

Egyetemi doktori (PhD) értekezés tézisei

**Matematikai problémamegoldó képességek és készségek fejlesztése
kooperatív tanulásszervezési technikákkal**

**Developing Mathematical Problem Solving Abilities and Skills With
Cooperative Teaching Techniques**

Barczy - Veres Krisztina

Témavezető: Dr. Ambrus András



DEBRECENI EGYETEM
Matematika- és Számítástudományok Doktori Iskola

Debrecen, 2016

1 Bevezetés

A magyar oktatásban a következő probléma egyre gyakrabban jelenik meg: a diákok egyre kevésbé önállóan a matematikai problémamegoldásban. Sok diák csak passzívan figyeli az új anyag bevezetését vagy egy mintafeladat megoldását, esetleg megpróbálják követni a magyarázatokat, de amikor önállóan kell megoldaniuk hasonló problémákat, a többségük elakad. Ebben a helyzetben a megfelelő tanítási módszer kiválasztása nem mindig egyszerű. Az értekezés egy olyan kísérletet mutat be, amit egy középiskolai osztályban végeztük el és aminek a segítségével megpróbáltuk a matematikai problémamegoldás oktatását színesíteni.

2 Kutatási kérdések

1. Milyen hatással van a kooperatív technikák rendszeres használata *a)* középiskolai tanulók matematikai problémamegoldó képességére? *b)* a tanulók matematikához való hozzáállására? *c)* a tanulók kapcsolatára és az egymáshoz való hozzáállására? **2.** Milyen hatással van a nyílt problémák használata a tanulók problémamegoldó képességére? **3.** Milyen hatással vannak a kooperatív technikák a munka memóriára? **4.** Milyen hatással vannak a nyílt problémák a munka memóriára? **5.** Milyen hatással van a kooperatív technikák és a nyílt problémák együttes használata a tanulók problémamegoldó képességeire?

3 Elméleti háttér

3.1 Problémamegoldás

3.1.1 Problémák

A *probléma* fogalmát sokféleképpen definiálják. Néhány meghatározás szerint a probléma egy olyan feladat, ahol adott néhány adat és néhány feltétel, amik alapján meg kell találni a megoldást. A megoldáshoz vezető utat különböző akadályok nehezítik, amiket sokszor nehéz észrevenni. Egy másik definíció szerint a *probléma* egy olyan szituáció, amiben egy meghatározott célt akarunk elérni de a cél eléréséhez vezető út gyakran rejtett. Pólya meghatározása szerint a probléma azt jelenti, hogy eszközöket próbálunk keresni, melyek segítségével elérhetünk egy világosan megfogalmazott, de nem mindig könnyen elérhető célt. Az előzőekből világosan látszik, hogy a probléma igen tág fogalom. A meghatározások azonban megegyeznek abban, hogy problémamegoldás esetén tudjuk, hogy miből indulunk ki és mit szeretnénk elérni, de a "HOGYAN" nem ismert a problémamegoldó számára.

Probléma típusok

A problémákat különböző nézőpontok szerint csoportosítják.

- Valódi problémák, Realisztikus problémák, Konkrét problémák, Indirekt problémák, Absztrakt problémák;
- Jól struktúrált, Mérsékeltlen struktúrált, Rosszul struktúrált problémák;
- Gyakorlás, Szöveges probléma, Fejtörők, Sejtés bizonyítása, Valódi probléma, Probléma szituáció;
- Tudásmentes, Tudással teli problémák;
- Meghatározó probléma, Bizonyító probléma;
- Nyílt problémák, Zárt problémák;

Nyílt problémák

Egy probléma zárt, ha a kezdő szituáció és a cél szituáció is világosan megfogalmazott. Ha az előbbieket közül legalább az egyik nem világos, vagyis nyitott, akkor nyílt problémáról beszélünk.

A nyílt matematikai problémák használatának legnagyobb előnye az, hogy a különböző képességű tanulóknak lehetőséget ad arra, hogy sikerélményük legyen, valamint lehetővé teszi, hogy a tanulók saját tempójukban haladjanak a problémamegoldással. Ezenkívül, mivel több megoldással rendelkeznek, jó alapot adnak matematikai vitákhoz.

3.1.2 Problémák megoldása

Problémamegoldó modellek

- Wallas modellje: 1) Előkészítés, 2) Lappangás, 3) Megvilágosodás, 4) Igazolás.
- Dewey modellje: 1) A problémaszituáció meghatározása, 2) A probléma meghatározása, 3) Elemzés, tervezés, 4) Végrehajtás, 5) Az eredmény alapján a problémaszituáció megoldása, 6) Értékelés, visszatekintés: az eredmények megfelelnek a feltételeknek, és előretekintés: az eredmények és a módszerek általánosítása.
- Pólya modellje: 1) A feladat megértése, 2) Megoldási terv készítése, 3) A terv végrehajtása, 4) A megoldás vizsgálata.
- Schoenfeld modellje: 1) A feladat elemzése és megértése, 2) Megoldási terv vázlata, 3) Megoldás keresése nehezebb feladatoknál, 4) A megoldás felülvizsgálata.
- Mason modellje: 1) Belépés, 2) Támadás, 3) Reflexió.

Problémamegoldási stratégiák: 1) *Célirányú gondolkodás*, 2) *Fordított irányú gondolkodás*, 3) *Szisztematikus próbálgatás*

Heurisztikus elvek: *Analógia, A probléma visszavezetése egy ismert problémára, Invariancia elve, Esetmegkülönböztetés, Optimalitás elve, Speciális esetek vizsgálata, Szimmetria-elv, Transzformáció-elv*

3.1.3 Problémamegoldó készségek tanítása és fejlesztése

Ahhoz, hogy sikeres problémamegoldókká váljanak, a tanulóknak gondolkodási módszereket kell elsajátítaniuk és egy "gondolkodási eszköztárat" kell kialakítaniuk, ami különböző problémamegoldási stratégiákat tartalmaz. Számtalan gyakorló probléma megoldása reflexió nélkül ehhez kevés. Ez a fejezet a matematikai problémamegoldást a következő szempontok alapján tárgyalja: *Matematikai gondolkodás, Tanulás elméletek, Transzfer, Metakogníció, Érzelmi tényezők.*

3.1.4 Problémaalkotás

Problémamegoldás tanítása során jó ötlet, ha a tanulóknak megengedjük, hogy tapasztalatokat szerezzenek az adott problémáról. Ezenkívül a probléma megoldásán túl bátorítsuk őket új problémák alkotására is, hiszen új problémák megfogalmazása fontos szerepet játszik a problémamegoldásban. Ebben a fejezetben meglévő problémák alapján új matematikai problémák alkotásának módszereit vitatjuk meg 1) *Asszociáció*, 2) *Analógia*, 3) *Általánosítás* vagy 4) *Ellentmondás* felhasználásával.

3.1.5 Irányító kérdések

Ebben a fejezetben az irányító kérdések alkalmazását tárgyaljuk. Reinhart idézete szerint soha ne mondjunk ki olyat, amit a tanulók is meg tudnak fogalmazni. Ehhez a tanároknak azt fejleszteni, hogy hogyan tesznek fel kérdéseket az órán. A jó kérdések azt sugallják a tanulóknak, hogy az ő részvételük az órán lényeges. Amikor közölni akarunk valamit a diákokkal, gondoljuk át, hogy hogyan tudnánk kérdezni inkább.

3.1.6 Tapasztalt és kezdő problémamegoldók

Mivel a kutatás egyik célja az volt, hogy nemcsak a tehetséges problémamegoldókat, hanem a kevésbé tehetséges tanulókat is elérjük, ez a fejezet a tapasztalt és kezdő problémamegoldók közötti különbségeket vizsgálja.

3.2 Memória struktúrák

Ebben a fejezetben Baddeley memória struktúra modelljét mutatjuk be, amelyben a **munkamemória** és a **hosszútávú memória** fontos szerepet játszanak, ezért ezeket az összetevőket részletesen tárgyaljuk.

3.2.1 Munkamemória (WM)

A munkamemória szerepe jelentős a problémamegoldásban. Kapacitása azonban limitált, a legtöbb ember 7 ± 2 információ egységet tud munkamemóriájában tartani, rövid, mindössze 18 - 30 másodpercig. Tanulás során a munkamemóriát használjuk az új ismeretek feldolgozására.

3.2.2 Hosszútávú memória (LTM)

A hosszútávú memória sémák formájában tárolja az információt. A sémák az információ absztrakt, struktúrált és dinamikus reprezentációi.

3.2.3 A munkamemória határainak átlépése: Kognitív terhelés elmélet (CLT)

A kognitív terhelés tanulás közben a munkamemória terheltségét jelenti. **A kognitív terhelés fajtái:** 1) Belső (lényegi) kognitív terhelés, 2) Külső kognitív terhelés, 3) Generatív kognitív terhelés. Az aktuálisan a munkamemóriára helyezett kognitív terhelés az előbbi három terhelésből tevődik össze. Tanítás tervezésekor az esetleges kognitív terhelést figyelembe kell venni. A sikeres problémamegoldás egy lényeges aspektusa a kognitív terhelés csökkentése, amit *1) Nyílt problémák alkalmazásával* vagy *2) Kooperatív tanítási technikák alkalmazásával* érhetünk el.

3.3 Kooperatív tanítás és tanulás

Mindennapi életünket és minden közösséget kompetitív és kooperatív szituációk veszik körbe. Kompetitív szituációról akkor beszélünk, ha a rendelkezésre álló források limitáltak, ezért egy sorrendet kell meghatározni. A kooperatív szituációkban azonban a források korlátlanul rendelkezésre állnak és egyenlően szétoszthatók.

3.3.1 Mi a kooperatív tanulás?

A kooperatív módszerek egy olyan tanítás-tanulási formát jelentenek, ahol a résztvevők együtt dolgoznak egy közös cél elérése érdekében. Ez a cél gyakran egy probléma megoldása. A munka során a csoport tagjai egymásra vannak utalva és a csoport sikere az ő együttműködő képességüktől függ. Támogatniuk kell egymást, meg kell bízniuk egymásban és tisztelniük kell egymást, ha le akarják győzni az esetleges akadályokat.

3.3.2 Miért van szükség kooperativitásra az osztályteremben?

A mai világban sok változás történik, ami hatással lesz a tanulók jövőjére és amiket oktatási szempontból figyelembe kell venni. Ilyenek például a **szociális környezet változásai**, a **gazdasági környezet változásai** és egyre nagyobb szükség van a **különbségek elfogadására**.

3.3.3 A kooperatív tanulás nehézségei

Mint bármely más módszer esetén, a kooperatív tanítás-tanulás során is akadnak nehézségek. Ebben fejezetben a néhány problémát és a lehetséges megoldásokat vitatjuk meg. A lehetséges nehézségek: 1) A csoporttagok nem jönnek ki egymással, 2) Rendetlenkedő diákok, 3) Zaj, 4) A gyakorlati idő nem hatékony felhasználása, 5) Túl nagy különbség a "legjobb" és a "legrosszabb" tanulók között.

3.3.4 Kooperatív struktúrák

A kooperatív tanítás-tanulás egyik legfontosabb jellemzője, hogy megváltoztatjuk a HOGYANT, mivel a MIT nem tudjuk megváltoztatni. Ebben a fejezetben néhány, a matematika órán hatékonyan használható kooperatív struktúrát mutatunk be. A struktúrák jól hangzó, könnyen megjegyezhető neveket kaptak: *Ellenőrzés párban*, *Szakértői mozaik*, *Képtár látogatás*, *Gondolkodj - Oszd meg párban*, *Szóforgó*, *Feladatküldés*.

3.3.5 Tanári szerep a kooperatív tanulásban

Amikor kooperatív tanulási technikákat alkalmazunk nemcsak az osztályterem berendezése és a diákok szerepe, hanem a tanár feladatköre is megváltozik. Ismeretet közlő oktatóból olyan tanárrá válik, aki irányítja diákjait a tanítási - tanulási folyamatban. A tanár nem veszíti el vezető szerepét, továbbra is az ő feladata egy olyan környezet biztosítása, ahol hatékony munkát lehet végezni.

3.3.6 Csoportok

A csoportalkotásnak számos módja van. Az egyik legfontosabb elv az, hogy a csoportok 4 fősek legyenek. Ebben az esetben *senki nem érzi magát kilógónak, lehetőség van páros munkára és ideális ülésrend alakítható ki*.

3.3.7 Kooperatív tanítás Magyarországon

Magyarországon a kooperatív tanítás-tanulás Benda József munkájának köszönhetően jelent meg, aki úgy gondolta, hogy a kooperatív tanulás pozitív változást hozhat a magyar oktatásban. Javulnak a teljesítmények, a tanulók beilleszkedése könnyebbé válik, javul fejlődésük. Mindezek ellenére a kooperatív technikák alkalmazása még mindig ritka a magyar oktatásban, főleg középiskolai matematika órákon.

3.3.8 Kooperatív technikák a matematika oktatásban

Ebben a fejezetben további érveket sorolunk fel a kooperatív tanítási technikák matematika órán való használatára mellett.

4 Kutatási módszerek

4.1 Háttér információk

A kísérlet egy fejlesztő pedagógiai kísérlet volt. Kontroll csoportot nem használtunk, mivel amikor kooperatív tanítást és tanulást hasonlítottunk más tanítási módszerrel, túl sok tényező (az alanyok, az időtartam ... stb.) befolyásolhatja a különböző eredményességet.

Ez a fejezet bemutatja, hogy milyen **iskolában**, milyen **tanulókkal** végeztük a kísérletet és azt, hogy hogyan **gyűjtöttük az adatokat**.

5 Tanulási görbe

5.1 Az órák

5.1.1 12 óra - 5 probléma

A kísérlet első része során öt matematikai problémával dolgoztunk. A problémák témája illeszkedett a tananyaghoz és a matematika tantervhez, valamint a matematika különböző területeiről (algebra, geometria, számelmélet, kombinatorika) választottuk azokat. A problémák vagy eleve nyílt problémák voltak, vagy nyíltá lehetett őket tenni. A feladatok megvitatására tízenkét 45 perces órát használtunk, melyek fő célja a problémák minél részletesebb vizsgálata és lehetséges kiterjesztése volt. Mind a tízenkét órát kooperatív technikákkal terveztük.

Ebben a fejezetben bemutatjuk a kísérletben feldolgozott 5 problémát: 1) **Gyufás játék**, 2) **Számmissztika**, 3) **Területi vizsgálódás**, 4) **Még több gyöngy**, 5) **Prímek és tényezők**.

5.1.2 További órák

Bemutatjuk a tanév során felhasznált problémákat, melyeket szintén kooperatív technikákkal dolgoztunk fel. A problémák illeszkedtek a tananyaghoz, a tanév során két-három hetente dolgoztunk kooperatív módszerekkel.

6 A kísérlet

6.1 Elő-tesztek

Ebben a fejezetben azokat a tesztek mutatjuk be, amiket a tanulók a kísérlet első része előtt, a tanév elején tölthettek ki. A fejezetben bemutatjuk és megvitatjuk a **matematikai elő teszt** és a **matematikai hozzáállást mérő teszt** eredményeit.

6.2 Az órák

A fejezet a kísérlet első részét képező 5 probléma részletes leírását és a feldolgozásukra használt órák óratervét tartalmazza. A részletes óraterveken kívül leírjuk, hogy a tanulók hogyan boldogultak az adott probléma megoldásával. Bemutatjuk, hogy mit tartottak nehéznek, milyen ötletekkel álltak elő a probléma megoldására és kiterjesztésére. A leírások után tanulói munkákból válogattunk néhány mintát.

6.3 Utó-teszt

Ez a fejezet azt a **matematikai utó-tesztet** tartalmazza, amit a diákok a kísérlet első része után tölthettek ki. Az eredményeket és azok értelmezését szintén bemutatjuk.

6.4 Késleltetett teszt

A késleltetett matematika teszt kérdései megegyeztek az utó-teszt kérdéseivel. Ebben a fejezetben a késleltetett teszt eredményeit mutatjuk be és a három matematikai teszt eredményét hasonlítjuk össze.

6.5 Év végi attitűd tesztek

Ebben a fejezetben a tanév végén kitöltött teszteket és azok eredményeit mutatjuk be, valamint összehasonlítjuk ezeket az eredményeket a tanév elején kitöltött tesztek eredményeivel. A vizsgált tesztek: a matematikához való hozzáállást mérő teszt és a kooperatív tanulásra vonatkozó kérdőív.

6.6 Más nézőpontok

A kísérlet során összegyűjtött adatokat felhasználtuk ahhoz, hogy a tanulók nehézségeit és viselkedését más szempontokból is vizsgáljuk.

6.6.1 Nyílt problémák

Mivel a kísérlet első részében feldolgozott minden probléma és a második részében használt problémák némelyike is nyílt probléma volt, megállapíthatjuk, hogy a nyílt problémák használata előnyös a matematikai problémamegoldásban.

6.6.2 Irányító kérdések

Az irányító kérdések használata a matematika oktatásban szintén hatásosnak bizonyult, függetlenül attól, hogy új anyag bevezetésénél vagy problémamegoldás oktatásakor használtuk azokat. Kooperatív technikákkal tervezett órákon pedig a tanulóknak lehetősége nyílt arra, hogy jobban megértsék és megjegyezzék a kérdések típusát és önállóan is tudjanak majd kérdezni akár saját maguktól is, mikor problémákat oldanak meg.

6.6.3 Tehetséges és átlagos képességű diákok

A kísérlet során a következő két kérdést szintén meg tudtuk vizsgálni: 1) Hogyan oldanak meg tehetséges illetve átlagos képességű tanulók matematikai problémákat frontális osztálymunka során? 2) Hogyan oldanak meg tehetséges illetve átlagos képességű tanulók matematikai problémákat kooperatív osztálymunka során? 3) Mi a véleménye a tanulóknak a különböző tanítási helyzetekről?

7 Konklúzió - Összefoglalás

A különböző matematikai és attitűd tesztek eredményei és a megfigyeléseim alapján elmondható, hogy a kooperatív tanulásszervezési technikák hatékonyan alkalmazhatók a problémamegoldó képességek fejlesztésére, viszont más tanulásszervezési technikákkal kombinálva ajánlatos alkalmazni azokat. A kooperatív módszer a matematikához való pozitív hozzáállás kialakításához is nagyban hozzájárul és segít a tanulóknak az egymás iránti pozitív megítélés és egy elfogadóbb légkör kialakításában. Továbbá, a nyílt problémák feldolgozása során a gyengébb tanulóknak lehetősége volt konkrét értékekkel, vizuális reprezentációkkal kezdeni a problémamegoldást, ezek által csökkentve a munkamemóriájukra nehezedő nyomást. A nyílt problémák hatékonyan hozzájárultak a problémamegoldó gondolkodás fejlesztéséhez. Megvitatásuk eléggé időigényes, ezért kevesebb probléma megvitatására volt lehetőség, azonban kooperatív technikákkal feldolgozva részletesebben tudtuk megbeszélni az egyes problémák lehetséges megoldásait. Kooperatív munka során a tanulók nemcsak a saját, hanem társaik tudására is támaszkodhattak, ami hozzájárult a résztvevők munkamemóriájának kiterjesztéséhez.

8 Jövőbeli tervek

A jövőben a következő három területre szeretnék koncentrálni munkám során: 1) a kutatási eredmények, tapasztalatok terjesztése, 2) a mindennapi tanítási gyakorlatom fejlesztése, 3) megfelelő tanítási eszközök készítése (feladatlapok, óratervek ... stb.)

9 Introduction

In Hungarian classrooms we face the following problem more and more often: students are less independent when it comes to solving mathematical problems individually. Many students are passive listeners when the teacher presents a new material, they try to follow the explanations or the solution of a sample problem but when they have to solve similar or totally different problems on their own the majority looks helpless. In this scenario choosing a right teaching method is not always easy. This dissertation describes an experiment that was carried out in a secondary school class with the help of which we tried to find ways of enriching teaching mathematical problem solving.

10 Research questions

1. How does the regular use of cooperative teaching techniques affect *a)* the mathematical problem solving skills of secondary school students?; *b)* the attitude of students to mathematics?; *c)* the relationship of the students and their attitude to each other?; **2.** How does the use of open problems affect the students' problem solving ability?; **3.** How do cooperative techniques affect the working memory?; **4.** How do open problems affect the working memory?; **5.** How does combining the cooperative techniques with using open problems affect the students' problem solving ability?

11 Theoretical background

11.1 Problem solving

11.1.1 Problems

There are many definitions of a *problem*. For example some define a problem as a task, in which we know some data and some conditions based on which we try to find a solution. Finding the solution is often impeded by different obstacles that are not always obvious to recognize. Another definition for a *problem* says that it is a situation in which we want to reach a certain aim but the way of reaching this aim is hidden. Pólya describes problems as ways of trying to find some means with the help of which we can reach a clearly stated but not necessary easy to reach aim. All the above mentioned definitions regard a problem as quite a broad concept and they agree on that in problem solving we know where to start and in most cases we know where we want to end up, but the "HOW" is yet unknown for the problem solver.

Types of problems

Problems can be classified based on different points of view.

- Real problems; Realistic problems; Concrete problems; Indirect problems; Abstract problems
- Well - structured ; Moderately structured; Ill - structured
- Practice; Word problem; Puzzle problem; Proving a conjecture; Real problem; Problem situation; Situation
- Knowledge-free; Knowledge -filled
- Problems to find; Problems to prove
- Open problems; Closed problems

Open-problems

A problem is closed if both its starting situation and its goal situation are exactly explained. If at least one of the aforementioned is not clearly explained, i.e. open than we talk about an open problem.

The main benefits of using open mathematical problems are that they give an opportunity for children with different mathematical abilities to experience success; they allow students to progress in their own pace and with multiple solutions they provide a great base for mathematical discussions.

11.1.2 Solving problems

Problem solving models

- Wallas' model: 1) Preparation; 2) Incubation; 3) Illumination; 4) Verification
- Dewey's model: 1) Defining the problem; 2) Analysing the problem; 3) Determining criteria for optimal solution; 4) Proposing solution; 5) Evaluating proposed solution; 6) Selecting a solution; 7) Suggesting strategies to implement solution
- Pólya's model: 1) Understanding the problem; 2) Devising a plan; 3) Carrying out the plan; 4) Looking back
- Schoenfeld's model: 1) Understanding the problem; 2) Draft for the plan of the solution; 3) Finding a plan for more difficult problems; 4) Review
- Mason's model: 1) Entry; 2) Attack; 3) Review

Problem solving strategies: 1) *Thinking forward*; 2) *Thinking backwards*; 3) *Systematic trial*

Heuristic principles: *Analogy*; *Tracing back to a known problem*; *The principle of invariance*; *Case distinction*; *The principle of optimality*; *Special cases*; *The principle of symmetry*; *The principle of transformation*

11.1.3 Teaching and developing problem solving skills

To become successful problem solvers in their future lives students need to acquire ways of thinking and need to develop a “thinking tool kit” which contains problem solving strategies. Solving countless practice problems without reflecting on the problem solving process is not enough. This section covers the following aspects of teaching mathematical problem solving: *Mathematical thinking, Learning theories, Transfer, Metacognition, Affective factors.*

11.1.4 Creating more problems

When teaching problem solving it is good to let students try and have their own experiences with the task at hand and encourage them not only to solve the problem but also to formulate and to find new problems, since formulating problems plays a vital role in problem solving. This section discusses ways of creating new mathematical problems from existing ones using 1) *Association*; 2) *Analogy*; 3) *Generalization* or 4) *Contradiction*.

11.1.5 Guiding questions

This section focuses on the application of the following quotation in everyday teaching practice: *“Never say anything a kid can say! This one goal keeps me focused. Although I do not think that I have ever met this goal completely in any one day or even in a given class period, it has forced me to develop and improve my questioning skills. It also sends a message to students that their participation is essential. Every time I am tempted to tell students something, I try to ask a question instead.”* (Reinhard, 2000, p. 480)

11.1.6 Expert and novice problem solvers

As in our research one of the aims was to reach not only the expert problem solvers but also the less talented, the less experienced ones, this section explores the main differences between expert and novice problem solvers.

11.2 Memory structures

This section presents Baddeley's model of memory structures in which **working memory** and **long term memory** play a vital role and we analyse these components of the memory systems in detail.

11.2.1 Working Memory

In problem solving, the role of Working Memory is vital. The WM has a very limited capacity holding 7 ± 2 info units, its time limit is 18 - 30 sec without rehearsal, goal maintenance and inhibition of irrelevant information.

11.2.2 Long Term Memory (LTM)

The LTM contains information in form of schemas. Schemas are abstract, structured, dynamic representations of information.

11.2.3 Overcoming the limits of WM: Cognitive Load Theory (CLT)

Cognitive load can be defined as the load imposed on the WM by information being presented. **Types of cognitive loads:** 1) Intrinsic cognitive load; 2) Extraneous cognitive load; 3) Germane cognitive load. The actual cognitive load imposed on the working memory is composed from these three factors. The possible cognitive loads need to be taken into consideration when planning our teaching. For successful problem solving reduction of the cognitive load is an essential aspect which can be achieved by 1) Applying goal free (open) problems or by 2) Applying cooperative teaching methods.

11.3 Cooperative teaching and learning

In our everyday life and in every community there are competitive and cooperative situations. Competitive situations occur when the resources are limited and an order need to be decided while in cooperative situations the resources are unlimited and can be shared out equally.

11.3.1 What is cooperative learning?

Cooperative learning is a teaching arrangement where people work together in order to achieve a common goal which often means solving a problem. During this work the group members depend on each other, the success of the team depends on their ability to cooperate. They must support each other, trust each other and respect each other if they want to overcome the difficulties that might hinder them.

11.3.2 Why is cooperation necessary in class?

There are many changes that affect the future of our students and therefore need to be taken into consideration from educational point of view: **the social environment** of our students has changed a lot; **the economical environment** is changing; there is more and more need to **accept differences**.

11.3.3 Difficulties with cooperative learning

As with any other method some things might go wrong with cooperative learning. In this section we show some problems that might occur in a cooperative classroom and suggest some solutions: 1) Failing to get along; 2) Misbehaving students; 3) Noise; 4) Ineffective use of team practice time; 5) Too much difference between the “best” and the “worst” students.

11.3.4 Cooperative structures

One of the most important features of cooperative teaching is that we change HOW we teach as we cannot change WHAT we teach. In this section we present some examples of cooperative structures that were found useful and efficiently applicable in Maths classes. The structures were given catchy, easy-to-remember names: *Pair Check*; *Jigsaw Expert Groups or Expert Jigsaw*; *Jigsaw Problem Solving*; *Gallery Walk*; *Think Pair Share*; *Timed Pair Share*; *Think Pair Square*; *Round Robin*; *Switched Task Cards*.

11.3.5 Teacher’s role in cooperative learning

Obviously, when using cooperative teaching techniques it is not only the classroom setting, the students’ role that change but also the teacher’s role. From an instructor the teacher becomes a tutor, someone who guides students in the teaching – learning situation. The teacher still should be the leader and it is her/his responsibility to maintain an environment where work can be done.

11.3.6 Groups

Groups might be formed in many different ways. The most important aspect however is that the number of students in one group should be four. The reasons for this are: *nobody feels left out*; *students also can work in pairs*; *an ideal seating arrangement*.

11.3.7 Cooperative teaching in Hungary

In Hungarian education cooperative learning appeared as a result of the work of József Benda. He thought that cooperative learning could cause a positive change in the way Hungarian schools work which would result in better achievement, integration and development of students. However, the use of cooperative teaching techniques is still rather rare in the Hungarian classrooms, not to mention mathematics lessons.

11.3.8 Cooperative techniques in mathematics education

This section provides more arguments in favour of using cooperative teaching techniques in mathematics education.

12 Research methodology

12.1 Background information

The experiment was an action research. When comparing the outcomes of cooperative teaching and learning to other programs there are many factors that differ in the two alternative programs such as the subjects, the duration, etc. which can account for the differences in the outcomes that is why control groups were not used.

This section describes the following details related to the experiment: **the school**; **the students** and **methods of data collection**.

13 Learning trajectory

13.1 The lessons

13.1.1 12 lessons - 5 problems

In the first part of the experiment there were 5 problems selected, each of which was curriculum based and it was made sure that the problems are from different fields of Maths (algebra, geometry, number theory, combinatorics). These problems were either open problems or they were chosen so that they can be “opened”. To discuss these tasks we had twelve 45 minute long lessons. The main aim was to explore and discuss each problem in great detail and if possible extend it as well. Each of the 12 lessons were planned with cooperative teaching techniques.

In this section we present the five problems used in the first half of the experiment: 1) **Matchstick game**; 2) **Number magic**; 3) **Area investigation**; 4) **More beads**; 5) **Primes and factors**.

13.1.2 Further lessons

We also provide a list of further lessons that were planned using cooperative teaching techniques. These lessons were held during the school year and they were in line with the topic being actually taught.

14 The experiment

14.1 Pre-tests

This section contains the tests that the students had to fill in before the first part of the experiment and also describes and interprets the results of these tests. The test discussed here are: **the mathematical pre - test** and **the attitude to mathematics test**.

14.2 The lessons

This section contains a detailed analysis of the discussion of the five problems used in the first part of the experiment. For each lesson we described the lesson plan and how students tackled the problem. Appearing difficulties, ideas, suggestions for further use and options for problem variation are also included. For each problem we provided some samples of students work and also listed the students' opinion. The five problems were: *Matchstick game*, *Number magic*, *Area investigation*, *More beads* and *Primes and factors*.

14.3 Post-test

This section contains **the mathematical post-test** that the students had to fill in after the first part of the experiment and also describes the results of this test.

14.4 The delayed test

The questions in the delayed test were exactly the same as the questions on the post-test. In this section the results of the delayed test are discussed and the results of the three mathematical tests are compared and contrasted.

14.5 Tests at the end of the school year

This section contains the results of the end of year tests and also the comparison of these results to the results of the pre-experiment tests. The tests discussed here are: **an attitude to mathematics** and **a questionnaire about cooperative learning**.

14.6 Other aspects

During the experiment we collected a wide range of information that was useful for analysing the problems and the students' behaviour from other aspects as well.

14.6.1 Open problems

Since all the problems used in the first part of the experiment and some used in the second part were open problems we can say that there are several benefits of using open problems in teaching mathematical problem solving.

14.6.2 Guiding questions

Using questions when teaching mathematics regardless whether we introduce a new material or teach problem solving is an effective tool. Combining guiding questions with cooperative techniques gave the students the opportunity to focus more on the nature and the order of these guiding questions.

14.6.3 Talented and Average Ability Students

During the experiment we also had the opportunity to examine the following questions : 1) How do talented/average ability students solve problems in frontal classwork? 2) How do talented/average ability students solve problems in cooperative work? 3) How do they feel about the different scenarios?

15 Conclusion - Summary

Based on the observations and the results on the different mathematical and attitude tests we can say that cooperative techniques can be considered as effective tools for developing problem solving skills but they should be used alongside and mixed with other methods. Cooperation also contributes to forming a positive attitude to mathematics and also aids the development of positive relationship and a more accepting atmosphere among the students. Furthermore, open problems gave the opportunity for the less able students to get started with concrete values or with visual representations thus reducing the "pressure" on the working memory. Open problems and investigations also contributed well to developing problem solving skills and although they were time-consuming, combined with cooperative teaching techniques they provided an opportunity for discussing fewer problems but in greater detail. Moreover, when using cooperative work students could rely not only on their knowledge but also on the knowledge of the other members of the group which contributed to the extension of the working memory of the participants

16 Future work

There are three areas I would like to concentrate on in the future: 1) dissemination; 2) developing my everyday practice; 3) designing appropriate teaching resources.

Előadások

Third Annual PDTR Conference. Siedlce. 2008. August. Problems in real-life context based on PISA experinece.

Varga Tamás Módszertani Napok. ELTE Budapest. 2009. november. Teaching Mathematics in English in Hungarian Classrooms.

Matematika és Informatikai Didaktikai Konferencia (MIDK). Debrecen. 2010. A jelenkori angol és magyar matematika oktatás összehasonlítása.

Matematika és Informatikai Didaktikai Konferencia (MIDK). Lőcse. 2012. Matematikában tehetséges tanulók és a kooperatív technikák használata – egy tervezett kísérlet.

Problem Solving in Mathematics Education (ProMath) Conference. Ljubljana. 2012. Some Problems in Teaching Mathematical Problem Solving.

Matematika és Informatikai Didaktikai Konferencia (MIDK). Nagyvárad. 2013. Irányító kérdések alkalmazása a matematikaoktatásban.

Problem Solving in Mathematics Education (ProMath) Conference. Eger. 2013. How do they solve problems? Comparing the mathematical problem solving of the talented and the average.

Varga Tamás Módszertani Napok. ELTE Budapest. 2013. november. Solving Problems – Together.

Matematika és Informatikai Didaktikai Konferencia (MIDK). Eger. 2014. Tanulói magyarázatok.



Nyilvántartási szám: DEENK/47/2016.PL
Tárgy: PhD Publikációs Lista

Jelölt: Barczy-Veres Krisztina

Neptun kód: HUKGDD

Doktori Iskola: Matematika- és Számítástudományok Doktori Iskola

A PhD értekezés alapjául szolgáló közlemények

Idegen nyelvű, hazai könyvrészlet(ek) (1)

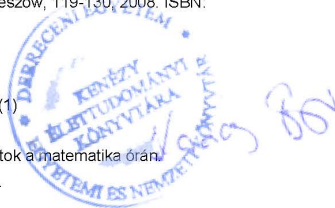
1. **Barczy, K.:** How do they solve problems?:Mathematical problem solving of the average and the talented.
In: Problem Solving in Mathematics Education : Proceedings of the 15th ProMath conference 30 August-1 September, 2013 in Eger. Ed.: András Ambrus, Éva Vásárhelyi, Eötvös Loránd University, Faculty Of Science, Institute Of Mathematics, Budapest, 18-34, 2014.

Idegen nyelvű, külföldi könyvrészlet(ek) (2)

2. Ambrus, A., **Barczy-Veres, K.:** Teaching mathematical problem solving in Hungary for students who have average ability in maths.
In: Posing and Solving Mathematical Problems : Advances and New Perspectives. Patricio Felmer, Erkki Pehkonen, Jeremy Kilpatrick, Springer, New York, Közlésre elfogadva, [23 p.], 2016. ISBN: 9783319280219
3. **Barczy, K.:** A study on how Hungarian students solve problems that are unusual for them.
In: Handbook of Mathematics Teaching Improvement : Professional Practices that Address PISA. Ed.: Stefan Turnau, University of Rzeszow, Rzeszow, 119-130, 2008. ISBN: 9788373383944

Magyar nyelvű tudományos közlemény(ek) hazai folyóiratban (1)

4. **Barczy K.:** Nyílt végű és vizsgálódással megoldható feladatok a matematika órában.
Mat. tan. (Szeged). 2, 19-24, 2013. ISSN: 1216-6650.





Idegen nyelvű tudományos közlemény(ek) külföldi folyóiratban (3)

5. Ambrus, A., **Barczy-Veres, K.**: Using open problems and cooperative methods in mathematics education.
LUMAT: Research and Practice in Math, Science and Technology Education 3, 3-18, 2015.
ISSN: 2323-7112.
6. Ambrus, A., **Barczy-Veres, K.**: Opening problems is one step forward to reach more students.
J. Math. Sci (Elko, Nev. Print). 1, 37-45, 2014. ISSN: 2372-5214.
7. **Barczy, K.**: Applying cooperative techniques in teaching problem solving.
. 3, 61-78, 2013. ISSN: 1855-9719.





További Közlemények

Idegen nyelvű, külföldi könyvrészlet(ek) (1)

8. Nagy, B., **Barczy, K.**: Isoperimetrically optimal polygons in the triangular grid.
In: Combinatorial Image Analysis : 14th International Workshop, IWCI 2011, Madrid, Spain, May 23-25, 2011. Proceedings. Szerk.: K. Aggarwal, Reneta P. Barneva, Valentin E. Brimkov, Kostadin N. Koroutchev, Elka R. Korutcheva (szerk.), Springer, Berlin, Heidelberg, 194-207, 2011. ISBN: 9783642210723
DOI: http://dx.doi.org/10.1007/978-3-642-21073-0_19

Idegen nyelvű közlemény(ek) külföldi folyóiratban (1)

9. Nagy, B., **Barczy, K.**: Isoperimetrically optimal polygons in the triangular grid with Jordan-type neighbourhood on the boundary.
Int. J. Comput. Math. 90 (8), 1629-1652, 2013. ISSN: 0020-7160.
DOI: <http://dx.doi.org/10.1080/00207160.2012.737914>
IF:0.721

A közlő folyóiratok összesített impakt faktora: 0,721

A közlő folyóiratok összesített impakt faktora (az értekezés alapjául szolgáló közleményekre): 0

A DEENK a Jelölt által az iDEa Tudóstérbe feltöltött adatok bibliográfiai és tudományometriai ellenőrzését a tudományos adatbázisok és a Journal Citation Reports Impact Factor lista alapján elvégezte.

Debrecen, 2016.02.29.





Registry number: DEENK/47/2016.PL
Subject: Ph.D. List of Publications

Candidate: Krisztina Barczi-Veres
Neptun ID: HUKGDD
Doctoral School: Doctoral School of Mathematical and Computational Sciences

List of publications related to the dissertation

Foreign language Hungarian book chapter(s) (1)

1. **Barczi, K.**: How do they solve problems?:Mathematical problem solving of the average and the talented.
In: Problem Solving in Mathematics Education : Proceedings of the 15th ProMath conference 30 August-1 September, 2013 in Eger. Ed.: András Ambrus, Éva Vásárhelyi, Eötvös Loránd University, Faculty Of Science, Institute Of Mathematics, Budapest, 18-34, 2014.

Foreign language international book chapter(s) (2)

2. Ambrus, A., **Barczi-Veres, K.**: Teaching mathematical problem solving in Hungary for students who have average ability in maths.
In: Posing and Solving Mathematical Problems : Advances and New Perspectives. Patricio Felmer, Erkki Pehkonen, Jeremy Kilpatrick, Springer, New York, Kozlésre elfogadva, [23 p.], 2016. ISBN: 9783319280219
3. **Barczi, K.**: A study on how Hungarian students solve problems that are unusual for them.
In: Handbook of Mathematics Teaching Improvement : Professional Practices that Address PISA. Ed.: Stefan Turnau, University of Rzeszow, Rzeszow, 119-130, 2008. ISBN: 9788373383944

Hungarian scientific article(s) in Hungarian journal(s) (1)

4. **Barczi K.**: Nyílt végű és vizsgálódással megoldható feladatok a matematika órában.
Mat. tan. (Szeged). 2, 19-24, 2013. ISSN: 1216-6650.





Foreign language scientific article(s) in international journal(s) (3)

5. Ambrus, A., **Barczy-Veres, K.**: Using open problems and cooperative methods in mathematics education.
LUMAT: Research and Practice in Math, Science and Technology Education 3, 3-18, 2015.
ISSN: 2323-7112.
6. Ambrus, A., **Barczy-Veres, K.**: Opening problems is one step forward to reach more students.
J. Math. Sci (Elko, Nev. Print). 1, 37-45, 2014. ISSN: 2372-5214.
7. **Barczy, K.**: Applying cooperative techniques in teaching problem solving.
. 3, 61-78, 2013. ISSN: 1855-9719.





List of other publications

Foreign language international book chapter(s) (1)

8. Nagy, B., **Barczi, K.**: Isoperimetrically optimal polygons in the triangular grid.
In: Combinatorial Image Analysis : 14th International Workshop, IW CIA 2011, Madrid, Spain, May 23-25, 2011. Proceedings. Szerk.: K. Aggarwal, Reneta P. Barneva, Valentin E. Brimkov, Kostadin N. Koroutchev, Elka R. Korutcheva (szerk.), Springer, Berlin, Heidelberg, 194-207, 2011. ISBN: 9783642210723
DOI: http://dx.doi.org/10.1007/978-3-642-21073-0_19

Foreign language scientific article(s) in international journal(s) (1)

9. Nagy, B., **Barczi, K.**: Isoperimetrically optimal polygons in the triangular grid with Jordan-type neighbourhood on the boundary.
Int. J. Comput. Math. 90 (8), 1629-1652, 2013. ISSN: 0020-7160.
DOI: <http://dx.doi.org/10.1080/00207160.2012.737914>
IF: 0.721

Total IF of journals (all publications): 0,721

Total IF of journals (publications related to the dissertation): 0

The Candidate's publication data submitted to the iDEa Tudóstér have been validated by DEENK on the basis of Web of Science, Scopus and Journal Citation Report (Impact Factor) databases.

29 February, 2016

