



# Ábrázoló geometria gyakorlati példatár

A tananyag elkészítését a „A Debreceni Egyetem fejlesztése a felsőfokú oktatás minőségének és hozzáférhetőségének együttes javítása érdekében” az **EFOP-3.4.3-16-2016-00021** számú projekt támogatta. A projekt az Európai Unió támogatásával, az Európai Szociális Alap társfinanszírozásával valósul meg.



**Szerzők:**

**Nagyné Dr. habil. Kondor Rita (1., 4. fejezet)**

**Dr. Perge Erika (2., 3. fejezet)**

**Lektor:**

**Dr. Kézi Csaba Gábor**

Kézirat lezárva: 2018. június. 22.

**ISBN 978-963-490-001-6**

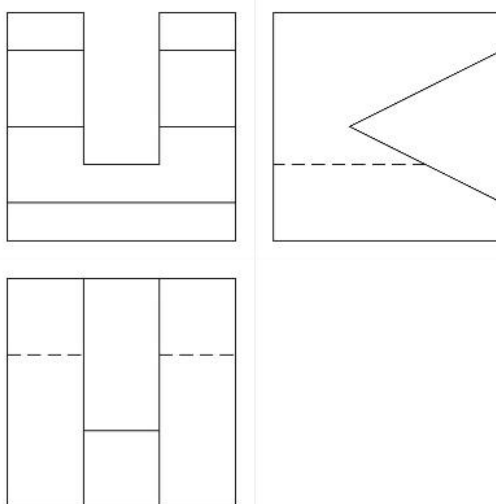
**Kiadja: Debreceni Egyetem Műszaki Kar**

## TARTALOMJEGYZÉK

1. Térelemek ábrázolása, illeszkedési feladatok (Nagyné Dr. habil. Kondor Rita) .....	4
1.1. Pontok ábrázolása Monge-projekcióban .....	4
1.2. Egyenesek ábrázolása Monge-projekcióban .....	7
1.3. Síkok ábrázolása Monge-projekcióban .....	13
1.4. Illeszkedési feladatok .....	16
2. Metszési feladatok, síkok metszete (Dr. Perge Erika) .....	20
2.1. Vetítősík és egyenes dőfspontja.....	20
2.2. Vetítősíkok metszete .....	23
2.3. Egy általános helyzetű és egy vetítősík metszete .....	27
2.4. Általános helyzetű sík és egy egyenes dőfspontja.....	31
2.5. Két általános helyzetű sík metszete .....	38
3. Test síkmetszete (Dr. Perge Erika).....	45
4. Síklapú testek áthatása (Nagyné Dr. habil. Kondor Rita) .....	50
Felhasznált irodalom .....	59

# 1. TÉRELEMEK ÁBRÁZOLÁSA, ILLESZKEDÉSI FELADATOK (NAGYNÉ DR. HABIL. KONDOR RITA)

**1. Feladat:** Készítsünk axonometrikus képet a vetületi ábrák alapján (1.1. ábra)! (Nagy-Kondor, 2007)



1.1. ábra: Szemléletes kép készítése (Forrás: saját ábra)

## 1.1. Pontok ábrázolása Monge-projekcióban

**2. Feladat:** Ábrázoljunk Monge-projekcióban *I.*, *II.*, *III.*, továbbá *IV.* térnegyedben lévő pontokat!

### Feladat megoldása:

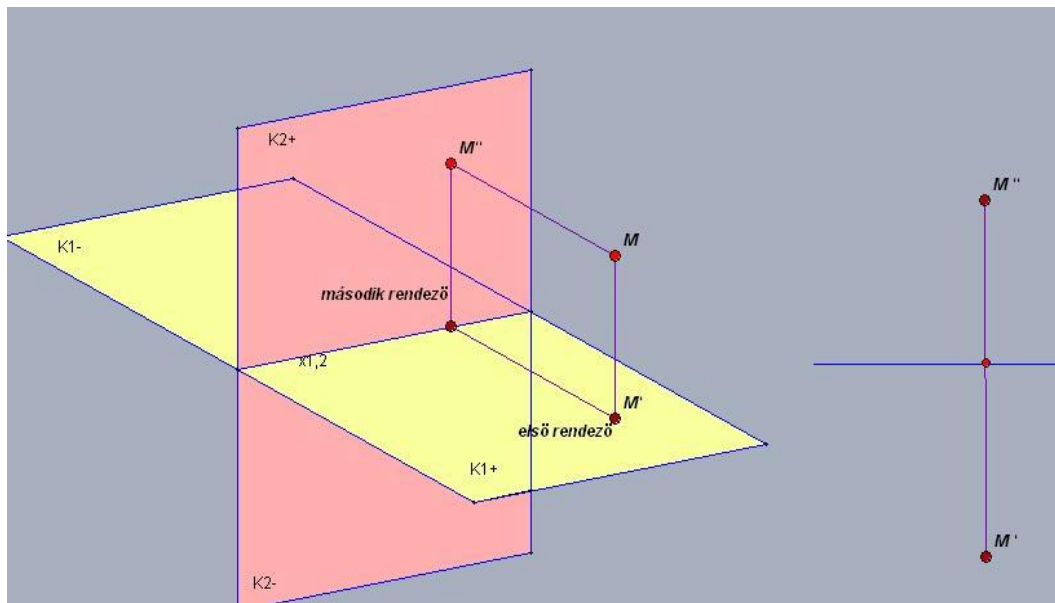
K1: vízszintes helyzetű képsík, K2: függőleges helyzetű képsík.  $X_{1,2}$ : a képsíkok metszészvonala. A K1 és K2 képsíkok a teret négy részre, négy térnegyedre bontják.

Az I. térnegyedben lévő pont első képe az  $x_{1,2}$  tengely alatt, második képe az  $x_{1,2}$  tengely felett helyezkedik el, ahogy az 1.2. ábrán látszik (Nagy-Kondor, 2017).

A II. térnegyedben lévő pont első képe az  $x_{1,2}$  tengely felett, második képe szintén az  $x_{1,2}$  tengely felett helyezkedik el.

A III. térnegyedben lévő pont első képe az  $x_{1,2}$  tengely felett, második képe az  $x_{1,2}$  tengely alatt helyezkedik el.

A IV. térnegyedben lévő pont első képe az  $x_{1,2}$  tengely alatt, második képe szintén az  $x_{1,2}$  tengely alatt helyezkedik el.

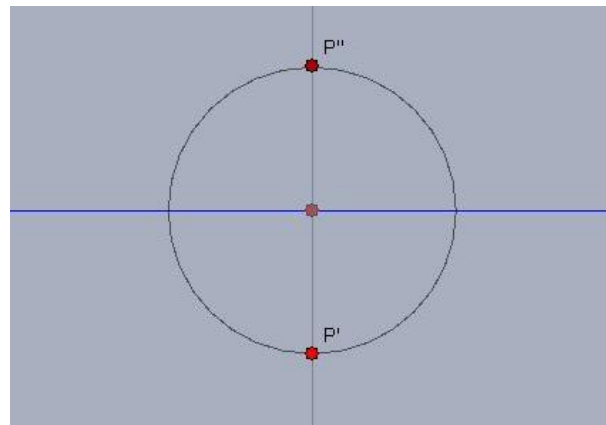


1.2. ábra: Pont ábrázolása Monge-projekcióban (Forrás: saját ábra)

**3. Feladat:** Adott egy pont első képe. Határozzuk meg a második képét úgy, hogy a pont a szimmetriasíkon legyen!

**Feladat megoldása:**

A  $P'P''$  pontokon átmenő egyenes (melynek neve: *rendező*) merőleges az  $x_{1,2}$  tengelyre. A szimmetriasík  $45^\circ$ -os szöget zár be  $K1$  és  $K2$  képsíkok pozitív részével.



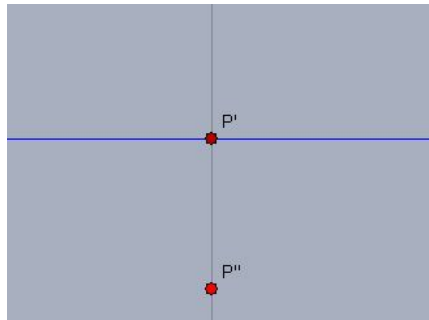
1.3. ábra: Pont ábrázolása a szimmetriasíkon (Forrás: saját ábra)

$P'$  ponton át merőlegest szerkesztünk az  $x_{1,2}$  tengelyre (rendező), majd a  $P'$  és  $x_{1,2}$  közti távolságot átmásoljuk a rendezőnek az  $x_{1,2}$  tengely másik oldalán lévő részére, az  $x_{1,2}$  tengelytől kiindulva, így kapjuk  $P''$  pontot (1.3. ábra). Az így megszerkesztett  $P'P''$  pontpár a térben olyan  $P$  pontot határoz meg, amely a szimmetriasíkon van.

**4. Feladat:** Adott egy pont második képe. Határozzuk meg az első képét úgy, hogy a pont a **K2** képsíkon legyen!

**Feladat megoldása:**

A **K2** képsíkon lévő pont első képe az  $x_{1,2}$  tengelyen helyezkedik el, így  $P''$ -ből merőlegest állítunk  $x_{1,2}$ -re, amely kimetszi a tengelyből  $P'$ -t (1.4. ábra).



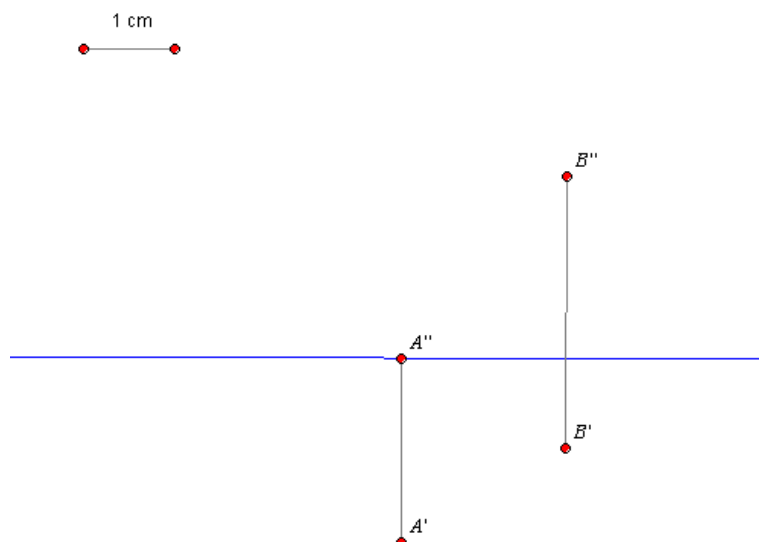
1.4. ábra: Pont ábrázolása a **K2** képsíkon (Forrás: saját ábra)

**5. Feladat:**

- Ábrázoljunk olyan pontot, amely a **K1** képsíkon van és **K2** előtt 2 cm távolságra!
- Ábrázoljunk olyan pontot, amely a **K1** képsík felett 2 cm és **K2** előtt 1 cm távolságra van!

**Feladat megoldása:**

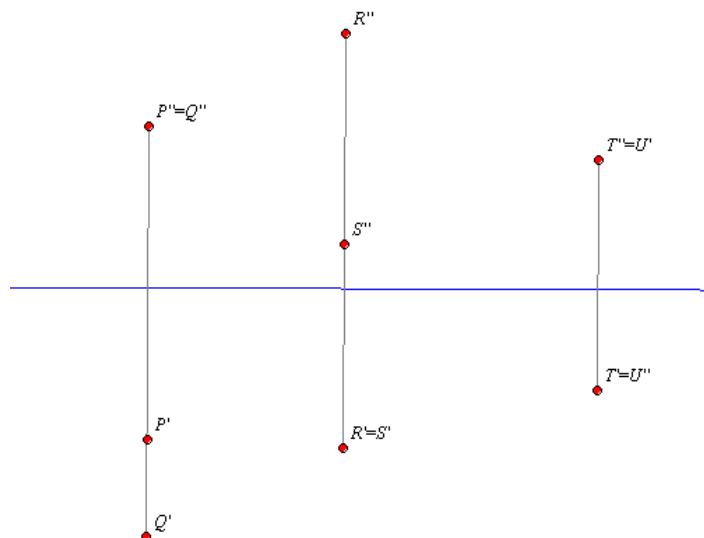
Az **A** pont a **K1** képsíkon van, mert  $A''$  illeszkedik az  $x_{1,2}$  tengelyre. Az **A** pont a **K2** képsík előtt van a térben, mert  $A'$  az  $x_{1,2}$  tengely alatt helyezkedik el.  $A'$  távolsága az  $x_{1,2}$  tengelytől 2 cm, tehát **A** pont a **K2** képsíktól 2 cm távolságra van a térben (1.5. ábra).



1.5. ábra: Adott helyzetű pontok ábrázolása (Forrás: saját ábra)

A B pont esetén: B' az  $x_{1,2}$  tengely alatt helyezkedik el és távolsága az  $x_{1,2}$  tengelytől 1 cm, tehát B pont a K2 képsík előtt van a térben, attól 1 cm távolságra. B'' az  $x_{1,2}$  tengely felett helyezkedik el és távolsága az  $x_{1,2}$  tengelytől 2 cm, tehát B pont a K1 képsík felett van a térben, attól 2 cm távolságra (1.5. ábra).

**6. Feladat:** Hol helyezkednek el a következő pontok a térben (1.6. ábra)?



1.6. ábra: Speciális helyzetű pontpárok (Forrás: saját ábra)

### Feladat megoldása:

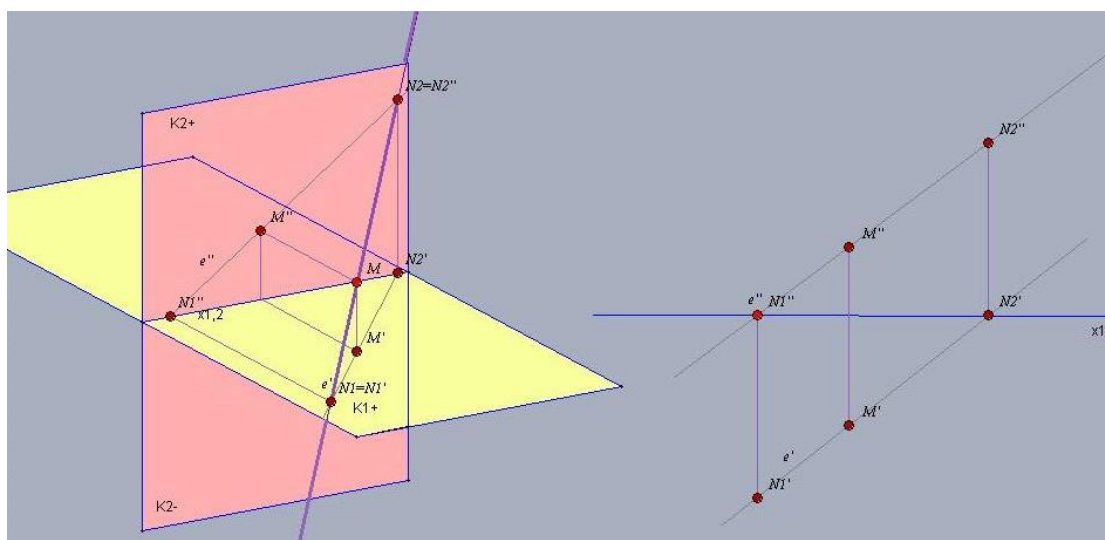
A közös vetítősugarra illeszkedő pontokat *fedőpontoknak* nevezzük. P és Q pontok második fedőpontok, mivel a második képük azonos. Q pont a P pont előtt helyezkedik el a térben, mivel Q' pont az  $x_{1,2}$  tengelytől távolabb van, mint P'.

R és S pontok első fedőpontok, mivel az első képük azonos. R pont az S pont felett helyezkedik el a térben, mivel R'' pont az  $x_{1,2}$  tengelytől távolabb van, mint S''.

Bár  $T'=U''$  és  $T''=U'$ , T és U pontok mégsem esnek egybe. T pont az első, U pont a harmadik síknegyedben van.

## 1.2. Egyenesek ábrázolása Monge-projekcióban

**7. Feladat:** Nézzük meg, hogyan történik az egyenesek ábrázolása Monge-projekcióban (1.7. ábra)! Hol helyezkednek el az egyenes nyompontjainak képei? Hol helyezkednek el az egyenesre illeszkedő M pont képei?



1.7. ábra: Egyenes ábrázolása Monge-projekcióban (Forrás: saját ábra)

### Feladat megoldása:

Egy egyenes *nyompontja* az egyenesnek és a képsíknak a dőléspontja (metszéspontja). Egy egyenesnek egy képsíkon egy nyompontja van (ha az egyenes párhuzamos a képsíkkal, akkor a nyompont a végtelenben van: ha egy egyenes párhuzamos a K1 képsíkkal, akkor az első nyompontja a végtelenben van, illetve ha egy egyenes párhuzamos a K2 képsíkkal, akkor a második nyompontja a végtelenben van). Az egyenesnek a K1 képsíkkal való dőléspontját *első nyompont*nak, míg a K2 képsíkkal való dőléspontját *második nyompont*nak nevezzük és N1-gyel, illetve N2-vel jelöljük. A nyompont egyik képe azonos magával a nyomponttal (N1=N1' és N2=N2''), a másik képe pedig az  $x_{1,2}$  tengelyre illeszkedik.

Ha M illeszkedik az e egyenesre, akkor M' illeszkedik e'-re és M'' illeszkedik e''-re (lényeges, hogy a megfelelőre).

**8. Feladat:** Ábrázoljunk  $x_{1,2}$  tengellyel párhuzamos egyenest!

### Feladat megoldása:

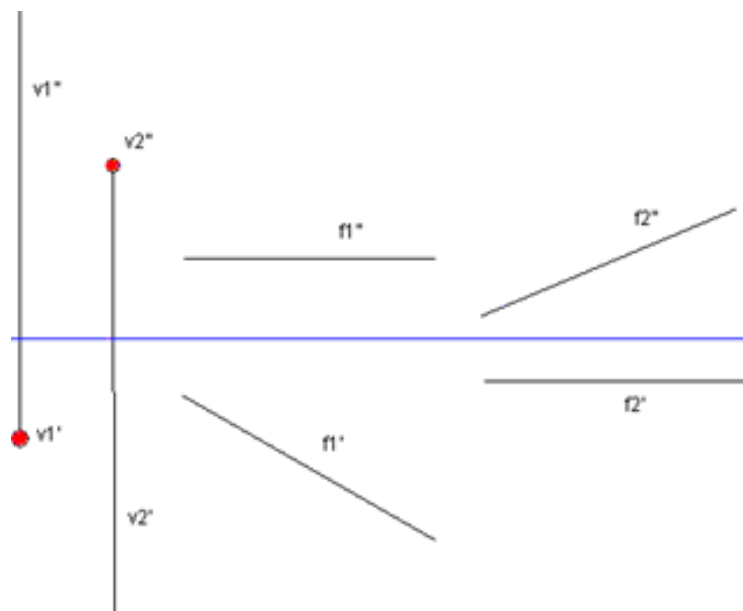
Az  $x_{1,2}$  tengellyel párhuzamos egyenes első és második képe is párhuzamos az  $x_{1,2}$  tengellyel.

### 9. Feladat:

- Ábrázoljunk első vetítő egyenest és második vetítő egyenest!
- Ábrázoljunk első fővonalat és második fővonalat!
- Ábrázoljunk profilegyenest, majd vegyünk fel rajta pontot!
- Ábrázoljunk párhuzamos egyenespárt!

**Feladat megoldása:**

A vetítő egyenes, a főegyenes és a profilegyenes speciális helyzetű egyenesek (1.8. és 1.9. ábrák).



1.8. ábra: Speciális helyzetű egyenesek 1. (Forrás: saját ábra)

A *vetítő egyenes* a képsíkra merőleges egyenes, az egyik képsíkra vetítve egy pontnak látszik.

Az 1.8. ábra első egyenese:  $v_1$  első vetítő egyenes (merőleges  $K_1$  képsíkra). Az első képe ( $v_1'$ ) egyetlen pontnak látszik, ezért az egyenes minden pontjának ugyanaz az első képe.

Az 1.8. ábra második egyenese:  $v_2$  második vetítő egyenes (merőleges  $K_2$  képsíkra). A második képe ( $v_2''$ ) egyetlen pontnak látszik, ezért az egyenes minden pontjának ugyanaz a második képe.

A *főegyenes* a képsíkkal párhuzamos helyzetű egyenes.

Az 1.8. ábra harmadik egyenese:  $f_1$  első főegyenes (párhuzamos a  $K_1$  képsíkkal). Második képe ( $f_1''$ ) párhuzamos az  $x_{1,2}$  tengellyel, első képe ( $f_1'$ ) tetszőleges (de nem merőleges az  $x_{1,2}$  tengelyre).

Az 1.8. ábra negyedik egyenese:  $f_2$  második főegyenes (párhuzamos a  $K_2$  képsíkkal). Első képe ( $f_2'$ ) párhuzamos az  $x_{1,2}$  tengellyel, második képe ( $f_2''$ ) tetszőleges (de nem merőleges az  $x_{1,2}$  tengelyre).

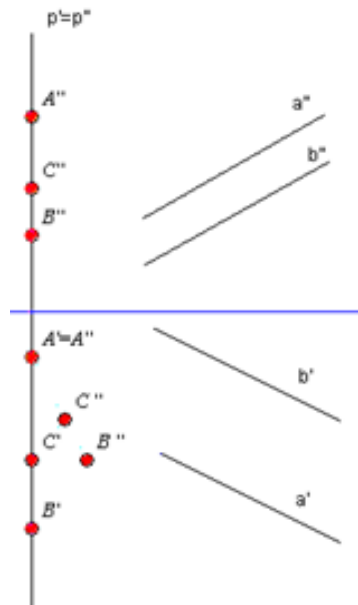
A *profilegyenes* az  $x_{1,2}$  tengelyre merőleges egyenes, amely nincs egyik képsíkban sem.

Egy profilegyenes első és második képe egybeesik, továbbá ezek merőlegesek az  $x_{1,2}$  tengelyre. Ezért egy profilegyenest szokásos módon nem lehet kölcsönösen egyértelműen ábrázolni, így mindig két pont kijelölésével ábrázoljuk.

Az 1.9. ábra első egyenese:  $p$  profilegyenes, A és B pontok segítségével ábrázoltuk. A C pont illeszkedik a  $p$  profilegyenesre. Egy pont pontosan akkor illeszkedik az adott egyenesre, ha a

pont első képe az egyenes első képére, a pont második képe az egyenes második képére illeszkedik.

Az 1.9. ábra második és harmadik egyenese: a és b egyenesek *párhuzamosak*, hiszen a képeik páronként párhuzamosak.

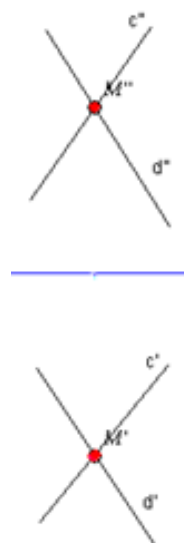


1.9. ábra: Speciális helyzetű egyenesek 2. (Forrás: saját ábra)

**10. Feladat:** Ábrázoljunk metsző egyenespárt!

**Feladat megoldása:**

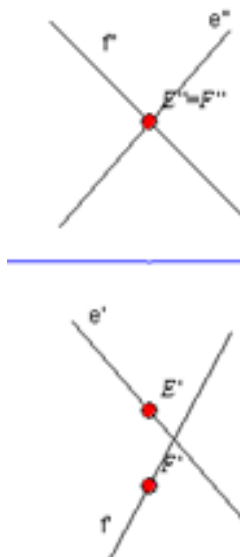
Az 1.10. ábra egyenespárja: c és d egyenesek metsző helyzetűek; c' és d' metszéspontja M', c'' és d'' metszéspontja M''. M' és M'' egy rendezőre esik.



1.10. ábra: Metsző egyenespár (Forrás: saját ábra)

**11. Feladat:** Ábrázoljunk kitérő egyenespárt! E kitérő egyenespáron ábrázoljunk fedőpontpárt, továbbá határozzuk meg a láthatóságot!

**Feladat megoldása:**



1.11. ábra: Kitérő helyzetű egyenespár (Forrás: saját ábra)

Az 1.11. ábra egyenespárja: az  $e$  és  $f$  egyenesek kitérő helyzetűek, mivel az első és második képen a metszéspont nem egy rendezőre esik.

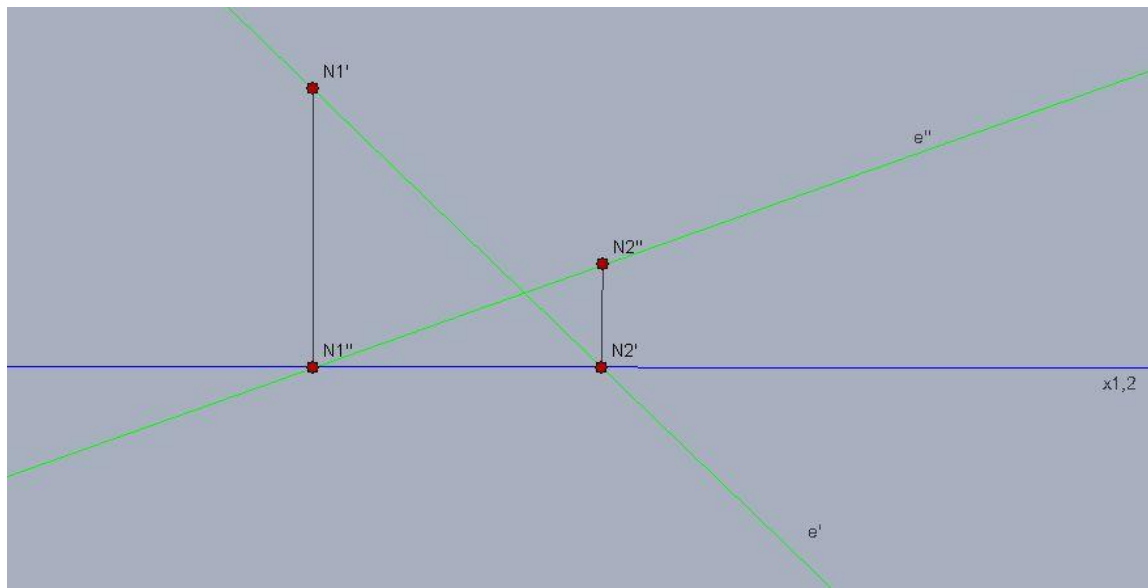
$E$  és  $F$  fedőpontok, a második képük egybeesik (közös vetítősugárra illeszkednek).

**12. Feladat:**

- Ábrázoljunk egy egyenest ( $e$ ) két képével! Szerkesszük meg a nyompontjait!
- Ábrázoljunk rajta különböző térsíkokban lévő pontokat!

**Feladat megoldása:**

$N1$  az első nyompont,  $N2$  a második nyompont.  $N1''$  és  $N2'$  az  $x_{1,2}$  tengelyre illeszkedik (1.12. ábra).  $N1'$ -et és  $N2''$ -t rendezők segítségével szerkesztjük,  $N1'$  illeszkedik  $e'$ -re,  $N2''$  illeszkedik  $e''$ -re ( $N1$  pont a  $K2$  képsík mögött van).



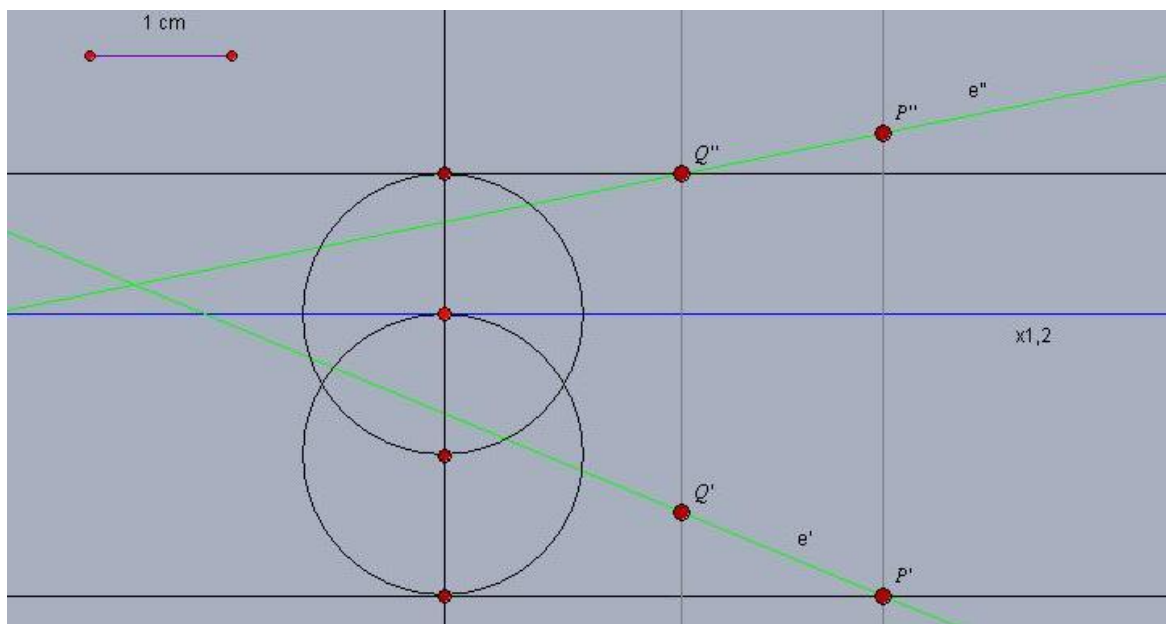
1.12. ábra: Egyenes nyompontjai (Forrás: saját ábra)

**13. Feladat:** Ábrázoljunk egy egyenest ( $e$ ) két képével! Ábrázoljuk azt a pontját, amely a  $K2$  képsík előtt van 2 cm-re ( $P$  pont), majd azt, amelyik a  $K1$  képsík felett van 1 cm-re ( $Q$  pont)!

**Feladat megoldása:**

$P$  mindkét képe illeszkedik az  $e$  egyenes megfelelő képeire. Ha  $P$  pont a térben a  $K2$  képsík előtt van 2 cm-re, akkor  $P'$  az  $x_{1,2}$  tengely alatt van, attól 2 cm-re (1.13. ábra).

$Q$  mindkét képe illeszkedik az  $e$  egyenes megfelelő képeire. Ha  $Q$  pont a térben a  $K1$  képsík felett van 1 cm-re, akkor  $Q''$  az  $x_{1,2}$  tengely felett van, attól 1 cm-re (1.13. ábra).



1.13. ábra: Adott helyzetű pont ábrázolása egyenesen (Forrás: saját ábra)

**14. Feladat:**

- Létezik-e olyan egyenes, amelynek első és második képe egybeesik?
- Létezik-e olyan egyenes, amelynek csak 1 nyompontja van?
- Létezik-e olyan egyenes, amelynek nincs nyompontja?

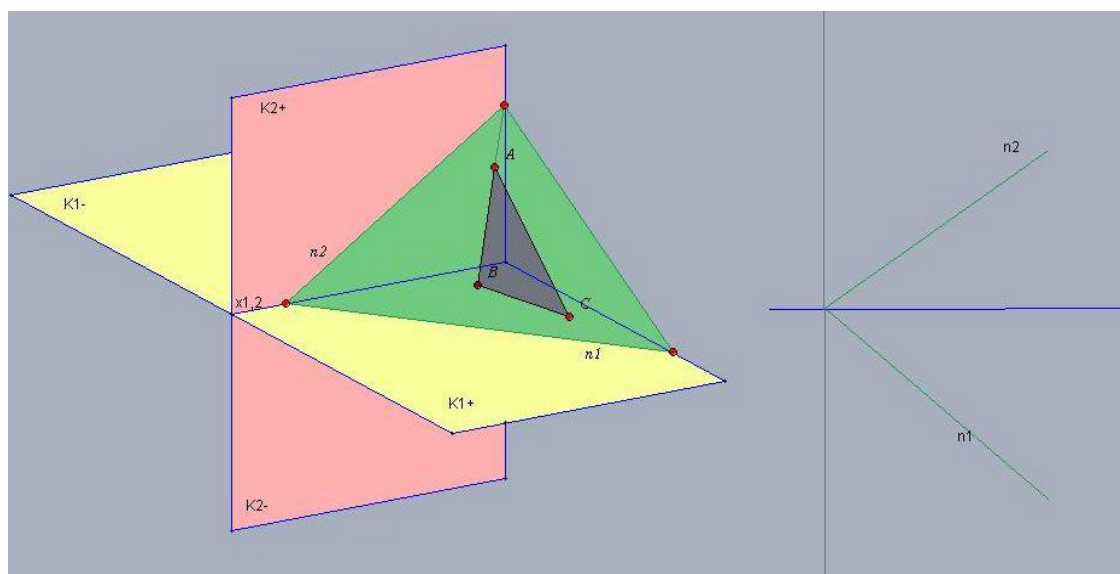
**1.3. Síkok ábrázolása Monge-projekcióban****15. Feladat:**

- Hogyan történik a síkok nyomvonalas ábrázolása Monge-projekcióban?
- Ábrázoljunk dőlt síkot két nyomvonalával!
- Ábrázoljunk feszített síkot két nyomvonalával!

**Feladat megoldása:**

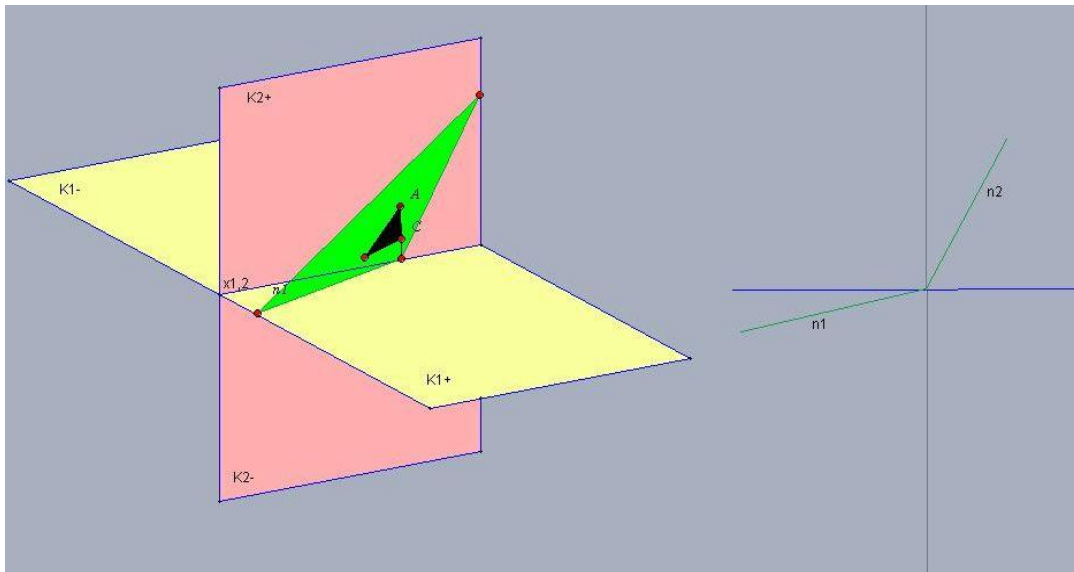
A *nyomvonal* a sík képsíkokkal alkotott metszészvonala. A sík két nyomvonala az  $x_{1,2}$  tengelyen metszi egymást. Egy sík egyértelműen adott a nyomvonalaival, kivéve, ha a nyomvonalak mindegyike éppen az  $x_{1,2}$  tengelyt (azaz a sík tartalmazza az  $x_{1,2}$  tengelyt).

*Dőlt sík:* Mindkét képen a síknak ugyanazt az oldalát látjuk. Ekkor a síkon lévő alakzat körüljárási iránya a két képen megegyező (1.14. ábra).



1.14. ábra: Dőlt sík nyomvonalas ábrázolása (Forrás: saját ábra)

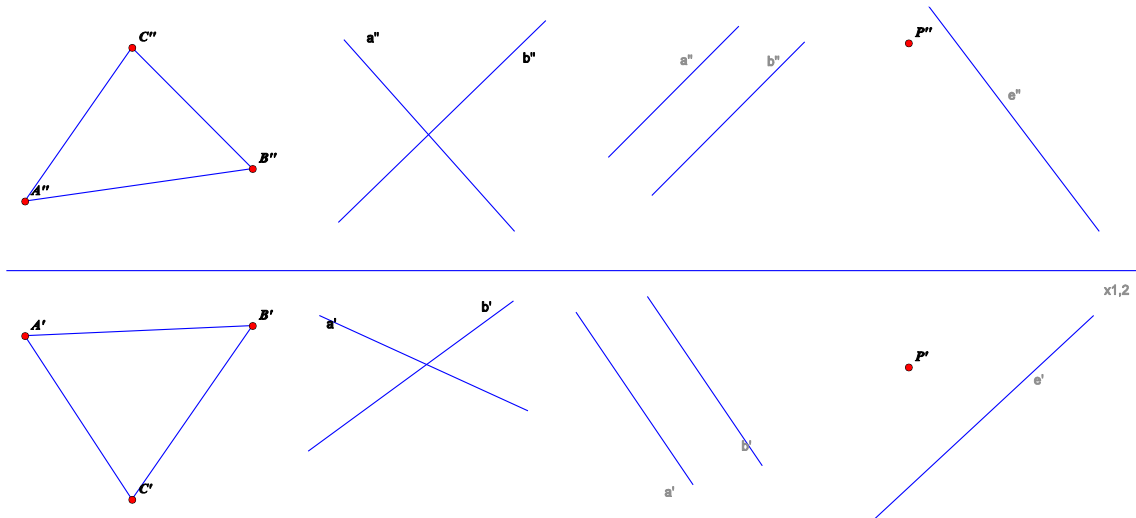
*Feszített sík:* A két képen a sík különböző oldalait látjuk. Ekkor a síkon lévő alakzat körüljárási iránya a két képen ellentétes (1.15. ábra).



1.15. ábra: Feszített sík nyomvonalas ábrázolása (Forrás: saját ábra)

**16. Feladat:** A síkok megadása hogyan történhet még?

**Feladat megoldása:**



1.16. ábra: Síkok ábrázolása (Forrás: saját ábra)

Egy sík egyértelműen megadható (1.16. ábra):

- Három általános helyzetű (nem egy egyenesre illeszkedő) ponttal (egy háromszöggel): A, B, C pontok.
- Metsző egyenespárral: a és b egyenesek. (Megjegyezzük, hogy a nyomvonalával megadott sík szintén metsző egyenespárral megadott síknak felel meg, amelynél az egyenespár egyenesei a két képsíkon vannak.)
- Párhuzamos egyenespárral.

- Egy ponttal és egy rá nem illeszkedő egyenessel.

**17. Feladat:** Ábrázoljunk nyomvonalalaival első és második vetítősíkot, első és második fősíkot és  $x_{1,2}$  tengellyel párhuzamos síkot!

### Feladat megoldása:

E speciális helyzetű síkokat mutatja az 1.17. ábra.

A *vetítősík* a képsíkra merőleges sík, az egyik képsíkra vetítve minden pontja egy egyenesben látszik.

Az 1.17. ábra első, nyomvonalalaival ábrázolt síkja: első vetítősík (merőleges a K1 képsíkra). Az első képen minden pontja egyetlen egyenesben látszik (minden pontja az első nyomvonalon lesz), a második nyomvonal merőleges az  $x_{1,2}$  tengelyre.

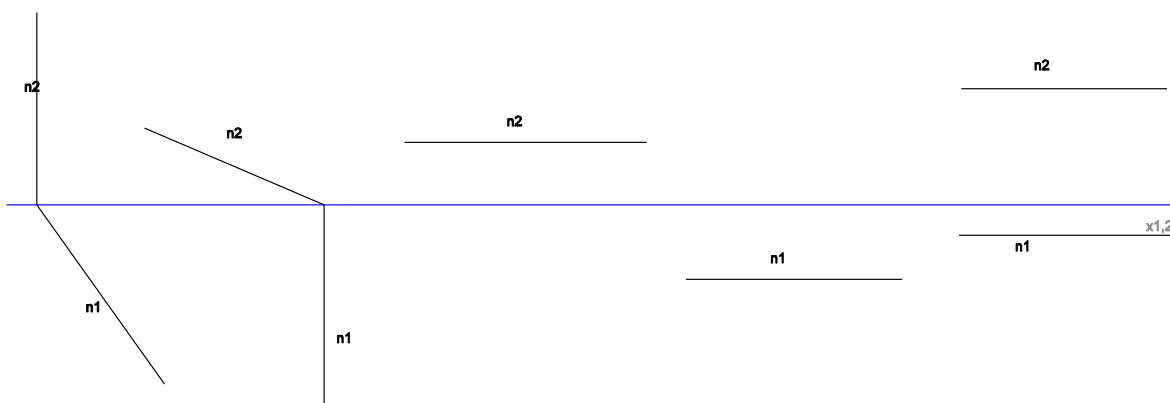
Az 1.17. ábra második, nyomvonalalaival ábrázolt síkja: második vetítősík (merőleges a K2 képsíkra). A második képen minden pontja egyetlen egyenesben látszik (minden pontja a második nyomvonalon lesz), az első nyomvonal merőleges az  $x_{1,2}$  tengelyre.

A *fő sík* a képsíkkal párhuzamos sík, az egyik képsíkra vetítve minden pontja egy egyenesben látszik. Ha egy sík párhuzamos valamelyik képsíkkal, akkor az egyik nyomvonal eltűnik, a másik nyomvonal pedig párhuzamos az  $x_{1,2}$  tengellyel.

Az 1.17. ábra harmadik síkja: első fő sík (párhuzamos a K1 képsíkkal), illetve egyúttal második vetítősík. Az első képen minden pontja valódi nagyságban látszik, a második nyomvonal párhuzamos az  $x_{1,2}$  tengellyel és nincs első nyomvonal.

Az 1.17. ábra negyedik síkja: második fő sík (párhuzamos a K2 képsíkkal), illetve egyúttal első vetítősík. A második képen minden pontja valódi nagyságban látszik, az első nyomvonal párhuzamos az  $x_{1,2}$  tengellyel és nincs második nyomvonal.

Az 1.17. ábra ötödik síkja:  $x_{1,2}$  tengellyel párhuzamos sík. Az első és második nyomvonal is párhuzamos az  $x_{1,2}$  tengellyel.



1.17. ábra: Speciális helyzetű síkok ábrázolása (Forrás: saját ábra)

**18. Feladat:** Milyen speciális helyzetű síkok ismer? Ezeket hogyan tudjuk Monge-projekcióban ábrázolni?

**Feladat megoldása:**

A speciális helyzetű síkokról szól az előző feladat, ezeket mutatja az 1.17. ábra. További speciális helyzetű sík a profilsík, a szimmetriasík és a koincidenciasík (egybeesési sík).

A *profilsík* az  $x_{1,2}$  tengelyre merőleges helyzetű sík. A profilsík két nyomvonala egybeesik és merőleges az  $x_{1,2}$  tengelyre.

A szimmetriasík és a koincidenciasík a K1 és K2 képsíkok szögfelező síkjai.

A *szimmetriasík* az I. és a III. térnegyeden halad át, továbbá minden pontjának első és második képe azonos távolságra van az  $x_{1,2}$  tengelytől.

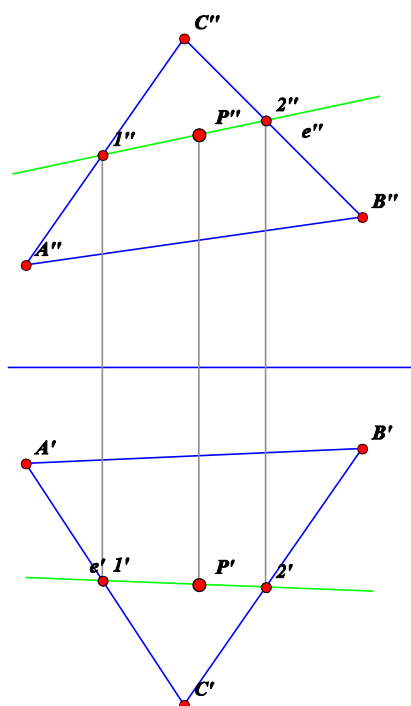
A *koincidenciasík* a II. és a IV. térnegyeden halad át, továbbá minden pontjának első és második képe egybeesik.

**1.4. Illeszkedési feladatok**

**19. Feladat:**

- Vegyünk fel egyenest ( $e$ ) három ponttal megadott síkon!
- Vegyünk fel pontot három ponttal megadott síkon!

**Feladat megoldása:**



1.18. ábra: Egyenes és pont ábrázolása három ponttal megadott síkon (Forrás: saját ábra)

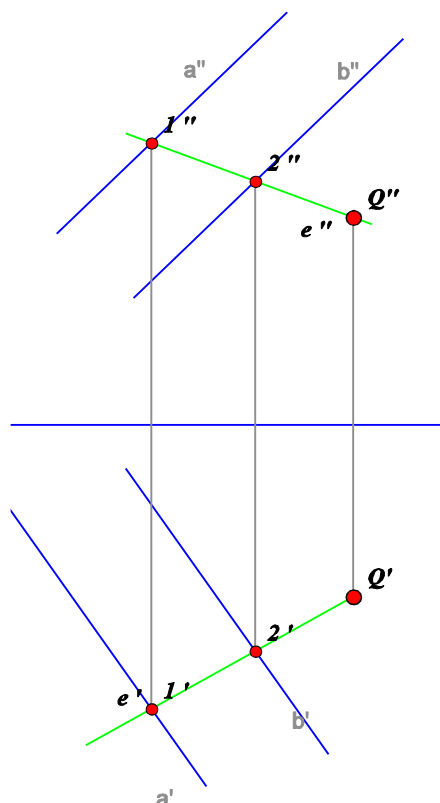
Az egyenes egyik képe szabadon megadható. Egy síkbeli egyenest egyértelműen meghatározza az egyik (bármelyik) képe, a másik képét szerkesztenünk kell. Választhatunk, hogy az  $e$  egyenes első vagy második képét vesszük fel tetszőlegesen. Az új  $e$  egyenest hozzá kell kapcsolnunk a megadott egyenesekhez – az 1.18. ábrán a háromszög AC és BC oldalaihoz –, ezért ezen egyenesekkel alkotott metszéspontokat (1 és 2 pontok) fogjuk használni a szerkesztésnél. Rendező segítségével megkeressük  $e$  metszéspontok másik képét a megfelelő egyeneseken – az 1 pontot az AC egyenesnek a másik képén és a 2 pontot a BC egyenesnek a másik képén –, majd a kapott metszéspontok összekötésével keletkezik a keresett egyenes hiányzó képe (1.18. ábra).

Egy sík bármely pontját egyértelműen meghatározza a pont egyik képe. A másik képét egy tetszőlegesen megválasztott ségédegyenessel kell megszerkesztenünk. Tehát pontot síkon úgy tudunk ábrázolni, hogy a sík egy egyenesén vesszük fel (P pontot az  $e$  egyenesen) (1.18. ábra).

### 20. Feladat:

- Vegyünk fel egyenest két párhuzamos egyenessel megadott síkon!
- Vegyünk fel pontot két párhuzamos egyenessel megadott síkon!

### Feladat megoldása:



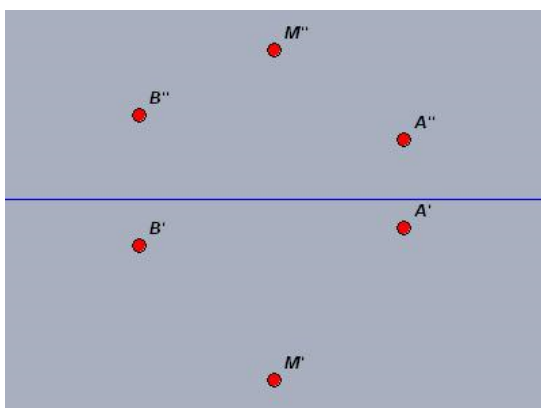
1.19. ábra: Egyenes ábrázolása két párhuzamos egyenessel adott síkon (Forrás: saját ábra)

Az előző feladathoz hasonlóan, az egyenes egyik képe szabadon megadható. Egy síkbeli egyenest egyértelműen meghatározza az egyik (bármelyik) képe. A másik képét szerkesztenünk kell. Választhatunk, hogy az  $e$  egyenes első vagy második képét vesszük fel tetszőlegesen. Az új  $e$  egyenest hozzá kell kapcsolnunk a megadott egyenesekhez – az 1.19. ábrán az  $a$  és  $b$  egyenesekhez –, ezért ezen egyenesekkel alkotott metszéspontokat (1 és 2 pontok) fogjuk használni a szerkesztésnél.

Rendező segítségével megkeressük  $e$  metszéspontok másik képét a megfelelő egyeneseken – az 1 pontot az  $a$  egyenes másik képén és a 2 pontot a  $b$  egyenes másik képén –, majd a kapott metszéspontok összekötésével keletkezik a keresett egyenes hiányzó képe (1.19. ábra).

Egy sík bármely pontját egyértelműen meghatározza a pont egyik képe. A másik képét egy tetszőlegesen megválasztott segédegyenessel kell megszerkesztenünk. Tehát pontot síkon úgy tudunk ábrázolni, hogy a sík egy egyenesén vesszük fel ( $Q$  pontot az  $e$  egyenesen) (1.19. ábra).

**21. Feladat:** Adott egy sík három pontjával ( $A$ ,  $B$  és  $M$  pontok) (1.20. ábra). Határozzuk meg a sík nyomvonalait!



1.20. ábra: Sík három pontjával (Forrás: saját ábra)

### Feladat megoldása:

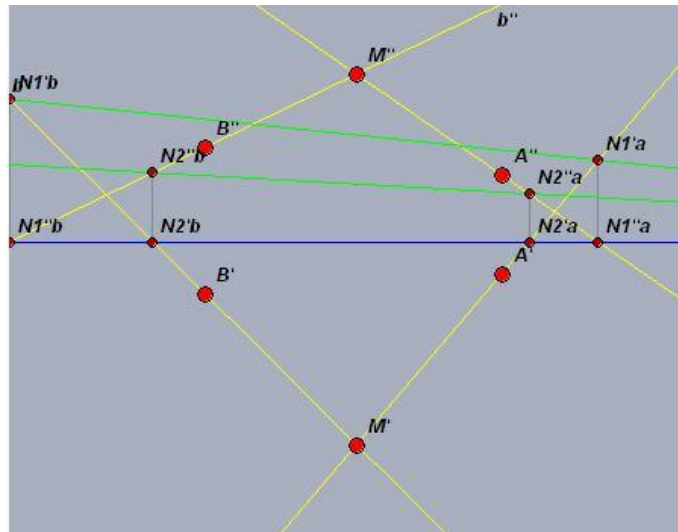
A három pont meghatároz két metsző helyzetű egyenest, ábránkon az  $a$  és  $b$  egyeneseket. Az 1.21. ábrán  $a'$ -t  $M'$ -n és  $A'$ -n át, majd  $b'$ -t  $M'$ -n és  $B'$ -n át rajzoltuk meg, a második képen hasonlóan jártunk el. Ezen egyenesek nyompontjait keressük meg. Így két metsző egyenes által meghatározott sík nyomvonalainak keresése a feladat.

A sík nyomvonalai az egyenesek megfelelő nyompontjain mennek át, ezért szerkesszük meg az  $a$  és  $b$  egyenesek nyompontjait a 12. feladat útmutatásait követve.

Az  $a$  egyenes nyompontjai:  $N1a$  ( $N1'a$  és  $N1''a$ ) és  $N2a$  ( $N2'a$  és  $N2''a$ ). A  $b$  egyenes nyompontjai:  $N1b$  ( $N1'b$  és  $N1''b$ ) és  $N2b$  ( $N2'b$  és  $N2''b$ ). Az  $N1''b$ ,  $N2'b$ ,  $N1''a$  és  $N2'a$  pontok illeszkednek az  $x_{1,2}$  tengelyre (1.21. ábra).

- $n1$  nyomvonal átmegy  $N1'a$  és  $N1'b$  pontokon.
- $n2$  nyomvonal átmegy  $N2''a$  és  $N2''b$  pontokon.

Kössük össze  $N1'a$ -t és  $N1'b$ -t, majd  $N2'a$ -t és  $N2'b$ -t, így megkapjuk a sík keresett nyomvonalait.



1.21. ábra: Sík nyomvonalainak szerkesztése (Forrás: saját ábra)

## 2. METSZÉSI FELADATOK, SÍKOK METSZETE (Dr. Perge Erika)

Síkra vonatkozó metszési feladatok esetében a tananyag feldolgozását a következő sorrendben ajánljuk:

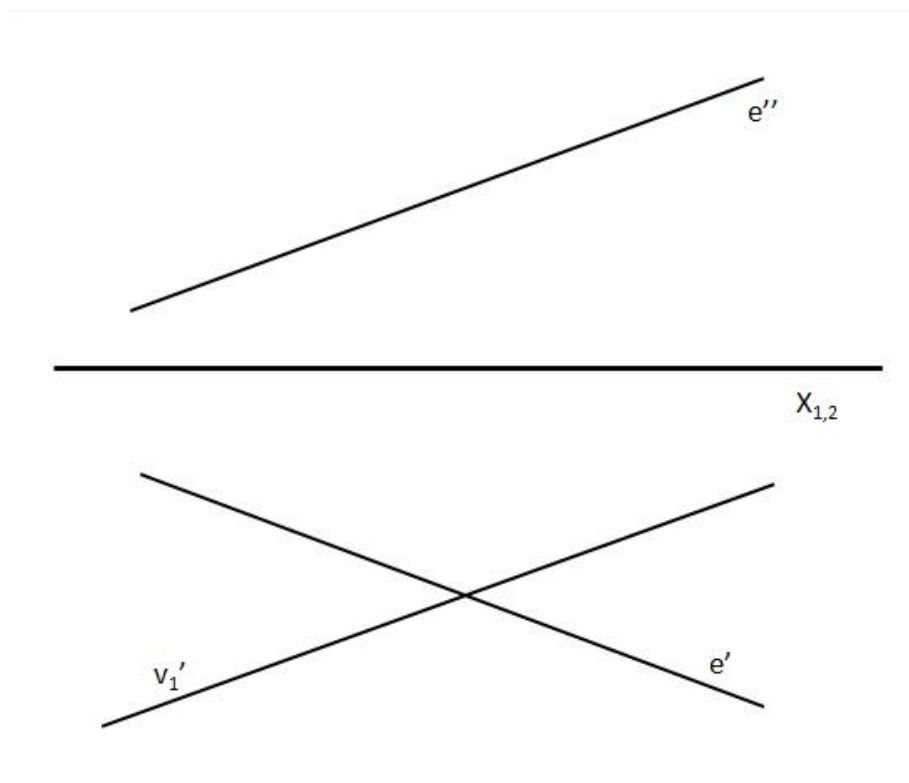
- Vetítősík és egyenes dőfspontja,
- Vetítősíkok metszete,
- Egy általános helyzetű és egy vetítősík metszete,
- Egy általános helyzetű sík és egy egyenes dőfspontja,
- Két általános helyzetű sík metszete.

Ezt követi a Test metszete síkkal témakör.

### 2.1. Vetítősík és egyenes dőfspontja

A sík, melyet dőf egy egyenes, az lehet speciális (vetítősík) vagy általános helyzetű. Vetítősíkok esetén a dőfspont meghatározása egyszerűbb, mint az általános helyzetű síkok esetében.

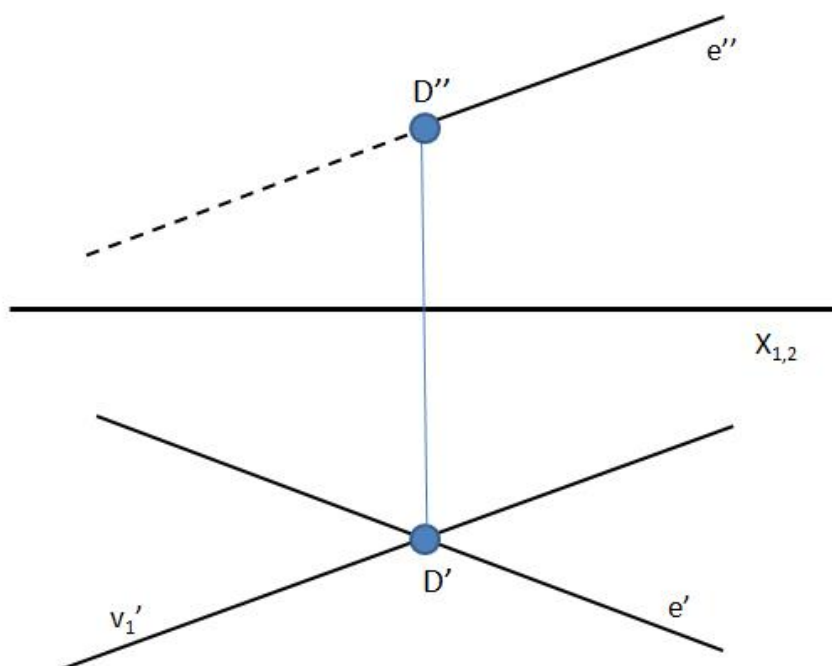
**1. Feladat:** Határozzuk meg a  $V_I$  első vetítősíknak és az  $e$  egyenesnek a metszetét (a sík és egyenes dőfspontját)! (2.1. ábra)



2.1. ábra. Első vetítősík és egyenes dőfspontja  
(Forrás: Saját ábra)

**Feladat megoldása:**

Az első vetítősíknak az első képe egy egyenes. Az első képből kiindulva az első vetítősíknak és az egyenes első képének a metszete ( $V_1, e$ ) egyszerűen két egyenes metszéspontja, ami a dőféspont első képe ( $D'$ ). A dőféspont második képe ( $D''$ ) meghatározható az első képből az egyenes második képéig húzott rendezővel.

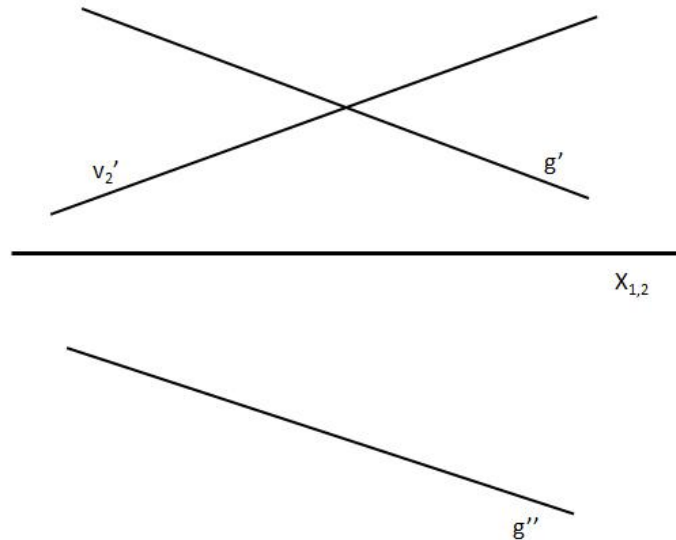


2.2. ábra. Első vetítősík és egyenes dőféspontjának meghatározása láthatósággal  
(Forrás: Saját ábra)

A metszési feladatok esetében is a láthatóság vizsgálatával fejezzük be a feladat megoldását. Ha egy egyenes dőf egy síkot, akkor legalább az egyik nézetből nézve a sík eltakarja az egyenes egy részét. Az egyenes láthatósága a dőféspontban megváltozik. Jelen esetben az első kép (felülnézet) egyértelmű, a sík és egyenes első képe egymást metsző egyenesek, a metszéspont a dőféspont első képe.

A második képen (az előlnézetben) el kell dönteni, hogy a sík az egyenes melyik részét takarja, a dőfésponttól melyik irányban látható ill. melyik irányban van takarásban. Ezt az első képen vizsgálódva tudjuk eldönteni. Felülnézet esetében, amely pont az  $x_{1,2}$  képtengelytől messzebb van (az ábrán lejjebb helyezkedik el), az a valóságban hozzánk közelebb van. Ami hozzánk közelebb van, az takarja a tőlünk távolabb lévőket. Ez alapján, az első képen a dőfésponttól jobbra az egyenes van hozzánk közelebb és az takarja a síkot, a dőfésponttól balra pedig a sík van hozzánk közelebb és az takarja az egyenest. Ennek megfelelően, a második képen az egyenes a dőfésponttól jobbra látható, a dőfésponttól balra nem látható (2.2. ábra).

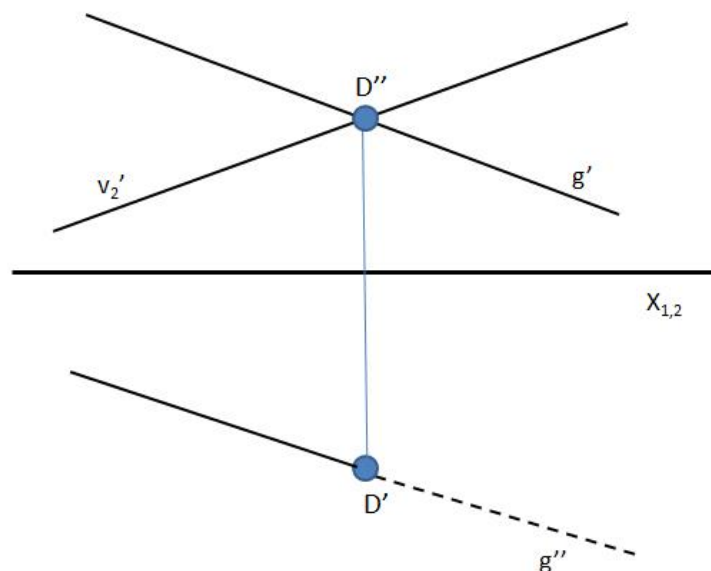
**2. Feladat:** Határozzuk meg a  $V_2$  második vetítősíknak és a  $g$  egyenesnek a metszetét (a sík és egyenes dőléspontját)! (2.3. ábra)



2.3. ábra. Második vetítősík és egyenes dőléspontja (Forrás: Saját ábra)

**Feladat megoldása:**

A második vetítősíknak a második képe egy egyenes. A második képből kiindulva, a második vetítősíknak és az egyenes második képének a metszete ( $V_2$ ,  $g$ ) egyszerűen két egyenes metszéspontja, ami a dőléspont második képe ( $D''$ ). A dőléspont első képe ( $D'$ ) meghatározható a második képből az egyenes első képéig húzott rendezővel.



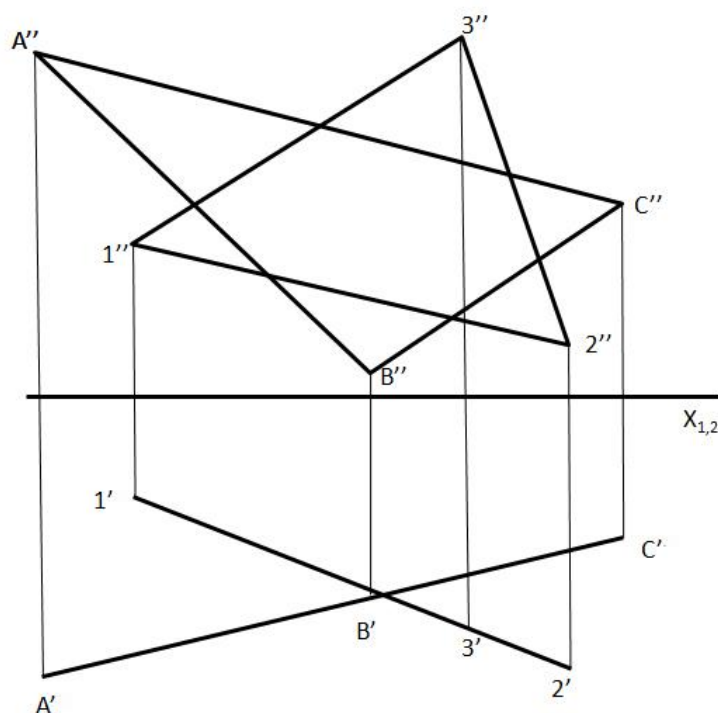
2.4. ábra. Második vetítősík és egyenes dőléspontjának meghatározása láthatósággal (Forrás: Saját ábra)

A láthatóság vizsgálata: Jelen esetben a második kép (az előlnézet) egyértelmű, a sík és egyenes második képe egymást metsző egyenesek, a metszéspont a dőléspont második képe. Az első képen (felülnézetben) el kell dönteni, hogy a sík az egyenes melyik részét takarja, a dőlésponttól melyik irányban látszik, melyik irányban van takarásban. Ezt a második képen vizsgálódva tudjuk eldönteni. Előlnézet esetében, amely pont az  $x_{1,2}$  képtengelytől messzebb van (az ábrán fentebb helyezkedik el), az a valóságban magasabban van. Ami magasabban van, az takarja az alatta lévő, fentről szemlélve. Ez alapján, a (felülnézeti) második képen a dőlésponttól balra az egyenes van feljebb (magasabban, hozzánk közelebb) és az takarja az alatta lévő síkot, a dőlésponttól jobbra pedig a sík van feljebb (magasabban, hozzánk közelebb) és az takarja az alatta lévő egyenest. Ennek megfelelően, az első képen az egyenes a dőlésponttól balra látható, a dőlésponttól jobbra nem látható (2.4. ábra).

## 2.2. Vetítősíkok metszete

Két sík metszésvonala olyan egyenes, mely mindkét síkra illeszkedik. Két sík metszése esetén a metszésvonal meghatározása akkor a legegyszerűbb, ha a síkok vetítősíkok.

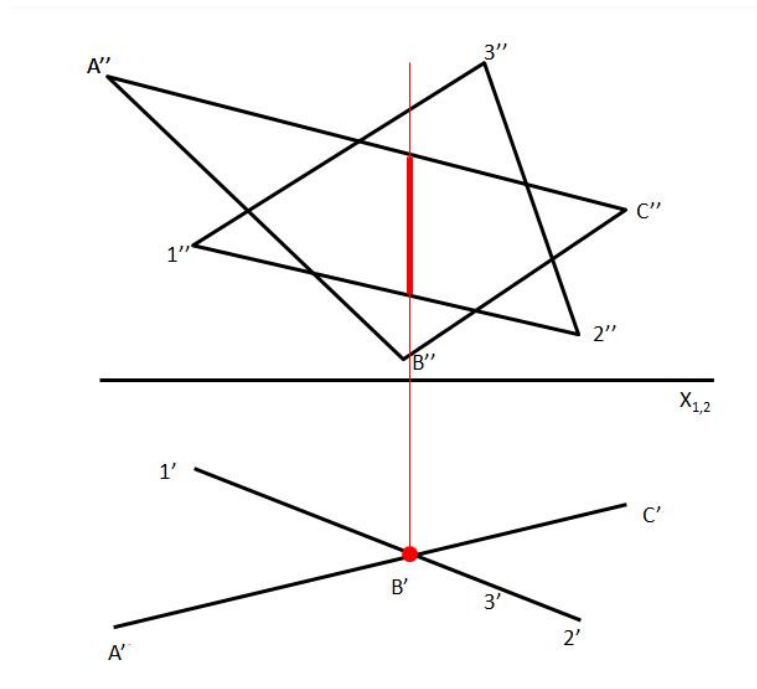
**3. Feladat:** Határozzuk meg az  $I23$  és az  $ABC$  első vetítősíkoknak a metszetét! (2.5. ábra)



2.5. ábra. Első vetítősíkok metszete (Forrás: Saját ábra)

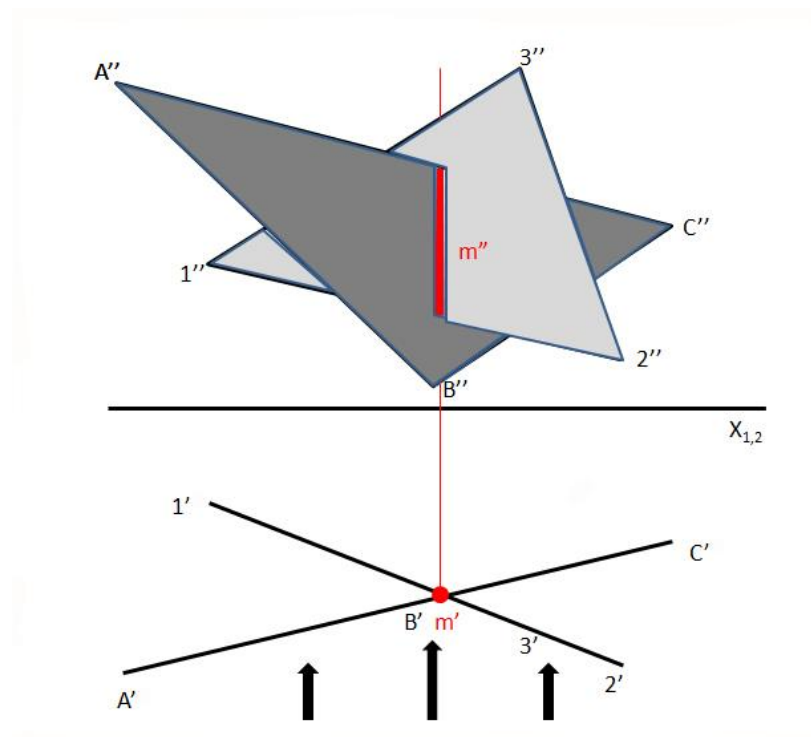
### Feladat megoldása:

Első vetítősíkok első képe speciális. A felülnézeti (első) képen leolvasható a két sík metszésvonala, melyet egy pontnak látunk. Ebből a pontból indított rendezővel határozzuk meg a síkok metszetének második képét. A metszetvonal a két végtelen kiterjedésű sík metszetét adja. Számunkra ennek a metszetvonalnak csak arra a részére van szükségünk, mely mindkét sokszög közös része. Ez lesz a két sokszöglap metszete.



2.6. ábra. Első vetítősíkok metszete (Forrás: Saját ábra)

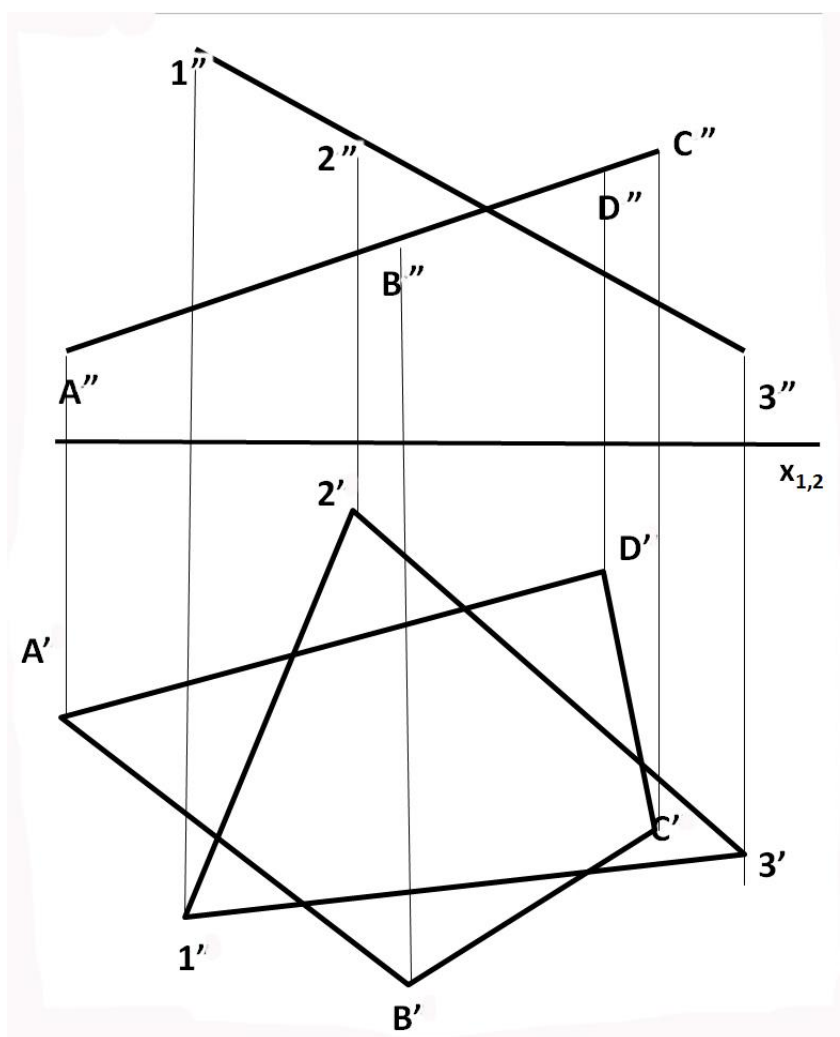
Láthatóság vizsgálata: Az első kép láthatósága egyértelmű. A második kép (előlnézet) láthatóságát kell meghatároznunk. Ezt az első képen történő vizsgálódással tehetjük.



2.7. ábra. Első vetítősíkok metszete láthatósággal (Forrás: Saját ábra)

Megnézzük, hogy a metszenvonaltól balra mi van az ábrán lejjebb (azaz a valóságban hozzánk közelebb). Az első képen a metszenvonaltól balra az  $ABC$  sík van hozzánk közelebb, tehát a második képen az takarja a tőlünk távolabb lévő  $123$  síkot. Az első képen a metszenvonaltól jobbra az  $123$  sík van lejjebb (hozzánk közelebb), az takarja a tőlünk távolabb lévő  $ABC$  háromszöget a második képen.

**4. Feladat:** Határozzuk meg az  $123$  az  $ABCD$  második vetítésének a metszetét! (2.8. ábra)



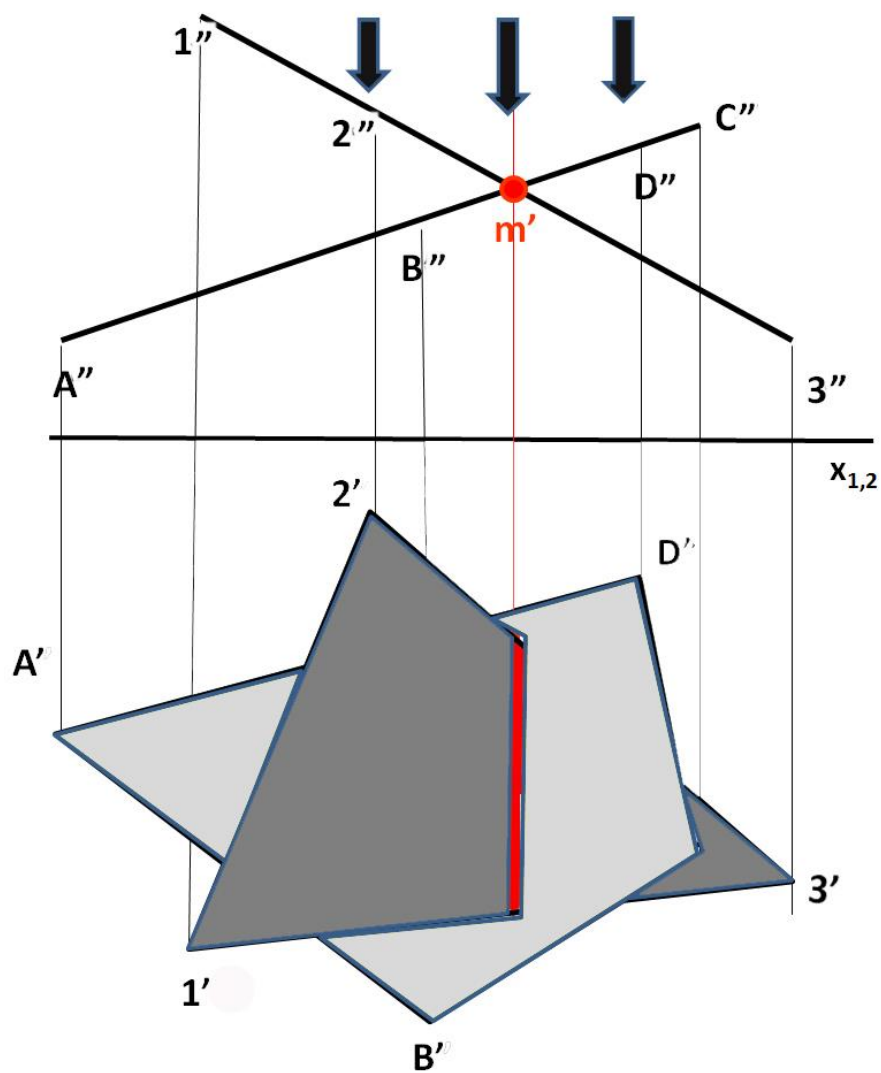
2.8. ábra. Második vetítésének metszete (Forrás: Saját ábra)

#### Feladat megoldása:

Második vetítésének második képe speciális. Az előlnézeti (második) képen leolvasható a két sík metszenvonala, melyet egy pontnak látunk. Ebből a pontból indított rendezővel határozzuk meg a síkok metszetének első képét. A metszenvonal a két végtelen kiterjedésű sík metszetét adja. Számunkra ennek a metszenvonalnak csak arra a részére van szükségünk, mely mindkét sokszög közös része. Ez lesz a két sokszöglap metszete.

### Láthatóság vizsgálata

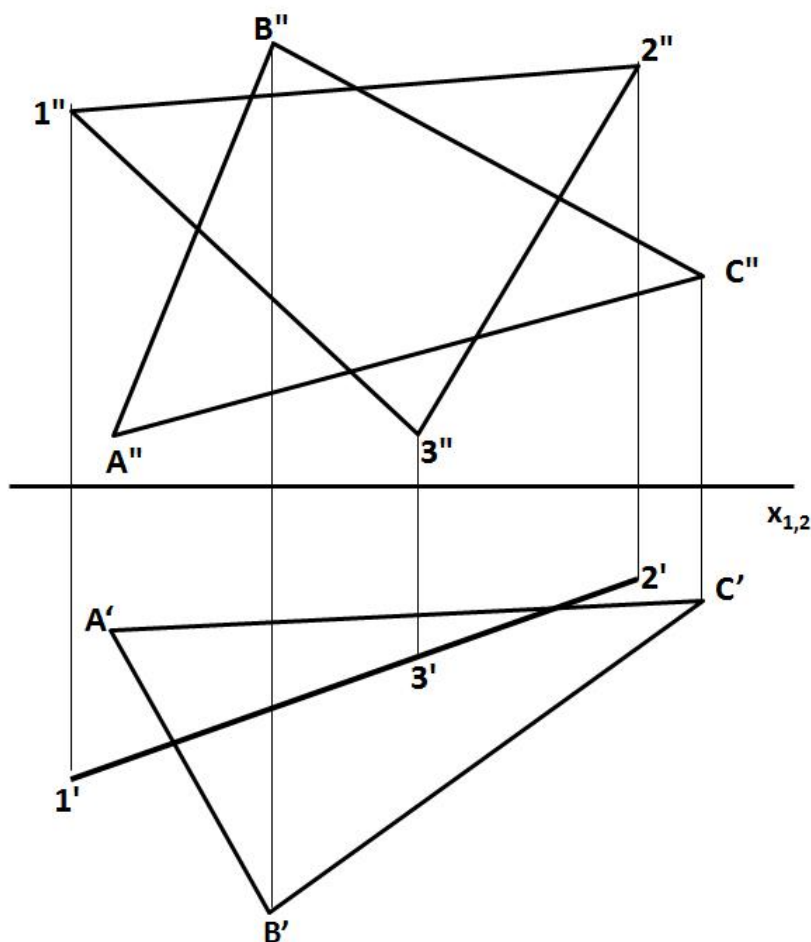
A második kép láthatósága egyértelmű. Az első kép (felülnézet) láthatóságát kell meghatároznunk. Ezt a második képen történő vizsgálódással tehetjük, megnézzük, hogy a metszenvonaltól balra mi van az ábrán fentebb, magasabban (azaz a valóságban hozzánk közelebb). A metszenvonaltól balra az 123 sík van hozzánk közelebb, tehát az takarja a tőlünk távolabb lévő ABCD síkot az első képen. A második képen a metszenvonaltól jobbra az ABCD sík van magasabban, fentebb (hozzánk közelebb), az takarja az első képen a tőlünk távolabb lévő 123 háromszöget (2.9. ábra).



2.9. ábra. Második vetítősíkok metszete láthatósággal (Forrás: Saját ábra)

### 2.3. Egy általános helyzetű és egy vetítősík metszete

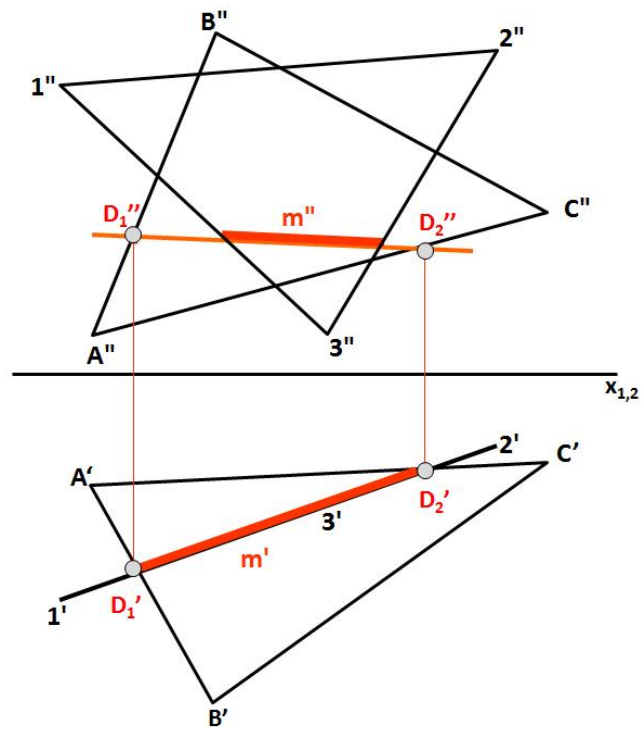
**5. Feladat:** Határozzuk meg az  $123$  első vetítősíknak és az  $ABC$  általános helyzetű háromszög síkjának a metszetét! (2.10. ábra)



2.10. ábra. Első vetítősík és egy általános helyzetű sík metszete  
(Forrás: Saját ábra)

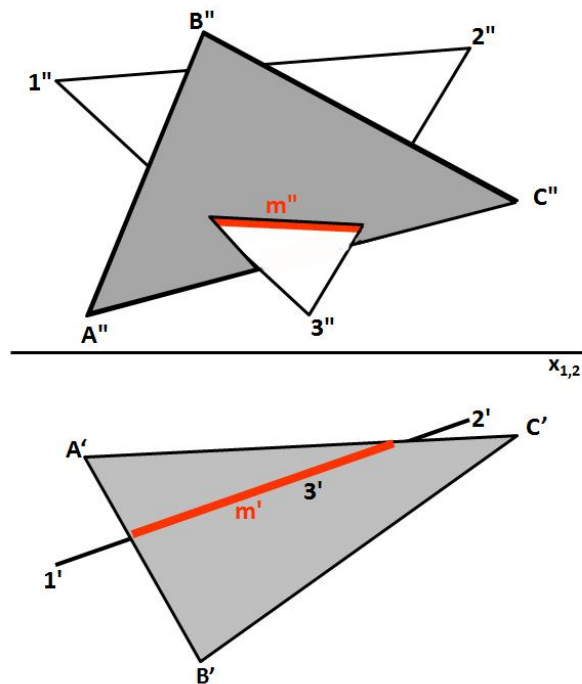
#### Feladat megoldása:

Az  $123$  háromszög síkja első vetítősík, ezért az első képe speciális, ott egy szakasznak látjuk. Az első képen leolvasható, hogy az  $123$  háromszöglapot hol metszi az  $ABC$  háromszög  $AC$  és  $AB$  éle. Ez a két pont lesz a keresett két dőféspont első képe  $D_1'$ ,  $D_2'$ . Rendezővel keressük a dőféspontok második képeit Az  $AB$  és  $AC$  élek második képein  $D_1''$ ,  $D_2''$ . A dőféspontok első képeit összekötő szakasz lesz a két sík metszetének első képe  $m'$ . A dőféspontok második képeit összekötő egyenesének az a szakasza, mely mindkét sík közös része, az lesz a két sík metszetének második képe  $m''$  (2.11. ábra).



2.11. ábra. Első vetítősík és egy általános helyzetű sík metszetének a meghatározása (Forrás: Saját ábra)

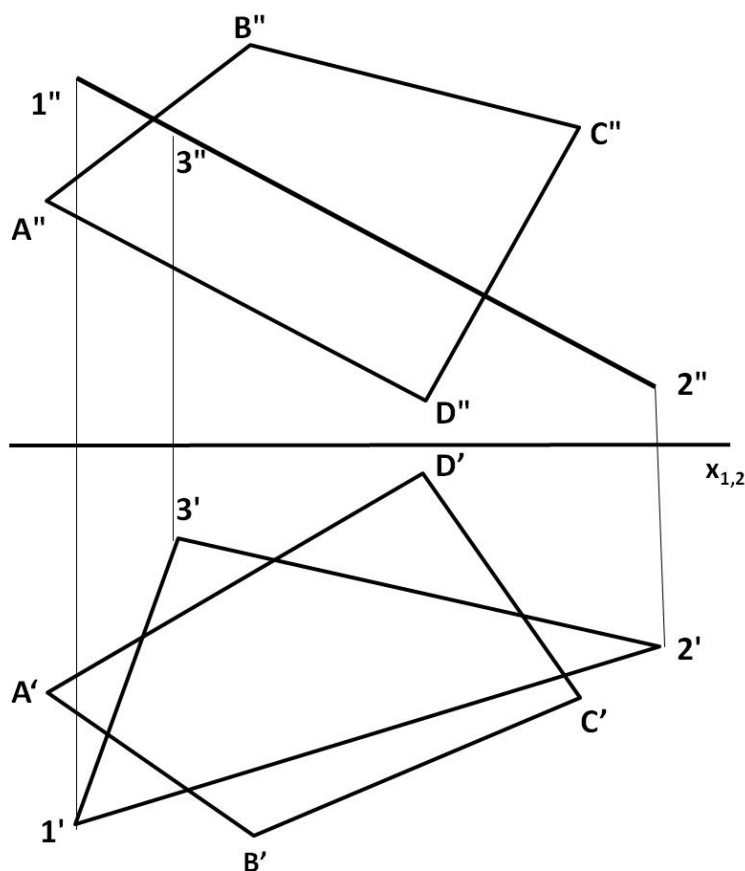
**Láthatóság vizsgálata**



2.12. ábra. Első vetítősík és egy általános helyzetű sík metszetének a meghatározása láthatósággal (Forrás: Saját ábra)

Jelen esetben csak a 2. képen van értelme a láthatóság jelölésének. Ehhez az első képen ki kell választanunk az 123 háromszöglap azon részét, amely a vetítősík előtt van, azaz hozzánk közelebb. A térben az van hozzánk közelebb, ami az első képen az  $x_{1,2}$  tengelytől messzebb van, vagyis az első képen lentebb helyezkedik el. Legalul az az első képen az ABC háromszög B csúcsa van. A **B** csúcs és az abból induló BC és BA élek láthatóak lesznek a második képen előlnézetben (2.12. ábra).

**6. Feladat:** Határozzuk meg az **123** második vetítősíknak és az **ABCD** általános helyzetű négyszög síkjának a metszetét! (2.13. ábra)

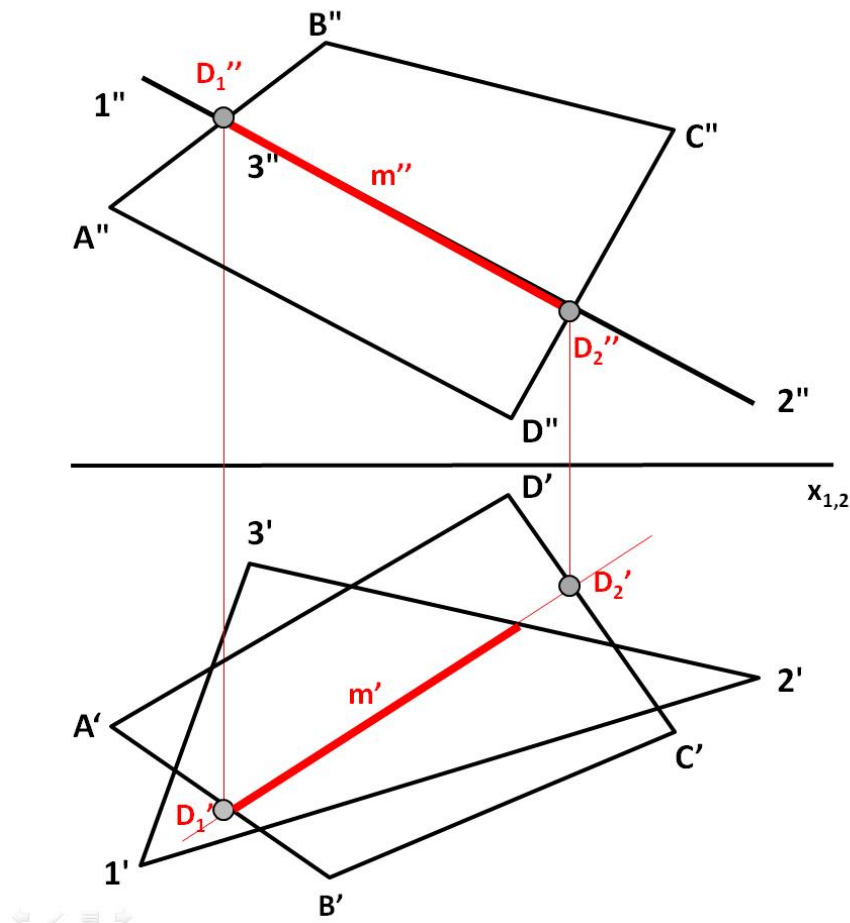


2.13. ábra. Második vetítősík és egy általános helyzetű sík metszetének a meghatározása (Forrás: Saját ábra)

### Feladat megoldása:

Az 123 háromszög síkja második vetítősík, ezért a második képe speciális, ott egy szakasznak látjuk. A második képen leolvasható, hogy az 123 háromszöglapot hol metszi az ABCD négyszöglap AB és CD éle. Ez a két pont lesz a keresett két dőféspont második képe ( $D_1''$ ,  $D_2''$ ). Rendezővel keressük a dőféspontok első képeit az AB és DC élek első képein ( $D_1'$ ,  $D_2'$ ). A dőféspontok első képeit összekötő szakasz lesz a két végtelen sík metszete. Ennek a metszetvonalnak azt a szakaszát keressük, mely mindkét sík közös

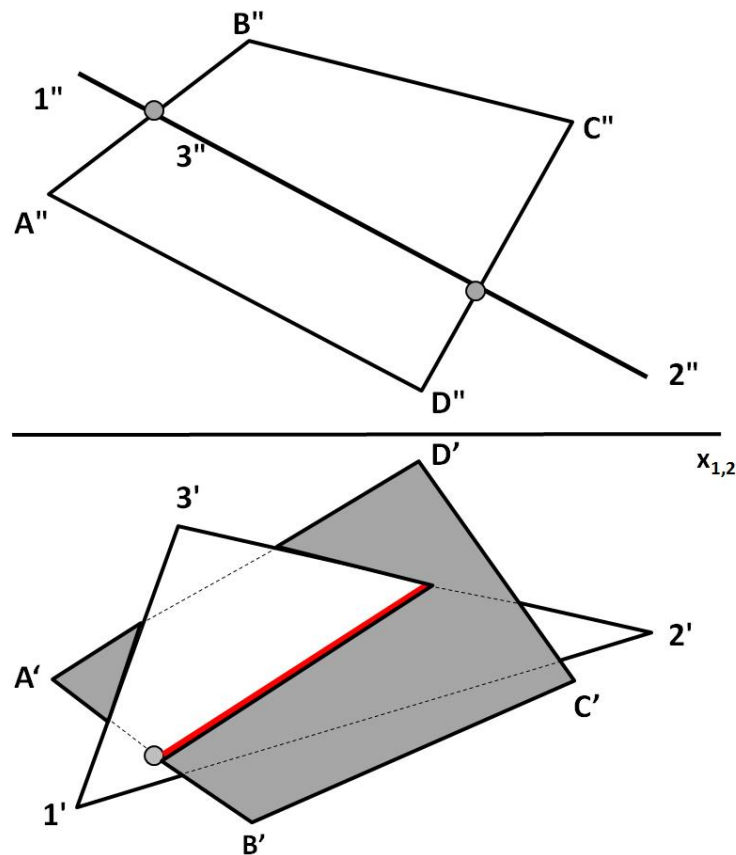
része, ez lesz a két síklap metszétvonalának első képe  $m'$ , a dőléspontok második képeit összekötő szakasz lesz a két sík metszetének második képe  $m''$  (2.14. ábra).



2.14. ábra. Második vetítősík és egy általános helyzetű sík metszete  
(Forrás: Saját ábra)

Láthatóság vizsgálata:

Most csak a 2. képen van értelme a láthatóság jelölésének. Ehhez az első képen ki kell választanunk az 123 háromszöglap azon részét, amely a vetítősík fölött van, azaz magasabban, hozzánk közelebb van. A térben az van hozzánk közelebb, ami az első képen az  $x_{1,2}$  tengelytől messzebb van, vagyis az első képen lentebb helyezkedik el. Legalul az ABCD négyszög B csúcsa van ( $B'$ ). A második képen előlnézetben B csúcs ( $B''$ ) és az abból induló élek ( $BC''$  és  $BA''$ ) láthatóak lesznek a (2.15. ábra).



2.15. ábra. Második vetítősík és egy általános helyzetű sík metszete láthatósággal  
(Forrás: Saját ábra)

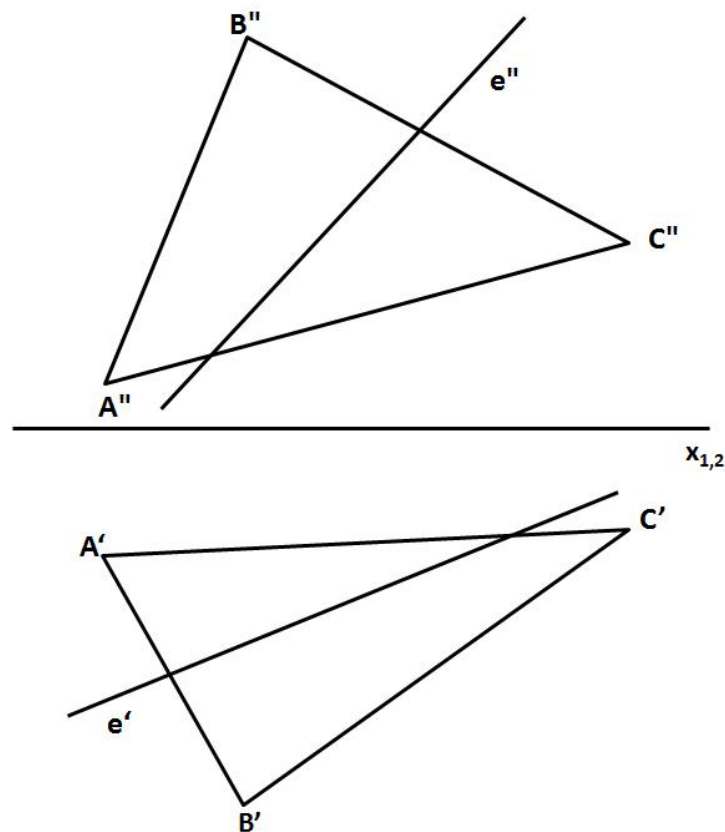
## 2.4. Általános helyzetű sík és egy egyenes dőféspontja

Általános helyzetű sík és egy egyenes dőféspontjának meghatározásához szükség lesz egy ún. segédsíkra, mely jelen esetben az egyenesre illesztett vetítősík. Ez az egyenesre illesztett vetítősík tetszőlegesen lehet első vetítősík vagy második vetítősík.

Minden egyenesre illeszthető vetítősík, melynek az egyik képe (attól függően, hogy hányadik vetítősík) megegyezik az egyenes képével. Első vetítősík alkalmazásával a vetítősík első képe megegyezik az egyenes első képével. Második vetítősík alkalmazásával a vetítősík második képe megegyezik az egyenes második képével. Ezt az eljárást, amikor a sík és az egyenes megfelelő képei fedik egymást **FEDŐEGYENESPÁR MÓDSZERÉNEK** is szokták nevezni. Ha első vetítősíkot alkalmazunk, akkor első fedőegyenespár módszernek nevezzük, ha második vetítősíkot alkalmazunk, akkor második fedőegyenespár módszerének nevezzük.

Az általános helyzetű síknak és a vetítősíknak a metszete egy egyenes, melynek az egyik képe egybeesik az általános helyzetű síkot dőfő egyenes megfelelő képével, a másik képe pedig metszi azt. Ez a metszéspont lesz a keresett dőféspont egyik képe. A dőféspont másik képét rendezővel keressük az egyenes másik képén.

**7. Feladat:** Határozzuk meg az  $123$  általános helyzetű síknak és az  $e$  egyenesnek a metszetét (dőféspontját)! Alkalmazzuk az első fedőegyenespár módszerét! (2.16. ábra)



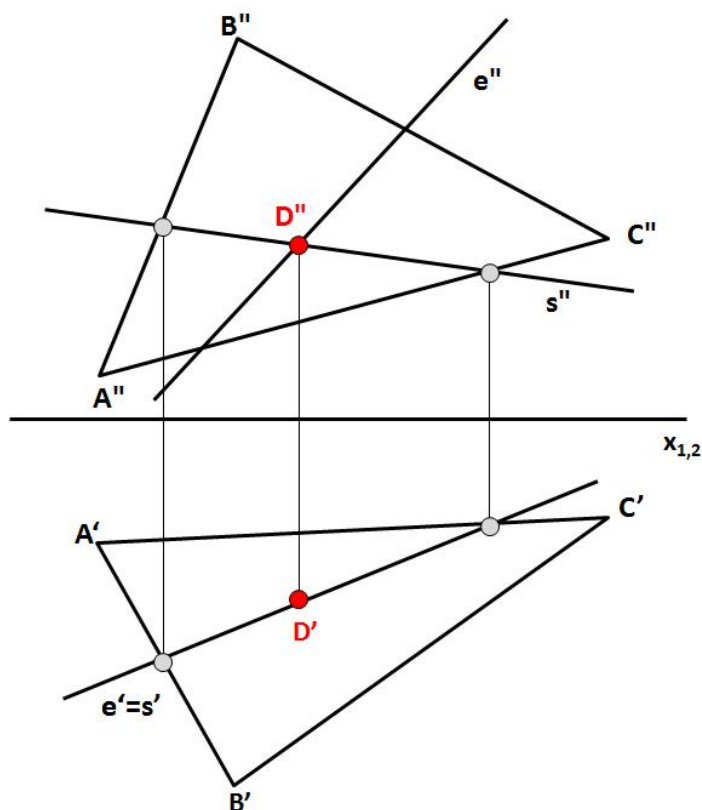
2.16. ábra. Egy általános helyzetű síknak és egy egyenesnek a metszete  
(Forrás: Saját ábra)

### Feladat megoldása:

Az  $e$  egyenesnek az  $ABC$  háromszöggel való metszéspontját úgy kapjuk, hogy az  $e$  egyenesre egy vetítősíkot illesztünk. Ennek a vetítősíknak és az  $ABC$  háromszög síkjának a metszete az  $s$  egyenes. Az  $e$  és az  $s$  első fedőegyenesek, ezért  $e'=s'$ . Az  $e$  és az  $s$  egyeneseknek a második képei már „szétválnak” és metszeni fogják egymást.

Ábránk alapján  $s''$  meghatározásához felhasználjuk, hogy az  $s$  egyenes illeszkedik az  $ABC$  háromszög síkjára. A háromszög  $AB$  és  $AC$  egyeneseivel metsző egyenespárt alkot. Ezen metszéspontok első képeiből indított rendezővel keressük a metszéspontok második képeit az  $AB''$  és  $AC''$  képen. Az így kapott metszéspontok második képeit összekötve kapjuk az  $s''$ -t,

A második képen az  $s''$  és  $e''$  metszők, ez a metszéspont lesz a dőféspont második képe  $D''$ .  $D''$ -t rendezővel határozzuk meg (2.17. ábra).



2.17. ábra. Egy általános helyzetű síknak és egy egyenesnek a metszete  
(Forrás: Saját ábra)

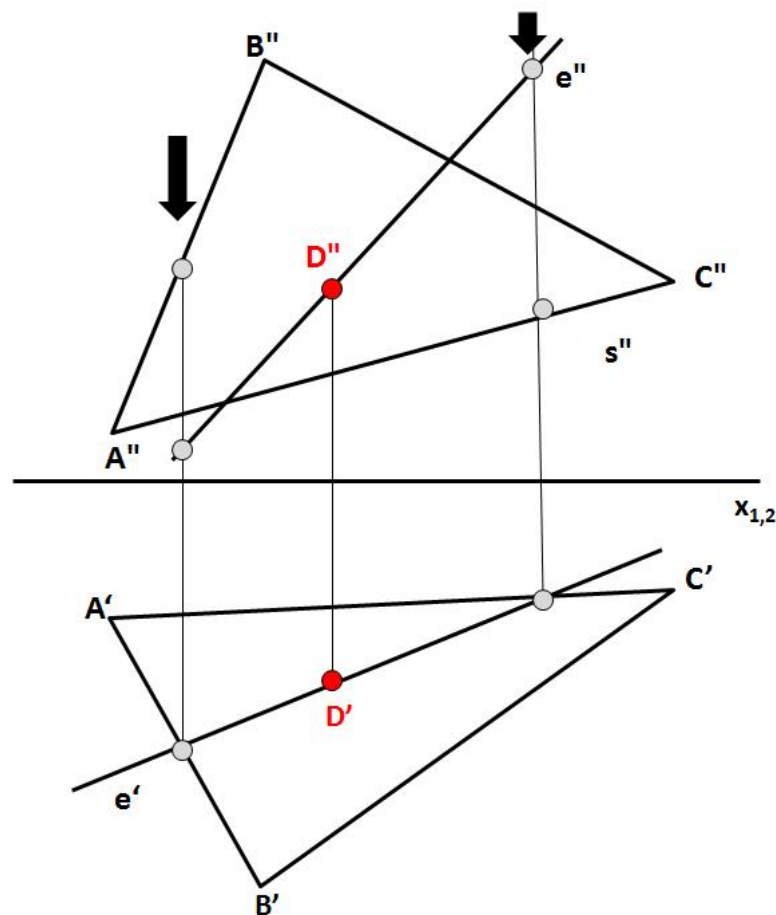
### Láthatóság vizsgálata

Első kép láthatósági vizsgálata.

A 2.18. ábrán az első képen látható, hogy az  $e'$ -nek van közös pontja az  $ABC$  háromszög körvonalával az  $AB'$  és az  $AC'$  egyenesek első képeivel. Ezek nem igazi értelemben vett metszéspontok., Ha azok lennének, akkor ezzel a két ponttal az  $e$  egyenest ráillesztenénk az  $ABC$  háromszög síkjára. Minden ilyen esetben mikor két egyenes felülről nézve metszi egymást, arra kell gondolni, hogy az egyik egyenes magasabban, a másik alacsonyabban helyezkedik el. Amelyik magasabban van a térben az takarja az alatta lévő. Ennek eldöntésére felvesszünk egy első vetítő egyenest ebből a látszólagos metszéspontból az első képen indulva. A második képen ezen a rendezőn keressük az adott egyenesekkel való metszéspontot. A második képen két pontot kapunk a rendezőn. Az egyik magasabban van, a másik alacsonyabban. Amelyik magasabban van, az őt meghatározó egyenes fogja takarni a másik egyenest az első képen.

Ez részletezve: Az  $e'$  és  $AB'$  egy pontban metszi egymást. Ebből rendezőt indítunk, és a második képen vizsgálódunk, hogy a rendezőt hol metszi az  $e$  egyenes és az  $AB$  egyenes. Így kapjuk a második képen a két pontot. A rendezőnek az  $AB''$ -vel való metszéspontja magasabban van, mint az  $e''$ -vel való metszéspontja. Ennek értelmében az első képen az  $AB'$  fogja takarni az  $e'$ -t.

Ugyanezt a vizsgálódást végezzük az első képen még egyszer, az  $e'$  és az  $AC'$  egy pontban metszi egymást. Ebből rendezőt indítunk, és a második képen vizsgálódunk, hogy a rendezőt hol metszi az  $e$  egyenes és az  $AC$  egyenes. Így kapjuk a második képen a két pontot. A rendezőnek az  $AC''$ -vel való metszéspontja alacsonyabban van, mint az  $e''$ -vel való metszéspontja. Ennek értelmében az első képen az  $e'$  fogja takarni az  $AC'$ -t.



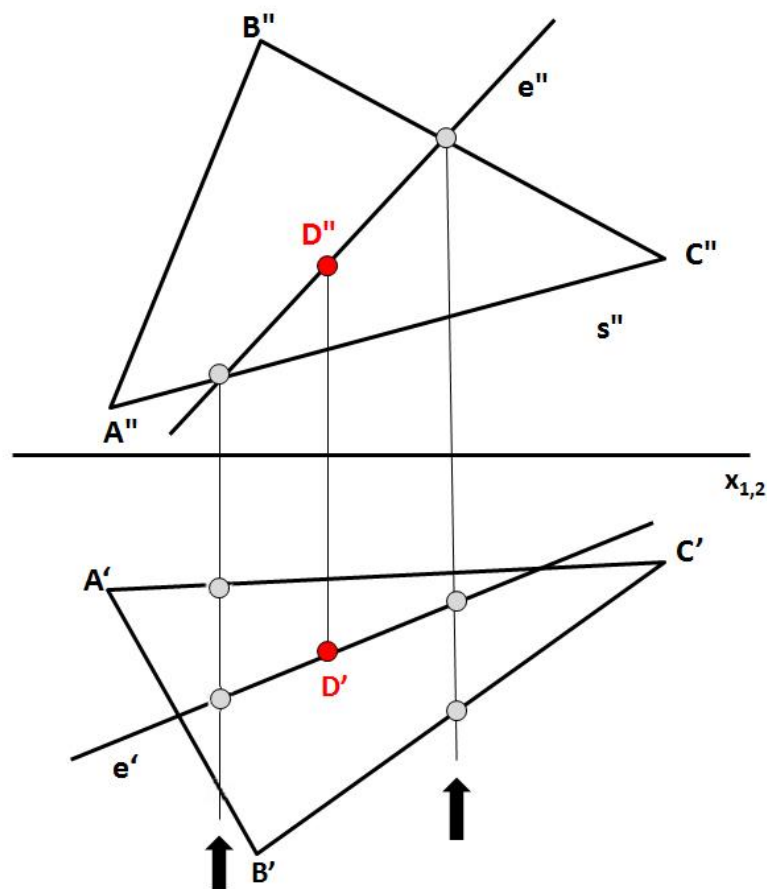
2.18. ábra. Egy általános helyzetű síknak és egy egyenes metszetének láthatósági vizsgálata az első képen (Forrás: Saját ábra)

Második kép láthatósági vizsgálata.

A 2.18. ábrán a második képen látható, hogy az  $e''$ -nek van közös pontja az  $ABC$  háromszög körvonalával az  $AC'$  és az  $BC'$  egyenesek első képeivel. Ezek nem igazi értelemben vett metszéspontok., Ha azok lennének, akkor ezzel a két ponttal az  $e$  egyenest ráillesztenénk az  $ABC$  háromszög síkjára. Minden ilyen esetben mikor két egyenes előlről nézve metszi egymást, arra kell gondolni, hogy az egyik egyenes előrébb van (hosszánk közelebb), a másik távolabb helyezkedik el. Amelyik közelebb van hozzánk a térben, az takarja a távolabb lévő. Ennek eldöntésére felvesszünk egy második vetítőegyenest ebből a látszólagos metszéspontból a második képen indulva. Az első képen, ezen a rendezőn keressük az adott egyenesekkel való metszéspontot. Az első képen két pontot kapunk a rendezőn. Az egyik

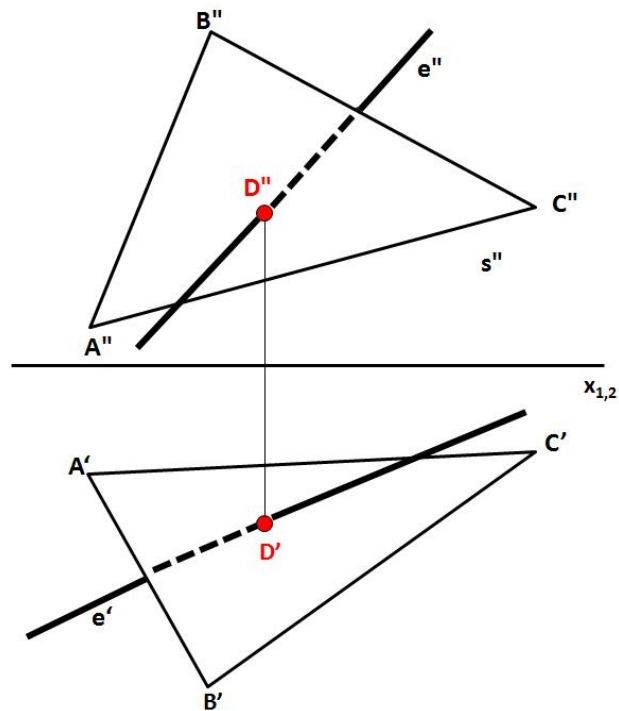
messzebb van az  $x_{1,2}$  tengelytől, az ábrán lentebb, a térben hozzánk közelebb van, a másik, tőlünk távolabb. Amelyik lentebb van az ábrán, az őt meghatározó egyenes fogja takarni a másik egyenest az első képen.

Ez részletezve: Az  $e''$  és  $AC''$  egy pontban metszi egymást látszólagosan. Ebből rendezőt indítunk, és az első képen vizsgálódunk, hogy a rendezőt hol metszi az  $e'$  egyenes és az  $AB'$ . Így kapjuk az első képen a két pontot. A rendezőnek az  $e'$ -vel való metszéspontja lentebb van, azaz a térben hozzánk közelebb van, mint az  $AC'$ -vel való metszéspontja. Ennek értelmében a második képen a látszólagos metszéspontban az  $e''$  fogja takarni az  $AC''$ -t.



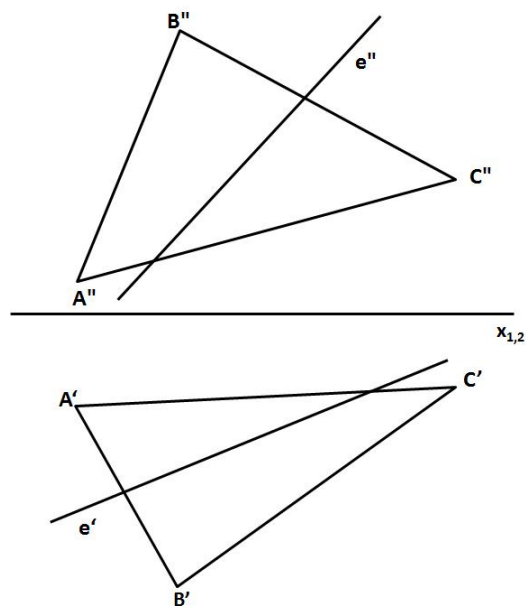
2.19. ábra. Egy általános helyzetű síknak és egy egyenes metszetének láthatósági vizsgálata a második képen (Forrás: Saját ábra)

Ugyanezt a vizsgálódást végezzük még egyszer, a második képen az  $e''$  és a  $BC''$  egy pontban metszi egymást. Ebből a látszólagos metszéspontból rendezőt indítunk, és az első képen vizsgálódunk, hogy a rendezőt hol metszi az  $e'$  és a  $BC'$ . Így kapjuk az első képen a két pontot. A rendezőnek a  $BC'$ -vel való metszéspontja az ábrán lentebb van, azaz a térben hozzánk közelebb van, mint az  $e'$ -vel való metszéspontja. Ennek értelmében a második képen az  $BC''$  fogja takarni az  $e''$ -t.



2.20. ábra. Egy általános helyzetű síknak és egy egyenesnek a metszete láthatósággal  
(Forrás: Saját ábra)

**8. Feladat:** Határozzuk meg az  $ABC$  általános helyzetű síknak és az  $e$  egyenesnek a metszetét (dőféspontját) második fedőegyenpár módszerének alkalmazásával! (2.21. ábra)



2.21. ábra. Egy általános helyzetű síknak és egy egyenesnek a metszete  
(Forrás: Saját ábra)

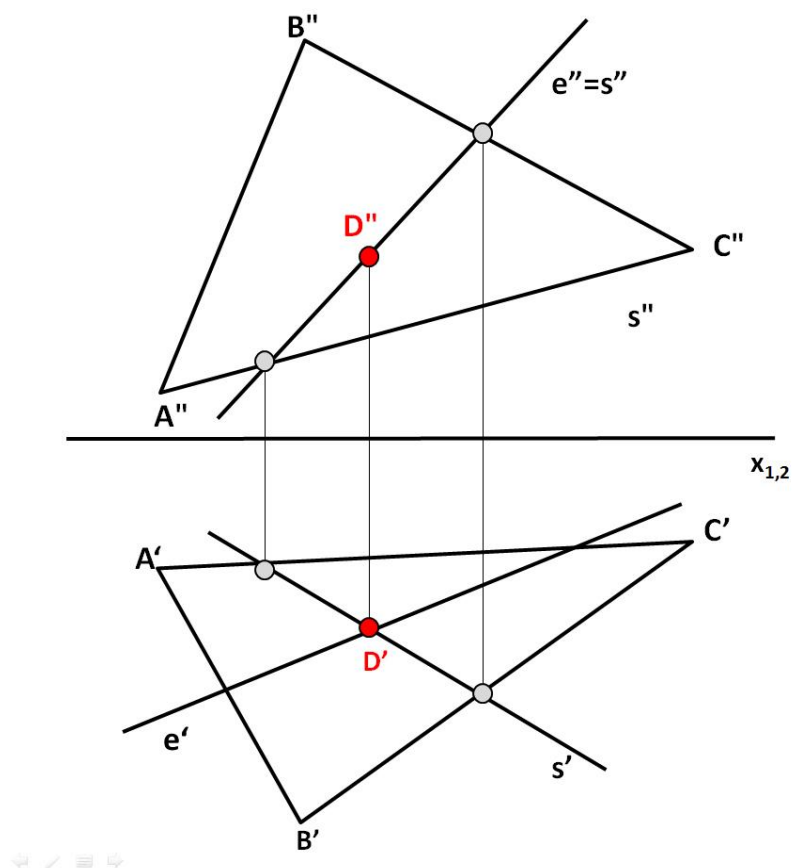
### Feladat megoldása:

Az  $e$  egyenesnek az  $ABC$  háromszöggel való metszéspontját úgy kapjuk, hogy az  $e$  egyenesre egy vetítősíkot illesztünk. Ennek a vetítősíknak és az  $ABC$  háromszög síkjának a metszete az  $s$  egyenes. Az  $e$  és az  $s$  második képe egybeesik, fedőegyenesek  $e''=s''$ . Az  $e$  és az  $s$  egyeneseknek az első képei már „szétválnak” és metszeni fogják egymást.

Ábránk alapján  $s$  meghatározásához felhasználjuk, hogy az  $s$  egyenes illeszkedik az  $ABC$  háromszög síkjára. A háromszög  $AB$  és  $AC$  egyeneseivel metsző egyenespárt alkot. Ezen metszéspontok második képeiből indított rendezővel keressük a metszéspontok első képeit az  $AC'$  és  $BC'$  képén. Az így kapott metszéspontok első képeit összekötve kapjuk az  $s'$ -t,

Az első képen az  $s'$  és  $e'$  metszők, ez a metszéspont lesz a dőféspont első képe  $D'$ .  $D''$ -t rendezővel határozzuk meg (2.22. ábra).

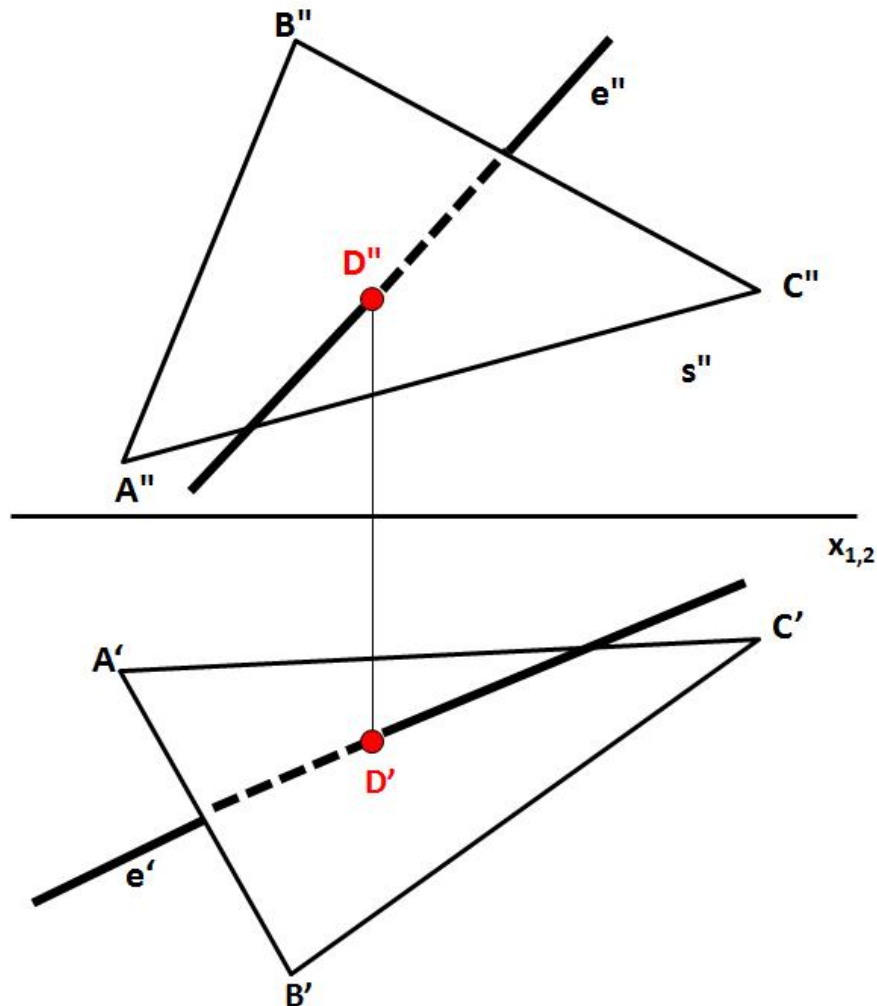
Második fedőegyenes módszerrel is ugyanazt a dőféspontot kaptuk, mint az előző (7) feladatban.



2.22. ábra. Egy általános helyzetű síknak és egy egyenesnek a metszete  
(Forrás: Saját ábra)

### Láthatóság vizsgálata

Láthatóság vizsgálat szintén megegyezik a 7. feladatban leírtakkal, így a feladat megoldása is ugyanaz.

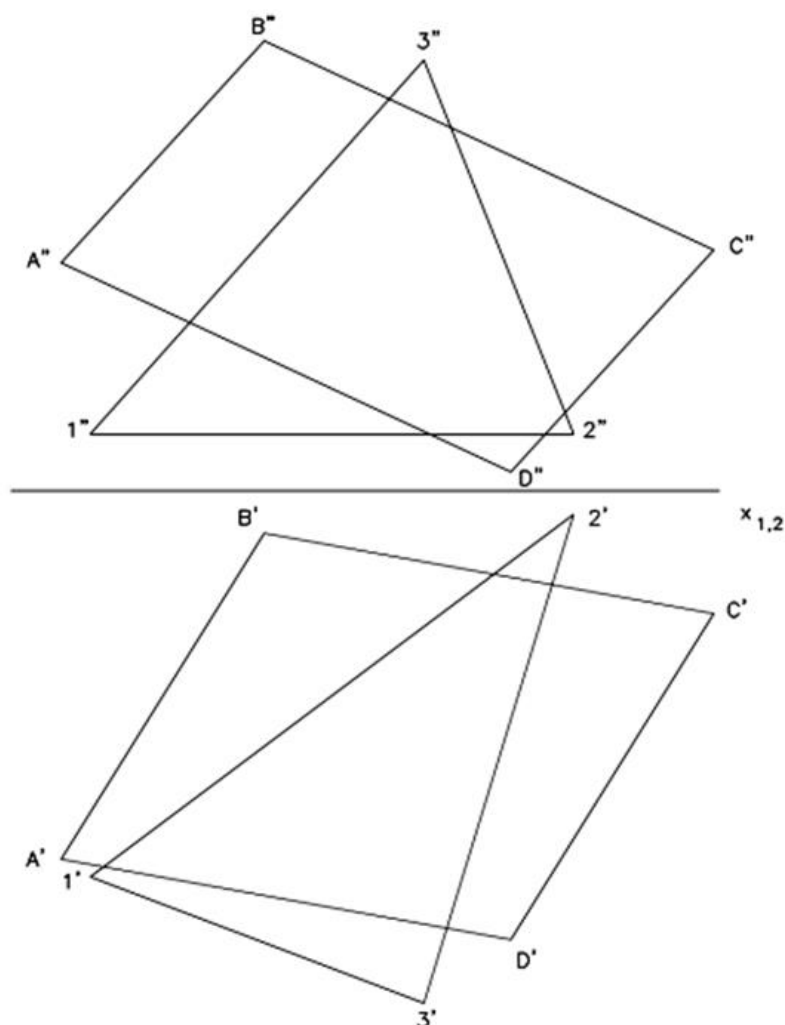


2.23.. ábra. Egy általános helyzetű síknak és egy egyenesnek a metszete láthatósággal  
(Forrás: Saját ábra)

## 2.5. Két általános helyzetű sík metszete

Két sík metszésvonalának meghatározását visszavezetjük egy sík és egy egyenes dőfpontjának meghatározásához. Két sík metszésvonalát úgy kapjuk, hogy megszerkszük valamelyik sík két egyenesének (esetleg mind a két sík egy-egy egyenesének) a másik síkkal alkotott dőfpontjait. Egy egyenest két pontja meghatározza. A metszésvonalat meghatározó dőfpontok közül kettőt határozunk meg, melyeket összekötve szerkeszthető a két teljes sík metszete. Ha sokszöglapok metszetét kell meghatározni, akkor a két sík metszétvonalának csak arra a részére van szükségünk, mely mindkét sokszög közös része.

**9. Feladat:** Határozzuk meg az 123 és az ABCD síkok metszetét! (2.24. ábra)



2.24. ábra. Két sík metszete (Forrás: Saját ábra)

### Feladat megoldása:

Két sík metszete egy egyenes. Egy egyenest két pontja egyértelműen meghatározza. A metszésvonal két pontját kell meghatároznunk.

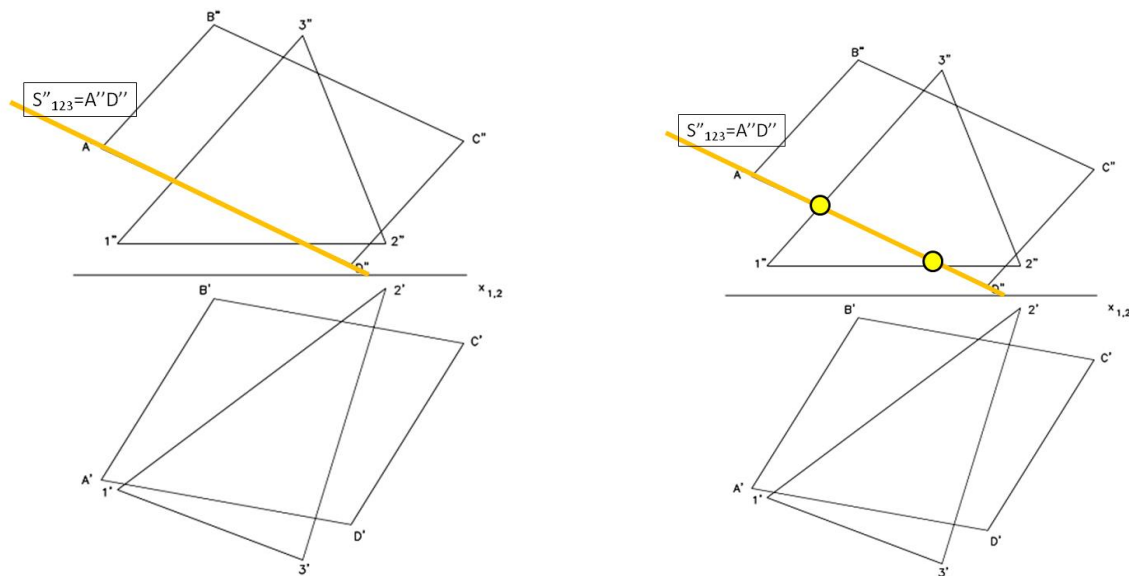
Egy dőléspontot úgy tudunk megszerkeszteni, hogy az egyik síkról kiválasztunk egy egyenest, és azzal dőljük a másik síkot.

A mi esetünkben az egyik síknak három, a másik síknak négy egyeneséből tudunk választani, és kiindulhatunk ezen egyenesek akár első, akár második képéből. Így az első lépés eldönteni, hogy a tizennégy választható eset közül melyik kettőt fogjuk megszerkeszteni a két dőléspont meghatározásához. Mindkét dőléspont, mindkét lépét megszerkesztjük.

Tetszőlegesen választottam az ABCD négyszög AD egyenesét. Vizsgálom, hogy az AD egyenes hol dőfi az 123 háromszög síkját. (Nem szükséges a háromszög lapon belül lennie a dőféspontnak).

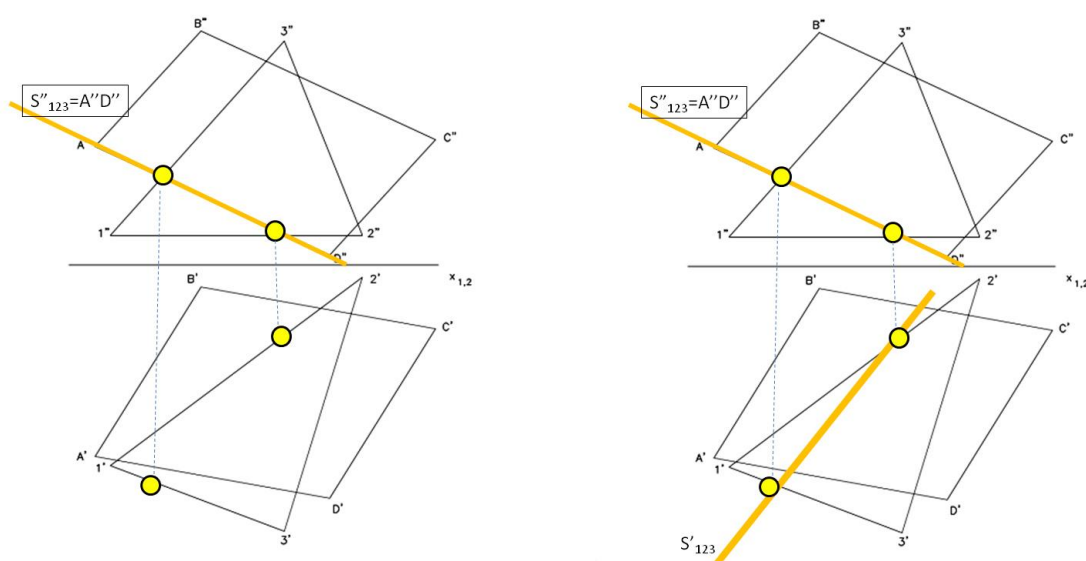
Tetszőlegesen az AD egyenes második képéből kezdem a vizsgálatot a második fedőegyenesek módszerét alkalmazva.

Az s egyenes az 123 háromszög síkjára illesztett olyan egyenes, melynek második képe egybe esik az AD egyenes második képével.  $AD''=s''$ .



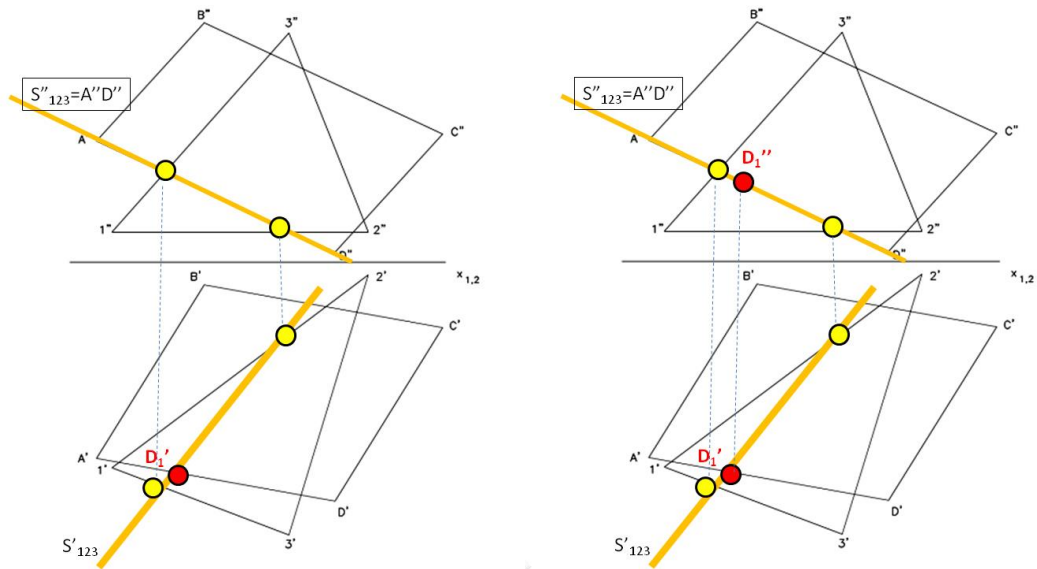
2.25. ábra. Fedőegyenes módszer alkalmazásának 1.lépése (Forrás: Saját ábra)

Megszerkesztem az  $s'$ -t, kihasználva, hogy az s egyenes az 123 háromszög 12 és 13 egyenesének egy-egy pontjára illeszkedik.



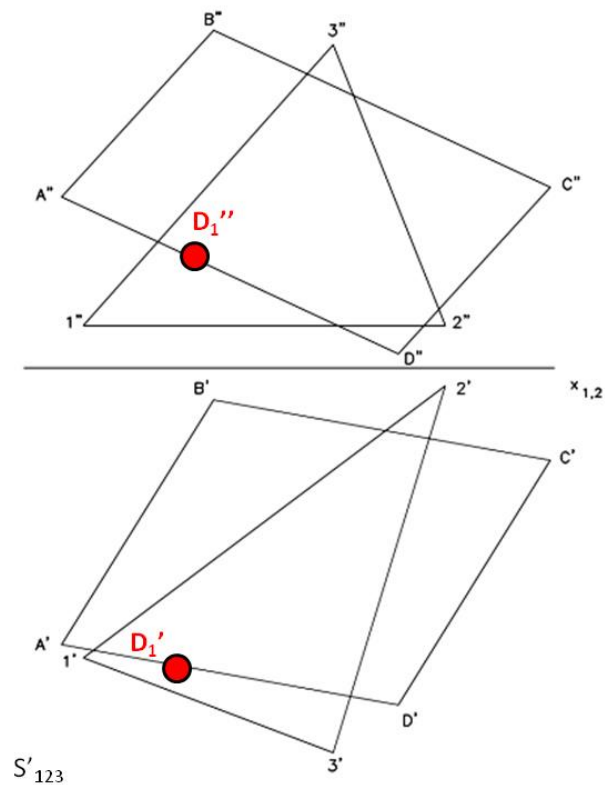
2.26. ábra. Fedőegyenes módszer alkalmazásának 2.lépése (Forrás: Saját ábra)

Az  $AD'$  és az  $s'$  már szétválnak, nem esik egybe, így az első képen a két egyenes metszeteként megkapjuk a dőféspont első képét  $D_1'$ .



2.27. ábra. Fedőegyenes módszer alkalmazásának 3.lépése (Forrás: Saját ábra)

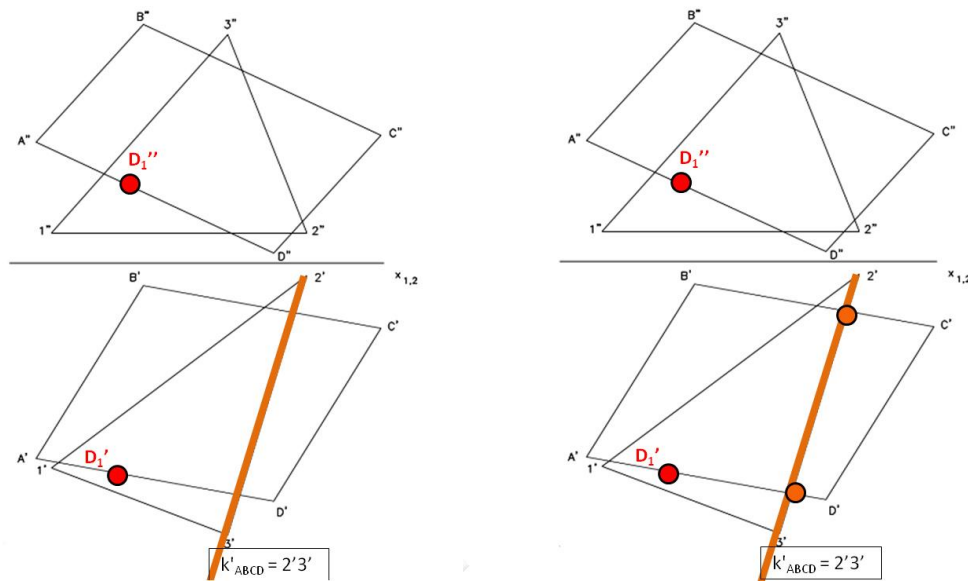
A dőféspont második képét rendezővel keressük. Így megszerkesztettünk egy dőféspont két képét.



2.28. ábra. Első dőféspont két képe (Forrás: Saját ábra)

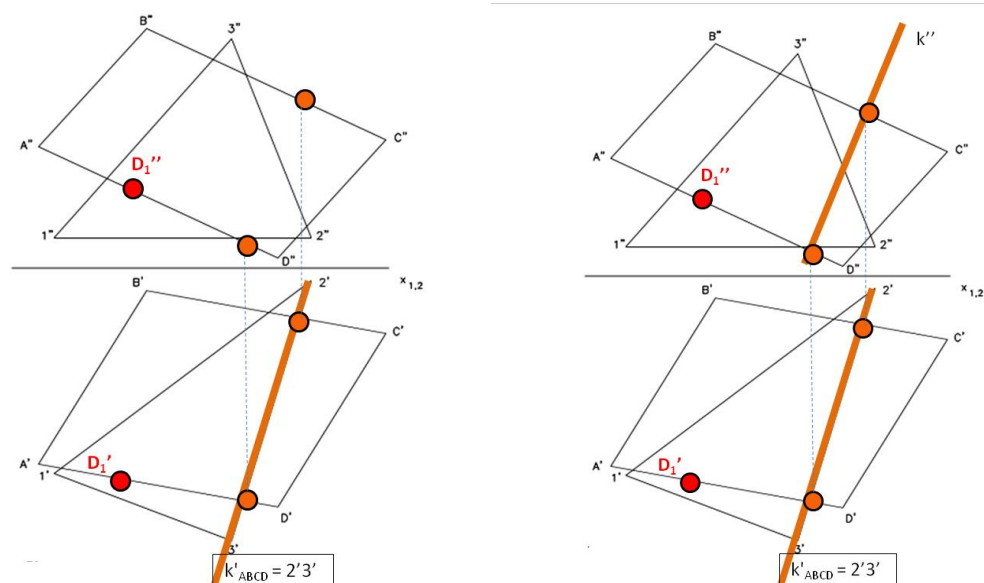
A továbbiakban még egy dőfspontot megszerkeszték. Tetszőleges választom az 123 háromszög síkjának 23 egyenesét. Vizsgálom, hogy ez az egyenes hol dőfi a másik, ABCD síkot. Most tetszőlegesen első fedőegyenesek módszerét választom, a 23' első képéből indulok ki.

A  $k$  egyenes az ABCD négyszög síkjára illesztett olyan egyenes, melynek első képe egybe esik a 23 egyenes első képével.  $23' = k'$ .



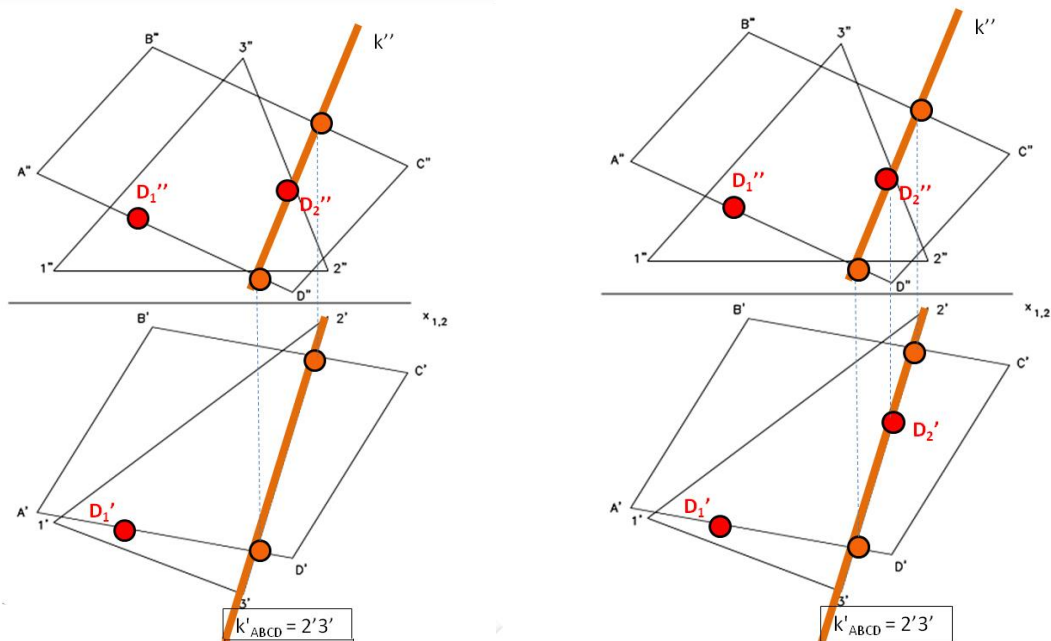
2.29 ábra. Fedőegyenes módszer alkalmazásának 1.lépése (Forrás: Saját ábra)

Megszerkesztem az  $k''$ -t, kihasználva, hogy a  $k$  egyenes az ABCD négyszög AD és BC egyenesének egy-egy pontjára illeszkedik.



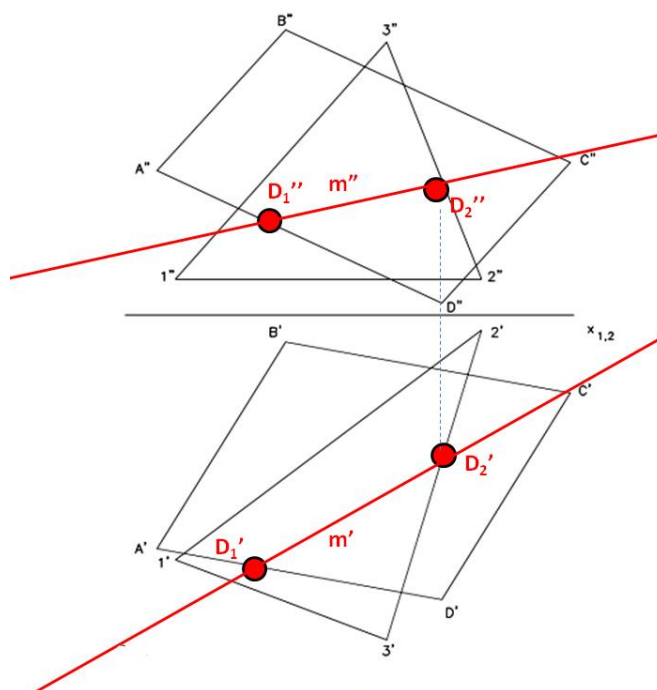
2.30. ábra. Fedőegyenes módszer alkalmazásának 2.lépése (Forrás: Saját ábra)

A  $23''$  és az  $k''$  már szétváltak, nem esik egybe, így a második képen a két egyenes metszeteként megkapjuk a második dőfspont második képét  $D_2''$ . A dőfspont második képét rendezővel keressük. Így megszerkesztettünk egy dőfspont két képét.



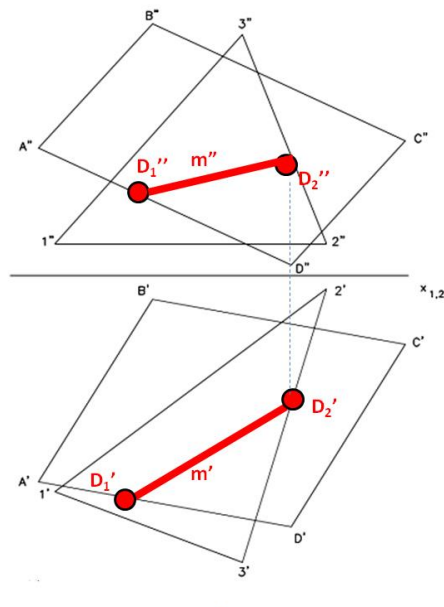
2.31. ábra. Fedőegyenes módszer alkalmazásának 3.lépése (Forrás: saját ábra)

Megszerkesztettünk két dőfspontot, mindkét képével. A két sík metszetét a két dőfspont egyértelműen meghatározza. A két sík metszetének első képét, a metszetvonal második képét a dőfspontok első képére illesztett egyenes adja.

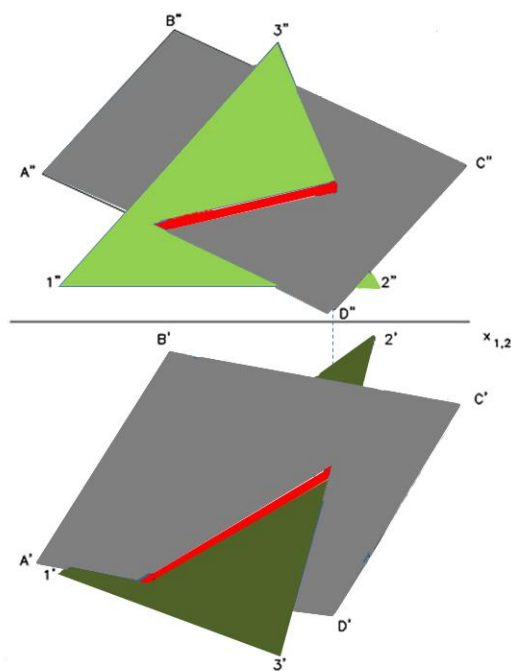


2.32. ábra. Második dőfspont két képe (Forrás: saját ábra)

Mivel nekünk két sokszöglap metszetét kell meghatározni (nem végtelen síkok metszetét), ezért a megszerkesztett metszetszakra csak arra a szakaszára van szükségünk, mely mindkét síkidom közös része. Ez lesz a két síkidom metszete.



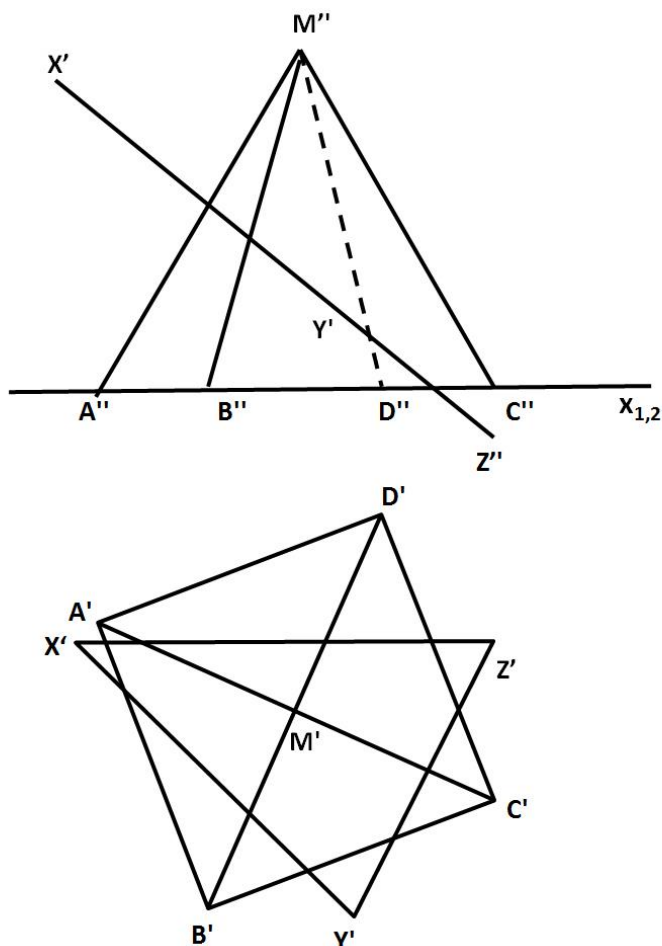
2.33. ábra. Két sík metszete  
(Forrás: Saját ábra)



2.34. ábra. Két sík metszete láthatósággal  
(Forrás: Saját ábra)

### 3. TEST SÍKMETSZETE (Dr. Perge Erika)

**1. Feladat:** Határozzuk meg az ABCD négyzet alapú gúlának az XYZ síklappal történő metszetét!



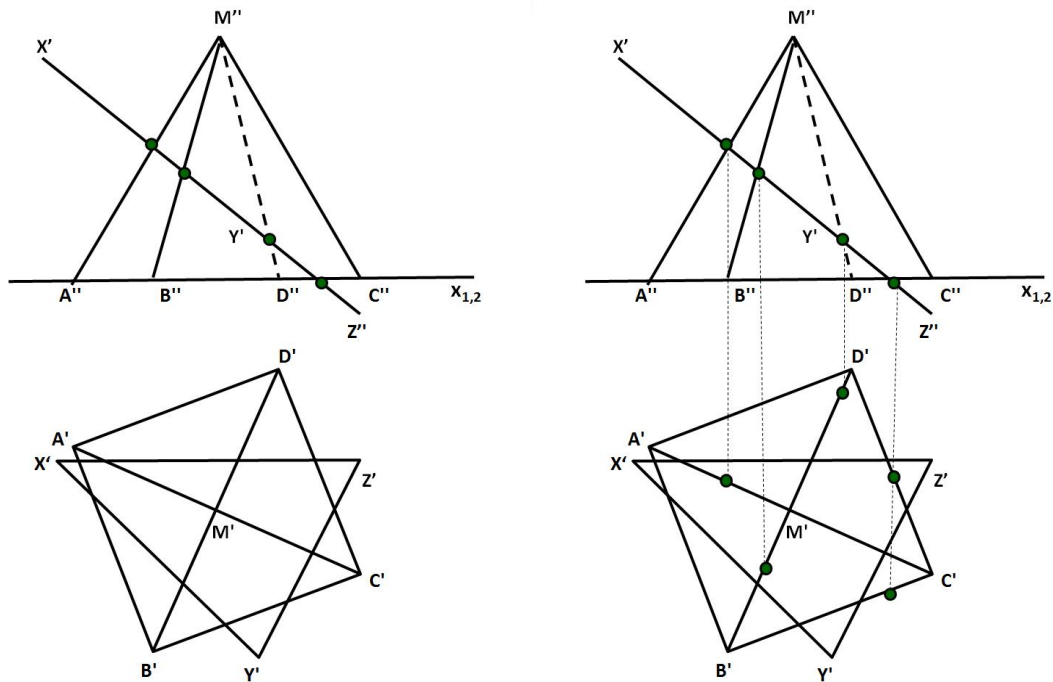
3.1. ábra. Négyzet alapú gúla metszete vetítősíkkal (Forrás: Saját ábra)

#### Feladat megoldása:

Egy síklapú testet egy síkkal elmetszve a metszet egy záródó törött vonal lesz. Jelen esetben az XYZ egy síklap, ezért a törött vonalnak csak arra a részére van szükségünk, mely a háromszöglapon belül helyezkedik el. Ezt keressük.

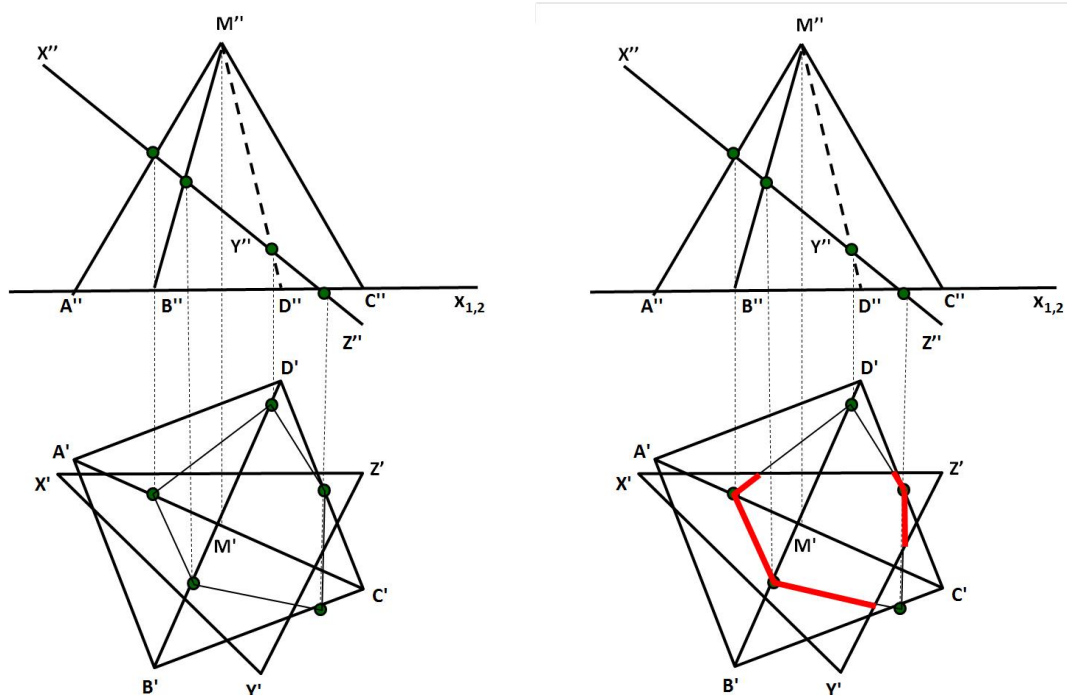
Jelen esetben az XYZ háromszöglap második vetítősík, ezért második képe egy szakasz. A metszetvonal meghatározásához induljunk ki a második képből. Keressük, hogy a gúla MA, MB, MC, MD AB, BC, CD, DA élei hol metszik a síkot. A gúla éleinek a vetítősíkkal alkotott metszéspontjai a második képen leolvashatók. Ezen dőféspontok első képei rendezővel meghatározhatók a megfelelő élek első képeire illeszkedve (3.2.ábra). A második képen a síkot metszi a gúla alaplapja, ez két különböző dőféspont második képe,

ezért ebből indított rendezőn az első képen keressük a két dőféspont első képeit az ABCD alaplap CD és CB élein.



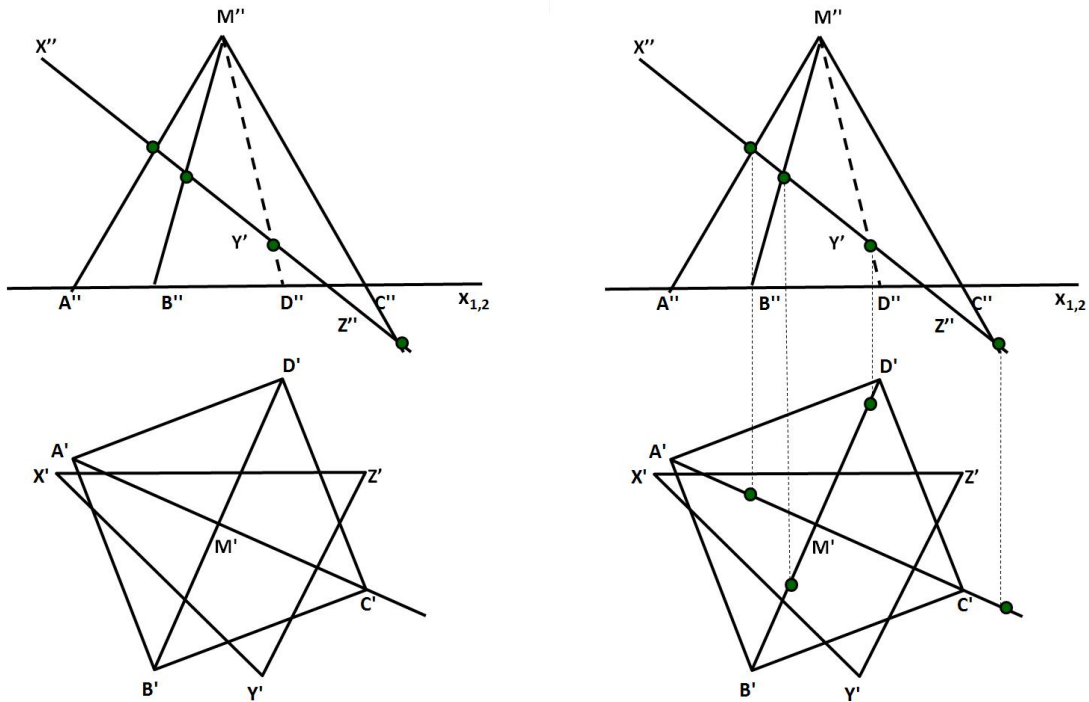
3.2. ábra. Metsztvonal meghatározása 1.lépés (Forrás: Saját ábra)

A kapott dőféspontok első képeit összekötve kapjuk a metsztvonalat (3.3. ábra). A kapott törött vonalnak csak arra a részére van szükségünk, mely a háromszöglapon belül helyezkedik el.

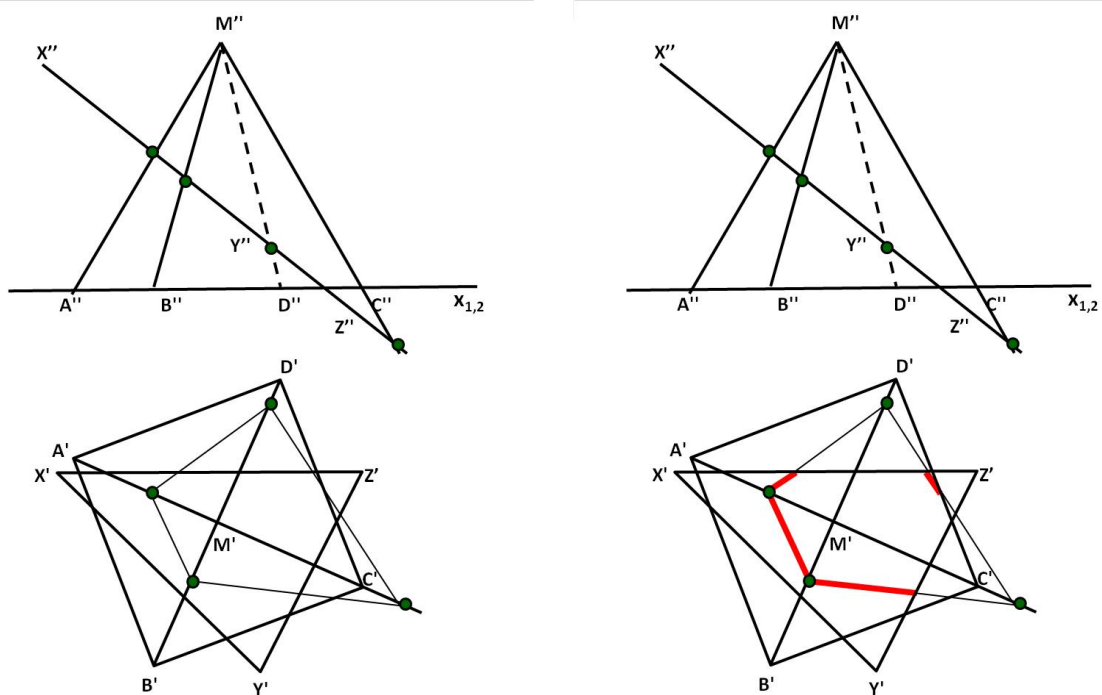


3.3. ábra. Négyzet alapú gúla metszete vetítősíkkal (Forrás: Saját ábra)

Metszetvonal meghatározásának másik módja: Vizsgáljuk a második képen, hol metszi a gúla éle a síkot. A gúla  $MA''$ ,  $MB''$ ,  $MD''$  éle metszi az  $XYZ''$ .  $MC''$  nem metszi a háromszöglatot. Mindkettőt ( $MC''$  és  $XYZ''$ ) meghosszabbítva keressük a metszéspontot. Ez a dőléspont második képe. Rendezővel keressük a dőléspont első képét  $MC'$  meghosszabbításán (3.4. ábra). A dőléspontok összekötésével kapjuk a metszetvonalat.

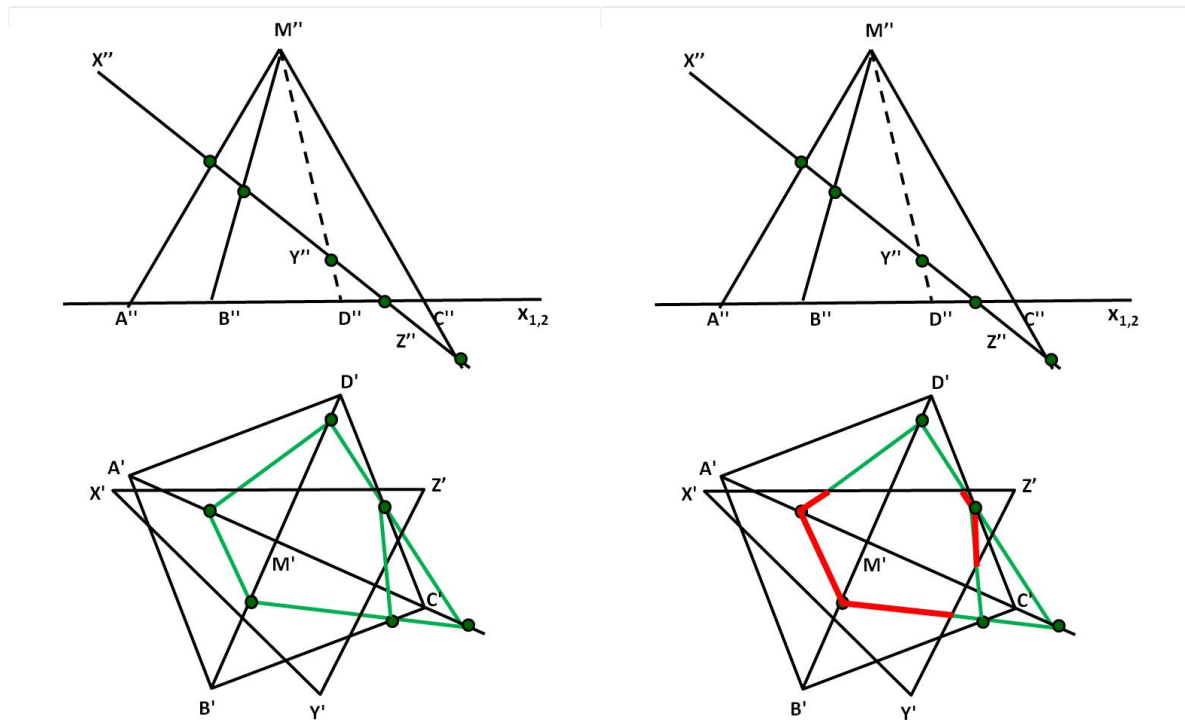


3.4. ábra. Metszetvonal meghatározása 1.lépés (Forrás: Saját ábra)



3.5. ábra. Metszetvonal meghatározása 2.lépés (Forrás: Saját ábra)

Mindkét módszerrel megkapjuk a test teljes síkkal történő metszete által keletkezett metszenvonalat. Mivel mi csak egy háromszöglappal metszettük a gúlát, ezért a kapott törött vonalnak csak arra a részére van szükségünk, mely a háromszöglapon belül helyezkedik el.



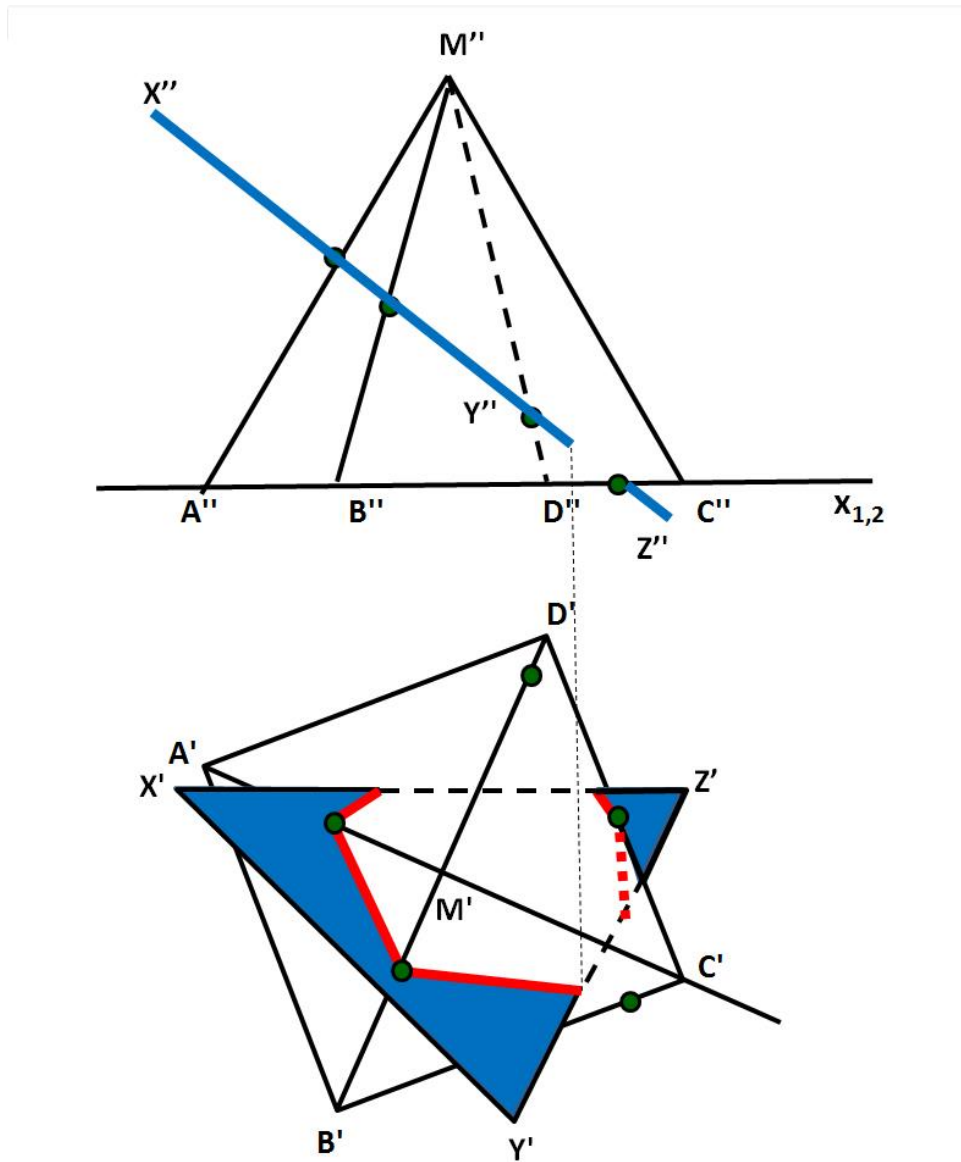
3.6. ábra. Metszenvonal meghatározása (Forrás: Saját ábra)

Láthatóság vizsgálata:

Jelen esetben a második kép nem szemléletes.

első kép láthatóságát vizsgáljuk. Előfordulhat, hogy a kapott metszenvonal nem minden része látható. Az első kép láthatóságát a második képe vizsgálatával kezdjük. Megnézzük, hogy a második képen mio van az  $X_{1,2}$  tengelytől a legtávolabb, a  $z$  ábrán a legmagasabban, azzaz a térben legmagasabban.  $M''$  van legfelül, így az ebből induló élek biztosan láthatóak.

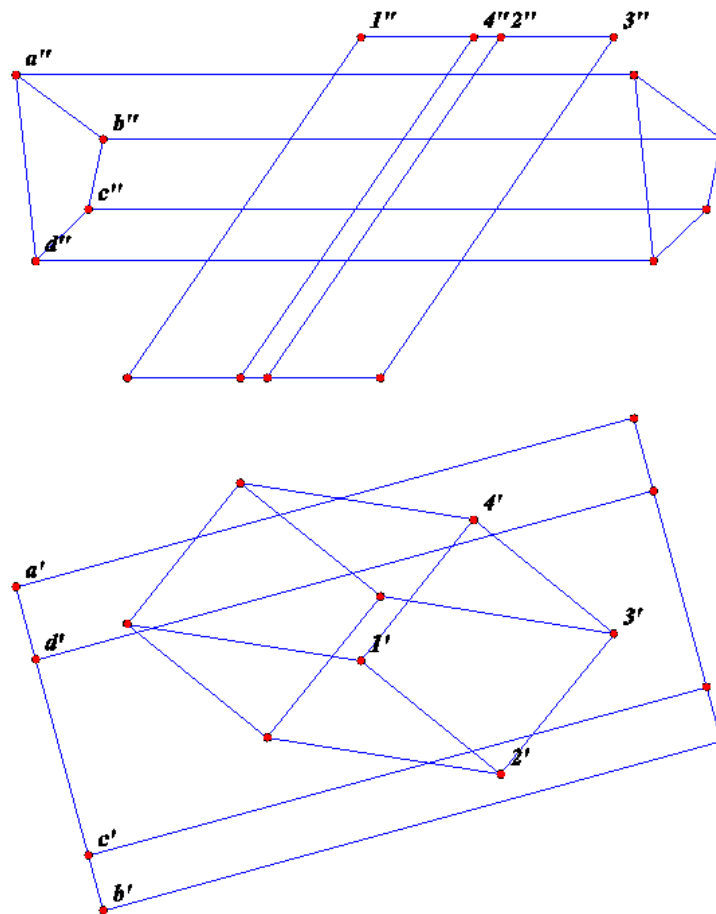
Az  $MA'$ ,  $MB'$ ,  $MC'$  és  $MD'$  látható vagy végig vagy a metszenvonalig. A metszenvonalban az élek láthatósága megváltozik. Az alakzatok külső körvonala mindig látszik.



3.7. ábra. Négyzet alapú gúla metszete vetítősíkkal (Forrás: Saját ábra)

## 4. SÍKLAPÚ TESTEK ÁTHATÁSA (NAGYNÉ DR. HABIL. KONDOR RITA)

**1. Feladat:** Adott egy első képsíkon álló ferde hasáb és egy első főegyenes élű hasáb. Szerkesszük meg a két hasáb áthatását (Nagy-Kondor, 2017) (4.1. ábra)!



4.1. ábra: Hasábok áthatása – feladat (Forrás: saját ábra)

### Feladat megoldása:

A K1 képsíkon álló ferde hasáb oldalélei: 1, 2, 3 és 4 egyenesek. A K1 képsíkkal párhuzamos oldalélű (főegyenes élű) hasáb oldalélei: a, b, c és d egyenesek.

Képsíktranszformációval szerkesszük meg a hasábok 4. képét!

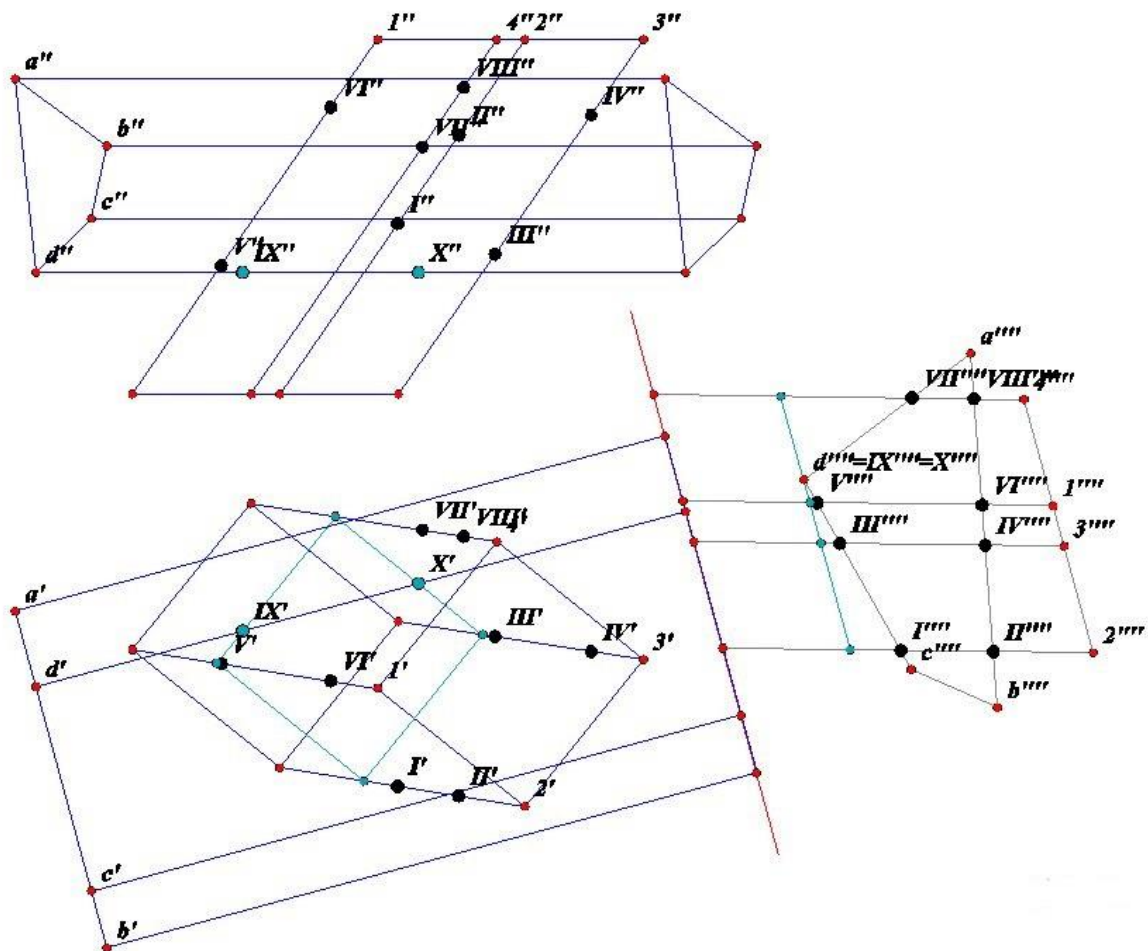
Az abcd hasáb oldallapjai egy képsíktranszformáció után vetítő helyzetűek lesznek, ezért a 4. képen azonnal láthatók az 1234 hasáb élével való metszéspontok. A képsíktranszformáció  $x_{1,4}$  tengelye merőleges a főegyenes élű hasáb oldaléleinek első képeire (4.2. ábra).

A 4. képen jól látható – ahol a hasáb vetítő helyzetű –, hogy jelen esetben széteső áthatás keletkezik (az áthatás vonala két térbeli sokszögből áll), továbbá látható e vetületen az is, hogy a K1 képsíkkal párhuzamos oldalélű hasáb élei közül csak a d oldalél vesz részt az áthatásban (4.2. ábra).

Az 1234 oldalélű hasáb minden oldalélén két metszéspont keletkezik, melyeket a 4.2. ábrán I''', II''', III''', IV''', V''', VI''', VII''', VIII''' pontokkal jelöltünk. Rendező segítségével szerkesszük meg e pontok első, majd második képeit!

A hasáb d éle metszi a másik hasáb lapjait; ezzel két újabb áthatási pont keletkezik (4.2. ábra): a IX és a X pontok.

A IX és X pontok megszerkesztéséhez egy segédsíkot használunk. E sík tartalmazza a d oldalélet, továbbá párhuzamos az 1234 hasáb alaplapjával. E segédsíkkal képzett síkmetszet és a d' egyenes metszéspontjai az első képen az IX' és X' pontok. E pontok második képét rendezők segítségével szerkesztjük meg.



4.2. ábra: Hasábok áthatása 1. (Forrás: saját ábra)

### Pontok összekötése

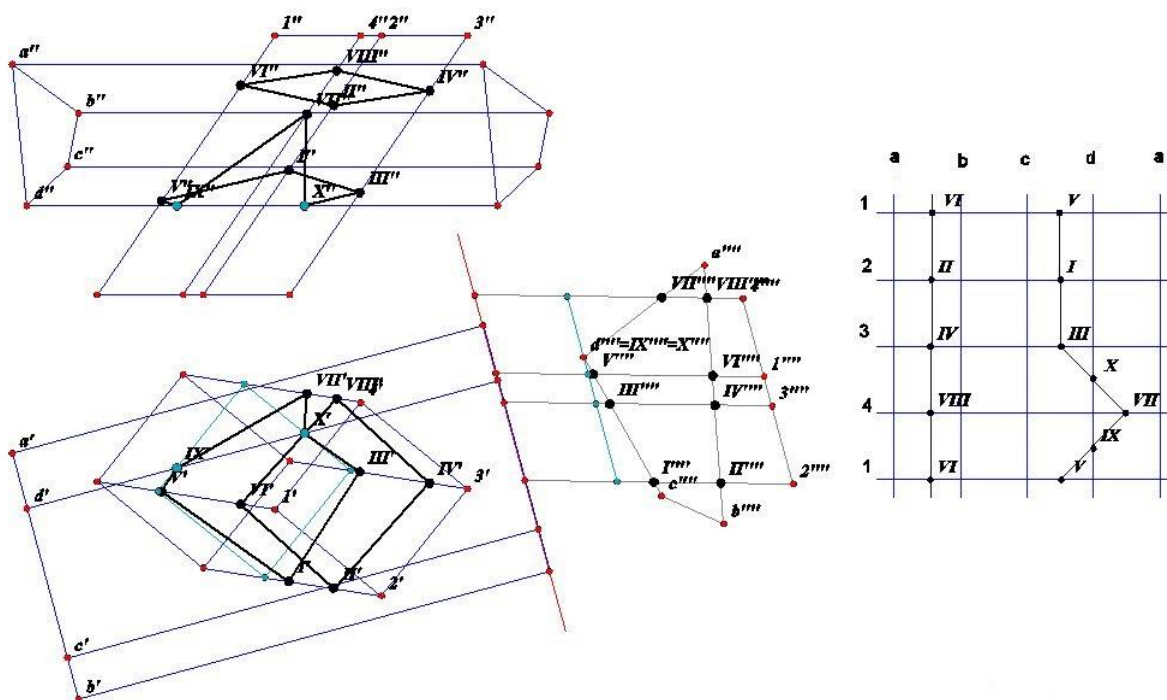
A pontok összekötési sorrendjéhez egy segédábrát készítünk (4.3. ábra), amelyben a vízszintes vonalak a K1-en álló hasáb, a függőleges vonalak a K1 képsíkkal párhuzamos oldalélű hasáb oldaléleit jelölik. Két szomszédos vonal között mindig egy-egy lapot jelenítünk meg.

- |                             |                               |
|-----------------------------|-------------------------------|
| I: 2 élén, c és d között,   | VI: 1 élén, a és b között,    |
| II: 2 élén, a és b között,  | VII: 4 élén, a és d között,   |
| III: 3 élén, c és d között, | VIII: 4 élén, a és b között,  |
| IV: 3 élén, a és b között,  | IX: d élén, 1 és 4 között,    |
| V: 1 élén, c és d között,   | X: d élén, 3 és 4 között van. |

Csak azok a pontok köthetőek össze, amelyek a segédábrán ugyanannak a kis négyzetnek az oldalain vannak. A kapott pontokat összekötve két térbeli sokszöget kapunk.

Ezek alapján az összekötés sorrendje:

VI – VIII – IV – II – VI és V – IX – VII – X – III – I – V.



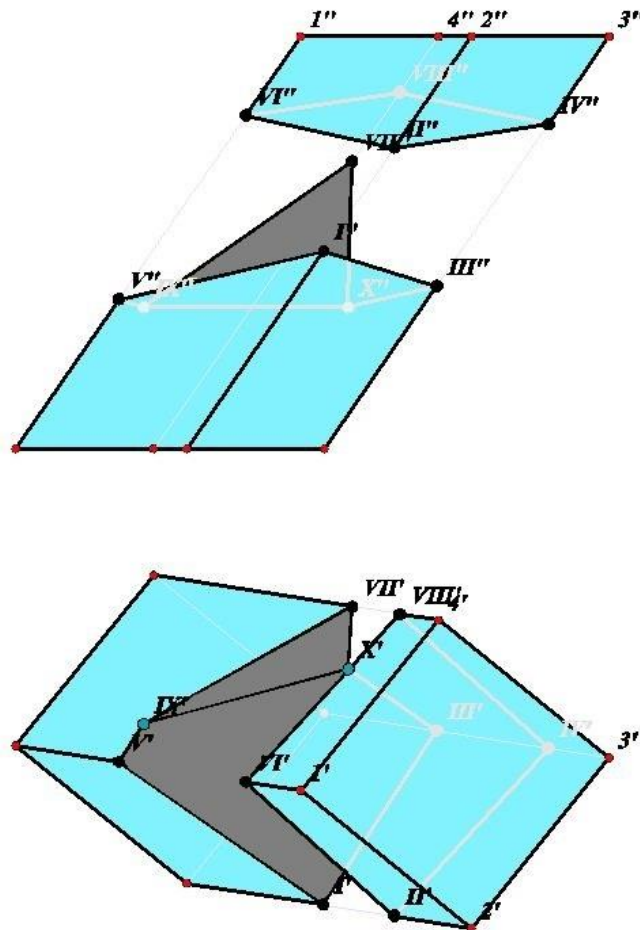
4.3. ábra: Hasábok áthatása 2. (Forrás: saját ábra)

### Láthatóság vizsgálata

A K1 képsíkon álló hasáb láthatóságát a másik hasáb (abcd oldalélű hasáb) eltávolítása után határozzuk meg (4.4. ábra). Az áthatás vonalából a K1 képsíkon álló hasáb látható lapjain (a második képen 12 és 23 lapok) keletkezett szakaszok egyértelműen látszanak. A IX''VII'' és

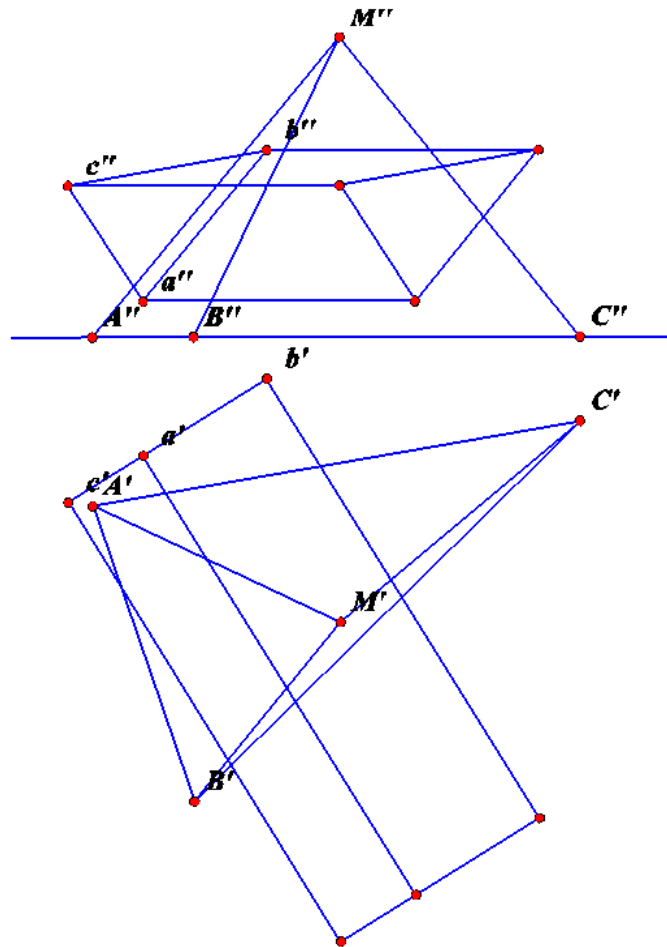
VII'X' szakaszok egy része is látható a hátsó lapokról (a második képen az 14 és 43 lapok), mert az áthatás során keletkező lyukon átlátunk.

Az első képen ugyanilyen okból látható az I'III' és VII'X' szakaszok egy része.



4.4. ábra: Hasábok áthatása 3. (Forrás: saját ábra)

**2. Feladat:** Szerkesszük meg az első képsíkon álló, háromszög alapú gúla és az első főegyenes élű, háromszög alapú hasáb áthatását (4.5. ábra)!



4.5. ábra: Hasáb és gúla áthatása – feladat (Forrás: saját ábra)

### Feladat megoldása:

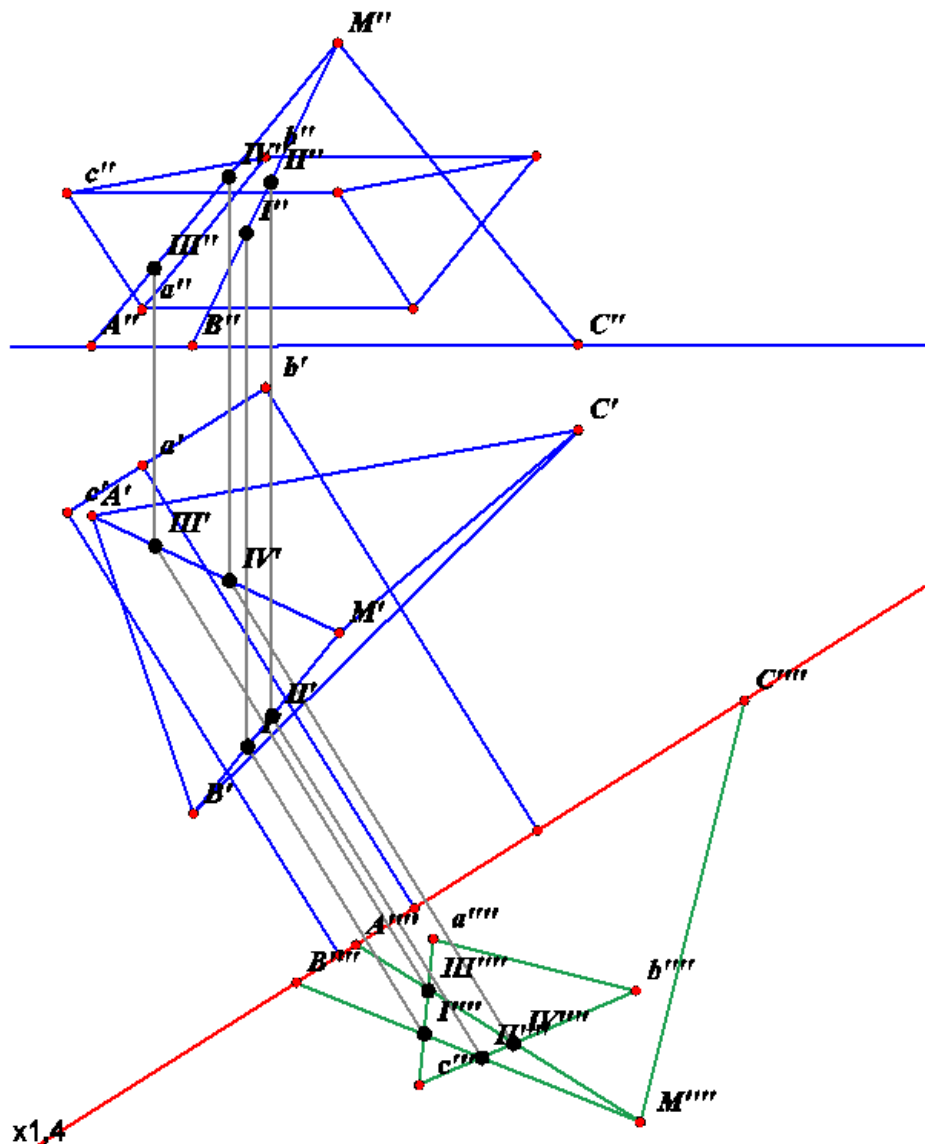
A gúla a K1 képsíkon áll. A K1 képsíkkal párhuzamos oldalélű (főegyenes élű) hasáb oldalélei: a, b, c egyenesek.

Képsíktranszformációval szerkesszük meg a hasáb és a gúla 4. képét!

A hasáb oldallapjai egy képsíktranszformáció után vetítő helyzetűek lesznek, ezért a 4. képen azonnal láthatók a gúla oldaléleivel való metszéspontok (4.6. ábra). A képsíktranszformáció  $x_{1,4}$  tengelye merőleges a hasáb oldaléleinek első képeire.

A gúla AM és BM oldalélén két metszéspont keletkezik, melyeket a 4.6. ábrán I''''', II''''', III'''''' és IV'''''' pontokkal jelöltünk. Rendezők segítségével szerkesszük meg e pontok első, majd második képeit! A gúla CM oldaléle nem vesz részt az áthatásban.

A 4. képen jól látható – ahol a hasáb vetítő helyzetű –, hogy jelen esetben bemetsző áthatás keletkezik (az áthatás vonala egy térbeli sokszögből áll), továbbá látható e vetületen az is, hogy a hasáb élei közül csak az a és b oldalél vesz részt az áthatásban (4.6. ábra).

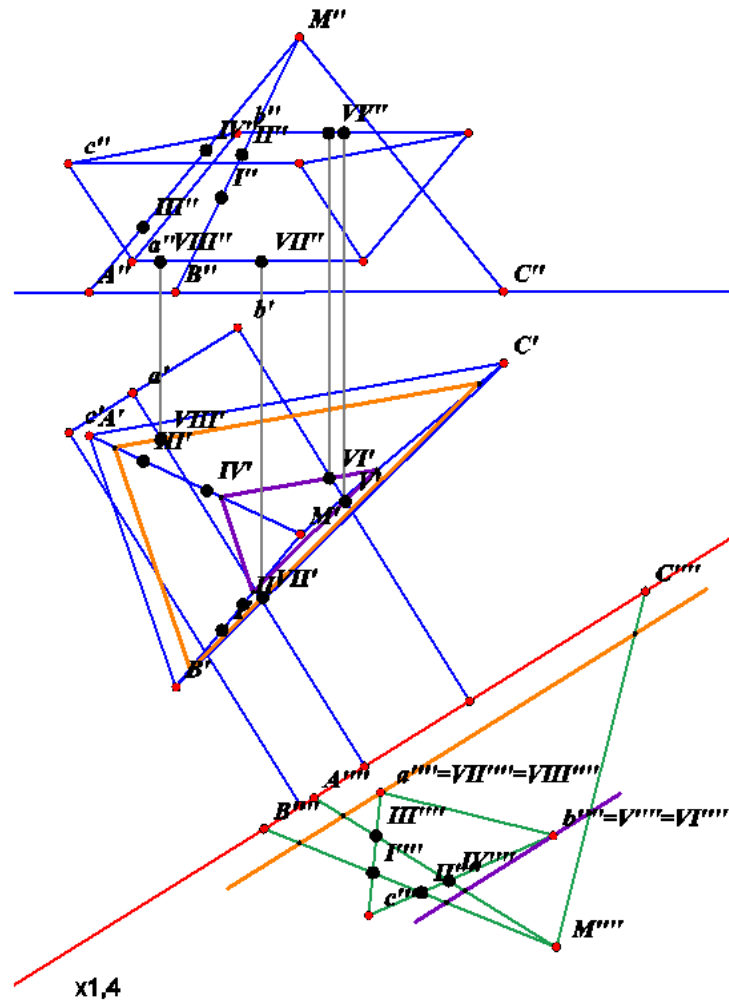


4.6. ábra: Hasáb és gúla áthatása 1. (Forrás: saját ábra)

A hasáb a és b éle metszi a gúla lapjait; ezzel két-két újabb áthatási pont keletkezik (4.7. és 4.8. ábrák): V, VI, VII és VIII pontok.

Az V, VI, VII és VIII pontok megszerkesztéséhez két segédsíkot használunk. E síkok tartalmazzák az a, illetve a b oldalélet, továbbá párhuzamosak a gúla alaplapjával. E segédsíkok metszik az első képen a b' illetve az a' egyeneseket az V', VI', VII' és VIII' pontokban (4.7. ábra).

E pontok második képét rendezők segítségével szerkesztjük meg.



4.7. ábra: Hasáb és gúla áthatása 2. (Forrás: saját ábra)

### Pontok összekötése

Az így kapott pontok összekötési sorrendjéhez egy segédábrát készítünk (4.8. ábra), melyben a vízszintes vonalak a gúla, a függőleges vonalak a hasáb oldaléleit jelölik.

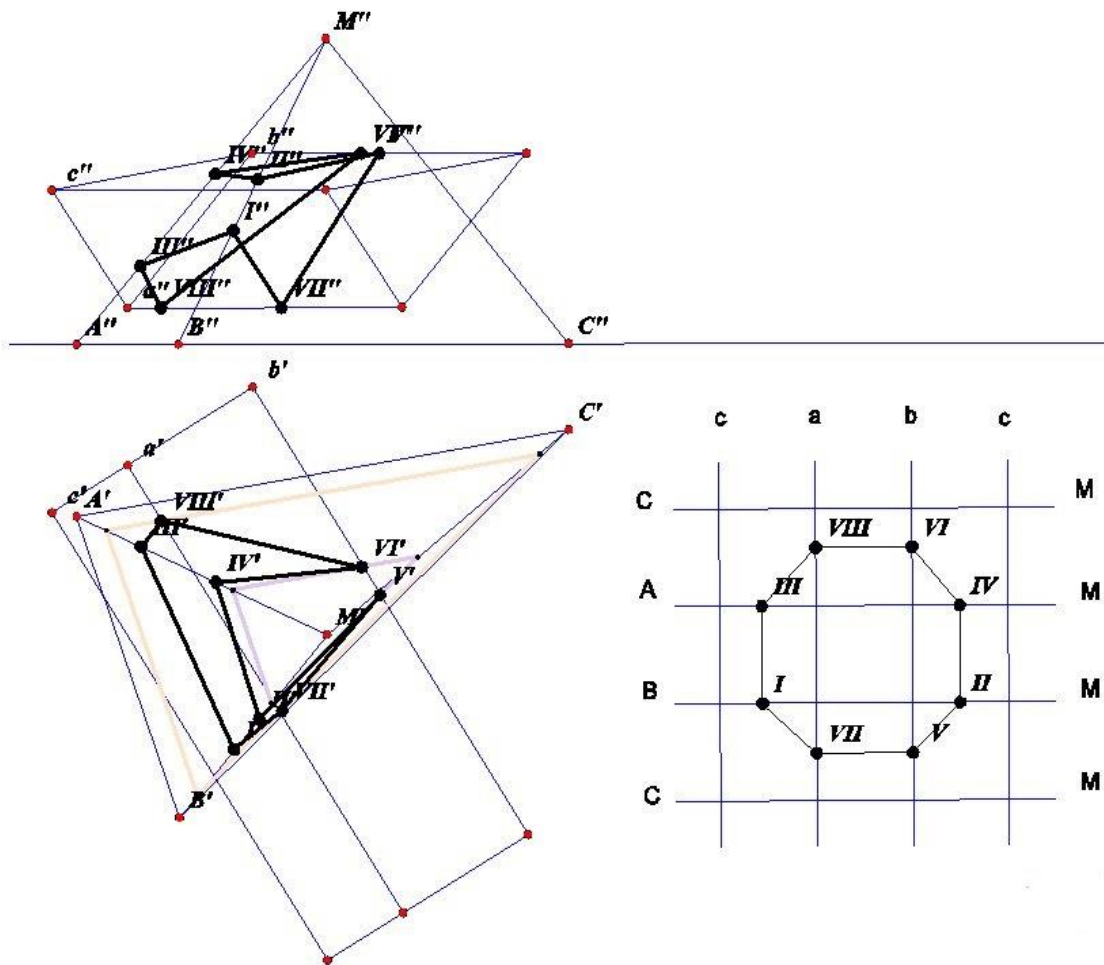
Két szomszédos vonal között egy-egy lapot jelenítünk meg.

- |                              |                                |
|------------------------------|--------------------------------|
| I: BM élen, c és a között,   | V: b élen, BM és CM között,    |
| II: BM élen, b és c között,  | VI: b élen, AM és CM között,   |
| III: AM élen, c és a között, | VII: a élen, BM és CM között,  |
| IV: AM élen, b és c között,  | VIII: a élen, AM és CM között. |

Csak azok a pontok köthetőek össze, amelyek a segédábrán ugyanannak a kis négyzetnek az oldalain vannak.

A kapott pontokat összekötve egy térbeli sokszöget kapunk.

Ezek alapján az összekötés sorrendje: I – III – VIII – VI – IV – II – V – VII – I.

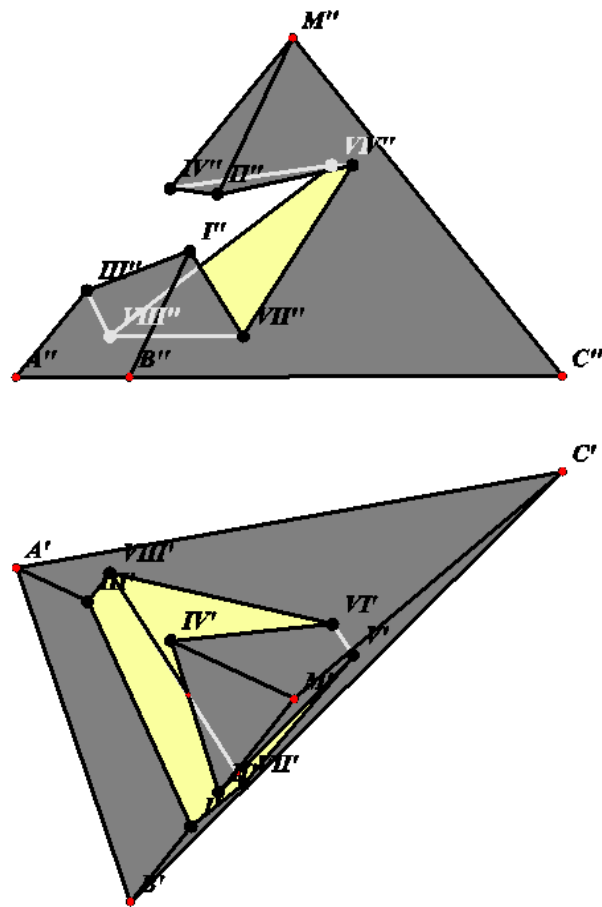


4.8. ábra: Hasáb és gúla áthatása 3. (Forrás: saját ábra)

### Láthatóság vizsgálata

A gúla láthatóságát a hasáb eltávolítása után határozzuk meg (4.9. ábra).

Az áthatás vonalából a gúla látható lapjain (a második képen ABM és BCM lapok) keletkezett szakaszok egyértelműen látszanak. A VIII''VI'' szakasz egy része is látható a hátsó lapról (a második képen az ACM lap), mert az áthatás során keletkező lyukon átlátunk.



4.9. ábra: Hasáb és gúla áthatása 4. (Forrás: saját ábra)

## FELHASZNÁLT IRODALOM

ÁRVAINÉ MOLNÁR Adrien, NAGYNÉ KONDOR Rita, PAPP Ildikó, PERGE Erika: *A térszemlélet fejlesztésének lehetőségei a műszaki képzés keretében*, BME Tanárképző Központ, 2015. [www.tankonyvtar.hu](http://www.tankonyvtar.hu)

NAGY-KONDOR Rita: *Spatial ability: Measurement and development*. (In: Khine, M. S. (ed.): *Visual-Spatial Ability in STEM Education: Transforming Research into Practice*), Springer, Switzerland, 2017, pp. 35-58, ISBN 978-3-319-44384-3.

NAGY-KONDOR Rita: *Spatial ability of engineering students*, *Annales Mathematicae et Informaticae*, 34, 2007, pp. 113-122.

NAGYNÉ KONDOR Rita: *Mérnökhallgatók téri képességei fejlesztésének lehetőségei*, *Matematikát, Fizikát és Informatikát Oktatók 41. Országos Konferenciája*, 2017, pp. 1-7, ISBN 978-963-269-663-8.