac{k_1}{t_1} = \frac{-37,5}{25} = -1,5$$

K_1 kép magassága:

$$K_1 = N_1 \cdot T_1 = -1,5 \cdot 1,5 = -2,25[cm]$$

L_2 lencse nagyítása:

$$N_2 = -\frac{k_2}{t_2} = -\frac{-9}{22,5} = 0,4$$

K_2 kép magassága:

$$K_2 = N_2 \cdot T_2 = -0,4 \cdot (-2,25) = -0,9[cm]$$

d) Tehát a kép magassága 0,9[cm], kicsinyített és mivel K_2 negatív ezért fordított állású.

3. A klasszikus mechanika alapjai

A továbbiakban az anyagi pont mechanikájával foglalkozunk, először kinematikával, majd kinetikával. Ha a vizsgált test mérete elhanyagolható az adott mechanikai problémában szereplő egyéb méretekhez képest, akkor a testet **anyagi ponttal** modellezzük. Az anyagi pont egy geometriai pont, amelyhez hozzárendelhetjük a tömegét.

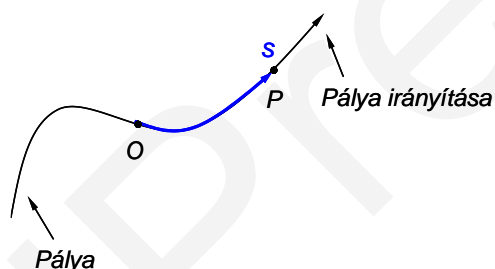
A **kinematika** feladata a mozgás leírása, ehhez vezet be mozgásjellemező mennyiségeket (hely, sebesség, gyorsulás) és megadja kapcsolatukat.

A **kinetika** bevezeti az erő fogalmát, mint az anyagi pont és környezetének mechanikai kölcsönhatását jellemző fizikai mennyiséget, majd azt vizsgálja, hogy adott erők hatása alatt hogyan fog mozogni az anyagi pont (milyen hely-, sebesség- és gyorsulás-idő függvény szerint) vagy fordítva, hogy a pont egy előírt pályán vagy felületen történő mozgásához milyen erők szükségesek, hogy azt biztosítsák. Az első esetben szabad, a másodikban kényszermozgásról beszélünk.

3.1 Anyagi pont kinematikája

3.1.1 Mozgásleírás skaláris mennyiségekkel

Az anyagi pont mozgása során egy tér- vagy síkgörbén halad, amelyet a mozgás pályájának nevezünk (22. ábra). Ha a mozgás pályája adott, akkor azon az anyagi pont helye egy előjeles skalármennyiséggel megadható. Ehhez jelöljük ki a pályán egy O vonatkoztatási pontot, és egy pozitív irányítást.



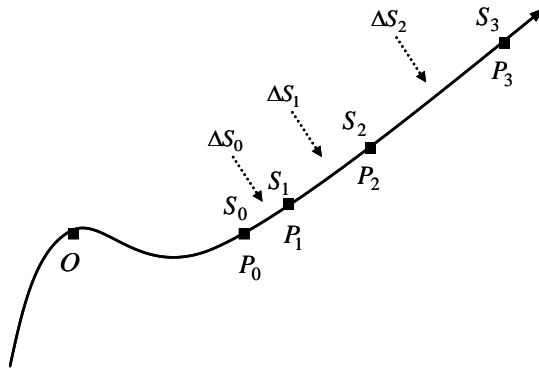
22. ábra. A pályakoordináta értelmezése

A P anyagi pont helyét a pályán az O -tól mért előjeles ívhossz (s) – amelyet pályakoordinátának vagy ívkoordinátának (periodikus mozgás esetén kitérésnek) nevezünk – egyértelműen meghatározza. Ha a P pont az O pont pozitív oldalán van, akkor s pozitív, ha az O pontban, akkor nulla, egyébként negatív. Így, szemléletesen szólva, a pálya egy „görbe számegyenes”, amelynek kezdőpontja az O pont. Az pályakoordináta SI egysége a méter ($s=[m]$). Példaként tegyük fel, hogy a térképen ismerjük egy gépkocsi útvonalát, és az útvonalon a nulla kilométerkő pontos helyét. Ha megadjuk, hogy a kilométerkő mely oldalán, és attól hány kilométerre van a gépkocsi, akkor megadtuk annak pontos helyét a térképen.

Ahogy az anyagi pont halad a pályán, helyét időről-időre más pályakoordináta érték jellemzi. A pályakoordinátát megadva az egymást követő pillanatokban, megkapjuk az anyagi pont $s(t)$ pályakoordináta-idő függvényét.

3.1.1.1 Anyagi pont pálya menti sebessége és gyorsulása

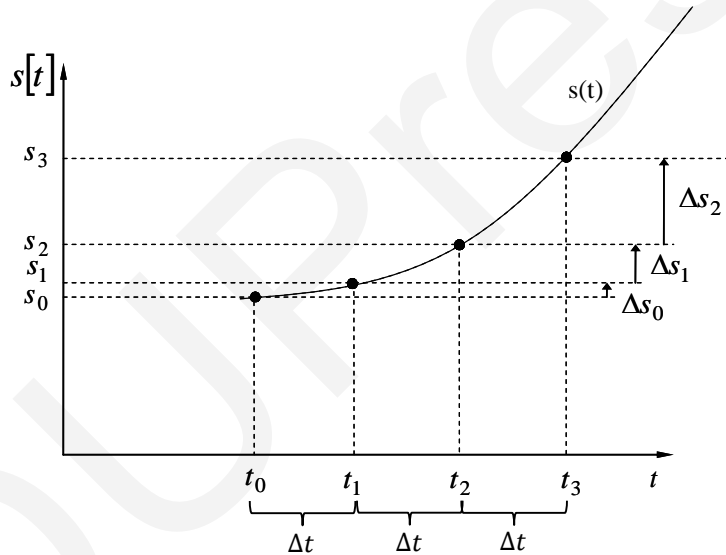
A pályán mozgó P anyagi pont helyét egyenlő, Δt időközönként megjelöltük (P_0, P_1, P_2, \dots 23. ábra).



23. ábra. A mozgó anyagi pont pályakoordinátái

$$\Delta s_0 = s_1 - s_0, \quad \Delta s_1 = s_2 - s_1, \quad \Delta s_2 = s_3 - s_2$$

Ábrázoljuk a pályakoordinátát, mint az idő függvényét (24. ábra). Az ábrán látható esetben a Δs_i ívhosszak monoton nőnek az idővel, tehát a mozgás sebessége növekszik.



24. ábra. Pályakoordináta-idő függvény

Ezt követően értelmezhetjük a pont átlagos és pillanatnyi pálya menti sebességét.

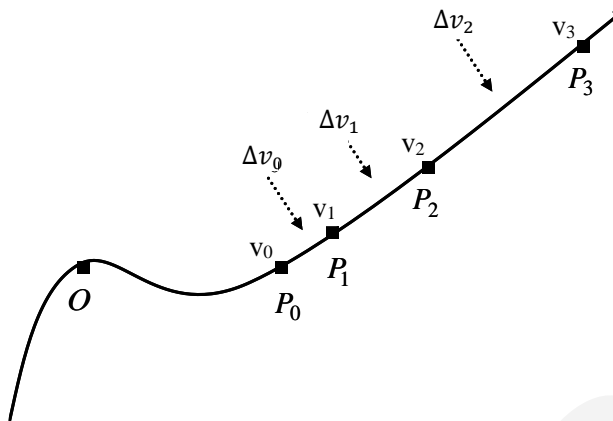
Átlagos pályamenti sebesség a $[t_0, t_1]$ időtartamon

$$v[t_0, t_1] = \frac{\Delta s_0}{\Delta t} = \frac{s(t_1) - s(t_0)}{t_1 - t_0}, \quad (3.1) \quad v = \left[\frac{m}{s} \right]$$

Pillanatnyi pályamenti sebesség a t_0 pillanatban

$$v(t_0) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s_0}{\Delta t} = \lim_{t_1 \rightarrow t_0} \frac{s(t_1) - s(t_0)}{(t_1 - t_0)} = \frac{ds_0}{dt}, \quad (3.2)$$

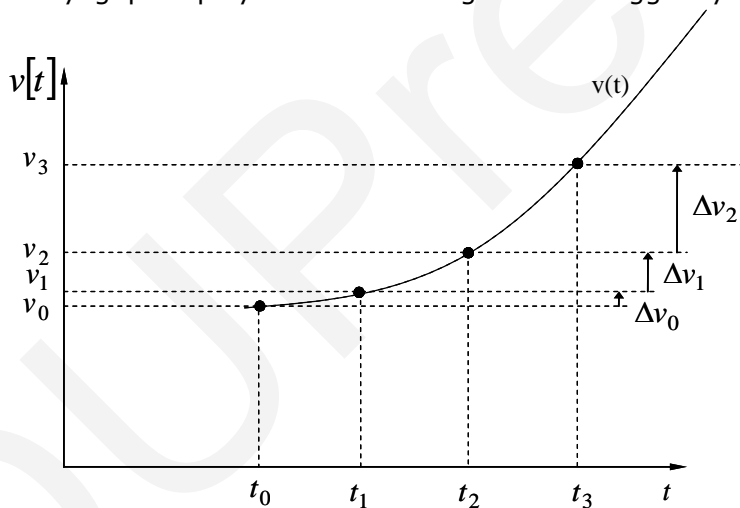
Azaz a $v(t_0)$ sebesség az $s(t)$ függvény t_0 pillanatban vett idő szerinti deriváltja. Adjuk meg az anyagi pont sebességét az egymást követő pillanatokban:



25. ábra. A mozgó anyagi pont pályamenti sebességei

$$\Delta v_0 = v_1 - v_0, \quad \Delta v_1 = v_2 - v_1, \quad \Delta v_2 = v_3 - v_2$$

Ábrázoljuk az anyagi pont pályamenti sebességét az idő függvényében:



26. ábra. Sebesség-idő függvény

Ezt követően, a pályamenti sebesség mintájára, értelmezhetjük az átlagos és pillanatnyi pályamenti gyorsulás fogalmát.

Átlagos pályamenti gyorsulás a [t₀, t₁] időtartamon

$$a[t_0, t_1] = \frac{\Delta v_0}{\Delta t} = \frac{v(t_1) - v(t_0)}{t_1 - t_0} \quad (3.3)$$

Pályamenti gyorsulás a t₀ pillanatban

$$a(t_0) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v_0}{\Delta t} = \lim_{t_1 \rightarrow t_0} \frac{v(t_1) - v(t_0)}{t_1 - t_0} = \frac{dv_0}{dt}, \quad (3.4) \quad a = \left[\frac{m}{s^2} \right]$$

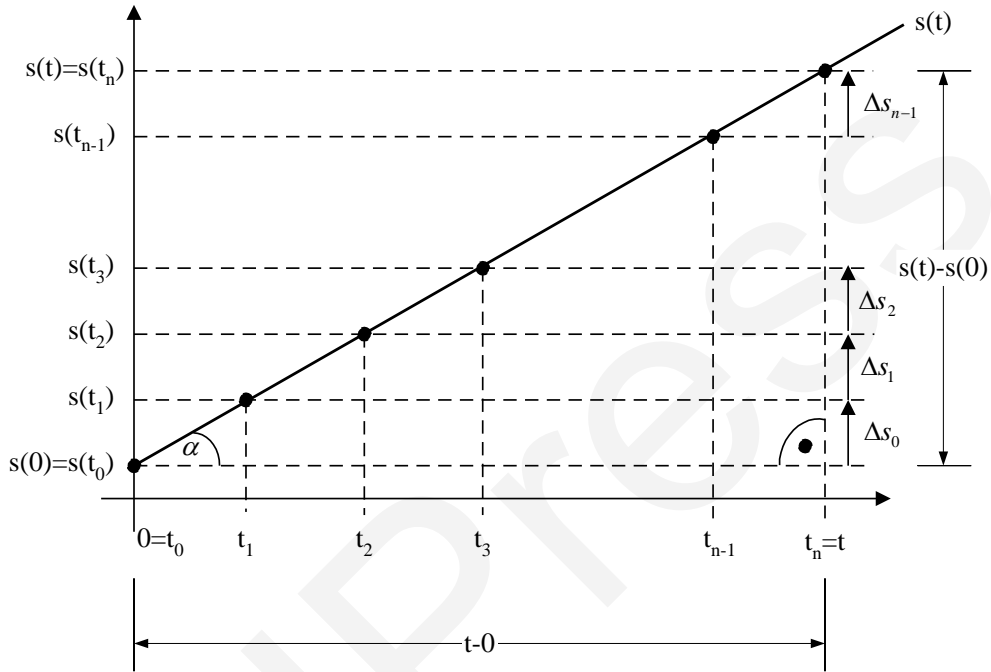
Azaz a a(t₀) gyorsulás az v(t) függvény t₀ pillanatban vett idő szerinti deriváltja.

3.1.1.2 Egyenletes és egyenletesen változó mozgások

Most megvizsgálunk két speciális mozgástípust, amelyek feladatmegoldás során gyakran előfordulnak. Ezek az egyenletes és egyenletesen változó mozgások.

Egyenletes mozgás esetén az anyagi pont azonos időtartamok alatt egyenlő pályaszakaszokat fut be.

$$\Delta s_0 = \Delta s_1 = \Delta s_2 = \dots = \Delta s_{n-1} \quad (3.5)$$



27. ábra. Egyenletes mozgás pályakoordináta-idő függvénye

A 3.5 egyenletet a Δt időtartammal beosztva, és az időtartammal zérushoz tartva:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s_0}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s_1}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s_2}{\Delta t} = \dots = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s_{n-1}}{\Delta t} = tg\alpha \quad (3.6)$$

Ebből adódóan:

$$v(t_0) = v(t_1) = v(t_2) = \dots = v(t_{n-1}) = v = tg\alpha = \text{állandó} \quad (3.7)$$

Azaz egyenletes mozgás esetén a pályamenti sebesség állandó, és az $s(t)$ függvény képe egyenes, amelynek meredeksége a pályamenti sebesség értéke. A 12. ábrán látható „nagy” derékszögű háromszögből:

$$tg\alpha = v = \frac{s(t) - s(0)}{t - 0} \quad (3.8)$$

Innen adódik, hogy:

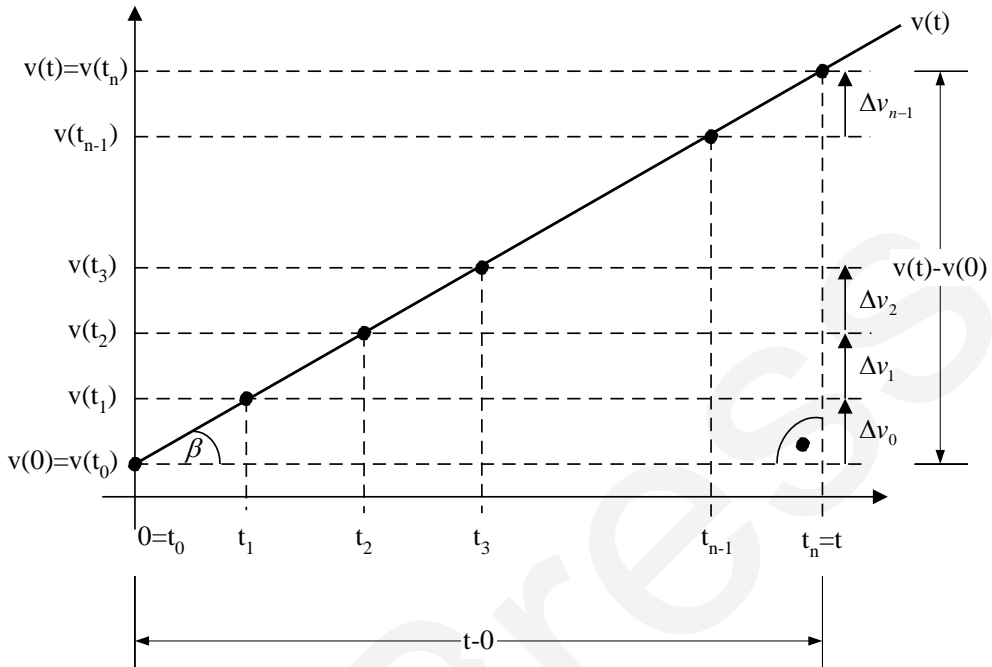
$$v \cdot t = s(t) - s(0) \Rightarrow s(t) = s(0) + v \cdot t \quad (3.9)$$

Így egyenletes mozgás esetén az $a(t)$, $v(t)$ és $s(t)$ függvények:

$$a(t) = 0, \quad v(t) = v = \text{állandó}, \quad s(t) = s(0) + v(t) \cdot t$$

Egyenletesen változó mozgás esetén az anyagi pont azonos időtartamok alatt azonos sebességváltozásokat szenved el.

$$\Delta v_0 = \Delta v_1 = \Delta v_2 = \dots = \Delta v_{n-1} \quad (3.10)$$



28. ábra. Egyenletesen változó mozgás pályamenti sebesség-idő függvénye

Az egyenletet a Δt időtartammal beosztva, és az időtartammal zérushoz tartva:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v_0}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v_1}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v_2}{\Delta t} = \dots = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v_{n-1}}{\Delta t} = tg\beta \quad (3.11)$$

Ebből adódóan:

$$a(t_0) = a(t_1) = a(t_2) = \dots = a(t_{n-1}) = a = tg\beta = \text{állandó} \quad (3.12)$$

Azaz egyenletesen változó mozgás esetén a pályamenti gyorsulás állandó, és az $v(t)$ függvény képe egyenes, amelynek meredeksége a pályamenti gyorsulás.

A 28. ábrán látható „nagy” derékszögű háromszögből:

$$tg\beta = a = \frac{v(t) - v(0)}{t - 0} \quad (3.13)$$

Innen adódik, hogy:

$$a \cdot t = v(t) - v(0) \Rightarrow v(t) = v(0) + a \cdot t \quad (3.14)$$

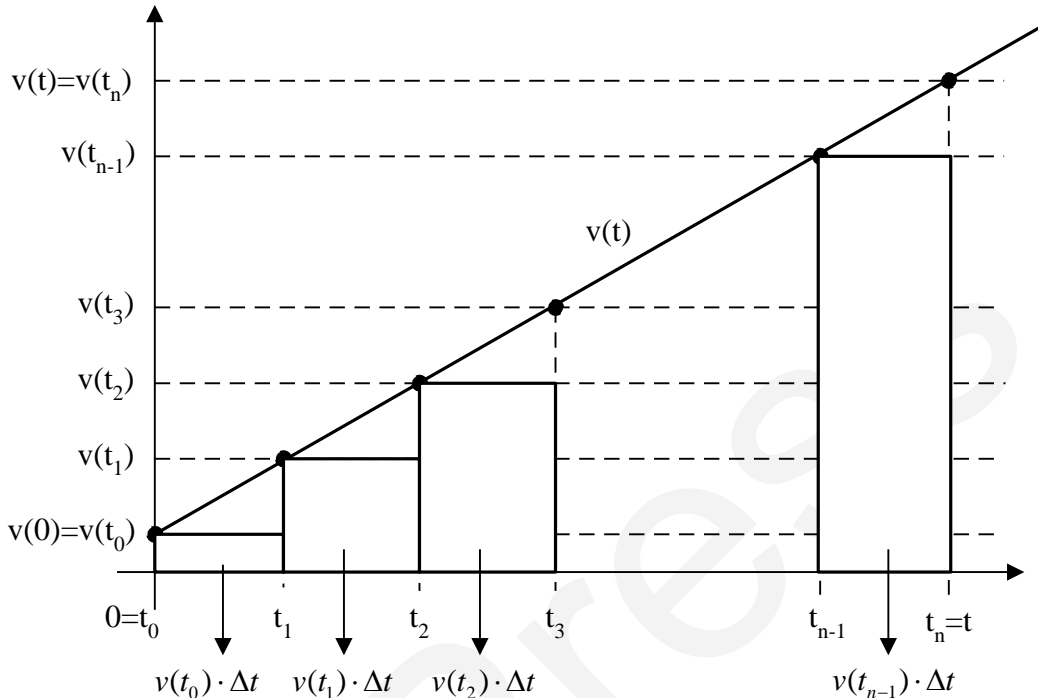
A továbbiakban származtatjuk a pont pályakoordináta-idő függvényét.

A rövid Δt időtartamok alatt a sebesség nem változik számottevően, így a mozgás egyenletes mozgásnak tekinthető. Ez a közelítés annál pontosabb, minél rövidebb a Δt időtartam. Így a $[0, t]$ időtartamon az anyagi pont által befutott pályaszakasz hosszát a következőképpen közelíthetjük:

$$\Delta s = s(t) - s(0) \approx v(t_0) \cdot \Delta t + v(t_1) \cdot \Delta t + \dots + v(t_{n-1}) \cdot \Delta t \quad (3.15)$$

$\Delta t \rightarrow 0$ esetben a fenti közelítés már pontos értéket ad, azaz:

$$s(t) - s(0) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} (v(t_0) \cdot \Delta t + v(t_1) \cdot \Delta t + \dots + v(t_{n-1}) \cdot \Delta t) \quad (3.16)$$



29. ábra. A pályakoordináta-idő függvény származtatása egyenletesen változó mozgás esetén

A $v(t_0) \cdot \Delta t + v(t_1) \cdot \Delta t + \dots + v(t_{n-1}) \cdot \Delta t$ összeg megegyezik a $v(t)$ függvény alá rajzolt téglalapok területeinek összegével.

Ha $\Delta t \rightarrow 0$, akkor a téglalapok területösszege pontosan egyenlő a $v(t)$ függvény alatti trapéz területével:

$$s(t) - s(0) = T_{TRAPÉZ} = \frac{v(0) + v(t)}{2} \cdot t \quad (3.17)$$

Tehát:

$$s(t) - s(0) = \frac{v(0) + \overbrace{v(0) + a \cdot t}^{v(t)}}{2} \cdot t = v(0) \cdot t + \frac{a}{2} \cdot t^2 \quad (3.18)$$

A fenti egyenletből:

$$s(t) = s(0) + v(0) \cdot t + \frac{a}{2} \cdot t^2 \quad (3.19)$$

Tehát egyenletesen változó mozgás esetén az $a(t)$, $v(t)$ és $s(t)$ függvények:

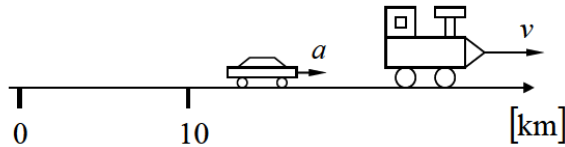
$$a(t) = a = \text{állandó} \neq 0, \quad v(t) = v(0) + a \cdot t, \quad s(t) = s(0) + v(0) \cdot t + \frac{a}{2} \cdot t^2$$

A fenti példában láttuk, hogy az anyagi pont által befutott pályaszakasz hossza megegyezett a sebesség-idő függvény görbe alatti területével (trapéz területével). A gondolatmenetből következik, hogy ez tetszőleges $v(t)$ függvény esetében is igaz. Később matematikából majd látjuk, hogy a fenti görbe alatti terület kiszámítható, mint a $v(t)$ függvény $[0, t]$ intervallumon vett határozott integrálja.

Feladatok

1. feladat

Egy autó a 10-es kilométerkőnél áll, amikor egy mozdony állandó v sebességgel elhalad mellette. Az elhaladás pillanatában az autó elindul, és állandó a gyorsulással üldözni kezdi a mozdonyt. Mindkét járművet anyagi ponttal modellezzük.



Adatok: $v = 36 \left[\frac{km}{h} \right]$, $a = 2 \left[\frac{m}{s^2} \right]$

- Számítsuk ki, hogy mennyi idő alatt éri utol az autó a mozdonyt! Adjuk meg a járművek helyét az utolérés pillanatában!
- Számítsuk ki az autó pályamenti sebességét, amikor az utoléri a mozdonyt!

Megoldás:

a) Jelölje az utolérés idejét t . Az autó sebessége a 10-es kilométerkőnél: $v(0)=0$.

$$s_{mozdony}(t) = s(0) + v \cdot t = 10000 + 10 \cdot t \text{ [m]}$$

$$s_{autó}(t) = s(0) + v(0) \cdot t + \frac{a}{2} \cdot t^2 = 10000 + 0 \cdot t + \frac{2}{2} \cdot t^2 \text{ [m]}$$

Amikor az autó utoléri a mozdonyt:

$$s_{mozdony}(t) = s_{autó}(t)$$

$$10000 + 10 \cdot t = 10000 + t^2 \rightarrow t^2 - 10 \cdot t = 0 \Rightarrow t = 10 \text{ [s]}$$

A járművek helye ekkor:

$$s_{mozdony}(t) = s_{autó}(t) = 10000 + 10 \cdot 10 = 10100 \text{ [m]}$$

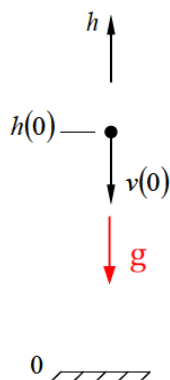
b) Az autó sebessége, amikor utoléri a mozdonyt:

$$v_{autó}(t) = v(0) + a \cdot t = 0 + 2 \cdot 10 = 20 \left[\frac{m}{s} \right]$$

2. feladat

A Föld felszínétől mért 500 [m]-es magasságból elhajítunk függőlegesen lefelé egy követ 10 [m/s] nagyságú kezdősebességgel. A légellenállástól eltekintünk, a gravitációs gyorsulás nagysága 9,81 [m/s²].

Adatok: $h(0) = 500 \text{ [m]}$, $v(0) = -10 \left[\frac{m}{s} \right]$.



- Számítsuk ki, hogy a felszíntől milyen távolságban lesz a kő az eldobás után 4 [s]-al!
- Számítsuk ki, hogy mennyi idő alatt éri el a kő a Földet!
- Számítsuk ki a becsapódáskor a kő sebességének nagyságát!

Megoldás:

$$a) a = -g = -9,81 \left[\frac{m}{s^2} \right]$$

$$h(t) = h(0) + v(0) \cdot t - \frac{g}{2} \cdot t^2 = 500 - 10 \cdot 4 - \frac{9,81}{2} \cdot 4^2 = 381,5 [m]$$

b)

Jelölje az eldobás és a becsapódás között eltelt időt t^* .

$$h(t^*) = h(0) + v(0) \cdot t^* - \frac{g}{2} \cdot t^{*2} = 500 - 10 \cdot t^* - \frac{9,81}{2} \cdot t^{*2} = 0 [m]$$

A fenti egyenletből azt kapjuk, hogy:

$$4,905 \cdot t^{*2} + 10 \cdot t^* - 500 = 0$$

$$t_{1,2}^* = \frac{-10 \pm \sqrt{100 - 4 \cdot 4,905 \cdot (-500)}}{9,81} \Rightarrow t_1^* = 9,13 [s], t_2^* = -11,17 [s]$$

Így az eltelt idő:

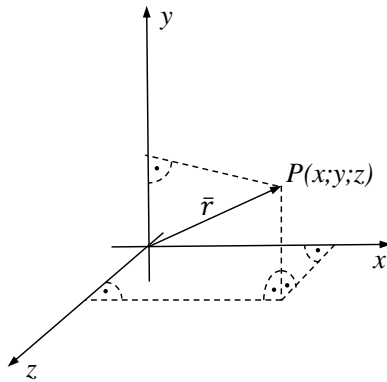
$$t^* = 9,13 [s]$$

c)

$$|v(t^*)| = |v(0) + g \cdot t| = |-10 - 9,81 \cdot 9,13| = 99,57 \left[\frac{m}{s} \right]$$

3.1.2 Mozgásleírás vektormennyiségekkel

Az anyagi pont mozgását mindig egy másik testhez, vagy testekhez viszonyítjuk, amelyek összességét vonatkoztatási rendszernek nevezzük. A vonatkoztatási rendszer matematikai leírása a koordináta-rendszer. A koordináta-rendszereknek több típusa van, itt csak a Descartes-féle derékszögű koordináta-rendszerrel foglalkozunk. A mozgásjellemző vektormennyiségeket (pl.: hely, sebesség, gyorsulás) ebben a rendszerben adjuk meg. Az anyagi pont (P) helyét a koordináta-rendszer origójából a ponthoz húzott \vec{r} helyvektorral adjuk meg (30. ábra).



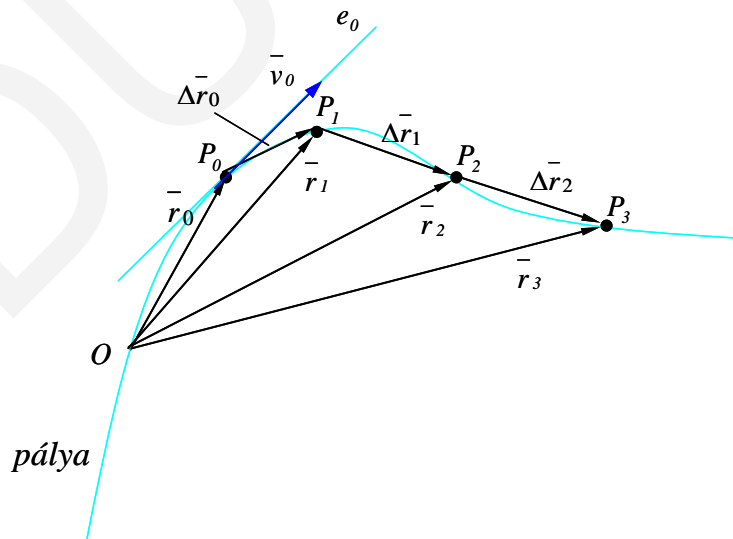
30. ábra. A Descartes-féle derékszögű koordináta rendszer

A helyvektornak – és egyben a pontnak – térbeli mozgás esetén három, síkmozgás esetén két koordinátája van. Az egyes koordinátákat a 30. ábra értelmezi. A helyvektort általában az alábbi, oszlopvektoros formában adjuk meg:

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (3.20)$$

3.1.2.1 Hely-idő függvény és vektoriális sebesség

Tüntessük fel az anyagi pont helyét egyenlő Δt időközönként ($P_0, P_1, P_2, P_3, \dots$ pontok, 31. ábra)! Az egyes pontokhoz az $\vec{r}(t_0), \vec{r}(t_1), \vec{r}(t_2), \vec{r}(t_3), \dots$ helyvektorok tartoznak.



31. ábra. Mozgó anyagi pont hely-idő függvénye és sebessége

A helyvektort megadva az idő függvényében a pont hely-idő függvényét kapjuk.

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} \quad (3.21)$$

A hely-idő függvénybe egy időpontot helyettesítve megkapjuk az időponthoz tartozó helyvektort.

Vezessük be az elmozdulás vektort, mint két időben egymást követő helyvektor különbségét. A későbbi időponthoz tartozó helyvektorból vonjuk ki a korábbi időponthoz tartozót (31. ábra). Azaz:

$$\Delta\vec{r}_0 = \vec{r}_1 - \vec{r}_0, \quad \Delta\vec{r}_1 = \vec{r}_2 - \vec{r}_1, \quad \Delta\vec{r}_2 = \vec{r}_3 - \vec{r}_2$$

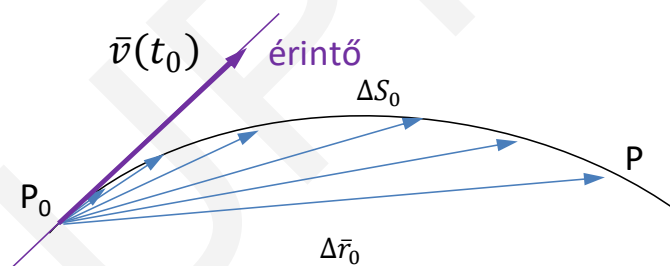
A pont **átlagos vektoriális sebességét** a $[t_0, t]$ időtartamon az alábbi összefüggéssel értelmezzük:

$$\vec{v}[t_0, t_1] = \frac{\Delta\vec{r}_0}{\Delta t} = \frac{\vec{r}(t_1) - \vec{r}(t_0)}{t - t_0} \quad (3.22)$$

Tehát az átlagsebesség vektor iránya megegyezik az elmozdulás vektor irányával. A Δt időtartamot zérusra csökkentve megkapjuk a pont **pillanatnyi vektoriális sebességét** a t_0 pillanatban. Matematikai megfogalmazásban:

$$\vec{v}(t_0) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\vec{r}_0}{\Delta t} = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{\vec{r}(t_1) - \vec{r}(t_0)}{t - t_0} = \frac{d\vec{r}_0}{dt} \quad (3.23)$$

A Δt időtartamot zérusra csökkentve az elmozdulás vektor befordul a P_0 pontbeli érintő irányába, nagysága pedig egyenlővé válik a befutott ΔS_0 pályaszakasz hosszával (32. ábra).



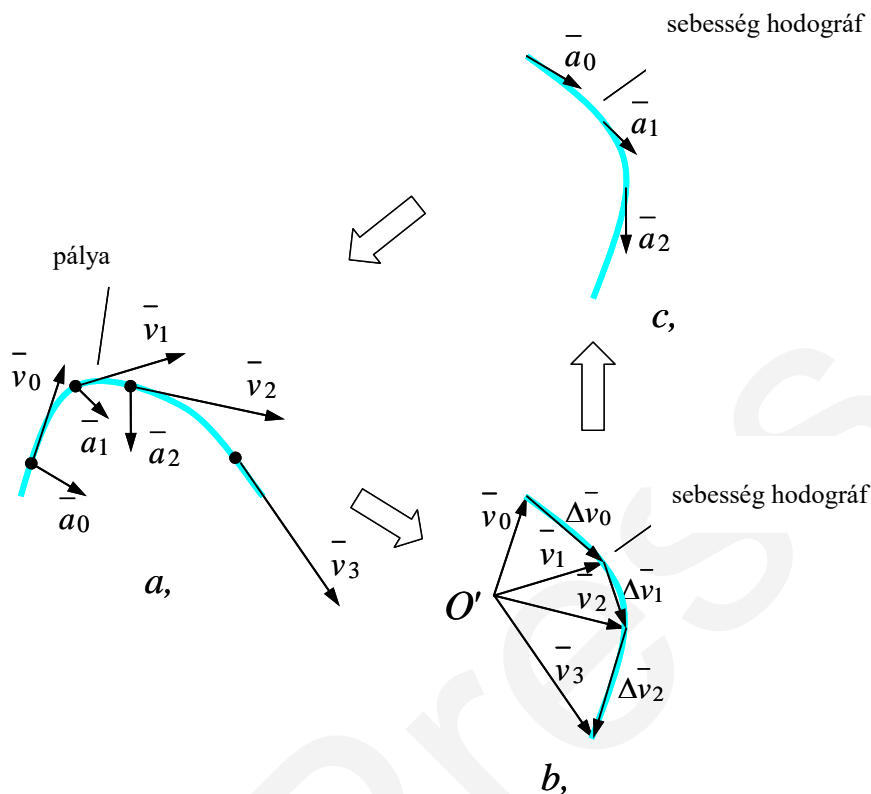
32. ábra. A pillanatnyi sebesség iránya

Tehát a $\vec{v}(t_0)$ sebességvektor iránya a P_0 pontbeli érintő irányával, nagysága pedig a P_0 pontbeli pályamenti sebesség nagyságával egyező:

$$|\vec{v}(t_0)| = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta\vec{r}_0}{\Delta t} \right| = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta S_0}{\Delta t} \right| = |v(t_0)| \quad (3.24)$$

3.1.2.2 Vektoriális gyorsulás

A gyorsulásvektor értelmezéséhez tekintsük a 33. ábrát!



33. ábra. Sebesség hodográf. A gyorsulásvektor értelmezése és iránya

Az ábra a, részén felrajzoltuk az anyagi pont pályáját és feltüntettük rajta az anyagi pont sebességvektorát néhány, egymást követő időpillanatokban. Ezt követően a sebességvektorokat az ábra b, részén látható O' pontból, mint közös kezdőpontból felrajzoltuk. A sebességvektorok végpontjai – ha elég sűrűn vesszük fel őket – egy görbét rajzolnak ki, az úgynevezett **sebesség hodográfot**. A gyorsulást az ábra b, része alapján hasonlóan értelmezzük, mint ahogy azt a sebesség esetében tettük. Csak most a $\Delta \vec{r}_0$ elmozdulás helyett, a $\Delta \vec{v}_0$ sebességváltozást használjuk a definícióban.

Átlagos vektoriális gyorsulás a $[t_0, t_1]$ időtartamon

$$\bar{a}[t_0, t_1] = \frac{\Delta \vec{v}_0}{\Delta t} = \frac{\vec{v}(t_1) - \vec{v}(t_0)}{t_1 - t_0} \quad (3.25)$$

Pillanatnyi vektoriális gyorsulás a t_0 időpillanatban

$$\bar{a}(t_0) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}_0}{\Delta t} = \lim_{t_1 \rightarrow t_0} \frac{\vec{v}(t_1) - \vec{v}(t_0)}{t_1 - t_0} = \frac{d\vec{v}_0}{dt} \quad (3.26)$$

Mint korábban említettük a sebesség a pálya adott pontbeli érintőjének irányába mutat. Ez alapján a gyorsulás iránya az ábra b) részén látható hodográf görbe érintőjének iránya. Az ábra c) részén feltüntettük a gyorsulásvektorokat. Fontos eredményre jutunk, ha a gyorsulásvektorokat átmásoljuk az ábra a) részére, a pálya megfelelő pontjaiba. Látható, hogy a gyorsulás mindig a pálya belseje (homorú oldal) felé mutat.

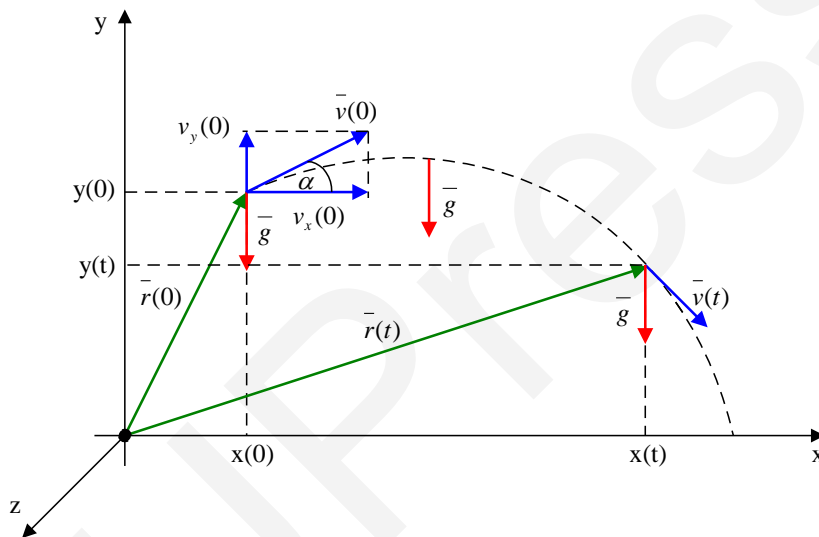
3.1.3 Speciális mozgások

3.1.3.1 Mozgás állandó \bar{g} gyorsulással

Hozzunk mozgásba a vízszinteshez képest α szögben, $v(0)$ nagyságú kezdősebességgel egy anyagi pontot: Hajítsunk el például egy kődarabot, vagy tüzeljünk egy ágyúval! Ha a dobás/lövés elég „nagy”, akkor a kő méretei a pálya méretei mellett elhanyagolhatók, így a követ anyagi ponttal modellezhetjük. Tekintsünk el a légellenállástól, ekkor a kőre csak a gravitációs erő hat, amely minden pillanatban a Föld tömegközéppontja felé mutat. A kő mozgásegyenlete:

$$m\bar{g} = m\bar{a} \Rightarrow \bar{a} = \bar{g} \quad (3.27)$$

Tehát a gyorsulásvektor is a Föld tömegközéppontja felé mutat, és állandó g nagyságú.



34. ábra. Állandó \bar{g} gyorsulással mozgó anyagi pont vektoriális mozgásjellemzői

Vegyük fel egy derékszögű koordinátarendszert úgy, hogy a mozgás kezdeti pillanatát jellemző $\bar{r}(0)$ és $\bar{v}(0)$ vektorok, valamint a \bar{g} vektor az xy síkba essenek, valamint a \bar{g} vektor azonos irányú, de ellentétes értelmű az y tengellyel (34. ábra). Ekkor a mozgás az xy síkban zajlik, így a z koordináta a mozgás leírásában nem játszik szerepet. A gyorsulás, a kezdeti sebesség, és hely koordinátái:

$$\bar{g} = \begin{pmatrix} 0 \\ -g \end{pmatrix}, \quad (3.28) \quad \bar{v}(0) = \begin{pmatrix} v_x(0) \\ v_y(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v(0) \cdot \cos\alpha \\ v(0) \cdot \sin\alpha \end{pmatrix}, \quad (3.29) \quad \bar{r}(0) = \begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} \quad (3.30)$$

A gyorsulás x irányú komponense zérus, y irányú komponense állandó g nagyságú. Ebből adódóan a mozgás x irányban egyenletes, y irányban egyenletesen változó. Tehát az anyagi pont gyorsulás-, sebesség-, és hely-idő függvényeinek x , y , és z komponensei:

$$\begin{array}{lll} a_x(t) = 0 & v_x(t) = v_x(0) = \text{állandó} & x(t) = x(0) + v_x(0) \cdot t \\ a_x(t) = -g & v_y(t) = v_y(0) - g \cdot t & y(t) = y(0) + v_y(0) \cdot t - \frac{g}{2} \cdot t^2 \\ a_z(t) = 0 & v_z(t) = 0 & z(t) = 0 \end{array}$$

Oszlopvektoros alakban:

$$\bar{a}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ -g \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.31) \quad \bar{v}(t) = \begin{pmatrix} v_x(0) \\ v_y(0) - g \cdot t \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.32)$$

$$\bar{r}(t) = \begin{pmatrix} x(0) + v_x(0) \cdot t \\ y(0) + v_y(0) \cdot t - \frac{g}{2} \cdot t^2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.33)$$

Tömör jelöléssel:

$$\bar{a}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ -g \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.34)$$

$$\bar{v}(t) = \begin{pmatrix} v_x(0) \\ v_y(0) - g \cdot t \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_x(0) \\ v_y(0) \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -g \\ 0 \end{pmatrix} \cdot t = \bar{v}(0) + \bar{g} \cdot t \quad (3.35)$$

$$\bar{r}(t) = \begin{pmatrix} x(0) + v_x(0) \cdot t \\ y(0) + v_y(0) \cdot t - \frac{g}{2} \cdot t^2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_x(0) \\ v_y(0) \\ 0 \end{pmatrix} \cdot t + \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{g}{2} \\ 0 \end{pmatrix} \cdot t^2 = \bar{r}(0) + \bar{v}(0) \cdot t + \frac{\bar{g}}{2} \cdot t^2$$

(3.36)

Most határozzuk meg az anyagi pont pályájának egyenletét $y=f(x)$ alakban, feltéve, hogy $x(0)=0, y(0)=0$.

$$\text{I. } x = v_x(0) \cdot t \Rightarrow t = \frac{x}{v_x(0)}$$

$$\text{II. } y = v_y(0) \cdot t - \frac{g}{2} \cdot t^2$$

$$\text{I és II. } y = v_y(0) \cdot \frac{x}{v_x(0)} - \frac{g}{2} \cdot \left(\frac{x}{v_x(0)}\right)^2$$

$$y = x \cdot \frac{v_y(0)}{v_x(0)} - \frac{g}{2 \cdot v_x^2(0)} \cdot x^2 \quad (3.37)$$

$$y = -\frac{g}{2 \cdot v_x^2(0)} \cdot x^2 + \frac{v_y(0)}{v_x(0)} \cdot x \quad (3.38)$$

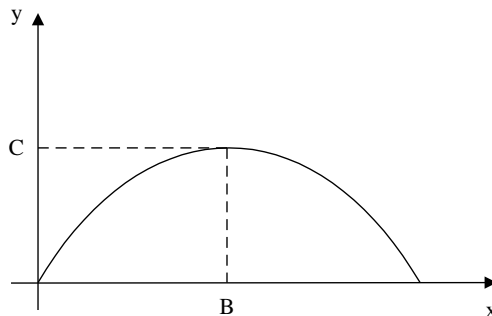
Vezessük be a következő állandókat:

$$A = \frac{g}{2 \cdot v_x^2(0)}, \quad (3.39) \quad B = \frac{v_x(0) \cdot v_y(0)}{g}, \quad (3.40) \quad C = \frac{v_y^2(0)}{2 \cdot g} \quad (3.41)$$

Ekkor a pálya egyenlete:

$$y = -A \cdot (x - B)^2 + C \quad (3.42)$$

A fenti függvény képe parabola, amelyet a 35. ábra szemléltet:

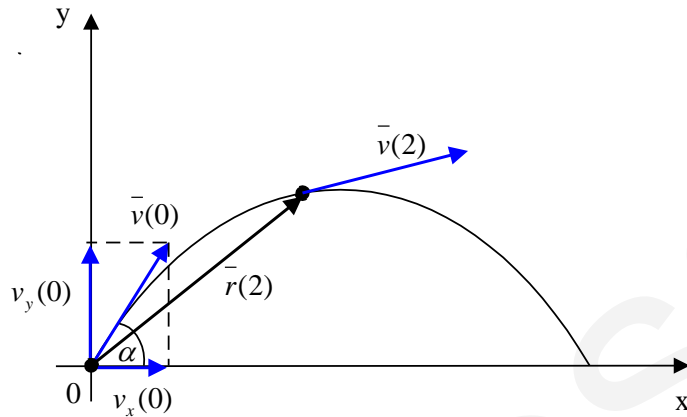


35. ábra. A parabola jellemzői

Feladatok

1. feladat

A talajszintről $v(0)$ nagyságú kezdősebességgel eldobjuk egy követ. A kezdősebesség vízszintessel bezárt szöge α .



Adatok: $v(0) = 100 \left[\frac{m}{s} \right]$, $\alpha = 40^\circ$, $g = 9,81 \left[\frac{m}{s^2} \right]$

a) Számítsuk ki a kő hely- és sebességvektorát az eldobást követően 2 [s]-al!

b) Számítsuk ki ekkor a kő távolságát az eldobás helyétől!

c) Számítsuk ki a fenti pillanatban a kő sebességének nagyságát!

Megoldás:

a)

$$\vec{r}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} [m], \quad \vec{g} = \begin{pmatrix} 0 \\ -9,81 \end{pmatrix} \left[\frac{m}{s^2} \right],$$

$$\vec{v}(0) = \begin{pmatrix} v_x(0) \\ v_y(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_0 \cdot \cos \alpha \\ v_0 \cdot \sin \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100 \cdot \cos 40^\circ \\ 100 \cdot \sin 40^\circ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 76,6 \\ 64,28 \end{pmatrix} \left[\frac{m}{s} \right]$$

$$\vec{r}(t) = \vec{r}(0) + \vec{v}(0) \cdot t + \frac{\vec{g}}{2} \cdot t^2$$

$$\vec{r}(2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 76,6 \\ 64,28 \end{pmatrix} \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -9,81 \end{pmatrix} \cdot 2^2 = \begin{pmatrix} 76,6 \cdot 2 \\ 64,28 \cdot 2 - \frac{9,81}{2} \cdot 2^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 153,2 \\ 108,94 \end{pmatrix} [m]$$

$$\vec{v}(2) = \vec{v}(0) + \vec{g} \cdot t = \begin{pmatrix} 76,6 \\ 64,28 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -9,81 \end{pmatrix} \cdot 2 = \begin{pmatrix} 76,6 \\ 64,28 - 9,81 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 76,6 \\ 44,66 \end{pmatrix} \left[\frac{m}{s} \right]$$

b)

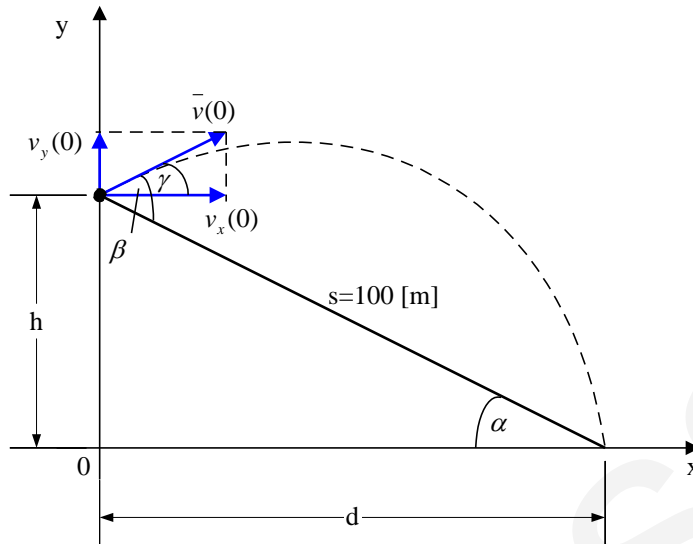
$$d = |\vec{r}(2) - \vec{r}(0)| = |\vec{r}(2)| = \sqrt{153,2^2 + 108,94^2} = 188 [m]$$

c)

$$|\vec{v}(2)| = \sqrt{76,6^2 + 44,66^2} = 88,67 \left[\frac{m}{s} \right]$$

2. feladat

Egy s hosszúságú lejtő tetejéről egy ágyúval tüzelünk. A lejtő vízszintessel bezárt szöge α , az ágyú csöve a lejtővel β szöget zár be.



Adatok: $s = 100 \text{ [m]}$, $\alpha = 30^\circ$, $\beta = 45^\circ$, $g = 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$

- a) Számítsuk ki, hogy mekkora a lövedék kezdősebességének nagysága, ha az éppen a lejtő alján csapódik be! (A légellenállástól eltekintünk.)
 b) Számítsuk ki a lövedék sebességének nagyságát a becsapódáskor!

Megoldás:

a)

Jelölje t a lövés és a becsapódás között eltelt idő.

$$\vec{r}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 100 \cdot \sin 30^\circ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 50 \end{pmatrix} \text{ [m]}, \quad \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} d \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100 \cdot \cos 30^\circ \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 86,6 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ [m]}$$

$$\vec{g} = \begin{pmatrix} 0 \\ -9,81 \end{pmatrix} \frac{\text{m}}{\text{s}^2}, \quad \gamma = \beta - \alpha = 45 - 30 = 15^\circ$$

$$\vec{v}(0) = \begin{pmatrix} v_x(0) \\ v_y(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_0 \cdot \cos \gamma \\ v_0 \cdot \sin \gamma \end{pmatrix} \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$\vec{r}(t) = \vec{r}(0) + \vec{v}(0) \cdot t + \frac{\vec{g}}{2} \cdot t^2$$

$$\begin{pmatrix} 86,6 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 50 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_0 \cdot \cos 15^\circ \\ v_0 \cdot \sin 15^\circ \end{pmatrix} \cdot t + \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -g \end{pmatrix} \cdot t^2 = \begin{pmatrix} v_0 \cdot \cos 15^\circ \cdot t \\ 50 + v_0 \cdot \sin 15^\circ \cdot t - \frac{9,81}{2} \cdot t^2 \end{pmatrix}$$

$$\text{I. } 86,6 = v_0 \cdot \cos 15^\circ \cdot t$$

$$\text{II. } 0 = 50 + v_0 \cdot \sin 15^\circ \cdot t - \frac{9,81}{2} \cdot t^2$$

$$\text{I. } t = \frac{86,6}{v_0 \cdot \cos 15^\circ}$$

$$\text{II. } 0 = 50 + v_0 \cdot \sin 15^\circ \cdot \frac{86,6}{v_0 \cdot \cos 15^\circ} - \frac{9,81}{2} \cdot \left(\frac{86,6}{v_0 \cdot \cos 15^\circ} \right)^2$$

$$0 = 50 + 86,6 \cdot \tan 15^\circ - \frac{9,81}{2} \cdot \frac{86,6^2}{v_0^2 \cdot \cos^2 15^\circ} = 73,2 - \frac{39426,4}{v_0^2}$$

$$v_0^2 = \frac{39426,4}{73,2}$$

$$v_0 = \sqrt{\frac{39426,4}{73,2}} = 23,2 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

b)

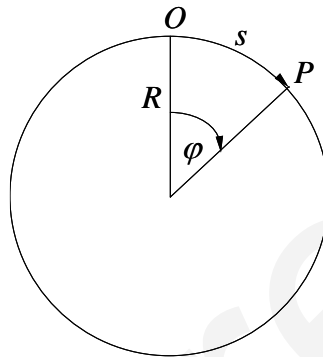
$$t = \frac{86,6}{v_0 \cdot \cos 15^\circ} = \frac{86,6}{23,2 \cdot \cos 15^\circ} = 3,86 \text{ [s]}$$

$$\vec{v}(t) = \vec{v}(0) + \vec{g} \cdot t = \begin{pmatrix} 23,2 \cdot \cos 15^\circ \\ 23,2 \cdot \sin 15^\circ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -9,81 \end{pmatrix} \cdot 3,86 = \begin{pmatrix} 22,41 \\ -31,86 \end{pmatrix} \left[\frac{m}{s} \right]$$

$$|\vec{v}(t)| = \sqrt{22,41^2 + (-31,86)^2} = 38,95 \left[\frac{m}{s} \right]$$

3.1.3.2 Körmozgás

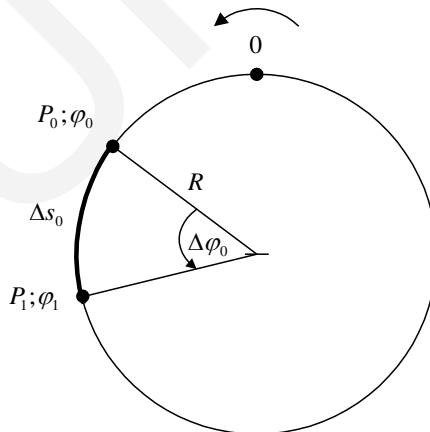
Itt a pont pályája speciálisan kör alakú, így célszerű az eddig használt pályamenti (kerületi) mennyiségek (a , v , s) helyett szögmennyiségeket bevezetni.



36. ábra. A szögkoordináta értelmezése

Vegyünk fel a körpályán egy O vonatkoztatási pontot! Legyen az s pályakoordináta értéke az O pontban zérus. Vezessük be a φ **szögkoordinátát**, mint az s pályakoordináta és a sugár hányadosát:

$$\varphi = \frac{s}{r} \quad \varphi = [\text{rad}] \quad (3.43)$$



37. ábra. A szögsebesség értelmezése

Ezt követően értelmezhetjük a pont átlagos és pillanatnyi szögsebességét és szögyorsulását:

Átlagos szögsebesség a $[t_0, t_1]$ időtartamon:

$$\omega[t_0; t_1] = \frac{\Delta\varphi_0}{\Delta t} = \frac{\varphi(t_1) - \varphi(t_0)}{t_1 - t_0} \quad (3.44)$$

Szögsebesség a t_0 pillanatban:

$$\omega(t_0) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \varphi_0}{\Delta t} = \lim_{t_1 \rightarrow t_0} \frac{\varphi(t_1) - \varphi(t_0)}{t_1 - t_0} = \frac{d\varphi_0}{dt}, \quad \omega = \left[\frac{\text{rad}}{\text{s}} \right] \quad (3.45)$$

Átlagos szöggyorsulás a $[t_0, t_1]$ időtartamon:

$$\varepsilon[t_0, t_1] = \frac{\Delta \omega_0}{\Delta t} = \frac{\omega(t_1) - \omega(t_0)}{t_1 - t_0} \quad (3.46)$$

Szöggyorsulás a t_0 pillanatban:

$$\varepsilon(t_0) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \omega_0}{\Delta t} = \lim_{t_1 \rightarrow t_0} \frac{\omega(t_1) - \omega(t_0)}{t_1 - t_0} = \frac{d\omega_0}{dt}, \quad \varepsilon = \left[\frac{\text{rad}}{\text{s}^2} \right] \quad (3.47)$$

Kapcsolat a pályamenti és szögmennyiségek között

A pályakoordináta és szögkoordináta közötti kapcsolatot már korábban a 3.43 összefüggéssel már értelmeztük. Most származtassuk a pályamenti és szögsebesség, valamint pályamenti és szöggyorsulás közötti kapcsolatokat:

$$\omega(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \varphi}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\frac{\Delta s}{R}}{\Delta t} = \frac{1}{R} \cdot \overbrace{\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}}^{v(t)} = \frac{1}{R} \cdot v(t) = \frac{v(t)}{R} \quad (3.48)$$

$$\varepsilon(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \omega}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\frac{\Delta v}{R}}{\Delta t} = \frac{1}{R} \cdot \overbrace{\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t}}^{a(t)} = \frac{1}{R} \cdot a(t) = \frac{a(t)}{R} \quad (3.49)$$

Tehát egy pályamenti mennyiséget elosztva a körpálya sugarával, megkapjuk a hozzá tartozó szögmennyiséget.

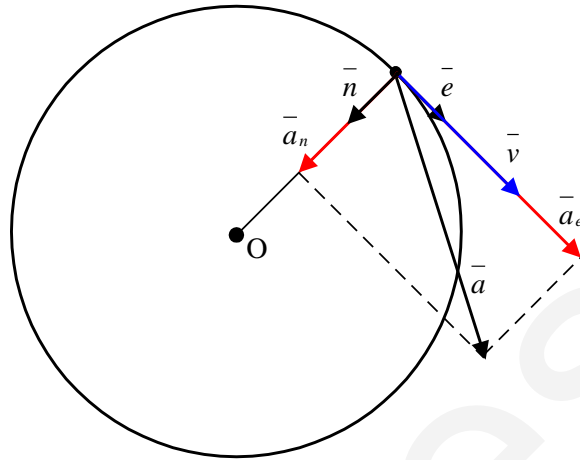
Egyenletes és egyenletesen változó körmozgás $\varepsilon(t)$, $\omega(t)$ és $\varphi(t)$ függvényei

A pályamenti és szögmennyiségek közötti összefüggéseket felhasználva megkapjuk az egyenletes és az egyenletesen változó körmozgás $\varepsilon(t)$, $\omega(t)$ és $\varphi(t)$ függvényeit:

| Pályamenti mennyiségek Egyenletes mozgás: | Szögmennyiségek Egyenletes körmozgás: |
|--|---|
| $a(t) = 0$ | $\varepsilon(t) = 0$ |
| $v(t) = v = \text{állandó}$ | $\omega(t) = \omega = \text{állandó}$ |
| $s(t) = s(0) + v \cdot t$ | $\varphi(t) = \varphi(0) + \omega \cdot t$ |
| Egyenletesen változó mozgás: | Egyenletesen változó körmozgás: |
| $a(t) = a = \text{állandó}$ | $\varepsilon(t) = \varepsilon = \text{állandó}$ |
| $v(t) = v(0) + a \cdot t$ | $\omega(t) = \omega(0) + \varepsilon \cdot t$ |
| $s(t) = s(0) + v(0) \cdot t + \frac{a}{2} \cdot t^2$ | $\varphi(t) = \varphi(0) + \omega(0) \cdot t + \frac{\varepsilon}{2} \cdot t^2$ |

Körmozgás leírása vektormennyiségekkel

Körmozgás esetén a sebességvektor a körpálya érintőjének irányába mutat, míg a gyorsulásvektor felbontható egy a kör érintőjével párhuzamos, és egy arra merőleges komponensre, amely a kör középpontja felé mutat. Az első érintő-, míg a másodikat normál irányú gyorsulásnak nevezzük.



38. ábra. A körmozgás vektoriális jellemzői

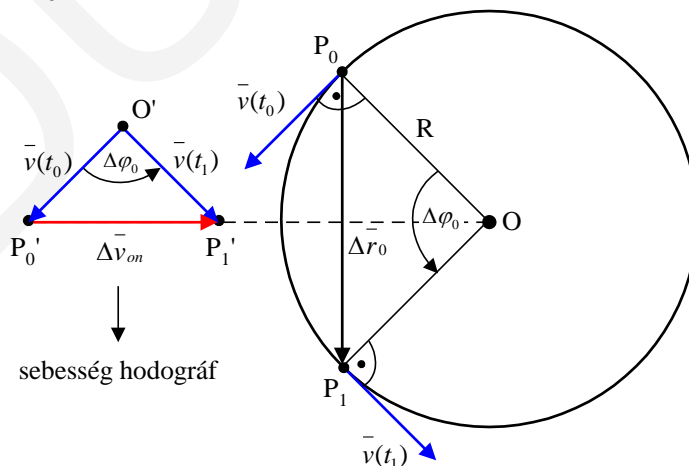
Az érintő irányú komponens felelős a sebességvektor nagyságának, míg a normál irányú komponens az irányának megváltozásáért.

Az érintő és normál irányú gyorsulás nagysága

Könnyen belátható, hogy az érintő irányú gyorsulás nagysága megegyezik a pályamenti gyorsulás nagyságával.

$$|\vec{a}_e| = |a| \quad (3.50)$$

Számazzuk a normál irányú gyorsulás nagyságára vonatkozó összefüggést, feltételezve, hogy az anyagi pont sebessége állandó nagyságú ($|\vec{v}(t_0)| = |\vec{v}(t_1)| = \dots = |\vec{v}(t)| = \text{állandó}$). Ehhez tekintsük a 39. ábrát.



39. ábra. A normális irányú gyorsulás meghatározása

Az ábrán látható $P_1 O P_0$ és $P'_1 O' P'_0$ háromszögek hasonlóak. Ebből adódóan:

$$\frac{|\Delta \vec{v}_{0n}|}{|\vec{v}(t_0)|} = \frac{|\Delta \vec{r}_0|}{R} \Rightarrow |\Delta \vec{v}_{0n}| = \frac{|\vec{v}(t_0)|}{R} \cdot |\Delta \vec{r}_0|$$

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta \vec{v}_{0n}}{\Delta t} \right| = \frac{|\vec{v}(t_0)|}{R} \cdot \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta \vec{r}_0}{\Delta t} \right|$$

$$|\vec{a}_n(t_0)| = \frac{|\vec{v}(t_0)| \cdot |\vec{v}(t_0)|}{R} = \frac{v^2(t_0)}{R}$$

Így a normálirányú gyorsulás nagyságára az alábbi összefüggést kapjuk:

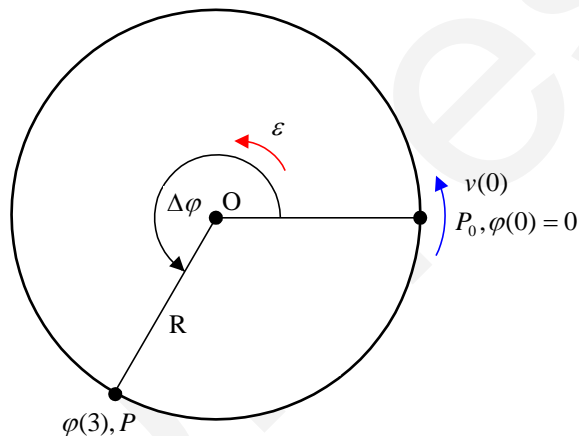
$$|\vec{a}_n| = \frac{v^2}{R} \quad (3.51)$$

A 3.50 és 3.51 összefüggésekben v és a a pályamenti sebesség és gyorsulás.

Feladatok

1. feladat

Egy anyagi pont a körpálya P_0 pontjából $v(0)$ kezdeti pályamenti sebességgel indulva egyenletesen változó körmozgást végez állandó ε szöggyorsulással.



Adatok: $R = 5 \text{ [m]}$, $v(0) = 3 \left(\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)$, $\varepsilon = \frac{2}{5} \left[\frac{\text{rad}}{\text{s}^2}\right]$

a) Számítsuk ki az anyagi pont pályamenti és szögsebességét az indulás után 3 [s]-al!

b) Számítsuk ki a szögkoordináta értékét a fenti pillanatban! ($\varphi(0) = 0$)

c) Számítsuk ki az érintő- és normálirányú gyorsulás, valamint a gyorsulásvektor nagyságát az indulás után 3 [s]-al!

Megoldás:

a)

$$\omega(0) = \frac{v(0)}{R} = \frac{3}{5} \left[\frac{\text{rad}}{\text{s}}\right]$$

$$\omega(3) = \omega(0) + \varepsilon \cdot 3 = \frac{3}{5} + \frac{2}{5} \cdot 3 = \frac{9}{5} = 1,8 \left[\frac{\text{rad}}{\text{s}}\right]$$

$$v(3) = \omega(3) \cdot R = 9 \left[\frac{\text{m}}{\text{s}}\right]$$

b)

$$\varphi(3) = \underbrace{\varphi(0)}_0 + \omega(0) \cdot 3 + \frac{\varepsilon}{2} \cdot 3^2 = \frac{3}{5} \cdot 3 + \frac{1}{5} \cdot 3^2 = \frac{9}{5} + \frac{9}{5} = \frac{18}{5} = 3,6 \text{ [rad]} = 206,3^\circ$$

c)

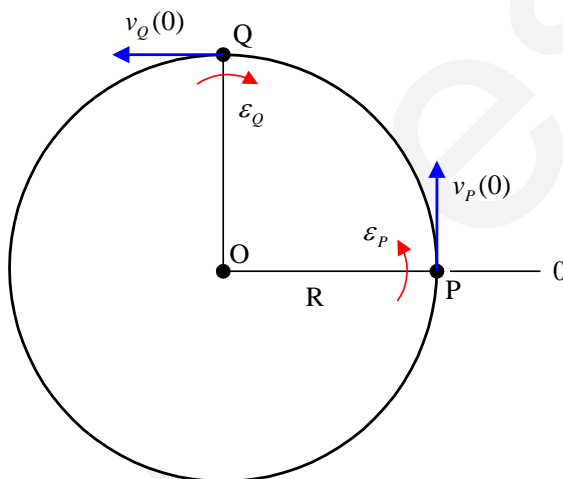
$$a_e(3) = a = \varepsilon \cdot R = 2 \left[\frac{m}{s^2} \right]$$

$$a_n(3) = \frac{v^2(3)}{R} = \frac{9^2}{5} = \frac{81}{5} = 16,2 \left[\frac{m}{s^2} \right]$$

$$|\bar{a}(3)| = \sqrt{2^2 + 16,2^2} = 16,32 \left[\frac{m}{s^2} \right]$$

2. feladat

Az R sugarú körpálya P és Q pontjából egyidejűleg elindul két anyagi pont. Az egyik egyenletesen gyorsuló, a másik egyenletesen lassuló körmozgást végez. A kezdő pályamenti sebességeket $v_P(0)$ és $v_Q(0)$, a szöggyorsulásokat pedig ε_P és ε_Q jelöli.



Adatok: $v_P(0) = 4 \left[\frac{m}{s} \right]$, $v_Q(0) = 10 \left[\frac{m}{s} \right]$, $\varepsilon_P = 3 \left[\frac{rad}{s^2} \right]$, $\varepsilon_Q = -2 \left[\frac{rad}{s^2} \right]$, $R = 3 \text{ [m]}$.

a) Mennyi idő (t) múlva éri utol a P pontból induló anyagi pont a Q pontból indulót? Számítsuk ki a szögkoordináta értékét ebben a pillanatban!

b) Számítsuk ki a szögsebességek értékét a fenti pillanatában!

c) Számítsuk ki ekkor az érintő és normál irányú gyorsulások, valamint a gyorsulásvektorok nagyságát!

Megoldás:

a)

$$\varphi_P(0) = 0$$

$$\varphi_Q(0) = \frac{\pi}{2} \text{ [rad]}$$

$$\varphi_P(t) = \varphi_Q(t)$$

$$\omega_P(0) = \frac{v_P(0)}{R} = \frac{4}{3} \left[\frac{rad}{s} \right]$$

$$\omega_Q(0) = \frac{v_Q(0)}{R} = \frac{10}{3} \left[\frac{\text{rad}}{\text{s}} \right]$$

$$\varphi_P(t) = \varphi_P(0) + \omega_P(0) \cdot t + \frac{\varepsilon_P}{2} \cdot t^2 = 0 + \frac{4}{3} \cdot t + \frac{3}{2} \cdot t^2$$

$$\varphi_Q(t) = \varphi_Q(0) + \omega_Q(0) \cdot t + \frac{\varepsilon_Q}{2} \cdot t^2 = \frac{\pi}{2} + \frac{10}{3} \cdot t - \frac{2}{2} \cdot t^2$$

$$\frac{4}{3} \cdot t + \frac{3}{2} \cdot t^2 = \frac{\pi}{2} + \frac{10}{3} \cdot t - \frac{2}{2} \cdot t^2$$

$$\frac{5}{2} \cdot t^2 - 2 \cdot t - \frac{\pi}{2} = 0 \Rightarrow t = 1,29 \text{ [s]}$$

$$\varphi_P(t) = \varphi_P(0) + \omega_P(0) \cdot t + \frac{\varepsilon_P}{2} \cdot t^2 = 0 + \frac{4}{3} \cdot 1,29 + \frac{3}{2} \cdot 1,29^2 = 4,22 \text{ [rad]} = 241,79^\circ$$

b)

$$\omega_P(t) = \omega_P(0) + \varepsilon_P \cdot t = \frac{4}{3} + 3 \cdot 1,29 = 5,2 \left[\frac{\text{rad}}{\text{s}} \right]$$

$$\omega_Q(t) = \omega_Q(0) + \varepsilon_Q \cdot t = \frac{10}{3} - 2 \cdot 1,29 = 0,75 \left[\frac{\text{rad}}{\text{s}} \right]$$

c)

$$a_{Pe}(t) = a_P(t) = \varepsilon_P \cdot R = 9 \left[\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right]$$

$$a_{Pn}(t) = \frac{v_P^2(t)}{R} = \omega_P^2(t) \cdot R = 5,2^2 \cdot 3 = 81 \left[\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right]$$

$$a_{Qe}(t) = a_Q(t) = \varepsilon_Q \cdot R = -6 \left[\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right]$$

$$a_{Qn}(t) = \frac{v_Q^2(t)}{R} = \omega_Q^2(t) \cdot R = 1,72 \left[\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right]$$

$$|\bar{a}_P(t)| = \sqrt{a_{Pe}^2(t) + a_{Pn}^2(t)} = \sqrt{9^2 + 81^2} = 81,5 \left[\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right]$$

$$|\bar{a}_Q(t)| = \sqrt{a_{Qe}^2(t) + a_{Qn}^2(t)} = \sqrt{(-6)^2 + 1,72^2} = 6,24 \left[\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right]$$

3.2 Anyagi pont kinetikája

3.2.1 Newton törvényei, erőtvények, anyagi pont egyensúlya

3.2.1.1 Newton törvényei

Newton törvényei a műszaki mechanika alaptörvényei (axiómái). Newton alapfeltevése szerint mindig található olyan vonatkoztatási rendszer, amelyben az ő törvényei érvényesek. Az ilyen vonatkoztatási rendszert **inercia rendszernek** nevezzük. A műszaki mechanikában a Földhöz rögzített vagy ahhoz képest állandó sebességgel haladó mozgást végző vonatkoztatási rendszer inercia rendszernek tekinthető. Minden más, a Földhöz képest gyorsuló vonatkoztatási rendszer nem inercia rendszer.

Newton első törvénye

Egy anyagi pont lendülete mindaddig állandó marad, amíg mechanikai kölcsönhatásba nem kerül más testekkel. Tehát kölcsönhatás nélkül:

$$\vec{p}(t) = \vec{p} = \text{állandó} \quad (3.52)$$

Speciálisan, ha a test tömege állandó ($m(t) = m = \text{állandó}$), akkor a sebessége is állandó:

$$\vec{v}(t) = \vec{v} = \text{állandó} \quad (3.53)$$

Tehát a test nyugalomban van, vagy a tömegközéppontja egyenes vonalú egyenletes mozgást végez.

Newton második törvénye

Ha az anyagi pont mechanikai kölcsönhatásban van más testekkel, akkor lendületének idő szerinti változási gyorsasága bármely t pillanatban megegyezik a többi test által rá együttesen kifejtett erővel, azaz az eredő erővel.

$$\vec{F} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{p}}{\Delta t} = \frac{d\vec{p}}{dt}, \quad \vec{F} = [N] \quad (3.54)$$

Ha a test tömege állandó, akkor:

$$\vec{F} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{p}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta(m \cdot \vec{v})}{\Delta t} = m \cdot \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = m \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} = m \cdot \vec{a} \quad (3.55)$$

A fenti összefüggésben \vec{a} a test tömegközéppontjának gyorsulása.

Newton harmadik törvénye

Két test mechanikai kölcsönhatása során teljesül az alábbi egyenlőség:

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21} \quad (3.56)$$

A fenti egyenletben az \vec{F}_{12} az 1-es test által a 2-esre kifejtett erő. Tehát, a két erő egyenlő nagyságú és irányú, de ellentétes értelmű (irányítású).

Newton negyedik törvénye

Ha a vizsgált test egyidejűleg több testtel van mechanikai kölcsönhatásban, akkor az eredő erő az alábbi összefüggéssel számítható:

$$\vec{F} = \sum_i \vec{F}_i = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_i + \dots \quad (3.57)$$

A fenti egyenletben \vec{F}_i jelöli azt az erőt, amelyet az i -edik test fejt ki a többi testtől függetlenül (a többi test hiányában).

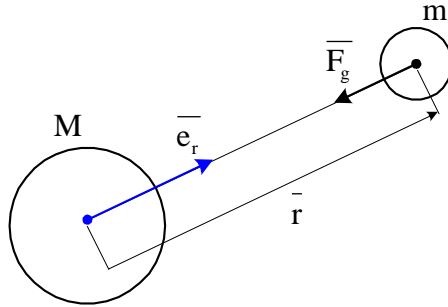
3.2.1.2 Erőtörvények

Erőtörvényről beszélünk, ha az erőt megadjuk a kölcsönhatást leíró paraméterek függvényében. Az erőtörvényeket kísérleti úton méréssel szokták meghatározni. A továbbiakban bemutatjuk a műszaki mechanikában előforduló fontosabb erőket és a hozzájuk tartozó erőtörvényeket.

Gravitációs erő

Egy M és m tömegű test között fellépő gravitációs (tömegvonzási) erő nagysága az alábbi összefüggéssel számítható:

$$|\vec{F}_g| = F_g = \gamma \cdot \frac{M \cdot m}{r^2}, \quad \gamma = 6.674 \cdot 10^{-11} \left[\frac{N \cdot m^2}{kg^2} \right] \quad (3.58)$$



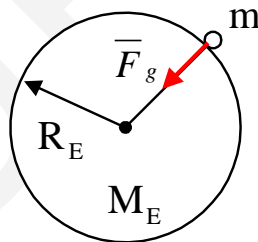
40. ábra. Gravitációs erő

A fenti egyenletben r a két test tömegközéppontjának távolsága, γ a gravitációs állandó ($\gamma = 6,674 \cdot 10^{-11} \left[\frac{N \cdot m^2}{kg^2} \right]$). Bevezetve az $\bar{e}_r = \frac{\bar{r}}{r}$ radiális egységvektort a gravitációs erő a következő alakban írható:

$$\bar{F}_g = -\gamma \cdot \frac{M \cdot m}{r^2} \cdot \bar{e}_r = -\gamma \cdot \frac{M \cdot m}{r^3} \cdot \bar{r} \quad (3.59)$$

ahol \bar{r} jelöli a helyvektort, amely az M tömegű test tömegközéppontjából az m tömegű test tömegközéppontjába mutat. Ha az egyik test a Föld, a másik egy hozzá képest elhanyagolható méretű tárgy annak felszínén, akkor a 3.59 egyenlet az alábbi alakban írható:

$$\bar{F}_g = \left(-\gamma \frac{M_E}{R_E^2} \cdot \bar{e}_r \right) \cdot m = m \cdot \bar{g} \quad (3.60)$$



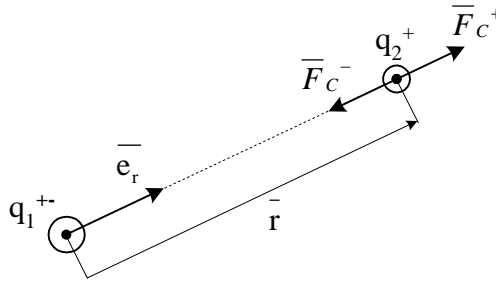
41. ábra. Gravitációs erő a Föld felszínén

Az egyenletben (3.60) M_E és R_E a Föld tömege és sugara, \bar{g} a gravitációs gyorsulás. Mivel a Föld nem tökéletesen gömb alakú, \bar{g} nagysága függ a földrajzi helytől. Magyarországon területén:

$$g = |\bar{g}| = 9,81 \left[\frac{m}{s^2} \right]$$

Coulomb erő

A Coulomb törvény két nyugalomban lévő, elektromosan töltött test közötti erőhatást adja meg.



42. ábra. Coulomb erő

A törvény szerint a q_1 töltésű test által a q_2 töltésűre kifejtett erő nagysága:

$$|\vec{F}_C| = F_C = k \cdot \frac{|q_1| \cdot |q_2|}{r^2} \quad (3.61)$$

A fenti összefüggésben $k = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon}$, $\epsilon = \epsilon_0 \cdot \epsilon_r$, $\epsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12} \left[\frac{C^2}{N \cdot m^2} \right]$, r a testek töltésközéppontjának távolsága (gömbszimmetrikus töltéseloszlású test esetén a geometriai középpont), ϵ_0 a vákuum permittivitása, ϵ_r a relatív permittivitás, amely a töltések közötti teret kitöltő közeget jellemzi elektromos szempontból. A permittivitás helyett gyakran a dielektromos állandó kifejezést használjuk. A következő táblázat néhány anyag relatív permittivását mutatja:

| Anyag | ϵ_r |
|------------|--------------|
| Vákuum | 1 |
| Levegő | 1,00059 |
| Teflon | 2,1 |
| Polietilén | 2 |
| Üveg | 5-19 |
| Víz | 80,4 |
| Porcelán | 5,4 |

Speciálisan, ha a teret vákuum tölti ki, akkor a k konstans Coulomb állandónak nevezzük, melynek értéke:

$$k = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon} = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot \epsilon_r} = 8,988 \cdot 10^9 \left[\frac{N \cdot m^2}{C^2} \right]$$

A Coulomb törvény vektoros alakban:

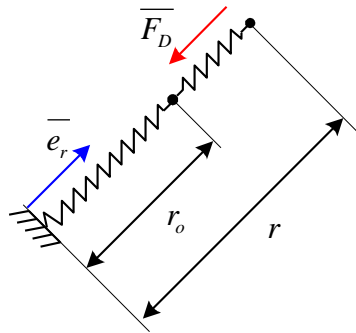
$$\vec{F}(\vec{r}) = k \cdot \frac{q_1 \cdot q_2}{r^2} \cdot \vec{e}_r = k \cdot \frac{q_1 \cdot q_2}{r^3} \cdot \vec{r} \quad (3.62)$$

ahol $\vec{e}_r = \frac{\vec{r}}{r}$ a gravitációs erőnél már bevezetett radiális egységvektor.

Rugóerő

Egy **ideális rugó** által kifejtett erő nagysága a következő összefüggéssel számítható (43. ábra):

$$|\vec{F}_D| = F_D = D \cdot |r - r_0| = D \cdot \Delta r \quad (3.63)$$



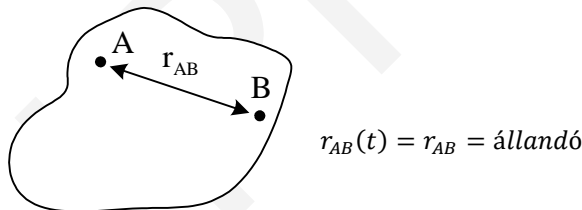
43. ábra. Rugó erő

ahol D a **rugómerevség**, r_0 a rugó terheletlen hossza, Δr pedig a deformáció nagysága. A rugóerő iránya párhuzamos a rugó irányával, értelme pedig ellentétel az $(r - r_0) \cdot \bar{e}_r$ vektorral. Tehát a rugó erőtvénnye a következő:

$$\vec{F}_D = -D \cdot (r - r_0) \cdot \bar{e}_r \quad (3.64)$$

Kényszererők

A kényszererő fogalmának értelmezéséhez szükségünk lesz a **merev test**, valamint kényszer fogalmára. Egy test merev, bármely két pontjának távolsága a test bármely mechanikai terhelése esetén állandó marad.

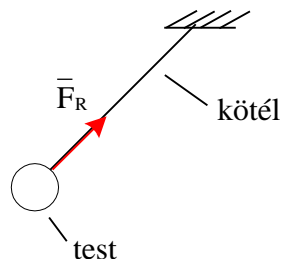


44. ábra. Merev test

A **kényszer** egy olyan merev test, amely egy másik testet egy adott görbe vagy felület mentén történő mozgásra vagy tartózkodásra kényszerít. A kényszer által a testre kifejtett erőt **kényszererőnek** nevezzük. A kényszererő nagysága általában ismeretlen, de meghatározható, ha a testre ható többi erő ismert.

Példák kényszerekre:

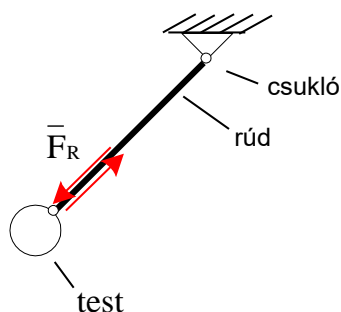
- 1) Nyújthatatlan kötél



45. ábra. Nyújthatatlan kötél

A kötéltől kifejtett kényszererő párhuzamos a kötéllal. A kötélró mindig húzó jellegű.

2) Merev rúd

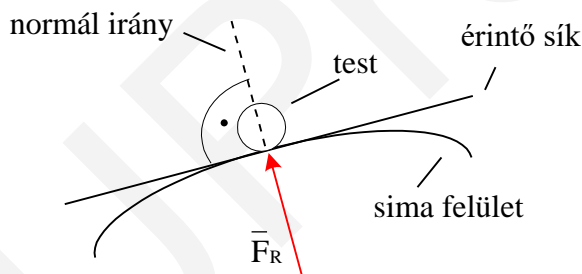


46. ábra. Merev rúd

Ha a rúd ideális csuklóhoz csatlakozik, akkor a kényszererő párhuzamos a rúddal. A rúderő egyaránt lehet húzó, vagy nyomó jellegű.

3) Sima vagy érdes merev felület:

Sima:

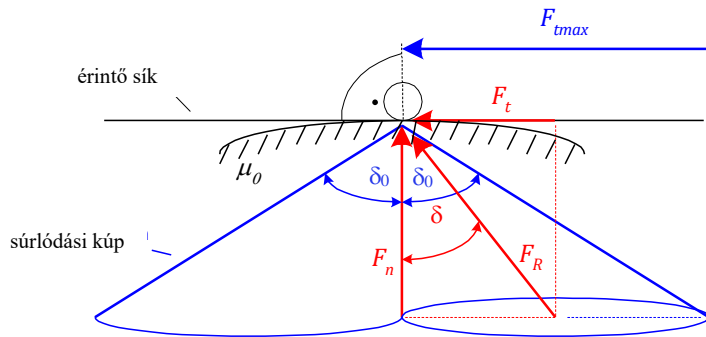


47. ábra. Sima merev felület

A **sima, merev felület** által kifejtett kényszererő merőleges a felület adott pontbeli érintő síkjára, más szóval normál irányú. A felület csak nyomó jellegű erőt tud kifejteni.

Érdes:

Az **érdes, merev felület** által kifejtett kényszererőnek egyaránt van a felületre merőleges és azzal párhuzamos (az érintősíkba eső) komponense. Ha a test nyugalomban van (48. ábra) akkor az érintő síkba eső komponensnek mindig van egy maximális értéke, ami felett a test megcsúszik.



48. ábra. Érdes, merev felület – a test nyugalomban van

A fenti, maximális érték egyenesen arányos a kényszererő normál irányú komponensével.

$$F_{tmax} = \mu_0 \cdot F_n \quad (3.65)$$

A fenti egyenletben μ_0 a **tapadási súrlódási tényező**. A test egyensúlyban van akkor és csak akkor, ha fennáll az alábbi egyenlőtlenség:

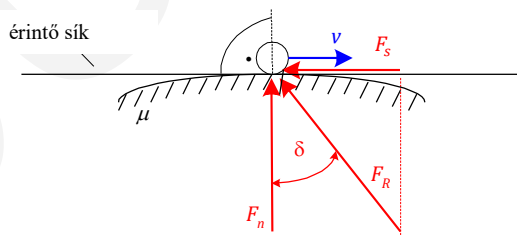
$$|F_t| \leq F_{tmax} = \mu_0 \cdot F_n \quad (3.66)$$

Bevezetjük a **súrlódási kúpot** (48. ábra), amelynek félnyílásszöge az alábbi összefüggéssel számítható:

$$\delta_0 = \mu_0 = \tan^{-1} \left(\frac{F_{tmax}}{F_n} \right) \quad (3.67)$$

Ha a test nyugalomban van, akkor a kényszererő (\vec{F}_R) a kúpon belül vagy határesetben annak a felületén helyezkedik el.

Abban az esetben, ha a test csúszik az érdes felületen, akkor a kényszererő érintő irányú komponense egyenesen arányos a normál irányúval, továbbá az érintő irányú komponens egyező irányú, de ellentétes értelmű a sebességvektorral.



49. ábra. Érdes merev felület – a test csúszik

$$F_s = \mu \cdot F_n \quad (3.68)$$

A fenti egyenletben μ a **csúszási súrlódási tényező**. Az alábbi táblázat a tapadási és csúszási súrlódási tényező értékét tartalmazza különböző anyagpárok esetén száraz és nedves körülmények között.

Súrlódási tényezők közelítő értéke különböző anyagpárok esetén [5]:

| Anyagpár | | Tapadási súrlódási tényező | | Csúszási súrlódási tényező | |
|-----------|------|----------------------------|--------|----------------------------|-----------|
| | | Száraz | Nedves | Száraz | Nedves |
| Alumínium | Acél | 0,61 | - | 0,47 | - |
| Sárgaréz | Acél | 0,35-0,51 | 0,19 | 0,44 | - |
| Beton | Gumi | 1 | 0,3 | 0,6-0,85 | 0,45-0,75 |
| Acél | Acél | 0,74-0,8 | 0,16 | 0,42-0,62 | - |
| Fa | Fém | 0,2-0,6 | 0,2 | - | - |
| Fa | Fa | 0,25-0,5 | 0,2 | - | - |

A fenti táblázat alapján megállapíthatók az alábbiak:

- A tapadási súrlódási tényező mindig nagyobb, mint a csúszási súrlódási.
- A súrlódási tényező értéke mindig nagyobb száraz, mint nedves körülmények között.

3.2.1.3 Anyagi pont egyensúlya

Az anyagi pont **egyensúlyban** van, ha a rá ható erők eredője zérus:

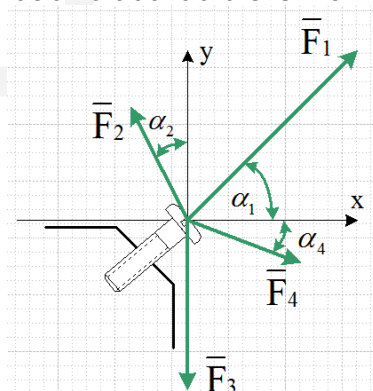
$$\vec{F} = \sum_i \vec{F}_i = \vec{0} \quad (3.69)$$

Newton második törvénye alapján egyensúlyi állapotban az anyagi pont gyorsulása zérus. Tehát nyugalomban van, vagy egyenes vonalú egyenletes mozgást végez. Ha az anyagi pont nyugalomban van, akkor statikus egyensúlyi állapotról beszélünk.

Feladatok

1. feladat

Egy csavarfejre négy erő hat az alábbi ábra szerint:



Adatok: $F_1 = 150[N]$, $F_2 = 80[N]$, $F_3 = 110[N]$, $F_4 = 100[N]$, $\alpha_1 = 30^\circ$, $\alpha_2 = 20^\circ$, $\alpha_4 = 15^\circ$.

- Számítsuk ki az erőrendszer eredő erejét!
- Számítsuk ki az eredő erő nagyságát!

Megoldás:

A feladat megoldható az általános térbeli erőrendszer esetén alkalmazott módszerrel, de síkbeli erőrendszer esetén célszerű az alábbi, egyszerű eljárást alkalmazni.

a)

$$\vec{F}_1 = F_1 \cdot \cos \alpha_1 \cdot \vec{i} + F_1 \cdot \sin \alpha_1 \cdot \vec{j} = \begin{pmatrix} F_1 \cdot \cos \alpha_1 \\ F_1 \cdot \sin \alpha_1 \end{pmatrix} [N]$$

$$\vec{F}_2 = -F_2 \cdot \sin \alpha_2 \cdot \vec{i} + F_2 \cdot \cos \alpha_2 \cdot \vec{j} = \begin{pmatrix} -F_2 \cdot \sin \alpha_2 \\ F_2 \cdot \cos \alpha_2 \end{pmatrix} [N]$$

$$\vec{F}_3 = 0 \cdot \vec{i} - F_3 \cdot \vec{j} = \begin{pmatrix} 0 \\ -F_3 \end{pmatrix} [N]$$

$$\vec{F}_4 = F_4 \cdot \cos \alpha_4 \cdot \vec{i} - F_4 \cdot \sin \alpha_4 \cdot \vec{j} = \begin{pmatrix} F_4 \cdot \cos \alpha_4 \\ -F_4 \cdot \sin \alpha_4 \end{pmatrix} [N]$$

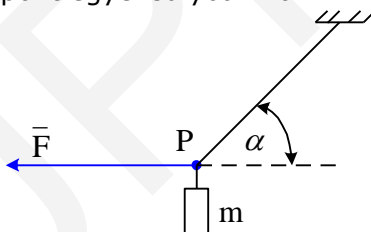
$$\begin{aligned} \vec{F} = \sum_i \vec{F}_i &= \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \vec{F}_4 = \begin{pmatrix} F_1 \cdot \cos \alpha_1 \\ F_1 \cdot \sin \alpha_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -F_2 \cdot \sin \alpha_2 \\ F_2 \cdot \cos \alpha_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -F_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} F_4 \cdot \cos \alpha_4 \\ -F_4 \cdot \sin \alpha_4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 200,26 \\ 14,29 \end{pmatrix} [N] \end{aligned}$$

b)

$$F = |\vec{F}| = \sqrt{(200,26)^2 + (14,29)^2} = 200,78 [N]$$

2. feladat

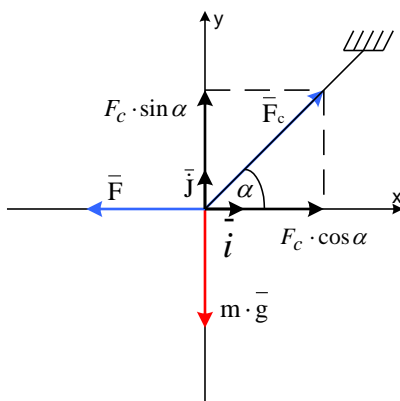
Az ábrán látható P anyagi pont egyensúlyban van.



Adatok: $F = 150 [N]$, $\alpha = 30^\circ$, $g = 9,81 \left[\frac{m}{s^2} \right]$.

Számítsuk ki a kötélen ébredő erő nagyságát és az anyagi pont tömegét!

Megoldás:



$$\vec{F} = -F \cdot \vec{i} + 0 \cdot \vec{j} = \begin{pmatrix} -F \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -150 \\ 0 \end{pmatrix} [\text{N}]$$

$$\vec{F}_c = F_c \cdot \cos \alpha \cdot \vec{i} + F_c \cdot \sin \alpha \cdot \vec{j} = \begin{pmatrix} F_c \cdot \cos 30^\circ \\ F_c \cdot \sin 30^\circ \end{pmatrix} [\text{N}]$$

$$m \cdot \vec{g} = 0 \cdot \vec{i} - m \cdot g \cdot \vec{j} = \begin{pmatrix} 0 \\ -m \cdot 9,81 \end{pmatrix} [\text{N}]$$

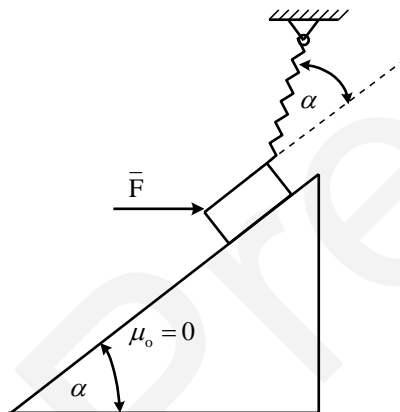
$$\vec{F} = \sum_i \vec{F}_i = \begin{pmatrix} -150 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} F_c \cdot \cos 30^\circ \\ F_c \cdot \sin 30^\circ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -m \cdot 9,81 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{I.} \quad -150 + F_c \cdot \cos 30^\circ = 0 \Rightarrow F_c = 173,2 [\text{N}]$$

$$\text{II.} \quad F_c \cdot \sin 30^\circ - m \cdot 9,81 = 0 \Rightarrow m = 8,83 [\text{kg}]$$

3. feladat

Az ábrán látható, sima felületű lejtőn elhelyezkedő m tömegű anyagi pont egyensúlyban van. A rugó Δr deformációja és D rugómerevsége ismert.

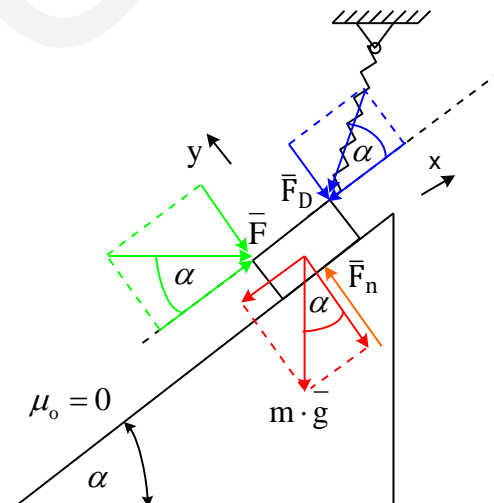


Adatok: $m = 40 [\text{kg}]$, $\alpha = 30^\circ$, $D = 1000 \left[\frac{\text{N}}{\text{mm}} \right]$, $\Delta r = 2 [\text{mm}]$, $g = 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.

- Számítsuk ki az \vec{F} erő nagyságát (\vec{F} vízszintes irányú)!
- Számítsuk ki a lejtő által kifejtett kényszererő nagyságát (\vec{F}_n)!

Megoldás:

- és b)



$$\vec{F} = F \cdot \cos \alpha \cdot \vec{i} - F \cdot \sin \alpha \cdot \vec{j} = \begin{pmatrix} F \cdot \cos 30^\circ \\ -F \cdot \sin 30^\circ \end{pmatrix} [\text{N}]$$

$$m \cdot \vec{g} = -m \cdot g \cdot \sin \alpha \cdot \vec{i} - m \cdot g \cdot \cos \alpha \cdot \vec{j} = \begin{pmatrix} -40 \cdot 9,81 \cdot \sin 30^\circ \\ -40 \cdot 9,81 \cdot \cos 30^\circ \end{pmatrix} [\text{N}]$$

$$\vec{F}_D = -F_D \cdot \cos \alpha \cdot \vec{i} - F_D \cdot \sin \alpha \cdot \vec{j} = \begin{pmatrix} -D \cdot \Delta r \cdot \cos \alpha \\ -D \cdot \Delta r \cdot \sin \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2000 \cdot \cos 30^\circ \\ -2000 \cdot \sin 30^\circ \end{pmatrix} [\text{N}]$$

$$\vec{F}_n = 0 \cdot \vec{i} + F_n \cdot \vec{j} = \begin{pmatrix} 0 \\ F_n \end{pmatrix} [\text{N}]$$

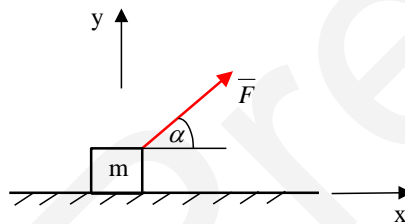
$$\vec{F} = \sum_i \vec{F}_i = \begin{pmatrix} F \cdot \cos 30^\circ \\ -F \cdot \sin 30^\circ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -40 \cdot 9,81 \cdot \sin 30^\circ \\ -40 \cdot 9,81 \cdot \cos 30^\circ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2000 \cdot \cos 30^\circ \\ -2000 \cdot \sin 30^\circ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ F_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{I.} \quad F \cdot \cos 30^\circ - 40 \cdot 9,81 \cdot \sin 30^\circ - 2000 \cdot \cos 30^\circ = 0 \Rightarrow F = 2227 [\text{N}]$$

$$\text{II.} \quad -F \cdot \sin 30^\circ - 40 \cdot 9,81 \cdot \cos 30^\circ - 2000 \cdot \sin 30^\circ + F_n = 0 \Rightarrow F_n = 2453,3 [\text{N}]$$

4. feladat

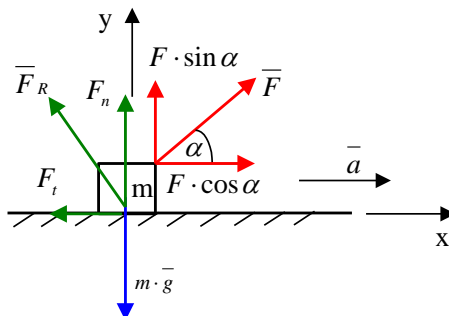
Egy vízszintes, érdes síkfelületen nyugvó anyagi pontra \vec{F} erővel hatunk az ábra szerint.



Adatok: $F = 1500 [\text{N}]$, $m = 1000 [\text{kg}]$, $\mu_0 = 0,15$, $\mu = 0,1$, $\alpha = 15^\circ$

- Az anyagi pont elmozdul, vagy nyugalomban marad?
- Ha elmozdul, akkor számítsuk ki gyorsulásának nagyságát, valamint a mozgás során a talaj által rá kifejtett kényszererő nagyságát!
- Ha az anyagi pont nyugalomból indult, számítsuk ki sebességének nagyságát az indulás után 5 [s]-al!
- Számítsuk ki, hogy mekkora távolságot tesz meg az anyagi pont a fenti 5 [s] alatt!

Megoldás:



a) Feltételezzük az anyagi pont egyensúlyát, majd megvizsgáljuk, hogy az milyen F értékek esetén áll fenn.

Egyensúlyi egyenletek:

$$\sum_i \vec{F}_i = \vec{F} + m \cdot \vec{g} + \vec{F}_K = \vec{0}$$

$$\begin{pmatrix} F \cdot \cos\alpha \\ F \cdot \sin\alpha \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -m \cdot g \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -F_t \\ F_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{I. } F \cdot \cos\alpha - F_t = 0 \Rightarrow F_t = F \cdot \cos\alpha$$

$$\text{II. } F \cdot \sin\alpha - m \cdot g + F_n = 0 \Rightarrow F_n = m \cdot g - F \cdot \sin\alpha$$

Az anyagi pont egyensúlyban van akkor, és csak akkor, ha:

$$|F_t| \leq \mu_0 \cdot F_n$$

$$-\mu_0 \cdot F_n \leq F_t \leq \mu_0 \cdot F_n$$

1. eset:

$$-\mu_0 \cdot F_n \leq F_t$$

$$-\mu_0 \cdot (m \cdot g - F \cdot \sin\alpha) \leq F \cdot \cos\alpha$$

$$-\mu_0 \cdot m \cdot g + \mu_0 \cdot F \cdot \sin\alpha \leq F \cdot \cos\alpha$$

$$-\mu_0 \cdot m \cdot g \leq F \cdot (\cos\alpha - \mu_0 \cdot \sin\alpha)$$

$$-1481,4[N] \leq F$$

2. eset:

$$F_t \leq \mu_0 \cdot F_n$$

$$F \cdot \cos\alpha \leq \mu_0 \cdot (m \cdot g - F \cdot \sin\alpha)$$

$$F \cdot \cos\alpha \leq \mu_0 \cdot m \cdot g - \mu_0 \cdot F \cdot \sin\alpha$$

$$F \cdot (\cos\alpha + \mu_0 \cdot \sin\alpha) \leq \mu_0 \cdot m \cdot g$$

$$F \leq 1367 [N]$$

Tehát az anyagi pont egyensúlyban van akkor, és csak akkor, ha:

$$-1481,4[N] \leq F \leq 1367 [N]$$

Következtetésképp, ha $F=1500[N]$ akkor az anyagi pont elmozdul.

b) Newton II. törvénye:

$$\sum_i \vec{F}_i = \vec{F} + m \cdot \vec{g} + \vec{F}_K = m \cdot \vec{a}$$

$$\begin{pmatrix} F \cdot \cos\alpha \\ F \cdot \sin\alpha \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -m \cdot g \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -F_s \\ F_n \end{pmatrix} = m \cdot \begin{pmatrix} \vec{a} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{I. } F \cdot \cos\alpha - F_s = m \cdot a$$

$$\text{II. } F \cdot \sin\alpha - m \cdot g + F_n = 0 \Rightarrow F_n = m \cdot g - F \cdot \sin\alpha$$

$$\text{III. } F_s = \mu \cdot F_n = \mu \cdot (m \cdot g - F \cdot \sin\alpha) = 942,2 [N]$$

$$\text{I. } F \cdot \cos\alpha - \underbrace{\mu \cdot (m \cdot g - F \cdot \sin\alpha)}_{F_s} = m \cdot a$$

$$m \cdot a = F \cdot \cos\alpha + \mu \cdot F \cdot \sin\alpha - \mu \cdot m \cdot g$$

$$m \cdot a = F \cdot (\cos\alpha + \mu \cdot \sin\alpha) - \mu \cdot m \cdot g$$

$$a = \frac{F}{m} \cdot (\cos\alpha + \mu \cdot \sin\alpha) - \mu \cdot g = 0,507 \left[\frac{m}{s^2} \right]$$

$$|\vec{F}_K| = F_K = \sqrt{F_s^2 + F_n^2} = \sqrt{942,2^2 + 9422^2} = 9468,7 [N]$$

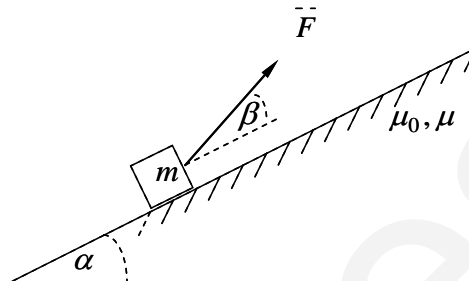
$$c) v(5) = \underbrace{v(0)}_0 + a \cdot 5 = 0,507 \cdot 5 = 2,535 \left[\frac{m}{s} \right]$$

$$d) s(5) = \underbrace{s(0)}_0 + \underbrace{v(0)}_0 \cdot 5 + \frac{a}{2} \cdot 5^2$$

$$\Delta s = s(5) - s(0) = \frac{a}{2} \cdot 5^2 = \frac{0,507}{2} \cdot 5^2 = 6,337 [m]$$

5. feladat

Egy m tömegű pontszerű testet egyenes vonalú, a vízszintessel α szöget bezáró érdes lejtőn állandó \vec{F} erővel Δt ideig húzunk felfelé.

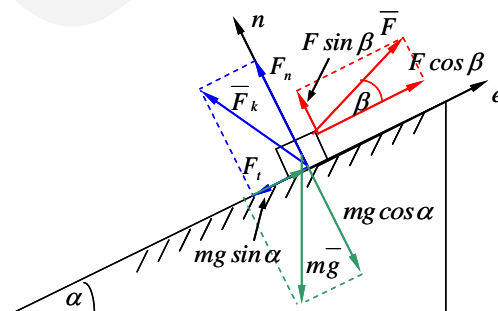


Adatok: $F = 5 [kN]$, $m = 500 [kg]$, $v_0 = 0 \left[\frac{m}{s} \right]$, $\Delta t = 3 [s]$, $\mu_0 = 0,3$, $\mu = 0,1$, $\alpha = 30^\circ$, $\beta = 10^\circ$, $g = 9,81 \left[\frac{m}{s^2} \right]$.

- Elegendő-e a megadott erő nagysága a test elmozdításához a lejtőn felfelé?
- Ha igen, akkor mekkora a test gyorsulása, és a talaj által kifejtett kényszererő nagysága a mozgás során?
- Mekkora lesz a test pályasebessége Δt idő elteltével, ha kezdetben nulla volt?
- Mekkora Δs pályaszakaszt fut be a test a megadott Δt idő alatt.

Megoldás:

a) Feltételezzük az egyensúlyt:



Egyensúlyi egyenlet:

$$\sum_i \vec{F}_i = \vec{F} + \vec{F}_g + \vec{F}_k = 0$$

$$\begin{pmatrix} F \cdot \cos \beta \\ F \cdot \sin \beta \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -m \cdot g \cdot \sin \alpha \\ -m \cdot g \cdot \cos \alpha \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -F_t \\ F_n \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$I. F \cdot \cos \beta - m \cdot g \cdot \sin \alpha - F_t = 0 \Rightarrow F_t = F \cdot \cos \beta - m \cdot g \cdot \sin \alpha$$

$$II. F \cdot \sin \beta - m \cdot g \cdot \cos \alpha + F_n = 0 \Rightarrow F_n = m \cdot g \cdot \cos \alpha - F \cdot \sin \beta$$

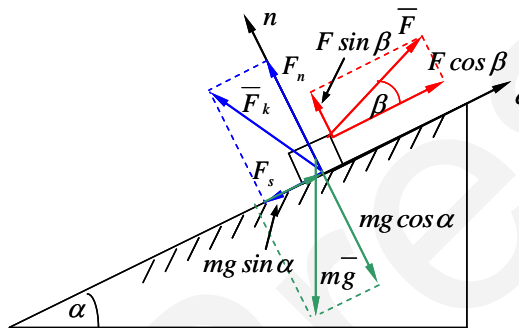
A test nyugalomban marad, ha: $|F_t| \leq \mu_0 \cdot F_n$

$$\text{Azaz: } |F \cdot \cos \beta - m \cdot g \cdot \sin \alpha| \leq \mu_0 \cdot (m \cdot g \cdot \cos \alpha - F \cdot \sin \beta)$$

$$|5000 \cdot \cos 10^\circ - 500 \cdot 9,81 \cdot \sin 30^\circ| \leq 0,3 \cdot (500 \cdot 9,81 \cdot \cos 30^\circ - 5000 \cdot \sin 10^\circ)$$

2471,53 [N] > 1013,88 [N], tehát a test elmozdul.

b)



Mozgásegyenlet:

$$\sum_i \vec{F}_i = \vec{F} + \vec{F}_g + \vec{F}_k = m \cdot \vec{a}$$

$$\begin{pmatrix} F \cdot \cos \beta \\ F \cdot \sin \beta \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -m \cdot g \cdot \sin \alpha \\ -m \cdot g \cdot \cos \alpha \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -F_s \\ F_n \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m \cdot a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$I. F \cdot \cos \beta - m \cdot g \cdot \sin \alpha - F_s = m \cdot a$$

$$II. F \cdot \sin \beta - m \cdot g \cdot \cos \alpha + F_n = 0 \Rightarrow F_n = m \cdot g \cdot \cos \alpha - F \cdot \sin \beta$$

A kényszererő komponensei közötti kapcsolat:

$$III. F_s = \mu \cdot F_n$$

$$I. a = \frac{F \cdot \cos \beta - m \cdot g \cdot \sin \alpha - \mu \cdot (m \cdot g \cdot \cos \alpha - F \cdot \sin \beta)}{m} = 4,27 \left[\frac{m}{s^2} \right]$$

A kényszererő nagysága:

$$F_k = \sqrt{F_s^2 + F_n^2} = \sqrt{(\mu \cdot F_n)^2 + F_n^2} = F_n \cdot \sqrt{\mu^2 + 1} = 3396,45 \text{ [N]}$$

c)

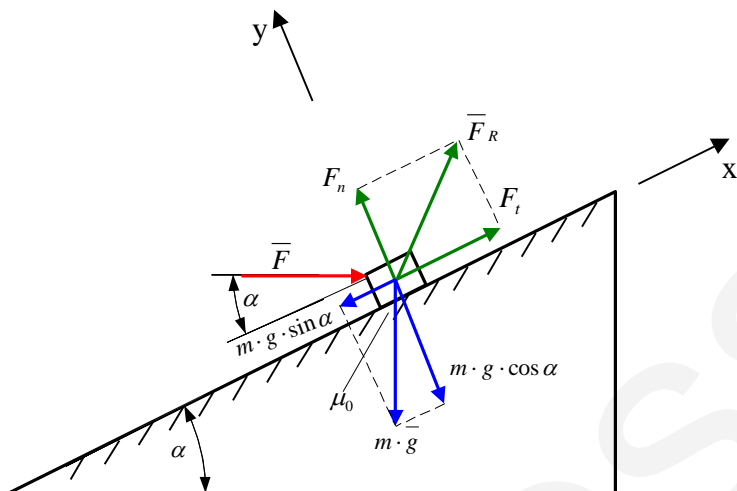
$$v = v_0 + a \cdot \Delta t = 4,27 \cdot 3 = 12,81 \left[\frac{m}{s} \right]$$

d)

$$\Delta s = v_0 \cdot \Delta t + \frac{a}{2} \cdot \Delta t^2 = \frac{4,27}{2} \cdot 3^2 = 19,21 \text{ [m]}$$

6. feladat

Az ábrán látható érdes felületű lejtőn elhelyezkedő anyagi pont egyensúlyban van.



Adatok: $\alpha = 30^\circ$, $m \cdot g = 100$ [N], $\mu_0 = 0,3$

a) Számítsuk ki, hogy az \vec{F} erő nagysága milyen minimális és maximális értékek között változhat (F_{\min} és F_{\max}) az anyagi pont egyensúlya esetén! (\vec{F} vízszintes irányú)

b) Számítsuk ki a lejtő által az anyagi pontra kifejtett kényszererő nagyságát az előző minimális és maximális F értékek esetén.

Megoldás:

a)

$$\sum \vec{F} = \vec{F}_R + \vec{F} + m \cdot \vec{g} = \vec{0} = \begin{pmatrix} F_t \\ F_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} F \cdot \cos \alpha \\ -F \cdot \sin \alpha \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -m \cdot g \cdot \sin \alpha \\ -m \cdot g \cdot \cos \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{I. } F_t + F \cdot \cos \alpha - m \cdot g \cdot \sin \alpha = 0 \Rightarrow F_t = m \cdot g \cdot \sin \alpha - F \cdot \cos \alpha = 50 - 0,866 \cdot F$$

$$\text{II. } F_n - F \cdot \sin \alpha - m \cdot g \cdot \cos \alpha = 0 \Rightarrow F_n = m \cdot g \cdot \cos \alpha + F \cdot \sin \alpha = 86,6 + 0,5 \cdot F$$

$$|F_t| \leq \mu_0 \cdot F_n \rightarrow -\mu_0 \cdot F_n \leq F_t \leq \mu_0 \cdot F_n$$

1. eset:

$$-\mu_0 \cdot F_n \leq F_t$$

$$-0,3 \cdot (86,6 + 0,5 \cdot F) \leq 50 - 0,866 \cdot F$$

$$0,716 \cdot F \leq 76$$

$$F \leq F_{\max} = 106,14 \text{ [N]}$$

2. eset:

$$F_t \leq \mu_0 \cdot F_n$$

$$50 - 0,866 \cdot F \leq 0,3 \cdot (86,6 + 0,5 \cdot F)$$

$$24 \leq 1,016 \cdot F$$

$$23,62 \text{ [N]} = F_{\min} \leq F$$

$$23,62 \text{ [N]} \leq F \leq 106,14 \text{ [N]}$$

b)

$$F_{t\min} = 50 - 0,866 \cdot F_{\min} = 50 - 0,866 \cdot 23,62 = 29,55 \text{ [N]}$$

$$F_{tmax} = 50 - 0,866 \cdot F_{max} = 50 - 0,866 \cdot 106,14 = -41,92 \text{ [N]}$$

$$F_{nmin} = 86,6 + 0,5 \cdot F_{min} = 86,6 + 0,5 \cdot 23,62 = 98,41 \text{ [N]}$$

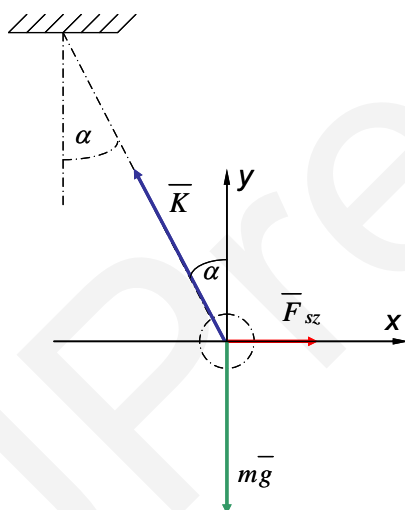
$$F_{nmax} = 86,6 + 0,5 \cdot F_{max} = 86,6 + 0,5 \cdot 106,14 = 139,67 \text{ [N]}$$

$$F_{Rmin} = \sqrt{F_{tmin}^2 + F_{nmin}^2} = \sqrt{29,55^2 + 98,41^2} = 102,75 \text{ [N]}$$

$$F_{Rmax} = \sqrt{F_{tmax}^2 + F_{nmax}^2} = \sqrt{(-41,92)^2 + 139,67^2} = 145,83 \text{ [N]}$$

7. feladat

Az ábrán látható, nyújthatatlan fonálhoz erősített m tömegű, d átmérőjű pingponglabdát szélesség mérésére használjuk. Egy adott szélerősségnél megmérjük a fonál függőlegessel bezárt α szögét, a gömb C alakú tényezője ismert.



Adatok: $m = 2,465 \text{ [g]}$, $d = 37,7 \text{ [mm]}$, $C = 0,45$, $\rho_{\text{levegő}} = 1,204 \left[\frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \right]$, $\alpha = 30^\circ$, $g = 9,81 \left[\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right]$

Határozzuk meg a megadott adatokból a mozgó levegő (szél) által a nyugvó labdára kifejtett F_{sz} közegellenállási erő nagyságát, majd abból a szélességet!

Megoldás:

Felírjuk a labda egyensúlyi egyenletét:

$$\vec{F}_k + m \cdot \vec{g} + \vec{F}_{sz} = 0$$

A mozgás leírásához az ábrán látható koordinátarendszert választjuk, majd az összes erőt x és y komponensekre bontjuk. A labda egyensúlyi egyenlete ezt követően:

$$\begin{pmatrix} -F_k \cdot \sin \alpha \\ F_k \cdot \cos \alpha \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -m \cdot g \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} F_{sz} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ebből az alábbi két skaláregyenlet adódik:

$$\text{I. } -F_k \cdot \sin \alpha + F_{sz} = 0$$

$$\text{II. } F_k \cdot \cos \alpha - m \cdot g = 0$$

A fenti egyenletekből:

$$F_{sz} = \frac{m \cdot g}{\cos \alpha} \cdot \sin \alpha = 0,014 \text{ [N]}$$

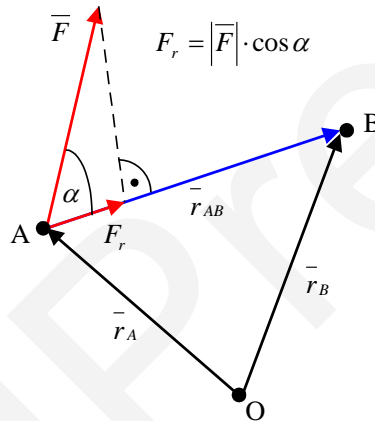
$$F_{sz} = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot A \cdot C \cdot v^2 \Rightarrow v = \sqrt{\frac{2 \cdot F_{sz}}{\rho \cdot A \cdot C}} = 6,805 \left[\frac{\text{m}}{\text{s}} \right]$$

3.2.2 Munka, energia, teljesítmény

3.2.2.1 A munka fogalma

A munka fogalmát két lépésben értelmezzük. Az első lépésben azzal a feltétellel, hogy az anyagi pontra ható erő állandó, azaz nem függ az anyagi pont helyétől. A második lépésben az általános esettel foglalkozunk, azaz, amikor az erő függ a helytől.

I. eset: Az erő független az anyagi pont helyétől: $\vec{F}(\vec{r}) = \vec{F} = \text{állandó}$



50. ábra. A munka értelmezése állandó erő esetén

Ebben az esetben az \vec{F} erő munkáját az A-tól a B pontig az alábbi összefüggés értelmezi:

$$W_{\vec{F}}^{A \rightarrow B} = \vec{F} \cdot \Delta \vec{r}_{AB} = |\Delta \vec{r}_{AB}| \cdot |\vec{F}| \cdot \cos \alpha \quad (3.70)$$

A munka lehet pozitív, zérus vagy negatív:

$$0 \leq \alpha < 90^\circ \Rightarrow \cos \alpha > 0 \Rightarrow W_{\vec{F}}^{A \rightarrow B} > 0$$

$$\alpha = 90^\circ \Rightarrow \cos \alpha = 0 \Rightarrow W_{\vec{F}}^{A \rightarrow B} = 0$$

$$90^\circ < \alpha \leq 180^\circ \Rightarrow \cos \alpha < 0 \Rightarrow W_{\vec{F}}^{A \rightarrow B} < 0$$

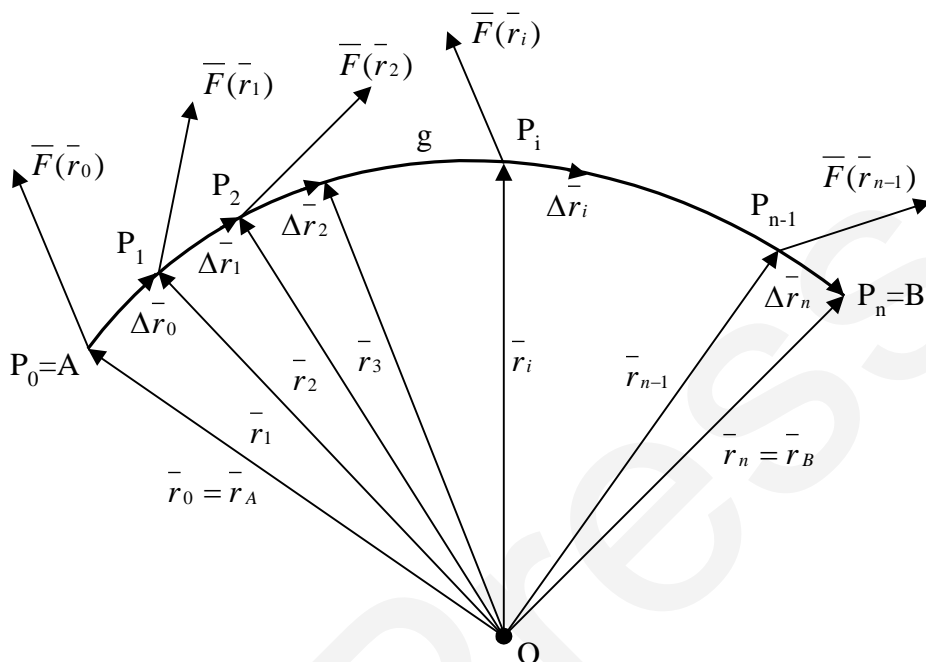
A munkát az erő elmozdulás irányú komponensével (F_r) kifejezve az alábbi, szemléletes formában is írhatjuk:

$$W_{\vec{F}}^{A \rightarrow B} = \overbrace{|\Delta \vec{r}_{AB}|}^{\Delta r_{AB}} \cdot \overbrace{|\vec{F}| \cdot \cos \alpha}^{F_r} = \Delta r_{AB} \cdot F_r \quad (3.71)$$

Tehát a munka az elmozdulás nagyságának és az erő elmozdulás irányú komponensének a szorzata.

Megjegyzés: A fenti komponens pozitív, ha $0 \leq \alpha < 90^\circ$, nulla, ha $\alpha = 90^\circ$ és negatív, ha $90^\circ < \alpha \leq 180^\circ$.

II. eset: Az erő függ az anyagi pont helyétől.



51. ábra. A munka értelmezése változó erő esetén

Ebben az általános esetben jelöljük meg az anyagi pont pályán elfoglalt helyét azonos Δt időközönként. Ha Δt kicsi, akkor az erő a Δt időtartamokon közelítőleg állandónak tekinthető (I. eset). Tehát a munka az AB szakaszon az alábbiak szerint közelíthető:

$$W_{\vec{F},g}^{A \rightarrow B} \approx \vec{F}(\vec{r}_0) \cdot \Delta \vec{r}_0 + \vec{F}(\vec{r}_1) \cdot \Delta \vec{r}_1 + \dots + \vec{F}(\vec{r}_i) \cdot \Delta \vec{r}_i + \dots + \vec{F}(\vec{r}_{n-1}) \cdot \Delta \vec{r}_{n-1} \quad (3.72)$$

Ha $\Delta t \rightarrow 0$, akkor a fenti közelítés már pontos eredményt ad:

$$W_{\vec{F},g}^{A \rightarrow B} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} (\vec{F}(\vec{r}_0) \cdot \Delta \vec{r}_0 + \vec{F}(\vec{r}_1) \cdot \Delta \vec{r}_1 + \dots + \vec{F}(\vec{r}_i) \cdot \Delta \vec{r}_i + \dots + \vec{F}(\vec{r}_{n-1}) \cdot \Delta \vec{r}_{n-1}) = \vec{F}(\vec{r}_0) \cdot$$

$$d\vec{r}_0 + \vec{F}(\vec{r}_1) \cdot d\vec{r}_1 + \dots + \vec{F}(\vec{r}_i) \cdot d\vec{r}_i + \dots + \vec{F}(\vec{r}_{n-1}) \cdot d\vec{r}_{n-1} = \int_{\vec{r}_{A,g}}^{\vec{r}_B} \vec{F}(\vec{r}) d\vec{r} \quad (3.73)$$

$$W_{\vec{F},g}^{A \rightarrow B} = \int_{\vec{r}_{A,g}}^{\vec{r}_B} \vec{F}(\vec{r}) d\vec{r} \quad (3.74)$$

Tehát a $W_{\vec{F},g}^{A \rightarrow B}$ munka az $\vec{F}(\vec{r})$ függvény A-tól B pontig vett g pályagörbe menti integrálja. A $W_{\vec{F},g}^{A \rightarrow B}$ munka az alábbi tényezőktől függ:

- 1) az $\vec{F}(\vec{r})$ függvénytől,
- 2) az A és B pontok megválasztásától,
- 3) az A és B pontokat összekötő g pályagörbe alakjától.

3.2.2.2 Munkatétel

A munkatételt két lépésben származtatjuk, feltételezve, hogy az anyagi pont tömege állandó. Az első lépésben feltételezzük, hogy az anyagi pontra ható eredő erő állandó (I. eset), a másodikban azon általános esettel foglalkozunk, amikor az eredő erő függ az anyagi pont helyétől (II. eset).

I. eset: $\vec{F}(\vec{r}) = \vec{F} = \text{állandó}$ ($\vec{F} = \sum \vec{F}_i$)

Ha $\vec{F}(\vec{r}) = \vec{F} = \text{állandó}$, akkor Newton II. törvényéből adódóan az anyagi pont gyorsulása állandó, azaz sebesség- és hely-idő függvénye a korábbiak szerint (3.39 és 3.40 összefüggések) az alábbi alakban írható:

$$\begin{aligned}\vec{v}_B &= \vec{v}_A + \vec{a} \cdot \Delta t_{AB} \Rightarrow \vec{a} = \frac{\vec{v}_B - \vec{v}_A}{\Delta t_{AB}} \\ \vec{r}_B &= \vec{r}_A + \vec{v}_A \cdot \Delta t_{AB} + \frac{\vec{a}}{2} \cdot t^2 \Rightarrow \Delta \vec{r}_{AB} = \vec{r}_B - \vec{r}_A = \vec{v}_A \cdot \Delta t_{AB} + \frac{\vec{a}}{2} \cdot t^2 = \\ &= \vec{v}_A \cdot \Delta t_{AB} + \frac{\vec{v}_B - \vec{v}_A}{2 \cdot \Delta t_{AB}} \cdot \Delta t_{AB}^2 = \\ &= \vec{v}_A \cdot \Delta t_{AB} + \frac{\vec{v}_B - \vec{v}_A}{2} \cdot \Delta t_{AB} = \frac{\vec{v}_B}{2} \cdot \Delta t_{AB} + \left(\vec{v}_A \cdot \Delta t_{AB} - \frac{\vec{v}_A}{2} \cdot \Delta t_{AB} \right) = \frac{\vec{v}_B + \vec{v}_A}{2} \cdot \Delta t_{AB}\end{aligned}$$

A fenti kifejezést felhasználva:

$$\begin{aligned}W_{\vec{F}}^{A \rightarrow B} &= \vec{F} \cdot \Delta \vec{r}_{AB} = m \cdot \vec{a} \cdot \Delta \vec{r}_{AB} = m \cdot \frac{\vec{v}_B - \vec{v}_A}{\Delta t_{AB}} \cdot \frac{\vec{v}_B + \vec{v}_A}{2} \cdot \Delta t_{AB} = \\ &= \frac{1}{2} \cdot m \cdot (\vec{v}_B - \vec{v}_A) \cdot (\vec{v}_B + \vec{v}_A) = \\ &= \frac{1}{2} \cdot m \cdot \left(\frac{\vec{v}_B \cdot \vec{v}_B}{v_B^2} - \vec{v}_B \cdot \vec{v}_A + \vec{v}_B \cdot \vec{v}_A - \frac{\vec{v}_A \cdot \vec{v}_A}{v_A^2} \right) = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_B^2 - \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_A^2 = E_{mB} - E_{mA} = \Delta E_{mAB}\end{aligned}$$

A fenti egyenletben az $E_m = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2$ mennyiség az anyagi pont mozgási energiája.

Tehát a munkatétel tömör alakban:

$$W_{\vec{F}}^{A \rightarrow B} = \Delta E_{mAB} \quad (3.75)$$

Szavakban megfogalmazva:

Az eredő erő munkája egyenlő az anyagi pont mozgási energiájának megváltozásával.

II. eset: Az erő függ az anyagi pont helyétől.

Ha $\Delta t \rightarrow 0$, akkor az erő a határértékben kicsiny dt időtartamokon már állandó. Így az egyes szakaszokon alkalmazhatjuk az I. esetben származtatott munkatételt:

$$dW_{\vec{F}_i, g}^{P_i \rightarrow P_{i+1}} = \vec{F}(\vec{r}_i) \cdot d\vec{r}_i = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_{i+1}^2 - \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_i^2 \quad (3.76)$$

Így a munkavégzés az AB szakaszon:

$$\begin{aligned}
W_{\vec{F},g}^{A \rightarrow B} &= \vec{F}(\vec{r}_1) \cdot d\vec{r}_1 + \vec{F}(\vec{r}_2) \cdot d\vec{r}_2 + \vec{F}(\vec{r}_3) \cdot d\vec{r}_3 + \dots + \vec{F}(\vec{r}_i) \cdot d\vec{r}_i + \dots + \vec{F}(\vec{r}_{n-1}) \cdot d\vec{r}_{n-1} = \\
&= \left(\frac{1}{2} \cdot m \cdot v_1^2 - \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_0^2 \right) + \left(\frac{1}{2} \cdot m \cdot v_2^2 - \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_1^2 \right) + \left(\frac{1}{2} \cdot m \cdot v_3^2 - \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_2^2 \right) \\
&+ \dots + \left(\frac{1}{2} \cdot m \cdot v_{i+1}^2 - \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_i^2 \right) + \dots + \left(\frac{1}{2} \cdot m \cdot v_{n-1}^2 - \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_{n-2}^2 \right) \\
&+ \left(\frac{1}{2} \cdot m \cdot v_n^2 - \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_{n-1}^2 \right) = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_n^2 - \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_0^2 = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_B^2 - \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_A^2
\end{aligned}$$

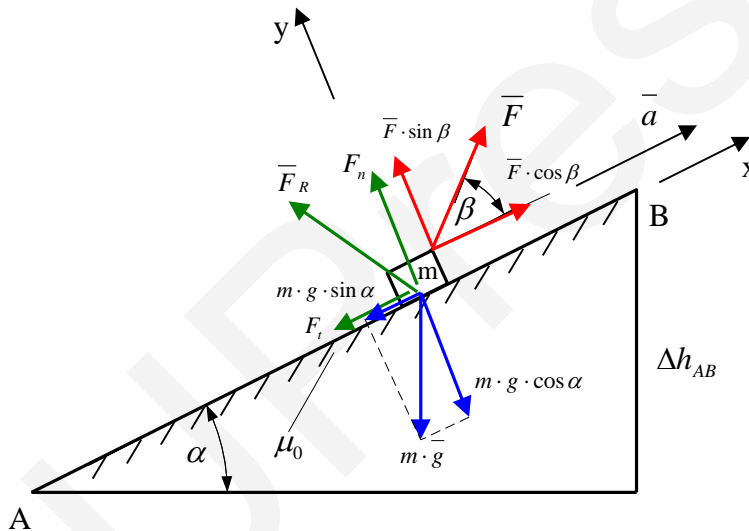
Tehát helyfüggető erő esetében ugyanazt az összefüggést kapjuk, mint az I. esetben:

$$W_{\vec{F},g}^{A \rightarrow B} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_B^2 - \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_A^2 = \Delta E_{mAB} \quad (3.77)$$

Feladatok

1. feladat

Az ábrán látható m tömegű anyagi pontra állandó \vec{F} erővel hatunk.



Adatok: $m = 500 \text{ [kg]}$, $\mu_{0AB} = 0,15$, $\mu_{AB} = 0,1$, $\alpha = 30^\circ$, $\beta = 10^\circ$, $\Delta h_{AB} = 10 \text{ [m]}$, $g = 9,81 \left[\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right]$

- Számítsuk ki, hogy milyen F_{\min} és F_{\max} értékek között változhat az \vec{F} erő nagysága, hogy az anyagi pont egyensúlyban maradjon az érdes felületű lejtőn!
- Számítsuk ki az anyagi pont pályamenti gyorsulását, ha $F = 1,636 \cdot F_{\max}$!
- Számítsuk ki a lejtő által a mozgó anyagi pontra kifejtett kényszererő nagyságát a fenti gyorsulás mellett!
- Számítsuk ki az A és B pontok közötti mozgás időtartamát (Δt_{AB})! Számítsuk ki az anyagi pont pályamenti sebességét a B pontban. (Az anyagi pont az A pontból nyugalomból indul.)
- Ellenőrizzük a d) pontban kapott sebesség értékét alkalmazva a munkatételt!

Megoldás:

a) Feltételezzük az anyagi pont egyensúlyát, és meghatározzuk azon F értékeket amelyek esetén az fennáll.

$$\Delta s_{AB} = \frac{\Delta h_{AB}}{\sin \alpha} = 20 \text{ [m]}$$

Egyensúlyi egyenletek:

$$\sum_i \vec{F}_i = \vec{F} + m \cdot \vec{g} + \vec{F}_K = \vec{0}$$

$$\begin{pmatrix} F \cdot \cos \beta \\ F \cdot \sin \beta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -m \cdot g \cdot \sin \alpha \\ -m \cdot g \cdot \cos \alpha \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -F_t \\ F_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{I. } F \cdot \cos \beta - m \cdot g \cdot \sin \alpha - F_t = 0 \Rightarrow F_t = F \cdot \cos \beta - m \cdot g \cdot \sin \alpha$$

$$\text{II. } F \cdot \sin \beta - m \cdot g \cdot \cos \alpha + F_n = 0 \Rightarrow F_n = m \cdot g \cdot \cos \alpha - F \cdot \sin \beta$$

Az anyagi pont egyensúlyban van akkor, és csak akkor, ha:

$$|F_t| \leq \mu_{0AB} \cdot F_n$$

Innen:

$$-\mu_{0AB} \cdot F_n \leq F_t \leq \mu_{0AB} \cdot F_n$$

1. eset:

$$-\mu_{0AB} \cdot F_n \leq F_t$$

$$-\mu_{0AB} \cdot (m \cdot g \cdot \cos \alpha - F \cdot \sin \beta) \leq F \cdot \cos \beta - m \cdot g \cdot \sin \alpha$$

$$-\mu_{0AB} \cdot m \cdot g \cdot \cos \alpha + \mu_{0AB} \cdot F \cdot \sin \beta \leq F \cdot \cos \beta - m \cdot g \cdot \sin \alpha$$

$$m \cdot g \cdot \sin \alpha - \mu_{0AB} \cdot m \cdot g \cdot \cos \alpha \leq F \cdot \cos \beta - \mu_{0AB} \cdot F \cdot \sin \beta$$

$$m \cdot g \cdot (\sin \alpha - \mu_{0AB} \cdot \cos \alpha) \leq F \cdot (\cos \beta - \mu_{0AB} \cdot \sin \beta)$$

$$1994,8 \text{ [N]} \leq F$$

$$F_{min} = 1994,8 \text{ [N]}$$

2. eset:

$$F_t \leq \mu_{0AB} \cdot F_n$$

$$F \cdot \cos \beta - m \cdot g \cdot \sin \alpha \leq \mu_{0AB} \cdot (m \cdot g \cdot \cos \alpha - F \cdot \sin \beta)$$

$$F \cdot \cos \beta - m \cdot g \cdot \sin \alpha \leq \mu_{0AB} \cdot m \cdot g \cdot \cos \alpha - \mu_{0AB} \cdot F \cdot \sin \beta$$

$$F \cdot \cos \beta + \mu_{0AB} \cdot F \cdot \sin \beta \leq \mu_{0AB} \cdot m \cdot g \cdot \cos \alpha + m \cdot g \cdot \sin \alpha$$

$$F \cdot (\cos \beta + \mu_{0AB} \cdot \sin \beta) \leq m \cdot g \cdot (\mu_{0AB} \cdot \cos \alpha + \sin \alpha)$$

$$F \leq 3056,1 \text{ [N]}$$

$$F_{max} = 3056,1 \text{ [N]}$$

b)

$$F = F_{max} \cdot 1,636 = 5000 \text{ [N]}$$

$$\sum_i \vec{F}_i = \vec{F} + m \cdot \vec{g} + \vec{F}_K = m \cdot \vec{a}$$

$$\begin{pmatrix} F \cdot \cos \beta \\ F \cdot \sin \beta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -m \cdot g \cdot \sin \alpha \\ -m \cdot g \cdot \cos \alpha \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -F_s \\ F_n \end{pmatrix} = m \cdot \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{I. } F \cdot \cos \beta - m \cdot g \cdot \sin \alpha - F_s = m \cdot a$$

$$\text{II. } F \cdot \sin \beta - m \cdot g \cdot \cos \alpha + F_n = 0 \rightarrow F_n = m \cdot g \cdot \cos \alpha - F \cdot \sin \beta = 3379,6 \text{ [N]}$$

$$\text{III. } F_s = \mu_{AB} \cdot F_n = 337,96 \text{ [N]}$$

$$\text{I. } 500 \cdot \cos 10^\circ - 2452,5 - 337,96 = 500 \cdot a$$

$$a = 4,267 \left[\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right]$$

c)

$$|\vec{F}_K| = F_K = \sqrt{F_s^2 + F_n^2} = \sqrt{337,96^2 + 3379,6^2} = 3396,4 \text{ [N]}$$

d)

$$s_B = s_A + v_A \cdot \Delta t_{AB} + \frac{a}{2} \cdot \Delta t_{AB}^2$$

$$\Delta s_{AB} = s_B - s_A = \underbrace{v_A \cdot \Delta t_{AB}}_0 + \frac{a}{2} \cdot \Delta t_{AB}^2$$

$$20 = \frac{4,267}{2} \cdot \Delta t_{AB}^2 \Rightarrow \Delta t_{AB} = \sqrt{\frac{40}{4,267}} = 3,062 \text{ [s]}$$

$$v_B = \underbrace{v_A}_0 + a \cdot \Delta t_{AB} = 4,267 \cdot 3,062 = 13,06 \left[\frac{\text{m}}{\text{s}} \right]$$

e)

$$W_F^{A \rightarrow B} = F \cdot \cos \beta \cdot \Delta s_{AB} = 98480,7 \text{ [J]}$$

$$W_{m \cdot g}^{A \rightarrow B} = -m \cdot g \cdot \overbrace{\sin \alpha \cdot \Delta s_{AB}}^{\Delta h_{AB}} = -m \cdot g \cdot \Delta h_{AB} = -49050 \text{ [J]}$$

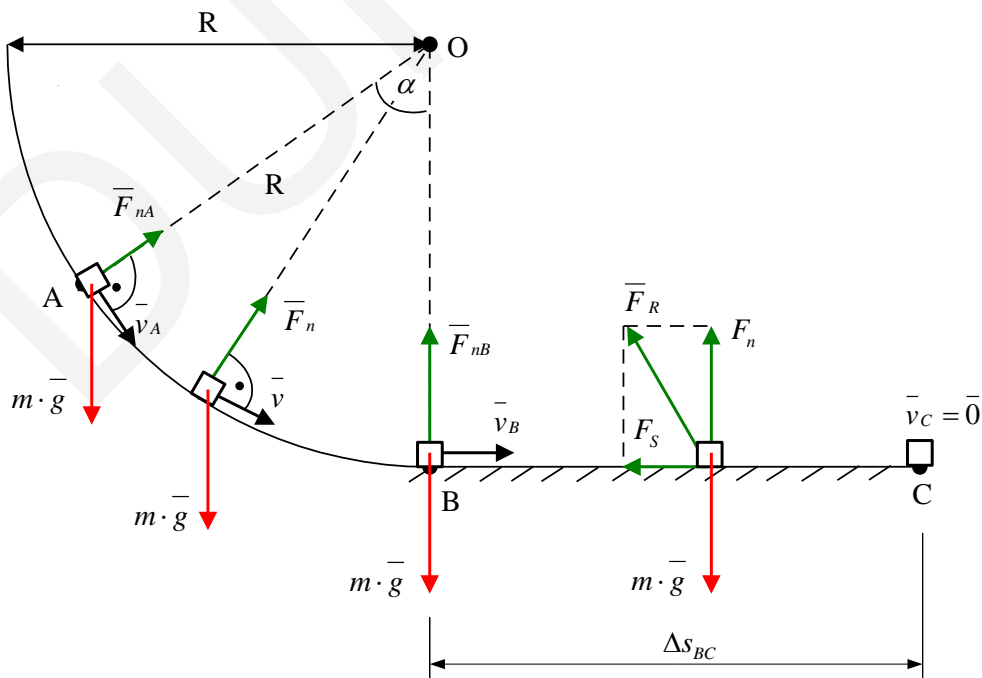
$$W_{F_K}^{A \rightarrow B} = -F_s \cdot \Delta s_{AB} = -6759,2 \text{ [J]}$$

Munkatétel:

$$\sum_i W_{F_i}^{A \rightarrow B} = W_{m \cdot g}^{A \rightarrow B} + W_F^{A \rightarrow B} + W_{F_K}^{A \rightarrow B} = 42671,5 = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_B^2 - \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_A^2 \Rightarrow v_B = 13,06 \left[\frac{\text{m}}{\text{s}} \right]$$

2. feladat

Az anyagi pont az ábrán látható függőleges síkú kényszerpályán halad. A pálya AB szakasza körív alakú és súrlódásmentes, míg BC szakasza egyenes és érdes.

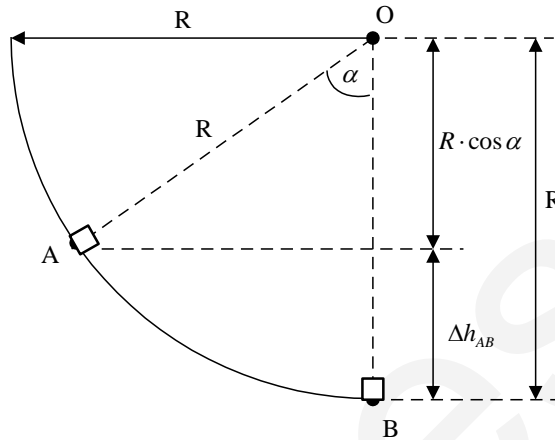


Adatok: $g = 9,81 \left[\frac{m}{s^2} \right]$, $v_A = 15 \left[\frac{m}{s} \right]$, $R = 30 [m]$, $\mu_{AB} = 0$, $\mu_{BC} = 0,1$, $\alpha = 60^\circ$

- a) Számítsuk ki az anyagi pont pályamenti sebességét a B pontban!
 b) Számítsuk ki a Δs_{BC} távolságot, ha az anyagi pont a C pontban áll meg!

Megoldás:

a)



$$\Delta h_{AB} = R - R \cdot \cos \alpha = R \cdot (1 - \cos \alpha)$$

\vec{F}_n az AB szakasz minden pontján merőleges a pálya érintőjére, azaz az elmozdulás irányára, tehát munkavégzése zérus:

$$W_{\vec{F}_n}^{A \rightarrow B} = 0$$

A gravitációs erő munkavégzése:

$$W_{m \cdot g}^{A \rightarrow B} = m \cdot g \cdot \Delta h_{AB} = m \cdot g \cdot R \cdot (1 - \cos \alpha)$$

$$\sum_i W_{F_i}^{A \rightarrow B} = W_{\vec{F}_n}^{A \rightarrow B} + W_{m \cdot g}^{A \rightarrow B} = m \cdot g \cdot R \cdot (1 - \cos \alpha) = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_B^2 - \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_A^2$$

$$2 \cdot g \cdot R \cdot (1 - \cos \alpha) = v_B^2 - v_A^2$$

$$v_B = \sqrt{v_A^2 + 2 \cdot g \cdot R \cdot (1 - \cos \alpha)} = 22,78 \left[\frac{m}{s} \right]$$

b)

A gravitációs erő a BC szakasz minden pontján merőleges a pályára, azaz az elmozdulás irányára, tehát munkavégzése zérus:

$$W_{m \cdot g}^{B \rightarrow C} = 0$$

A kényszererő munkavégzése:

$$W_{F_K}^{B \rightarrow C} = -F_s \cdot \Delta s_{BC} = -\mu_{BC} \cdot F_n \cdot \Delta s_{BC} = -\mu_{BC} \cdot m \cdot g \cdot \Delta s_{BC}$$

Munkatétel:

$$\sum_i W_{F_i}^{B \rightarrow C} = \underbrace{W_{m \cdot g}^{B \rightarrow C}}_0 + W_{F_K}^{B \rightarrow C} = -\mu_{BC} \cdot m \cdot g \cdot \Delta s_{BC} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_C^2 - \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_B^2$$

$$-2 \cdot \mu_{BC} \cdot g \cdot \Delta s_{BC} = -v_B^2$$

$$\Delta s_{BC} = \frac{v_B^2}{2 \cdot \mu_{BC} \cdot g} = 264,5 \text{ [m]}$$

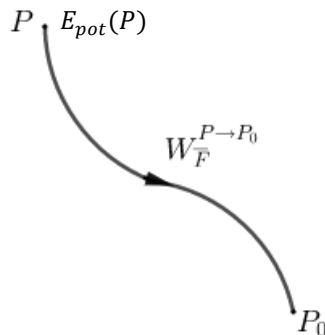
3.2.2.3 A mechanikai energia-megmaradás tétele

Helyzeti és mechanikai energia

A gyakorlatban előfordulnak olyan erők, amelyek munkavégzése független a P_0 és P pontokat összekötő g pályagörbe alakjától. Az ilyen erőket konzervatív erőknek nevezzük. Konzervatív erőkre példa a gravitációs, a rugó és a Coulomb erő. Azokat az erőket, amelyek nem konzervatívak disszipatív erőknek nevezzük. Disszipatív erőkre példa a súrlódási és közegellenállási erő. Konzervatív erők esetén értelmezhető a helyzeti (potenciális) energia fogalma. Ehhez rögzítsük a tér egy P_0 pontját. A P pontban vett potenciális energia definíció szerint egyenlő azzal a munkával, amelyet az erő végez, mialatt az anyagi pontot a P -ből a P_0 pontba viszi.

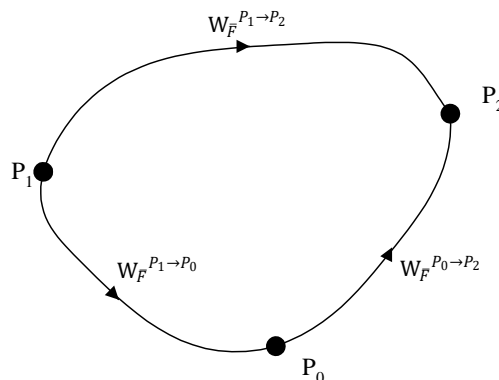
Matematikai jelölésekkel:

$$E_{pot}(P) = W_{\vec{F}}^{P \rightarrow P_0} \quad (3.78)$$



52. ábra. A potenciális energia értelmezése

Írjuk fel a munkavégzést a P_1 és P_2 pontok között, felhasználva, hogy az erő konzervatív (53. ábra):



53. ábra. A munka „additivitása” konzervatív erőterben

$$W_{\vec{F}}^{P_1 \rightarrow P_2} = W_{\vec{F}}^{P_1 \rightarrow P_0} + W_{\vec{F}}^{P_0 \rightarrow P_2} = W_{\vec{F}}^{P_1 \rightarrow P_0} - W_{\vec{F}}^{P_2 \rightarrow P_0} = E_{pot}(P_1) - E_{pot}(P_2) \quad (3.79)$$

$$W_{\vec{F}}^{P_1 \rightarrow P_2} = E_{pot}(P_1) - E_{pot}(P_2) = E_{mozg}(P_2) - E_{mozg}(P_1) \quad (3.80)$$

Átrendezve a fenti egyenletet:

$$E_{pot}(P_1) + E_{mozg}(P_1) = E_{pot}(P_2) + E_{mozg}(P_2) \quad (3.81)$$

A mozgási és helyzeti energia összegét **mechanikai energiának** nevezzük. Tehát konzervatív erők esetén teljesül az alábbi egyenlőség:

$$E_{mech}(P_1) = E_{mech}(P_2) = \dots = \text{állandó} \quad (3.82)$$

Szavakkal megfogalmazva: Ha az anyagi pontra csak konzervatív erők hatnak, akkor mechanikai energiája állandó. A fenti törvény a **mechanikai energia-megmaradás tétele**.

Ha az anyagi pontra disszipatív erők is hatnak, akkor annak mechanikai energiája folyamatosan csökken. Azaz a disszipatív erők „felemésztik” a mechanikai energiát. A fentiek alapján a munkatételt felírhatjuk az alábbi alakban is:

$$W_{\vec{F}, \text{disszipatív}}^{P_1 \rightarrow P_2} = \Delta E_{mech, P_1 P_2} \quad (3.83)$$

Azaz a disszipatív erők együttes munkája egyenlő az anyagi pont mechanikai energiájának megváltozásával.

Teljesítmény

Az erő teljesítménye – definíció szerint – az erő munkavégzésének idő szerinti változási gyorsasága (deriváltja). Matematikai megfogalmazásban:

$$P = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta W}{\Delta t} = \frac{dW}{dt} \quad (3.84)$$

Felhasználva, hogy a rövid időtartamú munkavégzés az erő és az elmozdulás skaláris szorzataként számítható:

$$P = \frac{\vec{F} \cdot d\vec{r}}{dt} = \vec{F} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v} \quad (3.85)$$

Azaz a teljesítmény kiszámítható, mint az erő és sebesség skaláris szorzata. (Sebesség alatt általános esetben az erő támadáspontjának sebességét értjük.)

4. Elektrosztatika

Az elektrosztatika a nyugvó töltések és a belőlük felépülő töltéselrendezések által keltett elektromos mezőket vizsgálja. Ezek a mezők függetlenek az időtől, így elektrosztatikus mezőknek is nevezik őket. Ha a mezőnek egy \vec{r} helyvektorral jellemzett P pontjába elhelyezünk egy q ponttöltést (próbatöltést), akkor a mező rá $\vec{F}(\vec{r})$ erőt fejt ki. Ez az erő csak a q ponttöltés értékétől és mezőben elfoglalt helyétől függ.

4.1 Elektromos térerősség fogalma és kiszámítása

Elektromos térerősség

Ha a mezőt a q próbatöltés értékétől függetlenül akarjuk jellemezni, akkor a rá ható erőt elosztjuk a q töltés értékével. Így megkapjuk az elektromos térerősséget, amit az alábbi összefüggés értelmez:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\vec{F}(\vec{r})}{q}, \quad \vec{E} = \left[\frac{N}{C} \right] \quad (4.1)$$

Tehát az elektromos térerősség a mező által a pozitív egységtöltésre kifejtett erő. A továbbiakban megmutatjuk, hogy egy adott töltéselrendezés által keltett elektrosztatikus mező valamely P pontjában hogyan számítható ki a térerősség. Az egyszerűbb töltéselrendezésektől haladunk a bonyolultabbak irányába.

I. eset: Ha a mezőt egy q_1 ponttöltés kelti.

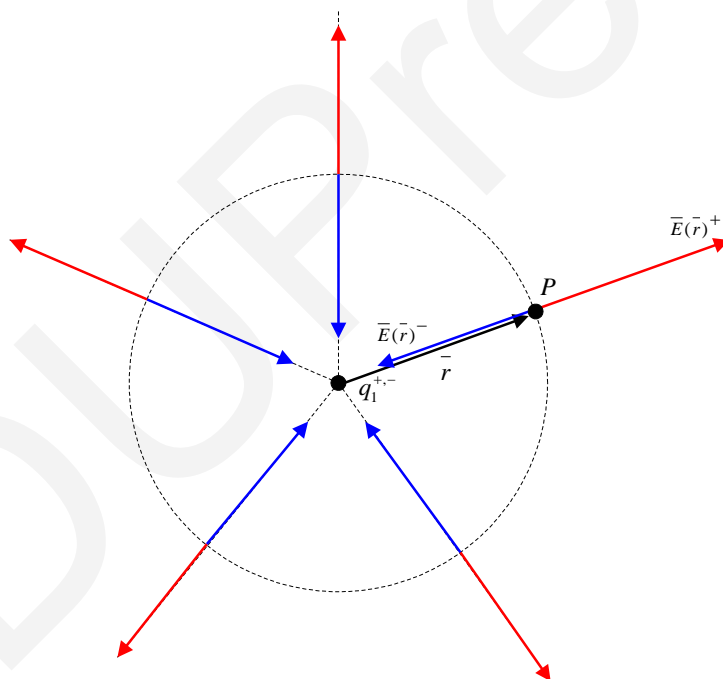
A q_1 ponttöltés által a q próbatöltésre kifejtett erőt a Coulomb törvénnyel számíthatjuk:

$$\vec{F}(\vec{r}) = k \cdot \frac{q_1 \cdot q}{r^3} \cdot \vec{r} \quad (4.2)$$

Ezt követően a térerősség a mező valamely P pontjában:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\vec{F}(\vec{r})}{q} = \frac{k \cdot \frac{q_1 \cdot q}{r^3} \cdot \vec{r}}{q} = k \cdot \frac{q_1}{r^3} \cdot \vec{r} \quad (4.3)$$

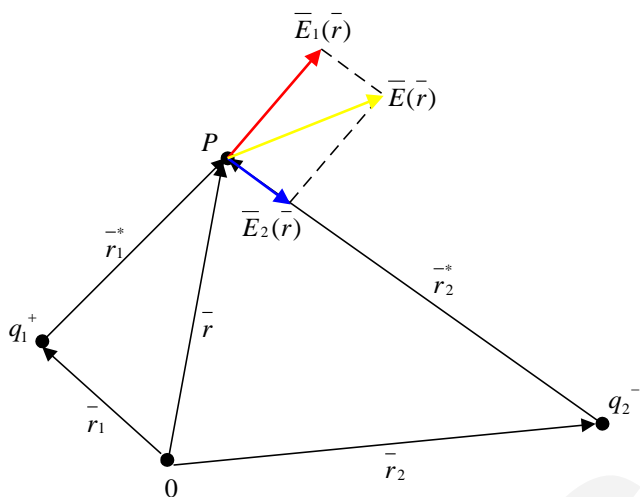
A következő ábra a fenti elektrosztatikus mezőt szemlélteti:



54. ábra. Ponttöltés elektromos tere

Az ábrán látható, hogy a mező centrális szerkezetű, ha a q_1 töltés pozitív, akkor a térerősségvektorok kifelé, ha negatív, akkor befelé, azaz a töltés irányába mutatnak.

II. eset: Ha a mezőt két (q_1 és q_2) ponttöltés kelti (55. ábra).



55. ábra. Két ponttöltés elektromos tere

$$\vec{r}_1^* = \vec{r} - \vec{r}_1$$

$$\vec{r}_2^* = \vec{r} - \vec{r}_2$$

Ebben az esetben – mivel az elektromos térerősséget az erőből származtatjuk – a térerősség a P pontban felírható a q_1 és q_2 ponttöltések által keltett térerősség járulékok összegeként:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \vec{E}_1(\vec{r}) + \vec{E}_2(\vec{r})$$

Az egyes járulékok az alábbi összefüggésekkel számíthatók:

$$\vec{E}_1(\vec{r}) = k \cdot \frac{q_1}{r_1^{*3}} \cdot \vec{r}_1^*$$

$$\vec{E}_2(\vec{r}) = k \cdot \frac{q_2}{r_2^{*3}} \cdot \vec{r}_2^*$$

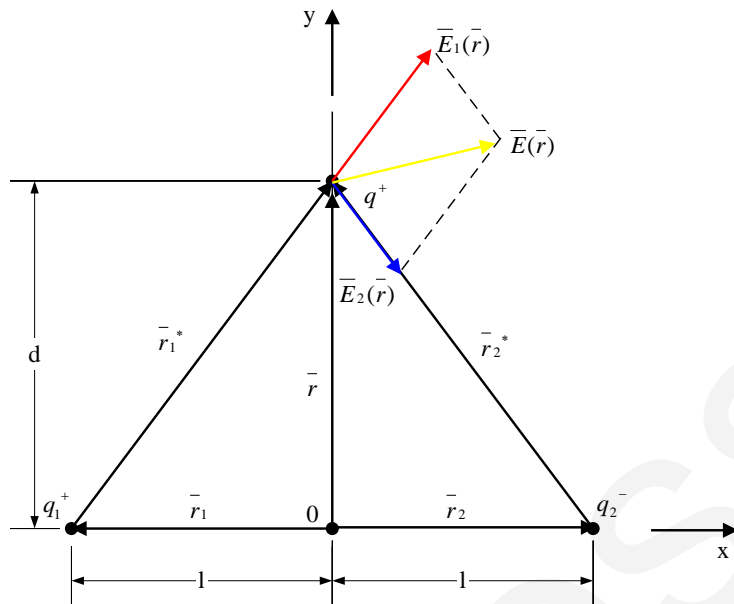
Így a P pontban az elektromos térerősség:

$$\vec{E}(\vec{r}) = k \cdot \frac{q_1}{r_1^{*3}} \cdot \vec{r}_1^* + k \cdot \frac{q_2}{r_2^{*3}} \cdot \vec{r}_2^* = \sum_{i=1}^2 k \cdot \frac{q_i}{r_i^{*3}} \cdot \vec{r}_i^* \quad (4.5)$$

Feladat

- Számítsuk ki az ábrán látható q_1 és q_2 ponttöltések által a P pontban keltett elektromos térerősséget!
- Számítsuk ki a mező által a P pontba helyezett q próbatöltésre kifejtett erő nagyságát!

Adatok: $q_1 = 10^{-6} [C]$, $q_2 = 2 \cdot 10^{-6} [C]$, $q = 10^{-6} [C]$, $l = 0,01 [m]$, $d = 0,0173 [m]$,
 $k = 8,988 \cdot 10^9 \left[\frac{N \cdot m^2}{C^2} \right]$



Megoldás:

a)

$$\vec{r}_1 = \begin{pmatrix} -0,01 \\ 0 \end{pmatrix} [m]$$

$$\vec{r}_2 = \begin{pmatrix} 0,01 \\ 0 \end{pmatrix} [m]$$

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0,0173 \end{pmatrix} [m]$$

$$\vec{r}_1^* = \vec{r} - \vec{r}_1 = \begin{pmatrix} 0,01 \\ 0,0173 \end{pmatrix} [m] \Rightarrow r_1^* = \sqrt{0,01^2 + 0,0173^2} = 0,02 = 2 \cdot 10^{-2} [m]$$

$$\vec{r}_2^* = \vec{r} - \vec{r}_2 = \begin{pmatrix} -0,01 \\ 0,0173 \end{pmatrix} [m] \Rightarrow r_2^* = \sqrt{(-0,01)^2 + 0,0173^2} = 0,02 = 2 \cdot 10^{-2} [m]$$

$$r_1^{*3} = 8 \cdot 10^{-6} [m^3], \quad r_2^{*3} = 8 \cdot 10^{-6} [m^3]$$

$$\vec{E}_1(\vec{r}) = k \cdot \frac{q_1}{r_1^{*3}} \cdot \vec{r}_1^* = 8,988 \cdot 10^9 \cdot \frac{10^{-6}}{8 \cdot 10^{-6}} \cdot \begin{pmatrix} 0,01 \\ 0,0173 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,125 \\ 1,946 \end{pmatrix} \cdot 10^7 \left[\frac{N}{C} \right]$$

$$\vec{E}_2(\vec{r}) = k \cdot \frac{q_2}{r_2^{*3}} \cdot \vec{r}_2^* = 8,988 \cdot 10^9 \cdot \frac{-2 \cdot 10^{-6}}{8 \cdot 10^{-6}} \cdot \begin{pmatrix} -0,01 \\ 0,0173 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2,25 \\ -3,892 \end{pmatrix} \cdot 10^7 \left[\frac{N}{C} \right]$$

$$\vec{E}(\vec{r}) = \vec{E}_1(\vec{r}) + \vec{E}_2(\vec{r}) = \begin{pmatrix} 3,375 \\ -1,946 \end{pmatrix} \cdot 10^7 \left[\frac{N}{C} \right]$$

b)

$$\vec{F}(\vec{r}) = \vec{E}(\vec{r}) \cdot q = \begin{pmatrix} 3,375 \\ -1,946 \end{pmatrix} \cdot 10^7 \cdot 10^{-6} = \begin{pmatrix} 33,75 \\ -19,46 \end{pmatrix} [N]$$

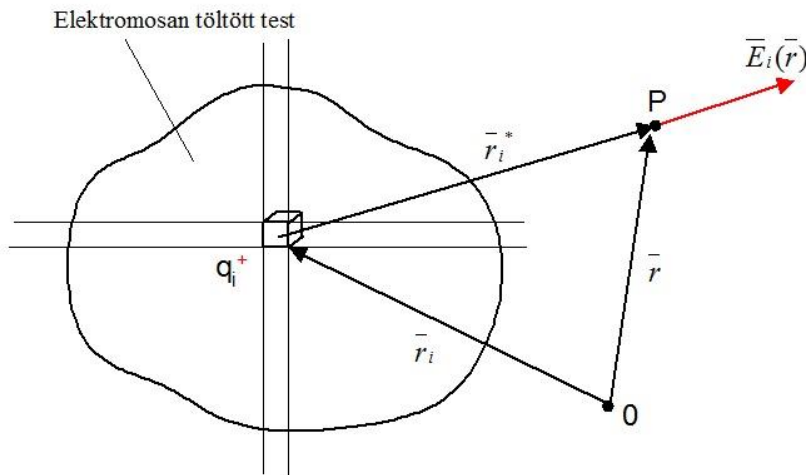
$$|\vec{F}(\vec{r})| = \sqrt{33,75^2 + (-19,46)^2} = 38,96 [N]$$

III. eset: Ha a mezőt n -darab ($q_i, i=1, 2, \dots, n$) ponttöltés kelti:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \vec{E}_1(\vec{r}) + \vec{E}_2(\vec{r}) + \dots + \vec{E}_n(\vec{r}) = \sum_{i=1}^n \vec{E}_i(\vec{r}) = \sum_{i=1}^n k \cdot \frac{q_i}{r_i^{*3}} \cdot \vec{r}_i^* \quad (4.6)$$

IV. eset: Ha a mezőt egy folytonosan töltött test kelti.

Ebben az esetben a testet gondolatban a méretéhez képest elhanyagolható nagyságú darabokra bontjuk, így az egyes darabok már anyagi pontnak tekinthetők, azaz ponttöltésként modellezhetők. Tehát visszakapjuk a III. esetet.



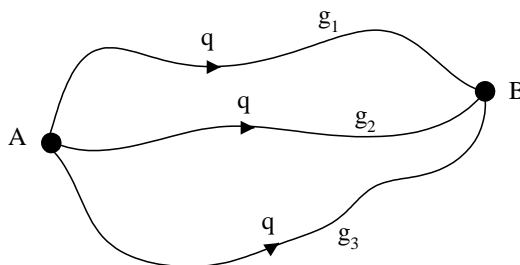
56. ábra. Folytonosan töltött test elektromos tere

$$\vec{E}(\vec{r}) = \sum_{i=1}^n \vec{E}_i(\vec{r}) = \sum_{i=1}^n k \cdot \frac{q_i}{r_i^{*3}} \cdot \vec{r}_i^*, \quad \vec{r}_i^* = \vec{r} - \vec{r}_i \quad (4.7)$$

A későbbiekben majd látjuk, hogy a fenti összegzés egy térfogati integrál kiszámítását jelenti.

4.2 Elektromos feszültség és potenciál

Ahhoz, hogy értelmezni tudjuk az elektrosztatikus mező két pontja között az elektromos feszültséget, először be kell látnunk, hogy a fenti mező konzervatív. A konzervatív tulajdonság azt jelenti, hogy az elektrosztatikus mező által a q töltésen végzett munka a mező bármely két pontja között független a két pontot összekötő pályagörbe alakjától.



57. ábra. Munkavégzés különböző pályagörbéken

Matematikai jelölésekkel:

$$W_{F,g_1}^{A \rightarrow B} = W_{F,g_2}^{A \rightarrow B} = W_{F,g_3}^{A \rightarrow B} = \dots = W_F^{A \rightarrow B} \quad (4.8)$$

Azaz az elektrosztatikus mező által végzett $W_F^{A \rightarrow B}$ munka az AB pontpárra, és nem az őket összekötő pályagörbére jellemző érték. Ezt követően értelmezhetjük az A és B pontok közötti **elektromos feszültséget** az alábbi összefüggés szerint:

$$U_{AB} = \frac{W_F^{A \rightarrow B}}{q} \quad (4.9)$$

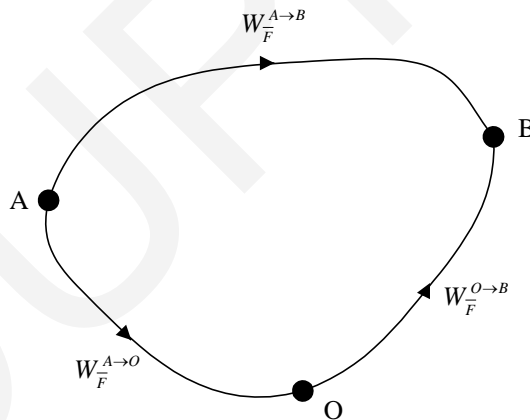
Tehát a feszültség a töltésen végzett munka és a töltés hányadosa, másképp fogalmazva a pozitív egységtöltésen végzett munka. Most értelmezzük az **elektromos potenciál** fogalmát. Ehhez rögzítsük az elektrosztatikus tér egy O pontját, és viszonyítsuk az összes pont feszültségét ehhez a ponthoz. Az A pontban vett elektromos potenciál definíció szerint az A pont O ponthoz viszonyított feszültsége, azaz:

$$U_A = U_{A0}$$

Az A és B pontban vett potenciálok ismeretében kiszámolható az A és B pontok közötti feszültség:

$$U_{AB} = U_A - U_B \quad (4.10)$$

Azaz az U_{AB} feszültség az A és B pontokban vett potenciálok különbsége. Ennek belátásához tekintsük az 58. ábrát, és használjuk fel az elektrosztatikus tér konzervatív tulajdonságát.



58. ábra. Munkavégzés konzervatív mezőben

Mivel az elektrosztatikus mező konzervatív:

$$W_F^{A \rightarrow B} = W_F^{A \rightarrow O} + W_F^{O \rightarrow B} = W_F^{A \rightarrow O} - W_F^{B \rightarrow O}$$

Osztva a töltés értékével:

$$\frac{W_F^{A \rightarrow B}}{q} = \frac{W_F^{A \rightarrow O}}{q} - \frac{W_F^{B \rightarrow O}}{q}$$

Tehát:

$$U_{AB} = U_{A0} - U_{B0} = U_A - U_B \quad (4.11)$$

Megjegyzés:

$$W_F^{0 \rightarrow B} = -W_F^{B \rightarrow 0} \Rightarrow \frac{W_F^{0 \rightarrow B}}{q} = -\frac{W_F^{B \rightarrow 0}}{q} \Rightarrow U_{0B} = -U_{B0}$$

A feszültség kiszámítása az elektromos térerősségből

Ha az elektromos térerősség a hely függvényében ismert, akkor az A és B pontok közti feszültség kiszámítható az alábbiak szerint:

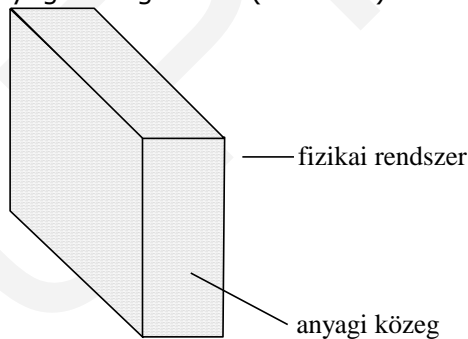
$$U_{AB} = \frac{W_F^{A \rightarrow B}}{q} = \frac{\int_A^B \vec{F}(\vec{r}) d\vec{r}}{q} = \frac{\int_A^B q \cdot \vec{E}(\vec{r}) d\vec{r}}{q} = \int_A^B \vec{E}(\vec{r}) d\vec{r}$$

A fenti integrál kiszámításánál célszerű az A és B pontok között a térerősség vonalak, azon belül a legegyszerűbb görbe mentén haladni.

5. Transzportfolyamatok

Transzportfolyamatokkal a fizika több különböző területén találkozunk (pl. hő és áramlástan, elektromagnetika), így célszerű azokat egy egységes elmélet keretein belül tárgyalni. Mielőtt értelmezzük a transzportfolyamat fogalmát, tisztáznunk kell, hogy mit értünk fizikai rendszer alatt, és beszélnünk kell a fizikai mennyiségek két fontos csoportjáról, nevezetesen az extenzív és intenzív fizikai mennyiségekről.

A **fizikai rendszer** a fizikai tér egy zárt felülettel körülhatárolt tartománya, amelyet valamilyen anyagi közeg tölt ki (59. ábra).



59. ábra. Fizikai rendszer

A fizikai rendszert leíró mennyiségek két csoportba sorolhatók, ezek az **extenzív és intenzív mennyiségek**. Az extenzív mennyiség a fizikai rendszer egészét és egyes részeit (tartományait) jellemzi, ezek **összeadó (additív) mennyiségek** (pl. tömeg, elektromos töltés, belső energia, hőmennyiség).

A teljes rendszeren mért értéke egyenlő az egyes részein mért értékeinek összegével, feltéve, hogy az egyes részek kiadják a teljes rendszert (60. ábra).

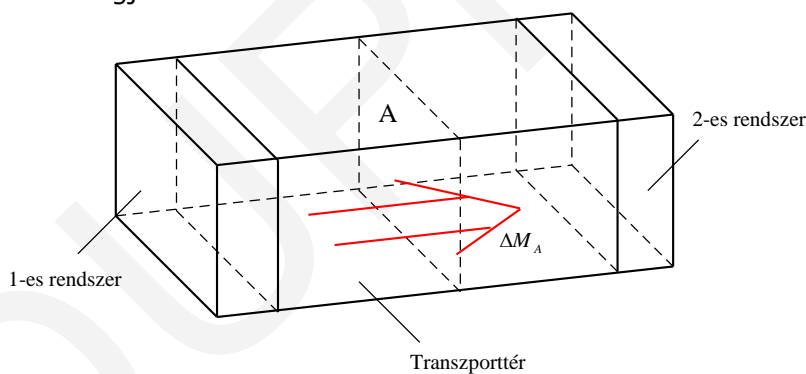
$$M = M_1 + M_2 + \dots + M_i + \dots + M_n \quad (5.1)$$

| | | | |
|-------|-------|--|-------|
| M_1 | M_2 | | |
| | | | |
| | M_i | | |
| | | | M_n |

60. ábra. Fizikai rendszer jellemzése additív mennyiséggel

Az extenzív mennyiségek fontos tulajdonsága, hogy áramlásra alkalmasak, azaz beszélhetünk a tömeg-, elektromos töltés- vagy hőáramlásról.

Az intenzív mennyiségek a rendszert pontról pontra jellemzik, nem additívak, áramlásra nem alkalmasak, **zárt fizikai rendszerben** kiegyenlítődésre törekednek (pl. nyomás, elektromos potenciál, hőmérséklet). Zárt fizikai rendszerről akkor beszélünk, ha a rendszer és környezete között nem lehetséges az extenzív mennyiségek áramlása. A továbbiakban **transzportfolyamatokkal** foglalkozunk, azaz azt vizsgáljuk, hogy milyen folyamat révén megy végbe az extenzív mennyiségek áramlása két fizikai rendszer vagy egy rendszer és környezet között. A transzportfolyamatok mennyiségi leírásához a 61. ábrán látható modellt fogjuk alkalmazni.



61. ábra. Modell a transzportfolyamatokhoz

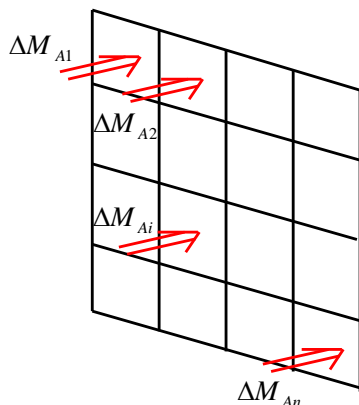
Az M extenzív mennyiség áramlása az 1-esből a 2-es rendszerbe a **transzporttér**en keresztül valósul meg. Az ábrán ΔM_A az A felületen Δt idő alatt átáramló M extenzív mennyiséget jelöli. Ezt követően értelmezhetjük az **áramerősség** fogalmát az alábbi összefüggéssel:

$$I_M(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta M_A}{\Delta t} \quad (5.2)$$

Tehát az áramerősség az áramlás időbeli intenzitását jellemzi a felületen keresztül. Speciálisan, ha $I_M(t) = I_M = \text{állandó}$, akkor a felületen Δt idő alatt átáramlott extenzív mennyiség az alábbi összefüggéssel számolható:

$$\Delta M_A = I_M \cdot \Delta t \quad (5.3)$$

A felületet darabokra bontva, az egyes darabokra vonatkozó áramerősségek összege egyenlő a teljes felületre vonatkozó áramerősséggel.



62. ábra. Extenzív mennyiség áramlása felületen keresztül

Ha ΔM_A jelöli a teljes felületen Δt idő alatt átáramló M extenzív mennyiséget, akkor:

$$I_M = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta M_A}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta M_{A1} + \dots + \Delta M_{An}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta M_{A1}}{\Delta t} + \dots + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta M_{An}}{\Delta t} = I_{M1} + \dots + I_{Mn} \quad (5.4)$$

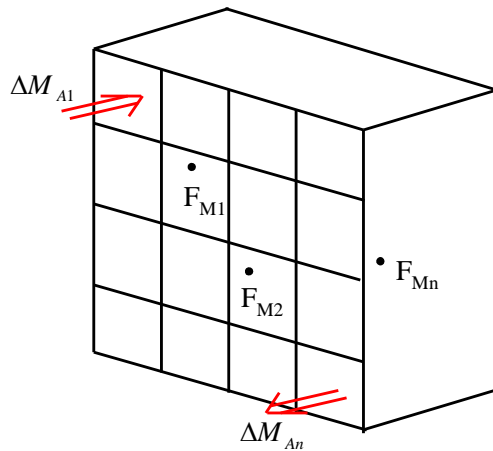
Egy fizikai rendszerben egy M extenzív mennyiség értéke megváltozhat ki- és beáramlás útján, de úgy is, hogy a rendszeren belül termelődik, vagy eltűnik. Termelődés esetén azt mondjuk, hogy az extenzív mennyiségnek **forrása**, eltűnés esetén pedig, hogy **nyelője** van a rendszeren belül. A termelődés vagy eltűnés időbeli intenzitásának jellemzésére bevezetjük a **forráserősséget** (F_M). Legyen ΔM_T a forrás által Δt idő alatt termelt vagy a nyelő által Δt idő alatt elnyelt M extenzív mennyiség. Ekkor a forráserősséget az alábbi összefüggéssel értelmezzük:

$$F_M(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta M_T}{\Delta t} \quad (5.5)$$

Speciálisan, ha $F_M(t) = F_M = \text{állandó}$, akkor a termelődött (elnyelt) fizikai mennyiséget az alábbi összefüggéssel számíthatjuk:

$$\Delta M_T = F_M \cdot \Delta t \quad (5.6)$$

Megjegyezzük, hogy forrás esetén $\Delta M_T > 0$, így $F_M > 0$, míg nyelő esetén $\Delta M_T < 0$, tehát $F_M < 0$.



63. ábra. Ábra a mérlegegyenlet értelmezéséhez

Legyen ΔM az M extenzív mennyiség Δt idő alatti megváltozása a fizikai rendszerben. A fizikai rendszert határoló felületet osszuk fel A_1, \dots, A_n nagyságú részfelületekre. Az egyes részfelületeken Δt idő alatt átáramló M extenzív mennyiségeket jelölje rendre $\Delta M_{A1}, \dots, \Delta M_{An}$. Továbbá a rendszeren belül elhelyezkedő források és nyelők által Δt idő alatt termelt vagy eltüntetett M extenzív mennyiségeket jelölje rendre $\Delta M_{T1}, \dots, \Delta M_{Tm}$. A fenti mennyiségek között fennáll az alábbi összefüggés:

$$\Delta M = \Delta M_{A1} + \dots + \Delta M_{An} + \Delta M_{T1} + \dots + \Delta M_{Tm} \quad (5.7)$$

Tegyük fel, hogy $I_{Mi}(t) = I_{Mi} = \text{állandó}$, $F_{Mi}(t) = F_{Mi} = \text{állandó}$, ekkor:

$$\Delta M = I_{M1} \cdot \Delta t + \dots + I_{Mn} \cdot \Delta t + F_{M1} \cdot \Delta t + \dots + F_{Mm} \cdot \Delta t$$

Ebből:

$$\Delta M = (\sum_{i=1}^n I_{Mi}) \cdot \Delta t + (\sum_{i=1}^m F_{Mi}) \cdot \Delta t \quad (5.8)$$

A fenti egyenletet **mérlegegyenletnek** nevezzük.

A továbbiakban az M extenzív mennyiség áramának különböző típusaival foglalkozunk, nevezetesen a **konduktív** és **konvektív áramokkal**. Konduktív és konvektív áram akkor jöhet létre, ha a transzportteret kitölti valamilyen vezető közeg. Konvektív áramról akkor beszélünk, ha az extenzív mennyiséget az áramló közeg szállítja magával. Erre példa egy radiátorcsőben áramló víz amely szállítja a hőt. Konduktív áram esetén az extenzív mennyiség úgy áramlik, hogy a transzportteret kitöltő közeg nyugalomban van, ekkor azt mondjuk, hogy a közeg vezeti az extenzív mennyiséget. Például egy fém rúd vezeti az elektromos töltést vagy hőt. Konduktív áram csak akkor jöhet létre, ha egy intenzív mennyiség térbeli eloszlása inhomogén. Térbeli inhomogenitás alatt azt értjük, hogy az intenzív mennyiség értéke a tér különböző pontjain más és más. Például a tömeg, a hő vagy az elektromos töltés áramlásához nyomás, hőmérséklet vagy elektromos potenciálkülönbség (azaz elektromos feszültség)

szükséges. Ez alapján az extenzív és intenzív mennyiségek párokba rendezhetők:

| Extenzív | Intenzív |
|-----------------------|--------------------------|
| tömeg (m) | nyomás (P) |
| elektromos töltés (q) | elektromos potenciál (U) |
| hő (Q) | hőmérséklet (T) |

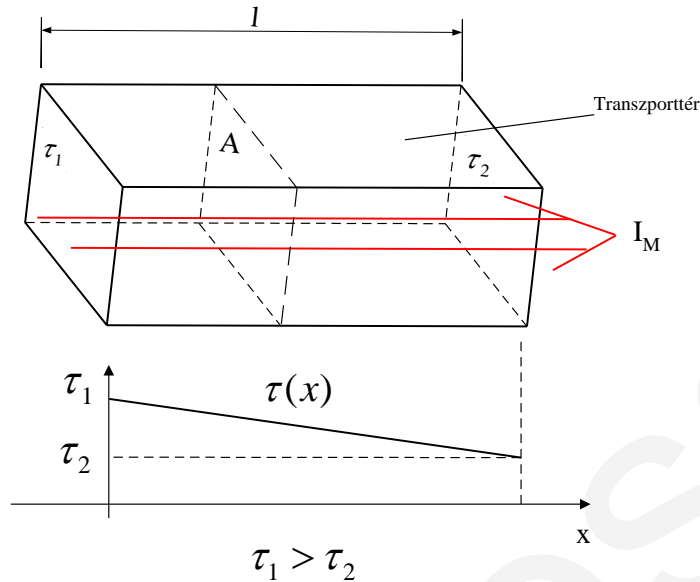
A konduktív és konvektív áramok mellett az extenzív mennyiségek áramlása végbe mehet sugárzás formájában is (pl. hősugárzás). Sugárzásos áramláshoz nem szükséges, hogy a transzportteret kitöltse valamilyen vezető közeg, az pl. vákuumban is végbemegy.

A továbbiakban a transzportfolyamatok mennyiségi leírásával foglalkozunk. Arra az esetre szorítkozunk, amikor a transzportteret kitöltő közeg **állandósult (stacionárius) állapotban** van. Állandósult állapotról akkor beszélünk, ha a közeg bármely pontjába bármely τ intenzív mennyiség értéke időben állandó. Ekkor a transzporttér bármely keresztmetszetén bármely extenzív mennyiség áramerőssége időben állandó ($I_M(t) = I_M = \text{állandó}$). A **vezetési egyenlet** az M extenzív mennyiség áramerőssége és a τ intenzív mennyiség megváltozása között teremt mennyiségi kapcsolatot. Kísérletileg bizonyítható, hogy az extenzív mennyiség áramerőssége egyenesen arányos (\sim) a hozzá tartozó intenzív mennyiség megváltozásával:

$$I_M \sim -\Delta\tau = -(\tau_2 - \tau_1)$$

Emellett belátható, hogy az intenzív mennyiség áramerőssége egyenesen arányos a transzporttér áramlásra merőleges keresztmetszetével (A), és fordítottn arányos az áramlás irányában vett hosszával (l , 64. ábra). Azaz:

$$I_M \sim -A \cdot \frac{\tau_2 - \tau_1}{l}$$



64. ábra. Ábra a vezetési egyenlet értelmezéséhez

A K_M **vezetési tényezőt** bevezetve a fenti összefüggés egyenlet formájában írható:

$$I_M = -K_M \cdot A \cdot \frac{\tau_2 - \tau_1}{l} \quad (5.9)$$

A fenti összefüggés a **vezetési egyenlet** állandósult (stacionárius) állapotban. A K_M vezetési tényező a közeg anyagi minőségére jellemző.

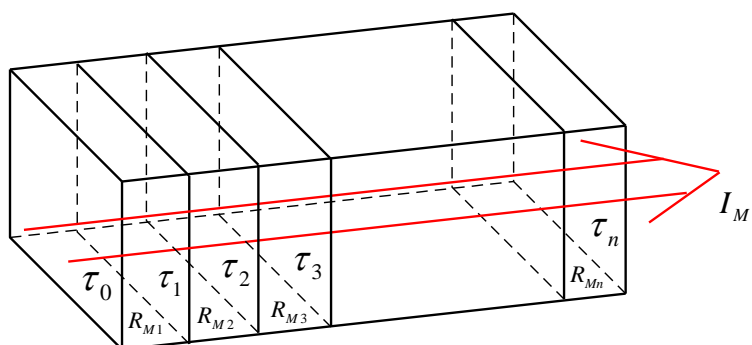
Az (5.9) egyenletet átrendezve:

$$I_M \cdot \frac{\overbrace{l}^{R_M}}{K_M \cdot A} = -(\tau_2 - \tau_1)$$

Az R_M állandót **vezetési ellenállásnak** nevezzük. Ezt követően a vezetési egyenlet:

$$I_M \cdot R_M = -(\tau_2 - \tau_1) \quad (5.10)$$

Ha a transzporttér több különböző anyagi minőségű tartományból (pl. rétegből) áll, amelyek az áramlás irányában véve egymást követően, vagy egymás mellett helyezkednek el, akkor a rétegek soros, illetve párhuzamos kapcsolásáról beszélünk. A 65. ábra a rétegek soros kapcsolást szemlélteti.



65. ábra. Eredő vezetési ellenállás értelmezése soros kapcsolás esetén

Feltételezzük, hogy az egyes rétegek hézagmentesen érintkeznek. Az egyes rétegekre felírva a vezetési egyenletet:

$$I_M \cdot R_{M1} = -(\tau_1 - \tau_0)$$

...

$$I_M \cdot R_{Mn} = -(\tau_n - \tau_{n-1})$$

A fenti egyenleteket összeadva:

$$I_M \cdot (R_{M1} + \dots + R_{Mn}) = \tau_0 - \tau_1 + \dots + \tau_{n-1} - \tau_n = \tau_0 - \tau_n = -(\tau_n - \tau_0)$$

Az egész rétegszerkezetre felírva a vezetési egyenletet:

$$I_M \cdot R_{Me} = -(\tau_n - \tau_0)$$

A fenti egyenletben R_{Me} a rétegszerkezet eredő vezetési ellenállása.

A fenti két egyenletből:

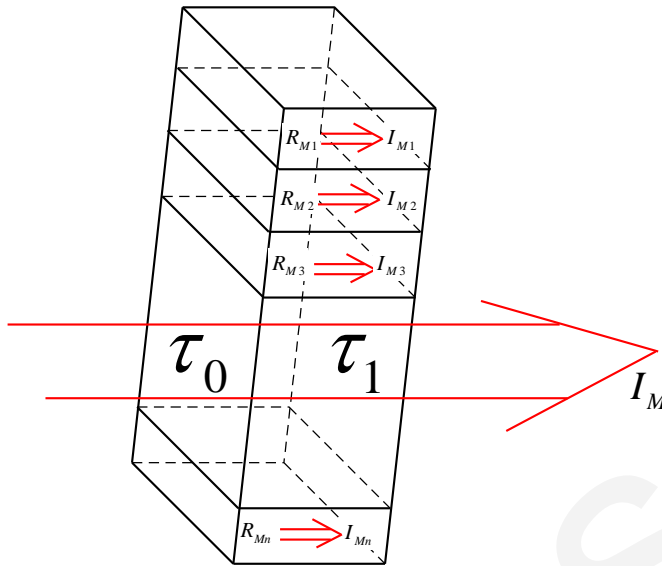
$$I_M \cdot R_{Me} = I_M \cdot (R_{M1} + \dots + R_{Mn})$$

Tehát:

$$R_{Me} = R_{M1} + \dots + R_{Mn} \quad (5.11)$$

Tehát soros kapcsolásnál az eredő vezetési ellenállás egyenlő az egyes vezetési ellenállások összegével.

A 66. ábra párhuzamosan kapcsolt hővezető rétegeket szemléltet:



66. ábra. Eredő vezetési ellenállás értelmezése párhuzamos kapcsolás esetén

Párhuzamos kapcsolás esetén az egyes rétegekhez tartozó áramerősségek összeadódnak:

$$I_M = I_{M1} + \dots + I_{Mn}$$

Az egyes rétegekre külön-külön felírható a vezetési egyenlet:

$$I_{M1} \cdot R_{M1} = -(\tau_1 - \tau_0)$$

...

$$I_{Mn} \cdot R_{Mn} = -(\tau_1 - \tau_0)$$

Az egész rétegszerkezetre felírva a vezetési egyenletet:

$$I_M \cdot R_{Me} = -(\tau_1 - \tau_0)$$

A fenti egyenletekből az áramerősségeket kifejezve és összeadva, majd felhasználva, hogy az eredő áramerősség az egyes áramerősségek összege:

$$-\frac{(\tau_1 - \tau_0)}{R_{Me}} = -\frac{(\tau_1 - \tau_0)}{R_{M1}} - \dots - \frac{(\tau_1 - \tau_0)}{R_{Mn}}$$

A fenti egyenletből:

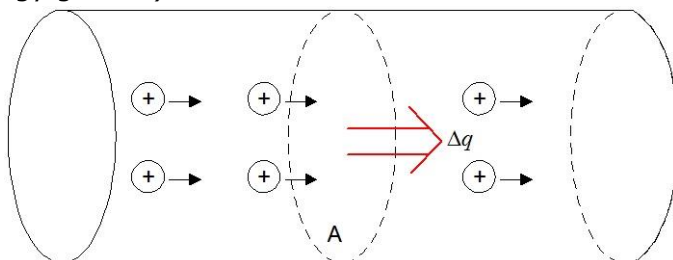
$$\frac{1}{R_{Me}} = \frac{1}{R_{M1}} + \dots + \frac{1}{R_{Mn}} \quad (5.12)$$

Tehát párhuzamos kapcsolásnál az eredő vezetési ellenállás reciproka egyenlő az egyes vezetési ellenállások reciprokainak összegével.

5.1 Elektromos töltéstranszport állandósult állapotban – Elektromos egyenáram

5.1.1 Elektromos egyenáram, Ohm törvénye

Az **elektromos áram** az elektromos töltéshordozók makroszkopikusan rendezett mozgása (áramlása, 67. ábra). A töltéshordozók lehetnek elektronok (pl. egy fémes vezetőben), illetve pozitív, vagy negatív töltésű ionok (pl. egy elektrolitban vagy gázban).



67. ábra. Ábra az elektromos áramerősség értelmezéséhez

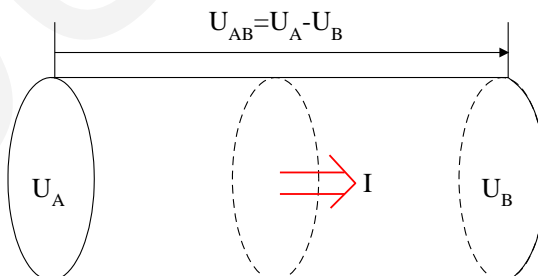
Jelölje a vezeték A keresztmetszetén Δt idő alatt átáramló töltésmennyiséget Δq . A töltésáram-erősséget – **azaz az elektromos áramerősséget** – egy adott t pillanatban a következő összefüggés értelmezi:

$$I(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta t} \quad I = \left[\frac{C}{s} \right] = [A] \quad (5.13)$$

Speciálisan **egyenáramról (Direct Current - DC)** beszélünk, ha a töltéshordozók áramlási iránya és értelme időben nem változik. (Ettől függetlenül az áramerősség időben változhat.) Speciálisan, ha $I(t)=I=\text{állandó}$, akkor állandó erősségű egyenáramról beszélünk. Állandósult állapotban az elektromos töltésáramlásra vonatkozó vezetési egyenlet a következő alakban írható:

$$I = -\sigma \cdot A \cdot \frac{U_B - U_A}{l} = -\sigma \cdot A \cdot \frac{U_{BA}}{l} = \frac{\sigma A}{l} \cdot U_{AB}, \quad \sigma = \left[\frac{A}{V \cdot m} \right]$$

A fenti összefüggésben I az elektromos áramerősség, σ az elektromos vezetési tényező, U_B és U_A az elektromos potenciál a vezetők B és A pontjában, U_{AB} pedig az elektromos feszültség a vezetők A és B pontja között (68. ábra).



68. ábra. Ábra az Ohm törvény értelmezéséhez

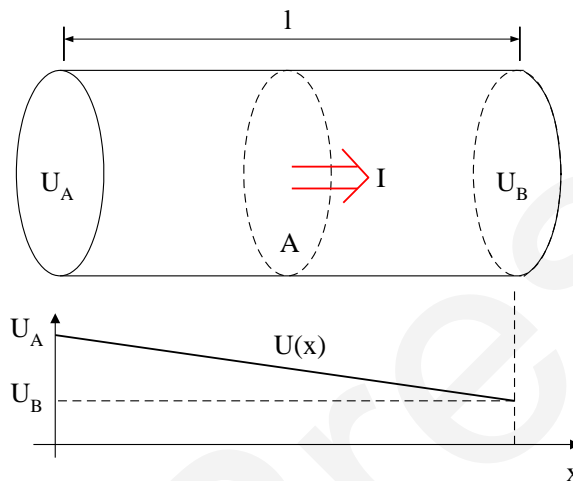
Az elektromos vezetési ellenállást – röviden **elektromos ellenállást** – az alábbi összefüggés értelmezi:

$$R = \frac{l}{\sigma A} = \rho_f \cdot \frac{l}{A}, \quad R = [\Omega], \quad \rho_f = [\Omega \cdot m] \quad (5.14)$$

a vezetési egyenlet az alábbi alakban írható:

$$I = -\sigma \cdot A \cdot \frac{U_B - U_A}{l} = -\sigma \cdot A \cdot \frac{U_{BA}}{l} = \frac{1}{R_{AB}} \cdot U_{AB} \Rightarrow U_{AB} = R_{AB} \cdot I$$

A fenti egyenlet más néven **Ohm törvénye**, amely szavakban megfogalmazva a következő: A vezetõn mért feszültség és a rajta átfolyó áramerõség egyenesen arányosak, az arányossági tényezõ az elektromos (Ohmos) ellenállás. Amint az (5.14) összefüggésbõl leolvasható, az elektromos ellenállás egyenesen arányos a vezetõdarab hosszával, és fordítottan annak keresztmetszetével (69. ábra).



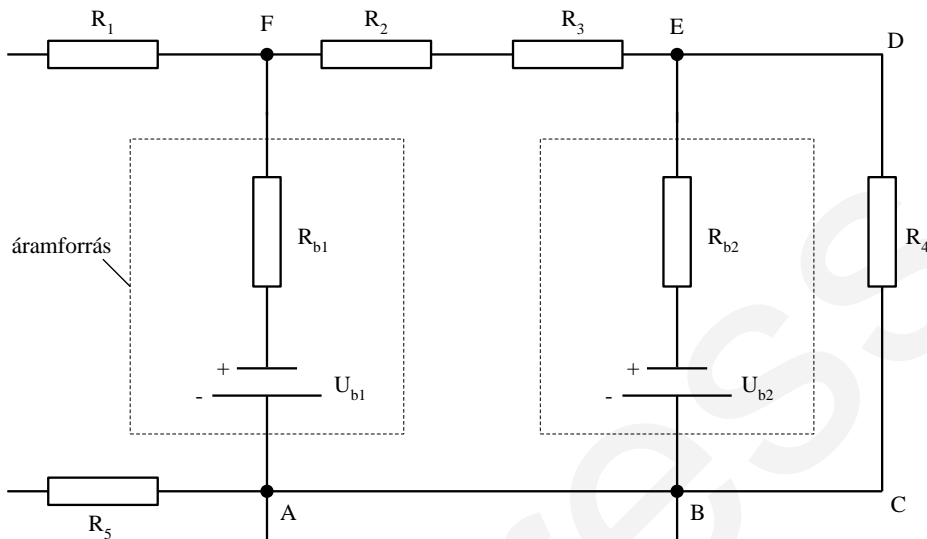
69. ábra. Elektromos feszültség változása a vezetõ hossza mentén

A ρ_f arányossági tényezõt **fajlagos ellenállásnak** nevezzük, amely a vezetõ anyagi minõsége jellemzõ. Az alábbi táblázat néhány fontosabb vezetõanyag fajlagos ellenállását mutatja.

| Anyag | Fajlagos ellenállás ($\cdot 10^{-6} [\Omega m]$) |
|-----------|---|
| Ezüst | 0,016 |
| Réz | 0,017 |
| Arany | 0,023 |
| Alumínium | 0,028 |
| Higany | 0,958 |
| Üveg | 10^{17} |

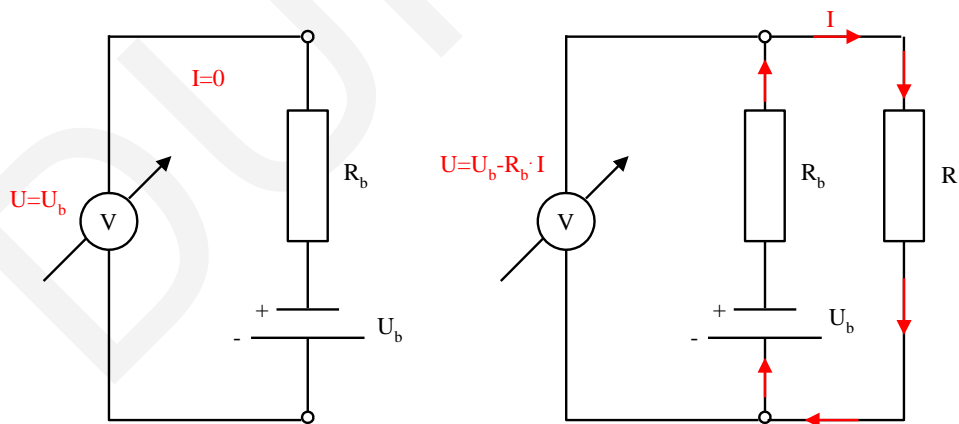
5.1.2 Egyenáramú hálózatok, Kirchhoff törvényei

Egyenáramú áramforrásokat és fogyasztókat (ohmos ellenállásokat) elhanyagolható ellenállású vezetőkkel összekötve **egyenáramú hálózatot** kapunk (70. ábra).



70. ábra. Példa egyenáramú hálózatra

Egy egyenáramú áramforrást három paraméterrel jellemzünk: **belső feszültség** (U_b), **belső ellenállás** (R_b) és **polaritás** (+, -). A 71. ábra egy egyenáramú áramforrást szemléltet **terheletlen**, és külső fogyasztóval (R) **terhelt** esetben.



71. ábra. Egyenáramú áramforrás terheletlen és külső fogyasztóval terhelt esetben

Terheletlen esetben az áramforrás kapcsain egy ideális (végtelen nagy belső ellenállású) feszültségmérő műszerrel (voltmérővel) mért feszültséget az áramforrás belső feszültségének nevezzük. Terheletlen esetben – a műszer

végtelen nagy belső ellenállás miatt – az áramforráson keresztül nem folyik áram. Terhelt esetben azonban a terhelő ellenálláson, így az áramforráson keresztül áram folyik, és az áramforrás belső ellenállásán feszültség esik. Ekkor az áramforrás kapcsain mért feszültség:

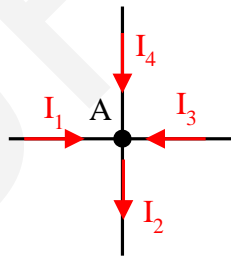
$$U = U_b - I \cdot R_b \quad (5.15)$$

Azaz a kapocsfeszültség függ a belső ellenállás értékétől, valamint az áramforráson átfolyó áram erősségétől, így közvetve a terhelő ellenállástól. Ebből adódóan célszerű az áramforrást a kapocsfeszültség helyett a belső feszültséggel jellemezni, amely nem függ a terhelő ellenállástól. Az egyenáramú hálózatok vizsgálatához szükségünk lesz még a **csomópont**, az **ág** és a **hurok** fogalmára. A csomópont (elágazási pont) a hálózat olyan pontja, amelyhez legalább három vezeték csatlakozik (70. ábra: A, B, E, F pontok). Az ág olyan, két csomópontot összekötő vezetékszakasz, amely a végpontjain kívül nem tartalmaz csomópontot (70. ábra: A–B, F–E, A–F, B–E, B–C–D–E vezetékszakaszok). A hurok egy olyan (önmagába záródó) vezetékszakasz, amelynek a kezdő és végpontja ugyanaz a pont. A fenti fogalmak ismeretében kimondhatjuk **Kirchhoff I. és II. törvényét**, amelyek alkalmazásával bármely egyenáramú hálózat megoldható. Kirchhoff I. törvénye, más néven a **csomóponti törvény**, szavakban a következő:

Kirchhoff I. (csomóponti törvény)

Egy csomópontba befolyó és onnan elfolyó áramok erősségének előjeles összege zérus. A csomópontba befolyó áramokat pozitívan, míg az elfolyókat negatívan előjelezzük (72. ábra).

$$\sum_{A,i} I_i = I_1 - I_2 + I_3 + I_4 = 0 \quad (5.16)$$

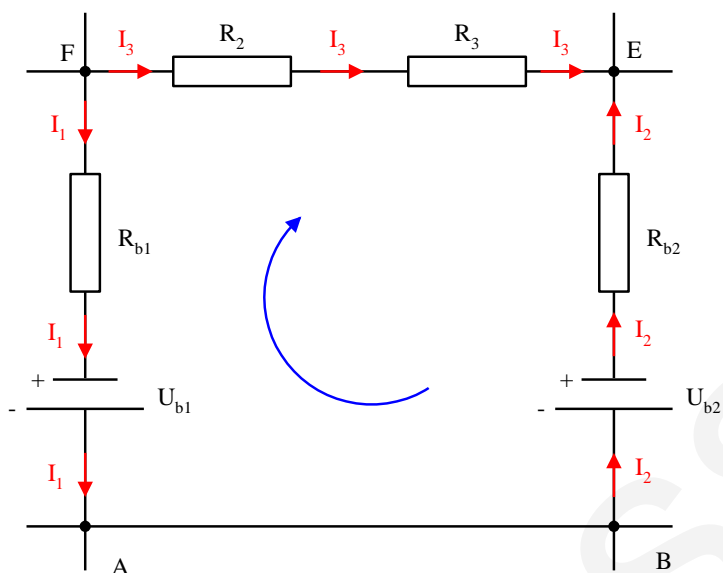


72. ábra. Ábra a csomóponti törvény értelmezéséhez

Kirchhoff I. törvénye annak a fizikai ténynek a megfogalmazása, hogy a csomópontban nem lehet töltésfelhalmozódás, mert az az elektromos taszítás miatt önmagát szünteti meg. Kirchhoff II. törvénye szavakban az alábbi:

Kirchhoff II. (huroktörvény)

A hálózathoz tartozó tetszőleges hurokban körbe haladva és a feszültségeket előjelesen összegezve zérust kapunk. A törvény alkalmazásánál rögzíteni kell a hurokban egy körül járási irányát, valamint a hurokban szereplő minden egyes ágban egy áramirányt (73. ábra).



73. ábra. Ábra a huroktörvény értelmezéséhez (Az ábrán látható hurok a 70. ábrán látható hálózat része)

A törvény alkalmazásánál az alábbi előjel szabályokat kell figyelembe venni:

- 1) Ha egy ágban folyó áram iránya megegyezik a hurokban felvett körül járási iránnyal, akkor az ágban található ellenállásokon eső feszültségek pozitívak, egyébként negatívak.
- 2) Ha a hurokban felvett körül járási irányba haladva először az áramforrás pozitív sarkával (pólusával) találkozunk, akkor az áramforrás belső feszültsége pozitív, egyébként negatív.

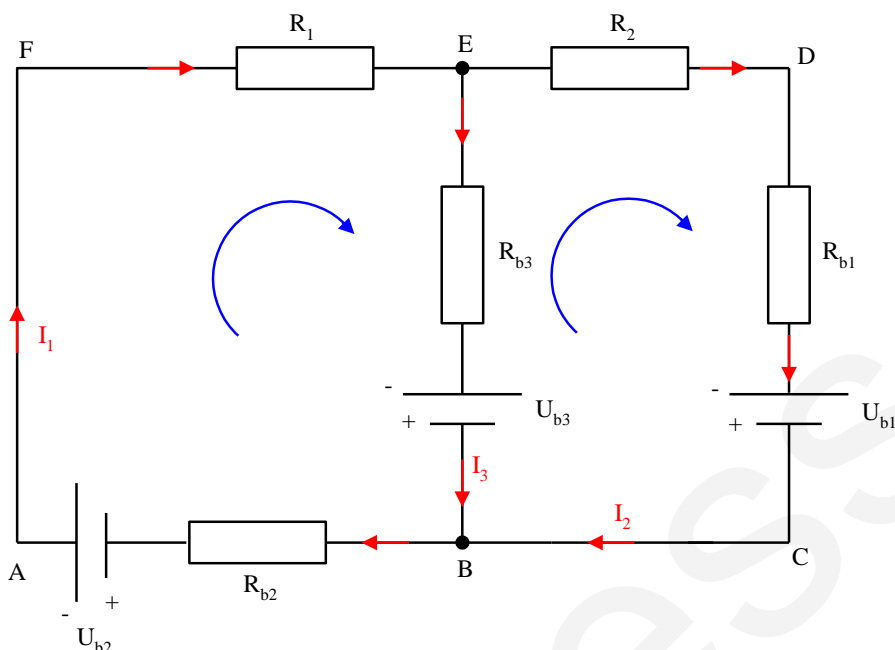
Alkalmazva Kirchhoff II. törvényét a A–B–E–F–A hurokra:

$$\sum_i U_i = -U_{b1} - R_{b1} \cdot I_1 + R_2 \cdot I_3 + R_3 \cdot I_3 - R_{b2} \cdot I_2 + U_{b2} = 0$$

Ahány ismeretlenünk van, annyi hurok vagy csomóponti törvényt kell felírunk, így n ismeretlen esetén egy n egyenletből álló n ismeretlenes lineáris egyenletrendszert kapunk. A fenti egyenletrendszert megoldva, megkapjuk az ismeretlen áramerősségeket, ellenállásokat és feszültségeket. Ha egy áramerősségre negatív értéket kapunk, az azt jelenti, hogy a tényleges technikai áramirány ellentétes a feltételezettel. **Technikai áramirány** alatt a képzeletbeli pozitív töltéshordozók mozgásirányát értjük. (A fémes vezetékben a valóságban vezetési elektronok mozognak.)

Feladat

Határozzuk meg az alábbi egyenáramú hálózat B–A–F–E, B–E, és B–C–D–E ágaiban folyó áramok erősségét és irányát!



Megoldás:

Kirchhoff II. törvénye az A-F-E-B-A hurokra:

$$\text{I. } \sum_i U_i = R_1 \cdot I_1 + R_{b3} \cdot I_3 - U_{b3} + R_{b2} \cdot I_1 + U_{b2} = 0$$

Kirchhoff II. törvénye a B-E-D-C-B hurokra:

$$\text{II. } \sum_i U_i = U_{b3} - R_{b3} \cdot I_3 + R_2 \cdot I_2 + R_{b1} \cdot I_2 - U_{b1} = 0$$

Kirchhoff I. törvénye a B csomópontpra:

$$\text{III. } \sum_i I_i = -I_1 + I_2 + I_3 = 0$$

$$\text{I. } (R_1 + R_{b2}) \cdot I_1 + R_{b3} \cdot I_3 = U_{b3} - U_{b2}$$

$$\text{II. } (R_2 + R_{b1}) \cdot I_2 - R_{b3} \cdot I_3 = U_{b1} - U_{b3}$$

$$\text{III. } -I_1 + I_2 + I_3 = 0$$

$$\text{I. } 8 \cdot I_1 + 0 \cdot I_2 + 4 \cdot I_3 = -5$$

$$\text{II. } 0 \cdot I_1 + 11 \cdot I_2 - 4 \cdot I_3 = 15 \quad \Rightarrow \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 8 & 0 & 4 & -5 \\ 0 & 11 & -4 & 15 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

$$\text{III. } -1 \cdot I_1 + 1 \cdot I_2 + 1 \cdot I_3 = 0$$

Oldjuk meg az egyenletrendszert a Cramer-szabályt alkalmazva:

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 4 \\ 0 & 11 & -4 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_1 = \begin{pmatrix} -5 & 0 & 4 \\ 15 & 11 & -4 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 8 & -5 & 4 \\ 0 & 15 & -4 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} 8 & 0 & -5 \\ 0 & 11 & 15 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\det A = \begin{vmatrix} 8 & 0 & 4 \\ 0 & 11 & -4 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 8 \cdot \overbrace{(11 \cdot 1 - 1 \cdot (-4))}^{15} - 0 \cdot \overbrace{(0 \cdot 1 - (-1) \cdot (-4))}^4 + 4 \cdot \overbrace{(0 \cdot 1 - (-1) \cdot 11)}^{11} = 164$$

$$\det A_1 = \begin{vmatrix} -5 & 0 & 4 \\ 15 & 11 & -4 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -15$$

$$\det A_2 = \begin{vmatrix} 8 & -5 & 4 \\ 0 & 15 & -4 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 160$$

$$\det A_3 = \begin{vmatrix} 8 & 0 & -5 \\ 0 & 11 & 15 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -175$$

$$I_1 = \frac{\det A_1}{\det A} = \frac{-15}{164} = -0,09 \text{ [A]}$$

$$I_2 = \frac{\det A_2}{\det A} = \frac{160}{164} = 0,98 \text{ [A]}$$

$$I_3 = \frac{\det A_3}{\det A} = \frac{-175}{164} = -1,07 \text{ [A]}$$

Megjegyzés: A negatív előjel azt jelenti, hogy a valós áramirány ellentétes a feltételezettel.

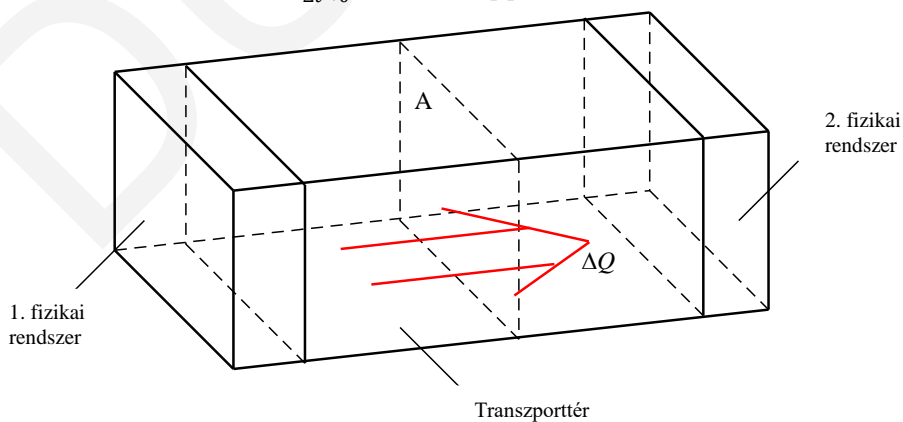
5.2 Hőtranszport állandósult állapotban

A **hőtranszport** hőenergia átadás (átvitel) két fizikai rendszer vagy egy rendszer és környezete között.

Az A keresztmetszeten Δt idő alatt átáramlott hőmennyiséget jelölje ΔQ .

A **hőáram erősséget** egy A felületre vonatkozóan, egy adott t pillanatban az alábbi összefüggés értelmezi (74. ábra):

$$I_Q(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta t} \quad I_Q = \left[\frac{\text{J}}{\text{s}} \right] = [\text{W}] \quad (5.17)$$



74. ábra. Ábra a hőáram erősség értelmezéséhez

A továbbiakban a hőtranszport három különböző formájával foglalkozunk, nevezetesen a konduktív (**hővezetés**), konvektív (**hőáramlás**) és sugárzásos (**hősugárzás**) hőtranszporttal.

Hővezetés és hőáramlás csak akkor jöhet létre, ha a transzportteret kitölti valamilyen közeg, amely hővezetés esetén nyugalomban van, míg hőáramlás esetén áramlik, így a közeg szállítja magával a hőt. Hősugárzás esetén nincs szükség közvetítő közegre, a hőtranszport vákuumban is végbemegy.

A továbbiakban csak az állandósult (stacionárius) állapotban végbemenő hőtranszporttal foglalkozunk. Állandósult állapotról akkor beszélünk, ha a közeg bármely pontjába a hőmérséklet értéke időben már nem változik. Ekkor a transzporttér bármely keresztmetszetén a hőáram erőssége már időben állandó:

$$I_Q(t) = I_Q = \text{állandó}$$

5.2.1 Hővezetés

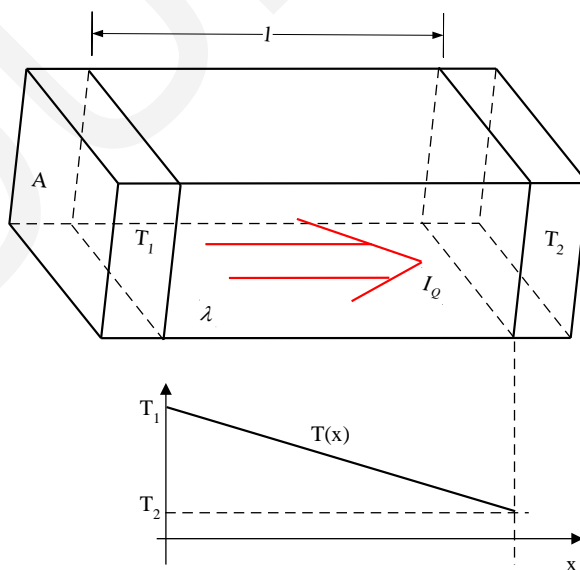
A hővezetés mechanizmusa mikroszkopikus szinten egyszerű, szemléletes formában megfogalmazva a következő:

A közeg magasabb hőmérsékletű helyein intenzívebb hőmozgást végző molekulák (vagy atomok) energiát adnak át szomszédjaiknak, így az energia molekuláról molekulára adódik át, és hő vándorol a közeg magasabb hőmérsékletű tartományai felől a hidegebbek irányába.

Hővezetés egyaránt végbe mehet szilárd, folyékony vagy légnemű közegben, de legjellemzőbb szilárd anyagokban (pl.: fémekben).

Az általános vezetési egyenlet hővezetés esetén, állandósult állapotban, a következő alakban írható (75. ábra):

$$I_Q = -\lambda \cdot A \cdot \frac{T_2 - T_1}{l} \quad \lambda = \left[\frac{W}{m \cdot K} \right] \quad (5.18)$$



75. ábra. Ábra a hővezetési egyenlet értelmezéséhez

A fenti egyenletben λ a közeg **hővezetési tényezője**, T_1 és T_2 az 1-es és 2-es fizikai rendszer hőmérséklete.

A fenti egyenletet átrendezve:

$$I_Q \cdot \frac{l}{\lambda \cdot A} = -(T_2 - T_1) \quad (5.19)$$

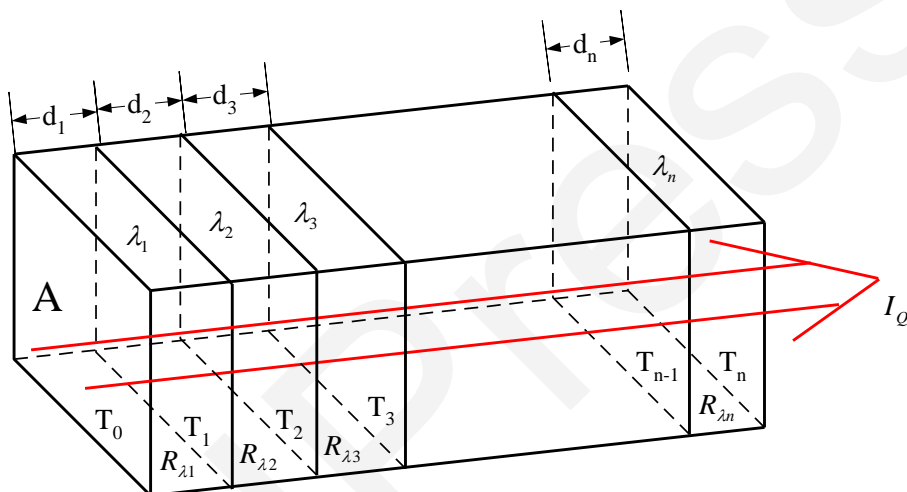
$$I_Q \cdot R_\lambda = -(T_2 - T_1) \Rightarrow R_\lambda = \frac{l}{\lambda \cdot A} \quad R_\lambda = \left[\frac{K}{W} \right] \quad (5.20)$$

A fenti egyenletben R_λ az l hosszúságú és A keresztmetszetű tartomány hővezetési ellenállása.

Hővezetési ellenállások soros és párhuzamos kapcsolása

Soros kapcsolás

A 76. ábra sorba kapcsolt hővezető rétegeket szemléltet.



76. ábra. Hővezető rétegek soros kapcsolása

A transzportfolyamatoknál soros kapcsolásra alkalmazott általános gondolatmenetet követve:

$$\left. \begin{array}{l} I_Q \cdot R_{\lambda_1} = -(T_1 - T_0) \\ \dots \\ I_Q \cdot R_{\lambda_n} = -(T_n - T_{n-1}) \end{array} \right\} \begin{array}{l} + \Rightarrow I. \quad I_Q \cdot (R_{\lambda_1} + \dots + R_{\lambda_n}) = \\ = T_0 - T_1 \dots + T_{n-1} - T_n = T_0 - T_n = \\ = -(T_n - T_0) \end{array}$$

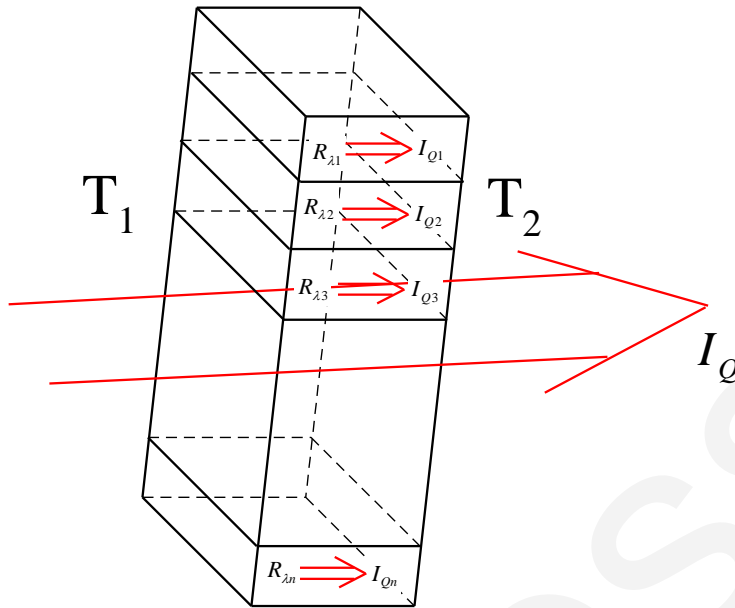
$$II. \quad I_Q \cdot R_{\lambda_r} = -(T_n - T_0)$$

Az I. és II. egyenletből:

$$R_{\lambda_r} = R_{\lambda_1} + \dots + R_{\lambda_n} \quad (5.21)$$

Párhuzamos kapcsolás

A 77. ábra párhuzamosan kapcsolt hővezető rétegeket szemléltet.



77. ábra. Hővezető rétegek párhuzamos kapcsolása

A transzportfolyamatoknál párhuzamos kapcsolásra alkalmazott általános gondolatmenetet követve:

$$I_{Q1} \cdot R_{\lambda 1} = -(T_2 - T_1) \Rightarrow I_{Q1} = \frac{-(T_2 - T_1)}{R_{\lambda 1}}$$

...

$$I_{Qn} \cdot R_{\lambda n} = -(T_2 - T_1) \Rightarrow I_{Qn} = \frac{-(T_2 - T_1)}{R_{\lambda n}}$$

$$\text{I. } I_{Q1} + \dots + I_{Qn} = -(T_2 - T_1) \cdot \left(\frac{1}{R_{\lambda 1}} + \dots + \frac{1}{R_{\lambda n}} \right)$$

$$\text{II. } I_Q \cdot R_{\lambda r} = -(T_2 - T_1) \Rightarrow I_Q = \frac{-(T_2 - T_1)}{R_{\lambda r}}$$

$$I_Q = I_{Q1} + \dots + I_{Qn}$$

Az I. és II. egyenletből:

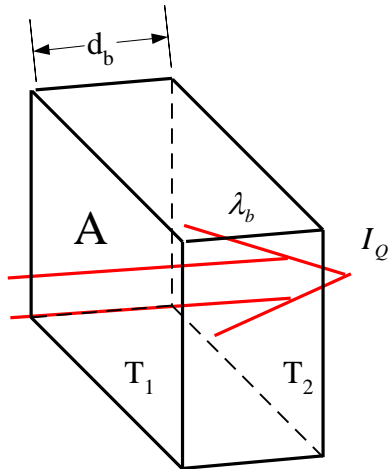
$$\frac{-(T_2 - T_1)}{R_{\lambda r}} = \frac{-(T_2 - T_1)}{R_{\lambda 1}} + \dots + \frac{-(T_2 - T_1)}{R_{\lambda n}}$$

$$\frac{1}{R_{\lambda r}} = \frac{1}{R_{\lambda 1}} + \dots + \frac{1}{R_{\lambda n}} \quad (5.22)$$

Feladatok

1. feladat

Az ábrán egy épület betonból készült fala látható. A fal belső és külső felületének hőmérsékletét T_1 és T_2 jelöli.



Adatok: $d_b = 0,2 \text{ [m]}$, $A = 1 \text{ [m}^2\text{]}$, $\lambda_b = 1,1 \left[\frac{\text{W}}{\text{m}\cdot\text{K}} \right]$, $T_1 = 20 \text{ [}^\circ\text{C]}$, $T_2 = 0 \text{ [}^\circ\text{C]}$

Számítsuk ki állandósult állapotban az A felületű, d vastagságú falon áthaladó hőáram erősségét! Számítsuk ki a falon keresztül 1 óra alatt átjutó hőmennyiséget!

Megoldás:

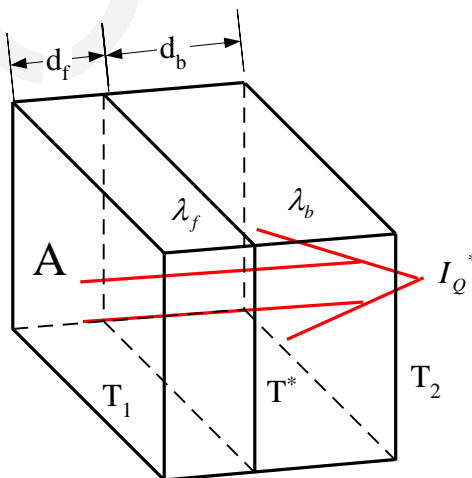
$$R_{\lambda b} = \frac{d_b}{\lambda_b \cdot A} = 0,182 \left[\frac{\text{K}}{\text{W}} \right]$$

$$I_Q \cdot R_{\lambda b} = -(T_2 - T_1) \Rightarrow I_Q = \frac{-(T_2 - T_1)}{R_{\lambda b}} = \frac{20}{0,182} = 110 \text{ [W]}$$

$$\Delta Q = I_Q \cdot \Delta t = 110 \cdot 3600 = 396000 \text{ [J]} = 396 \text{ [kJ]}$$

2. feladat

Az 1. feladatban szereplő betonfal belső oldalára egy d_f vastagságú fenyőfa réteget (lambériát) erősítünk.



Adatok: $d_f = 0,01$ [m], $d_b = 0,2$ [m], $A = 1$ [m²], $\lambda_b = 1,1$ $\left[\frac{W}{m \cdot K}\right]$, $\lambda_f = 0,11$ $\left[\frac{W}{m \cdot K}\right]$, $T_1 = 20$ [°C], $T_2 = 0$ [°C]

a) Számítsuk ki a fenti, összetett falon keresztül a hőáram erősségét! A fal belső és külső felületének hőmérséklete ugyanaz, mint az 1. feladatban.

b) Számítsuk ki a rétegek érintkező felületének hőmérsékletét (T^*)!

c) Rajzoljuk fel a hőmérsékleteloszlását a falra merőleges irányban!

Megoldás:

a)

$$R_{\lambda f} = \frac{d_f}{\lambda_f \cdot A} = \frac{0,01}{0,11 \cdot 1} = 0,091 \left[\frac{K}{W}\right]$$

$$R_{\lambda e} = R_{\lambda f} + R_{\lambda b} = 0,273 \left[\frac{K}{W}\right]$$

$$I_Q^* \cdot R_{\lambda e} = -(T_2 - T_1) \Rightarrow I_Q^* = \frac{-(T_2 - T_1)}{R_{\lambda e}} = 73,26 \text{ [W]}$$

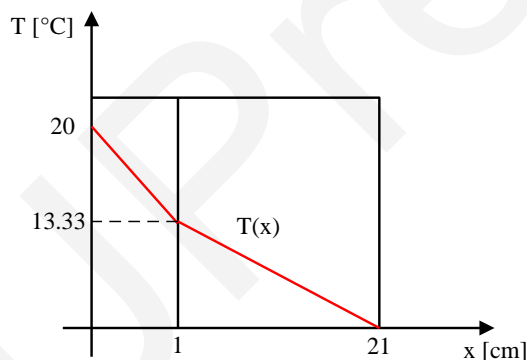
$$\frac{I_Q^*}{I_Q} = 0,666$$

b)

$$I_Q^* \cdot R_{\lambda f} = -(T^* - T_1) = T_1 - T^*$$

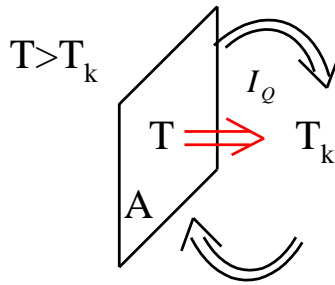
$$T^* = T_1 - I_Q^* \cdot R_{\lambda f} = 20 - 73,26 \cdot 0,091 = 13,33 \text{ [°C]}$$

c)



5.2.2 Hőátadás

Egy szilárd felület és vele érintkező folyékony vagy légnemű közeg közötti konvektív hőcserét **hőátadásnak** nevezzük. A 78. ábra erre mutat példát. Jelölje T és T_k a szilárd felület és a vele érintkező folyadék vagy gáz hőmérsékletét. A hőmérsékletkülönbség hatására a folyadék vagy gáz folyamatosan áramlik és szállítja a hőt a magasabb hőmérsékletű felületről az alacsonyabb hőmérsékletű közeg irányába. Azaz ebben az esetben a hőtranszport konvektív.



78. ábra. A hőátadás jelensége

A szilárd felület és a közeg közötti hőáram erőssége egyenesen arányos a hőmérséklet különbséggel, valamint a felület nagyságával. Az α arányossági tényezőt bevezetve:

$$I_Q = -\alpha \cdot A \cdot (T_k - T) \quad (5.23)$$

Az α arányossági tényezőt **hőátadási tényezőnek** nevezzük. ($\alpha = \left[\frac{W}{m^2 \cdot K} \right]$)

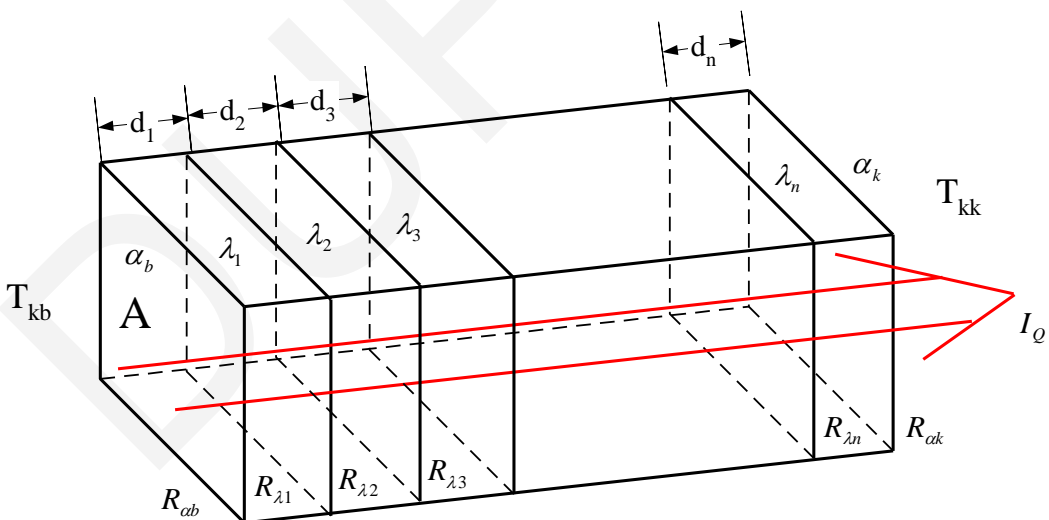
A fenti egyenletet átrendezve:

$$I_Q \cdot \frac{1}{\frac{\alpha \cdot A}{R_\alpha}} = -(T_k - T)$$

$$I_Q \cdot R_\alpha = -(T_k - T) \quad (5.24)$$

ahol az R_α mennyiséget **hőátadási ellenállásnak** nevezzük.

Az alábbi ábra sorba kapcsolt hővezető rétegeket szemléltet.



79. ábra. Ábra a hőátbocsátási ellenállás értelmezéséhez

Értelmezzük a rétegszerkezet **hőátbocsátási ellenállását** az alábbi összefüggés szerint:

$$R_e = R_{\alpha_b} + R_{\lambda_1} + R_{\lambda_2} + R_{\lambda_3} + \dots + R_{\lambda_n} + R_{\alpha_k} \quad (5.25)$$

$$R_e = \frac{1}{\alpha_b \cdot A} + \frac{d_1}{\lambda_1 \cdot A} + \frac{d_2}{\lambda_2 \cdot A} + \frac{d_3}{\lambda_3 \cdot A} + \dots + \frac{d_n}{\lambda_n \cdot A} + \frac{1}{\alpha_k \cdot A} \quad (5.26)$$

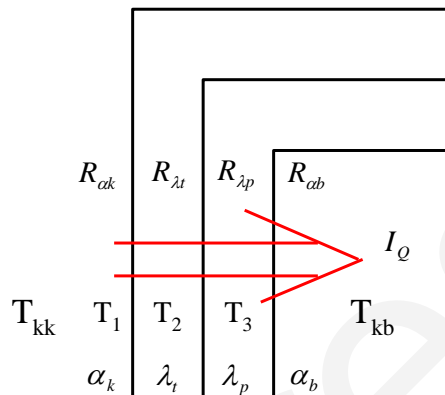
A falon áthaladó hőáram erőssége ezt követően:

$$I_Q \cdot R_e = -(T_{kk} - T_{kb}) \Rightarrow I_Q = -\frac{T_{kk} - T_{kb}}{R_e} \quad (5.27)$$

ahol T_{kk} és T_{kb} a közeg hőmérséklete a falszerkezet külső és belső oldalán.

3. feladat

Az alábbi ábra egy hűtőház kétrétegű falát mutatja. A fal külső rétege vörös téglá, míg a belső rétege parafa.



Adatok: $T_{kk} = 25 [^{\circ}\text{C}]$, $T_{kb} = -2 [^{\circ}\text{C}]$, $\alpha_k = 20 \left[\frac{\text{W}}{\text{m}^2 \cdot \text{K}} \right]$, $\alpha_b = 10 \left[\frac{\text{W}}{\text{m}^2 \cdot \text{K}} \right]$, $d_t = 0,25 [\text{m}]$, $d_p = 0,2 [\text{m}]$, $A = 1 [\text{m}^2]$, $\lambda_t = 0,042 \left[\frac{\text{W}}{\text{m} \cdot \text{K}} \right]$, $\lambda_p = 0,77 \left[\frac{\text{W}}{\text{m} \cdot \text{K}} \right]$.

- Számítsuk ki a falszerkezet hőátbocsátási ellenállását!
- Számítsuk ki a hőáram erősségét a falon keresztül!
- Számítsuk ki az ábrán látható T_1 , T_2 , T_3 felületi hőmérsékleteket!
- Rajzoljuk fel a fal hőmérsékleteloszlását!

Megoldás:

a) A falszerkezet hőátbocsátási ellenállása:

$$R_e = R_{\alpha k} + R_{\lambda t} + R_{\lambda p} + R_{\alpha b} = \frac{1}{\underbrace{\alpha_k \cdot A}_{0,05}} + \frac{d_t}{\underbrace{\lambda_t \cdot A}_{0,325}} + \frac{d_p}{\underbrace{\lambda_p \cdot A}_{4,762}} + \frac{1}{\underbrace{\alpha_b \cdot A}_{0,1}} = 5,237 \left[\frac{\text{K}}{\text{W}} \right]$$

b) A hőáram erősség:

$$I_Q \cdot R_e = -(T_{kb} - T_{kk}) \Rightarrow I_Q = -\frac{T_{kb} - T_{kk}}{R_e} = \frac{27}{5,237} = 5,156 [\text{W}]$$

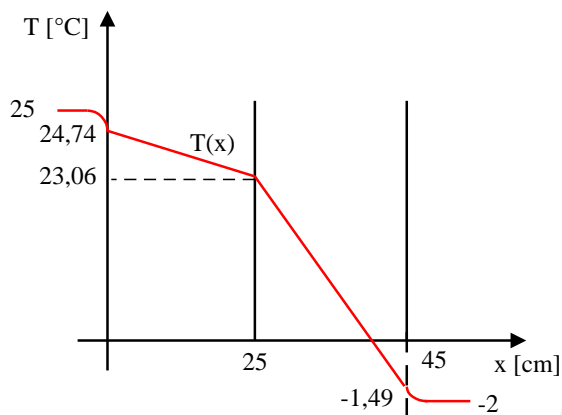
c) A felületi hőmérsékletek:

$$I_Q \cdot R_{\alpha k} = -(T_1 - T_0) = T_0 - T_1 \Rightarrow T_1 = T_0 - I_Q \cdot R_{\alpha k} = 24,74 [^{\circ}\text{C}]$$

$$I_Q \cdot R_{\lambda t} = -(T_2 - T_1) = T_1 - T_2 \Rightarrow T_2 = T_1 - I_Q \cdot R_{\lambda t} = 23,06 [^{\circ}\text{C}]$$

$$I_Q \cdot R_{\lambda p} = -(T_3 - T_2) = T_2 - T_3 \Rightarrow T_3 = T_2 - I_Q \cdot R_{\lambda p} = -1,49 [^{\circ}\text{C}]$$

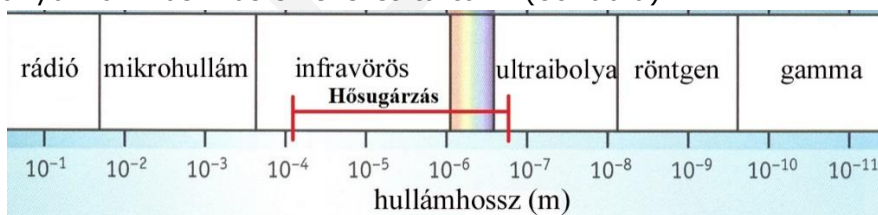
d) A falszerkezet hőmérsékleteloszlása:



5.2.3 Hősugárzás

Bármely test folyamatosan hőt bocsát ki magából elektromágneses hullámok formájában. A kibocsátott sugárzásos hőáram erőssége a test hőmérsékletének emelésével rohamosan nő. A kibocsátás a test egy adott T hőmérsékletén egy széles hullámhossz tartományban történik, az egyes hullámhosszokon más és más intenzitással. A fenti hullámhossz tartomány tartalmazza az infravörös tartomány jelentős részét, a látható fény tartományt, valamint az ultraibolya tartomány egy részét.

Az elektromágneses hullámok fizikai és biológiai hatásai a hullámhosszuk változtatásával jelentősen módosulnak, így az egyes hullámhossz tartományokhoz más-más elnevezés tartozik (80. ábra).



80. ábra. Az elektromágneses spektrum
 [http://www.rieth.hu/Vilagom/44__UltraviolaSugaras.htm]

Sugárzási jellemzők

A sugárzásos hőterjedés, valamint a sugárzás egy testtel való kölcsönhatásának leírásához bevezetjük az alábbi fizikai mennyiségeket.

Emisszió képesség

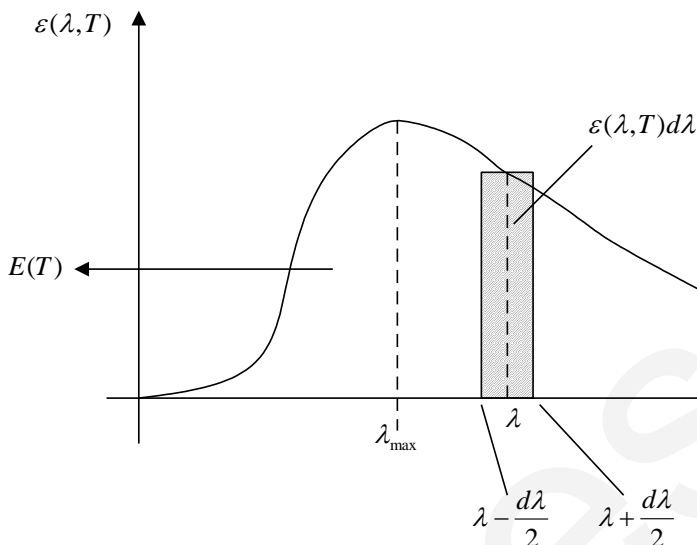
Jelöljük $I_{Qki}(\lambda, T)$ -vel egy T hőmérsékletű test által egy keskeny $\left[\lambda - \frac{d\lambda}{2}; \lambda + \frac{d\lambda}{2}\right]$ hullámhossz tartományban kisugárzott hőáram erősségét. A fenti hőáram erősség egyenesen arányos a test sugárzó felületének „ A ” nagyságával és a hullámhossztartomány $d\lambda$ szélességével, tehát:

$$I_{Qki}(\lambda, T) \sim A \cdot d\lambda \quad (5.28)$$

Az arányossági tényezőt emisszióképességnek nevezzük és $\varepsilon(\lambda, T)$ -vel jelöljük.

$$I_{Qki}(\lambda, T) = A \cdot \varepsilon(\lambda, T) d\lambda \quad (5.29)$$

Az emisszióképességet egy rögzített T hőmérsékleten a λ hullámhossz függvényében ábrázolva az alábbi függvényt kapjuk:



81. ábra. Emisszió képesség egy adott T hőmérsékleten a hullámhossz függvényében

Az adott T hőmérsékleten a teljes $]0; +\infty[$ hullámhossz tartományban kibocsátott hőáramot az alábbi összefüggéssel számítjuk:

$$I_{Qki}(T) = A \cdot \int_0^{\infty} \varepsilon(\lambda, T) d\lambda = A \cdot E(T) \quad (5.30)$$

ahol $E(T)$ a test teljes emisszióképessége az adott T hőmérsékleten. A teljes emisszióképesség nagysága megegyezik a rögzített T hőmérsékletre vonatkozó $\varepsilon(\lambda, T)$ függvény $]0; +\infty[$ intervallumon vett görbe alatti területével.

Sugárzási intenzitás

A test által kisugárzott hő a térben elektromágneses hullámok formájában tovaterjed. Vegyünk a térben egy A nagyságú felületet, amelyen a sugárzás áthalad. Jelölje $I_Q(\lambda)$ a fenti felülethez tartozó hőáram azon részét, amely a $[\lambda - \frac{d\lambda}{2}; \lambda + \frac{d\lambda}{2}]$ hullámhossz tartományhoz tartozik. A fenti hőáram egyenesen arányos a felület „ A ” nagyságával és a hullámhossz tartomány $d\lambda$ szélességével:

$$I_Q(\lambda) \sim A \cdot d\lambda$$

Bevezetve az $i(\lambda)$ arányossági tényezőt, amelyet **sugárzási intenzitásnak** nevezünk:

$$I_Q(\lambda) = i(\lambda) \cdot A \cdot d\lambda = A \cdot i(\lambda) \cdot d\lambda \quad (5.31)$$

Ekkor a $]0; +\infty[$ intervallumra vonatkozó teljes hőáram:

$$I_Q = A \cdot \int_{-\infty}^{\infty} i(\lambda) \cdot d\lambda = A \cdot I \quad (5.32)$$

ahol I a teljes sugárzási intenzitás.

Reflexió, abszorpció és átteresztő képesség

Ha a sugárzás útjába egy testet helyezünk, akkor arról a sugárzás egy része visszaverődik (reflektálódik), egy része elnyelődik (abszorbeálódik) benne, egy része pedig áthalad rajta. Egy adott T hőmérsékleten a $\left[\lambda - \frac{d\lambda}{2}; \lambda + \frac{d\lambda}{2}\right]$ hullámhossz tartományban visszavert, elnyelt és áthaladt hőáramot az alábbi összefüggésekkel számolhatjuk:

$$I_R(\lambda, T) = A \cdot i_R(\lambda, T) d\lambda \quad (5.33)$$

$$I_A(\lambda, T) = A \cdot i_A(\lambda, T) d\lambda \quad (5.34)$$

$$I_D(\lambda, T) = A \cdot i_D(\lambda, T) d\lambda \quad (5.35)$$

ahol $i_R(\lambda, T)$, $i_A(\lambda, T)$ és $i_D(\lambda, T)$ a **visszavert, elnyelt és áthaladt sugárzási intenzitás** az adott T hőmérsékleten és λ hullámhosszon. A beeső hőáram megegyezik a visszavert, elnyelt és áthaladt hőáramok összegével:

$$I_R(\lambda, T) + I_A(\lambda, T) + I_D(\lambda, T) = I(\lambda, T) \quad (5.36)$$

A fenti egyenletből következik, hogy a visszavert, elnyelt és áthaladt sugárzási intenzitások összege megegyezik a beeső sugárzási intenzitással.

$$i_R(\lambda, T) + i_A(\lambda, T) + i_D(\lambda, T) = i(\lambda) \quad (5.37)$$

A fenti egyenletet átrendezve:

$$\frac{i_R(\lambda, T)}{i(\lambda)} + \frac{i_A(\lambda, T)}{i(\lambda)} + \frac{i_D(\lambda, T)}{i(\lambda)} = 1$$

A fenti összefüggésben az $r(\lambda, T) = \frac{i_R(\lambda, T)}{i(\lambda)}$, $a(\lambda, T) = \frac{i_A(\lambda, T)}{i(\lambda)}$ és $d(\lambda, T) = \frac{i_D(\lambda, T)}{i(\lambda)}$ a test **reflexió, abszorpció és átteresztő képessége** az adott T hőmérsékleten és λ hullámhosszon. Ebből adódóan:

$$r(\lambda, T) + a(\lambda, T) + d(\lambda, T) = 1 \quad (5.38)$$

Az (5.37) egyenlőséget felírhatjuk integrális alakban:

$$\int_0^{\infty} i_R(\lambda, T) d\lambda + \int_0^{\infty} i_A(\lambda, T) d\lambda + \int_0^{\infty} i_D(\lambda, T) d\lambda = \int_0^{\infty} i(\lambda) d\lambda$$

$$I_R(T) + I_A(T) + I_D(T) = I \quad (5.39)$$

ahol I , I_R , I_A és I_D a bemenő, visszavert, elnyelt és átmenő teljes intenzitás. Az egyenletet átrendezve:

$$\frac{I_R(T)}{I} + \frac{I_A(T)}{I} + \frac{I_D(T)}{I} = 1$$

$$R(T) + A(T) + D(T) = 1 \quad (5.40)$$

ahol $R(T)$, $A(T)$ és $D(T)$ a teljes reflexió, abszorpció és átteresztő képesség.

A fekete test sugárzása

Az **abszolút fekete test** olyan test, amely a rá eső sugárzást, annak hullámhosszától és a test hőmérsékletétől függetlenül teljes mértékben elnyeli.

$$\underbrace{r(\lambda, T)}_0 + a(\lambda, T) + \underbrace{d(\lambda, T)}_0 = 1$$

$$a(\lambda, T) = 1 \Rightarrow A(T) = 1$$

Az abszolút fekete test emisszióképességét Planck elméleti úton meghatározta, mint a hőmérséklet és a hullámhossz függvényét:

$$\varepsilon_F(\lambda, T) = \frac{c_1 \cdot \lambda^{-5}}{e^{\frac{c_2}{\lambda T}} - 1}$$

$$c_1 = 8 \cdot \pi \cdot h \cdot c^2 = 1,499 \cdot 10^{-15} \left[\frac{J \cdot m^2}{s} \right]$$

$$c_2 = \frac{h \cdot c}{k} = 0,0144 [m \cdot K]$$

ahol h a Planck állandó ($h = 6,626 \cdot 10^{-34} [J \cdot s]$), c a fénysebesség vákuumban ($c = 3 \cdot 10^8 \left[\frac{m}{s} \right]$) és k a Boltzmann állandó ($k = 1,38 \cdot 10^{-23} \left[\frac{J}{K} \right]$).

Mint korábban megmutattuk, az A felületű, T hőmérsékletű abszolút fekete test által kibocsátott hőáram:

$$I_{Qki} = A \cdot E_F(T) \quad (5.41)$$

A teljes emisszióképességet az emisszióképességből az alábbi integrállal számíthatjuk:

$$E_F(T) = \int_0^{\infty} \varepsilon_F(\lambda, T) d\lambda = \int_0^{\infty} \frac{c_1 \cdot \lambda^{-5}}{e^{\frac{c_2}{\lambda T}} - 1} d\lambda = \sigma \cdot T^4$$

ahol σ a Stefan-Boltzmann állandó, $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \left[\frac{W}{m^2 \cdot K^4} \right]$.

A fenti integrál kiszámításának részleteivel itt nem foglalkozunk. Tehát az A felületű, T hőmérsékletű abszolút fekete test által kibocsátott hőáram:

$$I_{Qki} = A \cdot \sigma \cdot T^4 \quad (5.42)$$

Azaz az abszolút fekete test teljes emisszióképessége, ezáltal az általa sugárzás formájában kibocsátott hőáram a test Kelvinben mért abszolút hőmérsékletének negyedik hatványával arányos. Azaz a hőszugárzás szerepe a hőmérséklet növekedésével rohamosan nő. A fenti összefüggést **Stefan-Boltzmann törvénynek** nevezzük.

Jelöljük λ_{max} -al azt a hullámhosszt, amelynél a fekete test emisszióképessége, azaz a Planck függvény értéke, maximális:

$$\varepsilon_F(\lambda_{max}, T) = \max_{\lambda \geq 0}(\varepsilon_F(\lambda, T))$$

A függvény ott veszi fel maximális értékét, ahol a λ változó szerinti deriváltja zérus. A λ_{max} szélsőérték helyet megkeresve az alábbi összefüggést kapjuk, amely **Wien-féle eltolódási törvény** néven ismert:

$$\lambda_{max} = \frac{\text{állandó}}{T} \Rightarrow \lambda_{max} \cdot T = \text{állandó} = 0,0029 [K \cdot m]$$

A fenti törvény szemléletes jelentése az, hogyha a test hőmérséklete nő, akkor λ_{max} hullámhossz vele fordított arányban csökken, azaz a test által kibocsátott hőszugárzás spektruma az infravörösből a látható fény, majd az ultrabolya tartomány felé tolódik el. Azaz a test alacsony hőmérsékleten nem bocsát ki látható fényt, a hőmérséklet növelésével azonban először vörös, majd narancs,

aztán fehér, végül kékes fényt bocsát ki. Végül a kibocsátott sugárzás átlép az ultraibolya tartományba, amely az emberi szem számára már nem látható.

Szürke testek hőszugárzása

A valóságos testek a környezetből érkező sugárzás egy jelentős részét visszaverik (esetleg át is eresztik), azaz nem abszolút fekete testek. Bár általános esetben a testek visszaverő (reflexió) képessége függ a belső sugárzás hullámhosszától, a gyakorlatban előforduló testek jelentős részénél a hullámhossztól való függés elhanyagolható, azaz:

$$r(\lambda, T) = r(T)$$

Az olyan testeket, amelyek visszaverő képessége független a hullámhossztól, **szürke testeknek** nevezzük. A szürke testek reflexió képessége, amely ebben az esetben egyben a teljes reflexió képesség is, egyetlen számadattal (R) jellemezhető:

$$R = \frac{I_R(T)}{I} \quad (5.43)$$

A fenti összefüggésben I a beeső, $I_R(T)$ pedig a T hőmérsékletű test által visszavert hőáram erőssége. Egy szürke test és egy vele minden szempontból egyező abszolút fekete test teljes emisszió képessége között fennáll az alábbi jól meghatározott kapcsolat:

$$E_{sz}(T) = (1 - R) \cdot E_F(T) \quad (5.44)$$

A fenti összefüggés a **Kirchhoff-féle sugárzási törvény**, amely szavakban az alábbi:

A szürke testek teljes emisszió képessége az azonos hőmérsékletű abszolút fekete test teljes emisszió képességének $(1-R)$ -szerese, ahol R a szürke test teljes reflexió képessége.

A fekete test emisszió képességére korábban kapott összefüggést behelyettesítve:

$$E_{sz}(T) = (1 - R) \cdot \sigma \cdot T^4 \quad (5.45)$$

Tehát a szürke test által sugárzás formájában kibocsátott hőáram az alábbi összefüggéssel számolható:

$$I_{Qki} = A \cdot E_{sz}(T) = (1 - R) \cdot A \cdot \sigma \cdot T^4 \quad (5.46)$$

1. Feladat

Egy sötét színű lemez reflexió tényezője $0,32$, hőmérséklete 25 °C . Mekkora teljesítménnyel sugároz négyzetméterenként ez a test?

Megoldás:

$$I_{Qki} = A \cdot E_{sz}(T) = (1 - R) \cdot A \cdot \sigma \cdot T^4 = (1 - 0,32) \cdot 1 \cdot 5,76 \cdot 10^{-8} \cdot 298,15^4 = 309,5 \text{ [W]}$$

A környezet sugárzásának hatása

Az előző példából is látszik, hogy mennyire fontos szerepet játszik a hétköznapi életben a hőszugárzás. Ahhoz, hogy az alapvető folyamatokat

megértsük, beszélni kell a testeket körülvevő környezet hőmérsékleti sugárzásának testre gyakorolt hatásáról.

Homogén környezet hatása

Vizsgáljuk először a lehető legegyszerűbb esetet, amikor egy sík felületet, melynek hőmérséklete T , minden irányból körbe vesz egy T_k hőmérsékletű környezet. A sík felületet csak az egyik oldalról éri a környezet sugárzása, azaz úgy vesszük, hogy a másik oldala irányába semmilyen hőcsere nem történik.

A termodinamika II. főtétele értelmében a melegebb testről a hidegebb felé fog a hő áramlani, ami azt jelenti, hogy idővel a hőmérséklet különbségek kiegyenlítődnek, azaz egyensúlyi állapotban $T=T_k$. A testet teljesen körülvevő környezetből tehát ugyanakkora hőáram éri a testet, mint amennyit a test kibocsátana, ha a környezetével megegyező hőmérsékletű lenne. Egy T_k hőmérsékletű környezet tehát:

$$I_{Qki} = (1 - R) \cdot A \cdot \sigma \cdot T_k^4 \quad (5.47)$$

elnyelt hőáramot okoz a testben.

Ez nem a környezet teljes hőárama, mivel a test csak a beeső sugárzás $(1-R)$ -ed részét nyeli el. A T_k hőmérsékletű környezet tehát ugyanolyan hőáram erősséget kelt, mint a T_k hőmérsékletű abszolút fekete test. Az eredő hőáram erősség a test és környezete között tehát:

$$I_{Qki} = (1 - R) \cdot \sigma \cdot A \cdot (T^4 - T_k^4) \quad (5.48)$$

Természetesen ebben az esetben „környezet” alatt azon tárgyak összességét kell értenünk, amelyekkel a vizsgált test elektromágneses hullámokat cserél. Ez a gyakorlatban azt jelenti, hogy nem a környező levegő hőmérséklete számít, hanem a test helyéről látható átlátszatlan testeké, mondjuk egy zárt térben a falak belső hőmérséklete.

2. Feladat

Egy villanyrezsó főzőlapjának reflexiók tényezője $0,4$, átmérője 20 [cm].

- Mekkora a fűtőszálának maximális teljesítménye, ha bekapcsolva hagyva 557 [°C] hőmérsékletre melegszik fel? Feltételezzük, hogy a főzőlap csak sugárzás útján veszít hőt, a környezet hőmérséklete 20 [°C].
- Ha a főzőlap és a levegő közötti hőátadási tényező 5 [W/m²K], akkor mennyi lesz a hőátadáshoz tartozó hőáram? A főzőlap és a környezet hőmérséklete ugyanannyi, mint az a) részben.

Adatok: $R = 0,4$, $d = 20$ [cm], $T = 557$ [°C] = $830,15$ [K], $T_k = 20$ [°C] = $293,15$ [K], $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8}$ $\left[\frac{W}{m^2 \cdot K^4} \right]$

Megoldás:

a)

$$I_Q^{sug} = (1 - 0,4) \cdot 5,67 \cdot 10^{-8} \cdot (830,15^4 - 293,15^4) = 499,69$$
 [W]

$$P_{max} = I_Q^{sug} = 499,69$$
 [W]

b)

$$\alpha = 5 \left[\frac{W}{m^2 \cdot K} \right]$$

$$I_Q^{h\delta a} \cdot R_\alpha = -(T_K - T)$$

$$I_Q^{h\delta a} \cdot \frac{1}{\alpha \cdot A} = -(T_K - T)$$

$$I_Q^{h\delta a} = -\alpha \cdot A \cdot (T_K - T) = 84,35 [W]$$

3. Feladat

Egy $R=0,65$ reflexiós tényezőjű $10 [m^2]$ területű aszfaltjárda hőmérsékletét jelölje T , a hőtadási tényező a járda és a környező levegő között $\alpha = 15 \left[\frac{W}{mK} \right]$. A járdát körülvevő tárgyak és levegő hőmérséklete egyaránt T_k hőmérsékletűek. Határozza meg a járda által hősugárzás és hőtadás formájában leadott nettó hőáramokat, ha: $T = 30 [^\circ C]$, $T_k = 15 [^\circ C]$.

Megoldás:

$$I_Q^{h\delta a} \cdot R_\alpha = -(T_K - T)$$

$$I_Q^{h\delta a} \cdot \frac{1}{\alpha \cdot A} = -(T_K - T)$$

$$I_Q^{h\delta a} = -\alpha \cdot A \cdot (T_K - T) = 250 [W]$$

$$I_Q^{sug} = (1 - R) \cdot A \cdot \sigma \cdot (T^4 - T_K^4) = 307,99 [W]$$

Irodalomjegyzék

- 1) Berta M., Farzan R., Giczi F., Horváth A.: Fizika mérnököknek, 2006.
- 2) Kiss J.: Fizika I., 1991., Tankönyvkiadó, Budapest
- 3) Nagy-Kondor, R. (2011). Technical Mathematics in the University of Debrecen. *Annales Mathematicae et Informaticae*, 38, 157-167.
- 4) Nagy-Kondor, R. (2005). Special characteristics of engineer students' knowledge of functions. *International Journal for Mathematics Teaching and Learning*, 10, 1-9.
- 5) Approximate coefficients of friction, In:
https://en.wikipedia.org/wiki/Friction#Static_friction

Lektor:

Dr. habil. Kocsis Imre

tanszékvezető főiskolai tanár

Debreceni Egyetem Műszaki Kar Műszaki Alaptárgyi Tanszék

© Debreceni Egyetemi Kiadó Debrecen University Press,
beleértve az egyetemi hálózaton belüli elektronikus terjesztés jogát is

ISBN 978-963-318-836-1

Kiadta: a Debreceni Egyetemi Kiadó Debrecen University Press

Felelős kiadó: Karácsony Gyöngyi

Nyomdai munkálatokat

a Debreceni Egyetem sokszorosítóüzeme végezte 2019-ben

dupress.unideb.hu