DEBRECENI EGYETEM
GAZDASÁGTUDOMÁNYI KAR
STATISZTIKA ÉS MÓDSZERTANI INTÉZET

Dr. Csipkés Margit

Statisztika példatár megoldással

Statisztika példatár megoldással

Dr. Csipkés Margit

DEBRECENI EGYETEM
GAZDASÁGTUDOMÁNYI KAR

Statisztika példatár megoldással

Dr. Csipkés Margit

Debreceni Egyetemi Kiadó
Debrecen University Press
2024

Lektorálta:

Dr. Debrenti Edith
Partiumi Keresztény Egyetem, Nagyvárad

ISBN 978-963-615-147-8 (print)
ISBN 978-963-615-148-5 (pdf)

Kiadta a Debreceni Egyetemi Kiadó Debrecen University Press
dupress.unideb.hu
Felelős kiadó: Karácsony Gyöngyi
Nyomdai előkészítés: DUPress
Készült a Debreceni Egyetemi Kiadó nyomdájában, 2024-ben

TARTALOMJEGYZÉK

ELŐSZÓ . . . 7

1. AZ ALKALMAZOTT STATISZTIKAI ALAPFOGALMAK BEMUTATÁSA . . . 8
   1.1. A sokaság különböző fajtái . . . 9
   1.2. Az ismérvek és a mérési skálák . . . 10
      1.2.1. A statisztikai sokaság egyedeinek jellemző tulajdonsága . . . 10
      1.2.2. A mérési skálák / mérési szintek közötti különbségek . . . 13
   1.3. A statisztikai sorok . . . 15
   1.4. A statisztika munka fázisai . . . 18
   1.5. Az adatgyűjtés formái . . . 19

2. A VISZONYSZÁMOK ALKALMAZÁSI LEHETŐSÉGEI . . . 22
   2.1. A viszonyszámok csoportjai . . . 22
      2.1.1. A megoszlási viszonyszám . . . 23
      2.1.2. Az összehasonlító viszonyszámok . . . 23
         2.1.2.1. A dinamikus viszonyszámok . . . 24
         2.1.2.2. A területi összehasonlító viszonyszám . . . 26
         2.1.2.3. A koordinációs viszonyszám . . . 27
      2.1.3. Teljesítmény viszonyszámok . . . 27
      2.1.4. A különnemű adatokból számított (intenzitási) viszonyszámok . . . 29
   2.2. A viszonyszámok alkalmazása gyakorlati példákon keresztül . . . 30
      2.2.1. Példa 1 (feladat) - A megoszlási viszonyszám . . . 30
      2.2.2. Példa 2 (feladat) – A megoszlási viszonyszám . . . 33
      2.2.3. Példa 3 (feladat) – A koordinációs viszonyszám . . . 35
      2.2.4. Példa 4 (feladat) – A koordinációs viszonyszám . . . 37
      2.2.5. Példa 5 (feladat) – A bázis- és láncviszonyszámok . . . 38
      2.2.6. Példa 6 (feladat) – A bázis- és láncviszonyszámok . . . 43
      2.2.7. Példa 7 (feladat) – A bázis- és láncviszonyszámok („lukas tábla”) . . . 50
      2.2.8. Példa 8 (feladat) – A bázis- és láncviszonyszámok („lukas” tábla) . . . 53
      2.2.9. Példa 9 (feladat) – A területi összehasonlító viszonyszámok . . . 56
      2.2.10. Példa 10 (feladat) – A területi összehasonlító viszonyszámok . . . 58
      2.2.11. Példa 11 (feladat) – A teljesítmény viszonyszámok . . . 60
      2.2.12. Példa 12 (feladat) – A teljesítmény viszonyszámok . . . 63
      2.2.13. Példa 13 (feladat) – Az intenzitási viszonyszámok . . . 65
      2.2.14. Példa 14 (feladat) – Az intenzitási viszonyszámok . . . 66

3. A KÖZÉPÉRTÉKEK ALKALMAZÁSI LEHETŐSÉGEI . . . 72
   3.1. A középértékek csoportjai . . . 72
      3.1.1. A számított középértékek . . . 72
         3.1.1.1. Számtani átlag . . . 72
         3.1.1.2. Kronológikus átlag . . . 73
         3.1.1.3. Harmonikus átlag . . . 78
         3.1.1.4. Mértani átlag . . . 79
         3.1.1.5. Négyzetes átlag . . . 80
      3.1.2. A helyzeti középértékek . . . 81
         3.1.2.1. Medián . . . 81
         3.1.2.2. Módusz . . . 82

3.2. A középértékek alkalmazásának bemutatása gyakorlati példákon keresztül 83
3.2.1. Példa 15 (feladat) – Súlyozatlan számtani átlag 83
3.2.2. Példa 16 (feladat) – Súlyozatlan számtani átlag 84
3.2.3. Példa 17 (feladat) – Súlyozott számtani átlag 85
3.2.4. Példa 18 (feladat) – súlyozott számtani átlag 87
3.2.5. Példa 19 (feladat) - Súlyozott számtani átlag 88
3.2.6. Példa 20 (feladat) – Súlyozott számtani átlag 90
3.2.7. Példa 21 (feladat) – Súlyozatlan harmonikus átlag 91
3.2.8. Példa 22 (feladat) – Súlyozatlan harmonikus átlag 93
3.2.9. Példa 23 (feladat) – Súlyozott harmonikus átlag 94
3.2.10. Példa 24 (feladat) – Súlyozott harmonikus átlag 96
3.2.11. Példa 25 (feladat) – Kronológikus átlag (a hónap első napjai adottak) 97
3.2.12. Példa 26 (feladat) – Kronológikus átlag (a hónap első napjai adottak) 105
3.2.13. Példa 27 (feladat) – Kronológikus átlag (a hónap utolsó napjai adottak) 110
3.2.14. Példa 28 (feladat) – Súlyozatlan mértani átlag 115
3.2.15. Példa 29 (feladat) – Súlyozatlan mértani átlag 118
3.2.16. Példa 30 (feladat) – Súlyozatlan négyzetes átlag 121
3.2.17. Példa 31 (feladat) – Súlyozatlan négyzetes átlag 122
3.2.18. Példa 32 (feladat) – Medián és Módusz 123

4. A SZÓRÓDÁSI MUTATÓK ALKALMAZÁSI LEHETŐSÉGEI 125
4.1. A szóródási mutatók elméleti alapjai (súlyozott, súlyozatlan) 125
4.2. A szóródási mutatók alkalmazásának bemutatása 131
4.2.1. Példa 33 (feladat) – Súlyozatlan szóródási mutatók 131
4.2.2. Példa 34 (feladat) – Súlyozatlan szóródási mutatók 141
4.2.3. Példa 35 (feladat) – Súlyozott szóródási mutatók 146
4.2.4. Példa 36 (feladat) – Súlyozott szóródási mutatók 153

5. AZ INDEXEK ALKALMAZÁSI LEHETŐSÉGEI 159
5.1. A statisztikai indexek csoportjai 160
5.1.1. Az abszolút számokból számított indexek 160
5.1.1.1. Értékindex 162
5.1.1.2. Volumenindex (az ár [p] adatok állandóak) 163
5.1.1.3. Árindex (a mennyiségi [q] adatok állandóak) 164
5.1.1.4. Az érték-, a volumen- és az árindex közötti összefüggések 165
5.1.1.5. Egyedi indexek 166
5.1.2. A viszonyszámok együttes változását kifejező indexek 167
5.2. Az abszolút számokból számított indexek gyakorlati alkalmazhatósága 170
5.2.1. Példa 37 (feladat) – Index 1 170
5.2.2. Példa 38 (feladat) – Index 2 177
5.2.3. Példa 39 (feladat) – Index 3 181

FELHASZNÁLT SZAKIRODALOM 189

FONTOSABB ELMÉLETI KISKÉRDÉSEK 190

ELŐSZÓ

Jelen könyv elsődlegesen a Debreceni Egyetem Gazdaságtudományi Kar Vidékfejlesztési agrármérnök, illetve Gazdasági agrármérnök szakján tanuló hallgatók általános statisztikai ismereteit tartalmazza. A statisztika könnyebb megértése érdekében először bemutatom a könyv egészében alkalmazott (használt) általános statisztikai alapfogalmakat, számítási módszereket, a mutatók értelemzését, illetve az egyes mutatók közti összefüggéseket. Ezt követően a kvantítatív elemzésékkel kapcsolatos általános összefüggéseket mutatom be példa levezetésekkel együtt. Mivel a gyakorlati életben nagyon fontos a kapott eredmények bemutatása mellett az értelmezés is, ezért minden számított eredmény elemzésre kerül.

A könyvben az egyetemi hallgatók által hozzáférhető Microsoft Excel szoftver statisztikai funkciói kerülnek felhasználásra. Alapozva arra, hogy a Hallgatók korábban már tanultak informatikai ismereteket, az egyes alap függvények nem kerülnek részletesen bemutatásra. Azon függvények, melyek az alap informatikai ismereteken felül vannak, azokat részletesen bemutatom, illetve elmagyarázom, hogy mikor és milyen módon alkalmazható az adott függvény.

A könyvet azon egyetemi Hallgatóknak ajánlom, akik az előadások és a gyakorlatok alkalmával nem tudták teljesen elsajátítani a tananyagot. Ezen könyv segítségével minden egyetemi Hallgatónak lehetősége nyílik az adott témakör részletes áttekintésére és értelmezésére.

Debrecen, 2024.01.15

Dr. Csipkés Margit, könyv szerzője

1. AZ ALKALMAZOTT STATISZTIKAI ALAPFOGALMAK BEMUTATÁSA

Mivel a környezetünk megismeréséhez és a társadalmi és gazdasági folyamatok megértéséhez egyre több információra van szükségünk, ezért elengedhetetlen a statisztika témakörének az ismerete. Mivel tanulmányaink esetében is (makro- és mikrogazdasági jelenségek elemzése) szükségesek az alap matematikai tudások, illetve a statisztikai számítások, ezért érdemes mélyebben megismerkedni a legfontosabb alap statisztikai számításokkal. Bármilyen mikro- vagy makoökonómiai problémával is találkozunk, biztos, hogy valamilyen számszerű információ fog a rendelkezésünkre állni. A számszerű információk értelmezésében lesz szerepe a statisztikának. A statisztikának két megközelítése ismert. Az egyik megközelítés alapján a statisztika olyan számok vagy adatok összessége, amelyek bemutatják a környezetünket (leggyakrabban szabályos táblázatba rendezett statisztikai adatokról beszélünk). A másik megközelítés alapján a statisztika a tömegjelenségek vizsgálatára szolgáló módszerek összességét jelenti, ahol a vizsgált statisztikai sokaság, vagy azok egyedeinek tömör, számszerű jellemzését tudjuk elkészíteni. A statisztika a valóság tömör, számszerű jellemzésére szolgáló tudományos módszertan, valamint gyakorlati tevékenység.

De nézzük mit is jelent a statisztikai adat: A statisztikai adat valamely statisztikai sokaság elemeinek száma vagy a sokaság valamilyen másféle számszerű jellemzője, mérési eredmény. A statisztikai adat mindig tartalmaz fogalmi jegyeket, melyek lehetnek időbeli, térbeli vagy egyéb azonosítók. A statisztikai adat általában rendelkezik mértékegységgel és e mellett van egy számértéke is. A statisztikai adat tehát nem pusztán a számérték maga. Pl: 2024.01.01 napon a Debreceni Egyetem nyitó költségvetés összege.

A mindennapi életben a statisztikának egyre nagyobb szerepe van, mivel már a gazdasági döntések előkészítésénél is használják a statisztika valamelyik részét. Fontos szerepe van az élet szinte minden területén: mezőgazdaság, vidékfejlesztés, autóipar, meteorológia, egészségügy, élelmezés, kereskedelem, stb. Minden esetben a statisztika egy gyakorlati számbevételi tevékenység, mely a tömegesen előforduló jelenségek egyedeire vonatkozó információk gyűjtése, feldolgozása, illetve elemzése.

A statisztika módszertanán belül a legismertebb rész a leíró statisztika. A leíró statisztika az információk összegyűjtését, összegzését, tömör, számszerű jellemzésére szolgáló módszereket foglalja magában (adatgyűjtés, adatábrázolás, adatcsoportosítás, aritmetikai műveletek adatokkal, illetve az eredmények bemutatása). Nem is tudunk róla, azonban a mindennapokban is nagyon sokszor alkalmazzuk a leíró statisztikai módszereket.

Azokat a statisztikai adatokat, amelyekhez mérés vagy számlálás útján jutunk, alapadatoknak nevezzük (termésátlaga a kukoricának, egyetemi hallgatók száma, stb). Két vagy több alapadattal végzett műveletek eredményeként leszármaztatott adatokhoz jutunk.
A statisztikai mutatószámokkal (melyek általában leszármaztatott adatok) valamilyen rendszeresen megismétlődő jelenséget statisztikailag jellemezhetünk.

1.1. A sokaság különböző fajtái

A statisztika a valóság tömör, számszerű jellemzésére szolgáló tudományos módszertan, illetve gyakorlati tevékenység. A statisztika egy gyakorlati számbavételi tevékenységnek tekinthető. Ez azt jelenti, hogy a tömegesen előforduló jelenségek egyedeire vonatkozó információkat össze kell gyűjteni, feldolgozni, elemezni, illetve a vizsgált jelenség egészének tömör, számszerű jellemzését elvégezni.
A statisztikai sokaság a megfigyelés tárgyát képező egyedek összessége. A sokaságot alkotó egyedeket – azaz a halmaz elemeit – a sokaság egységeinek nevezzük. A sokaságot nagyszámú egyed alkotja, amelyeket a sokaság egyedeinek nevezzük.
A sokaság egyedei között vannak olyanok, amelyek bizonyos tulajdonságok, lényegbeli jegyek tekintetében egymással megegyeznek, más szempontból viszont eltérhetnek egymástól. Az egyedeknek a hasonlósága, illetve a megegyezősége adja meg számunkra a sokaság egyöntetűségét, homogenitását, míg a különböző jegyek alapján meghatározott eltérő jelleg a sokaság heterogenitását. A sokaság egyedei lehetnek valóságos egységek, amelyeket a felvételezés időpontjában valóságosan tudunk mérni és számlálni. Lehetnek úgynevezett nem valóságos egységek és események is, amelyek egy adott időtartam alatt bekövetkezett változást, teljesítményt, illetve történést tükrözhetik.
Az olyan sokaságokat, melyek elkülönülő egységekből állnak diszkrét sokaságoknak nevezzük (például: a magyarországi egyetemi hallgatói, a magyarországi földterületek állománya, a magyarországi sertésállomány, stb). A képzett egységekből álló részt folytonos sokaságoknak hívjuk. Ebben az esetben az egységeket önkényesen határozzuk meg (például a sokaság egy egysége: 5 ezer fő létszám, 30 tonna búza, 25 liter tejfogyasztás).

A sokaságot több szempont alapján csoportosíthatjuk:

a) Ha a statisztikai sokaságot az alapján vizsgáljuk, hogy valóságos egységekből vagy eseményekből épülnek-e fel, akkor megkülönböztethetünk **álló sokaság**ot és **mozgó sokaság**ot.

Az *álló* sokaság (vagy állapot sokaság) valóságos egységekből áll, a sokaság egységeinek egy adott időpontban fennálló állapotát rögzíti. Angol kifejezéssel mondják ezt „stock”, állomány jellegű sokaságnak is. A *mozgó* sokaságot események alkotják, amelyek egy adott időtartam alatt következnek be. Ezt angol kifejezéssel „flow”, áramlás jellegű sokaságnak is nevezzük.

b) Az elemszám szempontjából megkülönböztetünk gyakorlatilag számbavehető egységeket, illetve nem számba vehető egységeket. Ez alapján megkülönböztetünk **véges és végtelen sokaság**ot.

c) A harmadik csoportosítási mód, amikor a sokaság ténylegesen meglévő egységekből (**valóságos sokaság**), vagy valamely esemény egységeinek a lehetséges értékeinek összességéből épül fel (**elméleti sokaság).**

d) **Teljes sokaságról** beszélünk akkor, ha a körülhatárolt sokaság minden egységét tartalmazza a sokaság. Ha a teljes statisztikai sokaság egységeinek bizonyos szempontból kiválasztott része található meg a sokaságban, akkor **mintasokaság**ról beszélünk.

e) Amikor sokaság egységei valamilyen alapvető tulajdonság tekintetében azonosak, akkor fősokaságról beszélünk. Például egy vállalat dolgozói a **fősokaság**. Ezen belül különböző tulajdonságok alapján változatokat is képezhetünk, (például szellemi és fizikai dolgozók). A fősokaság így képzett részeit **részsokaság**oknak nevezzük.

A sokaság egyedei, egységei viszonylag jól elkülöníthetők egymástól és ezeknek az egységeknek a jellemzői határozzák meg azt, hogy milyen típusú lesz valamely sokaság.

1.2. Az ismérvek és a mérési skálák

1.2.1. A statisztikai sokaság egyedeinek jellemző tulajdonsága

A statisztikai vizsgálat előfeltétele a vizsgálat tárgyát képező sokaság pontos körülhatárolása. A sokaság egyedeinek közös tulajdonságai az *ismérvek.* Az egységek jellemzéséhez három alapvető kérdésre kell válaszolnunk: MI? HOL? MIKOR?

A tartalmi, a térbeli és az időbeli közös tulajdonságok megválaszolása után válik a sokaság ismerté. Attól függően, hogy az ismérvváltozatok milyen jellegű információt adnak a sokaság egyedeiről, különböző fajta ismérveket különböztetünk meg, melyek a következők:

- ***Tárgyi ismérvek***: A tárgyi ismérvek a sokaság egyedeit jellemző minőségi vagy mennyiségi tulajdonságok.

- Minőségi ismérvek: a sokaság egységeit csak verbálisan, fogalmilag különítik el egymástól (kvalitatív vagy fokozati különbségeket jelentenek). Pl. Iskolai végzettség, szálláshely kategóriák, szállodák, területek aranykorona értéke, stb.
- Mennyiségi ismérvek: a sokaság egységeit valamilyen számlálás vagy mérés alapján jellemzik.

  A mennyiségi ismérveket tovább is csoportosíthatjuk:
  - Folytonos ismérvek: olyan mérhető ismérvek, amelyek bizonyos határokon belül bármilyen valós szám értékeit felvehetik.
  - Diszkrét ismérvek: olyan számlálható ismérvek, amelyek értéke csak egész szám lehet.

- ***Időbeli ismérvek:*** a sokaság egységeit időbeli alakulás alapján különíti el. Változatai lehetnek időpontok és időtartamok. Pl. 2024.02.09. 10 óra az utolsó vizsga a 2023-2024. 1. félévében (ez egy konkrét időpont), 2023-2024. 1. félév az egyetemi tanulmányoknál (tehát 2023.09.15-től 2024.02.09-ig tartó időszak, azaz időtartam)

- ***Térbeli ismérvek:*** az egységek térbeli elhelyezésére szolgáló rendezőelvek. Változataik lehetnek területi, közigazgatási stb. egységek. Ide minden olyan besorolás tartozik, ami földrajzi lehatárolást tartalmaz. Pl. Hajdú-Bihar vármegye, Észak-alföldi régió, Magyarország, Duna, Alpok, Hajdúszoboszló, stb.

- ***Alternatív ismérvek:*** az ismérv csak két változattal rendelkezik. Ilyen például a nem (két változat: nő, férfi). A kettőnél több változattal rendelkező ismérvek is átalakíthatók alternatív ismérvekké. Több ismérvváltozatú például az egyetemi hallgatók életkora, melyből a két kategória kialakítása például a 25 év alatti és a 25 év feletti egyetemi hallgató életkora.

Egy adott sokaságra vonatkozóan beszélhetünk közös és megkülönböztető ismérvekről is. A közös ismérvek azok, amelyek alapján a sokaság egységei egyformák (azaz ez alapján határozzuk meg a sokaságot). A megkülönböztető ismérvek azok, amelyek szerint az egyedek különböznek egymástól (azaz ez alapján a sokaság részsokaságokra bontható).

Nézzük ezt meg gyakorlati oldalról is, melyekkel a mindennapokban is találkozunk.

Ismérv	**Ismérvváltozat**
Gépkocsi típusa	Suzuki, Mercédesz, Ford, Audi, Opel
Gépkocsi fogyasztása	7 liter/100 km
Gépkocsi gyártási helye	Debrecen, Szolnok
Születési idő	1983.04.14
Születési hely	Nyíregyháza
Munkahelyen a foglalkoztatottak száma	125 fő fizikai foglalkoztatott, 32 fő szellemi foglalkoztatott
Vállalkozás területi elhelyezkedése	Hajdú-Bihar vármegye, Zala vármegye
Vállalat profilja	oktatás, vidékfejlesztés

A megfigyelt sokaság: a Debreceni Egyetem Gazdaságtudományi Kar nappali tagozatos hallgatónak a száma 2023. szeptember 01-én:

- közös ismérv:
  - beiratkozás helye: Debrecen
  - beiratkozás ideje: 2023.09.01
  - beiratkozott évfolyam: 1. évfolyam
- megkülönböztető ismérv:
  - hallgató neme: nő, férfi
  - iskolai végzettsége: érettségi szakközépiskolából, érettségi gimnáziumból, érettségi utáni 5./6. év elvégzése,
  - beiratkozott hallgató lakcíme: Debrecen, Kaba, Hajdúszoboszló, stb.
  - beiratkozott hallgató életkora: 19 év, 20 év, stb.
  - a hozott pontszám, stb.

A kialakított ismérv csoportok esetében figyelni kell arra, hogy a sokaságrészeket úgy kell kialakítani, hogy azok átfedésmentesek és teljesek legyenek. Ez azt jelenti, hogy a sokaság minden egysége egyértelműen besorolható legyen valamelyik kialakított ismérv csoportba.
Ha a csoportképző ismérv változatainak száma kevés és egymástól pontosan elkülöníthetők, akkor az osztályok képzése nem okoz problémát (pl. az egyetemi hallgatók nemek szerinti csoportosítása, a területek öntözhetősége szerinti csoportok (nem öntözhető terület és öntözhető terület), stb.). Az ilyen esetben egy ismérvváltozat képez egy osztályt. Az egy ismérv szerinti osztályozás eredménye egy csoportosító sor.

A csoportosító sor általános sémája:

Osztály	Egységek száma
C_1	f_1
C_2	f_2
$\vdots$	$\vdots$
C_i	f_i
$\vdots$	$\vdots$
C_k	f_k
Összesen	N

A csoportosító sor sémájában a C_i a csoportképző ismérv alapján képzett i-edik osztály azonosítója, az f_i a sokaság C_i osztályba sorolt egységeinek száma (azaz a gyakorisága), a k a kialakított osztályok száma, míg az N a sokaság egységeinek száma (sok esetben ezt $\sum f_i$ értékkel jelüljük). Ha az adott sorokhoz tartotó gyakorisági értékeket összeadjuk, akkor kapjuk meg a sokaság elemszámát (N).

Abban az esetben, ha az ismérvváltozatok száma sok az osztályok képzése már nem olyan egyértelmű (pl. a mezőgazdasági vállalkozások tevékenységtípus felsorolása, mezőgazdasági területek aranykorona besorolása földhasználati kategóriák alapján, stb.). Ilyen esetben szükséges lehet, hogy az adott ismérv egynél több változata képezzen egy osztályt.

1.2.2. A mérési skálák / mérési szintek közötti különbségek

A mérési szintek vagy másnéven a mérési skálák arról adnak felvilágosítást, hogy milyenek a sokaság egységeihez tartozó számértékek tulajdonságai.

a) ***Névleges (nominális) mérési szint***

Az értékek között különbség nem tehető. Mértékegysége nincs a számértékeknek. A kódszámok közötti különbségek és arányok nem értelmezhetők. Nominális mérési szintű ismérvek lehetnek a területi és minőségi ismérvek egyaránt.

A nominális mérési szint a számok kötetlen hozzárendelését jelenti. A számok csak az egyedek azonosítását (megkülönböztetését) szolgálják, közöttük a relációk (nagyobb, kisebb, egyenlő, nagyobb egyenlő, kisebb egyenlő) nem értelmezhetők, Nominális skálát alkalmazunk a területi és minőségi ismérvek szerinti megfigyeléseknél. E skálán való méréskor a számok (kódszámok) csak a sokaság egyedeinek azonosítására szolgálnak. Ez a legegyszerűbb és legkevésbé informatív mérési skála, mivel kizárólag az egységekhez rendelt számértékek vannak meghatározva. Példa: rendszám, irányítószám, biztosítási szám, stb.

b) ***Sorrendi (ordinális) mérési szint***

A sorrendi mérési skála a sokaság egyedeinek egy közös tulajdonság alapján való sorba rendezését jelenti. Például: az egyetemisták vizsga eredménye, a sportolók helyezési sorrendje, a termőföld minőségi osztályai. A skálán az egyes egyedek nem biztos, hogy egyenlő távolságra helyezkednek el egymástól. Az első és a második helyre sorolt pályázat teljesítménye között például nem ugyanakkora a különbség, mint a harmadik és negyedik helyezetteké között. A skálaértékek egyezősége vagy különbözősége mellett az értékek sorrendiségét is figyelembe vehetjük. A skálaértékek bármilyen mértékegység nélküli számot felvehetnek, hisz itt nem maga a számérték jelent számunkra információt, hanem azok sorrendje. Az elemzések során elsősorban olyan műveleteket végezhetünk el az ilyen típusú adatokkal, amelyek az értékek sorrendiségére épülnek. A gyakorlatban azonban gyakran előfordul, hogy átlagolást, különbségképzést folytatunk az ordinális mérési szintű számértékekkel. A sorrendi skálán mérhető ismérvek lehetnek a minőségi ismérvek.

c) ***Különbségi (intervallum) mérési szint***

Az intervallumskála már a tényleges mérést jelent, mivel a skálaértékek különbségei is valós információt adnak a sokaság egységeiről. Az intervallumskálának egy jellegzetes tulajdonsága, hogy a mértékegység és a nullapont meghatározása önkényes, és e nulla érték nem tükrözi a tulajdonság hiányát. A hőmérséklet esetében a skála mértékegysége a Celsius-fok a mindennapi életünkben, azonban ez más területen, vagy más korszakban lehetett/lehet Fahrenheit-fok. Ami fixnek tekinthető: a skála nullapontja a víz fagyáspontja és ez nyilvánvalóan nem tekinthető abszolút nullapontnak. Természetesen a skálán a két érték összege vagy aránya nem értelmezhető, de két-két adat különbsége, a két különbség összege és aránya már értelmezhető.

Nézzünk egy példát a könnyebb megértés érdekében:

- a +15°C-os és a +5°C-os hőmérséklet összege +20°C,
- a 30 °C-os hőmérséklet kétszerese a 15°C-osnak
- az 15 °C és a 20 °C közötti különbség azonos a 22°C és a 27°C közötti különbséggel
- a 10°C és a 20°C közötti különbség kétszerese a 5°C és 10°C különbségének.

d) ***Arányskála***

Ez lesz a megmagasabb mérési szint, ez adja a legtöbb információt. A skálának valódi nullapontja van, mely a tulajdonság hiányát jelzi. A skála bármely két értékének aránya független a mértékegységtől. E skálán nyert számokkal a statisztikai elemzésekhez szükséges összes művelet elvégezhető. Az arányskálán mért értékek például a hosszúság, a jövedelem, a költség, a termelés mennyisége.

1.3. A statisztikai sorok

A statisztikai adatok valamilyen szempontok szerinti felsorolását, a rendezett halmazát statisztikai soroknak nevezzük. Minden statisztikai sor két egymással összefüggő felsorolást tartalmaz, amely általában csoportosítás, illetve összehasonlítás útján jön létre. Az ilyen statisztikai sorokat valódi soroknak nevezzük. A másik eset, hogy a statisztikai sor nem csoportosítás vagy összehasonlítás útján jön létre, hanem egyszerűen felsorakoztatjuk egymás után az egyazon jelenségre, gazdasági egységre vonatkozó többféle sokaság különnemű adatait (például egy vállalkozás adatainak a felsorolása). Az ilyen statisztikai sorokat nem valódi, vagyis leíró soroknak nevezzük.

A statisztikai sorok csoportjai a következők:

Statisztikai sorok	
azonos fajtájú adatokból	**különböző fajtájú adatokból**
- minőségi sorok	- leíró sorok
- mennyiségi sorok	
- területi sorok	
- idősorok (tartam, állapot)	

Az azonos fajtájú adatokból álló statisztikai sorok az összehasonlító, illetve a csoportosító sorokat tartalmazza. A különböző fajtájú adatokból álló statisztikai sorok a leíró sorokat tartalmazza.

Ahhoz, hogy a sokaság összetételét megismerjük ismérvek szerint osztályoznunk kell, melyeket a következőkben mutatok be. A csoportosítás a sokaság felosztása a sokaság egységeit jellemző megkülönböztető ismérv szerint, melyek lehetnek minőségi-, mennyiségi-, területi- és időbeli ismérvek, melyekből képezzük a sorok neveit is.

a) Minőségi sorok

A minőségi sorok a sokaság olyan tárgyi ismérv szerinti megoszlását mutatják, amelyek változatai csak fogalmilag határolhatók el egymástól. A fősokaság részsokaság szerinti összetételéről, szerkezéről nyújt számunkra információt.

Példa a minőségi sorra:

Aranykorona típusa	**Terület nagyság (hektár)**
10 AK	10
15 AK	11
20 AK	17
25 AK	20
Összesen	**58**

b) Mennyiségi sorok

A mennyiségi sorok a sokaság olyan tárgyi ismérv szerinti megoszlását mutatják, amelyek változatait számszerűen fejezzük ki.

Folytonos mennyiségi ismérvek esetén, illetve nagyszámú ismérvértékkel rendelkező diszkrét mennyiségi ismérveknél osztályközökre bontást használunk.

Az osztályközös mennyiségi sor jellemzői:

- Az egyes osztályok alsó és felső határai
- Az osztályintervallum hossza (i)
- Az egyes osztályok alsó és felső határainak átlaga, az osztályközép (u_i)

A mennyiségi sorok típusai:

- Gyakorisági sor: megmutatja, hogy mennyi egy meghatározott ismérvérték (osztályköz) előfordulásának száma (f_i)
- Értékösszeg sor: megmutatja, hogy mennyi egy meghatározott ismérvértékhez (osztályközhöz) tartozó ismérvértékek összege (s_i)

Példa a mennyiségi sorra:

Név	**Testtömeg (kg)**
Kiss Alex	110
Nagy Ferenc	96
Kovács Jolán	75
Jenei József	68

c) Területi sorok

A területi sorok valamely statisztikai sokaság területi egység szerinti megoszlását mutatják be. A területi lehatárolás lehet minden földrajzi egység szerinti meghatározás (városok, községek, vármegyék, országok, folyók, hegyek, stb.)

Példa a területi sorra:

Vármegye	**Tök termőterület (hektár)**
Hajdú-Bihar	1457
Somogy	1021
Pest	350
Zala	1670
Összesen	**4498**

d) Idősorok

Az idősorok a sokaság alakulását az idő függvényében, az időbeli változásában (mozgásában) mutatják be.

Az állósokaság időbeli változását mutatják be az *állapot idősorok*, amelyek ismérvváltozatai időpontok. Az állapot idősorok készítése mindig összehasonlítási célzatú.

A mozgó sokaság időbeli változásait a *tartam idősorok* mutatják be. A tartam idősor ismérvváltozatai időtartamok. Az időtartamhoz kötött értékekkel a mennyiségi ismérvéknél/arányskála elvégezhető elemzések többsége végrehajtható.

Példa a tartam idősorra:

Hónapok	**Leesett csapadék mennyisége (mm)**
Január	34
Február	21
Március	11
Április	9
Összesen	**75**

Példa az állapot idősorra:

Év	**Leesett csapadék mennyisége (mm), január 1.**
2021	8
2022	9
2023	11
2024	3

A statisztikai sorok (táblázatok) készítésekor kötelezően figyelembe kell vennünk néhány formai követelményt, melyek a következők:

- A statisztikai soroknak, tábláknak mindig rendelkezniük kell rövid, találó címmel. A címnek olyannak kell lennie, hogy az tükrözze az adott táblában, sorban szereplő adatok körét és a csoportosító ismérvet. A címet a tábla felett kell elhelyezni.

- A statisztikai soroknál az oszlopoknak, míg a statisztikai tábláknál a soroknak és az oszlopoknak kötelező feltüntetni a fejlécében azok megnevezését, szükség esetén az adatok mértékegységét is.
- Az oszlop utolsó cellájába célszerű feltüntetni az összesen értéket is (ha van értelme). Az összesen értékeket csak akkor számíthatjuk ki, ha az adatok összegének van tárgyi értelme (állapotidősoroknál nincs értelme az adatok összegének meghatározásának).
- Forrás feltüntetés kötelező. Saját munka esetében a következőt kell feltüntetni: „Forrás: Saját adatgyűjtés", „Forrás: Saját kalkuláció".
- Ha a táblázat valamely cellájához módszertani megjegyzést célszerű adni, akkor meg kell jelölni ezt az értéket és táblázat alatt ugyanazon jelöléssel leírjuk a szükséges megjegyzést.

1.4. A statisztika munka fázisai

A statisztikai munka négy különböző fázisát különíthetjük el. Az első fázis a tervezés, ahol először az adatgyűjtés, illetve a statisztikai elemzés célját kell meghatározni. Célszerű már az elején lehatárolni a gyűjtendő adatok körét. Természetesen az összegyűjtött adatok esetében a törvényes adatkezelést is be kell tartani (tehát az adatok tárolása nem lehetséges azután, hogy a szükséges számításokat elvégeztük). Mikor pontosan tudjuk milyen adatokra van szükségünk, akkor meg kell tervezni az adatgyűjtés gyakoriságát, az idejét, a helyét, illetve a módját.
A tervezést az adatfelvétel követi, mely a statisztikai adatok beszerzését jelenti. Ez valamilyen adatforrásokból való átvételt jelent (lehivatkozva az adatok helyét), vagy valamilyen adatgyűjtést. Az adatgyűjtés történhet „kikérdezéssel" (leggyakrabban kérdőívezést soroljuk ide), megfigyeléssel (mérésekkel), illetve kísérletekkel. Az alapján, hogy milyen az adatgyűjtés köre megkülönböztetünk teljes- vagy részleges adatgyűjtést. A teljes adatgyűjtéskor a sokaság egészét (azaz minden egyedét) figyeljük meg. A részleges adatgyűjtésnél csak a sokaság egy részét figyeljük meg. A legismertebb csoportja a részleges megfigyelésnek a reprezentatív mintavételezés.
A harmadik fázis a feldolgozás, ahol el kell végezni az adatok ellenőrzését, illetve szükség esetén helyesbítést is. Itt történik az osztályozás, az eredmények táblákba/táblázatokba foglalása is. A táblák felépítését mindig az alapján kell elkészíteni, hogy ezek a további elemzéseket segíteni tudják. Az elemzés során matematikai és logikai műveleteket kell végezni, ahol különböző mutatók kiszámítására, illetve azok értelmezésére kell külön figyelmet

szentelni. A kapott eredményekből kell elkészíteni a szöveges elemzéseket, illetve a grafikus ábrákat is.

1.5. Az adatgyűjtés formái

Az adatgyűjtés többféle formában történhet. Az adatok legegyszerűbb formában a kimutatások vagy nyilvántartások alapján gyűjthető össze (pl. céges kimutatások alapján, az önkormányzatok nyilvántartásaiból, a KSH különböző legyűjtéseiből, stb.). A statisztikai adatok összegyűjtésének másik formája az adatfelvételezés. Az adatfelvételezés előtt tisztázni kell az adatfelvételezés célját, az adatfeldolgozás módját, az adatelemzést és a közlés menetét. Abban az esetben, ha ezeket elmulasztjuk, akkor az adatok felhasználhatósága nem az elvárásoknak fog megfelelni. Ha hibás adatokkal dolgozunk a számításoknál, akkor hibás döntéseket hozhatunk, mely nem a megfelelő eredményt fogja számunkra adni a számítást követően. Tehát fontos az adatgyűjtés előtt meghatározni a vizsgálat célját, a statisztikai módszerek lehetséges típusait, a vizsgált sokaság körét (vagy annak egy adott részét).

Az adatfelvételezés a sokaság nagyságától függően lehet teljes körű vagy részleges is. A teljeskörű felvételezés a vizsgált sokaság valamennyi egyedére kiterjed. Ez mindig időigényes felmérést jelent és magas a költség igénye is. Ezen adatfelvételezést csak véges elemszámú sokaság esetén alkalmazhatjuk (pl: népszámlálás, szavazás, stb.). A részleges felvétel a sokaságnak csak egy kiválasztott részére terjed ki. Végtelen elemszámú sokaság megfigyelése csak részleges adatfelvétellel lehetséges (véges, nagyszámú sokaság esetén is alkalmazható). A részleges felvétel a teljeskörű felvétellel szemben olcsóbb és gyorsabb. Cél a részleges adatfelvétel esetében, hogy a mintának alkalmasnak kell lenni a teljes sokaságra vonatkozó következtetések levonására is. A részleges adatfelvételezésnek két fő típusa a reprezentatív – és a nem reprezentatív adatfelvétel. A reprezentatív (mintavételes) adatfelvételnek nevezzük, amikor a megfigyelésbe vont részsokaság kiválasztása meghatározott elvek, módszerek alapján történik és a kiválasztott részsokaság hűen tükrözi (reprezentálja) az egész sokaságot. A megfigyelt sokaság egészét alapsokaságnak, míg a kiválasztott részsokaságot mintasokaságnak nevezzük. A mintából származó minden eredményt a sokaság egészének jellemzésére használhatjuk fel. Természetesen figyelembe kell venni, hogy a mintából való következtetés csak bizonyos hibával együtt értelmezhető (ezt nevezzük mintavételi hibának). A mezőgazdasági témakörben erre nagyon jó példa a várható termésmennyiség becslése, mivel ezt is csak hiba figyelembevétele mellett lehet értelmezni.

A nem reprezentatív adatgyűjtéssel is találkozhatunk a gyakorlatban, mivel sok esetben nincs sem idő, sem pénz arra, hogy egy teljeskörű adatgyűjtést elvégezzünk. A szakdolgozatok során elkészített kérdőíves felmérések is szinte mind ebbe a csoportba esnek. Természetesen a szakdolgozatokhoz elkészített adatgyűjtések is hasznos információkat szolgáltatnak a vizsgált csoportra vonatkozóan, azonban el kell ismernünk, hogy ezen csoportos lekérdezésekből nem általánosíthatók az alapsokaságra a kapott eredmények legtöbb esetben. A kérdőívek elkészítésével is törekedhetünk a minél pontosabb információ gyűjtésére (fontos a kérdőívek helyes megszerkesztése, a feltett kérdések egyértelműek legyenek, a kérdések közérthető megfogalmazása fontos, stb.). Abban az esetben, ha a kérdőíves felmérésnél a kérdéseket pontatlanul fogalmazzuk meg, akkor a kapott válaszok hibával lesznek terhelve, mely a számításokat torzíthatják.

Nagyon sok tanulmányban lehet olvasni, hogy az adott vizsgált minta reprezentatív mintavétel alapján került meghatározásra. Felhívom a figyelmet, hogy a reprezentatív mintavétel csak véletlen mintavétel segítségével valósítható meg. Ekkor az alapsokaság mindegyik egyede valamilyen valószínűséggel (eséllyel) kerülhet a mintába. Ha a mintába kerülő elemeket visszatevéssel választjuk ki, akkor az alapsokaság minden egyes egyede ugyanakkora valószínűséggel kerülhet be a mintába. Ekkor független, azonos eloszlású mintát (FAE-mintát) kapunk. Ebben az esetben az alapsokaság egyedei akár többször is bekerülhetnek a mintába. Természtesen a visszatevés miatt a kapott eredményünket csak fenntartásokkal szabad értelmezni, mivel, ha a szélsőséges elemek többször bekerül a mintába, akkor azok torzítják a kapott eredményt.

Egyszerű véletlen mintáról (azaz EV-mintáról) akkor beszélhetünk, ha a mintába kerülő elemeket visszatevés nélkül választjuk ki. Ebben az esetben az alapsokaság egyedei csak egyszer kerülhetnek a mintába. Összehasonlítva az előző csoporttal megállapítható, hogy az EV-minta jobbnak tekinthető az FAE-mintánál. Ennek oka, hogy a vizsgált alapsokaságból vehető, adott elemszámú összes lehetséges FAE-minták száma nagyobb az EV-minták számánál.

Harmadik csoport a rétegezett mintavétel, amit akkor alkalmazunk, ha egy heterogén sokaságot megközelítőleg homogén részsokaságokra tudunk bontani. Az rétegzett mintát (R-mintát) úgy kapjuk meg, hogy minden egyes rétegből (azaz részsokaságból) EV-mintát veszünk. Az egyes rétegekből vett EV-minták elemszámainak meghatározására két módszert ismert:

1. egyenletes elosztás esetén mindegyik rétegből ugyanannyi elemet válogatunk a mintába.

2. arányos elosztás esetén a rétegek elemszámának sokaságbeli arányát figyelembe véve történik a kiválasztás.

Negyedik csoportunk a csoportos (CS) mintavétel, ahol az alapsokaságot heterogén csoportokra bontjuk és a csoportok közül veszünk EV-mintát. A kiválasztott csoportokat teljes körűen megfigyeljük.

Az utolsó csoport pedig a többlépcsős (TL) mintavétel, mely az előbb felsorolt eljárások kombinálást jelenti. Például egy kétlépcsős mintavétel esetén először csoportos mintavételt alkalmazunk, majd a kiválasztott csoportokat nem teljes-körűen figyeljük meg, hanem ezekből EV-mintákat veszünk.

2. A VISZONYSZÁMOK ALKALMAZÁSI LEHETŐSÉGEI

A viszonyszámok két statisztikai adat hányadosát jelenti. A viszonyszámok a statisztikai elemzések legegyszerűbb, legáltalánosabban használt eszközének tekinthető. A leszármaztatott számok egyik fő csoportját alkotják (Csipkés, 2023).

Kiszámítása: $V = \frac{A}{B}$, ahol

V: viszonyszám

A: viszonyított adat vagy viszonyítás tárgya

B: viszonyítási alap vagy viszonyítás bázisa

2.1. A viszonyszámok csoportjai

A viszonyszámoknak két nagy csoportja van: egynemű adatokból számított viszonyszámok, különnemű adatokból számított viszonyszámok.

Az egynemű adatokból számított viszonyszámok közé soroljuk a következőket:

- megoszlási viszonyszám
- összehasonlító viszonyszám
  - dinamikus viszonyszámok
    - bázisviszonyszám (állandó bázisú viszonyszám)
    - láncviszonyszám (változó bázisú viszonyszám)
  - területi összehasonlító viszonyszám
  - koordinációs viszonyszám
- teljesítmény viszonyszám
  - tervteljesítési viszonyszám
  - tervfeladat viszonyszám

A különnemű adatokból számított viszonyszámok közé az intenzitási viszonyszámot soroljuk.

A viszonyszámok megjelenési formája a következők lehet:

- százalékos forma: $\frac{\textit{viszonyított adat}}{\textit{viszonyítási alap}} * 100$
- együtthatós forma: $\frac{\textit{viszonyított adat}}{\textit{viszonyítási alap}}$ melyet általában akkor használunk, ha további számítási műveleteket akarunk elvégezni a viszonyszámokkal.

– ezrelékes forma: $\frac{viszonyított\ adat}{viszonyítási\ alap}$ *1000, akkor érdemes használni, ha a viszonyított adat és a viszonyítás alapja között jelentős mértékű a nagyságrendi különbség (Szűcs, 2004).

Az első nagy csoport az egynemű adatokból számított viszonyszámok, melyek közös tulajdonsága, hogy egynemű (azonos mértékegységű) adatokat hasonlítunk össze. Az adatok időbeli, térbeli vagy más ismérvek alapján térnek csak el egymástól (Szűcs, 2004). Minden mutató ebben a csoportban százalékos (%) kifejezési formájú, de az eredmény mértékegység nélkül tiszta szám (Huzsvai, 2019).

2.1.1. A megoszlási viszonyszám

A statisztikai sokaság egyes részeinek a sokaság egészéhez viszonyított arányát fejezi ki. A vizsgált sokaság összetételének, azaz belső szerkezetének feltárását segíti elő. Általában mennyiségi és minőségi sorokból számolhatjuk ki. Kifejezési formája százalék.

Számítása: $V_m = \frac{x}{\sum_{i=1}^{n} x_i}$ ahol

V_m: megoszlási viszonyszám

x_i: részsokaság

$\sum_{i=1}^{n} x$ *: teljes sokaság*

A teljes sokaság értéke minden esetben pontosan 100%. A részsokaság értéke minden esetben 0-99,9% közötti értéket vehet fel. Az egyes részsokaságok összege adja a teljes sokaság értékét.

$$\text{rész}_1 + \text{rész}_2 + \ldots + \text{rész}_n = \text{egész}$$

Értelmezés:

25%-os részarány azt jelenti, hogy a teljes sokaság 25%-át az adott részsokaság teszi ki.

2.1.2. Az összehasonlító viszonyszámok

Az összehasonlító viszonyszámok megmutatják, hogy a vizsgált jelenség térben vagy időben elkülönülő adatai hányszorosát, illetve hányad részét teszik ki a bázisul szolgáló adatnak (Statisztika, 2019).

Az összehasonlító viszonyszámok csoportjai:

- dinamikus viszonyszámok
    - bázisviszonyszám (állandó bázisú viszonyszám)
    - láncviszonyszám (változó bázisú viszonyszám)
- területi összehasonlító viszonyszám
- koordinációs viszonyszám

2.1.2.1. A dinamikus viszonyszámok

A dinamikus viszonyszámot csak idősorokra lehet számolni (pl: hó, nap, év, perc, óra, stb.). A két vizsgált időszak adatának (azaz az összehasonlítás tárgyát képező tárgyidőszak és az összehasonlítás alapját képező bázisidőszak adatának) a hányadosa. Ha kettőnél több időszak adata áll a rendelkezésünkre, akkor a dinamikus viszonyszám két típusát számolhatjuk ki: a bázisviszonyszámot és a láncviszonyszámot. Általában az idősor minden időegységére vonatozóan kiszámítjuk az adott viszonyszámot és a kapott viszonyszámsort használjuk fel az elemzésünkhöz (Petres – Tóth, 2004).

A dinamikus viszonyszám első csoportja a **bázisviszonyszám (állandó bázisú viszonyszám)**. A bázis viszonyszámnál az idősor valamennyi adatát ugyanannak az időszaknak az adatához viszonyítjuk. A bázisviszonyszám megmutatja, hogy milyen mértékű volt a vizsgált jelenség változása (Huzsvai, 2019).
Kérdése: Határozza meg a változás mértékét……?
A bázis viszonyszám esetében 100%-nak (azaz 1-nek) a bázis időszakot tekintjük.

Számítása: $V_{Bi} = \frac{x_i}{x_0}$, ahol $i = 1, 2, \ldots n$

V_{Bi} *: bázisviszonyszám*

x_i*: tárgyidőszak adata*

x_0*: bázis időszak adata*

Bázisként általában az idősor első adatát használjuk, de bármely más adata is lehet a viszonyítási alap. Fontos, hogy bázis megválasztására nagy figyelmet kell fordítani minden esetben, mert ez elősegítheti a vizsgált kérdés jobb megvilágítását, de lehet megtévesztő hatású is. Bázisnak olyan adatot célszerű választani, amelynek tükrében reálisan lemérhető a vizsgált jelenség fejlődése (Csipkés, 2023). Együtthatós és százalékos formában is értelmezhetők.

100% felett a bázis viszonyszám növekedést, míg 100% alatt csökkenést jelent a bázis időszakhoz képest.

Értelmezés:

140%-os bázis viszonyszám: a bázis időszak értékéhez képest a vizsgált időszak értéke 40%-kal magasabb.

90%-os bázis viszonyszám: a bázis időszak értékéhez képest a vizsgált időszak értéke 10%-kal alacsonyabb.

A dinamikus viszonyszám másik csoportja a **láncviszonyszám (változó bázisú viszonyszám)**. Az idősor egyes adatait a közvetlenül megelőző időszak adatával hasonlítjuk össze. A láncviszonyszámnál az előző időszakot tekintjük 100%-nak. A láncviszonyszám a változás ütemét mutatja meg.

Kérdése: Határozza meg a változás ütemét……?

Számítása: $V_{Li} = \frac{x_i}{x_{i-.1}}$, ahol *i = 2,3,… n*

V_{Li}: láncviszonyszám

x_i: tárgyidőszak adata

x_{i-1}: a tárgyidőszakot megelőző időszak adata

A láncviszonyszámnál a viszonyítás alapja változó adat, mivel az egyes adatokat az azt megelőző időszak adatához viszonyítjuk. A legelső időszakra nem tudunk láncviszonyszámot számítani, mivel az első időszakot megelőző időszak értékét nem ismerjük. Együtthatós és százalékos formában is értelmezhetők (Csipkés, 2023).

100% felett a láncviszonyszám növekedést, míg 100% alatt csökkenést jelent az előző időszakhoz képest.

Értelmezés:

130%-os láncviszonyszám: az adott időszak értéke az előző időszak értékéhez képest 30%-kal magasabb.

70%-os láncviszonyszám: az adott időszak értéke az előző időszak értékéhez képest 30%-kal alacsonyabb.

Összefüggések a bázis- és láncviszonyszámok között:

- Ha az első időszakot választjuk bázisnak, akkor a második lánc- és bázis viszonyszám értéke megegyezik egymással.
- Ugyanazon idősor adatainál számított bázis- és láncviszonyszámok közvetlenül, egymásból kölcsönösen meghatározhatók.
    - A bázisviszonyszámokból láncviszonyszámot úgy számíthatunk, mintha abszolút számok lennének, vagyis a vizsgált időszak bázisviszonyszámát elosztjuk a megelőző időszak bázisviszonyszámával. Számítása: $V_{Ln} = \frac{V_{B_n}}{V_{B_{n-1}}}$, ahol V_{Ln} az adott időszak lánc viszonyszám értéke, V_{Bn} az adott időszak bázis viszonyszám értéke, V_{Bn-1} az adott időszakot megelőző időszak bázis viszonyszám értéke.
    - Láncviszonyszámokból bázisviszonyszámot úgy számíthatunk adott tárgyidőszakra, hogy a tárgyidőszakig kiszámított láncviszonyszámokat összeszorozzuk (Huzsvai, 2019). Számítása: $V_{Bn} = V_{L_2} * V_{L_3} * V_{L_4} * \ldots * V_{Ln}$, ahol V_{Bn} az adott időszak bázis viszonyszám értéke, $V_{L2} * V_{L3} * \ldots * V_{Ln}$ az adott időszakig bezárólag az összes lánc viszonyszám szorzata. A számítógépbe ezt így tudjuk beírni:
      =SZORZAT(összes láncviszonyszám kijelölése az adott időszakig)

2.1.2.2. A területi összehasonlító viszonyszám

A területi összehasonlító viszonyszámok kalkulációjához területi adatok szükségesek, ahol mindig két terület hányadosát képezzük. Minden esetben az adott terület értékét osztjuk a bázis terület értékével. A területi viszonyszám azt mutatja meg, hogy a vizsgált jelenség térben különböző adatai hányszorosát (hány %-át) teszik ki az alapul választott adatnak (Csipkés, 2023). Egy adott területhez tartozó értéket választunk bázisnak és az összes többi értéket ehhez viszonyítjuk. A bázisterület helyes megválasztása nagyon fontos minden esetben. Szélsőséges területet nem választhatunk bázis területnek, mert akkor torzított eredményt kapunk.

Számítása: $V_{terület} = \frac{x_{A\ terület}}{x_{B\ terület}}$ ahol

$X_{A\ terület}$: *az adott terület értéke*

$X_{B\ terület}$:*a bázisterület értéke*

A kapott eredmény lehet 100% alatti és feletti is. 100% felett azt mondjuk, hogy a bázis területhez képest MAGASABB az értékünk. 100% alatt a bázis területhez képest CSÖKKENÉS következett be.

Értelmezés:

108% területi összehasonlító viszonyszám: a vizsgált terület értéke a bázis területhez képest 8%-kal magasabb.

70% területi összehasonlító viszonyszám: a bázis területhez képest 30%-os csökkenés következett be a vizsgált területen.

2.1.2.3. A koordinációs viszonyszám

Ugyanahhoz a statisztikai sokasághoz tartozó két részsokaság egymáshoz viszonyított arányát fejezi ki. Megmutatja, hogy az egyik részsokaság egy egységére, a másik részsokaság hány egysége jut (Csipkés, 2023).

Számítása: $V_k = \frac{x_1}{x_2}$, ahol

V_k: koordinációs viszonyszám

x_1: viszonyított részsokaság

x_2: viszonyítás alapjául szolgáló részsokaság

A koordinációs viszonyszám kifejezhető százalékos formátumban, illetve az alapadatok mértékegységében is. A kalkulált érték kifejezhető a viszonyítás alapjául választott részsokaság 100 vagy 1000 egységére jutó arányszámaként is.

A koordinációs viszonyszám értéke 100% alatt és felett is lehet.

Értelmezés:

130% koordinációs viszonyszám értéke azt jelenti, hogy a bázis (ami a nevezőben van) értékhez képest a vizsgált értékünk 30%-kal magasabb. Természetes szám formájában 1,30.

70% koordinációs viszonyszám azt jelenti, hogy a bázis értékhez képest a vizsgált értékünk 30%-kal alacsonyabb. Természetes szám formájában 0,70.

2.1.3. Teljesítmény viszonyszámok

A teljesítmény viszonyszámok számításához terv és tény adatok szükségesek. Két típusa van: a tervteljesítési viszonyszám, a tervfeladat viszonyszám.

A **tervteljesítési viszonyszám** esetén a ténylegesen elért eredményt ugyanazon időszak terv szerinti értékéhez viszonyítja. A kapott eredmény azt mutatja meg, hogy a tényadat hogyan alakult a tervezett értékhez képest (Csipkés, 2023).

Számítása: $V_{tt} = \dfrac{adott\ idöszak\ TÉNY\ értéke}{adott\ idöszak\ TERV\ értéke}$

Kifejezési formája százalékos. A kapott tervteljesítési viszonyszám eredménye 100% alatt alul teljesítést, míg 100% felett túlteljesítést mutat az adott időszak terv értékéhez képest.
Értelmezés:
106%-os tervteljesítési viszonyszám azt jelenti, hogy a vizsgált időszak terv adatához képest a vizsgált időszak tény értéke 6%-kal magasabb.
A 70%-os tervteljesítési viszonyszám azt jelenti, hogy a vizsgált időszak terv adatához képest a vizsgált év tény értéke 30%-kal alacsonyabb.

A **tervfeladat viszonyszám**nál az adott időszak terv szerinti értékét viszonyítja a megelőző időszak tényleges értékéhez. A kapott eredmény azt mutatja meg, hogy a megelőző időszak tény adatához képest hány százalékos változást terveznek a következő időszakra (Csipkés, 2023).

Képlete: $V_{tf} = \dfrac{adott\ idöszak\ TERV\ értéke}{megelözö\ idöszak\ TÉNY\ értéke}$

Kifejezési formája százalékos. Ha a tervfeladat viszonyszám 100% alatti értéket vesz fel, akkor a MEGELŐZŐ IDŐSZAK TÉNY értékéhez képest az ADOTT IDŐSZAK TERV adata alacsonyabb értékű. Ha a tervfeladat viszonyszám 100% feletti értéket mutat, akkor a MEGELŐZŐ IDŐSZAK TÉNY értékéhez képest az ADOTT IDŐSZAK TERV adata magasabb értékű.
Értelmezés:
140%-os tervfeladat viszonyszám: a megelőző időszak tény adatához képest a vizsgált időszak terv adata 40%-kal magasabb.
A 60%-os tervfeladat viszonyszám: a megelőző időszak tény adatához képest a vizsgált időszak terv értéke 40%-kal alacsonyabb.

A tervteljesítési és a tervfeladat viszonyszám szorzataként dinamikus viszonyszám kalkulálható (Szűcs, 2004):

$$V_{D\ n.\ időszak} = V_{tf\ n.\ időszak} * V_{tt\ n.\ időszak}$$

2.1.4. A különnemű adatokból számított (intenzitási) viszonyszámok

A különnemű adatokból számított (intenzitási) viszonyszámok megmutatják, hogy az egyik jelenség a másikhoz képest milyen gyakran, milyen sűrűn fordul elő. A hányados nevezőjébe az az adat kerül, amelynek az egységére vonatkoztatjuk a másik adat mennyiségét.

A számításnál a különnemű adatokat hasonlítjuk össze és az adatok egymással logikai kapcsolatban állhatnak. Az egynemű adatokból számított viszonyszámokkal ellentétben kifejezési formájuk főleg együtthatós, tehát a különnemű adatokból számított viszonyszámoknak mértékegysége van. Az intenzitási viszonyszámokat leíró sorokból számítjuk ki, ahol a leíró sor egy-egy adata több intenzitási viszonyszám meghatározásához is felhasználható (Csipkés, 2023). Az intenzitási viszonyszám kiszámításához általános képlet nincs (mivel nem tudjuk előre milyen két érték hányadosát képeznénk).

Különnemű adatokból számított (intenzitási) viszonyszámok fajtái:

- egyenes intenzitási viszonyszám: a viszonyszám változása egyenesen arányos a jelenségben bekövetkezett változással,
- fordított intenzitási viszonyszám: a kiszámított viszonyszám változása fordított arányban van a jelenség változásával,
- nyers intenzitási viszonyszám: a viszonyítandó adatot a teljes viszonyítási alappal osztjuk el,
- tisztított intenzitási viszonyszám: a hányados nevezőjében lévő sokaságból kiválasztható egy olyan részsokaság, amely a számlálóban szereplő adattal szorosabb kapcsolatban van, mint a sokaság más részei, és a számlálót ehhez a részsokasághoz viszonyítjuk (Szűcs, 2004).

A könnyebb értelmezés céljából bemutatok néhány különnemű adatokból számított (intenzitási) viszonyszámot:

- sűrűség mutatók (pl.: népsűrűség, fő/km^2),
- átlagos értéket kifejező mutatószámok (pl.: átlagkereset, Ft/fő, Ft/vállalat, Ft/régió),
- a gazdálkodás hatékonyságát kifejező mutatószámok (pl.: termelékenység, munka-termelékenység, ráfordítások hatékonysága),
- fordított intenzitási viszonyszámok (igényességi mutatók, fordított teljesítmény-mutatók, fordított sebesség mutatók, önköltség Ft/db, Ft/kg, Ft/szolgáltatás) (Huzsvai, 2019).

2.2. A viszonyszámok alkalmazása gyakorlati példákon keresztül

2.2.1. Példa 1 (feladat) - A megoszlási viszonyszám

Ismert 2023. júniusi 1. adatok alapján a földterület főbb művelési ágak szerinti mennyisége Magyarországon ezer hektárban kifejezve (1. táblázat):

1. táblázat: A főbb művelési ágak területi nagysága Magyarországon 2023. június 1-én

Művelési ágak	ezer hektár
Szántóterület	4 173,2
Konyhakert	2,4
Gyümölcsös	83,3
Szőlő	59,4
Gyep	792,6

Forrás: Saját szerkesztés

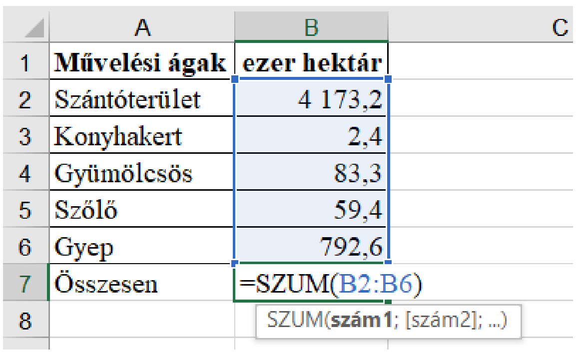
Számítsa ki a főbb művelési ágak területi részarányát Magyarországon!

Példa 1 (megoldás) – A megoszlási viszonyszám

A feladat megoldásához megoszlási viszonyszámot kell számolnunk.

$$V_m = \frac{x}{\sum_{i=1}^{n} x_i}$$

Az x_i az egyes művelési ágakhoz tartozó földterület nagysága (hektárban) Magyarországon. A $\sum_{i=1}^{n} x_i$ a magyarországi művelési ágak terület nagysága.



	A	B	C
1	Művelési ágak	ezer hektár	
2	Szántóterület	4 173,2	
3	Konyhakert	2,4	
4	Gyümölcsös	83,3	
5	Szőlő	59,4	
6	Gyep	792,6	
7	Összesen	=SZUM(B2:B6)	
8		SZUM(szám1; [szám2]; ...)	

1. ábra: A művelési áganként összegzés elvégzése Excelben
Forrás: Saját szerkesztés

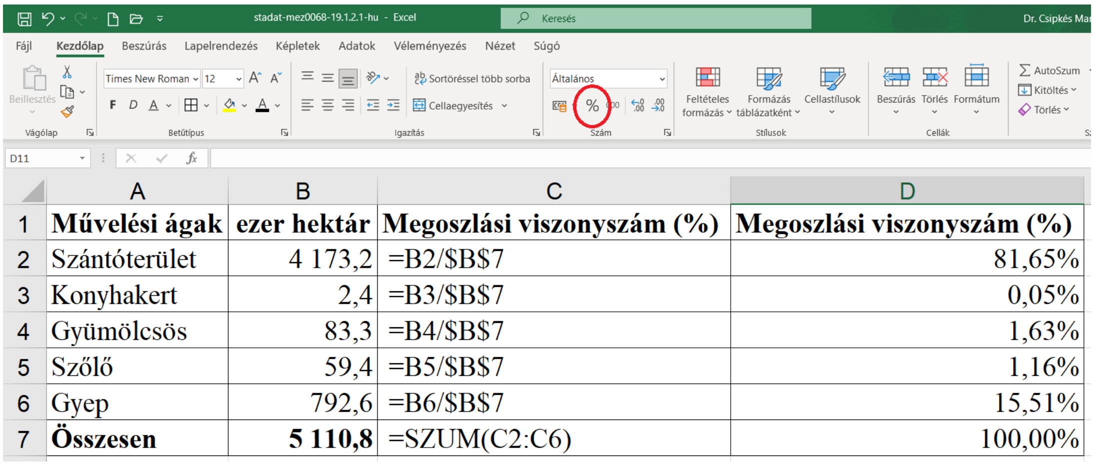
Az első lépés meghatározni a teljes magyarországi terület nagyságát. Ehhez összegeznünk kell az egyes művelési ágakhoz tartozó területi nagyságokat (1. ábra). Ezt az Excelben a =SZUM() függvény segítségével tudjuk megtenni. Beállunk az egérrel a B7-es cellába és egyenlőségjel

(SHIFT és a 7-es billentyű együttes lenyomása) után elkezdjük beírni a függvény nevét, majd zárójelet írunk (SHIFT és a 8-as billentyű együttes lenyomása) és kijelöljük az egyes művelési ágakhoz tartozó területek celláit (B2, B3, B4, B5, B6), majd a zárójelet bezárjuk (SHIFT és a 9-es billentyű együttes lenyomása). A cellában lévő képlet: =SZUM(B2:B6).

Az összesített értékünk 5 110,8 ezer hektár, mely azt jelenti, hogy a magyarországi főbb művelési ágak területi nagysága 5,1 millió hektár volt 2023. június 1.-én.

A következő lépés a megoszlási viszonyszámok kiszámítása, ehhez az alaptáblázat mellé egy új oszlopot készítünk, melynek elnevezése „Megoszlási viszonyszám (%)".

A megoszlási viszonyszám képletében a számláló (x_i) értékei soronként rendre az egyes művelési ágakhoz tartozó földterület nagyságok (hektár), míg a nevező SZUM(x_i) értéke a magyarországi művelési ágak földterület nagysága (5 110,8 ezer hektár).



	A	B	C	D
1	**Művelési ágak**	**ezer hektár**	**Megoszlási viszonyszám (%)**	**Megoszlási viszonyszám (%)**
2	Szántóterület	4 173,2	=B2/$B$7	81,65%
3	Konyhakert	2,4	=B3/$B$7	0,05%
4	Gyümölcsös	83,3	=B4/$B$7	1,63%
5	Szőlő	59,4	=B5/$B$7	1,16%
6	Gyep	792,6	=B6/$B$7	15,51%
7	**Összesen**	**5 110,8**	=SZUM(C2:C6)	100,00%

2. ábra: A megoszlási viszonyszámok kiszámítása az Excelben
Forrás: Saját szerkesztés

A Szántóterülethez tartozó megoszlási viszonyszámot úgy számíthatjuk ki, hogy a Szántóterülethez tartozó terület mennyiség (4 173,2 ezer hektár) értékét osztjuk a magyarországi terület nagyságával (5 110,8 ezer hektár) (2. ábra). Ehhez:

1. beállunk az egérrel a C2-es cellába,
2. egyenlőségjelet írunk (SHIFT és a 7-es billentyű együttes lenyomása),
3. kijelöljük a Szántóterülethez tartozó területi egységet, ami a B2-es cella,
4. osztás jelet (/) írunk,
5. kijelöljük a magyarországi terület összesített értékét (B7),
6. az F4 billentyűvel rögzítjük a cellát dollárjelekkel ($B$7), mivel ugyanez az érték fog bekerülni minden képlet nevezőjébe,
7. entert nyomunk,

8. a bázisviszonyszám kifejezési formája százalékos, ezért az eredményt százalékká (%) kell alakítanunk a fenti menüsorban található % jel segítségével. Ezt úgy tudjuk megtenni, hogy a megoldást tartalmazó cellára (C2) kattintunk, majd a % jelre.

A Szántóterülethez tartozó megoszlási viszonyszám tehát 4 173,2 / 5 110,8 = 0,8165. A 0,8165 értéket százalékos formátumba kifejezve kapjuk meg a 81,65%-ot. Ez az érték az jelenti, hogy a Szántóterület a magyarországi művelési ágak területének 81,65%-át teszi ki 2023. június 1.-én.

A többi művelési ághoz tartozó megoszlási viszonyszámot ugyanezzel a képlettel számoljuk ki az Excelben. Legkönnyebben úgy tudjuk kiszámolni, hogy az előbb kiszámolt Szántóterület értékének a cellájára állunk és a cella jobb alsó sarkához állunk az egérrel, amint megjelenik egy fekete + jel a cellánál lehúzzuk lefelé az egeret, amíg az kitölti nekünk a megfelelő képlettel a többi cellánkat is, ezáltal automatikusan kiszámításra kerül a többi érték is. Ehhez fontos az első cellában helyesen megadni a képletet, a szükséges fixálásokkal ($ jelek beszúrásával) együtt.

A Konyhakerthez tartozó megoszlási viszonyszám a Konyhakert terület és a magyarországi terület hányadosa (=B3/$B$7). A Konyhakerthez tartozó megoszlási viszonyszám így 2,4 / 5110,8 = 0,0005 = 0,05%, mely azt jelenti, hogy a Konyhakert területe a magyarországi művelési ágak területének 0,05%-át teszi ki 2023. június 1.-én.

A Gyümölcsöshöz tartozó megoszlási viszonyszám a Gyümölcsös terület és a magyarországi terület hányadosa (=B4/$B$7). A Gyümölcsöshöz tartozó megoszlási viszonyszám így 83,3 / 5 110,8 = 0,0163 = 1,63%, mely azt jelenti, hogy a Gyümölcsös terület a magyarországi művelési ágak területének 1,63%-át teszi ki 2023. június 1.-én.

A Szőlőhöz tartozó megoszlási viszonyszám a Szőlő terület és a magyarországi terület hányadosa (=B5/$B$7). A Szőlőhöz tartozó megoszlási viszonyszám így 59,4 / 5 110,8 = 0,0116 = 1,16%, mely azt jelenti, hogy a Szőlő terület a magyarországi művelési ágak területének 1,16%-át teszi ki 2023. június 1.-én.

A Gyephez tartozó megoszlási viszonyszám a Gyep terület és a magyarországi terület hányadosa (=B6/$B$7). A Gyephez tartozó megoszlási viszonyszám így 792,6 / 5 110,8 = 0,1551 = 15,51%, mely azt jelenti, hogy a Gyep terület a magyarországi művelési ágak területének 15,51%-át teszi ki 2023. június 1.-én.

Az egyes részekre kiszámolt megoszlási viszonyszám értékek összege 100%, ez a részértékek összegzésével =SZUM(B2:B6) ellenőrizhető.

2.2.2. Példa 2 (feladat) – A megoszlási viszonyszám

Ismert Hadú-Bihar vármegye földterületének alakulása művelési ágak szerint ezer hektárban kifejezve 2022. évben (2. táblázat):

2. táblázat: Hadú-Bihar vármegye földterületének alakulása művelési ágak szerint ezer hektárban kifejezve 2022. évben

Művelési ág	Hajdú-Bihar vármegye földterülete művelési ágak szerint (ezer hektár)
Szántóterület	330,2
Konyhakert	6
Gyümölcsös	4,2
Szőlő	2,2
Gyep	119,2
Erdő	32,4
Nádas	9,3
Halastó	5,1
Művelés alól kivett terület	85

Forrás: Saját szerkesztés

Számítsa ki Hajdú-Bihar vármegyében a művelési ágak részarányát 2022. évben!

Példa 2 (megoldás) – A megoszlási viszonyszám

	A	B	C
1	**Művelési ág**	**Hajdú-Bihar vármegye földterülete művelési ágak szerint (ezer hektár)**	**Megoszlási viszonyszám %**
2	**Szántóterület**	330,2	55,63%
3	**Konyhakert**	6	1,01%
4	**Gyümölcsös**	4,2	0,71%
5	**Szőlő**	2,2	0,37%
6	**Gyep**	119,2	20,08%
7	**Erdő**	32,4	5,46%
8	**Nádas**	9,3	1,57%
9	**Halastó**	5,1	0,86%
10	**Művelés alól kivett terület**	85	14,32%
11	**Összesen**	**593,6**	**100,00%**

3. ábra: A megoszlási viszonyszámok kiszámítása az Excelben

Forrás: Saját szerkesztés

A =SZUM() függvény segítségével összegezzük az egyes művelési ágakhoz tartozó területek nagyságát (3. ábra) (593,6 ezer hektár). Az adatok alapján Hajdú-Bihar vármegyében a művelési ágak összes területe 593,6 ezer hektár volt a 2022. évben.

A Szántóterület művelési ág megoszlási viszonyszáma: 330,2 ezer hektár / 593,6 ezer hektár = 0,5563 = 55,63%.

Értelmezés: Hajdú-Bihar vármegyében a szántóterület földterülete a Hajdú-Bihar megyei összes földterület 55,63%-át tette ki 2022. évben.

A Konyhakert művelési ág megoszlási viszonyszáma: 6 ezer hektár / 593,6 ezer hektár = 0,0101 = 1,01%.

Értelmezés: Hajdú-Bihar vármegye összes földterületének 1,01%-át a konyhakert tette ki a 2022. évben.

A Gyep művelési ág megoszlási viszonyszáma: 119,2 ezer hektár / 593,6 ezer hektár = 0,2008 = 20,08%.

Értelmezés: Hajdú-Bihar vármegye összes földterületének 20,08%-át a gyep tette ki a 2022. évben.

2.2.3. Példa 3 (feladat) – A koordinációs viszonyszám

Ismerjük az Észak-alföldi régió csirkemell és kenyér forgalom alakulását 2019-2023 időszakban (3. táblázat):

3. táblázat: Az Észak-alföldi régió csirkemell és kenyér forgalmának alakulása a 2019-2023 között

Év	Forgalom (kg)	
	Csirkemell	Kenyér
2019	254 364	345 704
2020	263 978	378 011
2021	274 121	345 789
2022	277 077	364 700
2023	279 936	364 766

Forrás: Saját szerkesztés

a) Határozza meg az 1 kg kenyérre jutó csirkemell forgalom értékét a vizsgált években!

b) Határozza meg a kenyér és a szendvicssonka koordinációs viszonyszám értékét. A kenyeret válassza a bázis értéknek.

Példa 3 (megoldás) – A koordinációs viszonyszám

a) <u>Határozza meg az 1 kg kenyérre jutó csirkemell forgalmat az egyes években!</u>

A feladat elvégzéséhez koordinációs viszonyszámokat kell számolnunk ($V_k = \frac{x_1}{x_2}$).

A képletében az X_1 a csirkemellhez tartozó adott évi forgalom értéke. Az X_2 a kenyérhez tartozó ugyanazon évi forgalom értéke. Első lépésként az alaptáblázat mellé egy új oszlopot készítünk (4. ábra), melynek elnevezése „Hányadosképzés”.

	A	B	C	D	E
1	Év	Forgalom (kg)		Hányados képzés	Hányados képzés
2		Csirkemell	Kenyér		
3	2019	254 364	345 704	=B3/C3	0,7358
4	2020	263 978	378 011	=B4/C4	0,6983
5	2021	274 121	345 789	=B5/C5	0,7927
6	2022	277 077	364 700	=B6/C6	0,7597
7	2023	279 936	364 766	=B7/C7	0,7674

4. ábra: A hányados képzés kiszámítása az Excelben

Forrás: Saját szerkesztés

A 4. ábrán látható, hogy a 2019. évhez tartozó hányadost úgy határozhatjuk meg, hogy a csirkemellhez tartozó 2019. évi forgalom értéket (254 364 kg) elosztjuk a kenyér 2019. évi forgalmával (345 704 kg).

Ehhez:

1. beállunk az egérrel az D3 cellába,
2. egyenlőségjelet írunk (SHIFT és 7),
3. kijelöljük a 2019. évi csirkemellhez tartozó forgalom értékét (B3),
4. osztás jelet (/) írunk,
5. kijelöljük a 2019. évi kenyér forgalmának értékét (C3),
6. entert nyomunk.

Tehát az eredmény a 254 364 és a 345 704 hányadosa, mely 0,7358 kg, mely azt jelenti, hogy 2019-ben az Észak-alföldi régióban 1 kg kenyérre 0,7358 kg csirkemell forgalom jutott.

A 2019. évi hányados kiszámítása után minden évre kiszámolható a hányados az Excelben. Az egérrel oda kell állunk az D3 cella jobb alsó sarkához, amikor megjelenik a fekete + jel rákattintunk és húzzuk lefelé a kurzort, amíg kitöltődik a megfelelő képlettel a többi cella is, ezáltal automatikusan kiszámítva a többi értéket. Ehhez fontos az első cellában a képlet helyes megadása.

A 2020. évhez tartozó hányados a leírtak alapján a csirkemellhez tartozó 2020. évi forgalom érték (263 978 kg) és a kenyér 2020. évi forgalom értékének hányadosa (378 011 kg) (=B4/C4) vagyis 263 978 / 378 011 = 0,6983 kg. Ez alapján megállapítható, hogy 2020-ban az Észak-alföldi régióban 1 kg kenyérre 0,6983 kg csirkemell jutott.

A 2021. évhez tartozó hányados így a csirkemellhez tartozó 2021. évi forgalom értékének (274 121 kg) és a kenyér 2020. évi forgalmának hányadosa (345 789 kg) (=B5/C5) vagyis 274 121 / 345 789 = 0,7927 kg. Ez alapján megállapítható, hogy 2021-ban az Észak-alföldi régióban 1 kg kenyérre 0,7927 kg csirkemell jutott.

A többi évhez tartozó koordinációs viszonyszámok hasonlóan számíthatók és értelmezhetők.

b) <u>Határozza meg a kenyér és a szendvicssonka koordinációs viszonyszám értékét. Bázisul a kenyeret válassza.</u>

A számítása ugyanolyan módon történik, mint az a) részben, csak a hányados képzést követően a kapott eredményt százalékra át kell alakítani. Azaz 0,7358*100 = 73,58%. A kért koordinációs viszonyszám értékünk 73,58%.

2.2.4. Példa 4 (feladat) – A koordinációs viszonyszám

A foglalkoztatottak nemek szerinti megoszlása Magyarországon 2024.01.01 napon:

Férfiak: 2 078,11 ezer fő

Nők: 1 867,01 ezer fő

Határozzuk meg, hogy 100 fő foglalkoztatott férfira hány fő foglalkoztatott nő jutott!

Példa 4 (megoldás) – A koordinációs viszonyszám

A feladat megoldásához koordinációs viszonyszámot számolunk. A foglalkoztatott nők számát (1 867,01 ezer fő) osztjuk el a foglalkoztatott férfiak számával (2 078,11 ezer fő). Az eredményt 100-zal szorozzuk, mivel azt kell meghatároznunk, hogy 100 fő foglalkoztatott férfira hány fő foglalkoztatott nő jutott.

Koordinációs viszonyszám: $\frac{foglalkoztatott\ nök}{foglalkoztatott\ férfiak} * 100 = \frac{1867{,}01}{2078{,}11} * 100 = 0{,}8984 * 100 =$ 89,84 fő

Kalkuláció alapján megállapítható, hogy Magyarországon 2024.01.01 napon 100 fő foglalkoztatott férfira 89,84 fő foglalkoztatott nő jutott.

2.2.5. Példa 5 (feladat) – A bázis- és láncviszonyszámok

Ismert a borsó szántóföldi növény termésmennyisége tonnában kifejezve Magyarországon 2016-2023 között (4. táblázat):

4. táblázat: A borsó szántóföldi növény termésmennyisége 2016-2023 között tonnában kifejezve Magyarországon

Év	Borsó
2016	47 083
2017	47 760
2018	31 782
2019	38 665
2020	24 301
2021	30 233
2022	24 356
2023	25 789

Forrás: Saját szerkesztés

a) Számítsa ki a magyarországi borsó termésmennyiség alakulását a 2016. bázisévhez képest!

b) Számítsa ki a magyarországi borsó termésmennyiség változását az előző évhez képest!

Példa 5 (megoldás) – A bázis- és láncviszonyszámok

a) Számítsa ki a magyarországi borsó termésmennyiség alakulását a 2016. bázisévhez képest!

A feladat elvégzéséhez bázisviszonyszámokat kell számolnunk.

$$V_{Bi} = \frac{x_i}{x_0}$$

A képlet számlálója (x_i) az egyes évekhez tartozó borsó termésmennyiség (tonna) értékek. A nevező (x_0) minden esetben a bázisul választott évhez tartozó érték, esetünkben ez a 2016. évi termésmennyiség (47 083 tonna).

A bázisviszonyszámok meghatározásához az alaptáblázat mellé, első lépésben egy új oszlopot készítünk (5. ábra), melynek elnevezése „Bázisviszonyszám (%)”.

Az 5. ábrán látható a bázisviszonyszámok kiszámításának menete. A bázisviszonyszámok kalkulációját követően megállapítható, hogy az állandó bázisul választott időszakban az érték 1, azaz 100%. Így a 2016. évhez tartozó bázisviszonyszám 100%.

	A	B	C	D	E
1	**Év**	**x**	**Borsó termésmennyiség (tonna)**	**Bázis-viszonyszám %**	**Bázis-viszonyszám %**
2	**2016**	x_1	47 083	=C2/$C$2	100,00%
3	**2017**	x_2	47 760	=C3/$C$2	101,44%
4	**2018**	x_3	31 782	=C4/$C$2	67,50%
5	**2019**	x_4	38 665	=C5/$C$2	82,12%
6	**2020**	x_5	24 301	=C6/$C$2	51,61%
7	**2021**	x_6	30 233	=C7/$C$2	64,21%
8	**2022**	x_7	24 356	=C8/$C$2	51,73%
9	**2023**	x_8	25 789	=C9/$C$2	54,77%

5. ábra: A bázisviszonyszámok kiszámítása az Excelben
Forrás: Saját szerkesztés

Képlettel számítva ezt úgy kapjuk meg, hogy:

1. az egérrel beállunk az D2 cellába,
2. egyenlőségjelet írunk (SHIFT és 7),
3. kijelöljük a 2016. évhez tartozó termésmennyiséget (47 083), ami a C2 cella,
4. osztás jelet (/) írunk,
5. kijelöljük a bázisnak választott évhez tartozó értéket, azaz a 2016. évi termésmennyiséget (C2),
6. az F4 billentyűvel rögzítjük ezt a cellát $ jelekkel ($C$2), mivel ugyanaz az érték fog bekerülni minden képlet nevezőjébe,
7. entert nyomunk,
8. a bázisviszonyszám kifejezési formája százalékos, ezért az eredményt százalékká kell alakítanunk a fenti menüsorban található % jellel. Ezt úgy tudjuk megtenni, hogy a megoldást tartalmazó cellára kattintunk, majd a % jelre kattintunk.

Az első bázisviszonyszám (2016. évi) kiszámítása után az Excelben van lehetőségünk arra, hogy a többi évhez tartozó cellába automatikusan írjuk be a szükséges képletet. Ezt úgy tehetjük meg, hogy az E2 cella jobb alsó sarkához állunk a kurzorral, amikor megjelenik a fekete + jel kattintunk és húzzuk lefelé az egeret, amíg az kitölti nekünk a megfelelő képlettel a cellákat. Ehhez nagyon fontos, hogy az első cellában helyesen adjuk meg a képletet és a szükséges rögzítéseket ($ jelekkel való fixálást) megfelelően végezzük el.

Nézzünk néhány évet meg, hogy is történik a számolásuk:

- A 2017. évhez tartozó bázisviszonyszám számításánál a számláló 47 760 tonna, a nevező pedig 47 083 tonna. A 2017. évhez tartozó bázisviszonyszám értéke

47 760 / 47 083 = 1,0144 = 101,44%. Tehát a magyarországi borsó termésmennyisége a 2016. évi bázisévhez képest 2017-re 1,44%-kal nőtt.

- A 2018. évhez tartozó bázisviszonyszám számításánál a számláló 31 782 tonna, a nevező pedig 47 083 tonna. A 2018. évhez tartozó bázisviszonyszám értéke 31 782 / 47 083 = 0,6750 = 67,50%. Tehát a magyarországi borsó termésmennyiségében a 2016. évi bázisévhez képest 2018-re 32,5%-os csökkenés következett be.
- A többi évhez tartozó bázisviszonyszám kiszámítása és értelmezése hasonlóan történik.

A „Bázisviszonyszám (%)” elnevezésű oszlopban szereplő értékek felvehetnek 100% alatti és 100% feletti értéket is. Amennyiben a bázisviszonyszám 100% alatti, akkor csökkenésről beszélhetünk. Pl.: 91% → 91% - 100% = - 9%, azaz a bázisévhez képest az adott évre 9%-os csökkenés következett be. Ha viszont 100% feletti az érték, akkor a bázisévhez képest történő növekedésről beszélhetünk. Pl.: 134% → 134% - 100% = 34%, azaz a bázisévhez képest az adott évre 34%-os növekedés következett be.

b) Számítsa ki a magyarországi borsó termésmennyiség változását az előző évhez képest!

A feladat elvégzéséhez láncviszonyszámokat kell számolnunk.

$$V_{L\,i} = \frac{x_i}{x_{i-.1}}$$

A képlet számlálójába (x_i) soronként rendre az egyes évekhez tartozó borsó termésmennyiség (tonna) értékeket helyettesítjük be. A nevezőjébe (x_{i-1}) pedig az adott évet megelőző évhez tartozó borsó termésmennyiség értéket (tonna).

Első lépésként az alapfeladat mellé egy új oszlopot készítünk, melynek elnevezése „Láncviszonyszám (%)".

	A	B	C	D	E
1	**Év**	**x**	**Borsó termésmennyiség (tonna)**	**Lánc-viszonyszám %**	**Lánc-viszonyszám %**
2	**2016**	x_1	47 083	-	-
3	**2017**	x_2	47 760	=C3/C2	101,44%
4	**2018**	x_3	31 782	=C4/C3	66,55%
5	**2019**	x_4	38 665	=C5/C4	121,66%
6	**2020**	x_5	24 301	=C6/C5	62,85%
7	**2021**	x_6	30 233	=C7/C6	124,41%
8	**2022**	x_7	24 356	=C8/C7	80,56%
9	**2023**	x_8	25 789	=C9/C8	105,88%

6. ábra: A láncviszonyszámok kiszámítása az Excelben
Forrás: Saját szerkesztés

A 6. ábra a láncviszonyszámok kiszámítását mutatja be. A 2016. évre nem tudunk láncviszonyszámot számolni, mivel nem ismerjük a megelőző évhez (2015) tartozó adatot, ezért ebbe a cellába (kötőjelet) (-) írunk, majd entert nyomunk.

A 2017. évhez tartozó láncviszonyszám kiszámítása a következőképpen történik:

1. az egérrel beállunk az D3 cellába,
2. egyenlőségjelet írunk (SHIFT és 7),
3. rákattintunk az egérrel a 2017. évhez tartozó borsó termésmennyiség értéket tartalmazó cellára (C3),
4. osztás jelet (/) írunk,
5. rákattintunk az egérrel a 2016. évhez tartozó borsó termésmennyiség értéket tartalmazó cellára (C2),
6. entert nyomunk,
7. a láncviszonyszám kifejezési formája százalékos, ezért az eredményt százalékká (%) kell alakítanunk.

Így az eredmény 47 760 / 47 083 = 1,0144 = 101,44%, azaz a borsó termésmennyisége 2017. évben az előző évhez (2016) képest 1,44%-os növekedést mutatott.
Ha megnézzük a 2017. évhez tartozó bázisviszonyszámot, akkor láthatjuk, hogy a két érték megegyezik egymással. Ez az egyik összefüggés a bázis- és a láncviszonyszámok között, mely szerint a bázis év utáni első időszakban a bázis- és a láncviszonyszám megegyezik egymással.
A 2017. évi láncviszonyszám kiszámítása után az Excelben lehetőség van arra, hogy a többi évhez tartozó cellába automatikusan írjuk be a szükséges képletet. Ezt úgy tehetjük meg, hogy az D3 cella jobb alsó sarkához állunk az egérrel, amikor megjelenik a fekete + jel kattintunk és húzzuk lefelé az egeret, amíg az kitölti nekünk a megfelelő képlettel a többi cellát. Ehhez fontos, hogy az első cellában helyesen adjuk meg.
A 2018. évhez tartozó láncviszonyszám számításánál a számláló tehát 31 782 tonna, a nevező 47 760 tonna. Így a 2018. évhez tartozó láncviszonyszám értéke 31 782 / 47 760 = 0,6655 = 66,55%, azaz a 2018. évi borsó termésmennyisége az előző évhez (2017) képest 33,45%-kal csökkent.
A többi évhez tartozó láncviszonyszám kiszámítása és értelmezése a fenti lépések alapján, hasonlóan történik.
A „Láncviszonyszám" elnevezésű oszlopban szereplő értékek felvehetnek 100% alatti és 100% feletti értéket is. Amennyiben a megoldás 100% alatti, akkor az előző évhez képest csökkenés történt. Ha 100% feletti a kapott eredmény, akkor az előző évhez képest növekedés következett be.

2.2.6. Példa 6 (feladat) – A bázis- és láncviszonyszámok

Adott a 2008-2022. évek közötti szántó művelési ág földbérleti díja hektáronként Magyarországon:

5. táblázat: A szántó művelési ág földbérleti díja 2008-2022 között Magyarországon

Év	Szántó éves földbérleti díja (Ft/hektár)
2008	24 600
2009	25 900
2010	28 900
2011	32 800
2012	38 600
2013	40 600
2014	42 700
2015	45 700
2016	49 400
2017	52 300
2018	55 700
2019	60 000
2020	64 400
2021	72 700
2022	81 600

Forrás: Saját szerkesztés

a) Számítsa ki a földbérleti díj változásának mértékét (a 2008. évhez képest) a vizsgált időszakban!
b) Számítsa ki a földbérletidíj változásának ütemét!
c) Mutassa be hogyan számíthatók ki a bázisviszonyszámok felhasználásával a lánc-viszonyszámok!
d) Mutassa be hogyan számíthatók ki a láncviszonyszámok felhasználásával a bázis-viszonyszámok!

Példa 6 (megoldás) – A bázis- és láncviszonyszámok

a) Számítsa ki a földbérletidíj változásának mértékét (a 2008. évhez képest) a vizsgált időszakban!

A változás mértékét a bázisviszonyszám segítségével tudjuk meghatározni.

	A	B	C	D
1	**Év**	**Szántó éves földbérleti díja (Ft/hektár)**	**Bázis viszonyszám %**	
2	**2008**	24 600	=B2/$B$2	100,00%
3	**2009**	25 900	=B3/$B$2	105,28%
4	**2010**	28 900	=B4/$B$2	117,48%
5	**2011**	32 800	=B5/$B$2	133,33%
6	**2012**	38 600	=B6/$B$2	156,91%
7	**2013**	40 600	=B7/$B$2	165,04%
8	**2014**	42 700	=B8/$B$2	173,58%
9	**2015**	45 700	=B9/$B$2	185,77%
10	**2016**	49 400	=B10/$B$2	200,81%
11	**2017**	52 300	=B11/$B$2	212,60%
12	**2018**	55 700	=B12/$B$2	226,42%
13	**2019**	60 000	=B13/$B$2	243,90%
14	**2020**	64 400	=B14/$B$2	261,79%
15	**2021**	72 700	=B15/$B$2	295,53%
16	**2022**	81 600	=B16/$B$2	331,71%

7. ábra: A bázisviszonyszámok kiszámítása az Excelben
Forrás: Saját szerkesztés

A 7. ábra az egyes évekhez tartozó bázisviszonyszámok számítását mutatja be. Melynek lépései:

1. az egérrel beállunk a C2 cellába,
2. egyenlőségjelet írunk (SHIFT és 7),
3. kijelöljük a 2008. évhez tartozó szántó földbérleti díj értéket (B2),
4. osztás jelet (/) írunk,
5. kijelöljük a bázisnak választott évhez tartozó értéket, azaz a 2008. évi szántó földbérleti díj értéket (B2),
6. az F4 billentyűvel rögzítjük ezt a cellát $ jelekkel ($B$2),
7. entert nyomunk,
8. az eredményt százalékká alakítjuk.

A 2008. évi bázisviszonyszám (D2): =B2/$B$2 = 24 600 / 24 600 = 1 = 100%.

A képletet csak az első cellába (D2) szükséges begépelni, a többi cellát automatikusan ki tudjuk tölteni, ha a C2 cella jobb alsó sarkához állunk a kurzorral és a megjelenő fekete + jelet az egérrel húzzuk lefelé a többi cellára.

A 2009. évhez tartozó bázisviszonyszám (D3): =B3/$B$2 = 25 900 / 24 600 = 1,0528 = 105,28%, mely azt jelenti, hogy a szántó éves földbérleti díjában a 2008. évről a 2009. évre 5,28%-os növekedés következett be Magyarországon.

A 2010. évhez tartozó bázisviszonyszám (D4): =B4/$B$2 = 28 900 / 24 600 = 1,1748 = 117,48%, mely azt jelenti, hogy a szántó éves földbérleti díjában a 2008. évről a 2010. évre 17,48%-os növekedés következett be Magyarországon.

A többi évhez tartozó bázisviszonyszámok hasonlóan számíthatók ki és értelmezhetők.

b) Számítsa ki a földbérlati díj változásának ütemét!

A változás ütemét a láncviszonyszám kiszámításával lehet meghatározni.

	A	B	C	D
1	**Év**	**Szántó éves földbérleti díja (Ft/hektár)**	**Lánc viszonyszám %**	
2	**2008**	24 600	-	-
3	**2009**	25 900	=B3/B2	105,28%
4	**2010**	28 900	=B4/B3	111,58%
5	**2011**	32 800	=B5/B4	113,49%
6	**2012**	38 600	=B6/B5	117,68%
7	**2013**	40 600	=B7/B6	105,18%
8	**2014**	42 700	=B8/B7	105,17%
9	**2015**	45 700	=B9/B8	107,03%
10	**2016**	49 400	=B10/B9	108,10%
11	**2017**	52 300	=B11/B10	105,87%
12	**2018**	55 700	=B12/B11	106,50%
13	**2019**	60 000	=B13/B12	107,72%
14	**2020**	64 400	=B14/B13	107,33%
15	**2021**	72 700	=B15/B14	112,89%
16	**2022**	81 600	=B16/B15	112,24%

8. ábra: A láncviszonyszámok kiszámítása az Excelben
Forrás: Saját szerkesztés

A 8. ábra az egyes évekhez tartozó láncviszonyszámok kiszámítását mutatja be. A 2008. évre vonatkozóan láncviszonyszámot nem tudunk számolni, ezért a hozzá tartozó cellát (C2) kihúzzuk (beállunk a C2 cellába, begépeljük a – jelet és entert nyomunk).

A 2009. évhez tartozó láncviszonyszám kiszámítása a következőképpen történik:

1. az egérrel beállunk a C3 cellába,
2. egyenlőségjelet írunk (SHIFT és 7),
3. rákattintunk az egérrel a 2009. évhez tartozó szántó földbérleti díj érték cellájára (B3),
4. osztás jelet (/) írunk,
5. rákattintunk az egérrel a 2008. évhez tartozó szántó földbérleti díj érték cellájára (B2),
6. entert nyomunk,
7. az eredményt százalékká (%) alakítjuk.

A 2008. évhez tartozó láncviszonyszám (D3): =B3/B2 = 25 900 / 24 600 = 1,05283%, azaz a szántó földbérleti díj értéke a 2008. évhez képest a 2009. évre 5,28%-kal növekedett Magyarországon.
A képletet csak az első cellába (C3) kell begépelni, a többit automatikusan ki tudjuk tölteni, ha a cella jobb alsó sarkához állunk a kurzorral és a megjelenő fekete + jelet az egérrel húzzuk lefelé a többi cellára.
A 2010. évhez tartozó láncviszonyszám (C4): =B4/B3 = 28 900 / 25 900 = 1,1158 =111,58%, azaz a szántó földbérlati díj értéke 2009. évről a 2010. évre 11,58%-kal nőtt Magyarországon.
A többi évhez tartozó láncviszonyszámok hasonlóan számíthatók ki és értelmezhetők.
Az előző példánál (A bázis- és láncviszonyszámok megoldásánál) leírtaknak megfelelően a képletet csak az első cellába (D3) szükséges begépelni, a többi cellát automatikusan ki tudjuk tölteni a cella jobb alsó sarkában megjelenő fekete + jel egérrel történő húzásával.

c) Mutassa be hogyan számíthatók ki a bázisviszonyszámok felhasználásával a láncviszonyszámok!

Bázisviszonyszámokból láncviszonyszámot úgy számíthatunk, hogy az adott időszakhoz tartozó bázisviszonyszám és az adott időszakot megelőző időszakhoz tartozó bázisviszonyszám hányadosát képezzük.

$$V_{Ln} = \frac{V_{B_n}}{V_{B_{n-1}}}$$

A 9. ábrán látható, hogyan számíthatunk bázisviszonyszámokból láncviszonyszámokat. A 2008. évre nem tudunk láncviszonyszámot számolni, ezért kihúzzuk a hozzá tartozó cellát (az egérrel beállunk a C2-es cellába, begépeljük a gondolatjelet (-) és entert nyomunk).

A 2009. évi láncviszonyszámról tudjuk, hogy megegyezik a 2009. évi bázisviszonyszámmal, de képlet segítségével is kiszámíthatjuk úgy, hogy vesszük a 2009. évi bázisviszonyszám és a 2008. évi bázisviszonyszám hányadosát. Ehhez:

1. az egérrel beállunk a C3 cellába,
2. egyenlőségjelet írunk (SHIFT és 7),
3. rákattintunk az egérrel a 2009. évhez tartozó bázisviszonyszámot tartalmazó cellára (B3),
4. osztás jelet (/) írunk,
5. rákattintunk az egérrel a 2008. évhez tartozó bázisviszonyszámot tartalmazó cellára (B2),
6. entert nyomunk,
7. a láncviszonyszám kifejezési formája százalékos, ezért az eredményt százalékká alakítjuk a fenti menüsorban található % jel segítségével. Ezt úgy tudjuk megtenni, hogy a megoldást tartalmazó cellára kattintunk, majd a % jelre.

	A	B	C	D
1	**Év**	**Bázis viszonyszám %**	**Lánc viszonyszám (%)**	
2	**2008**	100,00%	-	-
3	**2009**	105,28%	=B3/B2	105,28%
4	**2010**	117,48%	=B4/B3	111,58%
5	**2011**	133,33%	=B5/B4	113,49%
6	**2012**	156,91%	=B6/B5	117,68%
7	**2013**	165,04%	=B7/B6	105,18%
8	**2014**	173,58%	=B8/B7	105,17%
9	**2015**	185,77%	=B9/B8	107,03%
10	**2016**	200,81%	=B10/B9	108,10%
11	**2017**	212,60%	=B11/B10	105,87%
12	**2018**	226,42%	=B12/B11	106,50%
13	**2019**	243,90%	=B13/B12	107,72%
14	**2020**	261,79%	=B14/B13	107,33%
15	**2021**	295,53%	=B15/B14	112,89%
16	**2022**	331,71%	=B16/B15	112,24%

9. ábra: A láncviszonyszámok kiszámítása a bázisviszonyszámokból (Példa 2)
Forrás: Saját szerkesztés

A kapott eredmény 105,28% / 100,0% = 1,0528 = 105,28%.

A 2009. évi láncviszonyszám kiszámítása után a többi évhez tartozó láncviszonyszám automatikusan kiszámítható. Ehhez a C3 cella jobb alsó sarkához állunk az egérrel, amikor megjelenik a fekete + jel kattintunk és húzzuk lefelé az egeret, amíg az kitölti nekünk a megfelelő képlettel a többi cellát is.

Így tehát a 2010. évi láncviszonyszám a 2010. évi bázisviszonyszám és a 2009. évi bázisviszonyszám hányadosa (=B4/B3). A kapott eredmény 117,48% / 105,28% = 1,1158= 111,58%.

A 2011. évi láncviszonyszám a 2011. évi bázisviszonyszám és a 2010. évi bázisviszonyszám hányadosa (=B5/B4). A kapott eredmény 133,33% / 117,48% = 1,1349 = 113,49%.

A többi évhez tartozó láncviszonyszámok a fenti képlet alapján hasonlóan kiszámíthatók és értelmezhetők.

d) Mutassa be hogyan számíthatók ki a láncviszonyszámok felhasználásával a bázisviszonyszámok!

Láncviszonyszámokból bázisviszonyszámot adott tárgyidőszakra úgy számíthatunk, hogy a tárgyidőszakig kiszámított láncviszonyszámokat összeszorozzuk a kezdő értéktől kezdve.

$$V_{Bn} = V_{L_2} * V_{L_3} * V_{L_4} * \ldots * V_{Ln}$$

	A	B	C	D
1	**Év**	**Lánc viszonyszám (%)**	**Bázis viszonyszám (%)**	
2	**2008**	-	100%	100%
3	**2009**	105,28%	=B3	105,28%
4	**2010**	111,58%	=SZORZAT($B$3:B4)	117,48%
5	**2011**	113,49%	=SZORZAT($B$3:B5)	133,33%
6	**2012**	117,68%	=SZORZAT($B$3:B6)	156,91%
7	**2013**	105,18%	=SZORZAT($B$3:B7)	165,04%
8	**2014**	105,17%	=SZORZAT($B$3:B8)	173,58%
9	**2015**	107,03%	=SZORZAT($B$3:B9)	185,77%
10	**2016**	108,10%	=SZORZAT($B$3:B10)	200,81%
11	**2017**	105,87%	=SZORZAT($B$3:B11)	212,60%
12	**2018**	106,50%	=SZORZAT($B$3:B12)	226,42%
13	**2019**	107,72%	=SZORZAT($B$3:B13)	243,90%
14	**2020**	107,33%	=SZORZAT($B$3:B14)	261,79%
15	**2021**	112,89%	=SZORZAT($B$3:B15)	295,53%
16	**2022**	112,24%	=SZORZAT($B$3:B16)	331,71%

10. ábra: A bázisviszonyszámok kiszámítása a láncviszonyszámokból
Forrás: Saját szerkesztés

A 10. ábrán látható, hogyan számíthatunk láncviszonyszámokból bázisviszonyszámokat. A 2008. évhez nem tartozik láncviszonyszám, hiszen az első évet nem tudjuk számítani, így a hozzá tartozó bázisviszonyszámot magunktól gépeljük be, mivel az állandó bázisul választott időszakban a bázisviszonyszám 1, azaz 100%.

A többi évhez tartozó bázisviszonyszám kiszámítása az Excelben a =SZORZAT() függvény használatával történik. A 2010. évi bázisviszonyszám számításának menete:

1. az egérrel beállunk a C4 cellába,
2. egyenlőségjelet írunk (SHIFT és 7),
3. begépeljük a „szorzat” kifejezést,
4. zárójelet írunk a SHIFT és a 8-as billentyű együttes lenyomásával,
5. rákattintunk az egérrel a 2009. évhez tartozó láncviszonyszámot tartalmazó cellára (B3),
6. kettőspontot (:) írunk, így azonnal meg fog jelenni a tartomány vége cella (B4),
7. vissza kell mennünk az egérrel a 2009. évhez tartozó láncviszonyszámot tartalmazó cellára (B3) és F4 billentyűvel lerögzíteni a cellát dollárjelekkel ($B$3), mivel ugyanaz az érték fog bekerülni minden képletbe a későbbi éveknél,
8. a képlet végére állunk és bezárjuk a zárójelet (SHIFT és a 9-es billentyű együttes lenyomásával),
9. entert nyomunk,
10. a bázisviszonyszám kifejezési formája százalékos, ezért az eredményt százalékká alakítjuk a fenti menüsorban található % jel segítségével úgy, hogy a megoldást tartalmazó cellára kattintunk, majd a % jelre.

A 2010. évi bázisviszonyszám így =SZORZAT($B$3:B4) = 117,48%

A 2010. évi bázisviszonyszám kiszámítása után a többi évhez tartozó bázisviszonyszámot automatikusan kiszámíthatjuk. Ehhez a D4 cella jobb alsó sarkához állunk az egérrel, amikor megjelenik a fekete + jelre kattintunk és húzzuk lefelé az egeret, amíg az kitölti nekünk a megfelelő képlettel a többi cellánkat.

A 2011. évi bázisviszonyszám =SZORZAT($B$3:B5), ami a 2009. évi láncviszonyszám, a 2010. évi láncviszonyszám és a 2011. évi láncviszonyszám szorzata. A kapott eredmény 105,28% * 111,58% * 113,49% = 1,3333 = 133,33%.

A 2012. évi bázisviszonyszám =SZORZAT($B$3:B6), ami a 2009. évi láncviszonyszám, a 2010. évi láncviszonyszám, a 2011. évi láncviszonyszám és a 2012. évi láncviszonyszám szorzata.

A 2013. évi bázisviszonyszám =SZORZAT($B$3:B7), ami a 2009. évi láncviszonyszám, a 2010. évi láncviszonyszám, a 2011. évi láncviszonyszám, 2012. évi láncviszonyszám és a 2013. évi láncviszonyszám szorzata. A kapott eredmény 105,28% * 111,58% * 113,49% * 117,68% * 105,18% = 1,6504 = 165,04%.

Az utolsó átszámítás a 2022. évi bázisviszonyszám =SZORZAT($B$3:B16), ami a 2009. évi láncviszonyszámtól a 2022. évi láncviszonyszámokig az értékek szorzata. A kapott eredmény 105,28% * 111,58% * 113,49% * 117,68% * 105,18%*…..*112,24 = 3,3171 = 333,71%.

2.2.7. Példa 7 (feladat) – A bázis- és láncviszonyszámok („lukas tábla”)

Adott egy debreceni vállalkozás árbevétel adatai 2014-2019 közötti időszakban:

6. táblázat: A vállalkozás ismert adatai

Év	Árbevétel (millió Ft)	Árbevétel változása (%)		Árbevétel változása (millió Ft)	
		2014 = 100%	Előző év = 100%	2014. évhez képest	Előző évhez képest
2014					
2015			**104,0%**		
2016		**87,0%**			
2017					
2018			**115,0%**		
2019		**120,0%**			

Forrás: Saját szerkesztés

A 2014. gazdasági évhez képest 2018. évre 38,6%-kal növekedett meg a debreceni vállalkozás árbevétele, ami 150 millió Ft-os árbevétel növekedést jelentett a bázisévhez képest.

Számítsa ki a táblázat hiányzó adatait!

Példa 7 (megoldás) – A bázis- és láncviszonyszámok („lukas” tábla)

Számítsa ki a táblázat hiányzó adatait!

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	**Adottak egy debreceni vállalkozás árbevétel adatai 2014-2019-es időszakban:**									
2										
3	**Év**	**Árbevétel (millió Ft)**	**Árbevétel (millió Ft)**		**Árbevétel változása (%)**					
4					**2014 = 100%**	**2014 = 100%**		**Előző év = 100%**	**Előző év = 100%**	
5	**2014**	=138,6 * x = 100 * (x+150)	388,60	*5.*	100%	100,0%	*1.*	-	-	*2.*
6	**2015**	=C5*F6	404,15	*6.*	=I6	104,0%	*3.*	meg volt adva	**104,0%**	
7	**2016**	=C5*F7	338,08	*7.*	meg volt adva	**87,0%**		=C7/C6	83,7%	*12.*
8	**2017**	=C9/I9	468,35	*10.*	=C8/C5	120,5%	*11.*	=C8/C7	138,5%	*13.*
9	**2018**	=C5*F9	538,60	*8.*	=100,0% + 38,6%	138,6%	*4.*	meg volt adva	**115,0%**	
10	**2019**	=C5*F10	466,32	*9.*	meg volt adva	**120,0%**		=C10/C9	86,6%	*14.*
11										
12					**Árbevétel változása (millió Ft)**					
13					**2014. évhez képest**	**2014. évhez képest**		**Előző évhez képest**	**Előző évhez képest**	
14					=C5-$C$5	0,00	*15.*	-	-	*21.*
15					=C6-$C$5	15,54	*16.*	=C6-C5	15,54	*22.*
16					=C7-$C$5	-50,52	*17.*	=C7-C6	-66,06	*23.*
17					=C8-$C$5	79,75	*18.*	=C8-C7	130,27	*24.*
18					=C9-$C$5	150,00	*19.*	=C9-C8	70,25	*25.*
19					=C10-$C$5	77,72	*20.*	=C10-C9	-72,28	*26.*

11. ábra: A hiányzó adatok kiszámítása az Excelben

Forrás: Saját szerkesztés

A hiányzó adatok kiszámítását a 11. ábra szemlélteti. A számítások menete:

1. lépés: a 2014. évhez tartozó bázisviszonyszám beírása, ami 100,0%, mivel az állandó bázisul választott időszakban a bázisviszonyszám 1, azaz 100%.
2. lépés: a 2014. évhez tartozó láncviszonyszám helyét kell kihúznunk gondolatjellel, mivel a legelső időszakra nem tudunk láncviszonyszámot számítani.
3. lépés: a 2015. évhez tartozó bázisviszonyszám értékének meghatározása, ami 104,0%, mivel az állandó bázis utáni első tárgyidőszakban a bázis- és a láncviszonyszám megegyezik.
   Értelmezés: A vállalkozás árbevételében a 2014. bázisévhez képest 2015. évre 4%-os növekedés következett be.
4. lépés: a feladat leírásban szereplő információk alapján számolunk. A bázisévhez képest 2018. évre 38,6%-os növekedés következett be, tehát a 2018. évi bázisviszonyszám 100,0% + 38,6% = 138,6%.
5. lépés: a feladat leírás szerint a 38,6%-os növekedés 150 millió forint, tehát a 2014. évhez tartozó árbevétel 138,6 * x = 100,0 * (x + 150) → x = 388,60 millió Ft.
6. lépés: a 2015. év árbevétele a 2014. évi árbevétel és a 2015. évi bázisviszonyszám szorzata, azaz 388,60 * 104,0% = 404,15 millió Ft.
   Értelmezés: A vállalkozás árbevétele 2015-ben 404,15 millió Ft volt.
7. lépés: a 2016. év árbevétele a 2014. évi árbevétel és a 2016. évi bázisviszonyszám szorzata, azaz 388,60 * 87,0% = 338,08 millió Ft.
   Értelmezés: A vállalkozás árbevétele 2016. évben 338,08 millió Ft volt.
8. lépés: a 2018. évhez tartozó árbevétel a 2014. évi árbevétel és a 2018. évi bázisviszonyszám szorzata, azaz 388,60 * 138,6% = 538,60 millió Ft, vagy a feladat leírása alapján is lehet számolni, amely szerint a 2014-es gazdasági évhez képest 2018-ra a debreceni vállalkozás árbevétele 150 millió Ft-tal nőtt, azaz 338,60 + 150 = 538,60 millió Ft.
   Értelmezés: A vállalkozás árbevétele 2018-ban 538,60 millió Ft volt.
9. lépés: a 2019. év árbevétele a 2014. évi árbevétel és a 2019. évi bázisviszonyszám szorzata, vagyis 388,60 * 120,0% = 466,32 millió Ft.
   Értelmezés: A vállalkozás árbevétele 2019-ben 466,32 millió Ft volt.

10. lépés: a 2017. évi árbevétel a 2018. évi árbevétel és a 2018. évi láncviszonyszám hányadosa, azaz 538,60 / 115,0% = 468,35 millió Ft.

    Értelmezés: A vállalkozás árbevétele 2017-ben 468,35 millió Ft volt.

11. lépés: a 2017. évi bázisviszonyszám a 2017. évi árbevétel és a 2014. évi árbevétel hányadosa, vagyis 468,35 / 388,60 = 120,5%.

    Értelmezés: A vállalkozás árbevételében a 2014. bázisévhez képest 2017-re 20,5%-os növekedés következett be.

12. lépés: a 2016. évi láncviszonyszám a 2016. évi árbevétel és a 2015. évi árbevétel hányadosa, azaz 338,08 / 404,14 = 83,7%.

    Értelmezés: A vállalkozás árbevételében az előző évhez (2015) képest 2016. évre 16,3%-os csökkenés következett be.

13. lépés: a 2017. évi láncviszonyszám kiszámításához a 2017. év árbevételét osztjuk el a 2016. év árbevételével, vagyis 468,35 / 338,08 = 138,5%.

    Értelmezés: A vállalkozás árbevételében az előző évhez (2016) képest 2017-re 38,5%-os növekedés következett be.

14. lépés: a 2019. évi láncviszonyszám a 2019. évi árbevétel és a 2018. évi árbevétel hányadosa, azaz 466,32 / 538,60 = 86,6%.

    Értelmezés: A vállalkozás árbevételében az előző évhez (2018) képest 2019-re 13,4%-os csökkenés következett be.

15-20. lépés: az árbevétel változást a 2014. évi árbevételhez képest, minden esetben úgy számítjuk ki, hogy az adott évhez tartozó árbevételből kivonjuk a 2014. évi árbevételt. Elegendő az első évhez tartozó változást kiszámítani 2014. év: = 388,60 – 388,60 = 0 millió Ft. A további évekhez tartozó értékeket az első cellába írt képlet (=C5-$C$5) többi cellára való lehúzásával automatikusan ki tudjuk számítani (cella jobb alsó sarkához állunk az egérrel és amikor megjelenik a fekete + jel kattintunk és húzzuk lefelé az egeret).

21-26. lépés: az árbevétel változást az előző évhez képest minden esetben úgy számítjuk ki, hogy az adott évhez tartozó árbevételből kivonjuk a megelőző évhez tartozó árbevételt. Kivéve a 2014. év esetén, mert abban az esetben az előző évhez tartozó árbevételt nem ismerjük, így azt a cellát gondolatjellel (-) kihúzzuk. Ebben az esetben is elegendő egy évhez tartozó változást kiszámítani 2015. év: = 404,15 – 388,60 = 15,54 millió Ft. A további évekhez tartozó értékeket az ebbe a cellába írt képlet (=C6-C5) többi cellára való lehúzásával automatikusan ki tudjuk számítani.

2.2.8. Példa 8 (feladat) – A bázis- és láncviszonyszámok („lukas” tábla)

Adottak egy gyerek egy heti zsebpénzére vonatkozó adatok:

7. táblázat: A zsebpénzre vonatkozó ismert adatok

Napok	Zsebpénz (Ft)	Zsebpénz változása (%)		Zsebpénz változása (Ft)	
		Hétfő = 100%	Előző nap = 100%	Hétfőhöz képest	Előző naphoz képest
Hétfő					
Kedd		**102,7%**			
Szerda					
Csütörtök			**100,5%**		
Péntek		**96,0%**			
Szombat			**107,0%**		
Vasárnap			**113,0%**		

Forrás: Saját szerkesztés

Keddről szerdára a zsebpénznövekedés ugyanakkora volt, mint szombatról vasárnapra. Szerdáról csütörtökre 12,5 Ft-tal nőtt a kapott zsebpénz.

Számítsa ki a táblázat hiányzó adatait!

Példa 8 (megoldás) – A bázis- és láncviszonyszámok („lukas” tábla)

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	**Adottak egy gyerek egy heti zsebpénzére vonatkozó adatok:**									
2										
3	**Napok**	**Zsebpénz (Ft)**	**Zsebpénz (Ft)**		**Zsebpénz változása (%)**					
4					**Hétfő = 100%**	**Hétfő = 100%**		**Előző nap = 100%**	**Előző év = 100%**	
5	**Hétfő**	=C6/F6	2154,2	*8.*	100,0%	100,0%	*1.*	-	-	*2.*
6	**Kedd**	=C7/I7	2212,4	*7.*	meg volt adva	**102,7%**		=F6	102,7%	*3.*
7	**Szerda**	=12,5/0,005	2500,0	*5.*	=C7/C5	116,1%	*12.*	=I11	113,0%	*4.*
8	**Csütörtök**	=C7*I8	2512,5	*6.*	=C8/C5	116,6%	*13.*	meg volt adva	**100,5%**	
9	**Péntek**	=C5*F9	2068,1	*9.*	meg volt adva	**96,0%**		=C9/C8	82,3%	*16.*
10	**Szombat**	=C9*I10	2212,8	*10.*	=C10/C5	102,7%	*14.*	meg volt adva	**107,0%**	
11	**Vasárnap**	=C10*I11	2500,5	*11.*	=C11/C5	116,1%	*15.*	meg volt adva	**113,0%**	
12										
13					**Zsebpénz változása (Ft)**					
14					**Hétfőhöz képest**	**Hétfőhöz képest**		**Előző naphoz képest**	**Előző naphoz képest**	
15					=C5-$C$5	0,0	*17.*	-	-	*24.*
16					=C6-$C$5	58,2	*18.*	=C6-C5	58,2	*25.*
17					=C7-$C$5	345,8	*19.*	=C7-C6	287,6	*26.*
18					=C8-$C$5	358,3	*20.*	=C8-C7	12,5	*27.*
19					=C9-$C$5	-86,2	*21.*	=C9-C8	-444,4	*28.*
20					=C10-$C$5	58,6	*22.*	=C10-C9	144,8	*29.*
21					=C11-$C$5	346,3	*23.*	=C11-C10	287,7	*30.*

12. ábra: A hiányzó adatok kiszámítása az Excelben

Forrás: Saját szerkesztés

A hiányzó adatok kiszámítása a 12. ábrán látható. Ennek menete:

1. lépés: F5 = 100% (az állandó bázisul választott időszakban a bázisviszonyszám 1, azaz 100%),
2. lépés: I5 = gondolatjel (-) (a legelső időszakra nem tudunk láncviszonyszámot számítani),
3. lépés: I6 = 102,7% (=F6) (az állandó bázis utáni első tárgyidőszakban a bázis- és a láncviszonyszám egyenlő)
4. lépés: I7 = 113% (=I11) (keddről szerdára a zsebpénznövekedés ugyanakkora volt, mint szombatról vasárnapra),
5. lépés: C7 = 2500 Ft (szerdáról csütörtökre 12,5 Ft-tal nőtt a kapott zsebpénz (12,5 / 0,005)),
6. lépés: C8 = 2512,5 Ft (=C7*I8 = 2500 * 1,005 vagy 2500 + 12,5)
7. lépés: C6 = 2212,4 Ft (=C7/I7 = 2500 / 1,13)
8. lépés: C5 = 2154,2 Ft (=C6/F6 = 2212,4 / 1,027)
9. lépés: C9 = 2068,1 Ft (=C5*F9 = 2154,2 * 0,96)
10. lépés: C10 = 2212,8 Ft (=C9*I10 = 2068,1 * 1,07)
11. lépés: C11 = 2500,5 Ft (=C10*I11 = 2212,8 * 1,13)
12. lépés: F7 = 116,1% (=C7/C5 = 2500 / 2154,2)
13. F8 = 116,6% (=C8/C5 = 2512,5 / 2154,2)
14. lépés: F10 = 102,7% (=C10/C5 = 2212,8 / 2154,2)
15. lépés: F11 = 116,1% (=C11/C5 = 2500,5 / 2154,2)
16. lépés: I9 = 82,3% (=C9/C8 = 2068,1 / 2512,5)

17-23. lépés: a zsebpénzváltozást hétfőhöz képest, minden esetben úgy számítjuk ki, hogy az adott naphoz tartozó zsebpénzből kivonjuk a hétfőhöz tartozó zsebpénzt. Elegendő az első naphoz tartozó változást kiszámítani, hétfő: = 2154,2 – 2154,2 = 0 Ft. A további évekhez tartozó értékeket az első cellába írt képlet (=C5-$C$5) többi cellára való lehúzásával automatikusan ki tudjuk számítani. (A cella jobb alsó sarkához állunk az egérrel és amikor megjelenik a fekete + jel kattintunk és húzzuk lefelé az egeret.)

24-30. lépés: a zsebpénzváltozást az előző naphoz képest, minden esetben úgy számítjuk ki, hogy az adott naphoz tartozó zsebpénzből kivonjuk a megelőző naphoz tartozó zsebpénzt. Kivéve hétfő esetén, mert abban az esetben az előző naphoz tartozó zsebpénzt nem ismerjük, így azt a cellát gondolatjellel (-) kihúzzuk. Ebben az esetben is elegendő egy naphoz tartozó változást kiszámítani kedd: =

2212,4 – 2154,2 = 58,2 Ft. A további napokhoz tartozó értékeket az ebbe a cellába írt képlet (=C6-C5) többi cellára való lehúzásával automatikusan ki tudjuk számítani.

2.2.9. Példa 9 (feladat) – A területi összehasonlító viszonyszámok

Adott az Észak-magyarországi régió szántóterületének a nagysága 2023.05.31. napon:

8. táblázat: Az Észak-magyarországi régió szántó területének nagysága 2023. évben (május 31. állapot alapján)

Területi egység neve	Szántóterület (ezer hektár)
Borsod-Abaúj-Zemplén vármegye	237,3
Heves vármegye	132,3
Nógrád vármegye	58,3
Észak-Magyarország régió	**428,0**

Forrás: Saját szerkesztés

Határozza meg a szántóterület vármegyék szerinti megoszlását a Heves vármegyei szántóterülethez képest az Észak-magyarországi régióban!

Példa 9 (megoldás) – A területi összehasonlító viszonyszámok

A feladat megoldásához területi viszonyszámokat kell számolnunk $V_{terület} = \frac{x_{A\ terület}}{x_{B\ terület}}$.

Az adott terület értéke (számláló) az egyes vármegyéhez tartozó szántóterület (ezer hektár) értéke, a bázisterület értéke (nevező) minden esetben a Heves vármegyéhez tartozó szántóterület értéke (132,3 ezer hektár).

A feladat megoldása azzal kezdődik, hogy az eredeti táblázat mellé egy új oszlopot készítünk (13. ábra), melynek elnevezése „Területi összehasonlító viszonyszám (%)".

	A	B	C	D
1	**Területi egység neve**	**Szántóterület (ezer hektár)**	**Területi összehasonlító viszonyszám (%)**	
2	Borsod-Abaúj-Zemplén vármegye	237,3	=B2/$B$3	179,32%
3	Heves vármegye	132,3	=B3/$B$3	100,00%
4	Nógrád vármegye	58,3	=B4/$B$3	44,06%
5	**Észak-Magyarország régió**	**428,0**		

13. ábra: A területi összehasonlító viszonyszámok kiszámítása az Excelben
Forrás: Saját szerkesztés

A Borsod-Abaúj-Zemplén vármegyéhez tartozó területi összehasonlító viszonyszámot úgy határozhatjuk meg (13. ábra), hogy a Borsod-Abaúj-Zemplén vármegyéhez tartozó 237,3 ezer hektár értékét elosztjuk a bázisterülethez (Heves vármegyéhez) tartozó 132,3 ezer hektárral. Ennek lépései:

1. beállunk az egérrel a C2-es cellába,
2. egyenlőségjelet írunk (SHIFT és 7),
3. kijelöljük a Borsod-Abaúj-Zemplén vármegyéhez tartozó boltszámot (B2),
4. osztás jelet (/) írunk,
5. kijelöljük a Heves vármegyéhez tartozó boltszámot (B3),
6. az F4 billentyűvel rögzítjük a cellát $ jelekkel ($B$3), mivel ugyanaz az érték fog bekerülni minden képlet nevezőjébe,
7. entert nyomunk,
8. a területi összehasonlító viszonyszám kifejezési formája százalékos, ezért az eredményt százalékká (%) kell alakítanunk, a fenti menüsorban található % jellel.
9. a DC cella jobb alsó sarkába állunk és a fekete + jelre kattintva húzzuk le az egeret, így lemásoljuk a C3 és C4 cellákba a képletet.

A Borsod-Abaúj-Zemplén vármegyéhez tartozó területi összehasonlító viszonyszám 237,3 / 132,3 = 1,7932 = 179,32%. Jelentése, hogy 2023. évben a Borsod-Abaúj-Zemplén vármegyében a szántóterület nagysága 79,32%-kal volt MAGASABB, mint a Heves vármegyei szántóterület nagysága.
Mivel Heves vármegye a bázis területünk, ezért ennek az értéke 100% (132,3 / 132,3 = 1, azaz 100%).

A Nógrád vármegyéhez tartozó területi összehasonlító viszonyszám 58,3 / 56,3 = 44,06%. Jelentése, hogy 2023. évben a Nógrád vármegyei szántóterület a Heves vármegyei szántóterülethez képest 55,94%-kal volt ALACSONYABB (44,06% - 100% = - 55,94%).

2.2.10. Példa 10 (feladat) – A területi összehasonlító viszonyszámok

Adott Magyarországon a búza termásátlaga minden vármegyére vonatkozóan a 2023. május 31. állapot alapján (9. táblázat).

Határozza meg a termésátlag vármegyék szerinti alakulását a Hajdú-Bihar vármegyei termésátlaghoz képest.

9. táblázat: A magyarországi búza termésátlag alakulása 2023. évben

Területi egység neve	Termésátlag, kg/hektár
Fejér vármegye	5 960
Komárom-Esztergom vármegye	5 750
Veszprém vármegye	5 500
Győr-Moson-Sopron vármegye	5 420
Vas vármegye	6 700
Zala vármegye	5 560
Baranya vármegye	5 280
Somogy vármegye	5 620
Tolna vármegye	5 770
Borsod-Abaúj-Zemplén vármegye	6 400
Heves vármegye	5 980
Nógrád vármegye	6 310
Hajdú-Bihar vármegye	6 010
Jász-Nagykun-Szolnok vármegye	5 560
Szabolcs-Szatmár-Bereg vármegye	5 780
Bács-Kiskun vármegye	5 200
Békés vármegye	5 200
Csongrád-Csanád vármegye	4 780

Forrás: Saját szerkesztés

Példa 10 (megoldás) – A területi összehasonlító viszonyszámok

	A	B	C	D
1	Területi egység neve	Termésátlag, kg/hektár	Területi összehasonlító viszonyszám (%)	
2	Fejér vármegye	5 960	=B2/$B$14	99,17%
3	Komárom-Esztergom vármegye	5 750	=B3/$B$14	95,67%
4	Veszprém vármegye	5 500	=B4/$B$14	91,51%
5	Győr-Moson-Sopron vármegye	5 420	=B5/$B$14	90,18%
6	Vas vármegye	6 700	=B6/$B$14	111,48%
7	Zala vármegye	5 560	=B7/$B$14	92,51%
8	Baranya vármegye	5 280	=B8/$B$14	87,85%
9	Somogy vármegye	5 620	=B9/$B$14	93,51%
10	Tolna vármegye	5 770	=B10/$B$14	96,01%
11	Borsod-Abaúj-Zemplén vármegye	6 400	=B11/$B$14	106,49%
12	Heves vármegye	5 980	=B12/$B$14	99,50%
13	Nógrád vármegye	6 310	=B13/$B$14	104,99%
14	Hajdú-Bihar vármegye	6 010	=B14/$B$14	100,00%
15	Jász-Nagykun-Szolnok vármegye	5 560	=B15/$B$14	92,51%
16	Szabolcs-Szatmár-Bereg vármegye	5 780	=B16/$B$14	96,17%
17	Bács-Kiskun vármegye	5 200	=B17/$B$14	86,52%
18	Békés vármegye	5 200	=B18/$B$14	86,52%
19	Csongrád-Csanád vármegye	4 780	=B19/$B$14	79,53%

14. ábra: A területi összehasonlító viszonyszámok kiszámítása az Excelben
Forrás: Saját szerkesztés

A Hajdú-Bihar vármegye termésátlagához hasonlítjuk a többi megye termésátlagát (14. ábra).

Fejér vármegye: =B2/$B$14 = 5 960 / 6 010 = 99,17%. Jelentése: 2023. évben Fejér vármegyei termésátlag a Hajdú-Bihar vármegyei termésátlaghoz képest 0,83%-kal volt alacsonyabb.
Komárom-Esztergom vármegye: =B3/$B$14 = 5 750 / 6 010 = 95,67%. Jelentése: 2023. évben Komárom-Esztergom vármegyei termésátlag a Hajdú-Bihar vármegyei termésátlaghoz képest 4,33%-kal volt alacsonyabb.
Hajdú-Bihar vármegye: =B14/$B$14 = 6 010 / 6 010 = 100,00%. Jelentése: ez a bázis terület, ezért ezt 100%.
Nógrád vármegye: =B13/$B$14 = 6 310 / 6 010 = 104,99%. Jelentése: 2023. évben Nógrád vármegyei termésátlag a Hajdú-Bihar vármegyei termésátlaghoz képest 4,99%-kal volt magasabb.
Fontos! Területi összehasonlító viszonyszámnál csak az ALACSONYABB és a MAGASABB szókifejezések használhatók. A NŐTT és CSÖKKENT kifejezések nem használhatók a területi összehasonlító viszonyszámoknál.

2.2.11. Példa 11 (feladat) – A teljesítmény viszonyszámok

Egy hajdúszoboszlói vállalkozás létszám adatai ismertek a 2024. év januári és februári hónapra vonatkozóan (minden hónap 1. napjára vonatkoznak az adatok).

10. táblázat: Egy hajdúszoboszlói vállalkozás létszám adatai 2024. januári és februári hónapban (állapot, adott hónap 1. napjára vonatkozóan)

Megnevezés		Január	Február
Tervezett létszám	fő	190	200
Tényleges létszám	fő	188	195

Forrás: Saját szerkesztés

a) Határozza meg a 2024. év januári tervteljesítési viszonyszámot! Határozza meg a 2024. év februári tervteljesítési viszonyszámot!
b) Határozza meg a 2024. év februári tervfeladat viszonyszámot!
c) Készítsen dinamikus viszonyszámot a 2024. év februári időszakra!

Példa 11 (megoldás) – A teljesítmény viszonyszámok

a) Határozza meg a 2024. januári tervteljesítési viszonyszámot! Határozza meg a 2024. év februári tervteljesítési viszonyszámot!

A tervteljesítési viszonyszámok kiszámításához a következő képletet kell alkalmazni.

$$V_{tt} = \frac{adott\ időszak\ TÉNY\ értéke}{adott\ időszak\ TERV\ értéke}$$

	A	B	C	D	E
1	Megnevezés		Január		
2	Tervezett létszám	fő	190	=C3/C2	98,95%
3	Tényleges létszám	fő	188		
4					
5	Megnevezés		Február		
6	Tervezett létszám	fő	200	=C7/C6	97,50%
7	Tényleges létszám	fő	195		

15. ábra: A tervteljesítési viszonyszámok kiszámítása az Excelben

Forrás: Saját szerkesztés

A 15. ábrán látható a 2024. év januári és februári tervteljesítési viszonyszám kiszámítása. A 2024. év januári tervteljesítési viszonyszám számításához szükséges a 2024. év januári tervezett és tényleges adata. A 2024. év januári tényleges létszám értéket (188 fő) osztjuk a 2024. év januári tervezett létszám értékkel (190 fő).

Ehhez a következő lépéseket kell elvégeznünk:

1. beállunk az egérrel a D2 cellába,
2. egyenlőségjelet írunk (SHIFT és 7),
3. kijelöljük a 2024. év januári tényadatot (C3),
4. osztás jelet (/) írunk,
5. kijelöljük a 2024. év januári tervezett adatot (C2),
6. entert nyomunk,
7. a tervteljesítési viszonyszám kifejezési formája százalékos, ezért az eredményt százalékká kell alakítanunk (a menüsorban található % jel segítségével).

A kapott eredmény 188 / 190 = 0,9895 = 98,95%, mely azt jelenti, hogy a 2024. év januári tervezett létszám értékéhez képest a tényleges létszám értéke 1,05%-kal volt kevesebb.
A 2024. év februári tervteljesítési viszonyszám számításához szükséges a 2024. év februári tervezett és tényleges létszám adat. A tényleges létszám értéket (195 fő) elosztjuk a tervezett létszám értékkel (200 fő). Ehhez a következő lépéseket kell elvégeznünk:
A kapott eredmény 195 / 200 = 0,9750 = 97,50%, mely azt jelenti, hogy a 2024. év februári tényleges létszám adat a tervezett létszám adathoz képest 2,5%-kal kevesebb (97,5% - 100% = - 2,5%).

b) Határozza meg a 2024. év februári tervfeladat viszonyszámot!
A tervfeladat viszonyszám kiszámításához a következő képletet kell alkalmaznunk.

$$V_{tf} = \frac{adott\ idöszak\ TERV\ értéke}{megelözö\ idöszak\ TÉNY\ értéke}$$

	A	B	C	D	E	F
1	**Megnevezés**		**Január**	**Február**	**Tervfeladat viszonyszám (február) %**	
2	**Tervezett létszám**	**fő**	190	200	=D2/C3	106,38%
3	**Tényleges létszám**	**fő**	188	195		

16. ábra: A tervfeladat viszonyszám kiszámítása az Excelben
Forrás: Saját szerkesztés

A 16. ábrán láthatjuk a 2024. évi februári tervfeladat viszonyszám kiszámításának menetét, ahol a 2024. év februári TERVEZETT létszám (200 fő) értékét osztjuk el a 2024. év januári TÉNYLEGES létszám (188 fő) adatával. Ehhez az alábbi lépéseket végezzük el:

1. beállunk az egérrel a E2 cellába,
2. egyenlőségjelet írunk,

3. kijelöljük a 2024. év februári tervadatot (D2),
4. osztás jelet írunk,
5. kijelöljük a 2024. év januári tényadatot (C3),
6. entert nyomunk,
7. az eredményt százalékká (%) alakítjuk.

A kapott eredmény 200 / 188 = 1,0638 = 106,38%, azaz a hajdúszoboszlói vállalkozás 2024. év februári tervezett létszám adata a 2024. év januári tényleges létszám adathoz képest 6,38%-kal volt magasabb.

c) Készítsen dinamikus viszonyszámot a 2024.év februári időszakra!

A feladat megoldásánál a 2024. év februári tény értékét osztjuk a 2024. év januári tény értékével.

	A	B	C	D	E	F
1	**Megnevezés**		**Január**	**Február**	**Februári tervteljesítési viszonyszám (%)**	**Februári tervfeladat viszonyszám (%)**
2	**Tervezett létszám**	**fő**	190	200	0,975	106,38%
3	**Tényleges létszám**	**fő**	188	195		
5	V_D				=E2*F2	103,72%
7	Februári dinamikus viszonyszám				=D3/C3	103,72%

17. ábra: A dinamikus viszonyszám kiszámítása az Excelben
Forrás: Saját szerkesztés

A dinamikus viszonyszám számításához (17. ábra) szükségünk van a 2024. év januári és februári tényleges létszám adatára. A 2024. év februári tényleges létszám érték (195 fő) és a 2024. év januári tényleges létszám érték (188 fő) hányadosát vesszük.

Az alábbi lépéseket végezzük el:

1. beállunk az egérrel a E7 cellába,
2. egyenlőségjelet írunk,
3. kijelöljük a 2024. év februári létszám adatot (D3),
4. osztás jelet írunk,
5. kijelöljük a 2024. év januári létszám adatot (C3),
6. entert nyomunk,
7. az eredményt százalékká (%) alakítjuk.

A kapott eredmény 195 / 188 = 1,0372 = 103,72%, vagyis a 2024. év februári létszám értéke a 2024. év januári létszám értékétől 3,72%-kal magasabb.

2.2.12. Példa 12 (feladat) – A teljesítmény viszonyszámok

Ismert egy mezőgazdasági vállalkozás 2023. és 2024. évi tervezett és tényleges nettó jövedelem értéke millió forintban kifejezve. Mindkét évben a január 1. állapotot mutatja az adat.

11. táblázat: Egy mezőgazdaság vállalkozás nettó jövedelem értéke 2023. és 2024. évben

Megnevezés	2023		2024	
	Tervezett	Tényleges	Tervezett	Tényleges
Nettó jövedelem (millió Ft)	36,9	39,9	40	36,7

Forrás: Saját szerkesztés

a) Határozza meg a 2023. és 2024. évi tervteljesítési viszonyszámokat!

b) Határozza meg a 2023. és 2024. évi tervfeladat viszonyszámokat!

c) Készítsen dinamikus viszonyszámot a lehetséges időszakra!

Példa 12 (megoldás) – A teljesítmény viszonyszámok

a) Határozza meg a 2023. és 2024. évi tervteljesítési viszonyszámokat!

	A	B	C	D	E
1	Megnevezés	2023		2024	
2		Tervezett	Tényleges	Tervezett	Tényleges
3	Nettó jövedelem (millió Ft)	36,9	39,9	40	36,7
5	Tervteljesítési viszonyszám (%)				
6	2023. évi	=C3/B3	108,13%		
7	2024. évi	=E3/D3	91,75%		

18. ábra: A tervteljesítési viszonyszámok kiszámítása az Excelben
Forrás: Saját szerkesztés

A 18. ábra a 2023. és 2024. évre vonatkozó tervteljesítési viszonyszám kiszámítását mutatja be.

A 2023. évi tervteljesítési viszonyszám: =C3/B3 = 39,9 / 36,9 = 1,0813 = 108,13%, melynek a jelentése, hogy a 2023. évben a tervezett nettó jövedelemhez képest a tényleges jövedelem 8,13%-kal volt magasabb.

A 2024. évi tervteljesítési viszonyszám: =E3/D3 = 36,7 / 40 = 0,9175 = 91,75%, azaz a 2024. évben a tervezett nettó jövedelemhez képest a tényleges jövedelem 8,25%-kal volt alacsonyabb.

b) Határozza meg a 2023. és 2024. évi tervfeladat viszonyszámokat!

	A	B	C	D	E
1	**Megnevezés**	**2023**		**2024**	
2		**Tervezett**	**Tényleges**	**Tervezett**	**Tényleges**
3	**Nettó jövedelem (millió Ft)**	36,9	39,9	40	36,7
4					
5	**Tervfeladat viszonyszám (%)**				
6	2023. évi	=B3/??	-		
7	2024. évi	=D3/C3	100,25%		

19. ábra: A tervfeladat viszonyszám kiszámítása az Excelben
Forrás: Saját szerkesztés

A 2023. évi tervfeladat viszonyszámot nem lehet kiszámolni, mivel hiába ismerjük a 2023. évi tervezett értéket, ha nem ismerjük a megelőző év (2022. év) tényleges értékét.

A 2024. évi tervfeladat viszonyszám kiszámításához minden adatot ismerünk (19. ábra). A 2024. évi tervfeladat viszonyszám tehát =D3/C3 = 40 /39,9 = 1,0025 = 100,25%, azaz a mezőgazdasági vállalkozás 2024. évi tervezett nettó jövedelme a 2023. évi tényleges nettó jövedelemhez képest 0,25%-kal volt magasabb.

c) Készítsen dinamikus viszonyszámot a lehetséges időszakra!

	A	B	C	D	E
1	**Év**	**Tervteljesítési viszonyszám (%)**	**Tervfeladat viszonyszám (%)**	**Tervezett nettó jövedelem (millió Ft)**	**Tényleges nettó jövedelem (millió Ft)**
2	**2023**	108,13%	-	36,9	39,9
3	**2024**	91,75%	100,25%	40	36,7
4					
5	**2023. évi dinamikus viszonyszám**			nem számolható ki	
6					
7	**2024. évi dinamikus viszonyszám**			=B3*C3	91,98%
8					
9	**2024. évi dinamikus viszonyszám**			=E3/E2	91,98%

20. ábra: A dinamikus viszonyszám kiszámítása az Excelben
Forrás: Saját szerkesztés

Dinamikus viszonyszámot a 2023. évre nem lehet meghatározni adat hiány miatt.

A 2024. évi dinamikus viszonyszám kiszámítása alapadatokból: =E3/E2 = 36,7 / 39,9 = 0,9198 = 91,98%. A 2024. évi dinamikus viszonyszám kiszámítása a teljesítmény viszonyszámokból: =B3*C3 = 91,75% * 100,25% = 0,9198 = 91,98%.

A kapott eredmény jelentése: A 2024. évi nettó jövedelem 8,02%-kal volt alacsonyabb, mint a 2023. évi nettó jövedelem a vizsgált mezőgazdasági vállalkozás esetén (20. ábra).

2.2.13. Példa 13 (feladat) – Az intenzitási viszonyszámok

Hajdúszoboszlón 18 darab mezőgazdasági vállalkozás található 2023. évben, a hajdúszoboszlói lakosok száma ugyanebben az évben 15 675 fő.

a) Számítsa ki az 1000 lakosra jutó mezőgazdasági vállalkozás számát a 2023. évben!

b) Számítsa ki az egy mezőgazdasági vállalkozásra jutó lakosok számát a 2023. évben!

Példa 13 (megoldás) – Az intenzitási viszonyszámok

a) Számítsa ki az 1000 lakosra jutó mezőgazdasági vállalkozások számát a 2023. évben!

A feladat megoldásához egyenes intenzitási viszonyszámot kell számolnunk.

$$\frac{mezőgazdasági\ vállalkozások\ száma}{lakosok\ száma} = \frac{18}{15675} * 1000 = 1{,}15 \frac{mezőgazdasági\ vállalkozás}{1000\ fő}$$

Tehát a kalkuláció alapján Hajdúszoboszlón 1000 fő lakosra 1,15 darab mezőgazdasági vállalkozás jutott 2023. évben.

b) Számítsa ki az egy mezőgazdasági vállalkozásra jutó lakosok számát a 2023. évben!

A feladat megoldásához fordított intenzitási viszonyszámot kell számolnunk.

$$\frac{lakosok\ száma}{mezőgazdasági\ vállalkozások\ száma} = \frac{15675}{18} = 870{,}83 \frac{fő}{mezőgazdasági\ vállalkozás}$$

Tehát Hajdúszoboszlón egy mezőgazdasági vállalkozásra 870,83 fő lakos jut a 2023. évben.

2.2.14. Példa 14 (feladat) – Az intenzitási viszonyszámok

Egy mezőgazdasági segédanyagokat gyártó vállalkozás néhány adata ismert a 2023. és 2024. évre vonatkozóan (12. táblázat):

12. táblázat: A mezőgazdasági vállalkozás 2023. és 2024. évi adatai

Megnevezés		2023	2024
Bevétel	**millió Ft**	125	140
Költség	**millió Ft**	56	59
Dolgozók száma	**fő**	124	140
Selejt mennyisége	**millió darab**	124	97
Készlet	**millió darab**	36	29

Forrás: Saját szerkesztés

a) Számítsa ki az egy millió forint bevételre jutó költség nagyságát a 2023. és a 2024. évre.
b) Számítsa ki egy millió forint költségre jutó bevétel nagyságát a 2023. és 2024. évre.
c) Számítsa ki az egy dolgozóra jutó készlet nagyságát a 2023. évre.
d) Számítsa ki az 1 millió forint készletre jutó bevétel nagyságát a 2024. évre.
e) Számítsa ki 100 darab selejtre jutó költség nagyságát 2024. évre.

Példa 14 (megoldás) – Az intenzitási viszonyszámok

a) Számítsa ki az egy millió forint bevételre jutó költség nagyságát a 2023. és a 2024. évre.

Először számoljuk ki a 2023. évre vonatkozóan az egy millió Ft bevételre jutó költség nagyságát.

Megnevezés		2023	2024
Bevétel	**millió Ft**	125	140
Költség	**millió Ft**	56	59
Dolgozók száma	**fő**	124	140
Selejt mennyisége	**millió darab**	124	97
Készlet	**millió darab**	36	29

Számítsa ki az egy millió forint bevételre jutó költség nagyságát a 2023. évre.

<u>2023. évi mutató</u>

Bevétel (Ft)	Költség (Ft)
125 000 000	56 000 000
1 000 000	x

x = 1 000 000 / 125 000 000 * 56 000 000, azaz 448 000 Ft költség / 1 000 000 Ft bevétel

Természetesen van lehetőség az alapadatokkal való számításra is.

Megnevezés		2023	2024
Bevétel	**millió Ft**	125	140
Költség	**millió Ft**	56	59
Dolgozók száma	**fő**	124	140
Selejt mennyisége	**millió darab**	124	97
Készlet	**millió darab**	36	29

Számítsa ki az egy millió forint bevételre jutó költség nagyságát a 2023. évre.

2023. évi mutató

Bevétel (millió Ft)	Költség (millió Ft)
125	56
1	x

x = 1 / 125 * 56 = 0,448 millió Ft költség / 1 millió Ft bevétel

A kapott eredmény mindkét esetben, hogy 1 millió forint bevételre 448 ezer forint költség jutott a 2023. évben.

A 2024. évre vonatkozóan az egy millió Ft bevételre jutó költség nagyság az előző számítás alapján a következő:

Megnevezés		2023	2024
Bevétel	**millió Ft**	125	140
Költség	**millió Ft**	56	59
Dolgozók száma	**fő**	124	140
Selejt mennyisége	**millió darab**	124	97
Készlet	**millió darab**	36	29

Számítsa ki az egy millió forint bevételre jutó költség nagyságát a 2024. évre.

2024. évi mutató

Bevétel (Ft)	Költség (Ft)
140 000 000	59 000 000
1 000 000	x

x = 1 000 000 / 140 000 000 * 59 000 000, azaz 421 429 Ft költség / 1 000 000 Ft bevétel

Alapadatokkal való számítással:

Megnevezés		2023	2024
Bevétel	**millió Ft**	125	140
Költség	**millió Ft**	56	59
Dolgozók száma	**fő**	124	140
Selejt mennyisége	**millió darab**	124	97
Készlet	**millió darab**	36	29

Számítsa ki az egy millió forint bevételre jutó költség nagyságát a 2024. évre.

2024. évi mutató

Bevétel (millió Ft)	Költség (millió Ft)
140	59
1	x

x = 1 / 125 * 56 = 0,421429 millió Ft költség / 1 millió Ft bevétel

A kapott eredmény mindkét esetben, hogy 1 millió forint bevételre 421 429 forint költség jutott a 2024. évben.

b) Számítsa ki az egy millió forint költségre jutó bevétel nagyságát a 2023. és 2024. évre.

2023. évre a számítás:

Megnevezés		2023	2024
Bevétel	**millió Ft**	125	140
Költség	**millió Ft**	56	59
Dolgozók száma	**fő**	124	140
Selejt mennyisége	**millió darab**	124	97
Készlet	**millió darab**	36	29

Számítsa ki az egy millió forint költségre jutó bevétel nagyságát a 2023. évre.

2023. évi mutató

Költség (Ft)	Bevétel (Ft)
56 000 000	125 000 000
1 000 000	x

x = 1 000 000 / 56 000 000 * 125 000 000 = 2 232 142,86 Ft bevétel / 1 000 000 Ft költség

Alapadatokkal számolva:

Megnevezés		2023	2024
Bevétel	**millió Ft**	125	140
Költség	**millió Ft**	56	59
Dolgozók száma	**fő**	124	140
Selejt mennyisége	**millió darab**	124	97
Készlet	**millió darab**	36	29

Számítsa ki az egy millió forint költségre jutó bevétel nagyságát a 2023. évre.

2023. évi mutató

Költség (millió Ft)	Bevétel (millió Ft)
56	125
1	x

x = 1 / 56 * 125 = 2,23214286 millió Ft bevétel / 1 millió Ft költség

Tehát a 2023. évben 1 millió forint költségre 2,23 millió forint (azaz 1 millió forint költségre 2 232 143 forint) bevétel jutott.

2024. évre a számítás:

Megnevezés		2023	2024
Bevétel	**millió Ft**	125	140
Költség	**millió Ft**	56	59
Dolgozók száma	**fő**	124	140
Selejt mennyisége	**millió darab**	124	97
Készlet	**millió darab**	36	29

Számítsa ki az egy millió forint költségre jutó bevétel nagyságát a 2024. évre.

<u>2024. évi mutató</u>

Költség (Ft)	Bevétel (Ft)
59 000 000	140 000 000
1 000 000	x

x = 1 000 000 / 59 000 000 * 140 000 000 = 2 372 881,36 Ft bevétel / 1 000 000 Ft költség

Alapadatokkal számolva:

Megnevezés		2023	2024
Bevétel	**millió Ft**	125	140
Költség	**millió Ft**	56	59
Dolgozók száma	**fő**	124	140
Selejt mennyisége	**millió darab**	124	97
Készlet	**millió darab**	36	29

Számítsa ki az egy millió forint költségre jutó bevétel nagyságát a 2024. évre.

<u>2024. évi mutató</u>

Költség (millió Ft)	Bevétel (millió Ft)
59	140
1	x

x = 1 / 59 * 140 = 2,37288136 millió Ft bevétel / 1 millió Ft költség

A számítást követően megállapítható, hogy 1 millió forint költségre 2,37 millió forint bevétel jut.

c) Számítsa ki az egy dolgozóra jutó készlet nagyságát a 2023. évre.

Megnevezés		2023	2024
Bevétel	millió Ft	125	140
Költség	millió Ft	56	59
Dolgozók száma	fő	124	140
Selejt mennyisége	millió darab	124	97
Készlet	millió darab	36	29

Számítsa ki az egy dolgozóra jutó készlet nagyságát a 2023. évre.

<u>2023. évi mutató</u>

Dolgozók száma (fő)	Készlet (millió darab)
124	36
1	x

x = 1 / 124 * 36 = 0,29032258 millió darab készlet / 1 fő dolgozó

Egy dolgozóra 2023. évben 0,29 millió darab készlet jutott.

d) Számítsa ki az 1 millió forint készletre jutó bevétel nagyságát a 2024. évre.

Megnevezés		2023	2024
Bevétel	millió Ft	125	140
Költség	millió Ft	56	59
Dolgozók száma	fő	124	140
Selejt mennyisége	millió darab	124	97
Készlet	millió darab	36	29

Számítsa ki az 1 millió forint készletre jutó bevétel nagyságát a 2024. évre.

<u>2024. évi mutató</u>

Készlet (millió darab)	Bevétel (millió Ft)
29	140
1	x

x = 1 / 29 * 140 = 4,82758621 millió darab készlet / 1 millió forint bevétel

1 millió forint bevételre 2024. évben 4,83 millió darab készlet jutott.

e) Számítsa ki 100 darab selejtre jutó költség nagyságát 2024. évre.

Megnevezés		2023	2024
Bevétel	**millió Ft**	125	140
Költség	**millió Ft**	56	59
Dolgozók száma	**fő**	124	140
Selejt mennyisége	**millió darab**	124	97
Készlet	**millió darab**	36	29

Számítsa ki 100 darab selejtre jutó költség nagyságát 2024. évre.

2024. évi mutató

Selejt (darab)	Költség (Ft)
97 000 000	59 000 000
100	x

x = 100 / 97 000 000 * 59 000 000 = 60,82 Ft költség / 100 darab selejt

100 darab selejtre jutó költség 60,82 Ft a 2024. évben.

3. A KÖZÉPÉRTÉKEK ALKALMAZÁSI LEHETŐSÉGEI

A középértékek a vizsgált statisztikai sokaságot egy olyan számmal jellemzik, amely mindenkor a sokaság centrumában helyezkedik el. A fősokasági középértékek mellett a különböző részsokaságra jellemző középértékeket is meghatározhatjuk, így lehetővé válik azok általános jellemzőinek összehasonlítása.

A középértékek egyik csoportja a *számított középértékek*, amelyek matematikai számítás eredményei és ezáltal az értéksor elemeivel matematikai összefüggésben állnak, az elemek értéknagyságának a centrumában állnak. A másik csoportot a *helyzeti középértékek* képezik, amelyeket az elemek értéknagyság szerint rendezett sorából, matematikai számítás nélkül jelölünk ki, és a kijelölés az adatok sorszámához vagy gyakoriságához kötődik.

3.1. A középértékek csoportjai

3.1.1. A számított középértékek

Ebbe a csoportba tartozik az összes átlag (számtani-, harmónikus-, kronológikus-, négyzetes- és mértani átlag). Ezeknek a mértékegysége mindig az alapfeladat mértékegységétől függnek. Kivételt képez a mértani átlag, mivel ennek a kifejezési formája százalék (%) lesz.

3.1.1.1. Számtani átlag

A számtani átlag az észlelési adatok olyan középértéke, melyet az adatok helyébe helyettesítve az adatsor összege változatlan marad. Súlyozatlan formában számoljuk, ha az átlagolandó értékek gyakorisága megegyezik, ha a gyakoriság különböző súlyozott formában számolunk.

Súlyozatlan számtani átlag: $\bar{x} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$

A súlyozatlan számtani átlag esetén lehetőségünk van az =ÁTLAG() függvény alkalmazására is. A zárójelbe az alap adatokat kell kijelölni.

Súlyozott számtani átlag: $\bar{x} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} f_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} f_i}$

A gyakorlatban az átlagolandó értékek száma igen nagy, gyakran ekkor osztályozással osztályközös gyakorisági sorokat képezünk, az osztályokba sorolt adatokat az osztályközéppel

(u_i vagy x_i) jellemezzük. Az osztályközép értékét az adott intervallum alsó és felső határainak az átlaga adja meg. Azaz

$$\frac{adott\ \text{int}\,ervallum\ alsó\ határa + adott\ \text{int}\,ervallum\ felső\ határa}{2}$$

Az általános jelölése: u_i (feladatokban gyakran x_i jelölést fog kapni). Az átlag számítása osztályközös gyakorisági sorból:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} f_i} = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i u_i}{\sum_{i=1}^{n} f_i}$$

A számtani átlag fontos tulajdonsága, hogy érzékeny a kiugró értékekre, nem mindig tipikus érték, a sor legkisebb és legnagyobb eleme között helyezkedik el, illetve az átlagtól vett eltérések előjel szerinti összege 0.

A számtani átlag számításával a kapott eredmény mértékegysége az alapadatok mértékegységével egyezik meg.

3.1.1.2. Kronológikus átlag

A kronológikus átlag az állapot idősor adataiból számított speciális számtani átlag. Számításának alapja, hogy két szomszédos időpontban mért állományok átlaga az időszak átlagát adja. A teljes időtartamra vonatkozó átlag az időszakok átlagának az átlagolásával határozható meg:

$$\bar{X}_k = \frac{\frac{x_1}{2} + x_2 + x_3 + \ldots + x_{n-1} + \frac{x_n}{2}}{n-1}$$

A kronológikus átlagot akkor használjuk, ha az alapadatok egymástól azonos távolságban helyezkedjenek el. Például minden hónap első napjára, vagy minden hónap utolsó napjára állnak az adatok a rendelkezésre (január 1, február 1, március 1, stb.; vagy január 31, február 28, március 31, stb.). Másik feltételezésünk, hogy az adott időpont nyitó értéke megegyezik a megelőző időszak záró értékével. Azaz, például január 31 adata megegyezik a február 1 adatával. Február 28 adata megegyezik a március 1 adatával. stb.

A kronológikus átlagszámítással kapott eredmény mértékegysége az alapadatok mértékegységével egyezik meg.

Ha a *<u>hónap első napjaira</u>* vannak megadva az adataink, akkor a következő (sárga részek) hónapokat kell a számításnál figyelembe venni (13. táblázat):

13. táblázat: A kronológikus átlag számításához szükséges időszakok, ha az első napok vannak megadva a hónapoknál

ÉV	Hónap, nap	Éves átlag	Fél éves átlag		Negyedéves átlag			
			I.	II.	I.	II.	III.	IV.
ADOTT ÉV	1. 1.	x_1	x_1		x_1			
	2. 1.	x_2	x_2		x_2			
	3. 1.	x_3	x_3		x_3			
	4. 1.	x_4	x_4		x_4	x_1		
	5. 1.	x_5	x_5			x_2		
	6. 1.	x_6	x_6			x_3		
	7. 1.	x_7	x_7	x_1		x_4	x_1	
	8. 1.	x_8		x_2			x_2	
	9. 1.	x_9		x_3			x_3	
	10. 1.	x_{10}		x_4			x_4	x_1
	11. 1.	x_{11}		x_5				x_2
	12. 1.	x_{12}		x_6				x_3
Következő év	1. 1.	x_{13}		x_7				x_4

Forrás: Saját szerkesztés

<u>Éves átlag</u>: adott év január 1-től adott év december 31-ig

Mivel a számoláshoz az adott év december 31.-ei adata is szükséges, így a következő év január 1.-ei adatát kell figyelembe venni. Ennek oka, hogy a december 31.-e ZÁRÓ értéke megegyezik a következő év január 1.-e NYITÓ értékével számviteli elszámolás alapján.

$$\bar{x}_k = \frac{\frac{x_1}{2} + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 + x_9 + x_{10} + x_{11} + x_{12} + \frac{x_{13}}{2}}{13 - 1}$$

Féléves átlag:

1. I. féléves átlag: adott év január 1-től adott év június 30-ig
   Mivel az adott év június 30.-ai adata is szükséges a számoláshoz, így az adott év július 1.-ei adatát kell figyelembe venni. Ennek oka, hogy a június 30.-a ZÁRÓ értéke megegyezik a július 1. NYITÓ értékével számviteli elszámolás alapján.

$$\bar{x}_k = \frac{\frac{x_1}{2} + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + \frac{x_7}{2}}{7-1}$$

2. II. féléves átlag: adott év július 1-től adott év december 31-ig
   Mivel az adott év december 31.-e adata is szükséges a számoláshoz, így a következő év január 1.-ei adatát kell figyelembe venni. Ennek oka, hogy az adott év december 31.-e ZÁRÓ értéke megegyezik a következő év január 1.-e NYITÓ értékével számviteli elszámolás alapján.

$$\bar{x}_k = \frac{\frac{x_1}{2} + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + \frac{x_7}{2}}{7-1}$$

Negyedéves átlag:

1. I. negyedéves átlag: adott év január 1-től adott év március 31-ig
   Mivel az adott év március 31.-ei adata is szükséges a számoláshoz, így az adott év április 1.-ei adatát kell figyelembe venni. Ennek oka, hogy a március 31.-e ZÁRÓ értéke megegyezik az április 1.-e NYITÓ értékével számviteli elszámolás alapján.

$$\bar{x}_k = \frac{\frac{x_1}{2} + x_2 + x_3 + \frac{x_4}{2}}{4-1}$$

2. II. negyedéves átlag: adott év április 1-től adott év június 30-ig
   Mivel az adott év június 30.-ai adata is szükséges a kalkulációhoz, így az adott év július 1.-ei adatát kell figyelembe venni. Ennek oka, hogy az adott év június 30.-a ZÁRÓ értéke megegyezik az adott év július 1.-e NYITÓ értékével számviteli elszámolás alapján.

$$\bar{x}_k = \frac{\frac{x_1}{2} + x_2 + x_3 + \frac{x_4}{2}}{4-1}$$

3. III. negyedéves átlag: adott év július 1-től adott év szeptember 30-ig

   Mivel az adott év szeptember 30.-ai adata is szükséges a kalkulációhoz, így az adott év október 1.-ei adatát kell figyelembe venni. Ennek oka, hogy a szeptember 30.-a ZÁRÓ értéke megegyezik az október 1.-e NYITÓ értékével számviteli elszámolás alapján.

$$\bar{x}_k = \frac{\frac{x_1}{2} + x_2 + x_3 + \frac{x_4}{2}}{4-1}$$

4. IV. negyedéves átlag: adott év október 1-től adott év december 31-ig

   Mivel a számoláshoz az adott év december 31.-ei adata is szükséges, így a következő év január 1.-ei adatát kell figyelembe venni. Mivel a december 31.-e ZÁRÓ értéke megegyezik a következő év január 1-e NYITÓ értékével számviteli elszámolás alapján.

$$\bar{x}_k = \frac{\frac{x_1}{2} + x_2 + x_3 + \frac{x_4}{2}}{4-1}$$

Ha a *<u>hónap utolsó napjaira</u>* vannak megadva az adataink, akkor a következő hónapokat kell a számításnál figyelembe venni (14. táblázat):

14. táblázat: A kronológikus átlag számításához szükséges időszakok, ha az utolsó napok vannak megadva a hónapoknál

ÉV	Hónap, nap	Éves átlag	Fél éves átlag		Negyedéves átlag			
			I.	II.	I.	II.	III.	IV.
Előző év	12. 31.	x_1	x_1		x_1			
ADOTT ÉV	1. 31.	x_2	x_2		x_2			
	2. 28.	x_3	x_3		x_3			
	3. 31.	x_4	x_4		x_4	x_1		
	4. 30.	x_5	x_5			x_2		
	5. 31.	x_6	x_6			x_3		
	6. 30.	x_7	x_7	x_1		x_4	x_1	
	7. 31.	x_8		x_2			x_2	
	8. 31.	x_9		x_3			x_3	
	9. 30.	x_{10}		x_4			x_4	x_1
	10. 31.	x_{11}		x_5				x_2
	11. 30.	x_{12}		x_6				x_3
	12. 31.	x_{13}		x_7				x_4

Forrás: Saját szerkesztés

Éves átlag: adott év január 1-től adott év december 31-ig

Mivel az adott év január 1.-ei adata is szükséges a számításhoz, így az előző év december 31.-ei adatát kell figyelembe venni. Ennek oka, hogy az előző év december 31.-e ZÁRÓ értéke megegyezik az adott év január 1.-e NYITÓ értékével számviteli elszámolás alapján.

$$\bar{x}_k = \frac{\frac{x_1}{2} + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 + x_9 + x_{10} + x_{11} + x_{12} + \frac{x_{13}}{2}}{13 - 1}$$

Féléves átlag:

1. I. féléves átlag: adott év január 1-től adott év június 30-ig

   Mivel az adott év január 1.-ei adata is szükséges a kalkulációhoz, így a megelőző év december 31.-ei adatát kell figyelembe venni. Mivel az előző év december 31.-e ZÁRÓ értéke megegyezik az adott év január 1.-e NYITÓ értékével számviteli elszámolás alapján.

$$\bar{x}_k = \frac{\frac{x_1}{2} + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + \frac{x_7}{2}}{7 - 1}$$

2. II. féléves átlag: adott év július 1-től adott év december 31-ig

   Mivel az adott év július 1.-ei adata is szükséges, így az adott év június 30.-ai adatát kell a számoláshoz felhasználni. Ennek oka, hogy az adott év június 30.-a ZÁRÓ értéke megegyezik az adott év július 1.-e NYITÓ értékével számviteli elszámolás alapján.

$$\bar{x}_k = \frac{\frac{x_1}{2} + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + \frac{x_7}{2}}{7 - 1}$$

Negyedéves átlag:

1. I. negyedéves átlag: adott év január 1-től adott év március 31-ig

   Mivel az adott év január 1.-ei adata is szükséges a számoláshoz, így az előző év december 31.-ei adatát kell figyelembe venni. Ennek oka, hogy az előző év december 31.-e ZÁRÓ értéke megegyezik az adott év január 1.-e NYITÓ értékével számviteli elszámolás alapján.

$$\bar{x}_k = \frac{\frac{x_1}{2} + x_2 + x_3 + \frac{x_4}{2}}{4-1}$$

2. II. negyedéves átlag: adott év április 1-től adott év június 30-ig

   Mivel az adott év április 1.-ei adata is szükséges a számoláshoz, így az adott év március 31.-ei adatát kell a számoláshoz felhasználni. Ennek oka, hogy az adott év március 31.-ei ZÁRÓ értéke megegyezik az adott év április 1.-ei NYITÓ értékével számviteli elszámolás alapján.

$$\bar{x}_k = \frac{\frac{x_1}{2} + x_2 + x_3 + \frac{x_4}{2}}{4-1}$$

3. III. negyedéves átlag: adott év július 1-től adott év szeptember 30-ig

   Mivel az adott év július 1.-ei adata is szükséges a számoláshoz, így az adott év június 30.-ai adatát kell figyelembe venni. Mivel a június 30.-a ZÁRÓ értéke megegyezik a július 1.-e NYITÓ értékével számviteli elszámolás alapján.

$$\bar{x}_k = \frac{\frac{x_1}{2} + x_2 + x_3 + \frac{x_4}{2}}{4-1}$$

4. IV. negyedéves átlag: adott év október 1-től adott év december 31-ig

   Mivel az adott év október 1.-ei adata is szükséges a számoláshoz, így az adott év szeptember 30.-ai adatát kell a számoláshoz felhasználni. Mivel a szeptember 30 ZÁRÓ értéke megegyezik az adott év október 1 NYITÓ értékével számviteli elszámolás alapján.

$$\bar{x}_k = \frac{\frac{x_1}{2} + x_2 + x_3 + \frac{x_4}{2}}{4-1}$$

3.1.1.3. Harmonikus átlag

A harmonikus átlagot olyan intenzitási viszonyszámok átlagának meghatározására használjuk, amelyek fordított arányt tükröznek. A harmonikus átlag esetén azt az értéket keressük, amelynek reciprokát az eredeti adatok helyére írva, egyenlő az eredeti adatok reciprok-értékeinek összegével.

Ezt az átlagtípust akkor alkalmazzuk, ha teljesítmény adatok állnak a rendelkezésünkre (például motorteljesítmény, betakarítási adatok, vagy futási köreredmények, stb.).

Súlyozatlan harmonikus átlag: $\overline{x_h} = \dfrac{n}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i}}$

Súlyozott harmonikus átlag: $\overline{x_h} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} f_i}{\sum_{i=1}^{n} f_i \frac{1}{x_i}}$

A harmonikus átlagszámítással kapott eredmény mértékegysége az alapadatok mértékegységével egyezik meg.

3.1.1.4. Mértani átlag

A mértani átlag az időbeli, dinamikus folyamatok változási ütemének átlagát adja. Számítását leggyakrabban a dinamikus viszonyszámok segítségével végezzük el.

Ez az egyedüli átlagszámítási formulánk, ahol a kifejezési formánk nem az alapadatok mértékegységével egyezik meg. Itt százalékos lesz a kifejezési formánk.

A szakirodalom alapján a következő képletekkel találkozunk:

Súlyozatlan mértani átlag: $\overline{X}_g = \sqrt[n]{\Pi x_i}$

Súlyozott mértani átlag: $\overline{X}_g = \sqrt[\sum_{i=1}^{n} f_i]{\Pi x_i^{f_i}}$

A gyakorlatban ahhoz, hogy meg tudjuk határozni a mértani átlagot bázis- és lánc viszonyszámot kell először kalkulálni.

A láncviszonyszámból számított mértani átlag: $\overline{x} = \sqrt[n]{V_{L2} * V_{L3} * \ldots * V_{Ln}}$

Azaz láncviszonyszámból úgy számolunk mértani átlagot, hogy az összes láncviszonyszámot összeszorozzuk egymással és n-edik gyököt vonunk belőle. Az „n” értékét úgy határozzuk meg, hogy mennyi darab láncviszonyszámunk van a számításban. Az eredményt %-os formában fejezzük ki. 100% felett növekedésről, 100% alatt csökkenésről beszélünk a kezdeti időszakról a befejező időszakig időszakonként átlagosan.

Számítógépbe ezt a következő képletsorral számoljuk ki:
=hatvány(szorzat(összes lánc viszonyszám kijelölés);1/n)

Bázis viszonyszámból számított mértani átlag: $\bar{x} = \sqrt[n-1]{\frac{V_{Bn}}{V_{B1}}}$

Azaz, bázis viszonyszámból úgy számolunk mértani átlagot, hogy az utolsó bázis viszonyszám értékét elosztjuk az első bázis viszonyszám értékével, és ebből „n-1”-edik gyököt vonunk. Mivel az első bázis viszonyszám értékünk MINDIG 100% (vagyis 1), így elegendő az utolsó bázis viszonyszámot figyelembe venni az „n-1”-edik gyök alatt.
„n” értéke itt a kalkulált bázisviszonyszámok értékét jelenti.

Számítógépbe ezt a következő képletsorral számoljuk ki:
=hatvány(utolsó bázisviszonyszám;1/(n-1))
Eredményünk lehet 100 % alatt és felett is. 100% felett növekedés, míg 100% alatt csökkenés van a kezdő időszakról a befejező időszakra időszakonként átlagosan.
Értelmezés:
120%-os mértani átlag, ha 2015-től 2023-ig vannak megadva évente az adatok: a kezdő (2015) évtől a befejező (2023) évig <u>évente átlagosan</u> 20%-os növekedés következett be a vizsgálatban.
75%-os mértani átlag, ha 2018-tól 2024-ig vannak megadva évente az adatok: a kezdő (2018) évtől a befejező (2024) évig <u>évente átlagosan</u> 25%-os csökkenés következett be a vizsgált adatokban.

3.1.1.5. Négyzetes átlag
A négyzetes átlag meghatározásánál azt a számot keressük, amelyet az eredeti adatok helyére helyettesítve az adatsor négyzetösszege változatlan marad.

Súlyozatlan: $\bar{x}_q = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n}}$ Súlyozott: $\bar{x}_q = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} f_i x_i^2}{\sum_{i=1}^{n} f_i}}$

A négyzetes átlagot önálló formában nem használjuk, általában az átlagtól vett eltérések átlagos távolságának meghatározására használjuk.

A négyzetes átlagszámítással kapott eredmény mértékegysége az alapadatok mértékegységével egyezik meg.

A vizsgálat célja mindig az elemezni kívánt jelenség tulajdonságai határozzák meg, s ez alapján határozzuk meg az átlag típusát.

Ugyanabból a sokaságból számított különböző átlagok nagysága eltér egymástól:

$$\overline{X}_h < \overline{X}_g < \overline{X}_a < \overline{X}_q$$

3.1.2. A helyzeti középértékek

A gyakorlatban nem mindig az átlagok a legalkalmasabbak a sorok jellemzésére. Ezért alkalmazunk olyan mutatókat, amelyek VAGY helyzetük révén jellemzik a statisztikai sort, VAGY a sorszámuk miatt VAGY a legnagyobb gyakoriság centrumában helyezkednek el. Az ilyen középértékeket helyzeti középértéknek nevezzük.

3.1.2.1. Medián

A medián a sorba rendezett adatsor közepén elhelyezkedő középérték, amelynél az összes előforduló ismérvérték fele kisebb, fele pedig nagyobb.

A medián a rangsorolt adatok $\frac{n+1}{2}$-ik elemének az értéke. Ha az értéksor páratlan számú adatból áll, a medián a középső adat értéke. Ha páros, akkor a két középső szám számtani átlagának az értéke.

Páros elemszám		
Sorszám	**Érték**	**Sorba**
1	5	3
2	7	4
3	3	5
4	4	7

(n+1)/2 = (4+1)/2 = 2,5. elem

(4+5)/2 = 4,5 a medián értéke

Páratlan elemszám		
Sorszám	**Érték**	**Sorba**
1	9	4
2	4	5
3	5	7
4	7	8
5	8	9

(n+1)/2 = (5+1)/2 = 3. elem

Medián: 7

Értelmezés: medián 100 millió Ft: a vizsgált sokaság 50%-a 100 millió Ft alatt, míg 50%-a e felett van.

Az Excelben a =MEDIÁN() függvényt kell alkalmazni. A kapott eredmény mértékegysége az alapadatok mértékegységével egyezik meg.

3.1.2.2. Módusz

A módusz a tipikus ismérvérték, diszkrét ismérv esetén a módusz a leggyakrabban előforduló ismérvérték, folytonos ismérv esetén a gyakorisági görbe maximumhelye.

Vannak olyan statisztikai sorok, amelyeknek két módusza van (U vagy M alakú sorok). A csoportosító ismérvekkel történő részsokaságokra történő bontással általában a több móduszból eredő problémák megszüntethetők.

Számítógépben a =MÓDUSZ() függvényt kell alkalmazni.

A kapott eredmény mértékegysége az alapadatok mértékegységével egyezik meg.

Érték
4
7
6
4
4
3
7
9

Módusz = 4

Érték
4
7
7
4
4
3
7
8

Módusz = 4 és 7

Függvény módusz értéke: 4

3.2. A középértékek alkalmazásának bemutatása gyakorlati példákon keresztül

3.2.1. Példa 15 (feladat) – Súlyozatlan számtani átlag

Számítsa ki az átlagos dolgozói létszámot a következő 4 mezőgazdasági vállalkozás adatai alapján a 2023. évben (15. táblázat)? Értelmezze a kapott eredményeket.

15. táblázat: A mezőgazdasági vállalkozások dolgozói száma a 2023. évben

Mezőgazdasági vállalkozás megnevezése	Dolgozók száma (fő)
A	36
B	41
C	37
D	39

Forrás: Saját összeállítás

Példa 15 (megoldás) – Súlyozatlan számtani átlag

Mivel az alapadataink gyakorisági értékek nélkül szerepelnek a táblázatban, így súlyozatlan számtani átlagot kell számolni (21 ábra).

	A	B	C	D	E	F
1	**Mezőgazdasági vállalkozás megnevezése**	**Dolgozók száma (fő)**				
2	A	36		**Átlag**		
3	B	41		=átlag(B2:B5)		
4	C	37		38,25	fő/vállalkozás	
5	D	39				
6	Összesen	=szum(B2:B5)		=B7/DARAB(B2:B5)		
7	Összesen	153		38,25	fő/vállalkozás	

21. ábra: A súlyozatlan számtani átlag számítása a példa adatai alapján
Forrás: Saját szerkesztés

Az alapadatok összegét vesszük a =SZUM() függvény segítségével (153) és az összeget osztjuk el az elemek számával (n=4).

Lehetőség van súlyozatlan átlagszámítás esetén az =ÁTLAG() függvényt is alkalmazni. A zárójelbe az alap adatokat kell kijelölni.

Eredményként azt kaptuk, hogy az átlagos dolgozói létszám a 2023. évben a vizsgált vállalkozások esetében 38,25 fő (kerekítés nélkül) volt.

3.2.2. Példa 16 (feladat) – Súlyozatlan számtani átlag

Adott egy mezőgazdasági vállalkozás eladott búza termésmennyisége 2024. 4. hetében (16. táblázat):

16. táblázat: Az eladott búza termésmennyiségei a mezőgazdasági vállalkozásnál 2024. 4. hetében

Napok	Eladott mennyiség (tonna)
Hétfő	125
Kedd	136
Szerda	134
Csütörtök	109
Péntek	99

Forrás: Saját összeállítás

Határozza meg mennyi volt az átlagosan eladott termésmennyiség? Értelmezze a kapott eredményt.

Példa 16 (megoldás) – Súlyozatlan számtani átlag

	A	B	C	D	E
1	**Napok**	**Eladott mennyiség (tonna)**			
2	**Hétfő**	125		Számtani átlag	
3	**Kedd**	136		120,6	tonna/nap
4	**Szerda**	134			
5	**Csütörtök**	109		=B8/5	
6	**Péntek**	99		120,6	tonna/nap
7	**Összesen**	=szum(B2:B6)			
8	**Összesen**	603			

22. ábra: A súlyozatlan számtani átlag számítása a példa adatai alapján
Forrás: Saját szerkesztés

Az átlagosan eladott búza termésmennyiség 120,6 tonna volt naponta a vizsgált vállalkozásnál (22. ábra).

3.2.3. Példa 17 (feladat) – Súlyozott számtani átlag

A nappali tagozatos egyetemi hallgatók Statisztika tantárgy vizsgájának eredményei az 1. évfolyamon a következő (17. táblázat) volt a 2023/2024. 1. félévében:

17. táblázat: A nappali tagozatos egyetemi hallgatók statisztika tantárgy vizsgaeredményei az első évfolyamon

Osztályzat	Nappali tagozat (fő)
5	16
4	19
3	34
2	22
1	8

Forrás: Saját összeállítás

Határozza meg az első évfolyamos hallgatók Statisztika tantárgyának átlagos eredményét a 2023/2024. 1. félévében. Értelmezze a kapott eredményt.

Példa 17 (megoldás) – Súlyozott számtani átlag

Mivel a példánkban gyakorisági értékek is szerepelnek (nappali tagozatos hallgatói létszám), valamint az elérhető vizsga eredmények is, így súlyozott átlagot kell számolni. Itt már nem lehet az =ÁTLAG() függvényt alkalmazni.

Itt a következő képletet kell használni:

$$\overline{X}_a = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} f_i}$$

Ahhoz, hogy meg tudjuk határozni az átlagot el kell jelölni az egyes oszlopokat. Mindig azt választjuk „x”-nek, aminek az átlagát meg akarjuk határozni. Esetünkben a jegyek átlagát akarjuk kiszámolni (így ez lesz az „x”). A gyakorisági értékünk a hallgatói létszám lesz, így ezt jelöljük el „f_i”-vel.

A jelöléseket követően egy új oszlopot készítünk, melyet fi*xi jelöléssel látunk el. Tehát a nappali tagozatos hallgatók adott létszám értékét meg kell szorozni az adott osztályzat értékével. Ezeket soronként ki kell számolni, majd a =SZUM() függvénnyel összeadjuk az értékeket (példában ennek az értéke 310). Utána összegezzük a nappali tagozatos hallgatók létszámát is (99 fő).

	A	B	C	D
1	x_i	f_i		
2	**Osztályzat**	**Nappali tagozat (fő)**	**f_i * x_i**	
3	**5**	16	=B3*A3	80
4	**4**	19	=B4*A4	76
5	**3**	34	=B5*A5	102
6	**2**	22	=B6*A6	44
7	**1**	8	=B7*A7	8
8	**Összesen**	**=SZUM(B3:B7)**	**=SZUM(C3:C7)**	**310**
9		**99**		
10				
11	**Súlyozott számtani átlag**		**=D8/B9 =**	**3,1**

23. ábra: A súlyozott számtani átlag megoldása a példa adatai alapján
Forrás: Saját szerkesztés

Számítást követően megállapítható, hogy a hallgatók Statisztika tárgyának vizsgajegy átlaga a létszám függvényében 3,10 volt (23. ábra).

3.2.4. Példa 18 (feladat) – súlyozott számtani átlag

Papp Sándor mezőgazdasági termelő kukorica termőterületeink nagysága és a területekhez tartozó termésátlagok ismertek 2023.12.25 napján tett adatszolgáltatása alapján (18. táblázat):

18. táblázat: Papp Sándor mezőgazdasági termelő kukorica termőterületei termésátlagokkal együtt ismert

Termésátlag (tonna/hektár)	**Terület (hektár)**
8,7	14
7,9	15
7,4	10
6,9	9
6,4	14

Forrás: Saját összeállítás

Határozza meg a terület nagyságának a függvényében a termésátlagot. Értelmezze a kapott eredményt.

Példa 18 (megoldás) – Súlyozott számtani átlag

	A	B	C	D
1	x_i	f_i		
2	**Termésátlag (tonna/hektár)**	**Terület (hektár)**	**f_i * x_i**	
3	**8,7**	14	=B3*A3	122
4	**7,9**	15	=B4*A4	119
5	**7,4**	10	=B5*A5	74
6	**6,9**	9	=B6*A6	62
7	**6,4**	14	=B7*A7	90
8	**Összesen**	**=SZUM(B3:B7)**	**=SZUM(C3:C7)**	**466**
9		**62**		
10				
11	**Súlyozott számtani átlag**		**=D8/B9 =**	**7,52**

24. ábra: A súlyozott számtani átlag megoldása a példa adatai alapján
Forrás: Saját szerkesztés

Tehát Papp Sándor mezőgazdasági termő kukorica termésátlag 7,52 tonna hektáronként (24. ábra).

3.2.5. Példa 19 (feladat) - Súlyozott számtani átlag

Ismert a „Gazdasági agrármérnök” vállalkozás dolgozóinak állományi létszáma 2024.02.01 napi információk alapján (19. táblázat).

19. táblázat: A vizsgált vállalkozás dolgozóinak létszám adatai 2024.02.01 napján

Életkor (év)			Dolgozói létszám (fő)
20	**-**	**24**	19
25	**-**	**29**	17
30	**-**	**34**	11
35	**-**	**39**	16
40	**-**	**44**	15
45	**-**	**49**	13
50	**-**	**54**	7

Forrás: Saját összeállítás

Határozza meg az átlagos életkor értékét a vizsgált vállalkozásnál. Értelmezze a kapott eredményt.

Példa 19 (megoldás) – Súlyozott számtani átlag

Abban az esetben, ha az átlagolandó értékek nem „egyszerű” szám formájában vannak megadva, hanem osztályközös gyakorisági sor formájában, akkor is súlyozott számtani átlagot kell számolni.

Ebben az esetben először meg kell határozni az osztályközép értékét. Ennek meghatározásához alkalmazzuk a következő képletet:

$$\frac{alsó\ határ + felső\ határ}{2}$$

A példában az osztályközép értékei a következők (25. ábra):

1. intervallum: (20+24)/2 = 22
2. intervallum: (25+29)/2 = 27
3. intervallum: (30+35)/2 = 32
4. stb.

	A	B	C	D	E	F
1	**Életkor (év)**			**Dolgozói létszám (fő)**	**Osztályközép (xi)**	
2	**20**	-	**24**	19	=(A2+C2)/2	22
3	**25**	-	**29**	17	=(A3+C3)/2	27
4	**30**	-	**34**	11	=(A4+C4)/2	32
5	**35**	-	**39**	16	=(A5+C5)/2	37
6	**40**	-	**44**	15	=(A6+C6)/2	42
7	**45**	-	**49**	13	=(A7+C7)/2	47
8	**50**	-	**54**	7	=(A8+C8)/2	52

25. ábra: Az osztályközös gyakorisági sorból számított osztályközép levezetése
Forrás: Saját szerkesztés

Az osztályközép értékeit eljelöljük az „x_i"-nek, míg a dolgozói létszámot „f_i"-vel (mivel az életkor átlagát akarom megkapni, így ez lesz az „x_i" jelölés).

Innentől kezdve már ugyanúgy kell számolni, mint az előző példában is, tehát be kell helyettesíteni a következő képletbe:

$$\overline{X}_a = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} f_i}$$

Egy új oszlopot készítünk, melyet f_i*x_i jelöléssel látunk el. Az adott dolgozói létszámot összeszorozzuk az adott osztályközép értékével minden sorban (26. ábra). Ezután ezt a =SZUM() függvénnyel összegzem (3426). Ezután összegzem a részmunkaidős létszámot is (98 fő).

	A	B	C	D	E	F	G
1	**Életkor (év)**			**Dolgozói létszám (fő)**	**Osztályközép (xi)**	**fi * xi**	
2	**20**	-	**24**	19	22	=D2*E2	418
3	**25**	-	**29**	17	27	=D3*E3	459
4	**30**	-	**34**	11	32	=D4*E4	352
5	**35**	-	**39**	16	37	=D5*E5	592
6	**40**	-	**44**	15	42	=D6*E6	630
7	**45**	-	**49**	13	47	=D7*E7	611
8	**50**	-	**54**	7	52	=D8*E8	364
9	**Összesen**			**=SZUM(D2:D8)**		**=SZUM(F2:F8)**	**3426**
10				**98**			
11	Súlyozott számtani átlag				=G9 / D10 =	34,96 év/fő	

26. ábra: A súlyozott számtani átlag megoldása a példa adatai alapján
Forrás: Saját szerkesztés

Ezután a 3426 és a 98 hányadosát képezzük. Kalkuláció után eredményként megkapjuk, hogy a Gazdasági agrármérnök vállalkozásban dolgozók átlagos életkora 34,96 év volt 2024.02.01 napján.

3.2.6. Példa 20 (feladat) – Súlyozott számtani átlag

Egy vállalkozás dolgozóinak kereseti adatai ismertek a 2023. év novemberében (20. táblázat):

20. táblázat: A vizsgált vállalkozás kereset adatainak alakulása 2023. novemberében

Kereset (ezer Ft)			Dolgozók száma
	-	170	16
170,1	-	190	11
190,1	-	210	9
210,1	-	230	5
230,1	-	250	4
250,1	-	270	1

Forrás: Saját összeállítás

Határozza meg az átlagos kereset nagyságát a vizsgált vállalkozásban. Értelmezze a kapott eredményt.

Példa 20 (megoldás) – Súlyozott számtani átlag

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	**Kereset**			**Dolgozók száma**	**Osztályközép (x_i)**		**f_i * x_i**	
2	**(ezer Ft)**			**(fő)**	**Ft**			
3	150,1	-	170	16	=(A3+C3)/2	160,05	=F3*D3	2560,8
4	170,1	-	190	11	=(A4+C4)/2	180,05	=F4*D4	1980,6
5	190,1	-	210	9	=(A5+C5)/2	200,05	=F5*D5	1800,5
6	210,1	-	230	5	=(A6+C6)/2	220,05	=F6*D6	1100,3
7	230,1	-	250	4	=(A7+C7)/2	240,05	=F7*D7	960,2
8	250,1	-	270	1	=(A8+C8)/2	260,05	=F8*D8	260,05
9	**Összesen**			=SZUM(D3:D8)			=SZUM(G3:G8)	8662,3
10				46				

27. ábra: A súlyozott számtani átlag megoldása a példa adatai alapján

Forrás: Saját szerkesztés

A példa megoldása: =8662,3 / 46 = 188,311 ezer Ft (27. ábra). Azaz az átlagos dolgozói kereset a vizsgált vállalkozás esetén 188 311 Ft volt 2023. év novemberében.

3.2.7. Példa 21 (feladat) – Súlyozatlan harmonikus átlag

Egy üzemben 9 munkás teljesítményét mérték le 2024. január 08. napján. A mérés eredményeit a 21. táblázat mutatja:

21. táblázat: A dolgozók teljesítményének mérési adatai 2024.01.08.-án

Me. perc/munkadarab

Dolgozó	Teljesítmény
1	14
2	12
3	16
4	15
5	14
6	13
7	12
8	14
9	13

Forrás: Saját összeállítás

Határozza meg az átlagos teljesítmény nagyságát a vállalkozásnál.

Példa 21 (megoldás) – Súlyozatlan harmonikus átlag

A példában teljesítmény adatok vannak megadva, így harmonikus átlagot kell számolni. A teljesítmény adatok felsorolás formájában vannak megadva, így súlyozatlan harmonikus átlagot kell számolni.

A teljesítmény adatokat eljelöljük „x_i"-el és ezt követően reciprok értékeit képezzük a teljesítmény adatoknak. Mivel a reciprok érték képzésével 0-1 közötti értékeket fogunk kapni, így itt minimum 5 számjegyig ajánlatos számolni (28. ábra).

	A	B	C	D	E
2	**Dolgozó**	**Teljesítmény**	1 / xi		
3	**1**	14	=1/B3	0,071428571	
4	**2**	12	=1/B4	0,083333333	
5	**3**	16	=1/B5	0,0625	
6	**4**	15	=1/B6	0,066666667	
7	**5**	14	=1/B7	0,071428571	
8	**6**	13	=1/B8	0,076923077	
9	**7**	12	=1/B9	0,083333333	
10	**8**	14	=1/B10	0,071428571	
11	**9**	13	=1/B11	0,076923077	
12	Összesen		=szum(C3:C11)	0,663965201	
13					
14	Súlyozatlan harmónikus átlag			= 9 / D12 =	13,5549

28. ábra: A súlyozatlan harmonikus átlag megoldása a példa adatai alapján

Forrás: Saját szerkesztés

A reciprok értékek meghatározását követően a =SZUM() függvényt alkalmazzuk, melynek eredménye 0,663965. Az összesen értéket behelyettesítve a képletbe megkapjuk a végeredményt:

$$\overline{x}_h = \frac{n}{\sum \frac{1}{x_i}} = \frac{9}{0,663965} = 13,55 perc/munkadb$$

Tehát az átlagos teljesítménye egy dolgozónak 13,55 perc az adott munkadarabon a vizsgált vállalkozásnál.

3.2.8. Példa 22 (feladat) – Súlyozatlan harmonikus átlag

2024.01.11.-én megszámolták egy debreceni mezőgazdasági vállalat 6 csoportjában a becsomagolt zsákok mennyiségét (azaz a teljesítmény értékeket ismerjük) (22. táblázat).

22. táblázat: A mezőgazdasági vállalat teljesítmény adatai 2024.01.11.-én

Csoport	Teljesítmény (darab/csoport)
A	15 780
B	14 978
C	16 478
D	15 678
E	14 578
F	15 550

Forrás: Saját összeállítás

Határozza meg a 6 csoport adatai alapján a mezőgazdasági vállalkozás átlagos teljesítményét.

Példa 22 (megoldás) – Súlyozatlan harmonikus átlag Példa 2 megoldása

	A	B	C	D
1	**Csoport**	**Teljesítmény (darab/csoport) x_i**	**1 / xi**	
2	**A**	15 780	=1/B2	0,0000634
3	**B**	14 978	=1/B3	0,0000668
4	**C**	16 478	=1/B4	0,0000607
5	**D**	15 678	=1/B5	0,0000638
6	**E**	14 578	=1/B6	0,0000686
7	**F**	15 550	=1/B7	0,0000643
8	**Összesen**		**=szum(C2:C7)**	**0,0003875**

29. ábra: A súlyozatlan harmonikus átlag megoldása a példa adatai alapján
Forrás: Saját szerkesztés

Az átlagos teljesítmény (29. ábra) az adatok alapján $\frac{6}{0{,}0003875} = 15\ 483{,}41\ db/csoport$

3.2.9. Példa 23 (feladat) – Súlyozott harmonikus átlag

Ismert egy kabai mezőgazdasági vállalkozás gépparkjának teljesítménye és a gépek száma 2024.02.01 napjára vonatkozóan:

23. táblázat: Egy mezőgazdasági vállalkozás gépparkjának adatai 2024.02.01. napra vonatkozóan

Mezőgazdasági gépek száma (darab)	Mezőgazdasági gép teljesítménye (munkaóra/darab/nap)
2	7,8
4	8,4
5	8,8
6	10
2	11

Forrás: Saját összeállítás

Határozza meg a vállalkozás gépparkjának átlagos teljesítményét.

Példa 23 (megoldás) – Súlyozott harmonikus átlag

Mivel teljesítmény adatok vannak megadva, így itt is harmonikus átlagot kell számolni. Mivel itt már vannak gyakorisági értékek is, így súlyozott harmonikus átlagot kell számolni. A számításhoz a következő képletet fogjuk alkalmazni:

$$\bar{X}_h = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i}{\sum_{i=1}^{n} f_i \frac{1}{x_i}}$$

Az első lépésként meg kell határozni a jelöléseket. Az „f_i" a gyakoriság (a mezőgazdasági gépek száma), az „x_i" az átlagolandó értékeket (mezőgazdasági gép teljesítménye) fogja jelölni. Ezt követően lehet az $\frac{fi}{xi}$ hányadost képezni, melyet a végén össze kell adni a =SZUM() függvény segítségével. A képlet alapján meg kell határozni az összes gyakoriság értékét (19) a =SZUM() függvény segítségével (30. ábra).

	A	B	C	D
1	**Mezőgazdasági gépek száma (darab) fi**	**Mezőgazdasági gép teljesítménye (munkaóra/darab/nap) xi**	**fi / xi**	
2	2	7,8	=A2/B2	0,256410256
3	4	8,4	=A3/B3	0,476190476
4	5	8,8	=A4/B4	0,568181818
5	6	10	=A5/B5	0,6
6	2	11	=A6/B6	0,181818182
7	**19**		**=SZUM(C2:C6)**	**2,082600733**
8				
9	Súlyozott harmonikus átlag	=A7 / D7 =	9,123	munkaóra/darab/nap

30. ábra: A súlyozatlan harmonikus átlag megoldása a példa adatai alapján
Forrás: Saját szerkesztés

A képletbe helyettesítve a következő eredményt kapjuk:

$$\overline{x_h} = \frac{\sum f_i}{\sum \frac{f_i}{x_i}} = \frac{19}{2{,}0826} = 9{,}123$$

Tehát az átlagos teljesítmény nagysága 9,123 műszakóra/darab/nap a vizsgált kabai mezőgazdasági vállalkozásnál 2024.02.01 napon.

3.2.10. Példa 24 (feladat) – Súlyozott harmonikus átlag

Nagy Alexandru romániai gazdálkodó burgonya termésmennyiségei és a területekhez tartozó termásátlagok ismertek 2024.01.28. napi adatszolgáltatása esetén a 2023. évre vonatkozóan (24. táblázat):

24. táblázat: Egy romániai gazdálkodó burgonya termeléssel kapcsolatos adatai a 2023. évre vonatkozóan

Burgonya termésmennyiség (tonna)	Termésátlag (tonna/hektár)
140,4	7,8
161,28	8,4
175,12	8,8
210	10
246,4	11

Forrás: Saját adatgyűjtés

Határozza meg a gazdálkodó burgonya termásátlagát a 2023. évre vonatkozóan.

Példa 24 (megoldás) – Súlyozott harmonikus átlag Példa 2 megoldása

	A	B	C	D
1	**Burgonya termésmennyiség (tonna) fi**	**Termésátlag (tonna/hektár) xi**	**fi / xi**	
2	140,4	7,8	=A2/B2	18
3	161,28	8,4	=A3/B3	19,2
4	175,12	8,8	=A4/B4	19,9
5	210	10	=A5/B5	21
6	246,4	11	=A6/B6	22,4
7				
8	**933,2**		**=SZUM(C2:C6)**	**100,5**
9				
10	Súlyozott harmonikus átlag	=A7 / D7 =	9,286	tonna/hektár

31. ábra: A súlyozatlan harmonikus átlag megoldása a Példa 2 adatai alapján

Forrás: Saját szerkesztés

A burgonya termésátlaga a 2023. évben a romániai gazdaságban 9,29 tonna volt egy hektárra levetítve (31. ábra).

3.2.11. Példa 25 (feladat) – Kronológikus átlag (a hónap első napjai adottak)

Ismert egy hajdúszoboszlói sertéstelep kismalac állománya a 2023. évre vonatkozóan (25. táblázat).

25. táblázat: Egy hajdúszoboszlói sertéstelep kismalac állománya ismert 2023. évben

Időpont	Kismalac létszám (db)
2023.01.01	178
2023.02.01	179
2023.03.01	180
2023.04.01	183
2023.05.01	188
2023.06.01	190
2023.07.01	184
2023.08.01	188
2023.09.01	188
2023.10.01	186
2023.11.01	185
2023.12.01	181
2023.12.31	177

Forrás: Saját adatgyűjtés

a) Határozza meg az átlagos havi kismalac létszámot az adott hajdúszoboszlói sertéstelepen a 2023. évben.
b) Határozza meg az átlagos havi kismalac létszámot az adott hajdúszoboszlói sertéstelepen a 2023. év I. félévében.
c) Határozza meg az átlagos havi kismalac létszámot az adott hajdúszoboszlói sertéstelepen a 2023. év II. félévében.
d) Határozza meg az átlagos havi kismalac létszámot az adott hajdúszoboszlói sertéstelepen a 2023. év 1. negyedévében.
e) Határozza meg az átlagos havi kismalac létszámot az adott hajdúszoboszlói sertéstelepen a 2023. év 2. negyedévében.
f) Határozza meg az átlagos havi kismalac létszámot az adott hajdúszoboszlói sertéstelepen a 2023. év 3. negyedévében.
g) Határozza meg az átlagos havi kismalac létszámot az adott hajdúszoboszlói sertéstelepen a 2023. év 4. negyedévében.

Példa 25 (megoldás) – Kronológikus átlag (a hónap első napjai adottak)

Mivel a hónap első napjára vannak az adatok megadva, így a kalkulációnál az elméletnél leírt (13. táblázat) kell alkalmazni.

a) Határozza meg az átlagos havi kismalac létszámot az adott hajdúszoboszlói sertéstelepen a 2023. évben.

Éves átlagot kell számolni.

$$\bar{x}_k = \frac{\frac{x_1}{2} + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 + x_9 + x_{10} + x_{11} + x_{12} + \frac{x_{13}}{2}}{13-1}$$

$$\bar{x}_k = \frac{\frac{178}{2} + 179 + 180 + \ldots + 185 + 181 + \frac{177}{2}}{13-1} = 184{,}13$$

	A	B	C	D	E	F
1		**Időpont**	**Kismalac létszám (db)**	**Jelölés**	**Éves átlag**	
2	**adott év**	**2023.01.01**	178	x_1	=C2/2	89
3		**2023.02.01**	179	x_2		
4		**2023.03.01**	180	x_3		
5		**2023.04.01**	183	x_4		
6		**2023.05.01**	188	x_5		
7		**2023.06.01**	190	x_6		
8		**2023.07.01**	184	x_7		
9		**2023.08.01**	188	x_8		
10		**2023.09.01**	188	x_9		
11		**2023.10.01**	186	x_{10}		
12		**2023.11.01**	185	x_{11}		
13		**2023.12.01**	181	x_{12}		
14	**következő év**	**2023.12.31 = 2024.01.01**	177	x_{13}	=C14/2	88,5
15						
16	**Kronológikus átlag**		=(F2+szum(C3:C13)+F14)/(13-1) =			184,13

32. ábra: A kronológikus átlag számítása a példa adataira (éves átlag)
Forrás: Saját szerkesztés

Tehát havi átlagos kismalac létszám a hajdúszoboszlói telepen 184,13 darab volt (azaz 185 darab) a 2023. évben (32. ábra).

b) Határozza meg az átlagos havi kismalac létszámot az adott hajdúszoboszlói sertéstelepen a 2023. év I. félévében.

A kalkulációt az 1. félévre kell kiszámolni.

$$\bar{x}_k = \frac{\frac{x_1}{2} + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + \frac{x_7}{2}}{7-1}$$

	A	B	C	D	E	F
1		**Időpont**	**Kismalac létszám (db)**	**Jelölés**	**I. féléves átlag**	
2	**adott év**	**2023.01.01**	178	x_1	=C2/2	89
3		**2023.02.01**	179	x_2		
4		**2023.03.01**	180	x_3		
5		**2023.04.01**	183	x_4		
6		**2023.05.01**	188	x_5		
7		**2023.06.01**	190	x_6		
8		**2023.07.01**	184	x_7	=C8/2	92
9		**2023.08.01**	188	x_8		
10		**2023.09.01**	188	x_9		
11		**2023.10.01**	186	x_{10}		
12		**2023.11.01**	185	x_{11}		
13		**2023.12.01**	181	x_{12}		
14	**következő év**	**2023.12.31 = 2024.01.01**	177	x_{13}		
15						
16	**Kronológikus átlag**		=(F2+szum(C3:C7)+F8)/(7-1) =			183,50

33. ábra: A kronológikus átlag számítása a példa adataira (I. féléves átlag)
Forrás: Saját szerkesztés

A 2023. év I. félévében havonta átlagosan 183,5 darab volt a hajdúszoboszlói sertéstelep kismalac állománya (33. ábra).

c) Határozza meg az átlagos havi kismalac létszámot az adott hajdúszoboszlói sertéstelepen a 2023. év II. félévében.

A kalkulációt az 2. félévre kell kiszámolni.

$$\bar{x}_k = \frac{\frac{x_1}{2} + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + \frac{x_7}{2}}{7-1}$$

	A	B	C	D	E	F
1		**Időpont**	**Kismalac létszám (db)**	**Jelölés**	**II. féléves átlag**	
2	**adott év**	**2023.01.01**	178	x_1		
3		**2023.02.01**	179	x_2		
4		**2023.03.01**	180	x_3		
5		**2023.04.01**	183	x_4		
6		**2023.05.01**	188	x_5		
7		**2023.06.01**	190	x_6		
8		**2023.07.01**	184	x_7	=C8/2	92
9		**2023.08.01**	188	x_8		
10		**2023.09.01**	188	x_9		
11		**2023.10.01**	186	x_{10}		
12		**2023.11.01**	185	x_{11}		
13		**2023.12.01**	181	x_{12}		
14	**következő év**	**2023.12.31 = 2024.01.01**	177	x_{13}	=C14/2	88,5
15						
16	**Kronológikus átlag**		=(F2+szum(C3:C7)+F8)/(7-1) =			184,75

34. ábra: A kronológikus átlag számítása a példa adataira (II. féléves átlag)
Forrás: Saját szerkesztés

A 2023. év II. félévében havonta átlagosan 184,75 darab volt a hajdúszoboszlói sertéstelep kismalac állománya (34. ábra).

d) Határozza meg az átlagos havi kismalac létszámot az adott hajdúszoboszlói sertéstelepen a 2023. év 1. negyedévében.

A kalkulációt az 1. negyedévre kell kiszámolni.

$$\bar{x}_k = \frac{\frac{x_1}{2} + x_2 + x_3 + \frac{x_4}{2}}{4-1}$$

	A	B	C	D	E	F
1		**Időpont**	**Kismalac létszám (db)**	**Jelölés**	**I. negyedéves átlag**	
2	**adott év**	**2023.01.01**	178	x_1	=C2/2	89
3		**2023.02.01**	179	x_2		
4		**2023.03.01**	180	x_3		
5		**2023.04.01**	183	x_4	=C5/2	91,5
6		**2023.05.01**	188	x_5		
7		**2023.06.01**	190	x_6		
8		**2023.07.01**	184	x_7		
9		**2023.08.01**	188	x_8		
10		**2023.09.01**	188	x_9		
11		**2023.10.01**	186	x_{10}		
12		**2023.11.01**	185	x_{11}		
13		**2023.12.01**	181	x_{12}		
14	**következő év**	**2023.12.31 = 2024.01.01**	177	x_{13}		
15						
16	**Kronológikus átlag**		=(F2+szum(C3:C4)+F5)/(4-1) =			179,83

35. ábra: A kronológikus átlag számítása a példa adataira (I. negyedéves átlag)
Forrás: Saját szerkesztés

A 2023. év I. negyedévében havonta átlagosan 179,83 darab volt a hajdúszoboszlói sertéstelep kismalac állománya (35. ábra).

e) Határozza meg az átlagos havi kismalac létszámot az adott hajdúszoboszlói sertéstelepen a 2023. év 2. negyedévében.

A kalkulációt a 2. negyedévre kell kiszámolni.

$$\bar{x}_k = \frac{\frac{x_1}{2} + x_2 + x_3 + \frac{x_4}{2}}{4-1}$$

	A	B	C	D	E	F
1		**Időpont**	**Kismalac létszám (db)**	**Jelölés**	**II. negyedéves átlag**	
2	**adott év**	**2023.01.01**	178	x_1		
3		**2023.02.01**	179	x_2		
4		**2023.03.01**	180	x_3		
5		**2023.04.01**	183	x_4	=C5/2	91,5
6		**2023.05.01**	188	x_5		
7		**2023.06.01**	190	x_6		
8		**2023.07.01**	184	x_7	=C8/2	92
9		**2023.08.01**	188	x_8		
10		**2023.09.01**	188	x_9		
11		**2023.10.01**	186	x_{10}		
12		**2023.11.01**	185	x_{11}		
13		**2023.12.01**	181	x_{12}		
14	**következő év**	**2023.12.31 = 2024.01.01**	177	x_{13}		
15						
16	**Kronológikus átlag**		=(F5+szum(C6:C7)+F8)/(4-1) =			187,17

36. ábra: A kronológikus átlag számítása a példa adataira (II. negyedéves átlag)
Forrás: Saját szerkesztés

A 2023. év II. negyedévében havonta átlagosan 187,17 darab volt a hajdúszoboszlói sertéstelep kismalac állománya (36. ábra).

f) Határozza meg az átlagos havi kismalac létszámot az adott hajdúszoboszlói sertéstelepen a 2023. év 3. negyedévében.

A kalkulációt a 3. negyedévre kell kiszámolni.

$$\bar{x}_k = \frac{\frac{x_1}{2} + x_2 + x_3 + \frac{x_4}{2}}{4-1}$$

	A	B	C	D	E	F
1		**Időpont**	**Kismalac létszám (db)**	**Jelölés**	**III. negyedéves átlag**	
2	**adott év**	**2023.01.01**	178	x_1		
3		**2023.02.01**	179	x_2		
4		**2023.03.01**	180	x_3		
5		**2023.04.01**	183	x_4		
6		**2023.05.01**	188	x_5		
7		**2023.06.01**	190	x_6		
8		**2023.07.01**	184	x_7	=C8/2	92
9		**2023.08.01**	188	x_8		
10		**2023.09.01**	188	x_9		
11		**2023.10.01**	186	x_{10}	=C11/2	93
12		**2023.11.01**	185	x_{11}		
13		**2023.12.01**	181	x_{12}		
14	**következő év**	**2023.12.31 = 2024.01.01**	177	x_{13}		
15						
16	**Kronologikus átlag**		=(F8+szum(C9:C10)+F11)/(4-1) =			187,00

37. ábra: A kronologikus átlag számítása a példa adataira (III. negyedéves átlag)
Forrás: Saját szerkesztés

A 2023. év III. negyedévében havonta átlagosan 187,00 darab volt a hajdúszoboszlói sertéstelep kismalac állománya (37. ábra).

g) Határozza meg az átlagos havi kismalac létszámot az adott hajdúszoboszlói sertés-telepen a 2023. év 4. negyedévében.

A kalkulációt a 4. negyedévre kell kiszámolni.

$$\bar{x}_k = \frac{\frac{x_1}{2} + x_2 + x_3 + \frac{x_4}{2}}{4-1}$$

	A	B	C	D	E	F
1		**Időpont**	**Kismalac létszám (db)**	**Jelölés**	**IV. negyedéves átlag**	
2	**adott év**	**2023.01.01**	178	x_1		
3		**2023.02.01**	179	x_2		
4		**2023.03.01**	180	x_3		
5		**2023.04.01**	183	x_4		
6		**2023.05.01**	188	x_5		
7		**2023.06.01**	190	x_6		
8		**2023.07.01**	184	x_7		
9		**2023.08.01**	188	x_8		
10		**2023.09.01**	188	x_9		
11		**2023.10.01**	186	x_{10}	=C11/2	93
12		**2023.11.01**	185	x_{11}		
13		**2023.12.01**	181	x_{12}		
14	**következő év**	**2023.12.31 = 2024.01.01**	177	x_{13}	=C14/2	88,5
15						
16	**Kronológikus átlag**		=(F11+szum(C12:C13)+F14)/(4-1) =			182,50

38. ábra: A kronológikus átlag számítása a példa adataira (IV. negyedéves átlag)
Forrás: Saját szerkesztés

A 2023. év IV. negyedévében havonta átlagosan 182,50 darab volt a hajdúszoboszlói sertéstelep kismalac állománya (38. ábra).

3.2.12. Példa 26 (feladat) – Kronológikus átlag (a hónap első napjai adottak)

Egy debreceni pályázatíró irodában összesítették a hónap első napján beadott pályázatok számát, melyet a 26. táblázat tartalmaz. A pályázatíró iroda csak mezőgazdasági vállalkozások pályázatával foglalkozik:

26. táblázat: A beadott pályázatok száma a 2023. évben havonta egy debreceni pályázatíró irodában

Időpont	Beadott pályázatok száma (db)
2023.01.01	14
2023.02.01	15
2023.03.01	16
2023.04.01	17
2023.05.01	18
2023.06.01	19
2023.07.01	15
2023.08.01	17
2023.09.01	18
2023.10.01	16
2023.11.01	14
2023.12.01	15
2024.01.01	19

Forrás: Saját adatgyűjtés

a) Határozza meg a beadott átlagos pályázatok számát havonta a 2023. évben.
b) Határozza meg a beadott átlagos pályázatok számát havonta a 2023. év 1. félévében.
c) Határozza meg a beadott átlagos pályázatok számát havonta a 2023. év 2. félévében.
d) Határozza meg a beadott átlagos pályázatok számát havonta a 2023. év 1. negyedévében.
e) Határozza meg a beadott átlagos pályázatok számát havonta a 2023. év 2. negyedévében.
f) Határozza meg a beadott átlagos pályázatok számát havonta a 2023. év 3. negyedévében.
g) Határozza meg a beadott átlagos pályázatok számát havonta a 2023. év 4. negyedévében.

Példa 26 (megoldás) – Kronológikus átlag (a hónap első napjai adottak)

Éves átlag:

	A	B	C
1	Időpont	Beadott pályázatok száma (db)	ÉVES
2			
3	2023.01.01	14	=B3/2
4	2023.02.01	15	
5	2023.03.01	16	
6	2023.04.01	17	
7	2023.05.01	18	
8	2023.06.01	19	
9	2023.07.01	15	
10	2023.08.01	17	
11	2023.09.01	18	
12	2023.10.01	16	
13	2023.11.01	14	
14	2023.12.01	15	
15	2024.01.01	19	=B15/2
16	ÁTLAG		=(C3+SZUM(B4:B14)+C15)/12

<u>Féléves átlag</u>

	A	B	C	D
1	Időpont	Beadott pályázatok száma (db)	1	2
2			félév	
3	2023.01.01	14	=B3/2	
4	2023.02.01	15		
5	2023.03.01	16		
6	2023.04.01	17		
7	2023.05.01	18		
8	2023.06.01	19		
9	2023.07.01	15	=B9/2	=B9/2
10	2023.08.01	17		
11	2023.09.01	18		
12	2023.10.01	16		
13	2023.11.01	14		
14	2023.12.01	15		
15	2024.01.01	19		=B15/2
16	ÁTLAG		=(C3+SZUM(B4:B8)+C9)/6	=(D9+SZUM(B10:B14)+D15)/6

Negyedéves átlag

	A	B	C
1	Időpont	Beadott pályázatok száma (db)	1
2			negyedév
3	2023.01.01	14	=B3/2
4	2023.02.01	15	
5	2023.03.01	16	
6	2023.04.01	17	=B6/2
7	2023.05.01	18	
8	2023.06.01	19	
9	2023.07.01	15	
10	2023.08.01	17	
11	2023.09.01	18	
12	2023.10.01	16	
13	2023.11.01	14	
14	2023.12.01	15	
15	2024.01.01	19	
16	ÁTLAG		=(C3+SZUM(B4:B5)+C6)/3

	A	B	D
1	Időpont	Beadott pályázatok száma (db)	2
2			negyedév
3	2023.01.01	14	
4	2023.02.01	15	
5	2023.03.01	16	
6	2023.04.01	17	=B6/2
7	2023.05.01	18	
8	2023.06.01	19	
9	2023.07.01	15	=B9/2
10	2023.08.01	17	
11	2023.09.01	18	
12	2023.10.01	16	
13	2023.11.01	14	
14	2023.12.01	15	
15	2024.01.01	19	
16	ÁTLAG		=(D6+SZUM(B7:B8)+D9)/3

	A	B	E
1	Időpont	Beadott pályázatok száma (db)	3
2			negyedév
3	2023.01.01	14	
4	2023.02.01	15	
5	2023.03.01	16	
6	2023.04.01	17	
7	2023.05.01	18	
8	2023.06.01	19	
9	2023.07.01	15	=B9/2
10	2023.08.01	17	
11	2023.09.01	18	
12	2023.10.01	16	=B12/2
13	2023.11.01	14	
14	2023.12.01	15	
15	2024.01.01	19	
16	ÁTLAG		=(E9+SZUM(B10:B11)+E12)/3

	A	B	F
1	Időpont	Beadott pályázatok száma (db)	4
2			negyedév
3	2023.01.01	14	
4	2023.02.01	15	
5	2023.03.01	16	
6	2023.04.01	17	
7	2023.05.01	18	
8	2023.06.01	19	
9	2023.07.01	15	
10	2023.08.01	17	
11	2023.09.01	18	
12	2023.10.01	16	=B12/2
13	2023.11.01	14	
14	2023.12.01	15	
15	2024.01.01	19	=B15/2
16	ÁTLAG		=(F12+SZUM(B13:B14)+F15)/3

Időpont	Beadott pályázatok száma (db)	ÉVES	1	2	1	2	3	4
			félév		negyedév			
2023.01.01	14	7,00	7,00		7,00			
2023.02.01	15							
2023.03.01	16							
2023.04.01	17				8,50	8,50		
2023.05.01	18							
2023.06.01	19							
2023.07.01	15		7,50	7,50		7,50	7,50	
2023.08.01	17							
2023.09.01	18							
2023.10.01	16						8,00	8,00
2023.11.01	14							
2023.12.01	15							
2024.01.01	19	9,50		9,50				9,50
ÁTLAG		**16,38**	**16,58**	**16,17**	**15,50**	**17,67**	**16,83**	**15,50**

39. ábra: A kronológikus átlag számítása a Példa 2 adataira
Forrás: Saját szerkesztés

A 2023. évben havonta átlagosan 16,38 darab pályázatott adtak be a debreceni pályázatíró irodában (39. ábra).

A 2023. év 1. félévében havonta átlagosan 16,58 darab pályázatott adtak be a debreceni pályázatíró irodában (39. ábra).
A 2023. év 2. félévében havonta átlagosan 16,17 darab pályázatott adtak be a debreceni pályázatíró irodában (39. ábra).

A 2023. év 1. negyedévében havonta átlagosan 15,50 darab pályázatott adtak be a debreceni pályázatíró irodában (39. ábra).
A 2023. év 2. negyedévében havonta átlagosan 17,67 darab pályázatott adtak be a debreceni pályázatíró irodában (39. ábra).
A 2023. év 3. negyedévében havonta átlagosan 16,83 darab pályázatott adtak be a debreceni pályázatíró irodában (39. ábra).
A 2023. év 4. negyedévében havonta átlagosan 15,50 darab pályázatott adtak be a debreceni pályázatíró irodában (39. ábra).

3.2.13. Példa 27 (feladat) – Kronológikus átlag (a hónap utolsó napjai adottak)
Ismert egy hajdúszoboszlói gazdabolt eladott eszközeinek a mennyisége minden hónap utolsó napjára vonatkozóan a 2023. évben (27. táblázat):

27. táblázat: Egy hajdúszoboszlói gazdabolt eladott eszközeinek a mennyisége a 2023. évben

Időpont	Eladott eszközök száma (darab)	Éves átlag
2022.12.31	45	=B2/2
2023.01.31	59	
2023.02.28	77	
2023.03.31	110	
2023.04.30	116	
2023.05.31	127	
2023.06.30	134	
2023.07.31	135	
2023.08.31	130	
2023.09.30	125	
2023.10.31	99	
2023.11.30	61	
2023.12.31	47	=B14/2
Átlag		=(C2+szum(B3:B13)+C14)/12

Forrás: Saját adatgyűjtés

a) Határozza meg a havi átlagos eladott mennyiséget a gazdaboltban a 2023. évben.
b) Határozza meg a havi átlagos eladott mennyiséget a gazdaboltban a 2023. év 1. félévében.
c) Határozza meg a havi átlagos eladott mennyiséget a gazdaboltban a 2023. év 2. félévében.
d) Határozza meg a havi átlagos eladott mennyiséget a gazdaboltban a 2023. év 1. negyedévében.
e) Határozza meg a havi átlagos eladott mennyiséget a gazdaboltban a 2023. év 2. negyedévében.
f) Határozza meg a havi átlagos eladott mennyiséget a gazdaboltban a 2023. év 3. negyedévében.
g) Határozza meg a havi átlagos eladott mennyiséget a gazdaboltban a 2023. év 4. negyedévében.

Példa 27 (megoldás) - Kronológikus átlag (a hónap utolsó napjai adottak)

Éves átlag

	A	B	C
1	Időpont	Eladott eszközök száma (darab)	Éves átlag
2	2022.12.31	45	=B2/2
3	2023.01.31	59	
4	2023.02.28	77	
5	2023.03.31	110	
6	2023.04.30	116	
7	2023.05.31	127	
8	2023.06.30	134	
9	2023.07.31	135	
10	2023.08.31	130	
11	2023.09.30	125	
12	2023.10.31	99	
13	2023.11.30	61	
14	2023.12.31	47	=B14/2
15	Átlag		=(C2+szum(B3:B13)+C14)/12

Féléves átlag

	A	B	C	D
1	Időpont	Eladott eszközök száma (darab)	1. féléves átlag	2. féléves átlag
2	2022.12.31	45	=B2/2	
3	2023.01.31	59		
4	2023.02.28	77		
5	2023.03.31	110		
6	2023.04.30	116		
7	2023.05.31	127		
8	2023.06.30	134	=B8/2	=B8/2
9	2023.07.31	135		
10	2023.08.31	130		
11	2023.09.30	125		
12	2023.10.31	99		
13	2023.11.30	61		
14	2023.12.31	47		=B14/2
15	Átlag		=(C2+szum(B3:B17)+C8)/6	=(D8+szum(B9:B13)+D14)/6

Negyedéves átlag

	A	B	C
1	Időpont	Eladott eszközök száma (darab)	1. negyedéves átlag
2	2022.12.31	45	=B2/2
3	2023.01.31	59	
4	2023.02.28	77	
5	2023.03.31	110	=B5/2
6	2023.04.30	116	
7	2023.05.31	127	
8	2023.06.30	134	
9	2023.07.31	135	
10	2023.08.31	130	
11	2023.09.30	125	
12	2023.10.31	99	
13	2023.11.30	61	
14	2023.12.31	47	
15	Átlag		=(C2+SZUM(B3:B4)+C5)/3

	A	B	D
1	Időpont	Eladott eszközök száma (darab)	2. negyedéves átlag
2	2022.12.31	45	
3	2023.01.31	59	
4	2023.02.28	77	
5	2023.03.31	110	=B5/2
6	2023.04.30	116	
7	2023.05.31	127	
8	2023.06.30	134	=B8/2
9	2023.07.31	135	
10	2023.08.31	130	
11	2023.09.30	125	
12	2023.10.31	99	
13	2023.11.30	61	
14	2023.12.31	47	
15	Átlag		=(D5+SZUM(B6:B7)+D8)/3

	A	B	E
1	**Időpont**	**Eladott eszközök száma (darab)**	**3. negyedéves átlag**
2	**2022.12.31**	45	
3	**2023.01.31**	59	
4	**2023.02.28**	77	
5	**2023.03.31**	110	
6	**2023.04.30**	116	
7	**2023.05.31**	127	
8	**2023.06.30**	134	=B8/2
9	**2023.07.31**	135	
10	**2023.08.31**	130	
11	**2023.09.30**	125	=B11/2
12	**2023.10.31**	99	
13	**2023.11.30**	61	
14	**2023.12.31**	47	
15	**Átlag**		=(E8+SZUM(B9:B10)+E11)/3

	A	B	F
1	**Időpont**	**Eladott eszközök száma (darab)**	**4. negyedéves átlag**
2	**2022.12.31**	45	
3	**2023.01.31**	59	
4	**2023.02.28**	77	
5	**2023.03.31**	110	
6	**2023.04.30**	116	
7	**2023.05.31**	127	
8	**2023.06.30**	134	
9	**2023.07.31**	135	
10	**2023.08.31**	130	
11	**2023.09.30**	125	=B11/2
12	**2023.10.31**	99	
13	**2023.11.30**	61	
14	**2023.12.31**	47	=B14/2
15	**Átlag**		=(F11+SZUM(B12:B13)+F14)/3

40. ábra: A kronológikus átlag számítása a példa adataira vonatkozóan
Forrás: Saját kalkuláció

Eredmény:

Időpont	Eladott eszközök száma (darab)	Éves átlag	1. féléves átlag	2. féléves átlag	1. negyed-éves átlag	2. negyed-éves átlag	3. negyed-éves átlag	4. negyed-éves átlag
2022.12.31	45	22,50	22,50		22,50			
2023.01.31	59							
2023.02.28	77							
2023.03.31	110				55,00	55,00		
2023.04.30	116							
2023.05.31	127							
2023.06.30	134		67,00	67,00		67,00	67,00	
2023.07.31	135							
2023.08.31	130							
2023.09.30	125						62,50	62,50
2023.10.31	99							
2023.11.30	61							
2023.12.31	47	23,50		23,50				23,50
Átlag		101,58	96,42	106,75	71,17	121,67	131,50	82,00

A 2023. évben havonta átlagosan az eladott eszközök mennyisége 101,58 darab volt a hajdúszoboszlói gazdaboltban (40. ábra).

A 2023. év 1. félévében havonta átlagosan az eladott eszközök mennyisége 96,42 darab volt a hajdúszoboszlói gazdaboltban.
A 2023. év 2. félévében havonta átlagosan az eladott eszközök mennyisége 106,75 darab volt a hajdúszoboszlói gazdaboltban.

A 2023. év 1. negyedévében havonta átlagosan az eladott eszközök mennyisége 71,17 darab volt a hajdúszoboszlói gazdaboltban.
A 2023. év 2. negyedévében havonta átlagosan az eladott eszközök mennyisége 121,67 darab volt a hajdúszoboszlói gazdaboltban.
A 2023. év 3. negyedévében havonta átlagosan az eladott eszközök mennyisége 131,5 darab volt a hajdúszoboszlói gazdaboltban.
A 2023. év 4. negyedévében havonta átlagosan az eladott eszközök mennyisége 82 darab volt a hajdúszoboszlói gazdaboltban.

3.2.14. Példa 28 (feladat) - Súlyozatlan mértani átlag

A 2023-2024. I. félévében a Statisztika I. tárgy tárgyfelelőse 13 héten keresztül feljegyezte a hallgatók számát a Statisztika 1 előadáson (28. táblázat):

28. táblázat: A statisztika előadásra járó hallgatók száma 2023-2024. I. félévében

Hét	Hallgatók száma (fő)
1. hét	354
2. hét	348
3. hét	333
4. hét	330
5. hét	324
6. hét	311
7. hét	309
8. hét	307
9. hét	301
10. hét	299
11. hét	274
12. hét	266
13. hét	259

Forrás: Saját adatgyűjtés

Határozza meg a fejlődés átlagos ütemét! Értelmezze a kapott eredményt!

Példa 28 (megoldás) – Súlyozatlan mértani átlag

A fejlődés átlagos üteme kérdés a mértani átlagra utal, melyet kétféleképpen is kiszámolhatunk.

a) láncviszonyszámból számított mértani átlag:

Az alapadatokra vonatkozóan először lánc viszonyszámot kell számolni (adott hét értékét osztjuk a megelőző hét értékével). Ezt követően alkalmazzuk az elméletben bemutatott képletet:

$$\bar{x} = \sqrt[n]{V_{L2} * V_{L3} * ... * V_{Ln}}$$

Behelyettesítve a képletbe a következőt kell írni az Excelbe:

=HATVÁNY(SZORZAT(lánc viszonyszámok);1/(lánc viszonyszámok száma))

Figyeljünk majd oda arra, hogy az „n” értéke abban az esetben, ha láncviszonyszámból számoljuk ki a mértani átlagot az a kiszámolt láncviszonyszámok értékét jelenti. Mivel az 1. hétre nincs lánc viszonyszám értékünk, így összesen 12 lesz a vizsgált elemek száma.

	A	B	C	D	E
1	**Hét**	**Hallgatók száma (fő)**	**Lánc viszonyszám (%)**		
2	**1. hét**	354	-	-	
3	**2. hét**	348	=B3/B2	98,31%	
4	**3. hét**	333	=B4/B3	95,69%	
5	**4. hét**	330	=B5/B4	99,10%	
6	**5. hét**	324	=B6/B5	98,18%	
7	**6. hét**	311	=B7/B6	95,99%	
8	**7. hét**	309	=B8/B7	99,36%	
9	**8. hét**	307	=B9/B8	99,35%	
10	**9. hét**	301	=B10/B9	98,05%	
11	**10. hét**	299	=B11/B10	99,34%	
12	**11. hét**	274	=B12/B11	91,64%	
13	**12. hét**	266	=B13/B12	97,08%	
14	**13. hét**	259	=B14/B13	97,37%	
15					
16	**Mértani átlag**		=hatvány(szorzat(D3:D14);1/12)	0,9743	97,43%

41. ábra: A mértani átlag számítása láncviszonyszámból
Forrás: Saját kalkuláció

Eredményként a 97,43%-ot kaptuk, ami azt jelenti, hogy az első hétről a 13. hétre hetente átlagosan 2,57%-kal (97,43% - 100,00% = - 2,57%) csökkent a hallgatói létszám (41. ábra).

Ha az adatbázisra vonatkozóan a mértani átlagot a bázisviszonyszám felhasználásával számoljuk ki, akkor is ugyanezt a megoldást kell kapnunk.

b) bázis viszonyszámból számított mértani átlag (42. ábra):

Az alapadatokra először kiszámoljuk a bázis viszonyszám értékeit (adott hét értéke osztva a bázis (1. hét) értékével). Ezután alkalmazzuk az elméletben bemutatott képletet:

$$\bar{x} = \sqrt[n-1]{\frac{V_{Bn}}{V_{B1}}}$$

Behelyettesítés: = HATVÁNY (utolsó bázis viszonyszám;1/(bázis viszonyszám -1))

Figyeljünk majd oda arra, hogy az „n” értéke abban az esetben, ha bázisviszonyszámból számoljuk ki a mértani átlagot az a kiszámolt bázisviszonyszámok értékét jelenti. Mivel az 1. hétre is számolunk bázis viszonyszámot, így összesen 13 lesz a vizsgált elemek száma.

	A	B	C	D	E
1	**Hét**	**Hallgatók száma (fő)**	**Bázis viszonyszám (%)**		
2	**1. hét**	354	=B2/$B$2	100,00%	
3	**2. hét**	348	=B3/$B$2	98,31%	
4	**3. hét**	333	=B4/$B$2	94,07%	
5	**4. hét**	330	=B5/$B$2	93,22%	
6	**5. hét**	324	=B6/$B$2	91,53%	
7	**6. hét**	311	=B7/$B$2	87,85%	
8	**7. hét**	309	=B8/$B$2	87,29%	
9	**8. hét**	307	=B9/$B$2	86,72%	
10	**9. hét**	301	=B10/$B$2	85,03%	
11	**10. hét**	299	=B11/$B$2	84,46%	
12	**11. hét**	274	=B12/$B$2	77,40%	
13	**12. hét**	266	=B13/$B$2	75,14%	
14	**13. hét**	259	=B14/$B$2	73,16%	
15					
16	**Mértani átlag**		=HATVÁNY(D14;1/12)	0,9743	97,43%

42. ábra: A mértani átlag számítása bázis viszonyszámból
Forrás: Saját kalkuláció

Eredményként a 97,43%-ot kaptam, ami azt jelenti, hogy az első hétről a 13. hétre hetente átlagosan 2,57%-kal (97,43% - 100% = - 2,57%) csökkent a hallgatói létszám (42. ábra).

3.2.15. Példa 29 (feladat) – Súlyozatlan mértani átlag

Adott 2010-2022. évek között éves bontásban a kukorica felvásárlási átlagára Magyarországon. Határozza meg az átlagos változás mértékét (fejlődés átlagos ütemét) a vizsgált adatok alapján (29. táblázat).

29. táblázat: A kukorica felvásárlási ára Magyarországon 2010-2022 között

Év	Kukorica felvásárlási átlagár (Ft/tonna)
2010	37 591
2011	48 964
2012	56 697
2013	48 792
2014	41 498
2015	42 494
2016	41 677
2017	43 662
2018	46 111
2019	43 823
2020	49 808
2021	72 823
2022	113 683

Forrás: Saját adatgyűjtés

Példa 29 (megoldás) – Súlyozatlan mértani átlag

<u>Bázis viszonyszámból számított mértani átlag</u>

Először tehát ki kell számolni a bázis viszonyszám értékét. Ezt követően kell alkalmazni a Módszertanban leírtakat, ami alapján az utolsó bázis viszonyszám értékéből kell 12. gyököt vonni. Ezt Excelben a következő formában számolhatjuk ki:

=HATVÁNY(utolsó bázis vsz; 1 / (n-1)), azaz =HATVÁNY(302,42%;1/12)

A kapott eredmény a 109,66%. Tehát a 2010. évről a 2022. évre évente átlagosan 9,66%-kal nőtt a kukorica felvásárlási ára Magyarországon (43. ábra).

	A	B	C	D
1	**Év**	**Kukorica felvásárlási átlagár (Ft/tonna)**	**Bázis viszonyszám (%)**	
2	**2010**	37 591	=B2/$B$2	100,00%
3	**2011**	48 964	=B3/$B$2	130,25%
4	**2012**	56 697	=B4/$B$2	150,83%
5	**2013**	48 792	=B5/$B$2	129,80%
6	**2014**	41 498	=B6/$B$2	110,39%
7	**2015**	42 494	=B7/$B$2	113,04%
8	**2016**	41 677	=B8/$B$2	110,87%
9	**2017**	43 662	=B9/$B$2	116,15%
10	**2018**	46 111	=B10/$B$2	122,66%
11	**2019**	43 823	=B11/$B$2	116,58%
12	**2020**	49 808	=B12/$B$2	132,50%
13	**2021**	72 823	=B13/$B$2	193,72%
14	**2022**	113 683	=B14/$B$2	302,42%
15				
16	**Mértani átlag**		=hatvány(D14;1/12)	
17			109,66%	
18				
19		első lépés		
20		második lépés		
21				

43. ábra: Mértani átlag számításának menete bázis viszonyszámból
Forrás: Saját kalkuláció

Lánc viszonyszámból számított mértani átlag

Először ki kell számolni a láncviszonyszám értékét. Ezt követően kell alkalmazni a Módszertanban leírtakat, ami alapján össze kell szorozni az összes kalkulált láncviszonyszám értékét és a kapott eredményből kell 12. gyököt vonni. Ezt Excelben a következő formában számolhatjuk ki:

=HATVÁNY(SZORZAT(lánc viszonyszám értékek); 1/n)

azaz =HATVÁNY(SZORZAT(D3:D14);1/12)

A bázis viszonyszámból számított mértani átlag megegyezik a lánc viszonyszámból számított mértani átlag értékével. Mivel 100% feletti eredményt kaptunk, így megállapítható, hogy a 2010. évről a 2022. évre évente átlagosan 9,66%-kal nőtt a kukorica felvásárlási ára Magyarországon (44. ábra).

	A	B	C	D	E
1	**Év**	**Kukorica felvásárlási átlagár (Ft/tonna)**	**Lánc viszonyszám (%)**		
2	**2010**	37 591	-	-	
3	**2011**	48 964	=B3/B2	130,25%	
4	**2012**	56 697	=B4/B3	115,79%	
5	**2013**	48 792	=B5/B4	86,06%	
6	**2014**	41 498	=B6/B5	85,05%	
7	**2015**	42 494	=B7/B6	102,40%	
8	**2016**	41 677	=B8/B7	98,08%	
9	**2017**	43 662	=B9/B8	104,76%	
10	**2018**	46 111	=B10/B9	105,61%	
11	**2019**	43 823	=B11/B10	95,04%	
12	**2020**	49 808	=B12/B11	113,66%	
13	**2021**	72 823	=B13/B12	146,21%	
14	**2022**	113 683	=B14/B13	156,11%	
15					
16	**Mértani átlag**		=hatvány(szorzat(D3:D14);1/12)		
17			109,66%		
18					
19		első lépés			
20		második lépés			

44. ábra: Mértani átlag számításának menete lánc viszonyszámból
Forrás: Saját kalkuláció

3.2.16. Példa 30 (feladat) – Súlyozatlan négyzetes átlag

Ismertek a következő számadatok (30. táblázat):

30. táblázat: Ismert adatok rendezett sora

Sorszám	Értékek
1	-1
2	-6
3	4
4	6
5	1
6	-2
7	6

Forrás: Saját adatgyűjtés

Határozza meg az értékek átlagát.

Példa 30 (megoldás) – Súlyozatlan négyzetes átlag

Mivel az értékek között szerepel negatív előjelű érték is, így négyzetes átlagot kell számolni (45. ábra).

	A	B	C	D
1	**Sorszám**	**Értékek (xi)**	**xi érték négyzete**	
2	1	-1	=B2*B2	1
3	2	-6	=B3*B3	36
4	3	4	=B4*B4	16
5	4	6	=B5*B5	36
6	5	1	=B6*B6	1
7	6	-2	=B7*B7	4
8	7	6	=B8*B8	36
9	**SZUM**		**=SZUM(C2:C8)**	**130**
10				
11	**Négyzetes átlag**		=GYÖK(D9/7) =	4,31

45. ábra: A négyzetes átlag számítása a példa feladatra
Forrás: Saját kalkuláció

Kiszámításához a következő képletet alkalmazzuk: $\bar{x}_q = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n}}$

A feladat megoldása érdekében az alapadatokat (x_i) négyzetre kell emelni egy külön oszlopba, majd azokat össze kell adni. Ezen összeget kell elosztani a vizsgált elemek számával és a hányadosból gyököt vonni. A vizsgált adatok átlaga így 4,31.

3.2.17. Példa 31 (feladat) – Súlyozatlan négyzetes átlag

Ismertek a következő adatok. Határozza meg ezek átlagát (31. táblázat).

31. táblázat: Ismert az adatok rendezett sora

Sorszám	Értékek (xi)
1	17
2	16
3	9
4	-4
5	-7
6	6

Forrás: Saját adatgyűjtés

Példa 31 (megoldás) – Súlyozatlan négyzetes átlag

	A	B	C	D
1	**Sorszám**	**Értékek (xi)**	**xi érték négyzete**	
2	1	17	=B2*B2	289
3	2	16	=B3*B3	256
4	3	9	=B4*B4	81
5	4	-4	=B5*B5	16
6	5	-7	=B6*B6	49
7	6	6	=B7*B7	36
8	**SZUM**		**=SZUM(C2:C7)**	**727**
9				
10	**Négyzetes átlag**		=GYÖK(D8/6) =	11,01

46. ábra: A négyzetes átlag számítása

Forrás: Saját kalkuláció

A vizsgált értékek átlaga 11,01 (45. ábra).

3.2.18. Példa 32 (feladat) – Medián és Módusz

Ismert egy hajdúszoboszlói gazdálkodó kukorica termésátlag adatai 2023.07.08. napra vonatkozóan a különböző parcellákon: 5,19 tonna/hektár, 5,16 tonna/hektár, 5,99 tonna/hektár, 5,17 tonna/hektár, 4,93 tonna/hektár, 5,45 tonna/hektár, 5,19 tonna/hektár, 4,87 tonna/hektár.

a) Határozza meg a leggyakrabban előforduló elemértéket a kukorica termésátlag adatok alapján.
b) Határozza meg, hogy melyik az a termésátlag, melynél az adatok 50%-a nagyobb, 50%-a pedig kisebb (Határozza meg a középső elemértéket).

Példa 32 (megoldás) – Medián és Módusz

	A	B	C	D
1	**Sorszám**	**tonna/hektár**		
2	**1**	5,28		
3	**2**	5,16		
4	**3**	5,99		
5	**4**	5,17		
6	**5**	4,93		
7	**6**	5,45		
8	**7**	5,28		
9	**8**	4,87		
10				
11	Medián	=MEDIÁN(B2:B9) =	5,225	tonna/hektár
12	Módusz	=MÓDUSZ(B2:B9) =	5,280	tonna/hektár

47. ábra: A négyzetes átlag számítása
Forrás: Saját kalkuláció

A mediánt a =MEDIÁN() függvénnyel kell kiszámolni, ahol a zárójelbe az alapadatokat kell kijelölni. Eredményül azt kaptuk, hogy a vizsgált adatok 50%-a 5,225 tonna/hektár alatt van, 50% pedig 5,225 tonna/hektár felett van (47. ábra).

Ezt az értéket képlet nélkül is ki lehet számolni úgy, hogy az értékeket növekvő sorba rendezzük és megnézzük, hogy a 8 elem középső értéke mennyi. Ezt legegyszerűbben úgy tudjuk kiszámolni, hogy az $\frac{n+1}{2}$ képletbe behelyettesítünk. Azaz $\frac{8+1}{2} = 4{,}5.\ elem$ lesz a mediánunk a sorba rendezett elemek közül (48. ábra). A 4. és 5. elem számtani átlaga adja meg a medián értékét. Azaz $\frac{5{,}17+5{,}28}{2} = 5{,}225$

	A	B	C
1	**Sorszám**	**tonna/hektár**	**Sorbarendezés**
2	**1**	5,28	4,87
3	**2**	5,16	4,93
4	**3**	5,99	5,16
5	**4**	5,17	5,17
6	**5**	4,93	5,28
7	**6**	5,45	5,28
8	**7**	5,28	5,45
9	**8**	4,87	5,99

48. ábra: A sorbarendezett elemek táblázatos formája
Forrás: Saját kalkuláció

A módusz esetén a =MÓDUSZ() függvényt alkalmazzuk, ahol a zárójelbe szintén az alapadatokat kell bejelölni. Eredményül a képlet a 5,28 tonna/hektár értékét adja.

Abban az esetben, ha több módusz lenne a sokaságunkba, akkor a függvénnyel természetesen csak az egyik módusz íratható ki. Több módusz esetében a KISEBBIK módusz értékét írja ki a függvény (49. ábra).

	A	B	C	D
1	**Sorszám**	**tonna/hektár**	**Sorbarendezés**	
2	**1**	5,28	4,87	
3	**2**	5,16	4,93	
4	**3**	5,99	4,93	
5	**4**	5,17	5,16	
6	**5**	4,93	5,17	
7	**6**	5,45	5,28	
8	**7**	5,28	5,28	
9	**8**	4,87	5,45	
10	**9**	4,93	5,45	
11	**10**	5,45	5,99	
12				
13	Módusz	=MÓDUSZ(C2:C11) =		4,93

49. ábra: A többmóduszú sokaság meghatározása
Forrás: Saját kalkuláció

4. A SZÓRÓDÁSI MUTATÓK ALKALMAZÁSI LEHETŐSÉGEI

4.1. A szóródási mutatók elméleti alapjai (súlyozott, súlyozatlan)

Az előző fejezetben megismertük a középértéket, melyek arra alkalmasak, hogy a megfigyelt értéksorokat tömören, egy számmal jellemezzék (vagy a centrális tendenciát kifejezzék).

Mivel az egyes értékek természetszerűleg változékonyságot mutatnak, eltérnek a középértékektől, így különböznek egymástól. Az értékek különbözőségét (változékonyságát) *szóródás*nak nevezzük. Az egyes értéksorozatok jellemzésének fontos eleme a szóródás vizsgálata. Fontos, hogy az egyes vizsgálatok esetén egy számmal tudjuk jellemezni a vizsgálatot. Erre a célra szolgálnak a szóródási mérőszámok.

A szóródási mutatóknak a következő csoportjait különíthetjük el:

a) a szóródás terjedelme (i = R)
b) a középeltérés (KE)
c) az abszolút átlageltérés (AÁ)
d) a variancia (S^2)
e) a szórás (S)
f) a relatív szórás (V)

A 6 darab szóródási mutató más-más szempontból jellemzi a változékonyságot, ezért célszerű az összes mutatót kiszámolni egy teljes körű jellemzés esetén.

a) A **<u>szóródás terjedelme</u>** azt mutatja meg, hogy a vizsgált sokaság legkisebb és legnagyobb elemértéke között mekkora a távolság (két elemet vesz figyelembe). Mértékegysége az alapadatok mértékegységével egyezik meg. Ezt a mutatót tekintjük a legegyszerűbb mérőszámnak a szóródás vizsgálatánál. Jele az „i” vagy a „R” (range).

Kiszámítása a következő képlettel történik: $i = R = x_{\max} - x_{\min}$

Az x_{max} a legnagyobb elemértéket, míg az x_{min} a legkisebb elemértéket jelenti. Az x_{max} értékét a MAX() függvénnyel, míg az x_{min} értéket a MIN() függvénnyel számoljuk ki.

A szóródás terjedelme azt az értékközt jelöli, amelyen belül az egyes értékek elhelyezkednek. A szóródásról általában nem ad jó tájékoztatást, mivel nagyságát a véletlen hatásra erősen ingadozó, gyakran kiugró, szélső értékek határozzák meg (Kerékgyártó – Mundruczó, 1987).

b) A **középeltérés** a sokaságelemek mediántól számított eltéréseinek átlaga abszolút értékben. Mértékegysége az alapadatok mértékegységével egyezik meg.

Fontos, hogy az eltérések előjelétől el kell tekinteni, mivel akármilyen irányú az eltérés, annak abszolút nagysága a mértékadó (Szűcs, 2004). Ezt a mutatót akkor alkalmazzuk, ha a medián fejezi ki a legjobban a középértéket.

Az ABS függvénnyel határozható meg egy adott szám 0-tól mért távolsága. Pozitív szám abszolút értéke maga a szám. Negatív szám abszolút értéke a szám ellentettje. A nullától vett távolság soha nem lehet negatív szám (0 abszolút értéke 0. Az abszolút érték jele: | |

Különbséget tehetünk minta sokaság és teljes sokaság figyelembevétele mellett a számításban.

Súlyozatlan feladatok esetén a számítás:

TELJES sokaság

$$KE = \frac{\sum_{i=1}^{k} |x_i - Me|}{n}$$

MINTA sokaság

$$KE = \frac{\sum_{i=1}^{k} |x_i - Me|}{n-1}$$

Súlyozott feladatok esetén a számítás (gyakorisági sorból számítjuk a mutató értékét, természetesen súlyozott formulát kell alkalmazni):

TELJES sokaság

$$KE = \frac{\sum_{i=1}^{k} f_i * |x_i - Me|}{\sum_{i=1}^{k} f_i}$$

MINTA sokaság

$$KE = \frac{\sum_{i=1}^{k} f_i * |x_i - Me|}{\sum_{i=1}^{k} f_i - 1}$$

Súlyozott feladatról akkor beszélünk, ha a középeltérést gyakorisági sorból számoljuk, az egyes eltéréseket a megfelelő gyakoriságokkal súlyozva vesszük figyelembe.

c) Az **abszolút átlageltérés** (más néven átlagos abszolút eltérés) esetén a számtani átlagtól való eltérést használjuk fel a szóródás mértékének a meghatározásához. Mivel az egyes értékeknek a számtani átlagtól vett eltéréseinek az összege nulla (számtani átlag tulajdonsága), így az abszolút értékét kell képezni a különbségeknek, hogy az felhasználható legyen a jellemzéshez.

Az abszolút átlageltérés az egyes értékek és a számtani átlag különbségeinek abszolút értékben vett számtani átlaga. Azaz az abszolút átlagos eltérés az eltérések abszolút értékeinek számtani átlaga. Mértékegysége az alapadatok mértékegységével egyezik meg.

Különbséget tehetünk minta sokaság és teljes sokaság figyelembevétele mellett a számításban.

Súlyozatlan feladatok esetén a számítás:

TELJES sokaság

$$A\acute{A} = \frac{\sum_{i=1}^{k} \left| x_i - \bar{x} \right|}{n}$$

MINTA sokaság

$$A\acute{A} = \frac{\sum_{i=1}^{k} \left| x_i - \bar{x} \right|}{n-1}$$

Súlyozott feladatok esetén a számítás (gyakorisági sorból számítjuk a mutató értékét, természetesen súlyozott formulát kell alkalmazni):

TELJES sokaság

$$A\acute{A} = \frac{\sum_{i=1}^{k} f_i * \left| x_i - \bar{x} \right|}{\sum_{i=1}^{k} f_i}$$

MINTA sokaság

$$A\acute{A} = \frac{\sum_{i=1}^{k} f_i * \left| x_i - \bar{x} \right|}{\sum_{i=1}^{k} f_i - 1}$$

Súlyozott feladatról akkor beszélünk, ha az abszolút átlageltérést gyakorisági sorból számoljuk, az egyes eltéréseket a megfelelő gyakoriságokkal súlyozva vesszük figyelembe.

d) A **variancia (szórás négyzet)** jelentésének a meghatározása nehéz, mivel mértékegysége nem értelmezhető a számításban használt négyzetre emelés miatt (mértékegysége van, de a mi dimenziókban nem értelmezhető).

Nagyon fontos azt figyelembe venni, hogy az egyes értékeknek a számtani átlagtól vett eltéréseinek az összege nulla, így a $\sum (x_i - \bar{x})$ összeget nem tudjuk felhasználni a szóródás mérésére Az $(x_i - \bar{x})$ eltérések előjelétől való eltekintés egyik módja, ha az átlagolásukra a négyzetes átlagot használjuk.

Különbséget tehetünk minta sokaság és teljes sokaság figyelembevétele mellett a számításban.

Súlyozatlan feladatok esetén a számítás:

TELJES sokaság

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{k} \left(x_i - \bar{x} \right)^2}{n}$$

MINTA sokaság

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{k} \left(x_i - \bar{x} \right)^2}{n-1}$$

Súlyozott feladatok esetén a számítás (gyakorisági sorból számítjuk a mutató értékét, természetesen súlyozott formulát kell alkalmazni):

TELJES sokaság

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{k} f * \left(x_i - \bar{x}\right)^2}{\sum_{i=1}^{k} f_i}$$

MINTA sokaság

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{k} f * \left(x_i - \bar{x}\right)^2}{\sum_{i=1}^{k} f_i - 1}$$

Súlyozott feladatról akkor beszélünk, ha a varianciát a gyakorisági sorból számoljuk, az egyes eltéréseket a megfelelő gyakoriságokkal súlyozva vesszük figyelembe.

A számításaink ellenőrzésére használhatjuk az Excelben a variancia kiszámításához szükséges függvényeket is (csak súlyozatlan mutatók esetében van függvényünk):

Minta sokaság esetén: =VAR()

Teljes sokaság esetén: =VARP()

e) A **<u>szórás (átlagos négyzetes eltérés)</u>** az egyes értékek és a számtani átlag különbségeinek négyzetes átlag. Ez a leggyakrabban használt szóródási mérőszám. Fontos tulajdonsága a számtani átlag négyzetes minimum tulajdonságából következik, hogy a számtani átlagtól vett eltérés négyzetes átlaga KISEBB, mintha az eltéréseket bármilyen más értéktől kalkuláltuk volna (Kerékgyártó – Mundruczó, 1987). A szórás az eltérések négyzetes átlagának tekinthető. Az ismérvértékeknek a számtani átlagtól való eltérését, az $\left(x_i - \bar{x}\right)$ értékeket használja fel a szóródás mértékeként. Kerekgyártó et. al (2008) szerint kézenfekvő az eltérések átlagával jellemezni a szóródást.

Mértékegysége az alapadatok mértékegységével egyezik meg.

Különbséget tehetünk minta sokaság és teljes sokaság figyelembevétele mellett a számításban.

Súlyozatlan feladatok esetén a számítás:

TELJES sokaság

$$S = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{k} \left(x_i - \bar{x}\right)^2}{n}}$$

MINTA sokaság

$$S = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{k} \left(x_i - \bar{x}\right)^2}{n-1}}$$

Súlyozott feladatok esetén a számítás (gyakorisági sorból számítjuk a mutató értékét, természetesen súlyozott formulát kell alkalmazni):

TELJES sokaság

$$S = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{k} f * \left(x_i - \overline{x}\right)^2}{\sum_{i=1}^{k} f_i}}$$

MINTA sokaság

$$S = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{k} \left(x_i - \overline{x}\right)^2}{\sum_{i=1}^{k} f_i - 1}}$$

Súlyozott feladatról akkor beszélünk, ha a szórást gyakorisági sorból számoljuk, az egyes eltéréseket a megfelelő gyakoriságokkal súlyozva vesszük figyelembe.

A szórás nagyon sok előnnyel rendelkezik, mivel valamennyi értéket figyelembe veszi, egyértelműen meghatározható és algebrailag könnyen kezelhető. A szakirodalmi kutatás alapján megállapítható, hogy a szórás jól alkalmazható a változékonyság, az ingadozások mértékének jellemezésére. Azonban természetesen van hátránya is, mivel a szórás négyzetes átlagon alapul, így rendkívül érzékeny a kiugró értékekre (négyzetre emeléssel a kiugró értékek torzítják az eredményt).

f) A szórás abszolút értéke a sokaság változékonyságáról önmagában még kevés információt ad. Ezért célszerű kiszámítani annak az átlaghoz viszonyított nagyságát is, melyet **relatív szórásnak (szóródási együtthatónak vagy variációs koefficiensnek)** nevezünk. Ez egy dimenzió nélküli szóródási mérőszám, mely a szóródás relatív nagyságát méri (dimenzió nélküli szám). Fontos tulajdonsága, hogy kiszűri az értékek nagyságrendjét. Kifejezési formája százalék (mértékegysége nincs!).

Kiszámítása:

$$V = \frac{S}{\overline{x}} * 100$$

Értékei a következők lehetnek:

0 - 10%: homogén a sokaság, állandóságot feltételezünk.

10 - 20%: közepesen változékony a sokaság.

20 - 30%: erősen változékony a sokaság.

30% felett: a sokaság jellemzésére az átlag nem alkalmas, szélsőségesen ingadozó a sokaság.

Fontos, hogy a relatív szórás értékét csak pozitív értékű ismérv esetén alkalmazhatjuk. Ez a mutató (mérőszám) a szóródás relatív nagyságát méri.

Értelmezése: a szórás átlaghoz viszonyított nagyságát fejezi ki, azaz az egyes értékek az átlagtól relatíve átlagosan mennyivel (hány százalékkal) térnek el.

A képlet alkalmazásával megállapítható, hogy a relatív szórás egyenlő az egyes relatív eltérések négyzetes átlagával.

4.2. A szóródási mutatók alkalmazásának bemutatása

4.2.1. Példa 33 (feladat) – Súlyozatlan szóródási mutatók

Ismert egy miskolci állattenyésztő vállalkozás létszám adatai 2023. év egyes hónapjaira (32. táblázat):

32. táblázat: A vizsgált vállalkozás dolgozói létszám adatai 2023. évben

Hónapok	Dolgozói létszámadat (fő)
Január	36
Február	34
Március	34
Április	35
Május	32
Június	36
Július	34
Augusztus	35
Szeptember	34
Október	36
November	34
December	33

Forrás: Saját szerkesztés

a) Határozza meg a 2023. év legalacsonyabb és legnagyobb dolgozói létszáma közti nagyságot.
b) Határozza meg, hogy az alapadatok a medián értékétől abszolút értékben mennyivel térnek el átlagosan?
c) Határozza meg, hogy az alapadatok az átlagtól abszolút értékben mennyivel térnek el átlagosan?
d) Határozza meg, hogy az alapadatok az átlagtól átlagosan mennyivel térnek el?
e) Határozza meg a variancia értékét.
f) Határozza meg, hogy a sokaság heterogénnek vagy homogénnek tekinthető-e?

Példa 33 (megoldás) – Súlyozatlan szóródási mutatók

a) <u>Határozza meg a 2023. év legalacsonyabb és legmagasabb dolgozói létszáma közti nagyságot.</u>

Ezen kérdés esetén a „Szóródás terjedelme” mutatót kell kiszámolni.

$$i = R = x_{\max} - x_{\min}$$

Az x_{max} értékét a =MAX() függvény segítségével számolhatjuk ki. Függvény beírása az Excelbe:

= MAX(értékek kijelölése)   /ENTER/

Az x_{min} értékét a MIN() függvény segítségével számolhatjuk ki. A függvény beírása az Excelbe a következő:

= MIN(értékek kijelölése)   /ENTER/

	A	B
1	**Hónapok**	**Dolgozói létszámadat (fő)**
2	Január	36
3	Február	34
4	Március	34
5	Április	35
6	Május	32
7	Június	36
8	Július	34
9	Augusztus	35
10	Szeptember	34
11	Október	36
12	November	34
13	December	33

D	E	F
Minimum	=MIN(B2:B13) =	32
Maximum	=MAX(B2:B13) =	36

Szóródás terjedelme (i) = MAX - MIN = 36 - 32 = 4

50. ábra: A szóródás terjedelmének a kiszámítása az Excelben
Forrás: Saját szerkesztés

A legmagasabb (MAX) értéknek az 36 fő, míg a legalacsonyabb (MIN) a 32 fő (50. ábra), így a szóródás terjedelme 4 fő (36 fő – 32 fő).

A vállalkozás legmagasabb és legalacsonyabb dolgozói létszáma közti különbség a 2023. évi adatok alapján a 4 fő.

b) <u>Határozza meg, hogy az alapadatok a medián értékétől abszolút értékben mennyivel térnek el átlagosan?</u>

A feladat megoldásához szükségünk van a medián számítására, mivel a feladatban kért mutató a „Középeltérés”. A medián értékét a =MEDIÁN() függvény felhasználásával számoljuk ki. A függvény beírása az Excelbe (51. ábra):

= MEDIÁN(adatok kijelölése)   /ENTER/

A kapott eredmény: 34 fő, mely azt jelenti, hogy az alapadatok 50%-a 34 fő alatt, míg 50%-a 34 fő felett van. Azaz a középső elemérték 34 fő.

	A	B	C
1	**Hónapok**	**Dolgozói létszámadat (fő)**	
2	Január	36	
3	Február	34	
4	Március	34	
5	Április	35	
6	Május	32	
7	Június	36	
8	Július	34	
9	Augusztus	35	
10	Szeptember	34	
11	Október	36	
12	November	34	
13	December	33	
14			
15	Medián	=MEDIÁN(B2:B13)	34
16	Darabszám	=DARAB(B2:B13)	12

51. ábra: A medián és az elemszám kiszámítása az Excelben
Forrás: Saját szerkesztés

Ezt követően meghatározzuk az elemek számát a =DARAB() függvény segítségével. Függvény beírása az Excelbe:

= DARAB(adatok kijelölése) /ENTER/

A kapott eredmény a 12 darab, mely azt jelenti, hogy a vizsgált elemek száma 12 darab.

A medián kiszámítását követően kerülhet sor a „Középérték” számításához szükséges részek meghatározására. Az alap feladat mellé egy új oszlopot készítünk el, melynek az elnevezése:

$$| x_i – Me |$$

Abszolút érték jelet az ALT és a W együttes megnyomásával tudjuk elkészíteni.

Az $| x_i – Me |$ képletben a medián (Me) értéke az 34 fő. Az x_i értékei soronként rendre a dolgozói létszám értékek havonta. A kiszámításhoz a különbség abszolút értékét kell venni, ehhez pedig az =ABS() függvényt alkalmazzuk (52. ábra).

Januári adat meghatározása: = ABS(36 - 34) = 2

Februári adat meghatározása: = ABS(34 - 34) = 0

Márciusi adat meghatározása: =ABS(34 - 34) = 0

	A	B	C	D
1	**Hónapok**	**Dolgozói létszámadat (fő)**	**| xi - medián |**	
2	Január (x_1)	36	=ABS(B2-$C$15)	2
3	Február (x_2)	34	=ABS(B3-$C$15)	0
4	Március (x_3)	34	=ABS(B4-$C$15)	0
5	Április (x_4)	35	=ABS(B5-$C$15)	1
6	Május (x_5)	32	=ABS(B6-$C$15)	2
7	Június (x_6)	36	=ABS(B7-$C$15)	2
8	Július (x_7)	34	=ABS(B8-$C$15)	0
9	Augusztus (x_8)	35	=ABS(B9-$C$15)	1
10	Szeptember (x_9)	34	=ABS(B10-$C$15)	0
11	Október (x_{10})	36	=ABS(B11-$C$15)	2
12	November (x_{11})	34	=ABS(B12-$C$15)	0
13	December (x_{12})	33	=ABS(B13-$C$15)	1
14	**ÖSSZESEN**		**=SZUM(C2:C13)**	**11**
15				
16	Medián	=MEDIÁN(B2:B13)	34	
17	Darabszám	=DARAB(B2:B13)	12	
18				
19	1. lépés			
20	2. lépés			
21	3. lépés			
22	4. lépés (Középeltérés)	=D14/C17 =	0,917	
23				

52. ábra: A középeltérés kiszámítása az Excelben
Forrás: Saját szerkesztés

Ugyanazzal az adattal számolunk minden képlet esetén, így le lehet fixálni az adott mező értékét a „$" jellel. A „$" jelet az „ALTGR" „É" együttes lenyomásával tudjuk berni az oszlop és a sor jelölés elé. Természetesen használható az „F4" billentyű is.

Az újonnan elkészített oszlop kiszámítását követően kerülhet sor az összegzésre a =SZUM() függvény segítségével. Összesítő értékünk így 11 fő lett.

Ezt követően kell a középérték képletbe behelyettesíteni: 11 /12 = 0,917 fő.

Értelmezés: Az alapadatok a 34 fős medián értékétől abszolút értékben 0,917 fővel térnek el.

c) <u>Határozza meg, hogy az alapadatok az átlagtól abszolút értékben mennyivel térnek el átlagosan?</u>

A feladat megoldásához szükségünk van az átlag kiszámítására, mivel a feladatban kért mutató az „Abszolút átlageltérés”. Ebben az esetben az átlag értékét az =ÁTLAG() függvény felhasználásával számoljuk ki.

Függvény beírása az Excelbe (53. ábra): =ÁTLAG(adatok kijelölése) /ENTER/

Kapott eredmény: 34,42 fő, mely azt jelenti, hogy az alapadatok átlaga 34,42 fő.

Ezt követően meghatározzuk az elemek számát a =DARAB() függvény segítségével. Függvény beírása az Excelbe: = DARAB(adatok kijelölése) /ENTER/

Kapott eredmény: 12 db, mely azt jelenti, hogy a vizsgált elemek száma 12 darab (53. ábra).

	A	B	C
1	**Hónapok**	**Dolgozói létszámadat (fő)**	
2	Január (x_1)	36	
3	Február (x_2)	34	
4	Március (x_3)	34	
5	Április (x_4)	35	
6	Május (x_5)	32	
7	Június (x_6)	36	
8	Július (x_7)	34	
9	Augusztus (x_8)	35	
10	Szeptember (x_9)	34	
11	Október (x_{10})	36	
12	November (x_{11})	34	
13	December (x_{12})	33	
14			
15	Átlag	=ÁTLAG(B2:B13)	34,42
16	Darabszám	=DARAB(B2:B13)	12

53. ábra: Az átlag és az elemszám kiszámítása az Excelben
Forrás: Saját szerkesztés

Az átlag kiszámítását követően kerülhet sor az „Abszolút átlageltérés” számításához szükséges részek meghatározására. Az alap feladat mellé egy új oszlopot készítünk el, melynek az elnevezése:

$$| x_i - \bar{x} |$$

Az $| x_i - \bar{x} |$ képletben az átlag ($\bar{x}$) értéke a 34,42 fő. Az x_i értékei soronként rendre a dolgozók létszámadatai. A kiszámításhoz a különbség abszolút értékét kell venni, ehhez pedig az =ABS() függvényt alkalmazzuk (54. ábra).

Januári adat meghatározása: = ABS(36 - 34,42) = 1,58

Februári adat meghatározása: = ABS(34 - 34,42) = 0,42

Márciusi adat meghatározása: =ABS(34 - 34,42) = 0,42

	A	B	C	D
1	**Hónapok**	**Dolgozói létszámadat (fő)**	**| xi - átlag |**	
2	Január (x_1)	36	=ABS(B2-$C$15)	1,58
3	Február (x_2)	34	=ABS(B3-$C$15)	0,42
4	Március (x_3)	34	=ABS(B4-$C$15)	0,42
5	Április (x_4)	35	=ABS(B5-$C$15)	0,58
6	Május (x_5)	32	=ABS(B6-$C$15)	2,42
7	Június (x_6)	36	=ABS(B7-$C$15)	1,58
8	Július (x_7)	34	=ABS(B8-$C$15)	0,42
9	Augusztus (x_8)	35	=ABS(B9-$C$15)	0,58
10	Szeptember (x_9)	34	=ABS(B10-$C$15)	0,42
11	Október (x_{10})	36	=ABS(B11-$C$15)	1,58
12	November (x_{11})	34	=ABS(B12-$C$15)	0,42
13	December (x_{12})	33	=ABS(B13-$C$15)	1,42
14	**ÖSSZESEN**		**=SZUM(C2:C13)**	**11,8**
15				
16	Átlag	=ÁTLAG(B2:B13)	34,42	
17	Darabszám	=DARAB(B2:B13)	12	
18				
19	1. lépés			
20	2. lépés			
21	3. lépés			
22	4. lépés (Abszolút átlageltérés)	=D14/C17 =	0,986	

54. ábra: Az abszolút átlageltérés kiszámítása az Excelben
Forrás: Saját szerkesztés

Ha ugyanazzal az adattal számolunk minden képlet esetén, akkor le lehet fixálni az adott mező értékét a „$” jellel. A „$” jelet az „ALTGR” „É” együttes lenyomásával tudjuk berni az oszlop és a sor jelölés elé. Természetesen használható az „F4” billentyű is.

Az újonnan elkészített oszlop kiszámítását követően kerülhet sor az összegzésre a =SZUM() függvény segítségével. Összesítő értékünk így 11,8 fő lett.

Ezt követően kell a képletbe behelyettesíteni: 11,8 / 12 = 0,986 fő.

Értelmezés: Az alapadatok egyes értékei a 34,42 fős átlagtól átlagosan abszolút értékben 0,986 fővel térnek el.

d) <u>Határozza meg a variancia értékét.</u>

A feladat megoldásához szükségünk van az átlagra (34,42 fő) és a darabszámra (12 darab), melyet már korábban kiszámoltunk. A kérdés alapján a feladatban a „Variancia” értékét kell meghatározni.

Az alap feladat mellé egy új oszlopot készítünk el, melynek az elnevezése:

$$(x_i - \bar{x})\text{^}2$$

Az ($x_i - \bar{x}$)^2 képletben az átlag ($\bar{x}$) értéke a 34,42, míg az x_i értékei soronként rendre a dolgozói létszám értékek. A kiszámításhoz a különbség négyzetét kell venni (55. ábra). A hatvány jelet számítógéppel az „ALTGR" „3" együttes lenyomásával, majd a „2" billentyű megnyomásával tudjuk elkészíteni. Függvény használata is lehetséges, ekkor a =HATVÁNY() függvényt alkalmazzuk, ahol a zárójelbe a különbséget kell képezni.

Januári adat meghatározása: = (36 – 34,42)^2 = 2,51

Februári adat meghatározása: = (34 – 34,42)^2 = 0,17

Márciusi adat meghatározása: = (34 – 34,42)^2 = 0,17

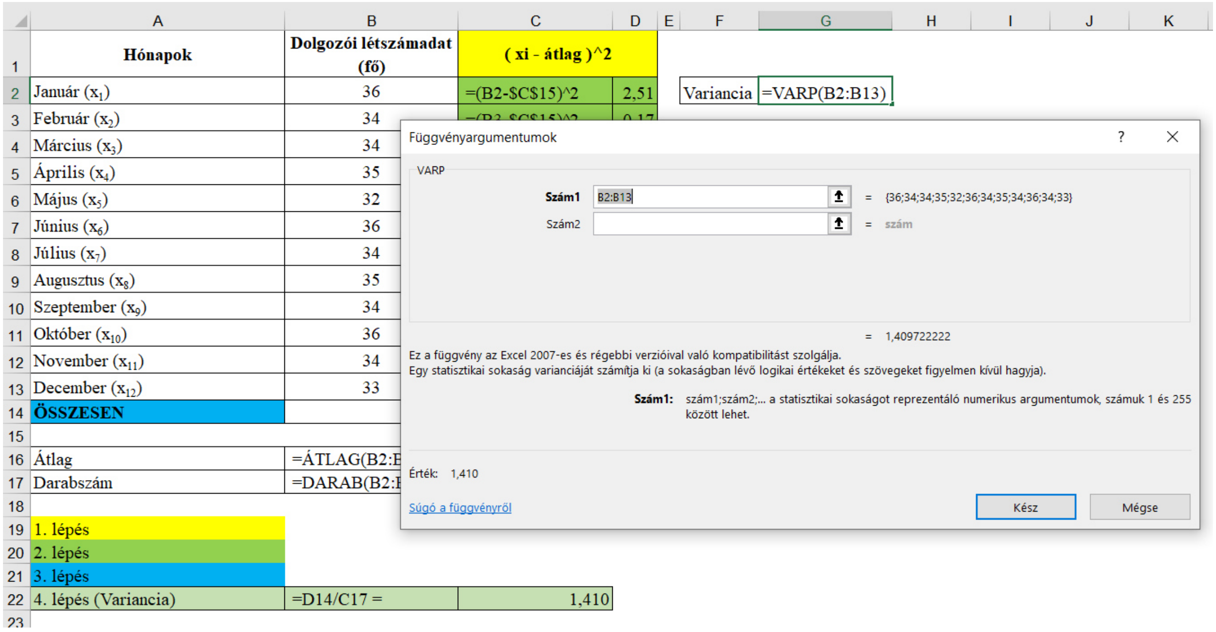
	A	B	C	D
1	**Hónapok**	**Dolgozói létszámadat (fő)**	**(xi - átlag)^2**	
2	Január (x_1)	36	=(B2-$C$15)^2	2,51
3	Február (x_2)	34	=(B3-$C$15)^2	0,17
4	Március (x_3)	34	=(B4-$C$15)^2	0,17
5	Április (x_4)	35	=(B5-$C$15)^2	0,34
6	Május (x_5)	32	=(B6-$C$15)^2	5,84
7	Június (x_6)	36	=(B7-$C$15)^2	2,51
8	Július (x_7)	34	=(B8-$C$15)^2	0,17
9	Augusztus (x_8)	35	=(B9-$C$15)^2	0,34
10	Szeptember (x_9)	34	=(B10-$C$15)^2	0,17
11	Október (x_{10})	36	=(B11-$C$15)^2	2,51
12	November (x_{11})	34	=(B12-$C$15)^2	0,17
13	December (x_{12})	33	=(B13-$C$15)^2	2,01
14	**ÖSSZESEN**		**=SZUM(C2:C13)**	**16,9**
15				
16	Átlag	=ÁTLAG(B2:B13)	34,42	
17	Darabszám	=DARAB(B2:B13)	12	
18				
19	1. lépés			
20	2. lépés			
21	3. lépés			
22	4. lépés (Variancia)	=D14/C17 =	1,410	

55. ábra: A variancia kiszámítása az Excelben
Forrás: Saját szerkesztés

Itt is alkalmazható az átlag értékénél a fixálás a $$ jel beállításával. Az újonnan elkészített oszlop kiszámítását követően kerülhet sor az összegzésre a =SZUM() függvény segítségével. Az összesítő értékünk így 16,9 lett. Fontos, hogy ennek a számnak nincs értelmezhető mértékegysége. Képletbe behelyettesítve az eredményünk: = (16,9 / 12) = 1,410.

Értelmezés: Nem szükséges az értelmezés, mivel ezen számértéknek nincs értelmezhető mértékegysége.

Függvénnyel való ellenőrzés (56. ábra):



56. ábra: A VARP() függvény alkalmazása a példára
Forrás: Saját számítása

A példában <u>teljes sokaságra</u> számoltunk, így a *=VARP()* függvényt alkalmazzuk. Ha <u>minta sokaságra</u> számolnánk, akkor a *=VAR()* függvényt kellene használni.

e) <u>Határozza meg, hogy az alapadatok az átlagtól átlagosan mennyivel térnek el?</u>

A variancia értékéből egyszerűen gyököt kell vonni a GYÖK függvény segítségével:

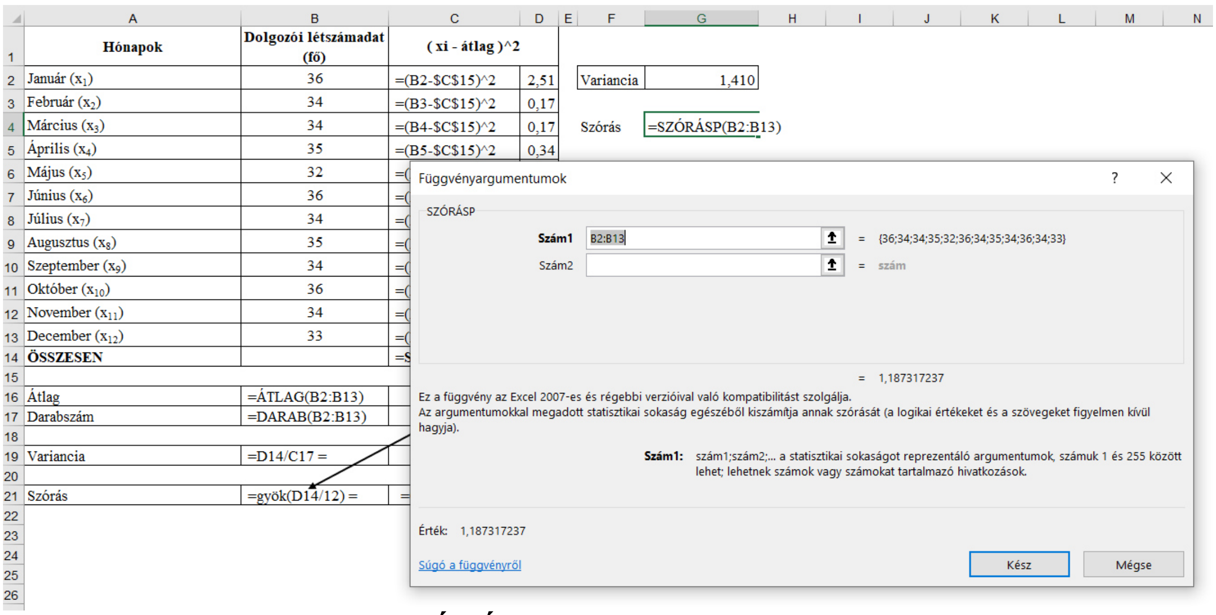
=GYÖK(1,410) = 1,19 fő.

Értelmezés: az alapadatok az átlagtól átlagosan 1,19 fővel térnek el (57. ábra).

	A	B	C	D	E	F	G
1	**Hónapok**	**Dolgozói létszámadat (fő)**	**(xi - átlag)^2**				
2	Január (x_1)	36	=(B2-$C$15)^2	2,51		Variancia	1,410
3	Február (x_2)	34	=(B3-$C$15)^2	0,17			
4	Március (x_3)	34	=(B4-$C$15)^2	0,17			
5	Április (x_4)	35	=(B5-$C$15)^2	0,34			
6	Május (x_5)	32	=(B6-$C$15)^2	5,84			
7	Június (x_6)	36	=(B7-$C$15)^2	2,51			
8	Július (x_7)	34	=(B8-$C$15)^2	0,17			
9	Augusztus (x_8)	35	=(B9-$C$15)^2	0,34			
10	Szeptember (x_9)	34	=(B10-$C$15)^2	0,17			
11	Október (x_{10})	36	=(B11-$C$15)^2	2,51			
12	November (x_{11})	34	=(B12-$C$15)^2	0,17			
13	December (x_{12})	33	=(B13-$C$15)^2	2,01			
14	**ÖSSZESEN**		**=SZUM(C2:C13)**	**16,9**			
15							
16	Átlag	=ÁTLAG(B2:B13)	34,42				
17	Darabszám	=DARAB(B2:B13)	12				
18							
19	Variancia	=D14/C17 =	1,410				
20							
21	Szórás	=gyök(D14/12) =	=GYÖK(C19)	1,19			

57. ábra: A szórás kiszámítása az Excelben
Forrás: Saját szerkesztés

Függvénnyel való ellenőrzés (58. ábra):



58. ábra: A =SZÓRÁSP() függvény alkalmazása a példára
Forrás: Saját számítása

A példában <u>teljes sokaságra</u> számoltunk, így a ***=SZÓRÁSP()*** függvényt alkalmazzuk. Ha <u>minta sokaságra</u> számolnánk, akkor a ***=SZÓRÁS()*** függvényt kellene használni.

f) <u>Határozza meg, hogy a sokaság heterogénnek vagy homogénnek tekinthető-e?</u>

A relatív szórás meghatározásához a korábban kiszámított szórás és átlag értékekre van szükségünk.

Szórás		1,19	fő/hó
Átlag		34,42	fő/hó
Relatív szórás	=1,19/34,42 =		3,45%

Mivel a relatív szórás értékünk 10 % alatt van, ezért így megállapítható, hogy a sokaság homogénnek tekinthető.

4.2.2. Példa 34 (feladat) – Súlyozatlan szóródási mutatók

Ismert egy debreceni székhelyű vállalkozás 8 kisboltjának a bevétel adatai a 2023. évre (59. ábra):

Kisbolt sorszáma	Bevétel (millió Ft)
1 (x_1)	4,5
2 (x_2)	4,6
3 (x_3)	5,9
4 (x_4)	5,7
5 (x_5)	5,1
6 (x_6)	5,3
7 (x_7)	4,8
8 (x_8)	4,9

59. ábra: A példa feladat adatbázisa
Forrás: Saját adatgyűjtés

Kérdések:

a) Határozza meg a legalacsonyabb és a legmagasabb bevétel érték közötti távolságot? Értelmezze az eredményt.

b) Határozza meg, hogy az alapadatok a medián értékétől abszolút értékben mennyivel térnek el. Értelmezze az eredményt.

c) Határozza meg, hogy az alapadatok az átlagtól átlagosan abszolút értékben mennyivel térnek el. Értelmezze az eredményt.

d) Határozza meg, hogy az alapadatok az átlagtól átlagosan mennyivel térnek el? Értelmezze az eredményt.

e) Határozza meg a feladat varianciáját. Értelmezze az eredményt.

f) Határozza meg, hogy a sokaság heterogénnek vagy homogénnek tekinthető-e? Értelmezze az eredményt.

Példa 34 (megoldás) – Súlyozatlan szóródási mutatók

a) Határozza meg a legalacsonyabb és a legmagasabb bevétel érték közötti távolságot? Értelmezze az eredményt.

	A	B	C	D	E	F	G
1	**Kisbolt sorszáma**	**Bevétel (millió Ft)**		Szóródás terjedelme			
2	1 (x_1)	4,5		maximum	=MAX(B2:B9)	5,9	millió Ft
3	2 (x_2)	4,6		minimum	=MIN(B2:B9)	4,5	millió Ft
4	3 (x_3)	5,9		terjedelem	=MAX - MIN	1,4	millió Ft
5	4 (x_4)	5,7					
6	5 (x_5)	5,1					
7	6 (x_6)	5,3					
8	7 (x_7)	4,8					
9	8 (x_8)	4,9					

60. ábra: A szóródás terjedelemének a meghatározása
Forrás: Saját kalkuláció

Értelmezés (60. ábra):

Max = 5,9 millió Ft — A vizsgált adatbázisban a legmagasabb bevétel 5,9 millió Ft.

Min = 4,5 millió Ft — A vizsgált adatbázisban a legalacsonyabb bevétel 4,5 millió Ft.

Terjedelem = 1,4 millió Ft — A legmagasabb és a legalacsonyabb bevétel között a távolság 1,4 millió Ft.

b) Határozza meg, hogy az alapadatok a medián értékétől abszolút értékben mennyivel térnek el. Értelmezze az eredményt (61. ábra).

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	**Kisbolt sorszáma**	**Bevétel (millió Ft)**	**| xi - ME |**			Középeltérés			
2	1 (x_1)	4,5	=ABS(B2-$H$2)	0,50		medián (ME)	=MEDIÁN(B2:B9)	5,00	millió Ft
3	2 (x_2)	4,6	=ABS(B3-$H$2)	0,40		elemszám	=DARAB(B2:B9)	8,00	darab
4	3 (x_3)	5,9	=ABS(B4-$H$2)	0,90					
5	4 (x_4)	5,7	=ABS(B5-$H$2)	0,70		1. lépés			
6	5 (x_5)	5,1	=ABS(B6-$H$2)	0,10		2. lépés			
7	6 (x_6)	5,3	=ABS(B7-$H$2)	0,30		3. lépés			
8	7 (x_7)	4,8	=ABS(B8-$H$2)	0,20		4. lépés			
9	8 (x_8)	4,9	=ABS(B9-$H$2)	0,10		5. lépés			
10	**Összesen**		**=SZUM(C2:C9)**	**3,20**					
11									
12									
13			Középeltérés	=D10/H3		0,40	millió Ft		

61. ábra: A középeltérés értékének a meghatározása
Forrás: Saját kalkuláció

Medián (ME) = 5 millió Ft — Az alapadatok 50%-a 5 millió Ft alatt van, míg 50%-a 5 millió Ft felett van.

Középeltérés (KE) = 0,4 millió Ft — Az alapadatok az 5 millió forintos medián értékétől abszolút értékben átlagosan 0,4 millió forinttal térnek el (teljes sokaság vizsgálata esetén).

Ha a „Középeltérés”-t minta alapján kívánjuk meghatározni, akkor a 3,2/7 = 0,457 millió forint értéket kapnánk eredményként. Azaz minta alapján az alapadatok az 5 millió forintos medián értékétől abszolút értékben 0,457 millió forinttal térnek el átlagosan.

c) Határozza meg, hogy az alapadatok az átlagtól átlagosan abszolút értékben mennyivel térnek el. Értelmezze az eredményt (62. ábra).

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	Kisbolt sorszáma	Bevétel (millió Ft)	|xi - átlag|			Abszolút átlageltérés			
2	1 (x_1)	4,5	`=ABS(B2-$H$2)`	0,60		átlag	=ÁTLAG(B2:B9)	5,10	millió Ft
3	2 (x_2)	4,6	`=ABS(B3-$H$2)`	0,50		elemszám	=DARAB(B2:B9)	8,00	darab
4	3 (x_3)	5,9	`=ABS(B4-$H$2)`	0,80					
5	4 (x_4)	5,7	`=ABS(B5-$H$2)`	0,60		1. lépés			
6	5 (x_5)	5,1	`=ABS(B6-$H$2)`	0,00		2. lépés			
7	6 (x_6)	5,3	`=ABS(B7-$H$2)`	0,20		3. lépés			
8	7 (x_7)	4,8	`=ABS(B8-$H$2)`	0,30		4. lépés			
9	8 (x_8)	4,9	`=ABS(B9-$H$2)`	0,20		5. lépés			
10	Összesen		=SZUM(C2:C9)	3,20					
11									
12									
13			Abszolút átlageltérés	=D10/H3		0,40	millió Ft		
14									

62. ábra: Az abszolút átlageltérésének a meghatározása
Forrás: Saját kalkuláció

Átlag ($\bar{x}$) = 5,1 millió forint — Az alapadatok átlaga 5,1 millió forint.

Abszolút átlageltérés (AÁ) = 0,4 mFt — Az alapadatok az 5,1 millió forintos átlag értékétől abszolút értékben 0,4 millió forinttal térnek el átlagosan.

Ha az „Abszolút átlageltérés” mutatót minta alapján kívánjuk meghatározni, akkor a 3,2/7 = 0,457 millió forintot kapnánk eredményként. Azaz minta alapján az alapadatok az 5,1 millió forintos átlag értékétől abszolút értékben 0,457 millió forinttal térnek el átlagosan.

d) Határozza meg, hogy az alapadatok az átlagtól átlagosan mennyivel térnek el? Értelmezze az eredményt (63. ábra).

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	Kisbolt sorszáma	Bevétel (millió Ft)	(xi - átlag) ^2			Szórás			
2	1 (x_1)	4,5	=(B2-$H$2)^2	0,36		átlag	=ÁTLAG(B2:B9)	5,10	millió Ft
3	2 (x_2)	4,6	=(B3-$H$2)^2	0,25		elemszám	=DARAB(B2:B9)	8,00	darab
4	3 (x_3)	5,9	=(B4-$H$2)^2	0,64					
5	4 (x_4)	5,7	=(B5-$H$2)^2	0,36		1. lépés			
6	5 (x_5)	5,1	=(B6-$H$2)^2	0,00		2. lépés			
7	6 (x_6)	5,3	=(B7-$H$2)^2	0,04		3. lépés			
8	7 (x_7)	4,8	=(B8-$H$2)^2	0,09		4. lépés			
9	8 (x_8)	4,9	=(B9-$H$2)^2	0,04		5. lépés			
10	Összesen		=SZUM(C2:C9)	1,78					
11									
12									
13			Variancia	=D10/H3		0,223	-		
14			Szórás	=GYÖK(0,223)		0,472	millió Ft		
15									
16	Szórás meghatározása függvény alapján								
17	minta alapján		=SZÓRÁS(B2:B9)	0,504			millió Ft		
18	teljes sokaság esetén		=SZÓRÁSP(B2:B9)	0,472			millió Ft		

63. ábra: A szórás értékének a meghatározása

Forrás: Saját kalkuláció

Átlag ($\bar{x}$) = 5,1 millió forint — Az alapadatok átlaga 5,1 millió forint.

Szórás (s) = 0,472 millió forint — Az alapadatok az 5,1 millió forintos átlag értékétől átlagosan 0,472 millió forinttal térnek el (minta alapján).

Szórás (S) = 0,504 millió forint — Az alapadatok az 5,1 millió forintos átlag értékétől átlagosan 0,504 millió forinttal térnek el (teljes sokaság alapján).

e) Határozza meg a feladat varianciáját. Értelmezze az eredményt (64. ábra).

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	Kisbolt sorszáma	Bevétel (millió Ft)	(xi - átlag) ^2			Szórás			
2	1 (x_1)	4,5	=(B2-$H$2)^2	0,36		átlag	=ÁTLAG(B2:B9)	5,10	millió Ft
3	2 (x_2)	4,6	=(B3-$H$2)^2	0,25		elemszám	=DARAB(B2:B9)	8,00	darab
4	3 (x_3)	5,9	=(B4-$H$2)^2	0,64					
5	4 (x_4)	5,7	=(B5-$H$2)^2	0,36		1. lépés			
6	5 (x_5)	5,1	=(B6-$H$2)^2	0,00		2. lépés			
7	6 (x_6)	5,3	=(B7-$H$2)^2	0,04		3. lépés			
8	7 (x_7)	4,8	=(B8-$H$2)^2	0,09		4. lépés			
9	8 (x_8)	4,9	=(B9-$H$2)^2	0,04		5. lépés			
10	Összesen		=SZUM(C2:C9)	1,78					
11									
12									
13			Variancia	=D10/H3		0,223	-		
14									
15	Variancia meghatározása függvény alapján								
16	minta alapján		=VAR(B2:B9)	0,254			-		
17	teljes sokaság esetén		=VARP(B2:B9)	0,223			-		

64. ábra: A variancia értékének a meghatározása

Forrás: Saját kalkuláció

Átlag ($\bar{x}$) = 5,1 millió forint	Az alapadatok átlaga 5,1 millió forint.
Variancia (s^2) = 0,254	Mértékegysége nem értelmezhető, így a kapott eredmény értékét sem kell jellemezni (mértékegység dimenziója nem értelmezhető). MÉRTÉKEGYSÉGE VAN, de nem tudjuk értelmezni.
Variancia (S^2) = 0,223	Mértékegysége nem értelmezhető, így a kapott eredmény értékét sem kell jellemezni (mértékegység dimenziója nem értelmezhető). MÉRTÉKEGYSÉGE VAN, de nem tudjuk értelmezni.

f) Határozza meg, hogy a sokaság heterogénnek vagy homogénnek tekinthető-e? Értelmezze az eredményt (33. táblázat).

33. táblázat: A vállalkozás ismert adatai

Megnevezés	Érték
Átlag	5,10
Szórás (minta)	0,50
Szórás (teljes)	0,47
Relatív szórás (minta)	9,89%
Relatív szórás (teljes)	9,25%

Forrás: Saját kalkuláció

Minta sokaság esetén: A relatív szórás értéke 9,89%. Mivel 0-10 % között van a relatív szórás értéke, így a sokaság homogénnek tekinthető.

Teljes sokaság esetén: A relatív szórás értéke 9,25%. Mivel 0-10 % között van a relatív szórás értéke, így a sokaság homogénnek tekinthető.

4.2.3. Példa 35 (feladat) – Súlyozott szóródási mutatók

Ismert 2023. évben egy könyvelő vállalkozás könyvelt vállalkozásainak a száma a vizsgált vállalkozások nettó árbevételük alapján (34. táblázat):

34. táblázat: A vállalkozás ismert adatai

Nettó árbevétel (millió Ft/hó)			Vállalkozások száma (darab)
	-	149,9	13
150	-	199,9	10
200	-	249,9	7
250	-	299,9	6
300	-	349,9	3
350	-	399,9	2
400	-		1
Összesen			42

Forrás: Saját szerkesztés

Kérdések:

a) Határozza meg a legkisebb és a legnagyobb nettó árbevétel közötti távolságot? Értelmezze az eredményt.

b) Határozza meg, hogy az alapadatok a medián értékétől abszolút értékben mennyivel térnek el a nettó árbevétel vizsgálata esetén. Értelmezze az eredményt.

c) Határozza meg, hogy az alapadatok az átlagtól átlagosan abszolút értékben mennyivel térnek el a vizsgált vállalkozások esetén. Értelmezze az eredményt.

d) Határozza meg, hogy az alapadatok az átlagtól átlagosan mennyivel térnek el? Értelmezze az eredményt.

e) Határozza meg a feladat varianciáját. Értelmezze az eredményt.

f) Határozza meg, hogy a vizsgált vállalkozások adatai alapján mennyi a relatív szórás értéke.

Példa 35 (megoldás) – Súlyozott szóródási mutatók

a) Határozza meg a legkisebb és a legnagyobb nettó árbevétel közötti távolságot? Értelmezze az eredményt.

A kérdés alapján meg kell határozni a legkisebb és a legnagyobb elemértéket az intervallumok ismeretében.

A legkisebb (minimum) érték az első intervallum alsó határa, míg a legnagyobb (maximum) érték az utolsó intervallum felső határa (65. ábra).

Az intervallumok vizsgálata esetében látható, hogy minden intervallum kezdő értéke között 50 millió forint különbség van. Tehát a minimum érték 100 millió forint, míg a maximum érték 449,9 millió forint.

A szóródás terjedelme tehát $i = R = x_{max} - x_{min} = 449{,}9 - 100 = 349{,}9$ millió forint. Tehát a legkisebb és a legnagyobb elemérték közötti különbség 349,9 millió Ft.

	A	B	C	D	E	F
1	**Nettó árbevétel (millió Ft/hó)**					
2		-	**149,9**		=A3-50	100
3	**150**	-	**199,9**			
4	**200**	-	**249,9**			
5	**250**	-	**299,9**			
6	**300**	-	**349,9**			
7	**350**	-	**399,9**			
8	**400**	-			=C7+50	449,9
9	**Összesen**					

65. ábra: A szóródás terjedelmének meghatározása
Forrás: Saját kalkuláció

b) Határozza meg, hogy az alapadatok a medián értékétől abszolút értékben mennyivel térnek el a nettó árbevétel vizsgálata esetén. Értelmezze az eredményt.

Mivel a középérték számításnál nem tanultunk súlyozott medián számítást, így ezen feladattípust nem kell kiszámolni.

c) Határozza meg, hogy az alapadatok az átlagtól átlagosan abszolút értékben mennyivel térnek el a vizsgált vállalkozások esetén. Értelmezze az eredményt.

A súlyozott feladatok megoldása a súlyozatlan feladathoz képest annyiban módosul, hogy minden számítási résznél a súlyozó tényezőt is figyelembe kell venni. A súlyozó tényező az minden eseten egyedi mértékegységgel rendelkezik. Azaz kg, ha, m^2, fő, db, stb.

A feladatban az első oszlop mértékegysége a millió Ft/fő/db, míg a második oszlopé a darab. Ebben az esetben a vállalkozások száma lesz a súlyozó tényező és a nettó árbevétel oszlopból fogjuk meghatározni az osztályközép értékét (mely a későbbiekben az „x" jelölést fogja kapni) (66. ábra).

	A	B	C	D	E
1	**Nettó árbevétel (millió Ft/hó)**			**Vállalkozások száma (darab) fi**	**Osztályközép (xi)**
2		-	**149,9**	13	

66. ábra: A feladat megoldáshoz szükséges eljelölések
Forrás: Saját kalkuláció

Az osztályközép értékét úgy számoljuk ki, hogy az adott intervallum alsó és felső határértékét összeadjuk és ennek számoljuk ki a számtani átlagát (67. ábra). Az első intervallum alsó határát és az utolsó intervallum felső határát ki kell következtetni a többi intervallum alapján. Mivel az alsó intervallum értékek között 50 különbség van (100, 150, 200, 250, 300, 350, 400), így akkor az első intervallum alsó határa a második intervallum alsó határa mínusz 50 érték (150-50=100). Mivel a felső intervallum értékek között is 50 különbség van (149,9; 199,9; 249,9; 299,9; 349,9; 399), így akkor az utolsó intervallum felső határa az utolsó előtti intervallum felső határa plusz 50 érték (399,9 + 50 = 449,9).

	A	B	C	D	E	F
1	**Nettó árbevétel (millió Ft/hó)**			**Vállalkozások száma (darab) fi**	**Osztályközép (xi)**	
2	**100**	-	**149,9**	13	=(A2+C2)/2	124,95
3	**150**	-	**199,9**	10	=(A3+C3)/2	174,95
4	**200**	-	**249,9**	7	=(A4+C4)/2	224,95
5	**250**	-	**299,9**	6	=(A5+C5)/2	274,95
6	**300**	-	**349,9**	3	=(A6+C6)/2	324,95
7	**350**	-	**399,9**	2	=(A7+C7)/2	374,95
8	**400**	-	**449,9**	1	=(A8+C8)/2	424,95
9	**Összesen**			**42**		
10						
11	alsó határ		felső határ			

67. ábra: Az osztályközép számítása a példára vonatkozóan
Forrás: Saját kalkuláció

Azaz

- az első intervallumhoz tartozó osztályközép: =(100+149,9)/2 = 124,95
- a második intervallumhoz tartozó osztályközép értéke: =(150+199,9)/2 = 174,95
- a harmadik intervallumhoz tartozó osztályközép értéke: =(200+249,9)/2 = 224,95
- stb.

Az osztályközép kiszámítását követően kerülhet sor a súlyozott számtani átlag meghatározására. A középértékek fejezetben tanultak alapján a súlyozott számtani átlag kiszámítása: $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{k} f_i x_i}{\sum_{i=1}^{k} f_i}$

A képletben az f_i érték a súlyozó tényezőt jelenti (vállalatok száma), míg az x_i az osztályközép értéket. Először tehát egy szorzatot kell készíteni: $f_i x_i$ (68. ábra):

	A	B	C	D	E	F	G
1	**Nettó árbevétel (millió Ft/hó)**			**Vállalkozások száma (darab) fi**	**Osztályközép (xi)**	**fi * xi**	
2	**100**	-	**149,9**	13	124,95	=D2*E2	1624,35
3	**150**	-	**199,9**	10	174,95	=D3*E3	1749,5
4	**200**	-	**249,9**	7	224,95	=D4*E4	1574,65
5	**250**	-	**299,9**	6	274,95	=D5*E5	1649,7
6	**300**	-	**349,9**	3	324,95	=D6*E6	974,85
7	**350**	-	**399,9**	2	374,95	=D7*E7	749,9
8	**400**	-	**449,9**	1	424,95	=D8*E8	424,95
9	**Összesen**			**42**		=SZUM(F2:F8)	8747,9

68. ábra: Az átlag kiszámítása az osztályközös gyakorisági soron
Forrás: Saját kalkuláció

A kapott összesen érték $\sum fixi = 8747{,}9$ millió Ft. Tehát a vizsgált vállalkozások összes nettó árbevétele 8747,9 millió Ft. Ha ezt a számot elosztjuk a vizsgált vállalkozások számával (42 db), akkor megkapjuk az egy vállalkozásra jutó átlagos nettó árbevétel értékét (208,28 millió forint).

$$\bar{x} = \frac{\sum fixi}{\sum fi} = \frac{8747{,}9}{42} = 208{,}28\ millió\ Ft$$

Ez alapján megállapítható, hogy a vizsgált vállalkozások alapján az egy vállalatra jutó átlagos nettó árbevétel értéke 208,28 millió Ft.

Ezt követően egy új oszlopot kell elkészíteni a felad mellé (69. ábra), melynek az elnevezése: $f_i * \left| x_i - \overline{x} \right|$

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	**Nettó árbevétel (millió Ft/hó)**			**Vállalkozások száma (darab) fi**	**Osztályközép (xi)**	**fi * xi**	**fi * | xi - átlag |**	
2	**100**	-	**149,9**	13	124,95	1624,35	=D2*ABS(E2-$D$12)	1 083,33
3	**150**	-	**199,9**	10	174,95	1749,5	=D3*ABS(E3-$D$12)	333,33
4	**200**	-	**249,9**	7	224,95	1574,65	=D4*ABS(E4-$D$12)	116,67
5	**250**	-	**299,9**	6	274,95	1649,7	=D5*ABS(E5-$D$12)	400,00
6	**300**	-	**349,9**	3	324,95	974,85	=D6*ABS(E6-$D$12)	350,00
7	**350**	-	**399,9**	2	374,95	749,9	=D7*ABS(E7-$D$12)	333,33
8	**400**	-	**449,9**	1	424,95	424,95	=D8*ABS(E8-$D$12)	216,67
9	**Összesen**			**42**		**8747,9**	**=SZUM(G2:G8)**	**2 833,33**
10								
11	Átlag		208,28					
12								
13	Abszolút átlageltérés			=H9/D9 =	67,46	millió Ft		

69. ábra: Az abszolút átlageltérés kiszámítása az osztályközös gyakorisági soron
Forrás: Saját kalkuláció

Teljes sokaság esetén a számítás:

$$AÁ = \frac{2833,33}{42} = 67,46$$

Az alapadatok a 208,28 millió Ft-os átlag értékétől abszolút értékben átlagosan 67,46 millió Ft-tal térnek el (teljes sokaság esetén).

Minta sokaság esetén a számítás:

$$AÁ = \frac{2833,33}{41} = 69,11$$

Az alapadatok a 208,28 millió Ft-os átlag értékétől abszolút értékben átlagosan 69,11 millió Ft-tal térnek el (minta esetén).

d) Határozza meg, hogy az alapadatok az átlagtól átlagosan mennyivel térnek el? Értelmezze az eredményt.

A feladat kérdése alapján szórást kell számolni. Azaz a következő képletet kell használni teljes sokaság esetén: $S = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{k} f * \left(x_i - \overline{x}\right)^2}{\sum_{i=1}^{k} f_i}}$

A képlet kiszámításához szükségünk van egy új oszlopra, melynek az elnevezése (70. ábra): $f * (x - \overline{x})$^2

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	**Nettó árbevétel (millió Ft/hó)**			**Vállalkozások száma (darab) fi**	**Osztályközép (xi)**	**fi * xi**	**fi * (xi - átlag)^2**	
2	**100**	-	**149,9**	13	124,95	1624,35	=D2*(E2-$D$12)^2	90 277,78
3	**150**	-	**199,9**	10	174,95	1749,5	=D3*(E3-$D$12)^2	11 111,11
4	**200**	-	**249,9**	7	224,95	1574,65	=D4*(E4-$D$12)^2	1 944,44
5	**250**	-	**299,9**	6	274,95	1649,7	=D5*(E5-$D$12)^2	26 666,67
6	**300**	-	**349,9**	3	324,95	974,85	=D6*(E6-$D$12)^2	40 833,33
7	**350**	-	**399,9**	2	374,95	749,9	=D7*(E7-$D$12)^2	55 555,56
8	**400**	-	**449,9**	1	424,95	424,95	=D8*(E8-$D$12)^2	46 944,44
9	**Összesen**			**42**		**8747,9**	**=SZUM(G2:G8)**	**273 333,33**
10								
11	Átlag		208,28					
12								
13	Variancia			=H9/D9 =	6 507,94			
14	Szórás			=GYÖK(6507,97)	80,6717826			

70. ábra: A szórás kiszámítása az osztályközös gyakorisági soron
Forrás: Saját kalkuláció

Tehát az alapadatok a 208,28 millió forintos átlagtól átlagosan 80,67 millió Ft-tal térnek el. Ha minta sokaságra kellene számolni, akkor nem 42 darabbal, hanem 41 darabbal kellene osztani az 273 333,33 értéket a gyök alatt, azaz: GYÖK(273333,33/41) = 81,65. Tehát minta alapján az alapadatok a 208,28 millió Ft-os átlagtól átlagosan 81,65 millió Ft-tal térnek el.

e) Határozza meg a feladat varianciáját. Értelmezze az eredményt.

Hasonlóképpen kell a varianciaszámítást elvégezni, mint a szórást, csak a végén nem kell gyököt vonni a kapott hányados értékéből (71. ábra).

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	**Nettó árbevétel (millió Ft/hó)**			**Vállalkozások száma (darab) fi**	**Osztályközép (xi)**	**fi * xi**	**fi * (xi - átlag)^2**	
2	**100**	-	**149,9**	13	124,95	1624,35	=D2*(E2-$D$12)^2	90 277,78
3	**150**	-	**199,9**	10	174,95	1749,5	=D3*(E3-$D$12)^2	11 111,11
4	**200**	-	**249,9**	7	224,95	1574,65	=D4*(E4-$D$12)^2	1 944,44
5	**250**	-	**299,9**	6	274,95	1649,7	=D5*(E5-$D$12)^2	26 666,67
6	**300**	-	**349,9**	3	324,95	974,85	=D6*(E6-$D$12)^2	40 833,33
7	**350**	-	**399,9**	2	374,95	749,9	=D7*(E7-$D$12)^2	55 555,56
8	**400**	-	**449,9**	1	424,95	424,95	=D8*(E8-$D$12)^2	46 944,44
9	**Összesen**			**42**		**8747,9**	**=SZUM(G2:G8)**	**273 333,33**
10								
11	Átlag		208,28					
12								
13	Variancia			=H9/D9 =	6 507,94			

71. ábra: A variancia kiszámítása az osztályközös gyakorisági soron
Forrás: Saját kalkuláció

$$S^2 = \frac{273333,33}{42} = 6507,94$$

Értelmezés nem szükséges, mivel nincs értelmezhető mértékegysége a varianciának.

Minta sokaság esetén a számítás a következőképpen alakul:

$$S^2 = \frac{273333,33}{41} = 6666,67$$

f) Határozza meg, hogy a vizsgált vállalkozások adatai alapján mennyi a relatív szórás értéke.

A relatív szórás értékét ugyanúgy határozzuk meg, mint a súlyozatlan forma esetén, azaz $V = \frac{S}{\bar{x}} = \frac{súlyozott\ szórás}{súlyozott\ átlag}$

Minta sokaság esetén: $V = \frac{S}{\bar{x}} = \frac{81,65}{208,28} = 0,3873 \Rightarrow 0,3873 * 100 = 39,2\%$

Teljes sokaság esetén: $V = \frac{S}{\bar{x}} = \frac{80,67}{208,28} = 0,3920 \Rightarrow 0,3920 * 100 = 38,73\%$

Mivel a relatív szórás értéke 30% felett van, így az átlag nem alkalmas a sokaság jellemzésére.

4.2.4. Példa 36 (feladat) – Súlyozott szóródási mutatók

Magyarország városainak a száma (Budapest nélkül) a népesség nagyságcsoportjai szerint ismertek 2024. január 01.-én (35. táblázat).

35. táblázat: Magyarország népességcsoportonkénti városszáma

Népesség (ezer fő)	Városok száma, db
-10	74
10,1 - 20,0	88
20,1 - 30,0	90
30,1 - 40,0	105
40,1 -50,0	83
50,1 - 60,0	59
60,1 - 70,1	35
Összesen	**534**

Forrás: Saját összeállítás

Kérdések:

a) Határozza meg a legkisebb és a legnagyobb népességszám közötti távolságot? Értelmezze az eredményt.

b) Határozza meg, hogy az alapadatok a medián értékétől abszolút értékben mennyivel térnek el a népességszám vizsgálata esetén. Értelmezze az eredményt.

c) Határozza meg, hogy az alapadatok az átlagtól átlagosan abszolút értékben mennyivel térnek el a vizsgált népességszám esetén. Értelmezze az eredményt.

d) Határozza meg, hogy az alapadatok az átlagtól átlagosan mennyivel térnek el? Értelmezze az eredményt.

e) Határozza meg a feladat varianciáját. Értelmezze az eredményt.

f) Határozza meg, hogy a vizsgált népességszám adatai alapján mennyi a relatív szórás értéke.

Példa 36 (megoldás) – Súlyozott szóródási mutatók

a) Határozza meg a legkisebb és a legnagyobb népességszám közötti távolságot? Értelmezze az eredményt (72. ábra).

	A	B
1	**Népesség (ezer fő)**	**Városok száma, db**
2	**-10**	74
3	**10,1 - 20,0**	88
4	**20,1 - 30,0**	90
5	**30,1 - 40,0**	105
6	**40,1 -50,0**	83
7	**50,1 - 60,0**	59
8	**60,1 - 70,1**	35
9	**Összesen**	**534**
10		
11	**MIN érték**	0,1
12	**MAX érték**	70,1

72. ábra: A szóródás terjedelme az osztályközös gyakorisági sorban a példánál
Forrás: Saját kalkuláció

A legkisebb elemérték a 0,1 ezer fő (minimum érték).

A legnagyobb elemérték a 70,1 ezer fő (maximum érték).

A szóródás terjedelme i = R = 70,1 - 0,1 = 70 ezer fő. Azaz a legnagyobb és legkisebb elem közötti távolság 70 ezer fő.

b) Határozza meg, hogy az alapadatok a medián értékétől abszolút értékben mennyivel térnek el a népességszám vizsgálata esetén. Értelmezze az eredményt.

Nem kell kiszámolni a súlyozott középeltérést, mivel a középértékek témakörénél nem tanultunk súlyozott medián számítást.

c) Határozza meg, hogy az alapadatok az átlagtól átlagosan abszolút értékben mennyivel térnek el a vizsgált népességszám esetén. Értelmezze az eredményt (73. ábra).

	A	B	C	D	E	F
1	**Népesség (ezer fő)**	**Városok száma, db (fi)**	**Osztályközép (xi)**		**fi * xi**	
2	**-10**	74	=(0,1+10)/2	5,1	=B2*D2	373,7
3	**10,1 - 20,0**	88	=(10,1+20)/2	15	=B3*D3	1324,4
4	**20,1 - 30,0**	90	=(20,1+30)/2	25	=B4*D4	2254,5
5	**30,1 - 40,0**	105	=(30,1+40)/2	35	=B5*D5	3680,25
6	**40,1 -50,0**	83	=(40,1+50)/2	45	=B6*D6	3739,15
7	**50,1 - 60,0**	59	=(50,1+60)/2	55	=B7*D7	3247,95
8	**60,1 - 70,1**	35	=(60,1+70)/2	65	=B8*D8	2276,75
9	**Összesen**	**534**			**=SZUM(E2:E8)**	**16896,7**
10						
11	1. lépés		**Átlag**			
12	2. lépés		= 16896,7/534			
13	3. lépés		31,64			
14	4. lépés					
15	5. lépés					
16	6. lépés					

73. ábra: Az átlag meghatározása az osztályközös gyakorisági sorban a példánál
Forrás: Saját kalkuláció

$$\overline{x} = \frac{16896{,}7}{534} = 31{,}64\ ezerfő$$

Az átlag meghatározása után kerülhet sor az abszolút átlageltérés meghatározására (74. ábra).

	A	B	C	D	E	F
1	**Népesség (ezer fő)**	**Városok száma, db (fi)**	**Osztályközép (xi)**	**fi * xi**	fi * |xi - átlag |	
2	**-10**	74	5,05	373,7	=B2*ABS(C2-$D$14)	1967,79
3	**10,1 - 20,0**	88	15,05	1324,4	=B3*ABS(C3-$D$14)	1460,07
4	**20,1 - 30,0**	90	25,05	2254,5	=B4*ABS(C4-$D$14)	593,258
5	**30,1 - 40,0**	105	35,05	3680,25	=B5*ABS(C5-$D$14)	357,865
6	**40,1 -50,0**	83	45,05	3739,15	=B6*ABS(C6-$D$14)	1112,88
7	**50,1 - 60,0**	59	55,05	3247,95	=B7*ABS(C7-$D$14)	1381,09
8	**60,1 - 70,1**	35	65,05	2276,75	=B8*ABS(C8-$D$14)	1169,29
9	**Összesen**	**534**		**16896,7**	**=SZUM(E2:E8)**	**8042,25**
10						
11	1. lépés	5. lépés				
12	2. lépés	6. lépés				
13	3. lépés	7. lépés				
14	4. lépés	8. lépés				
15						
16	**Átlag**		Abszolút átlageltérés			
17	31,64		=F9/B9 =	15,06		

74. ábra: Az abszolút átlageltérés meghatározása az osztályközös gyakorisági sorban a példánál
Forrás: Saját kalkuláció

Teljes sokaság esetén a számítás:

$A\acute{A} = \frac{8042{,}25}{534} = 15{,}06$

Az alapadatok a 31,64 ezer fő átlag értékétől abszolút értékben átlagosan 15,06 ezer fővel térnek el a teljes sokaság esetén.

Minta sokaság eset a számítás:

$$A\acute{A} = \frac{8042{,}25}{533} = 15{,}089$$

Az alapadatok a 31,64 ezer fő átlag értékétől abszolút értékben átlagosan 15,06 ezer fővel térnek el a minta sokaság esetén.

d) Határozza meg, hogy az alapadatok az átlagtól átlagosan mennyivel térnek el? Értelmezze az eredményt.

A feladat kérdése alapján szórást kell számolni (75. ábra).

	A	B	C	D	E	F
1	**Népesség (ezer fő)**	**Városok száma, db (fi)**	**Osztályközép (xi)**	**fi * xi**	**fi * (xi - átlag)^2**	
2	**-10**	74	5,05	373,7	=B2*(C2-$A$17)^2	52327,01
3	**10,1 - 20,0**	88	15,05	1324,4	=B3*(C3-$A$17)^2	24225,21
4	**20,1 - 30,0**	90	25,05	2254,5	=B4*(C4-$A$17)^2	3910,62
5	**30,1 - 40,0**	105	35,05	3680,25	=B5*(C5-$A$17)^2	1219,69
6	**40,1 -50,0**	83	45,05	3739,15	=B6*(C6-$A$17)^2	14921,81
7	**50,1 - 60,0**	59	55,05	3247,95	=B7*(C7-$A$17)^2	32328,80
8	**60,1 - 70,1**	35	65,05	2276,75	=B8*(C8-$A$17)^2	39063,87
9	**Összesen**	**534**		**16896,7**	**=SZUM(E2:E8)**	**167997,0037**
10						
11	1. lépés	5. lépés				
12	2. lépés	6. lépés				
13	3. lépés	7. lépés				
14	4. lépés	8. lépés				
15						
16	**Átlag**		Variancia			
17	31,64		=F9/B9 =	314,60		
18						
19			Szórás			
20			=GYÖK(314,6) =	17,737		

75. ábra: A szórás meghatározása az osztályközös gyakorisági sorban a példánál

Forrás: Saját kalkuláció

Teljes sokaság esetén:

$$S = \sqrt{\frac{167997,0037}{534}} = 17,737$$

Minta sokaság esetén:

$$S = \sqrt{\frac{167997,0037}{533}} = 17,75$$

Tehát az alapadatok a 31,64 ezer fő átlagtól átlagosan 17,7 ezer fővel térnek el (teljes sokaság esetén). Minta sokaság esetén az alapadatok a 31,64 ezer fő átlagtól átlagosan 17,75 ezer fővel térnek el.

e) Határozza meg a feladat varianciáját. Értelmezze az eredményt.

A szórásnál bemutatott számítások alapján a variancia:

Teljes sokaság esetén (76. ábra):

	A	B	C	D	E	F
1	**Népesség (ezer fő)**	**Városok száma, db (fi)**	**Osztályközép (xi)**	**fi * xi**	**fi * (xi - átlag)^2**	
2	**-10**	74	5,05	373,7	=B2*(C2-$A$17)^2	52327,01
3	**10,1 - 20,0**	88	15,05	1324,4	=B3*(C3-$A$17)^2	24225,21
4	**20,1 - 30,0**	90	25,05	2254,5	=B4*(C4-$A$17)^2	3910,62
5	**30,1 - 40,0**	105	35,05	3680,25	=B5*(C5-$A$17)^2	1219,69
6	**40,1 -50,0**	83	45,05	3739,15	=B6*(C6-$A$17)^2	14921,81
7	**50,1 - 60,0**	59	55,05	3247,95	=B7*(C7-$A$17)^2	32328,80
8	**60,1 - 70,1**	35	65,05	2276,75	=B8*(C8-$A$17)^2	39063,87
9	**Összesen**	**534**		**16896,7**	**=SZUM(E2:E8)**	**167997,0037**
10						
11	1. lépés	5. lépés				
12	2. lépés	6. lépés				
13	3. lépés	7. lépés				
14	4. lépés	8. lépés				
15						
16	**Átlag**		Variancia			
17	31,64		=F9/B9 =	314,60		

76. ábra: A variancia meghatározása az osztályközös gyakorisági sorban a példánál
Forrás: Saját kalkuláció

Minta alapján 167997,0037/533 = 315,191.

Értelmezés nem szükséges, mivel a varianciának nincs értelmezhető mértékegysége.

f) Határozza meg, hogy a vizsgált népességszám adatai alapján mennyi a relatív szórás értéke.

A relatív szórás értéke súlyozott formában $V = \frac{S}{\overline{x}} = \frac{\text{súlyozott szórás}}{\text{súlyozott átlag}}$

Minta sokaság esetén: $V = \frac{S}{\overline{x}} = \frac{17,737}{31,64} = 0,5606 \Rightarrow 0,5606 * 100 = 56,06\%$

Teljes sokaság esetén: $V = \frac{S}{\overline{x}} = \frac{17,7536}{31,64} = 0,5611 \Rightarrow 0,5611 * 100 = 56,11\%$

Mivel a relatív szórás értéke 30% felett van, így az átlag nem alkalmas a sokaság jellemzésére.

5. AZ INDEXEK ALKALMAZÁSI LEHETŐSÉGEI

Az index kifejezés latin eredetű szó. A vizsgálat heterogén, összetett sokaságra irányul. Makroszinten (pl. a gazdasági növekedés jelzőszámai, fogyasztói árindex), illetve mikroszinten (vezetői tájékoztatási adatok, a folyamatokban bekövetkező változások kiváltó tényezőinek elemzése) is alkalmazható.

Másik megközelítés szerint az index-számítás olyan összehasonlító viszonyszámok, melyek közvetlenül nem összesíthető mennyiségek, együttes, átlagos változását fejezi ki. A dinamikus viszonyszámokkal mindig csak 1-1 termék árának, illetve mennyiségének alakulását vizsgálhatjuk. A gazdasági életben azonban szükség van olyan számításokra, amelyek egyszerre fejezik ki több termék ár- és mennyiségváltozásának hatását. Erre szolgálnak az indexszámítások. A változást kifejezhetjük mind relatív (I=index), mind abszolút (K=különbség) módon.

Az összehasonlítás elvégezhető:

- térben: 2 ország vagy két vállalat adatait hasonlítom,
- időben: 2 év adatait hasonlítom össze.

Napjainkban nem egyféle árut termelnek és forgalmaznak a vállalkozások, ezért érthető, hogy összevont mutatókkal vizsgálják tevékenységük időbeli alakulását, illetve hasonlítják azt más vállalkozások vagy területek adataihoz.

Természetesen az egyedi indexeket is használják, mert az egyes termékek ár-, mennyiség- és értékváltozását ezek fejezik ki. A termékekre számított egyedi indexek az eddig tanult információk alapján a dinamikus viszonyszámok.

A termékek mennyiségi és árváltozását együtt vizsgálva legegyszerűbben az érték összehasonlításával oldható meg. A különböző termékekből származó bevételek, termelési értékek azonos mértékegységűek, így összesíthetőek, és összehasonlíthatók mind hányados, mind különbség formájában is. A leggyakrabban az időbeli összehasonlítást végezzük.

Az egymással összehasonlítandó adatokat bizonyos szempontok érvényesítésével csak a bennünket érdeklő szempontból tesszük különbözővé, más szempontokból pedig egyformává alakítjuk. A standardizálás a heterogén sokaság színvonalváltozását kifejező mutatók tényezőkre bontásának olyan módszere, ahol a változó súlyok helyett változatlan (standard) súlyokat feltételezünk. Az értékben való összesítést aggregálásnak, az összesített értékadatokat aggregátumoknak nevezzük.

5.1. A statisztikai indexek csoportjai

A statisztikai index több eltérő tulajdonságú, gyakran eltérő mértékegységben kifejezett jelenség együttes átlagos változásának jellemzésére alkalmas. Megjelenési formájuk az egynemű adatokból számított viszonyszámokkal azonos (százalékos). Csak az összetett indexek tekinthetők tényleges indexeknek. Az egyes résztényezők változását kifejező dinamikus vagy egyéb összehasonlító viszonyszámok az egyedi indexek, de csak az összetett indexszámítás keretén belül nevezhetők annak.

Az indexek csoportjai:

I. Abszolút számokból számított indexek:
   a) Értékindex,
   b) Árindex (bázis időszaki súlyozású, tárgyidőszaki súlyozású)
   c) Volumenindex (bázis időszaki súlyozású, tárgyidőszaki súlyozású).

II. Viszonyszámokból számított indexek:
   a) Változó állományú index,
   b) Változatlan állományú index,
   c) Összetételindex.

5.1.1. Az abszolút számokból számított indexek

Az indexszámok valamilyen szempontból összetartozó, de különnemű (különböző mérték-egységű), közvetlenül nem összesíthető javak összességének időbeli vagy térbeli össze-hasonlítására szolgálnak.

Az index számításánál szükségünk van mennyiségekre (jele: q [quantity]) és árakra (jele: p [price]) egyaránt. Az ár és a mennyiség szorzatából jön létre az értékadat (jele: v [value]), vagyis az árbevétel

A számításnál mindig két időszakra van szükségünk (évre, napra, hónapra, idő megjelölésre, stb.), mivel időbeli változást határozunk meg. A tőlünk távolabbi időszakot bázis időszaknak (jele: 0), míg a hozzánk közelebbi időszakot tárgy időszaknak (jele: 1) hívjuk. Mivel két időszakunk is van, így az ár és mennyiségi adatok a következő jelöléseket kapják: q_0, q_1, p_0, p_1.
Az ár és a mennyiség szorzatából árbevételt (aggregátumot) tudunk képezni, melyek a következők: q_0p_0, q_1p_1, q_1p_0, q_0p_1.

A q_0p_0 a bázis időszaki árbevétel/aggregátum, a q_1p_1 a tárgy időszaki árbevétel/ aggregátum, melyeket valós aggregátumoknak nevezünk. A q_1p_0 és a q_0p_1 pedig a vegyes, vagyis fiktív árbevétel/aggregátum. Ezeket az árbevétel adatokat fogjuk a különböző indexszámításoknál felhasználni.

Tehát a nem összegezhető (különböző mértékegységű) termékek az értékösszegük alapján elemezhetők. Az összetartozó, de különnemű termékekből álló (heterogén) termékcsoport összértékét aggregátumnak (A) nevezzük.

Ha az árbevétel adatokból hányadost képzünk, akkor indexet (I), ha különbséget képzünk, akkor pedig különbséget (K) számolunk.
Általános jelölésük:

$$I_{\Delta}^{\Delta} = \frac{\sum q_{\Delta} p_{\Delta}}{\sum q_{\Delta} p_{\Delta}} \qquad\qquad K_{\Delta}^{\Delta} = \sum q_{\Delta} p_{\Delta} - \sum q_{\Delta} p_{\Delta}$$

Látható, hogy az index és a különbség esetében is az árbevétel értékekre lesz szükségünk. Az indexek esetében a következő jelölések szerepelhetnek a képletben:

csak szám jelölés lehet itt (0 vagy 1)

$$I_{\Delta}^{\Delta} = \frac{\sum q_{\Delta} p_{\Delta}}{\sum q_{\Delta} p_{\Delta}}$$

Árindex esetén: p
Volumenindex esetén: q

csak szám jelölés lehet itt (0 vagy 1)

A különbséget minden esetben úgy fogjuk képezni, hogy az indexnél megtanult képlet számlálójából kivonjuk a nevező értékét. Részletesebben erről további információt a példánál kapunk.

FONTOS SZABÁLY: Mindig valaminek mutatni kell a tárgy / bázis elképzelést, azaz vagy az ár (p) vagy a mennyiségi (q) értékeknél $\frac{1}{0}$ jelölés legyen az index esetén!!

A termékek változásait együtt vizsgálva legegyszerűbben az érték összehasonlításával oldhatjuk meg. A különböző termékekből származó bevételek, termelési értékek azonos mértékegységűek, így összesíthetőek.

A következőkben tekintsük át, milyen index típusokat különböztetünk meg.

5.1.1.1. Értékindex

Az értékindex szakmai szempontból összetartozó jelenségek (legtöbbször termékek vagy termékcsoportok) értékben kifejezett összességének (termelési értékének) együttes átlagos változását fejezi ki. Az értékindex mindig az érvényben lévő, folyóárakon számítva fejezi ki a termelés értékének változását.

Az értékindex jelentése, hogy a mennyiség és az ár együttes változása esetén, hogyan változott az érték az összes terméket figyelembe véve (hányszorosára). Az érték különbség pedig azt mutatja meg, hogy mennyivel változott az érték.

Az értékindex számítása (%): $$I_v = I_é = \frac{\sum_{i=1}^{n} q_1 \cdot p_1}{\sum_{i=1}^{n} q_0 \cdot p_0}$$

Eltérések (Ft): $$K = \sum_{i=1}^{n} q_1 \cdot p_1 - \sum_{i=1}^{n} q_0 \cdot p_0$$

Látható, hogy az eltérés értékét úgy határozzuk meg, hogy az értékindexnél meghatározott képlet számlálójából kivonjuk a nevező értékét. Az így kapott eredmény mértékegysége Ft lesz. Ha 100% felett van az eredményünk az értékindexnél, akkor növekedés következett be bázis időszakról tárgy időszakra.

Értelmezés:

$I_é$=130% azt jelenti, hogy a bázis időszakról a tárgy időszakra 30%-os növekedés következett be az árbevételben.

Ha 100% alatt van az eredményünk az értékindexnél, akkor csökkenés következett be bázis időszakról tárgy időszakra.

Értelmezés:

az $I_é$=60% azt jelenti, hogy a bázis időszakról a tárgy időszakra 30%-kal csökkent az árbevétel.

Ha a különbségképzés esetén negatív előjelű számot kapunk, akkor az a csökkenést, míg a pozitív előjelű szám a növekedést jelöli bázis időszakról tárgy időszakra.

Értelmezés:

$K_é$= 800 000 Ft azt jelenti, hogy a bázis időszakról a tárgy időszakra 800 ezer forinttal nőtt az árbevétel.

$K_é$= - 210 000 Ft azt jelenti, hogy a bázis időszakról a tárgy időszakra 210 ezer forinttal csökkent az árbevétel.

Az értékindexnél meghatározott növekedést vagy csökkenést az ár- és volumenindex segítségével magyarázzuk.

5.1.1.2. Volumenindex (az ár [p] adatok állandóak)

A volumenindex különböző termékek mennyiségének együttes átlagos változását fejezi ki. A mennyiség változása mellett azt feltételezzük, hogy az **árak változatlanok.**

A bázissúlyozású volumenindexet Laspeyres-féle volumenindexnek, míg a tárgyidőszak súlyozású volumenindexet Paasche-féle volumenindexnek nevezzük.

A volumenindex számítása (%):

$$I_q^L = \frac{\sum_{i=1}^{n} q_1 \cdot p_0}{\sum_{i=1}^{n} q_0 \cdot p_0} \qquad I_q^0 = \frac{\sum_{i=1}^{n} q_1 \cdot p_0}{\sum_{i=1}^{n} q_0 \cdot p_0}$$

$$I_q^P = \frac{\sum_{i=1}^{n} q_1 \cdot p_1}{\sum_{i=1}^{n} q_0 \cdot p_1} \qquad I_q^1 = \frac{\sum_{i=1}^{n} q_1 \cdot p_1}{\sum_{i=1}^{n} q_0 \cdot p_1}$$

Eltérések (Ft):

$$K_q^1 = \Sigma q_1 p_1 - \Sigma q_0 p_1$$
$$K_q^0 = \Sigma q_1 p_0 - \Sigma q_0 p_0$$

Ha 100% felett van az eredményünk a volumenindexnél, akkor növekedés állapítunk meg. Értelmezés:

- I_q^0 =140% azt jelenti, hogy a mennyiségek változása mellett a bázis időszaki árak 40%-ban növelték az árbevétel változást bázisról tárgy időszakra.
- I_q^1 = 120% azt jelenti, hogy a mennyiségek változása mellett a tárgy időszaki árak 20%-ban növelték az árbevétel változást bázisról tárgy időszakra.
- I_q^0 = 70% azt jelenti, hogy a mennyiségek változása mellett a bázis időszaki árak 30%-ban csökkentették az árbevétel változást bázisról tárgy időszakra.
- I_q^1 = 65% azt jelenti, hogy a mennyiségek változása mellett a tárgy időszaki árak 35%-ban csökkentették az árbevétel változást bázisról tárgy időszakra.

Ha a különbségképzés esetén negatív előjelű számot kapunk, akkor az a csökkenést, míg a pozitív előjelű szám a növekedést jelöli bázisról tárgy időszakra.

5.1.1.3. Árindex (a mennyiségi [q] adatok állandóak)

Az árindex különböző termékek árainak együttes átlagos változását mutatja meg. Az aggregátumot kialakító tényezők közül a **mennyiségek változatlanok**.

Az árindex kifejezi, hogy hányszorosára változott az érték, csak az árváltozás hatására. A különbségképzés esetén megkapjuk, hogy mennyivel változott az érték.

A bázissúlyozású árindexet Laspeyres-féle árindexnek, míg a tárgyidőszak súlyozású árindexet Paasche-féle árindexnek nevezzük.

Az árindex számítása (%):

$$I_p^L = \frac{\sum_{i=1}^{n} q_0 \cdot p_1}{\sum_{i=1}^{n} q_0 \cdot p_0} \qquad I_p^0 = \frac{\sum_{i=1}^{n} q_0 \cdot p_1}{\sum_{i=1}^{n} q_0 \cdot p_0}$$

$$I_p^P = \frac{\sum_{i=1}^{n} q_1 \cdot p_1}{\sum_{i=1}^{n} q_1 \cdot p_0} \qquad I_p^1 = \frac{\sum_{i=1}^{n} q_1 \cdot p_1}{\sum_{i=1}^{n} q_1 \cdot p_0}$$

Eltérések (Ft):

$$K_p^1 = \Sigma q_1 p_1 - \Sigma q_1 p_0$$
$$K_p^0 = \Sigma q_0 p_1 - \Sigma q_0 p_0$$

Ha 100% felett van az eredményünk az árindexnél, akkor növekedés állapítunk meg.

Értelmezés:

- I_p^0 =160% azt jelenti, hogy az árak változása mellett a bázis időszaki mennyiségek 60%-ban növelték az árbevétel változást bázisról tárgy időszakra.
- I_p^1 =150% azt jelenti, hogy az árak változása mellett a tárgy időszaki mennyiségek 50%-ban növelték az árbevétel változást bázisról tárgy időszakra.
- I_p^0 =60% azt jelenti, hogy az árak változása mellett a bázis időszaki mennyiségek 40%-ban csökkentették az árbevétel változást bázisról tárgy időszakra.
- I_p^1 =70% azt jelenti, hogy az árak változása mellett a tárgy időszaki mennyiségek 30%-ban csökkentették az árbevétel változást bázisról tárgy időszakra.

Ha a különbségképzés esetén negatív előjelű számot kapunk, akkor az a csökkenést, míg a pozitív előjelű szám a növekedést jelöli bázisról tárgy időszakra.

5.1.1.4. Az érték-, a volumen- és az árindex közötti összefüggések

$$I_v = I_q^L \cdot I_p^P$$

$$I_v = I_q^P \cdot I_p^L$$

$$VAGYIS$$

$$I_é = I_q^0 \cdot I_p^1$$

$$I_é = I_q^1 \cdot I_p^0$$

A visszaellenőrzéssel ugyanazt fogjuk megkapni, mint amit az értékindexnél kiszámoltunk.

Fisher-féle indexformula: A kétféle súlyozással meghatározott eredményből mértani átlagot számítva határozza meg a Fisher féle indexeket.

$$I_q^F = \sqrt{I_q^L \cdot I_q^P}$$

$$I_p^F = \sqrt{I_p^L \cdot I_p^P}$$

$$I_v = I_q^F \cdot I_p^F$$

A Fisher-féle volumenindex a mennyiségek befolyásoló szerepét határozzák meg. 100% alatt csökkenést, míg 100% felett növekedést jelent az értéke. Az $I_q^F = 0{,}90 \Rightarrow * \, 100 = 90\%$ azt jelenti, hogy a mennyiségek az árbevétel változást 10%-ban (befolyásolják) csökkentik. Az $I_q^F = 1{,}555 \Rightarrow * \, 100 = 155{,}5\%$azt jelenti, hogy a mennyiségek az árbevétel változást 55,5%-ban növelik.

A Fisher féle árindex az árak befolyásoló szerepét határozzák meg. 100% alatt csökkenést, míg 100% felett növekedést jelent az érték. Az $I_p^F = 0{,}70 \Rightarrow * \, 100 = 70\%$azt jelenti, hogy az árak az árbevétel változást 30%-ban (befolyásolják) csökkentik. Az $I_p^F = 1{,}1234 \Rightarrow *100 = 112{,}34\%$ azt jelenti, hogy az árak az árbevétel változást 12,34%-ban növelik.

Az érték-, volumen- és az árindex aggregátumai közötti összefüggések: A különböző indexeknél számolt aggregátumok különbségeit értékben fejezik ki, hogy a bekövetkezett összértékváltozásból mennyi tulajdonítható a mennyiség és az ár változásának.

Az aggregátumok különbségeinek számításakor az összértékben jelentkező változást a mennyiségi és árváltozás okozza, ezért érvényesek a következő összefüggések:

$$K_v = K_q^0 + K_p^1$$
$$K_v = K_q^1 + K_p^0$$

Kérdések tehát a következőképpen alakulnak:

a) Határozza meg ………. együttes értékváltozását a bázis évhez viszonyítva! (értékindex)
b) Határozza meg …..…. együttes változását a bázisidőszak árai alapján! (bázis időszaki volumenindex)
c) Határozza meg …..…. együttes változását a tárgyidőszak árai alapján! (tárgy időszaki volumenindex)
d) Határozza meg …..…. együttes változását a bázisidőszak mennyiségei alapján! (bázis időszaki árindex)
e) Határozza meg …..…. együttes változását a tárgyidőszak mennyiségei alapján! (tárgy időszaki árindex)
f) Végezze el az ellenőrző számításokat és értelmezze a kapott eredményeket!

5.1.1.5. Egyedi indexek

Az egyedi indexek között megkülönböztetünk egyedi értékindexet, egyedi árindexet, egyedi volumenindexet.

Egyedi árindex

$$i_p = \frac{p_1}{p_0}$$

p_1: tárgy időszaki egységár
p_0: tárgy időszaki egységár

Egyedi volumenindex

$$i_q = \frac{q_1}{q_0}$$

q_1: tárgy időszaki egységár
q_0: tárgy időszaki egységár

Egyedi értékindex

$$i_é = \frac{q_1 * p_1}{q_0 * p_0}$$

q_1*p_1: tárgy időszaki árbevétel
q_0*p_0: tárgy időszaki árbevétel

Egyedi értékindex: Az egyedi termékek értékének eltérését mutatja, azaz hogyan változott az adott termékre vonatkozó termelési érték (forgalom) a bázisidőszakról a tárgyidőszakra.

A vizsgált termékek értékének változása részben az árak változásának, részben a mennyiségek változásának köszönhető. Kifejezési formája százalékos.

Egyedi árindex: Adott termék árváltozását fejezi ki bázisról tárgy időszakra. Kifejezési formája százalékos.

Egyedi árindex: Adott termék mennyiségi változását fejezi ki bázisról tárgy időszakra. Kifejezési formája százalékos.

Abban az esteben, ha a tárgy időszaki értékből kivonjuk a bázis időszak adott értékét, akkor különbség képzést tudunk itt is elvégezni.

1. tárgy (azaz vizsgált) időszaki árbevétele mínusz a bázis időszaki árbevétel adja az árbevétel növekedés vagy csökkenés értékét. Ha az árbevétel különbözet pozitív előjelű, akkor növekedésről beszélünk. Ha az árbevétel különbözet negatív előjelű, akkor csökkenésről beszélünk.
2. tárgy (azaz vizsgált) időszaki ár mínusz a bázis időszaki ár adja az árnövekedés vagy árcsökkenés értékét. Ha az árak különbözete pozitív előjelű, akkor növekedésről beszélünk. Ha az árak különbözete negatív előjelű, akkor csökkenésről beszélünk.
3. tárgy (azaz vizsgált) időszaki mennyiség mínusz a bázis időszaki mennyiség adja az volumen növekedés vagy volumen csökkenés értékét. Ha a volumenek különbözete pozitív előjelű, akkor növekedésről beszélünk. Ha a volumenek különbözete negatív előjelű, akkor csökkenésről beszélünk.

5.1.2. A viszonyszámok együttes változását kifejező indexek

A viszonyszámok együttes változását kifejező indexek heterogén összetételű sokaságok átlagai, viszonyszámai együttes változásának kifejezésére alkalmasak.

A viszonyszám önmagában is színvonalat kifejező változó, ezért ezekkel az átlagos színvonal-változás és az azt befolyásoló tényezők fejezhetők ki.

A sokaság általános jellemzője a főátlag, a tényezők főátlagra gyakorolt hatását *standardizálás*sal mutatjuk ki.

a) Főátlagindex: Főátlagindex-szel fejezzük ki a szakmai tekintetben összetartozó, de eltérő részsokaságokból álló statisztikai sokaság valamely tulajdonságának színvonalváltozása.

A főátlag-index a főátlag változását fejezi ki, azaz megmutatja, hogy hogyan változik a heterogén sokaság főátlaga a részátlagok színvonalának és arányának együttes változása esetén.

A főátlagindex számítása:

$$I_{\bar{\bar{x}}} = \frac{\dfrac{\sum_{i=1}^{n} f_{1_i} \bar{x}_{1_i}}{\sum_{i=1}^{n} f_{1i}}}{\dfrac{\sum_{i=1}^{n} f_{0_i} \bar{x}_{0_i}}{\sum_{i=1}^{n} f_{0i}}}$$

ahol az f_1 az egyes sokaságok átlagszínvonal mutatóinak súlyai a tárgyidőszakban;
ahol az f_0 az egyes sokaságok átlagszínvonal mutatóinak súlyai a bázisidőszakban;
ahol az $\bar{x}_0$ az egyes csoportok vagy részsokaságok átlagszínvonal mutatói a bázis-időszakban;
ahol az $\bar{x}_1$ az egyes csoportok vagy részsokaságok átlagszínvonal mutatói a tárgy-időszakban.

b) Részátlagindex: A részátlagindex azt mutatja meg, hogyan változott volna az egész sokaság átlaga, ha csak a részsokaságok színvonala változott volna, de a csoportok közötti arányok nem tolódtak volna el.

A részátlagindex számítása:

$$I_{\bar{x}}^{0} = \frac{\dfrac{\sum_{i=1}^{n} f_{0_i} \bar{x}_{1_i}}{\sum_{i=1}^{n} f_{0i}}}{\dfrac{\sum_{i=1}^{n} f_{0_i} \bar{x}_{0_i}}{\sum_{i=1}^{n} f_{0i}}} \text{ bázis súlyozás} \qquad I_{\bar{x}}^{1} = \frac{\dfrac{\sum_{i=1}^{n} f_{1_i} \bar{x}_{1_i}}{\sum_{i=1}^{n} f_{1i}}}{\dfrac{\sum_{i=1}^{n} f_{1_i} \bar{x}_{0_i}}{\sum_{i=1}^{n} f_{1i}}} \text{ tárgy súlyozás}$$

c) Összetételindex: Az összetételindex azt fejezi ki, hogyan változott volna a sokaság átlaga, ha csak a részsokaságok arányai változtak volna, de a részsokaságok átlagai változatlanok maradnak.

Az összetételindex számítása:

$$I_{ö}^{0} = \frac{\dfrac{\sum_{i=1}^{n} f_{1_i} \bar{x}_{0_i}}{\sum_{i=1}^{n} f_{1i}}}{\dfrac{\sum_{i=1}^{n} f_{0_i} \bar{x}_{0_i}}{\sum_{i=1}^{n} f_{0i}}} \text{ bázis súlyozás} \qquad I_{ö}^{1} = \frac{\dfrac{\sum_{i=1}^{n} f_{1_i} \bar{x}_{1_i}}{\sum_{i=1}^{n} f_{1i}}}{\dfrac{\sum_{i=1}^{n} f_{0_i} \bar{x}_{1_i}}{\sum_{i=1}^{n} f_{0i}}} \text{ tárgy súlyozás}$$

A viszonyszámokból számított indexek közötti összefüggések

Az értékindexkörnél már bemutatott módon itt is érvényes az, hogy a főátlagindex egyenlő a különböző súllyal számított rész- és összetételindex szorzatával:

$$I_{\bar{\bar{x}}} = I_{\bar{x}}^{0} \cdot I_{ö}^{1}$$

$$I_{\bar{\bar{x}}} = I_{\bar{x}}^{1} \cdot I_{ö}^{0}$$

5.2. Az abszolút számokból számított indexek gyakorlati alkalmazhatósága

5.2.1. Példa 37 (feladat) – Index 1

Egy miskolci gazdálkodó búza értékesítési adatai ismertek a 2020. és 2022. években (36. táblázat):

36. táblázat: Egy búza értékesítésével foglalkozó gazdálkodó 2020 és 2022. évi adati ismertek

Megnevezés	Értékesítési mennyiség (tonna)		Értékesítési ár (Ft/tonna)	
	2020	2022	2020	2022
Búza, vető	36	28	68 797	186 206
Búza, élelmezési	25	14	56 237	131 687
Búza, élelmezési, közönséges	12	4	54 841	128 077
Búza, élelmezési, durum	19	8	87 102	201 490
Búza, takarmány	30	16	52 359	124 678

Forrás: Saját kalkuláció

a) Határozza meg bázisról tárgy időszakra az árbevétel változását százalékban!
b) Határozza meg a mennyiségek változása mellett a bázis időszaki árak befolyásoló szerepét az árbevétel változásra.
c) Határozza meg a mennyiségek változása mellett a tárgy időszaki árak befolyásoló szerepét az árbevétel változásra.
d) Határozza meg az árak változása mellett a bázis időszaki mennyiségek befolyásoló szerepét az árbevétel változásra.
e) Határozza meg az árak változása mellett a tárgy időszaki mennyiségek befolyásoló szerepét az árbevétel változásra.
f) Határozza meg bázisról tárgy időszakra az árbevétel változását forintban!
g) Határozza meg a mennyiségek változása mellett a bázis időszaki árak befolyásoló szerepét az árbevétel változásra forintban.
h) Határozza meg a mennyiségek változása mellett a tárgy időszaki árak befolyásoló szerepét az árbevétel változásra forintban.
i) Határozza meg az árak változása mellett a bázis időszaki mennyiségek befolyásoló szerepét az árbevétel változásra forintban.
j) Határozza meg az árak változása mellett a tárgy időszaki mennyiségek befolyásoló szerepét az árbevétel változásra forintban.

Példa 37 (megoldás) - Index

A kérdésekre való válaszadások előtt az alap táblázatban szereplő értékeket kell eljelölni a p_0, a p_1, a q_0 és a q_1 jelölésekkel.

Két évünk van jelenleg: 2020 és 2022. A 2020. év lesz a bázis, mivel az tőlünk időben távolabb van. A 2022. év lesz a tárgy időszak, mivel az hozzánk közelebb van. Tehát a jelölések a táblázat felett a következők (77. ábra):

Megnevezés	Értékesítési mennyiség (tonna)		Értékesítési ár (Ft/tonna)	
	2020	2022	2020	2022
	q_0	q_1	p_0	p_1
Búza, vető	36	28	68 797	186 206
Búza, élelmezési	25	14	56 237	131 687
Búza, élelmezési, közönséges	12	4	54 841	128 077
Búza, élelmezési, durum	19	8	87 102	201 490
Búza, takarmány	30	16	52 359	124 678

77. ábra: Az alaptáblázat értékeinek az eljelölése
Forrás: Saját kalkuláció

Ezt követően kerülhet sor az aggregátumok kiszámításra (78. és 79. ábra):

Megnevezés	Értékesítési mennyiség (tonna)		Értékesítési ár (Ft/tonna)					
	2020	2022	2020	2022				
	q_0	q_1	p_0	p_1	q_1p_1		q_0p_0	
Búza, vető	36	28	68 797	186 206	28*186206	5 213 768	36*68797	2 476 692
Búza, élelmezési	25	14	56 237	131 687	14*131687	1 843 618	25*56237	1 405 925
Búza, élelmezési, közönséges	12	4	54 841	128 077	4*128077	512 308	12*54841	658 092
Búza, élelmezési, durum	19	8	87 102	201 490	8*201490	1 611 920	19*87102	1 654 938
Búza, takarmány	30	16	52 359	124 678	16*124678	1 994 848	30*52359	1 570 770
Összesen					=SZUM()	**11 176 462**	=SZUM()	**7 766 417**

78. ábra: Az első két aggregátum kiszámítása
Forrás: Saját kalkuláció

Megnevezés	Értékesítési		Értékesítési ár					
	2020	2022	2020	2022				
	q_0	q_1	p_0	p_1	q_1p_0		q_0p_1	
Búza, vető	36	28	68 797	186 206	28*68797	1 926 316	36*186206	6 703 416
Búza, élelmezési	25	14	56 237	131 687	14*56237	787 318	25*131687	3 292 175
Búza, élelmezési, közönséges	12	4	54 841	128 077	4*54841	219 364	12*128077	1 536 924
Búza, élelmezési, durum	19	8	87 102	201 490	8*87102	696 816	19*201490	3 828 310
Búza, takarmány	30	16	52 359	124 678	16*52359	837 744	30*124678	3 740 340
Összesen					=SZUM()	**4 467 558**	=SZUM()	**19 101 165**

79. ábra: A második két aggregátum kiszámítása

Forrás: Saját kalkuláció

Az árbevétel meghatározását követően jöhetnek a kérdésekhez szükséges számítással.

a) Határozza meg bázisról tárgy időszakra az árbevétel változását százalékban!

A kérdés alapján az értékindexet kell kiszámolni. Az ehhez szükséges képlet:

$$I_v = I_é = \frac{\sum q_1 p_1}{\sum q_0 p_0} = \frac{11\ 176\ 462\ Ft}{7\ 766\ 417\ Ft} = 1{,}4391 \Rightarrow * \ 100 = 143{,}91\%$$

A 2020. évhez képest 2022. évre 43,91%-os növekedés következett be.

b) Határozza meg a mennyiségek változása mellett a bázis időszaki árak befolyásoló szerepét az árbevétel változásra (BÁZIS IDŐSZAKI VOLUMENINDEX).

Mivel a mennyiségek változnak, és az árak fixek (bázis időszakiak), ezért azt a képletet kell kiszámolni, ahol az árak „0" jelöléssel van és a mennyiségek pedig „$\frac{1}{0}$" jelölésűek. Tehát itt bázis időszaki volumenindexet kell számolni.

$$I_q^0 = \frac{\sum q_1 p_0}{\sum q_0 p_0} = \frac{4\ 467\ 558\ Ft}{7\ 766\ 417\ Ft} = 0{,}5752 \Rightarrow * \ 100 \Rightarrow 57{,}52\%$$

Tehát a mennyiségek változása mellett a 2020. évi árak 42,48%-ban csökkentik az árbevétel változást 2020-ról 2022-re (57,52% - 100,00 % = - 42,48).

c) Határozza meg a mennyiségek változása mellett a tárgy időszaki árak befolyásoló szerepét az árbevétel változásra (TÁRGY IDŐSZAKI VOLUMENINDEX).

Mivel a mennyiségek változnak, és az árak fixek (tárgy időszakiak), ezért azt a képletet kell kiszámolni, ahol az árak „1" jelöléssel van, s a mennyiségek pedig „$\frac{1}{0}$" jelölésűek. Tehát itt tárgy időszaki volumenindexet kell számolni.

$$I_q^1 = \frac{\sum q_1 p_1}{\sum q_0 p_1} = \frac{11\ 176\ 462\ Ft}{19\ 101\ 165\ Ft} = 0{,}5851 \Rightarrow * \, 100 \Rightarrow 58{,}51\%$$

Tehát a mennyiségek változása mellett a 2022. évi árak 41,49%-ban csökkentik az árbevétel változást 2020-ról 2022-re (58,81% - 100,00% = - 41,49%).

d) Határozza meg az árak változása mellett a bázis időszaki mennyiségek befolyásoló szerepét az árbevétel változásra (BÁZIS IDŐSZAKI ÁRINDEX).

Mivel az árak változnak, és a mennyiségek fixek (bázis időszakiak), ezért azt a képletet kell kiszámolni, ahol a mennyiségek „0" jelöléssel, míg az árak „$\frac{1}{0}$" jelöléssel vannak. Tehát itt bázis időszaki árindexet kell számolni.

$$I_p^0 = \frac{\sum q_0 p_1}{\sum q_0 p_0} = \frac{19\ 101\ 165\ Ft}{7\ 766\ 417\ Ft} = 2{,}4595 \Rightarrow * \, 100 \Rightarrow 245{,}95\%$$

Tehát az árak változása mellett a 2020. évi mennyiségek 145,95%-ban növelték az árbevétel változást 2020-ról 2022-re (245,95% - 100,00% = +145,95%).

e) Határozza meg az árak változása mellett a tárgy időszaki mennyiségek befolyásoló szerepét az árbevétel változásra (TÁRGY IDŐSZAKI ÁRINDEX).

Mivel az árak változnak, és a mennyiségek fixek (tárgy időszakiak), ezért azt a képletet kell kiszámolni, ahol a mennyiségek „1" jelöléssel, míg az árak „$\frac{1}{0}$" jelöléssel vannak. Tehát itt tárgy időszaki árindexet kell számolni.

$$I_p^1 = \frac{\sum q_1 p_1}{\sum q_1 p_0} = \frac{11\ 176\ 462\ Ft}{4\ 467\ 558\ Ft} = 2{,}5017 \Rightarrow * \, 100 \Rightarrow 250{,}17\%$$

Tehát az árak változása mellett a 2022. évi mennyiségek 150,17%-ban növelték az árbevétel változást 2020-ról 2022-re (250,17% - 100,00% = 150,17%).

f) Határozza meg bázisról tárgy időszakra az árbevétel változását forintban!

A feladatban azt kell meghatározni, hogy a 13,57%-os növekedés (melyet az értékindexnél számoltunk ki) hány Ft változást jelent a büfé esetében.

Kiszámításához a K_v értéket kell meghatározni:

$$K_v = \sum_{i=1}^{n} q_1 \cdot p_1 - \sum_{i=1}^{n} q_0 \cdot p_0 = 11\,176\,462\ Ft - 7\,766\,417\ Ft = +\,3\,410\,045\ Ft$$

A 2020. évhez képest 2022. évre a 43,91%-os, azaz 3 410 045 Ft-os növekedés következett be.

g) Határozza meg a mennyiségek változása mellett a bázis időszaki árak befolyásoló szerepét az árbevétel változásra forintban.

A kérdés alapján itt bázis időszaki volumenindex értékét kell forintban kifejezni. Azaz a képlet, melybe be kell helyettesíteni:

$$K_q^0 = \sum_{i=1}^{n} q_1 \cdot p_0 - \sum_{i=1}^{n} q_0 \cdot p_0 = 4\,467\,558 - 7\,766\,417 = -3\,298\,859\ Ft$$

Tehát a bázis időszak (2020. év) árai a mennyiségek változása mellett 3 298 859 Ft-tal csökkentik az árbevételt 2020-ról 2022-re.

h) Határozza meg a mennyiségek változása mellett a tárgy időszaki árak befolyásoló szerepét az árbevétel változásra forintban.

A kérdés alapján itt tárgy időszaki volumenindex értékét kell forintban kifejezni. Azaz a képlet, melybe be kell helyettesíteni:

$$K_q^1 = \sum_{i=1}^{n} q_1 \cdot p_1 - \sum_{i=1}^{n} q_0 \cdot p_1 = 11\,176\,462\ Ft - 19\,101\,165\ Ft = -7\,924\,703\ Ft$$

Tehát a tárgy időszak (2022. év) árai a mennyiségek változása mellett 7 924 703 Ft-tal növelik az árbevételt 2020-ról 2022-re.

i) Határozza meg az árak változása mellett a bázis időszaki mennyiségek befolyásoló szerepét az árbevétel változásra forintban.

A kérdés alapján itt bázis időszaki árindex értékét kell forintban kifejezni. Azaz a képlet, melybe be kell helyettesíteni:

$$K_p^0 = \sum_{i=1}^{n} q_0 \cdot p_1 - \sum_{i=1}^{n} q_0 \cdot p_0 = 19\,101\,165\ Ft - \ 7\,766\,417\ Ft = +\ 11\,334\,748\ Ft$$

Tehát a bázis időszak (2020. év) mennyiségei az árak változása mellett 11 334 748 Ft-tal növelik az árbevételt 2020-ról 2022-re.

j) Határozza meg az árak változása mellett a tárgy időszaki mennyiségek befolyásoló szerepét az árbevétel változásra forintban.

A kérdés alapján itt tárgy időszaki árindex értékét kell forintban kifejezni. Azaz a képlet, melybe be kell helyettesíteni:

$$K_p^1 = \sum_{i=1}^{n} q_1 \cdot p_1 - \sum_{i=1}^{n} q_1 \cdot p_0 = 11\,176\,462\ Ft - 4\,467\,558\ Ft = \ +6\,708\,904\ Ft$$

Tehát a tárgy időszak (2022. év) mennyiségei az árak változása mellett 6 708 904 Ft-tal növelik az árbevételt 2020-ról 2022-re.

Végül ellenőrizzük le a példánkat, hogy jók-e az eredményeink:

$$I_q^F = \sqrt{I_q^0 \cdot I_q^1} = \sqrt{0{,}5752 * 0{,}5851} = 0{,}5802 = 58{,}02\%$$

$$I_p^F = \sqrt{I_p^0 \cdot I_p^1} = \sqrt{2{,}4595 * 2{,}5017} = 2{,}4805 = 248{,}05\%$$

$$I_v = I_q^F \cdot I_p^F = 0{,}5802 * 2{,}4805 = 1{,}4391 \Rightarrow 143{,}91\%$$

$\boldsymbol{I_q^F} = 58{,}02\%$ azt jelenti, hogy a mennyiségek az árbevétel növekedést 41,98%-ban csökkentik.
$\boldsymbol{I_p^F} = 248{,}05\%$ azt jelenti, hogy az árak az árbevételt 148,05%-ban növelik.

$$K_p^0 = \sum q_0 p_1 - \sum q_0 p_0 = 11\ 334\ 748\ Ft$$
$$K_p^1 = \sum q_1 p_1 - \sum q_1 p_0 = 6\ 708\ 904\ Ft$$
$$K_q^0 = \sum q_1 p_0 - \sum q_0 p_0 = -3\ 298\ 859\ Ft$$
$$K_q^1 = \sum q_1 p_1 - \sum q_0 p_1 = -7\ 924\ 703\ Ft$$
$$K_v = K_p^1 + K_q^0 = 6\ 708\ 904\ Ft + (-3\ 298\ 859\ Ft) = 3\ 410\ 045\ Ft$$
$$K_v = K_q^1 + K_p^0 = (-7\ 924\ 703\ Ft) + 11\ 334\ 748\ Ft = 3\ 410\ 045\ Ft$$

5.2.2. Példa 38 (feladat) – Index 2

Egy miskolci gazdálkodó búza értékesítési adatai ismertek a 2020. és 2022. években (37. táblázat):

37. táblázat: Egy búza értékesítésével foglalkozó gazdálkodó 2020 és 2022. évi adati ismertek

Megnevezés	Értékesítési mennyiség (tonna)		Értékesítési ár (Ft/tonna)	
	2020	2022	2020	2022
Búza, vető	36	28	68 797	186 206
Búza, élelmezési	25	14	56 237	131 687
Búza, élelmezési, közönséges	12	4	54 841	128 077
Búza, élelmezési, durum	19	8	87 102	201 490
Búza, takarmány	30	16	52 359	124 678

Forrás: Saját kalkuláció

a) Határozza meg az egyedi értékindexet. Értelmezze a kapott eredményt!

b) Határozza meg az egyedi volumenindexet. Értelmezze a kapott eredményt!

c) Határozza meg az egyedi árindexet. Értelmezze a kapott eredményt!

Példa 38 (megoldás) – Index 2

a) Határozza meg az egyedi értékindexet. Értelmezze a kapott eredményt!

Az egyedi értékindex kiszámolásához a valódi árbevétel értékek szükségesek, azaz q_0p_0 és a q_1p_1. Ezen értékek kiszámolásához először el kell készíteni az egyes oszlopok eljelölését:

p_0: bázis időszaki ár (2020. évi egységár)

p_1: tárgy időszaki ár (2022. évi egységár)

q_0: bázis időszaki mennyiség (2020. évi értékesítési mennyiség)

q_1: tárgy időszaki mennyiség (2022. évi értékesítési mennyiség)

A 2020. év lesz a bázis- (tőlünk időben távolabb van) és a 2022. év lesz a tárgy időszak (hozzánk közelebb van időben). Tehát az jelölések a táblázat felett a következők (80. ábra):

Megnevezés	Értékesítési mennyiség (tonna)		Értékesítési ár (Ft/tonna)	
	2020	2022	2020	2022
	q_0	q_1	p_0	p_1
Búza, vető	36	28	68 797	186 206
Búza, élelmezési	25	14	56 237	131 687
Búza, élelmezési, közönséges	12	4	54 841	128 077
Búza, élelmezési, durum	19	8	87 102	201 490
Búza, takarmány	30	16	52 359	124 678

80. ábra: Az alaptáblázat oszlopainak az eljelölése
Forrás: Saját kalkuláció

Ezután következik az aggregátumok kiszámítása (81. ábra):

Megnevezés	Értékesítési mennyiség (tonna)		Értékesítési ár (Ft/tonna)					
	2020	2022	2020	2022				
	q_0	q_1	p_0	p_1	q_1p_1		q_0p_0	
Búza, vető	36	28	68 797	186 206	28*186206	5 213 768	36*68797	2 476 692
Búza, élelmezési	25	14	56 237	131 687	14*131687	1 843 618	25*56237	1 405 925
Búza, élelmezési, közönséges	12	4	54 841	128 077	4*128077	512 308	12*54841	658 092
Búza, élelmezési, durum	19	8	87 102	201 490	8*201490	1 611 920	19*87102	1 654 938
Búza, takarmány	30	16	52 359	124 678	16*124678	1 994 848	30*52359	1 570 770
Összesen					**=SZUM()**	**11 176 462**	**=SZUM()**	**7 766 417**

81. ábra: A valódi árbevételek kiszámítása
Forrás: Saját kalkuláció

Az egyedi értékindex esetén soronként kell meghatározni a $\frac{q_1 p_1}{q_0 p_0}$ hányados értékét (82. ábra).

Megnevezés	Értékesítési mennyiség (tonna)		Értékesítési ár (Ft/tonna)							
	2020	2022	2020	2022						
	q_0	q_1	p_0	p_1	q_1p_1		q_0p_0		q_1p_1 / q_0p_0	
Búza, vető	36	28	68 797	186 206	28*186206	5 213 768	36*68797	2 476 692	5213768/2476925	210,51%
Búza, élelmezési	25	14	56 237	131 687	14*131687	1 843 618	25*56237	1 405 925	1843618/1405925	131,13%
Búza, élelmezési, közönséges	12	4	54 841	128 077	4*128077	512 308	12*54841	658 092	512308/658092	77,85%
Búza, élelmezési, durum	19	8	87 102	201 490	8*201490	1 611 920	19*87102	1 654 938	1611920/1654938	97,40%
Búza, takarmány	30	16	52 359	124 678	16*124678	1 994 848	30*52359	1 570 770	1994848/1570770	127,00%

82. ábra: Az egyedi értékindex kiszámítása az árbevétel értékekből
Forrás: Saját kalkuláció

Értelmezés:

Búza, vető, 210,51%: A 2020. évről a 2022. évre 110,51%-kal növekedett a vető búza árbevétele (210,51% - 100,00% = +110,51%).

Búza, élelmezési, 131,13%: A 2020. évről a 2022. évre 31,131%-kal növekedett az élelmezési búza árbevétele (131,13% - 100,00% = +31,13%).

Búza, élelmezési, közönséges, 77,85%: 2020. évről a 2022. évre 22,15%-kal csökkent a közönséges élelmezési búza árbevétele (77,85% - 100,00% = - 22,15%).

Búza, élelmezési, durum, 97,40%: 2020. évről a 2022. évre 2,6%-kal csökkent a durum élelmezési búza árbevétele (97,40% - 100,00% = -2,6%).

Búza, takarmány, 127,00%: A 2020. évről a 2022. évre 27,00%-kal növekedett a takarmány búza árbevétele (127,00% - 100,00% = +27,00%).

b) Határozza meg az egyedi volumenindexet. Értelmezze a kapott eredményt!

Az egyedi volumenindex esetén soronként kell meghatározni a $\frac{q_1}{q_0}$ hányados értékét (83. ábra).

Megnevezés	Értékesítési mennyiség (tonna)		Értékesítési ár (Ft/tonna)			
	2020	2022	2020	2022		
	q_0	q_1	p_0	p_1	q_1 / q_0	
Búza, vető	36	28	68 797	186 206	28/36	77,78%
Búza, élelmezési	25	14	56 237	131 687	14/25	56,00%
Búza, élelmezési, közönséges	12	4	54 841	128 077	4/12	33,33%
Búza, élelmezési, durum	19	8	87 102	201 490	8/19	42,11%
Búza, takarmány	30	16	52 359	124 678	16/30	53,33%

83. ábra: Az egyedi volumenindex kiszámítása az alapadatokból
Forrás: Saját kalkuláció

Értelmezés:

Búza, vető, 77,78%: A 2020. évről a 2022. évre 22,22%-kal csökkent a vető búza mennyisége (77,78% - 100,00% = - 22,22%).

Búza, élelmezési, 56,00%: A 2020. évről a 2022. évre 56%-kal csökkent az élelmezési búza mennyisége (56,00% - 100,00% = - 44,00%).

Búza, élelmezési, közönséges, 33,33%: 2020. évről a 2022. évre 66,67%-kal csökkent a közönséges élelmezési búza mennyisége (33,33% - 100,00% = - 66,67%).

Búza, élelmezési, durum, 42,11%: 2020. évről a 2022. évre 57,89%-kal csökkent a durum élelmezési búza mennyisége (42,11% - 100,00% = -57,89%).

Búza, takarmány, 53,33%: A 2020. évről a 2022. évre 46,67%-kal csökkent a takarmány búza árbevétele (53,33% - 100,00% = - 46,67%).

c) Határozza meg az egyedi árindexet. Értelmezze a kapott eredményt!

Az egyedi árindex esetén soronként kell meghatározni a $\frac{p_1}{p_0}$ hányados értékét (84. ábra).

Megnevezés	Értékesítési mennyiség (tonna)		Értékesítési ár (Ft/tonna)			
	2020	2022	2020	2022		
	q_0	q_1	p_0	p_1	p_1/p_0	
Búza, vető	36	28	68 797	186 206	186206/68797	270,66%
Búza, élelmezési	25	14	56 237	131 687	131687/56237	234,16%
Búza, élelmezési, közönséges	12	4	54 841	128 077	128077/54841	233,54%
Búza, élelmezési, durum	19	8	87 102	201 490	201490/87102	231,33%
Búza, takarmány	30	16	52 359	124 678	124678/52359	238,12%

84. ábra: Az egyedi volumenindex kiszámítása az alapadatokból
Forrás: Saját kalkuláció

Értelmezés:

Búza, vető, 270,66%: A 2020. évről a 2022. évre 170,66%-kal nőtt a vető búza ára (270,66% - 100,00% = 170,66%).

Búza, élelmezési, 234,16%: A 2020. évről a 2022. évre 134,16%-kal nőtt az élelmezési búza ára (234,16% - 100,00% = 134,16%).

Búza, élelmezési, közönséges, 233,54%: 2020. évről a 2022. évre 133,54%-kal nőtt a közönséges élelmezési búza ára (233,54% - 100,00% = 133,54%).

Búza, élelmezési, durum, 231,33%: 2020. évről a 2022. évre 131,33%-kal nőtt a durum élelmezési búza ára (231,33% - 100,00% = 131,33%).

Búza, takarmány, 238,12%: A 2020. évről a 2022. évre 138,12%-kal nőtt a takarmány búza ára (238,12% - 100,00% = 138,12%).

5.2.3. Példa 39 (feladat) – Index 3

Egy nyíregyházi pékség 2021. és 2024. év januári eladási mennyiségei és eladási árai ismertek (38. táblázat):

38. táblázat: A nyíregyházi pékség eladási mennyiségei és eladási árai a 2021. januári és 2024. januári hónapra

Megnevezés	Értékesítési mennyiség (darab)	Értékesítési ár (Ft/darab)	Értékesítési mennyiség (darab)	Értékesítési ár (Ft/darab)
	2021. január		2024. január	
Zsemle	450	40	560	55
Kifli	560	60	480	69
Kalács	246	490	199	540
Túros táska	190	240	210	180

Forrás: Saját szerkesztés

a) Határozza meg bázisról tárgy időszakra az árbevétel változását százalékban!
b) Határozza meg bázisról tárgy időszakra az árbevétel változását forintban!
c) Határozza meg a mennyiségek változása mellett a bázis időszaki árak befolyásoló szerepét az árbevétel változásra.
d) Határozza meg a mennyiségek változása mellett a bázis időszaki árak befolyásoló szerepét az árbevétel változásra forintban.
e) Határozza meg a mennyiségek változása mellett a tárgy időszaki árak befolyásoló szerepét az árbevétel változásra.
f) Határozza meg a mennyiségek változása mellett a tárgy időszaki árak befolyásoló szerepét az árbevétel változásra forintban.
g) Határozza meg az árak változása mellett a bázis időszaki mennyiségek befolyásoló szerepét az árbevétel változásra.
h) Határozza meg az árak változása mellett a bázis időszaki mennyiségek befolyásoló szerepét az árbevétel változásra forintban.
i) Határozza meg az árak változása mellett a tárgy időszaki mennyiségek befolyásoló szerepét az árbevétel változásra.
j) Határozza meg az árak változása mellett a tárgy időszaki mennyiségek befolyásoló szerepét az árbevétel változásra forintban.
k) Határozza meg az egyedi értékindexet. Értelmezze a kapott eredményt!
l) Határozza meg az egyedi volumenindexet. Értelmezze a kapott eredményt!
m) Határozza meg az egyedi árindexet. Értelmezze a kapott eredményt!

Példa 39 (megoldás) – Index 3

A kezdeti időszakunk a 2021. év január, így ennek a jelölése lesz a „0”. A későbbi időszakunk a 2024. év január, így ennek a jelölése „1”. Az árakat „p”, a mennyiségeket „q” jelöléssel látjuk el (85. ábra).

Megnevezés	Értékesítési mennyiség (darab)	Értékesítési ár (Ft/darab)	Értékesítési mennyiség (darab)	Értékesítési ár (Ft/darab)
	2021. január		2024. január	
	q_0	p_0	q_1	p_1
Zsemle	450	40	560	55
Kifli	560	60	480	69
Kalács	246	490	199	540
Túros táska	190	240	210	180

85. ábra: A feladatban alkalmazandó jelölések
Forrás: Saját szerkesztés

Az árak és a mennyiségek ismeretében elkészítjük az aggregátumokat (árbevételeket) (86. ábra).

Megnevezés	Értékesítési mennyiség (darab)	Értékesítési ár (Ft/darab)	Értékesítési mennyiség (darab)	Értékesítési ár (Ft/darab)				
	2021. január		2024. január					
	q_0	p_0	q_1	p_1	q_1p_1		q_0p_0	
Zsemle	450	40	560	55	560*55	30 800	450*40	18 000
Kifli	560	60	480	69	480*69	33 120	560*60	33 600
Kalács	246	490	199	540	199*540	107 460	246*490	120 540
Túros táska	190	240	210	180	210*180	37 800	190*240	45 600
Összesen					=SZUM()	209 180	=SZUM()	217 740

Megnevezés	Értékesítési mennyiség (darab)	Értékesítési ár (Ft/darab)	Értékesítési mennyiség (darab)	Értékesítési ár (Ft/darab)				
	2021. január		2024. január					
	q_0	p_0	q_1	p_1	q_1p_0		q_0p_1	
Zsemle	450	40	560	55	560*40	22 400	450*55	24 750
Kifli	560	60	480	69	480*60	28 800	560*69	38 640
Kalács	246	490	199	540	199*490	97 510	246*540	132 840
Túros táska	190	240	210	180	210*240	50 400	190*180	34 200
Összesen					=SZUM()	199 110	=SZUM()	230 430

86. ábra: Az aggregátumok eredményei
Forrás: Saját szerkesztés

Az aggregátumok összesen értékeit fogjuk a különböző indexeknél felhasználni. Tehát a képletekben a következő összegeket kell majd szerepeltetni:

$$\sum q_1p_1 = 209\,180\ Ft \qquad \sum q_0p_0 = 217\,740\ Ft$$

$$\sum q_0p_1 = 230\,430\ Ft \qquad \sum q_1p_0 = 199\,110\ Ft$$

Határozza meg bázisról tárgy időszakra az árbevétel változását százalékban és forintban (87. ábra)!

Megnevezés	Értékesítési mennyiség (darab)	Értékesítési ár (Ft/darab)	Értékesítési mennyiség (darab)	Értékesítési ár (Ft/darab)				
	2021. január		2024. január					
	q_0	p_0	q_1	p_1	q_1p_1		q_0p_0	
Zsemle	450	40	560	55	560*55	30 800	450*40	18 000
Kifli	560	60	480	69	480*69	33 120	560*60	33 600
Kalács	246	490	199	540	199*540	107 460	246*490	120 540
Túros táska	190	240	210	180	210*180	37 800	190*240	45 600
Összesen					=SZUM()	**209 180**	=SZUM()	**217 740**

Megnevezés	Értékesítési mennyiség (darab)	Értékesítési ár (Ft/darab)	Értékesítési mennyiség (darab)	Értékesítési ár (Ft/darab)				
	2021. január		2024. január					
	q_0	p_0	q_1	p_1	q_1p_0		q_0p_1	
Zsemle	450	40	560	55	560*40	22 400	450*55	24 750
Kifli	560	60	480	69	480*60	28 800	560*69	38 640
Kalács	246	490	199	540	199*490	97 510	246*540	132 840
Túros táska	190	240	210	180	210*240	50 400	190*180	34 200
Összesen					=SZUM()	**199 110**	=SZUM()	**230 430**

Értékindex	**Ié**	szum q1p1 / szum q0p0	209 180 / 217 740	96,07%
	Ké	szum q1p1 - szum q0p0	209 180 - 217 740	-8 560

87. ábra: Az értékindex kiszámítása a példafeladatra

Forrás: Saját szerkesztés

Tehát 2021. évről 2024. évre 3,93%-kal, azaz 8 560 Ft-tal csökkent az árbevétel a vizsgált vállalkozásnál.

Határozza meg a mennyiségek változása mellett a bázis időszaki árak befolyásoló szerepét az árbevétel változásra százalékban és forintban (88. ábra)!

Megnevezés	Értékesítési mennyiség (darab)	Értékesítési ár (Ft/darab)	Értékesítési mennyiség (darab)	Értékesítési ár (Ft/darab)				
	2021. január		2024. január					
	q_0	p_0	q_1	p_1	q_1p_1		q_0p_0	
Zsemle	450	40	560	55	560*55	30 800	450*40	18 000
Kifli	560	60	480	69	480*69	33 120	560*60	33 600
Kalács	246	490	199	540	199*540	107 460	246*490	120 540
Túros táska	190	240	210	180	210*180	37 800	190*240	45 600
Összesen					=SZUM()	**209 180**	=SZUM()	**217 740**

Megnevezés	Értékesítési mennyiség (darab)	Értékesítési ár (Ft/darab)	Értékesítési mennyiség (darab)	Értékesítési ár (Ft/darab)				
	2021. január		2024. január					
	q_0	p_0	q_1	p_1	q_1p_0		q_0p_1	
Zsemle	450	40	560	55	560*40	22 400	450*55	24 750
Kifli	560	60	480	69	480*60	28 800	560*69	38 640
Kalács	246	490	199	540	199*490	97 510	246*540	132 840
Túros táska	190	240	210	180	210*240	50 400	190*180	34 200
Összesen					=SZUM()	**199 110**	=SZUM()	**230 430**

Bázis időszaki volumenindex	**Iq0**	szum q1p0 / szum q0p0	199 110 / 217 740	91,44%
	Kq0	szum q1p0 - szum q0p0	199 110 - 217 740	-18 630

88. ábra: A bázis időszaki volumenindex kiszámítása a példafeladatra
Forrás: Saját szerkesztés

A 2021. évi árak, a mennyiségek változása mellett 8,56%-kal, azaz 18 630 Ft-tal csökkentik az árbevételt.

Határozza meg a mennyiségek változása mellett a tárgy időszaki árak befolyásoló szerepét az árbevétel változásra százalékban és forintban (89. ábra)!

Megnevezés	Értékesítési mennyiség (darab)	Értékesítési ár (Ft/darab)	Értékesítési mennyiség (darab)	Értékesítési ár (Ft/darab)				
	2021. január		2024. január					
	q_0	p_0	q_1	p_1	q_1p_1		q_0p_0	
Zsemle	450	40	560	55	560*55	30 800	450*40	18 000
Kifli	560	60	480	69	480*69	33 120	560*60	33 600
Kalács	246	490	199	540	199*540	107 460	246*490	120 540
Túros táska	190	240	210	180	210*180	37 800	190*240	45 600
Összesen					=SZUM()	**209 180**	=SZUM()	**217 740**

Megnevezés	Értékesítési mennyiség (darab)	Értékesítési ár (Ft/darab)	Értékesítési mennyiség (darab)	Értékesítési ár (Ft/darab)				
	2021. január		2024. január					
	q_0	p_0	q_1	p_1	q_1p_0		q_0p_1	
Zsemle	450	40	560	55	560*40	22 400	450*55	24 750
Kifli	560	60	480	69	480*60	28 800	560*69	38 640
Kalács	246	490	199	540	199*490	97 510	246*540	132 840
Túros táska	190	240	210	180	210*240	50 400	190*180	34 200
Összesen					=SZUM()	**199 110**	=SZUM()	**230 430**

Tárgy időszaki volumenindex	Iq1	szum q1p1 / szum q0p1	209 180 / 230 430	90,78%
	Kq1	szum q1p1 - szum q0p1	209 180 - 230 430	-21 250

89. ábra: A tárgy időszaki volumenindex kiszámítása a példafeladatra
Forrás: Saját szerkesztés

A 2021. évi árak, a mennyiségek változása mellett 9,22%-ban, azaz 21 250 Ft-tal csökkentik az árbevétel változást.

Határozza meg az árak változása mellett a bázis időszaki mennyiségek befolyásoló szerepét az árbevétel változásra százalékban és forintban (90. ábra)!

Megnevezés	Értékesítési mennyiség (darab)	Értékesítési ár (Ft/darab)	Értékesítési mennyiség (darab)	Értékesítési ár (Ft/darab)				
	2021. január		2024. január					
	q_0	p_0	q_1	p_1	q_1p_1		q_0p_0	
Zsemle	450	40	560	55	560*55	30 800	450*40	18 000
Kifli	560	60	480	69	480*69	33 120	560*60	33 600
Kalács	246	490	199	540	199*540	107 460	246*490	120 540
Túros táska	190	240	210	180	210*180	37 800	190*240	45 600
Összesen					=SZUM()	**209 180**	=SZUM()	**217 740**

Megnevezés	Értékesítési mennyiség (darab)	Értékesítési ár (Ft/darab)	Értékesítési mennyiség (darab)	Értékesítési ár (Ft/darab)				
	2021. január		2024. január					
	q_0	p_0	q_1	p_1	q_1p_0		q_0p_1	
Zsemle	450	40	560	55	560*40	22 400	450*55	24 750
Kifli	560	60	480	69	480*60	28 800	560*69	38 640
Kalács	246	490	199	540	199*490	97 510	246*540	132 840
Túros táska	190	240	210	180	210*240	50 400	190*180	34 200
Összesen					=SZUM()	**199 110**	=SZUM()	**230 430**

Bázis időszaki árindex				
	Ip0	szum q0p1 / szum q0p0	230 430 / 217 740	105,83%
	Kp0	szum q0p1 - szum q0p0	230 430 - 217 740	12 690

90. ábra: A bázis időszaki árindex kiszámítása a példafeladatra
Forrás: Saját szerkesztés

A 2021. évi mennyiségek, az árak változása mellett 5,83%-ban, azaz 12 690 Ft-tal növelik az árbevétel változást.

Határozza meg az árak változása mellett a tárgy időszaki mennyiségek befolyásoló szerepét az árbevétel változásra százalékban és forintban (91. ábra)!

Megnevezés	Értékesítési mennyiség (darab)	Értékesítési ár (Ft/darab)	Értékesítési mennyiség (darab)	Értékesítési ár (Ft/darab)				
	2021. január		2024. január					
	q_0	p_0	q_1	p_1	q_1p_1		q_0p_0	
Zsemle	450	40	560	55	560*55	30 800	450*40	18 000
Kifli	560	60	480	69	480*69	33 120	560*60	33 600
Kalács	246	490	199	540	199*540	107 460	246*490	120 540
Túros táska	190	240	210	180	210*180	37 800	190*240	45 600
Összesen					=SZUM()	209 180	=SZUM()	217 740

Megnevezés	Értékesítési mennyiség (darab)	Értékesítési ár (Ft/darab)	Értékesítési mennyiség (darab)	Értékesítési ár (Ft/darab)				
	2021. január		2024. január					
	q_0	p_0	q_1	p_1	q_1p_0		q_0p_1	
Zsemle	450	40	560	55	560*40	22 400	450*55	24 750
Kifli	560	60	480	69	480*60	28 800	560*69	38 640
Kalács	246	490	199	540	199*490	97 510	246*540	132 840
Túros táska	190	240	210	180	210*240	50 400	190*180	34 200
Összesen					=SZUM()	199 110	=SZUM()	230 430

Tárgy időszaki árindex	Ip1	szum q1p1 / szum q1p0	209 180 / 199 110	105,06%
	Kp1	szum q1p1 - szum q1p0	209 180 - 199 110	10 070

91. ábra: A tárgy időszaki árindex kiszámítása a példafeladatra
Forrás: Saját szerkesztés

A 2021. évi mennyiségek, az árak változása mellett 5,06%-ban, azaz 10 070 Ft-tal növelik az árbevétel változást.

Az érték, az ár- és a volumen indexek meghatározását követően jöhet az ellenőrzés.
Ahogy az elméleti részben is láttuk az értékindex értékét ($I_é$) megkaphatjuk, ha:

– a bázis időszaki árindexet (I_p^0) megszorozzuk a tárgy időszaki volumenindex (I_q^1) értékével VAGY

– a tárgy időszaki árindexet (I_p^1) megszorozzuk a bázis időszaki volumenindex (I_q^0) értékével VAGY

– a Fisher féle árindexet (I_p^F) megszorozzuk a Fisher féle volumenindex (I_q^F) értékével.

A $K_é$ értékét megkapjuk, ha:

– a bázis időszaki árindexhez tartozó különbségből (K_p^0) kivonjuk a tárgy időszaki volumenindexhez tartozó különbséget (K_q^1) VAGY

– a tárgy időszaki árindexhez tartozó különbségből (K_p^1) kivonjuk a bázis időszaki volumenindexhez tartozó különbséget (K_q^0) (91. ábra).

	Index (%)		**Különbség (Ft)**
Értékindex	96,07%		-8 560
Árindex			
bázis súlyozás	105,83%		12 690
tárgy súlyozás	105,06%		10 070
Volumenindex			
bázis súlyozás	91,44%		-18 630
tárgy súlyozás	90,78%		-21 250

Fisher féle árindex	=GYÖK(105,83%*105,06%) =	105,44%			
Fisher féle volumenindex	=GYÖK(91,44%*90,78%) =	91,11%			
Értékindex	=105,44%*91,11% =	96,07%	**Különbség érték**	**=12 690 + (-21 250) =**	-8 560 Ft
Értékindex	=105,83%*90,78%	96,07%	**Különbség érték**	**=10 070 + (-18 630) =**	-8 560 Ft
Értékindex	=105,06%*91,44%	96,07%			

92. ábra: Az ellenőrzés elkészítése a példafeladatra

Forrás: Saját szerkesztés

FELHASZNÁLT SZAKIRODALOM

1. Kerékgyártó Györgyné – Mudruczó György (1987): Statisztikai módszerek a gazdasági elemzésben. Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó. Budapest. ISBN 963 221 697 0
2. Csipkés M. (2023): Viszonyszámok. Előadás: Statisztika, Debrecen Egyetem GTK.
3. Huzsvai L. (2023): Viszonyszámok. Előadás: Statisztika I., Debrecen Egyetem GTK.
4. Petres T. – Tóth L. (2004): Statisztika. Központi Statisztikai Hivatal, Budapest, 287 p. ISBN 963 215 734 6
5. Statisztika (2019): http://193.6.12.228/uigtk/uise/gik/stat_mm_bgi_2ea.pdf, letöltés dátuma: 2019. augusztus 21.
6. Szűcs I. (2004): Alkalmazott statisztika. AGROINFORM Kiadó és Nyomda Kft., Budapest, 551 p. ISBN 963 502 761 3

FONTOSABB ELMÉLETI KISKÉRDÉSEK

1. Tábla típusa, és azok jellemzői

- Dimenzió szerint: 1 vagy 2
- Rendeltetés szerint: gyűjtő, feldolgozási, közlési
- Csoportosítás szerepe a tábla elkészítésében:
    - Egyszerű statisztikai tábla: - ha csoportosítást nem tartalmaz
    - Csoportosító tábla: - egy ismérv szerinti csoportosítást tartalmaz
    - Kombinációs tábla: - két vagy több ismérv szerint csoportosítást tartalmaznak.

2. Statisztikai sorok típusai és azok jellemzői

A) valódi sorok: mennyiségi, minőségi, területi, idősor

- Minőségi sorok: a sokaság olyan tárgyi ismérv szerinti megoszlását mutatják, amelyek változatai csak fogalmilag vannak meghatározva
- Mennyiségi sorok: a sokaság olyan tárgyi ismérv szerinti megoszlását mutatják, amelyek változatait számszerűen fejezzük ki.

  Területi sorok: valamely statisztikai sokaság területi megoszlását tünteti fel
- Idősorok: a sokaság alakulását az idő függvényében, időbeli változásában, mozgásában ábrázolják.
- Leíró sorok: ugyanazon gazdasági, társadalmi vagy politikai egység különböző jellegű, többoldalú, különböző tulajdonságok szerinti felsorolásszerű jellemzését adják

B) nem valódi: leíró sor

3. Megoszlási viszonyszám értelmezése, kiszámítása

A megoszlási viszonyszám a statisztikai sokaságok egyes részeinek az egészhez mért arányát fejezi ki. (Általában mennyiségi és minőségi sorokból számítjuk). Kifejezési formája: %
Kiszámítása: részsokaság/teljes sokaság

4. Koordinációs viszonyszám értelmezése, kiszámítása

A koordinációs viszonyszámok a statisztikai sokaság szerkezetét mutatják. A sokaság két részének egymáshoz viszonyított arányát mutatják. Megmutatja, hogy az egyik részsokaság egy egységére, a másik részsokaság hány egysége jut. Kifejezési formája: %. Kiszámítása: A részsokaság/B részsokaság

5. Intenzitási viszonyszám értelmezése, kiszámítása

Két különböző, a legtöbbször különböző mértékegységben kifejezett adat hányadosa, amely megmutatja, hogy az egyik sokaság egy egységére a másik sokaság hány egysége jut.

Különnemű adatokat hasonlítunk össze. Olyan viszonyszám, amelynek kifejezési formája általában nem százalékos. Kiszámítása: A/B

6. Dinamikus viszonyszám értelmezése, kiszámítása

Akkor számolható, ha időbeli ismérvek állnak rendelkezésünkre. Az összehasonlítás alapjául vett időszakot bázisidőszaknak, azt az időszakot pedig, amely az összehasonlítás tárgya, tárgyidőszaknak nevezzük. Kifejezési formája: %. Kiszámítása: tárgyidőszak adata/bázis-időszak adata. Fajtái: bázis viszonyszám, láncviszonyszám

7. Területi összehasonlító viszonyszám értelmezése, kiszámítása

Két vagy több területegységre vonatkozó, azonos tartalmú statisztikai adat összehasonlításának eszköze. A területi összehasonlító viszonyszám azt mutatja meg, hogy a vizsgált jelenség térben különböző adatai hányszorosát (hány %-át) teszik ki az alapul választott adatnak. Földrészek, országok, országrészek, régiók és más területi egységek adatainak az összehasonlítására szolgál. Kifejezési formája: %

Kiszámítása: A terület adata/B terület adata

8. Teljesítmény viszonyszám értelmezése, kiszámítása

Két különböző, a legtöbbször különböző mértékegységben kifejezett adat hányadosa, amely megmutatja, hogy az egyik sokaság egy egységére a másik sokaság hány egysége jut. Kifejezési formája: %-os. 100% alatt alul teljesítésről, 100% felett túlteljesítésről beszélünk.

Két típusa: tervfeladat viszonyszám (adott év tervadata/megelőző év tényadata) és a tervteljesítési viszonyszám (adott év tényadata/adott év tervadata)

9. Viszonyszámok csoportosítása

- megoszlási viszonyszám
- összehasonlító viszonyszám
    - koordinációs viszonyszám
    - területi viszonyszám
    - dinamikus viszonyszám (bázis viszonyszám, lánc viszonyszám)
- intenzitási viszonyszám
- teljesítmény viszonyszám

10. Középértékek csoportosítása

Átlagok: Számtani átlag (súlyozatlan, súlyozott), Harmónikus átlag (súlyozatlan, súlyozott), Mértani átlag (súlyozatlan, súlyozott), Kronológikus átlag, Négyzetes átlag (súlyozatlan, súlyozott)

Helyzeti középértékek: Módusz, Medián

11. Számtani átlag értelmezése, kiszámítása

Az adatok olyan középértéke, melyet az adatok helyébe behelyettesítve az adatsor összege nem változik. Mértékegysége az alapadatok mértékegységével egyezik meg.

Súlyozatlan számtani átlag: akkor alkalmazzuk, ha az adatok gyakorisága egy vagy azonos. Teljes sokaság értékének és az elemszámnak a hányadosa.

Súlyozott számtani átlag: Az átlag értékét a súlyok aránya befolyásolja.

12. Mértani átlag jelentése, kiszámítása

A fejlődés átlagos ütemét kívánjuk meghatározni. Egyetlen átlag típus, amelynek kifejezési formája %-os. 100% felett növekedést, 100% alatt csökkenést határoz meg.

Bázis és lánc viszonyszámból számolható. Bázis viszonyszámból: n-1 -edik gyök alatt az utolsó bázis viszonyszám. Lánc viszonyszámból: n-edik gyök alatt a láncviszonyszámok szorzata

13. Harmonikus átlag jelentése, kiszámítása

Akkor használjuk, ha teljesítményre vonatkozó adatok állnak rendelkezésünkre. Mértékegysége az alapadatok mértékegységével egyezik meg. Súlyozatlan harmonikus átlag: Fordított intenzitási viszonyszámok átlagolására használható. Az átlagolandó értékek reciprok értéke átlagának a reciproka. Súlyozott harmonikus átlag: Ha súlyként a viszonyszám számlálója van megadva.

14. Kronologikus átlag jelentése, kiszámítása

Állapot idősor átlagolására szolgál, ahol az adatok egyenlő időközökben állnak rendelkezésre.

Az adott időszak záróértéke megegyezik a következő időszak nyitóértékével.

Mértékegysége az alapadatok mértékegységével egyezik meg.

Az első és utolsó időszak értékének a felét vesszük, melyhez a köztes időszak értékeit adjuk hozz. Ezen összeget osztjuk a vizsgált időszak -1 értékével.

15. Medián és módusz jelentése, kiszámítása

Medián a nagyság szerint sorba rendezett statisztikai sor középső eleme. Páratlan tagszám esetén a középső elem, míg páros tagszám esetén a két középső tag számtani átlaga. Mértékegysége az alapadatok mértékegységével egyezik meg.

Módusz a vizsgált sokaságban leggyakrabban előforduló elemértéket jelöli. Mértékegysége az alapadatok mértékegységével egyezik meg. Nem mindig létezik, nem mindig lehet egyértelműen meghatározni.

16. Mit nevezünk középeltérésnek? Kifejezési formája.

Meghatározza, hogy az alapadatok a medián értékétől abszolútértékben átlagosan mennyivel térnek el. Kifejezési formája: az alapadatok mértékegységétől függ.

17. Mit nevezünk abszolút átlageltérésnek? Kifejezési formája.

Meghatározza, hogy az alapadatok az átlagtól átlagosan abszolútértékben mennyivel térnek el. Kifejezési formája: az alapadatok mértékegységétől függ.

18. Mit nevezünk szórásnak? Kifejezési formája.

Megmutatja, hogy az alapadatok az átlagtól átlagosan mennyivel térnek el. Kifejezési formája: az alapadatok mértékegységétől függ.

19. Mit nevezünk varianciának? Kifejezési formája.

A számtani átlagtól számított eltérések négyzetének az átlaga. Egyedüli szóródási mutató, amelynek mértékegysége nem értelmezhető. A szórás mutató kiszámításához használjuk.

20. Mit ért relatív szórás alatt? Milyen értékeket vehet fel?

A számtani átlaghoz viszonyítva fejezi ki a szóródás mértékét. Kifejezési formája: %-os. Értéke lehet 100% feletti is. Jellemzése: 0 – 10% homogén, 10 – 20% közepesen változékony, 20 – 30% erősen változékony, 30% fölött szélsőségesen ingadozó (az átlag nem alkalmas a sokaság jellemzésére).

21. Sorolja fel a szóródás mutatóit.

Szóródás terjedelme, középeltérés, abszolút átlageltérés, szórás, variancia, relatív szórás

22. Mit ért értékindex alatt? Milyen értékeket vehet fel? Ezeknek mi a jelentése? Kifejezési formája?

Megmutatja, hogy a bázisidőszakhoz képest a tárgyidőszakra hogyan változik az árbevétel. Az értékindexnél meghatározott változást az ár és volumenindexszel lehet magyarázni. Kifejezési formája: %-os. 100% felett növekedést, 100% alatt csökkenést mutat.

23. Mit ért tárgy időszaki árindex alatt? Milyen értékeket vehet fel? Ezeknek mi a jelentése? Kifejezési formája?

A tárgy időszaki mennyiségek mellett az árak változása hogyan befolyásolja az árbevétel változását. Kifejezési formája: %-os. 100% felett növekedést, 100% alatt csökkenést mutat.

24. Mit ért bázis időszaki árindex alatt? Milyen értékeket vehet fel? Ezeknek mi a jelentése? Kifejezési formája?

A bázis időszaki mennyiségek mellett az árak változása hogyan befolyásolja az árbevétel változását. Kifejezési formája: %-os. 100% felett növekedést, 100% alatt csökkenést mutat.

25. Mit ért bázis időszaki volumenindex alatt? Milyen értékeket vehet fel? Ezeknek mi a jelentése? Kifejezési formája?

A bázis időszaki árak mellett a mennyiség változása hogyan befolyásolja az árbevétel változást. Kifejezési formája: %-os. 100% felett növekedést, 100% alatt csökkenést mutat.

26. Mit ért tárgy időszaki volumenindex alatt? Milyen értékeket vehet fel? Ezeknek mi a jelentése? Kifejezési formája?

A tárgy időszaki árak mellett a mennyiség változása hogyan befolyásolja az árbevétel változást. Kifejezési formája: %-os. 100% felett növekedést, 100% alatt csökkenést mutat.

27. Mit ért Fisher-féle árindex alatt? Milyen értékeket vehet fel? Ezeknek mi a jelentése? Kifejezési formája?

Az árak befolyásoló szerepének meghatározására szolgál. Kifejezési formája: %-os. 100% felett növekedést, 100% alatt csökkenést mutat.

28. Mit ért Fisher-féle volumenindex alatt? Milyen értékeket vehet fel? Ezeknek mi a jelentése? Kifejezési formája?

A mennyiségek befolyásoló szerepének meghatározására szolgál. Kifejezési formája: %-os. 100% felett növekedést, 100% alatt csökkenést mutat.

29. Határozza meg az értékindex 3 visszaellenőrzési lehetőségét %-ban és a vissza-ellenőrzését Ft-ban.

%-ban: $I_v = I_p^0 * I_q^1$; $I_v = I_p^1 * I_q^0$; $I_v = I_p^F * I_q^F$

Ft-ban: $K_v = K_p^0 + K_q^1$; $K_v = K_p^1 + K_q^0$

30. Sorolja fel az értékindex-kör lehetséges mutatóit.

Értékindex, tárgy időszaki volumenindex, bázis időszaki volumenindex, bázis időszaki árindex, tárgy időszaki árindex, Fisher-féle volumenindex, Fisher-féle árindex, egyedi árindex, egyedi volumenindex, egyedi árindex