Ezen értekezést a Debreceni Egyetem Természettudományi Doktori Tanács Matematika- és Számítástudományok Doktori Iskola Matematika–didaktika programja keretében készítettem a debreceni Egyetem természettudományi doktori (PhD) fokozatának elnyerése céljából.
Debrecen, 2011. február 28.

Dobos Sándor, jelölt

Tanúsítom, hogy Dobos Sándor doktorjelölt 2009-2011 között a fent megnevezett Doktori Iskola Matematika–didaktika programjának keretében irányításommal végezte munkáját. Az értekezésben foglalt eredményekhez a jelölt önálló alkotó tevékenységével meghatározóan hozzájárult. Az értekezés elfogadását javasolom.
Debrecen, 2011. február 28.

Dr. Freud Róbert, témavezető

Felkészítés a matematikai diákolimpiára

Értekezés a doktori (Ph.D.) fokozat megszerzése
érdekében a matematika tudományágban

Írta: Dobos Sándor
matematika-fizika szakos középiskolai tanár

Készült a Debreceni Egyetem matematika doktori iskolája
matematika-didaktika programja keretében

Témavezető: **Dr. Freud Róbert** egyetemi docens

A doktori szigorlati bizottság elnöke:
Dr. Gaál István egy. tanár ....

A doktori szigorlati bizottság tagjai:
Dr. Csirmaz László egy. docens ....
Dr. Kántor Sándorné egy. adjunktus ....

A doktori szigorlat időpontja: 2010. szeptember 28.

Az értekezés bírálói:
Dr. ....
Dr. ....
Dr. ....

A bírálóbizottság elnöke:
Dr. ....
A bírálóbizottság tagjai:
Dr. ....
Dr. ....
Dr. ....
Dr. ....

Az értekezés védésének időpontja: ....

Köszönetnyilvánítás

Az olimpiai felkészítés munkájába Reiman István tanár úr hívott meg. Pártfogása, szakmai segítsége sokat jelentett. Nehéz méltó módon hálát adnom neki.

Ezúton is szeretnék köszönetet mondani témavezetőmnek, Freud Róbert tanár úrnak.

Köszönettel tartozom feleségemnek és családomnak, akik lehetővé tették tanulmányaimat.

Tanártársaim és barátaim támogatását is végig érezhettem.

A disszertáció előzetes vitájára Kántor Sándorné tanárnő készített referensi véleményt. Alapos munkáját köszönöm, javaslatainak nyomán tartalmi és formai javításokat végeztem.

Dobos Sándor

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés

2009 nyarán volt az 50. Nemzetközi Matematikai Diákolimpia (International Mathematical Olympiad, röviden IMO). A középiskolásoknak rendezett nemzetközi tanulmányi versenyek közül ez a legpatinásabb rendezvény. A részt vevő országok száma elérte a százat. Ezen kerek évforduló alkalmából igyekezünk áttekinteni a magyarországi felkészítő munkát. Az utóbbi 14 évben a csapat felkészítőjeként, illetve kísérőjeként szerzett tapasztalataimat szeretném összegezni. Ezt a többéves munkát tekintem az igazi „disszertációnak", jelen értekezés ennek keresztmetszetét adja.

A 2. és 3. fejezetben sorra vesszük a nem szorosan matematikai jellegű dolgokat. Ehhez jó irányt mutat Reiman István és a szerző, Dobos Sándor könyve [12], amelynek 2. fejezete részletesen taglalja a nemzetközi versenyek helyét a matematikai nevelésben. Bemutatjuk a verseny rövid történetét, hogyan változott és alakult ki a jelenlegi szerkezete. Az IMO, az arra való felkészülés szinte külön iskolát teremtett. Sokrétű hatása van a matematikai tehetséggondozásra. Az 50 év elég hosszú idő, hogy komolyabb következtetéseket vonhassunk le a versenyzők bemutatásánál. A felkészítés munkáját piramisként képzelhetjük, a fiatalabb korosztályokat szélesebb körben kell elérni. Magyarországon egyedülállóan sokszínű a versenyek palettája, az eredményesen szereplő diákok jutnak el a szűkebb körben folyó felkészítésre, amely már az olimpiai csapat szereplését segíti. A magyarországi felkészítést összevetjük más országokban folyó munkával.

A további három fejezet a felkészítés matematikai részét mutatja be. A tehetséges diákok megtalálásához megfelelő feladatok kellenek, az ügyesebb diákok hamar átlépik a középiskolai példatárak határait. A 4. fejezetben két szinten mutatunk be a szerző által összeállított, illetve kitalált feladatsort. Az első a rendezés fogalmának elmélyítését, annak sokoldalú megközelítését célozza. A kisebb-nagyobb relációból indulva a matematika különböző ágait érintjük. Ez a rész a szerző

[2] cikkében került publikálásra. A második a szűk olimpiai csapat felkészítő anyaga. Bemutatjuk, hogyan használható a kettősviszony versenyfeladatok megoldása során. Az Erdős Pál tehetséggondozó iskolában tartott foglalkozások és előadás során formálódott ez az anyag, amely a szerző [4] cikkében található, és részletes iskolai feldolgozása a [15] honlapon elérhető.

Az 5. fejezetben olyan feladatokat mutatunk be, amelyek a szerző önálló ötleteiből születtek és hazai, illetve nemzetközi versenyeken szerepeltek.

A 6. fejezet a 2001 és 2010 közötti évek hazai olimpiai válogatóversenyeinek áttekintése. Az IMO rendszernek megfelelően négy témakör szerint csoportosítva haladunk: algebra, geometria, kombinatorika és számelmélet. Az első öt év anyaga teljes részletességgel megjelent a [6] kiadványban. A disszertáció végén található Függelékben közöljük tematikusan rendezve a tíz év összes feladatát.

2. A Nemzetközi Matematikai Diákolimpia (IMO) bemutatása

Az első diákolimpiát Románia szervezte 1959-ben. Eleinte szocialista országok szűk körű versenye volt. A résztvevő országok sora évről évre bővült, a 2009-es 50. olimpián lépte át a százat. Ez a tekintélyes szám mutatja, igazi világversenyről beszélhetünk. A kontinensek közül csak Afrika nem képviselteti magát lakosainak számához viszonyítva arányosan, ámbár az utóbbi években egyre több afrikai ország is csatlakozik.

Maga a verseny két versenynapból áll, mindkét napon 3–3 feladatot kell megoldani négy és fél óra alatt. A diákok anyanyelvükön írhatják a dolgozatokat. A csapatvezető és helyettese, valamint a szervező ország által felkért koordinátorok együtt határozzák meg a dolgozatra adható pontszámot. Minden feladat 7 pontot ér. Második megoldásra, általánosításra nem lehet további plusz pontokat kapni. A verseny egyéni, de a csapat tagjainak összpontszámát tekintve az országok eredménylistája is érdekes. A csapat létszáma kezdetben 8 fő volt. 1982-ben hazánk rendezte az olimpiát Keszthelyen, erre csak 4 fős csapatokat hívtak meg. 1982 után állandósult, hogy minden ország legfeljebb 6 diákot indíthat.

A versenyt követő napokon a diákok számára kirándulásokat szerveznek, majd következik az ünnepélyes eredményhirdetés, ahol a résztvevők legfeljebb fele kaphat érmet. Az érmesek közt az arany, ezüst és bronz aránya megközelítőleg 1:2:3. Ez a rendszer sok diáknak ad szép eredményt, nem „célfotó” dönt, és a sportban megszokott századmásodperces különbségek itt nem teszik egyik versenyzőt a másik elé. Aranyérmet nagyon nehéz szerezni, a többszörös aranyérmeseket pedig világszerte ismerik. Hazánk lélekszámához viszonyítva kiemelkedően szerepelt az olimpiákon.

Az IMO történetében rengeteg érdekességet említhetnénk, az eredmények elemzése, a különböző helyszínek bemutatása több könyvet is megtöltene. Mivel célunk a felkészítés elemzése, ezért rövid bevezetésre szorítkoztunk.

2.1. Az IMO szerepe a tehetséggondozásban

A diákolimpia szerepe a tehetséggondozásban sokrétű. Nemzetközi viszonylatban tekintve sok ország számára a matematikaverseny mintája lett az olimpia, főleg ott, ahol a versenyeknek nem volt akkora hagyománya. Hazánkban 1894 óta rendeznek matematika versenyt, ennek kezdetben báró Eötvös József, majd később 1949-től Kürschák József lett névadója. Ez a verseny bő fél évszázaddal megelőzte a diákolimpiát, szinte mintaként szolgált. A népszerű matematikai tesztversenyeknek igazi ellenpontja az olimpia által meghatározott stílus; hosszú idő van kevés feladatra. Van idő az elmélyedésre, és ez részletes indoklásra, megoldásra sarkallja a diákokat.

A nemzetközi szerep másik oldala, hogy az országok tantervei között bizony lényeges eltérések vannak. Erre jó példa, hogy elemi geometriát középiskolában pl. Angliában, Franciaországban alig tanítanak. Romániában a középiskolában is tanítanak algebrai struktúrákat, csoportokat, gyűrűket, míg ez például hazánkban is egyetemi tananyagnak számít. Az olimpia által érintett témakörök irányadók egy nemzetközi standard tantervi kerethez, még ha csak íratlan formában is.

Az IMO-n elért eredmény nemzetközi szintű referencia. Egy sikeres olimpiai szereplés nagyon komoly indítást adhat a jó értelemben vett tudományos karrierhez. Kutatói, tanulmányi ösztöndíjak pályázatának elbírálásánál egyik döntő érv lehet egy szépen fénylő olimpiai érem.

Hazai viszonylatban nézve az olimpa motiváció és mérce. A tehetséggondozó mozgalmat sokan a versenyekkel azonosítják, és ennek a versenyéletnek a csúcsaként tekinthetünk a diákolimpiára. Az orság legjobbjai összehasonlíthatják problémamegoldó képességüket a világ legjobbjaival. Az IMO feladatok nehézsége olyan mérce, amely nem engedi lankadni az ország legjobbjait, akiknek hazai körökben kevesebb a riválisa.

A motiváció talán a legfontosabb szerep. A diákolimpia hatása az országot képviselő 6 tagú csapatnál sokkal szélesebb réteget serkent komoly tanulásra. Ez a komoly tanulás és felkészülés ad igazi értelmet a versenynek. Nagyon nagy szükség van színvonalas szellemi műhelyekre, ott dolgozó felkészült tanárokra és lelkes, érdeklődő diákokra.

2.2. A magyar versenyzők áttekintése

Az IMO történetét feldolgozó eddigi legátfogóbb mű [12] tartalmazza a 2003-as évvel bezárólag a versenyzőket, eredményeiket. A 2004–2010 közötti hiányzó időszak csapatait bemutatjuk. Az év mellett találjuk a vendéglátó várost, illetve országot. A névsorban a név után következik a diák évfolyama, iskolája és elért eredménye. Reiman István korábbi [13] könyve több oldalról is vizsgálja a versenyzőket, az általa megjelölt szempontok alapján kiegészítve feldolgozzuk az első 51 évet.

2004 Athén, Görögország

1. Egri Attila, Hajdúszoboszló, Hőgyes E. Gimn. III. díj
2. Hubai Tamás, Budapest, Fazekas M. Gimn. II. díj
3. Kocsis Albert Tihamér, Budapest, Fazekas M. Gimn. II. díj
4. Pach Péter Pál, Budapest, Fazekas M. Gimn. I. díj
5. Paulin Roland, Budapest, Fazekas M. Gimn. II. díj
6. Rácz Béla András, Budapest, Fazekas M. Gimn. I. díj

2005 Merida, Mexikó

1. Erdélyi Márton, Budapest, Fazekas M. Gimn. II.díj

2. Jankó Zsuzsanna, Szeged, Radnóti M. Gimn, II. díj
3. Mánfay Máté, Budapest, Fazekas M. Gimn. III. díj
4. Paulin Roland, Budapest, Fazekas M. Gimn. I. díj
5. Steller Gábor, Budapest, Radnóti M. Gimn. II. díj
6. Strenner Balázs, Székesfehérvár, Teleki B. Gimn. I. díj

2006 Ljubljana, Szlovénia

1. Erdélyi Márton, Budapest, Fazekas M. Gimn. II. díj
2. Jankó Zsuzsanna, Szeged, Radnóti M. Gimn, II. díj
3. Kis Gergely, Budapest, Fazekas M. Gimn. II. díj
4. Nagy Csaba, Budapest, Fazekas M. Gimn. II. díj
5. Paulin Roland,Budapest, Fazekas M. Gimn. II. díj
6. Tomon István, Budapest, Fazekas M. Gimn. III. díj

2007 Hanoi, Vietnám

1. Gyenizse Gergely, Kiskunfélegyháza, Szilágyi E. Gimn. II. díj
2. Hujter Bálint, Budapest, Fazekas M. Gimn. II. díj
3. Korándi Dániel, Budapest, Fazekas M. Gimn. II. díj
4. Lovász László Miklós, Budapest, Fazekas M. Gimn. II. díj
5. Nagy Csaba, Budapest, Fazekas M. Gimn. II. díj
6. Szűcs Gábor, Miskolc, Földes F. Gimn. dicséret

2008 Madrid, Spanyolország

1. Eisenberger András, Budapest, Fazekas M. Gimn. II. díj
2. Kiss Viktor, Budapest, Fazekas M. Gimn. II. díj
3. Korándi Dániel, Budapest, Fazekas M. Gimn. II. díj
4. Kornis Kristóf, Budapest, Fazekas M. Gimn. III. díj
5. Lovász László Miklós, Budapest, Fazekas M. Gimn. I. díj
6. Tomon István, Budapest, Fazekas M. Gimn. I. díj

2009 Bréma, Németország

1. Éles András, Debrecen, Fazekas M. Gimn. II. díj
2. Kornis Kristóf, Budapest, Fazekas M. Gimn. III. díj
3. Nagy Dániel, Budapest, Fazekas M. Gimn. III. díj
4. Nagy János, Budapest, Fazekas M. Gimn. II. díj
5. Szűcs Gergely, Szeged, Radnóti M. Gimn. III. díj
6. Tomon István, Budapest, Fazekas M. Gimn. I. díj

2010 Asztana, Kazahsztán

1. Bodor Bertalan, Budapest, Fazekas M. Gimn. III. díj
2. Dankovics Attila, Budapest, Veres Péter Gimn. II. díj
3. Éles András, Debrecen, Fazekas M. Gimn. II. díj
4. Mészáros András, Győr, Révai M. Gimn. dicséret
5. Nagy Donát, Szeged, Radnóti M. Gimn. I. díj
6. Nagy János, Budapest, Fazekas M. Gimn. I. díj

Magyarország az eddig megrendezésre került 51 IMO közül 50-en vett részt. A 20. jubileumi olimpiát Bukarestben szervezték, ezen politikai okokból nem vettünk részt. A távolmaradás indítékát nem itthon kell keresni, a Szovjetunió és az NDK csapata sem vett részt.

Eddig 336 magyar versenyző volt, közülük 325 fiú és 11 lány. Itt azokat a versenyzőket, akik többször is indultak, annyiszor számoltuk, ahány versenyen ott voltak. Közülük is meg kell említeni Lovász Lászlót és Pelikán Józsefet, akik 1963-ban elsős gimnazistaként már a csapat tagjai voltak és mindketten négy olimpián vettek részt. A megszerzett arany, ezüst és bronzérmek száma 77, 143 és 80, dicséretet kapott 5 versenyző. A versenyzők közül a lányokat név szerint is bemutatjuk feltüntetve az olimpiájuk évszámát: Szendrei Ágnes 1970; Csákány Rita 1982; Bán Rita 1985; Csörnyei Marianna 1993 és 1994; Gyarmati Katalin 1996; Győri Nikolett 2000; Kovács Erika Renáta 2001 és 2002; Jankó Zsuzsanna 2005 és 2006.

A vizsgált időszakban a versenyzőket adó iskolák városai a következők, mindegyik mellett feltüntetve a versenyzők száma:

Budapest 258; Celldömölk 1; Debrecen 10; Győr 11; Hajdúszoboszló 1; Kaposvár 2; Kiskunfélegyháza 1; Miskolc 9; Mosonmagyaróvár 4; Nagyatád 2; Pápa 2; Pécs 1; Siófok 1; Sopron 2; Szeged 20; Székesfehérvár 5; Szombathely 3; Tatabánya 3.

Ehhez a listához feltétlenül hozzá kell fűznünk, hogy nem a tehetséges diákok országos eloszlását tükrözi. A budapesti kiugróan magas szám főleg annak köszönhető, hogy a vidéki kiemelkedően jó diákok középiskolás korukban már vállalják a kollégiumban való lakást. Így a budapesti iskolák és közülük is kiemelten a Fazekas Mihály Gyakorlóiskola speciális mtematika tagozata a matematikai tehetségek központjává vált. Az országos eloszlást jobban tükrözné a diákok születési helye szerinti feltérképezése, ilyen adatgyűjtés eddig még nem történt.

Az IMO hivatalos honlapján [19] található „HALL OF FAME" részben összegyűjtötték mindazon versenyzőket, akik aranyérmet szereztek. Közülük azon magyar versenyzők, akiknek három aranyérmet sikerült elérni: Lovász Lászó, Pelikán József, Rácz Béla András, Terpai Tamás. Két aranyérmes: Bollobás Béla, Burcsi Péter, Gyenes Zoltán, Frenkel Péter, Kós Géza, Lakos Gyula, Lippner Gábor, Kollár János, Pap Gyula, Ruzsa Imre, Tomon István.

Noha az IMO hivatalosan egyéni verseny, a csapatok összpontszáma alapján az országok sorrendje is megállapítható. Az eddigi 51 versenyen a magyar csapat helyezéseit mutatjuk be az alábbiakban:

1. helyezés: 6 olimpián

2. helyezés: 9 olimpián

3. helyezés: 8 olimpián

4–10. helyezés: 18 olimpián

11–20. helyezés: 8 olimpián

21–30. helyezés: 1 olimpián

Mivel az első 20 olimpián húsz alatt volt a résztvevők száma, az utóbbi években pedig 90 felett, sőt a 100-at is eléri, ezért a csapat eredményének értékelésekor ezt is feltétlenül figyelembe kell venni. Kiemelkedően jó szereplés kell az utóbbi években ahhoz, hogy a csapat az első 10-be kerüljön.

A csapatok eredményét befolyásolja az adott ország közoktatásának általános helyzete, illetve a tehetségekkel való külön foglalkozás. Kívánjuk, hogy mindkét téren Magyarországon történjen előrelépés, vagy legalább az eddigi szintet sikerüljön tartani.

3. Az IMO-ra való felkészítés

Magyarország lélekszámához viszonyított teljesítménye az olimpiákon kiemelkedően jó. Ennek sok oka van. A matematikaversenyeknek régi hagyománya van, az oktatási rendszerben a matematika kiemelt szerepet kap, meghatározó tudós egyéniségek kiváló példát mutattak, lelkiismeretes tanárok áldozatos munkát végeztek. Feltétlenül meg kell említeni a Középiskolai Matematikai Lapokat, amely országos matematikai közéletet teremt több mint 110 éve a középiskolás diákok között. Ezek adják a legszélesebb értelemben vett felkészítést. Egyre szűkülő körönként haladunk. A továbbiakban bemutatunk olyan tehetséggondozó műhelyeket, amelyek az érdeklődő diákokkal foglalkoznak. A tanulás egyik motivációja a versenyen való jó szereplés. A versenyek segítenek kiválasztani a legjobbakat, akik az IMO-n képviselik az országot. A versenyek bemutatása után rátérünk magára a csapat felkészítésére. Legvégül néhány külföldi példát mutatunk be a csapat felkészítésére a nemzetközi összehasonlítás érdekében.

A magyarországi matematikai tehetséggondozó műhelyek és versenyek részletes bemutatását találhatjuk a matematikatanárok 50. Rátz László Vándorgyűlése alkalmából kiadott „Cserepek" című könyvben [3].

3.1. Tehetséggondozó műhelyek

Magyarországon a finanszírozási nehézségek ellenére is még működnek tehetséggondozó műhelyek. Ezek különböző életkorú diákokat céloznak meg, és szintjük is meglehetősen változó. Itt azokat vesszük sorra, amelyek az olimpikonok visszajelzései alapján felkészítésükben szerepet játszottak.

Pósa Lajost szinte minden olimpikon megemlíti tanárai között. A tanár úr 12–13 éves korú diákoknak indítja táborait, melyek többnyire hétvégi táborok. Ezekben a diákok kis csoportokban gondolkoznak a problémákon. A feladatok összeállítása nagyon átgondolt, tudatos, építkező. A Varga Tamás által indított felfedeztető matematikatanítás és a sok játék teszi varázslatos matematikai élménnyé Pósa tanár úr táborait. Külön ki kell emelni, hogy ezek a táborok nem versenyelőkészítők, a fókuszban elsősorban maga a matematika, a gondolkozás, a felfedezés áll.

MaMuT tábort rendeznek nyaranta augusztus első hetében a versenyeken jól szereplő diákok 5–9. évfolyamai számára. A tábor helyszíne Mátrafüred, de nevét nem a közeli Gyöngyös múzeumában található mamut csontvázról kapta, hanem a **Ma**tematikai **Mu**latságok **T**ábora elnevezés ihlette. Az egy hetes tábor délelőttjein a diákok két darab másfél órás matematikaórán vesznek részt, melyet kiváló tanárok tartanak. Az ország legjobb diákjai itt „együtt járnak iskolába".

A balatonberényi tábort a Zalamat Alapítvány működteti. Nyári egy hetes tábor, melyben a nívós oktatáshoz hozzájárul, hogy az országos olimpiai szakkörhálózat tanárai is vezetnek foglalkozásokat.

A KöMaL ankét keretén belül a diákok kiemelkedően jó előadásokat hallgathatnak. Ezeket gyakran egyetemi oktatók, kutatók tartják. A középiskolás korosztály matematika iránt érdeklődő csapatának országos seregszemléje az ankét. A KöMaL pontversenyéből egymás nevét látó, egymással rivalizáló diákok személyesen megismerkedhetnek.

Speciális matematika tagozatos iskolák 1962 óta működnek Magyarországon. Manapság vannak köztük 6 és 4 évfolyamosak. Az órakeretek is változnak iskolánként heti 6–8 óra közt. A „specmat" tanterve jóval gazdagabb, mint a Nemzeti Alaptanterv. Nem véletlen, hogy az olimpiai csapatba szinte minden diák ezekből az osztályokból érkezik.

A Veszprémben működő Pannon Egyetem komolyan felkarolta a középiskolás tehetséggondozást. Erdős Iskola néven évente öt hétvégére hirdetnek foglalkozásokat, alkalmanként 7 darab másfél órás matematika órával. Az Erdős Iskola eleinte Fonyódon indult, majd Veszprémbe tette át székhelyét. Eleinte a dunántúli iskolások összegyűjtése volt a cél, az utóbbi években Szolnokon is beindult a munka.

3.2. Versenyek

Magyarországon rengeteg verseny van. Ezek közül itt csak azokat említjük meg, amelyek országos szintűek. Meggyőződésem, hogy az olimpiai felkészítésben komoly szerepe van már az általános iskolai versenyeknek. A Zrínyi Ilona tesztverseny például tízezrével mozgatja meg a kisdiákokat, sikerélményhez juttat, felkelti a matematika iránti érdeklődést, a matematikát népszerűsíti. Ez egy széles bázist teremt a komolyabb versenyek előfutáraként. A versenyek bemutatásánál a következő szempontokat említjük: mely iskolai évfolyamokat érinti; milyen a verseny jellege; a verseny szervezője. Igyekeztünk a célzott korosztályok szerinti sorrendet tartani a felsorolásban.

1. Zrínyi Ilona matematikai tesztverseny; 3–8; két fordulós tesztverseny; Mategye Alapítvány, Kecskemét
2. Kalmár verseny; két fordulós; TIT, Budapest
3. Varga Tamás verseny; 7–8; három fordulós; Oktatási Minisztérium megbízásából a Hétvezér Ált. Isk. Székesfehérvár
4. Bolyai csapatverseny; 5–8; két fordulós, 4 fős csapatok vesznek részt, tesztverseny; Nagy-Baló András és Tassy Gergely matematikatanárok
5. Kenguru verseny; 3–12; egy fordulós tesztverseny; Zalamat Alapítvány, Nagykanizsa
6. Abacus; 3–8; levelezős verseny 8 fordulóban; Mategye Alapítvány és Bolyai János Matematikai Társulat
7. Gordiusz verseny; 9–12; két fordulós tesztverseny; Mategye Alapítvány, Kecskemét
8. Nemzetközi Magyar Matematika Verseny; 9–12; felváltva rendezi az anyaország és valamelyik határon túli régió; Magyarországon belül meghívásos rendszerű

9. Arany Dániel verseny; 9–10; három forduló, három kategória; Oktatási Minisztérium megbízásából Bolyai János Matematikai Társulat

10. OKTV; 11–12; a szakközépiskolás és gimnáziumi kategóriában három, a speciális matematika tagozaton két fordulós; Oktatási Hivatal

11. Kürschák József verseny; felső korhatár az első éves egyetemi évfolyam; egy forduló; Bolyai János Matematikai Társulat

12. KöMaL; 8–12; levelezős verseny 9 fordulóban, négy kategóriában; Matfund Alapítvány és Bolyai János Matematikai Társulat

13. Két olimpiai válogatóverseny, az első a Surányi János emlékverseny; 10–12; olimpiai rendszer (3 feladat négy és fél órára, semmilyen segédeszköz nem használható); Bolyai János Matematikai Társulat

14. Gillis–Turán verseny; Magyarország és Izrael 6–6 fős csapatainak egyéni és csapatversenye, melyet a két ország államközi egyezménynek megfelelően felváltva rendez.

15. Közép-Európai Matematikai Olimpia (MEMO); 11–12; egyéni és csapatverseny, országonként 6 fős csapat részvételével; Zalamat Alapítvány és Bolyai János Matematikai Társulat

3.3. Az IMO csapat felkészítése

A magyarországi felkészítő munkát több évtizeden át hűségesen és magas színvonalon végezte Hódi Endre és Reiman István. A csapat vezetője jelenleg Pelikán József, aki diákként négy olimpián vett részt, 20 éve a nemzetközi zsűri tagja, sőt 2002-2010 között az olimpiát irányító Advisory Board elnöke volt. 1997 óta helyettese és a felkészítést végző tanár Dobos Sándor. A szervezési és háttérmunkák lelkiismeretes elvégzéséért köszönet illeti a Bolyai Társulat munkatársait.

Egyre több ország komoly áldozatokat hoz a felkészítés érdekében, így nehezebb az élmezőnyben maradni. Hagyományaink ápolása mellett szükségünk van nekünk is az állandó megújulásra, a következő nemzedékek felnevelésére és oktatására. Az utóbbi évtizedben folyó felkészítési munkát igyekezünk a továbbiakban bemutatni; sorra vesszük a szakköröket, az edzőtáborokat. Végül számba vesszük, milyen új utak, lehetőségek vannak a felkészülésre.

Szakkörök. A szakkörökön a diákok versenyfeladatokat oldanak meg, nehezebb problémákkal találkoznak. A szakkörvezető segítséget, ötleteket ad, alternatív megoldásokat mutat. Alkalmanként egyes feladatok mélyebb matematikai hátterét bemutatja. Ez a munka az átlagos középiskolai gyakorlattól jelentősen különbözik. Nem rutinpéldák, gyakorló feladatok szerepelnek, nem villámgyors, apró ötletekre épül a munka. A szakkör a teljes tanév alatt működik általában kétheti rendszerességgel. 2002–2010 között 13 olimpiai szakkör működött országszerte, továbbá egy központi szakkör Budapesten. 2010-től kezdve Budapesten és Szegeden működik a szakkör. Egy foglalkozás 2–3 órás, egy tanévben 16–20 alkalommal. A diák és a tanár szemével a szakkörök speciális oldalai:

Diák
— személyes találkozás a régió legjobb koponyáival korosztályában
— extra motiváció és példaadás (kitartó, szívós munka; leírási stílus; új ötletek)
— nehezebb, nemzetközi szintű példák

Tanár
— különleges felkészültség; időigényes, minőségi munka
— nagy matematikai háttértudás
— tájékozottság, külföldi versenyek, szaklapok

A szakkörök számára több segédanyag készült. Például: Olimpiai feladatok [12], Válogatóversenyek [6], Feladatok a Nagyvilágból [5], a szakkörvezetők tematikus összeállításai.

Edzőtáborok. A nyári 3 hetes edzőtábor középső hetében a románokkal együtt tréningeztünk 1998–2006 között. Ott délelőttönként előadás, délután feladatmegoldás alkották a programot. A hetet közös kirándulás zárta. Ez az együttműködés az érettségi rendszer változása és anyagi okok miatt megszakadt. A téli szünetben egy hétig az angolokkal közösen edz 20 magyar diák tíz éve. A táborban minden foglalkozás angol nyelvű. Egyéni feladatmegoldás, előadások, csoportos munka zajlik egy héten keresztül. Az angol anyanyelvi közegben rengeteget tanulnak a diákok. A tábor kezdetben Budapesten volt, majd legtöbbször Tatán. Viszonzásként 2007-ben és 2009-ben 3–3 diák részt vehetett a brit csapat 4 napos edzőtáborában Cambridge-ben, amelyet a Trinity College szervezett.

Hagyományosan az olimpia előtt három hetes edzőtábor van. Délelőttönként intenzív 4–5 órás foglalkozásokkal, ahol a csapat tagjai feladatokat oldanak meg. Az utóbbi években magyarországi edzőtábort szerveztünk, amelyre a MEMO (Közép-Európai Matematikai Olimpia) csapat tagjai is eljöttek. A nyári edzőtábor munkájába korábbi olimpikonok is bekapcsolódnak. Több alkalommal besegített Kós Géza, aki a KöMaL A pontversenyének gazdájaként, az egyetemisták nemzetközi versenyének (IMC) motorjaként és nem utolsósorban az IMO problémakiválasztó bizottságának tagjaként igazi mestere a matematikának, szakembere a versenyeknek.

Új utak. Az országos szakkörhálózat működtetése nagyon nagy anyagi terhet jelentett. Sajnos az utóbbi időben az utazási költségek jelentős emelkedése miatt a szakkörökön való részvétel is csökkent. A Pannon Egyetem néhány éve elindította az Erdős Pál Tehetséggondozó Iskolát, amely egyedülálló lehetőséget teremt a matematikai tehetséggondozásra. Tanárai között ott találjuk a korábbi olimpiai szakkörök vezetőit. A tanév során 5 hétvégen igen intenzív, magas színvonalú munka folyik hétvégenként 14 órában. Mivel a nehezen szervezhető rendszeres heti szakköröknél hatékonyabb egy olimpiai csoport beindítása az Erdős Iskola keretein belül, így 2010 őszétől Veszprémben és Szolnokon is megkezdődött ez a felkészítő munka. Az internet új lehetőségeket nyit. Több olyan honlap van, amelyen nyomon követhetők különböző nemzetközi versenyek, ezek közül is kiemelkedik a következő kettő: [21] és [18]. A központi szakkör feladatanyaga a világhálón is elérhető [16].

3.4. A csapat felkészítésének nemzetközi összehasonlítása

Az olimpián részt vevő összes ország felkészítő programjának bemutatására nem vállalkozunk. Néhány ország különböző rendszerét röviden vázoljuk. Igyekeztünk szomszédos országokat, más európaiakat és különböző földrészekről valókat is válogatni. Közülük van élmezőnybeli ország: Kína, USA, és új résztvevő is, pl. Szaúd-Arábia. Az országokat ábécé sorrendben találjuk.

Kanada: Egyhetes edzőtábort tartanak januárban, kéthetes edzőtábort pedig közvetlenül az olimpia előtt.

Kínában és Észak-Koreában is külön matematikai iskolába járnak az olimpiát megelőző évben a diákok, szinte egész évben csak erre készülve.

Nagy-Britannia: Ősszel 4 napos edzőtábor van 20 meghívott diák részére a Bath-i egyetemen. Télen a magyar csapattal tréningezik egy héten át 20 diák, áprilisban Cambridge-ben edzőtáborozik 20 diák, ott két olimpiai jellegű válogatóversenyt írnak. Ennek alapján kiválasztanak 8 diákot, akik további levelezős versenyen vesznek részt.

Olaszország: Szeptemberben kb. 60 diáknak tartanak egyhetes tábort, melyen azok vehetnek részt, akik a „beugró" feladatok megoldását levélben elküldik. A januári egyhetes tábor ugyanilyen rendszerű, de jóval nehezebb feladatok megoldásával lehet bekerülni. A májusi országos verseny alapján választják ki a legjobb diákokat, akik május végén további egy hetet tréningeznek. A táborokban elhangzó előadások videofelvétele elérhető az interneten.

Románia: Májusban háromhetes edzőtábort tartanak, majd közvetlenül az olimpia előtt további egy hetet tréningeznek.

Szaúd-Arábia: Kéthetes edzőtábor júliusban, novemberben és februárban 60–40–18 diák részvételével. A három tavaszi hónapban 12 diák együtt tréningezik, majd a legjobb 8 további három hétig készül az olimpiára júniusban. A felkészítést a 2009–2010-es tanévben Romániából érkezett tanárok irányították.

Szlovákia: Nincs külön felkészítés, a tanulmányi versenyeken legjobban szereplő diákokat meghívják és egy héten át mindennap olimpiai jellegű válogatóversenyt írnak. Ennek eredménye alapján állítják össze a csapatot.

USA: Háromhetes olimpiai edzőtábort tartanak kb. 60 diák számára, ahol az olimpiai csapat mellett a fiatalabb korosztályok is részt vesznek, így évekre előre foglalkoznak a legjobbakkal.

4. Problémamegoldást fejlesztő feladatsorok

4.1. Feladatsor a tehetségek felismeréséhez, gondozásához

Ebben a szakaszban olyan feladatsor található, amely a kisebb-nagyobb reláció sokoldalú megközelítését mutatja be. A rendezés fogalmának alapos megértését szolgálja, ha többfajta környezetben találkozhatnak a diákok ugyanazzal a dologgal. A feladatsor elején általános iskolásoknak való problémákkal indítunk, amelyek a rendezési reláció tranzitív tulajdonságára hivják fel a figyelmet. Ezt követően a matematika különböző területein veszünk sorra problémákat. A matematikatanárok 49. Rátz László Vándorgyűlésén tartott előadásom átdolgozott változatát mutattam be a ProMath 2010-es konferenciáján. Az előadások kibővített anyaga a [2] cikk, ezen alapul az értekezés következő része.

Már egész kicsi gyermektől megkérdezhetjük, hogy két tárgy közül melyik nagyobb, két pohár közül melyikben van több víz, majd később, két szám közül melyik nagyobb. Egy matematikai reláció megismerése és az azzal kapcsolatos fogalomalkotás kezdeti lépései ezek. Később iskoláskorban összehasonlítunk törteket, gimnáziumban különböző függvények értékeit. Az összehasonlításnak újabb szintje, amikor végtelen halmazokról mondjuk, egyik nagyobb a másiknál. Az egyetemi tanulmányok része annak bizonyítása, hogy a komplex számok teste nem rendezhető.

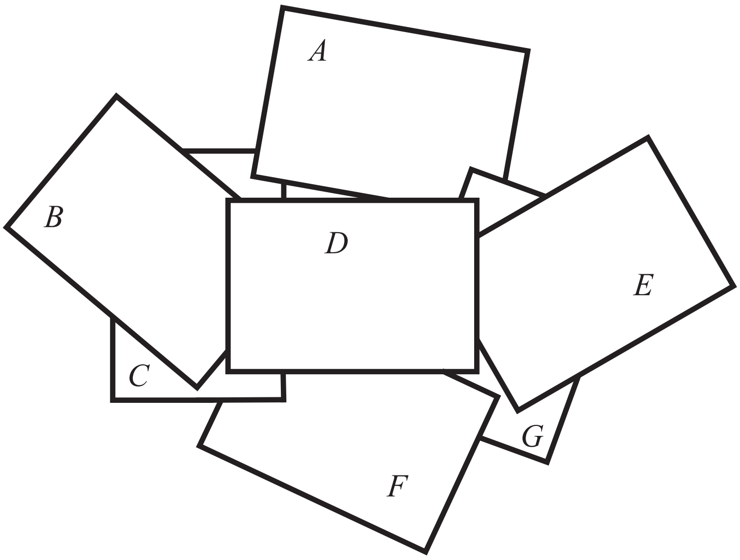
Mint látjuk, egy hosszú folyamatról van szó, nem célunk ezen ív mentén végigkövetni az oktatási folyamatot. Feladatokat fűzünk egymás után, amelyek egymásra épülve, több oldalról közelítve a kérdést, alkalmasak lehetnek a tehetséges diákokkal való foglalkozásra, a tehetségek felismerésére. A feladatokat követő megjegyzésekben igyekszünk rámutatni a didaktikai vonatkozásokra. A problémamegoldó- készség fejlesztése legjobban feladatok megoldásával érhető el, írja Arthur Engel [8], aki a német olimpiai csapat felkészítője volt hosszú éveken keresztül. A 11–20 év közötti korosztály tanítása során szerzett tapasztalatom, hogy a szisztematikus építkezés a tanítási folyamat egyik legfontosabb eleme. A feladatsor tehát nem vegyes gyűjtemény, hanem tudatos didaktikai munka eredményeként, egymásra épülő kérdésekből felépülő problémák láncolata.

A bevezető feladatokat követően először kombinatorikai, majd algebrai jellegű kérdések következnek. Ezen belül a törtek összehasonlításának mutatjuk be egy lehetséges megközelítését egyre nehezedő feladatokkal. Az egyenlőtlenségek az algebrai rész önálló fejezetét alkothatnák, ebből itt most csak a rendezési tételt érintjük, annak egy lehetséges bevezetésével. A gráfok és a geometria területéhez tartozó kérdések közül az utolsót Pach János-tól hallottam, és sikerült megtalálnom a legkisebb, $n = 5$-höz tartozó elrendezést.

Bemelegítő feladatokkal kezdünk, amelyek bárki számára elérhetőek. Az első már általános iskola alsó osztályaiban is feladható. A feladat szépsége, hogy nem tankönyvszagú példa. Anélkül, hogy nevén neveznénk, felhívhatjuk vele a figyelmet a tranzitív tulajdonságra.

4.1.1. Feladat. *Sherlock Holmes a rendőrség irodájában dolgozik egy ügyön. Felmerült a gyanú, hogy az iroda egyik alkalmazottja is belekeveredett a bűnténybe. Holmes egymás után dobja háta mögé a feljegyzéseket tartalmazó lapokat, majd egy neszt hallva hátrafordul. Az ábra mutatja, hogy helyezkedtek el a papírok a földön. Sherlock Holmes kijelenti, hogy a teremben jelenlevők között valaki gyanús. Miért?*

Jelöljük a papírokat betűkkel. Az ábra alapján meghatározható, melyik került a padlóra később. Világos, hogy az utolsó a D jelű. Ha

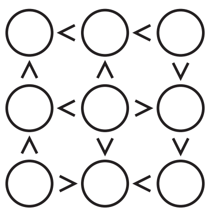
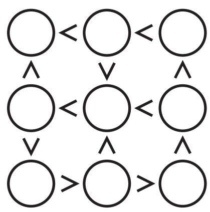


ezt eltávolítjuk, akkor a sorrendben visszafelé haladva elvehető B és E. A megmaradó négy lap keltette fel Holmes gyanúját. Mivel A alatt van C, ezért C előbb került a padlóra, mint A. Ugyanilyen érveléssel C alatt van F, F alatt G, G alatt A. Ilyen kör nem keletkezhetett.

`Megjegyzés:` A megfelelő terminológia használatát nem tartom olyan fontosnak, sokkal inkább azt, mit is jelent a tranzitivitás. Éppen ezért szükséges, hogy további példák hívják fel a figyelmet erre a tulajdonságra. Így később maguk a diákok igénylik, jó lenne ennek nevet adni. Ekkor van értelme definiálni a tranzitivitást. Ennek előkészítését szolgálja a következő két feladat.

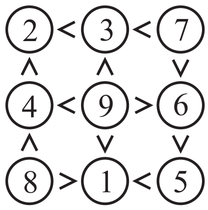
4.1.2. Feladat. *Helyezzük el az 1,2,...,9 számokat a karikákba a relációs jeleknek megfelelő módon.*

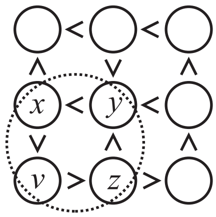
Az első ábrát sokféleképpen kitölthetjük, egy megoldást megadunk. A másodikat nem lehet megoldani. Ezt igazolhatjuk úgy, hogy a 9-et

2.1. 2.2.

sehova nem tehetjük, mivel mindenkinek van nála nagyobb „szomszédja". Másfajta érvelés a következő: az ábrában található $x < y < z < v < x$ nem lehetséges.





2.1. 2.2.

`Megjegyzés:` Noha a feladat két része első látásra hasonló, az avatott szem látja, jelentősen különböznek. Az első kifejezetten könnyű, az átlagos diáknak is sikerélményt adó feladat. Természetes kérdésként vetődik fel, hogy hány megoldás van, mivel ez jóval nehezebb, ezért későbbre tenném ennek tárgyalását, helyette a 4.1.4. feladatban találjuk a kitöltések leszámolásának egy egyszerűbb, elérhetőbb változatát.

A második rész sem nehéz. Pusztán az a tény, hogy igazolnunk kell, valami nem megoldható, mégis a diákok nagy részének már komolyabb probléma. Tapasztalatom szerint a megadott kétfajta érvelést egyaránt megtalálják a tanulók.

4.1.3. Feladat. *(a) Helyezzük el az 1,2,...,9 számokat a karikákba a megadott relációs jeleknek megfelelően.*

(b) Az 4.1.2. feladatban láttunk két ábrát, az egyik megoldható volt, a másik nem. Az (a) részben megadott ábrának van megoldása. A körök helyzetét megtartva elhelyezhető-e a 8 relációs jel úgy, hogy ne legyen megoldás?

$$\bigcirc < \bigcirc < \bigcirc > \bigcirc < \bigcirc < \bigcirc > \bigcirc > \bigcirc > \bigcirc$$

Az (a) rész talán az előző feladatnál is egyszerűbb, egy lehetséges megoldást megadunk.

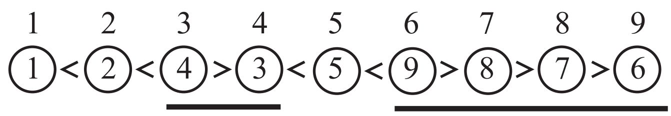
$$1 < 2 < 9 > 3 < 4 < 8 > 7 > 6 > 5$$

A (b) rész már inkább a tehetségesebb diákok megmozgatását célozza. Bemutatunk négy különböző érvelést, miért van a relációs jelek tetszőleges elhelyezése esetén megoldás.

(i) `Indukciós típus.` Írjuk a 9 számot egy-egy kártyára és tegyük őket egy dobozba. Tekintsük a bal szélső karikát. Ha mellette $<$ jel van, akkor tegyük a karikába a dobozban található legkisebb kártyát, ha $>$ a legnagyobbat. Balról jobbra haladva ismételjük ezt az algorimust, elegendő mindig csak a soron következő karikára és az utána következő relációs jelre figyelnünk. Az (a) rész mintamegoldása ezzel a módszerrel készült.

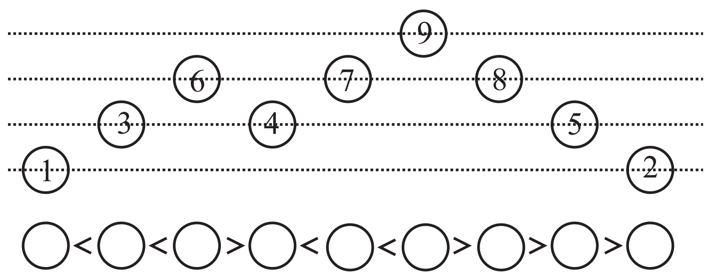
(ii) `Fordított részek.` Írjuk fel számainkat az 1,2,...,9 sorrendben. Ekkor minden köztük levő jel $<$. A relációs jelek egy adott sorozatánál húzzuk alá azokat, ahol ehhez képest fordítva áll a jel, azaz $>$ található. Azokat a köröket is aláhúzzuk, amelyeknek legalább egyik oldalán aláhúzott, azaz $>$ jel van. Így a sorban kialakulnak alá-

$$\bigcirc < \bigcirc < \underline{\bigcirc > \bigcirc} < \bigcirc < \underline{\bigcirc > \bigcirc > \bigcirc > \bigcirc}$$



húzott és nem aláhúzott részek. Tekintsük az eredeti sorrendet, és az aláhúzott részeken belül fordítsuk meg a számok sorrendjét.

(*iii*) `Domborzati térkép.` Képzeljük el a feladatot mint hegyeket és völgyeket. Vegyük az első karikát, ha utána $<$ áll, akkor a következő karikát rajzoljuk magasabbra. Ha $>$, akkor mélyebbre. Az ábránkon szaggatott vonalak jelzik a „szintvonalakat". Ezek után az 1,2,...,9 számokat írjuk be az alsó szinttel kezdve és mindig felfelé a soron következő szint karikáit feltöltve. Egy szinten belül a sorrend nem számít.



(*iv*) `Bármekkora, csak különböző legyen.` Írjunk az első karikába egy tetszőleges számot, majd vegyük sorba a karikákat és írjunk bele mindig olyan számot, hogy az előtte álló relációs jelnek megfeleljen és az összes eddigitől különbözzön. Ábránk bemutat egy ilyen

$$12 < 42 < 93 > -4 < 7 < 85 > 3 > -2 > -9$$

"megoldást". Most rendezzük számainkat növekvő sorrendbe és írjuk alájuk a sorszámukat. Minden számot a sorszámával helyettesítve egy jó megoldást kapunk, az ábra szerint.

$12 < 42 < 93 > -4 < 7 < 85 > 3 > -2 > -9$

-9	-4	-2	3	7	12	42	85	93
1	2	3	4	5	6	7	8	9

$6 < 7 < 9 > 2 < 5 < 8 > 4 > 3 > 1$

`Megjegyzés:` A feladatok egmásra épülése nagyon fontos, a szisztematikus építkezést igyekeztünk ebben a bevezető részben bemutatni. 4.1.2. sokkal könnyebb volt, mint az általa előkészített 4.1.3. Ez utóbbiban a (b) rész kérdését is természetesebben vethetjük fel az előtte levő feladatra építve. Feladatsorunkban a kérdés természetesen jöhetett elő és a bemutatott megoldások — melyeket diákjaimtól tanultam — nagyon szépek. Az indukciós gondolat csak egyfajta megoldást ad. A domborzati térkép esetén a karikák elhelyezésénél a soron következő lépésben ugorhatunk több szintet is, illetve szinteken belül változtathatjuk a sorrendet. A 4.1.2. feladatra visszatekintve a domborzati térkép gondolat megmozgathatja a fantáziánkat! Az utolsó megoldást Bárász Mihály volt diákom találta ki, aki a számítógép világában otthonosan mozog.

Li Ping Ma írja [10] könyvében, hogy a matematika egyik szépsége, ha egy feladatra különböző megoldásokat adunk. Ez a problémamegoldó képesség egyik indikátora lehet, ismereteink és feladatmegoldó készségünk fejlesztésének egyik útja.

Bevezető feladataink után a matematika különböző témaköreit érintjük, ezek közül két feladatot mutatunk be a kombinatorika területéről.

4.1.4. Feladat. *Hányféleképpen írhatjuk be az 1, 2, ...,6 számokat a karikákba a relációs jeleknek megfelelő módon?*

A 6 csak a negyedik helyre kerülhet. A maradék öt szám közül

$$\bigcirc < \bigcirc < \bigcirc < \bigcirc > \bigcirc > \bigcirc$$

hármat kiválasztva őket növekvő sorrendbe kell írni az első három karikába, a fennmaradó kettő számot csökkenő sorrendben a végére. Így a megoldások száma $\binom{5}{3} = 10$.

`Megjegyzés:` A feladatot sokféleképpen folytathatjuk. Ha karikáink sorban vannak, az esetek könnyebben áttekinthetők. A 4.1.2. feladatnál az esetek megszámolása különböző esetek aprólékos végiggondolásával végezhető el.

4.1.5. Feladat. *Hány pozitív egész szám van, amelyben a számjegyek balról jobbra szigorúan monoton csökkennek?*

Tíz számjegy van, ezek tetszőleges részhalmazát tekintve, a benne levő jegyek felhasználásával pontosan egyféle szám készíthető. Ez alól kivétel az üres halmaz és a 0-t tartalmazó egyelemű halmaz, mivel a feladat a pozitív egészek számát kérdezte. Az összes részhalmaz száma $2^{10} = 1024$, a két kivételt levonva a feladat kérdésére a válasz 1022.

`Megjegyzés:` A probléma imént bemutatott megközelítése gyors választ ad. Tanítási tapasztalatom alapján a diákok megközelítése általában a következő: számoljuk meg először az egyjegyűeket, majd a kétjegyűeket és így tovább. Így a következőt kapjuk:

$$9 + \binom{10}{2} + \binom{10}{3} + \binom{10}{4} + ... + \binom{10}{9} + \binom{10}{10}.$$

Amennyiben dolgoztunk már korábban a Pascal-háromszöggel, vagy diákjaink ismerik a binomiális tételt, akkor ez az összeg sem lesz ijesztő, hanem inkább egy jó barát. Ha a diákok ezen az úton kapják meg az eredményt, érdemes rávezetni őket az elsőnek bemutatott gondolatmenetre.

Tekintsünk néhány algebrai jellegű feladatot. Amikor egy kisgyermek ismerkedik a számokkal, első fogalmai a pozitív egészekről alakulnak ki. A rendezés könnyebb, mint a műveletek, a diákok akár leírt, akár hallott számokról általában helyesen eldöntik, melyik nagyobb. A negatív számoknál már más a helyzet, többször megfigyeltem, hogy számos diákom elbizonytalanodik, ha azt kérdezem a -34 vagy a -5 a nagyobb.

A törteknél a helyzet már más. Ezek összehasonlítása nem is olyan könnyű. A következő feladatban az összehasonlítás különböző nehézségi fokait szeretném bemutatni egyre nehezedő változatok segítségével.

4.1.6. Feladat. *Melyik nagyobb a két szám közül?*

(i) $\frac{1}{6}$ vagy $\frac{1}{7}$; ehhez elegendő a törtek elemi ismerete.

(ii) $\frac{2}{9}$ vagy $\frac{3}{8}$; hozzunk közös nevezőre.

(iii) $\frac{1234}{3456}$ vagy $\frac{2341}{4563}$; segíthet a becslés, mindkettőt összehasonlítva $\frac{1}{2}$-del hamar célhoz érünk.

(iv) $\frac{321}{654}$ vagy $\frac{312}{654}$; azonos nevező, a számlálók közti reláció megegyezik a törtekével.

(v) $\frac{321}{654}$ vagy $\frac{321}{645}$; azonos számláló, kisebb nevező nagyobb törtet ad.

(vi) $\frac{321}{654}$ vagy $\frac{322}{655}$; érdemes a konkrét számok helyett általánosabban megnézni, $\frac{a}{b}$ vagy $\frac{a+1}{b+1}$ a nagyobb.

(vii) Tegyük a négy törtet növekvő sorrendbe:

$$\frac{22^2}{33^3} \quad \frac{-22^2}{34^3} \quad \frac{(-22)^2}{35^3} \quad \frac{22^2}{(-36)^3}$$

Összetett feladat, ahol a törteket, előjeleket, hatványokat egyszerre kell figyelnünk.

4.1.7. Feladat. *(i) Móricka egyik zsebében 10 forintosok vannak, a másikban 100 forintosok. Az egyik zsebéből kivesz 3 érmét, a másikból 7-et. Hogyan tegye ezt, ha minél több pénzt szeretne elővenni?*

(ii) Tudjuk, hogy $a < b < c$ és $x < y < z$. Melyik nagyobb $ax + by + cz$, vagy $ay + bz + cx$?

(iii) Adott két valós szám a és b, melyekre $0 < a < 1$ és $b < -1$. Helyezzük el az $1, b, b^2$ és b^3 számokat a pontokkal jelölt helyre úgy, hogy a kifejezés értéke a lehető legnagyobb legyen

$$1 \cdot ... + a \cdot ... + a^2 \cdot ... + a^3 \cdot ...$$

Tanulóim gyakran kikacagnak, ha ilyen könnyű kérdéssel indítok: $3 \cdot 10 + 7 \cdot 100$ nyilván több, mint $7 \cdot 10 + 3 \cdot 100$. Az az érdekes, hogy szinte semmi több nem kell a rendezési tétel bizonyításához, mint ez az egyszerű lépés. További bevezető, illetve gyakorló kérdés lehet (ii) és (iii) a rendezési tétel megértéséhez. Az (i)-ben látott lépést kétszer alkalmazva $ax + by + cz > ay + bx + cz > ay + bz + cx$. Mivel $1 > a > a^2 > a^3$ és $b^2 > 1 > b > b^3$ ezért a kifejezés maximumát $1 \cdot b^2 + a \cdot 1 + a^2 \cdot b + a^3 \cdot b^3$ adja.

`Megjegyzés:` Amennyiben tanulóink magabiztosabban dolgoznak konkrét számokkal, mint változókkal, akkor az iménti feladatot betűk helyett feladhatjuk számokkal is.

Feladatsorunkat a gráfok és geometria témaköreivel zárjuk. A 4.1.2. és 4.1.3. feladatokban látott ábráinkat a következő módon általánosíthatjuk. Legyenek a karikák egy gráf pontjai. Amely karikák közt relációs jel van, oda helyezzünk egy irányított élt, mely a kisebbtől a nagyobb felé mutat. Így a következő kérdést vethetjük fel.

4.1.8. Feladat. *Legyen G egy n pontú irányított gráf. Számozzuk meg a csúcsokat az $1, 2, ..., n$ számokkal úgy, hogy minden él kisebb számból a nagyobb felé mutasson.*

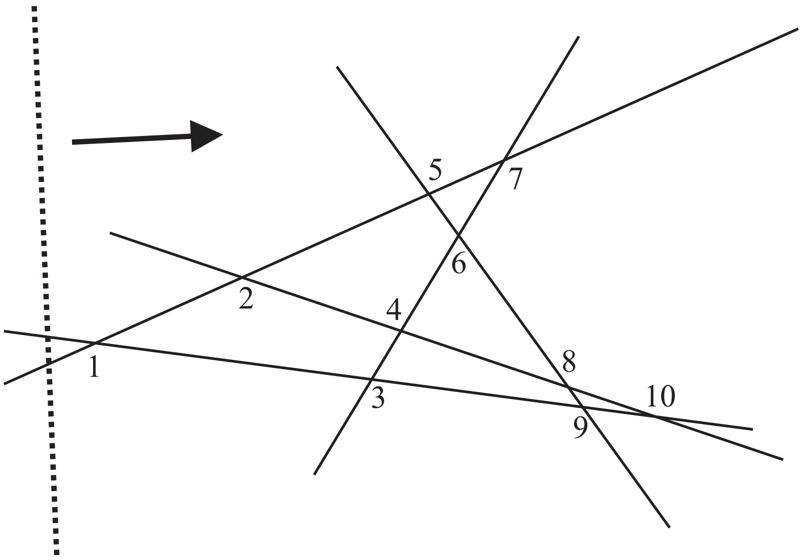
Ez a feladat sokkal komolyabban hangzik, mint a bevezetőben látott kistestvérei, de semmivel sem nehezebb. Sőt észrevehetjük, hogy már meg is oldottuk korábban. 4.1.2.-ben megtanultuk, hogy a feladat nem oldható meg, ha van irányított kör. 4.1.3. indukciós megoldása pedig minden más esetben megad egy megfelelő számozást. Az indukciós lépés kulcsmozzanata, hogy ráírjuk az egyik nyelő pontra (ebből a pontból nem indul ki él) a legnagyobb számot.

`Megjegyzés:` A feladat órai feldolgozása történhet a következő, szórakoztató módon. Írjunk fel sokféle ruhadarabot a táblára és helyezzünk közéjük irányított éleket, ha az egyiket előbb kell felvenni, mint a másikat. Például a zokniból mutat él a cipőhöz. Noha a gráf első ránézésre bonyolultnak tűnhet, azért mégis fel tudunk öltözni.

4.1.9. Feladat. *Adott a síkon n egyenes. Írjunk különböző egész számokat a metszéspontjaikra úgy, hogy minden egyenes mentén a számok szigorú monoton sorrendben legyenek.*

Tekintsünk egy olyan e egyenest, amely nem párhuzamos egyetlen olyan egyenessel sem, amely a megadott egyenesek metszéspontjai közül legalább kettőt tartalmaz. Ezzel az e egyenessel söpörjük végig a síkot, így a metszéspontok egyesével kerülnek rá, ebben a sorrendben meg is számozhatjuk őket.

`Megjegyzés:` A 4.1.3. utolsó megoldásában ismertetett ötlet itt is előjön. Ha ábránkat úgy helyezzük el egy koordinátarendszerben,



hogy a metszéspontok x koordinátája páronként különböző legyen, akkor a metszéspontok x koordinátáinak növekvő sorrendjében a pontok megszámozhatók.

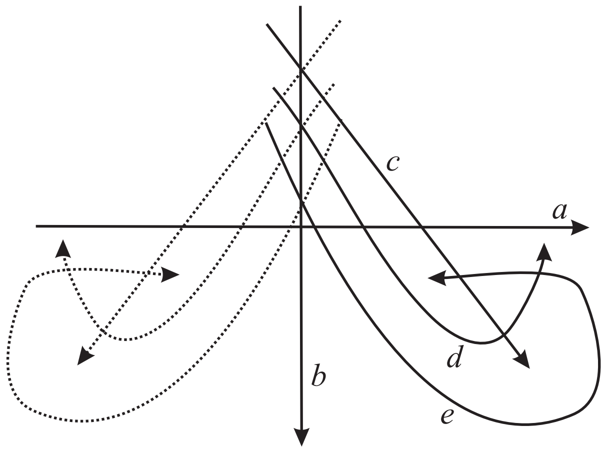
A feladat egy lehetséges általánosítása, ha egyenesek helyett pszeudoegyeneseket, illetve azok szakaszait tekintjük. Ezek egyszerű görbék, magukat nem metszik, bármely kettőnek legfeljebb egy metszéspontja lehet. Nem érinthetik egymást, mint a körök, hanem közös pont esetén elmetszik egymást, mint az egyenesek. Az első matematikus, aki a pszeudoegyenesekkel foglalkozott F. W. Levi [9].

Definíció: Tekintsük egy pszeudoegyenes két pontját, a pszeudoegyenes ezek közé eső zárt részét nevezzük pszeudoszakasznak.

4.1.10. Feladat. *Adott a síkon n pszeudoszakasz. Megszámozhatók-e a metszéspontjaik különböző pozitív egészekkel úgy, hogy a számozás mindegyik mentén szigorúan monoton legyen?*

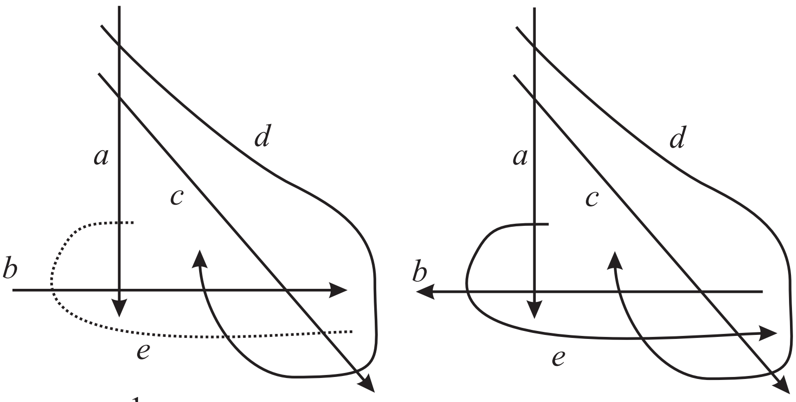
Ábránk pszeudoszakaszok egy olyan elrendezését mutatja, ahol a számozás nem végezhető el. Tegyük fel, sikerült a számozás, ekkor minden pszeudoszakaszra tehetünk egy nyilat a növekedés irányának megfelelően. Megmutatjuk, hogy a nyilak bármely irányítása esetén az ábrában kialakul irányított kör, amely a számozást lehetetlenné teszi.

Az általánosság rovása nélkül feltehető, hogy a mentén a nyíl balról jobbra mutat. Ha b fentről lefele mutat, akkor vizsgáljuk c, d, e-t, különben a maradék hármat. Ez a két eset szimmetrikus, ezért elegendő az elsőt megnézni.



Amennyiben a c, d, e bármelyike az ábrától eltérő irányba mutatna, akkor a-val és b-vel irányított kört alkotna. Más szavakkal: ha el akarjuk kerülni az irányított kört, akkor a és b iránya meghatározza c, d, e irányát. Viszont ez utóbbi három pszeudoszakasz, tehát c, d és e által meghatározott háromszög éppen egy irányított kört ad.

Ábránk mutatja, hogy a pszeudoszakaszok másként viselkednek, mint az egyenesek. Felmerül a kérdés, lehet-e 8-nál kevesebb pszeudoszakasszal ilyen elrendezést találni. Az alábbi ábrán bemutatok egy elrendezést, melyen 5 pszeudoszakasz van és nem számozható. Ezt a konstrukciót magam találtam.



1. 2.

Rögzítsük a irányát fentről lefele. Az első esetben b balról jobbra mutat. a és b meghatározza c és d irányát. Ekkor b, c és d irányított kört ad. A második esetben b jobbról balra mutat. a és b meghatározza e irányát. a és e meghatározza c és d irányát és c, d és e irányított kört ad.

`Megjegyzés:` Négy pszeudoszakasz tetszőleges elrendezése esetén a nyilak elhelyezhetők anélkül, hogy irányított kört kapnánk. Ennek bizonyítása nem olyan érdekes, mint a meglepő eredmény, hogy 5-re van számozhatatlan ábra.

Végezetül szeretnénk rámutatni néhány pontra, amelyek alátámasztják, feladatsorunk valóban a tehetségek felismerését és gondozását szolgálja. Ahhoz, hogy tehetséges gyerekeket találjunk, meglehetősen sokukkal kell foglalkoznunk, őket megszólítanunk. A bevezető rész ezt a célt szolgálja, bevonni a diákokat a munkába, **felkelteni az érdeklődést**.

Szükséges, hogy a matematika műveléséhez alapvető aritmetikai és logikai készségek rendben legyenek. A tehetséges diák is tudjon számolni, rendszerezni, következtetni. A sziporkázó ötletek kidolgozáához ezekre is szükség van. A rendezési relációval kapcsolatos kombinatorikai és algebrai feladatok támogatják az **alapvető készségek** fejlesztését.

A tehetséges diákok gondozása során a tanárra leselkedő egyik veszély, hogy a diákok gyors felfogása miatt egyre többet akar megtanítani. A fogalmak megfelelő kialakulása előtt túl korán megtanított dolgok alapozás nélkül épített falak a tudás várában. Felületességhez és korai kiégéshez vezethet ez. A kívánatos út inkább nem a gyors haladás, hanem az életkornak és gondolkozási szintnek megfelelő témák **sokoldalú megközelítése**, feldolgozása.

A feladatsorral igyekeztem ezt bemutatni, az egyszerűbb feladatoknál előforduló ötletek, gondolatok hogyan közelíthetők meg más módon, összetettebb problémáknál. Talán váratlan, hogy gráfok és geometria kerültek elő. Az ilyen meglepetések erősítik a diákokban a **matematika öröme, szépsége** iránti érzékenységet. Kívánom tanár kollégáimnak — magamnak is — bárcsak ezzel tudnánk leginkább diákjainkat motiválni.

4.2. Feladatsor az olimpiai csapat felkészítéséhez

Ebben a szakaszban bemutatunk egy olyan anyagot, amely az olimpiára készülő csapat felkészítését szolgálja. A kettősviszony a középiskolai törzsanyagban nem szerepel, a speciális matematika tagozatosok megismerkednek vele. Ahhoz, hogy egy versenyző ehhez az eszközhöz nyúljon, nem elég a fogalmak ismerése. Nagyon sokat segíthet, ha a diákok korábban látják, hogyan használható feladatok megoldásánál a kettősviszony. Mik azok a tipikus helyzetek, amelyekben a projektív geometria ezen fegyvere bevethető. A kettősviszony segítségével nehéz feladatok is meglepően röviden megoldhatók. A feladatok nehézségi foka ezért nem is látszik. Megemlítenék külön kettőt: a 4.2.9. számút magam javasoltam a Közép-Európai Matematikai Diákolimpiára és a 2008-as egyéni verseny legnehezebb feladatának bizonyult. Az

5. fejezetben bemutatjuk projektív geometria nélkül a megoldását. A 4.2.11. számút Bohner Géza, a Szent István Gimnázium matematikatanára tűzte ki a KöMaL fórumban [20], sokáig senki nem oldotta meg. A kettősviszonyos megoldás tőlem származik, kitűztem olimpiai válogatóversenyen is (2008.3). A 6. fejezetben ennek a feladatnak részletesebb elemzését találjuk.

A kettősviszony órai feldolgozására Hraskó András kollégámmal együtt készítettünk egy anyagot [15], ebben a téma részletes bevezetése megtalálható. Itt egy rövid bevezetőben végigfutunk a szükséges definíción és tulajdonságokon, majd tételek bizonyításával és feladatok megoldásával szemléltetjük a kettősviszony sokoldalú felhasználását. Ezen anyag alapja a [4] cikk.

1. Az euklideszi síkot kibővítjük az ideális pontokkal és az ideális egyenessel, így bármely két egyenesnek pontosan egy közös pontja lesz.

2. Legyen A, B, C és D egy egyenes négy különböző pontja. Jelölje a pontnégyes kettősviszonyát $(ABCD)$, melyet a pontpárok előjeles távolsága segítségével így definiálunk:

$$(ABCD) = \frac{AC}{CB} : \frac{AD}{DB}.$$

A definícióból azonnal adódik, hogy $(ABCD) = (BADC) = (DCBA) = (CDAB)$, továbbá ha $(ABCD)$ adott és A, B és C ismert, akkor D egyértelműen meghatározható.

3. Legyen a, b, c és d négy egyenes, melyek egy ponton mennek át. Jelölje a és b előjeles szögét $\angle ab$, stb. A négy egyenes kettősviszonya:

$$(abcd) = \frac{\sin \angle ac}{\sin \angle cb} : \frac{\sin \angle ad}{\sin \angle db}.$$

4. Amennyiben A, B, C és D egy egyenes négy pontja és P az egyenesen kívüli pont, akkor $(ABCD)$ megegyezik a P-ből a pontokhoz húzott egyenesek kettősviszonyával, amit (PA, PB, PC, PD) jelöl.

5. A 4-es pont alapján a vetítés kettősviszonytartó transzformáció. Ha a, b, c és d egy ponton áthaladó négy egyenes és e egyenes ezeket rendre A, B, C és D, f pedig rendre A', B', C' és D' pontokban metszi, akkor $(ABCD) = (A'B'C'D')$.

Ezt a tulajdonságot a következő módon is tekinthetjük. A, B, C és D az e, továbbá A', B', C' és D' az f egyenesen vannak, $e \neq f$ és $(ABCD) = (A'B'C'D')$. Ha AA', BB', CC' egy ponton mennek át, akkor DD' is áthalad ezen a ponton.

Az előkészítést a harmonikus négyes fogalmával folytatjuk, továbbá bemutatunk egy pompás segítőtársat, a kört.

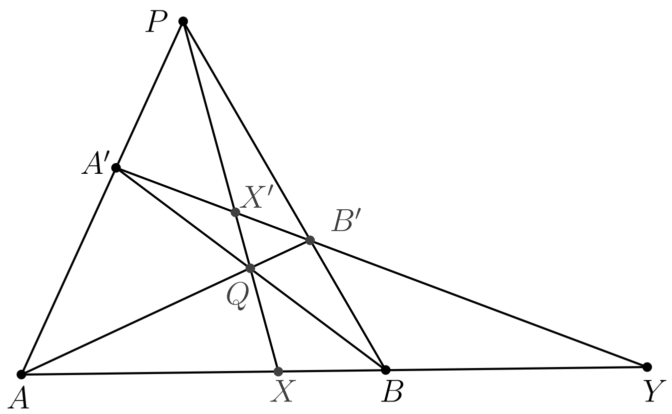
6. A definíció szerint $(ABCD) = \frac{1}{(ABDC)}$. Mivel pontjaink különbözők, ezért $(ABCD)$ nem lehet 1. Így $(ABCD) = (ABDC)$ akkor és csak akkor teljesül, ha $(ABCD) = -1$. Ez egy különleges elhelyezkedés, azt mondjuk C és D harmonikus társak A és B-re nézve.

7. Feladatoknál gyakori fordulat, hogy legyen C az AB szakasz felezőpontja. Ez a kettősviszony nyelvén azt jelenti, hogy az AB egyenes ideális pontja C harmonikus társa A és B-re nézve.

Egyeneseknél a és b harmonikus társak a két szögfelezőjükre nézve. A szögfelezők merőlegesek, ezért megfordítva a dolgot, ha $(abcd) = -1$ és c merőleges d-re, akkor c és d éppen szögfelezői a és b-nek.

8. Négy egyenes által meghatározott ábrán felfedezhető harmonikus négyes, esetünkben X és Y harmonikus társak A és B-re nézve. Ezt *Papposz harmonikus négyes tételének* is szokták nevezni, vagy *teljes négyoldal tételének*. Mi a bizonyítást is megadjuk, mégpedig meglepően röviden: 5. és 6. alapján P-ből, majd Q-ból vetítve

$$(ABXY) = (A'B'X'Y) = (BAXY).$$

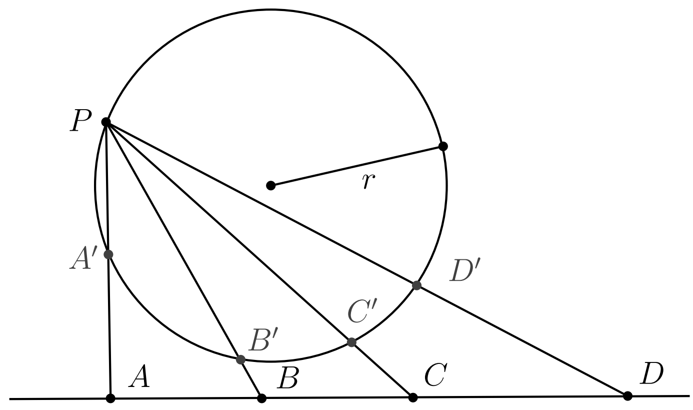


9. Komplex számok segítségével tetszőleges pontnégyesre definiálható a komplex kettősviszony, ennek értéke akkor és csak akkor valós, ha a négy pont egy egyenesen vagy egy körön van. Mi itt komplex számok nélkül használhatjuk köri pontok kettősviszonyát, pontosan a 2. pontban megadott definíció alapján. A kör nagy segítőtársunk lesz, egyenesről körre vetíthetünk és viszont, a kettősviszony megmarad. Jelöljük a kör sugarát r-rel, a vetítés centrumát P-vel, ekkor az ábra jelöléseit használva

$$(ABCD) = (abcd) = \frac{2r\sin\angle APC}{2r\sin\angle CPB} : \frac{2r\sin\angle APD}{2r\sin\angle DPB} =$$

$$= \frac{A'C'}{C'B'} : \frac{A'D'}{D'B'} = (A'B'C'D').$$

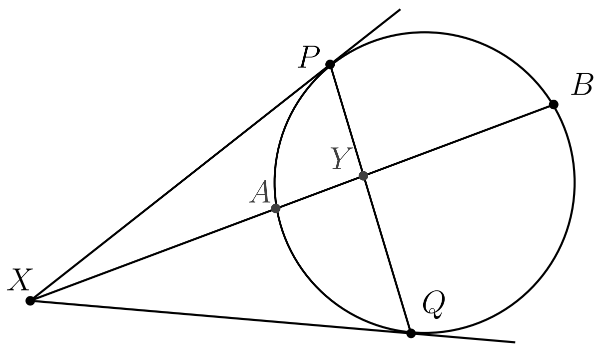
Vetítésnél, ha PA érinti a kört, akkor A' megegyezik P-vel.



10. A 8. pont mintájára a kör esetén is természetesen előkerül a harmonikus pontnégyes. Legyen X a Γ kör külső pontja, a belőle húzható érintők érintési pontjai P és Q. Egy X-en áthaladó szelő Γ-t A és B pontokban messe, legyen AB és PQ metszéspontja Y. Ekkor X és Y harmonikus társak A és B-re nézve, hiszen két vetítéssel

$$(ABXY) = (PA, PB, PX, PY) = (ABPQ) \quad \text{és}$$

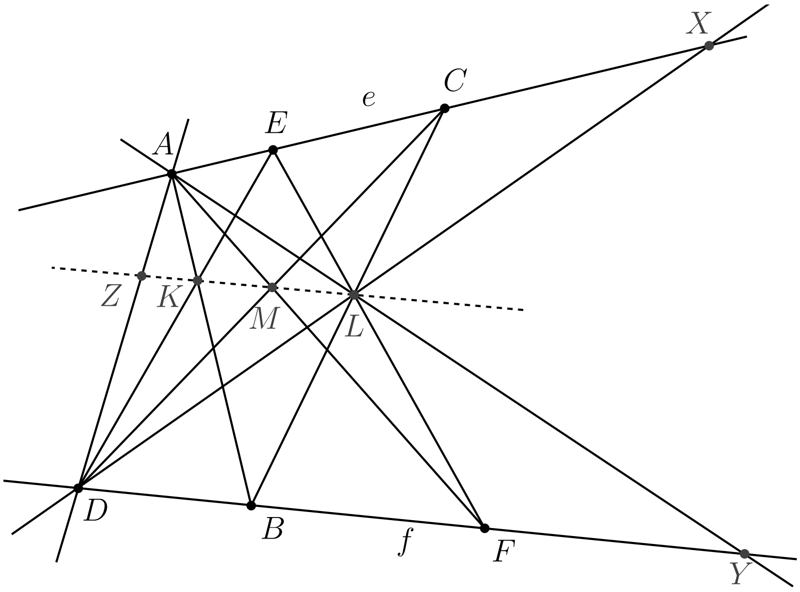
$$(ABPQ) = (QA, QB, QP, QX) = (ABYX).$$



Következzenek a tételek, feladatok. Ha egy példában egyenesek, metszéspontok, felezőpontok szerepelnek, akkor érdemes megnézni projektív geometriai eszközökkel, hogyan bánhatnánk el vele. Először erre mutatunk példákat.

4.2.1. Feladat. (Papposz–Pascal-tétel) *Adott a síkon két egyenes e és f. Az e egyenes három pontja A, C, E, az f egyenes három pontja B, D, F. Az AB és DE egyenesek metszéspontja K, a BC és EF egyenesek metszéspontja L, a CD és FA egyenesek metszéspontja M. Bizonyítsuk be, hogy K, L, M egy egyenesen vannak.*

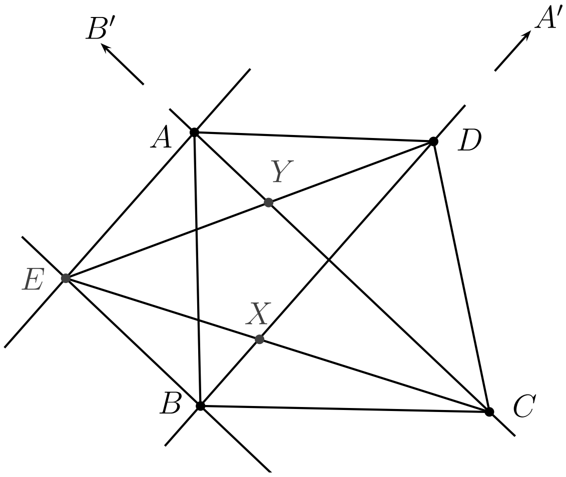
Legyen DL és e metszéspontja X, AL és F metszéspontja Y, továbbá MK és AD metszéspontja Z. Vetítsük az A, C, E, X pontokat L-en keresztül f-re, így azt kapjuk, hogy $(ACEX) = (YBFD)$. Mivel $(YBFD) = (DFBY)$, ezért $(ACEX) = (DFBY)$. A most kapott két pontnégyes közül az elsőt D-ből, a másodikat A-ból vetítve az MK egyenesre ACE és DFB képe ZMK. Ezek szerint X és Y képe az iménti két vetítés után az MK egyenes ugyanazon pontja, tehát DX és AY metszéspontja — az L pont — rajta van az MK egyenesen.



4.2.2. Feladat. *$ABCD$ konvex négyszög. Az A csúcson át párhuzamost húzunk BD-vel, ez lesz az e egyenes. A B csúcson át párhuzamost húzunk AC-vel, ez lesz az f egyenes. Legyen e és f metszéspontja E. Igazoljuk, hogy EC ugyanolyan arányban osztja BD-t, mint ED AC-t.*

Legyen AC ideális pontja B', BD ideális pontja A'. Legyen továbbá EC és BD metszéspontja X, ED és AC metszéspontja Y. A feladatban szereplő osztási arányok egyenlőségéhez elegendő belátni, hogy $(BDXA') = (ACYB')$. Használjuk ki, hogy $(BDXA') = (A'XDB)$. Tekintsük ez utóbbi négy pontra illeszkedő E-ből induló sugársort, majd messük el a sugársort AC egyenesével, így éppen a bizonyítandó állítást kapjuk:

$$(A'XDB) = (EA, EC, ED, EB) = (ACYB').$$



4.2.3. Feladat. *Az ABC háromszögben $AB = AC$. A háromszög oldalaira kifelé rajzoljuk az azonos körüljárású, egymáshoz hasonló ABC', BCA', CAB' háromszögeket. $AB : BC : CA = AC' : BA' : CB' = BC' : CA' : AB'$. Bizonyítsuk be, hogy AA', BC' és CB' egy ponton mennek át.*

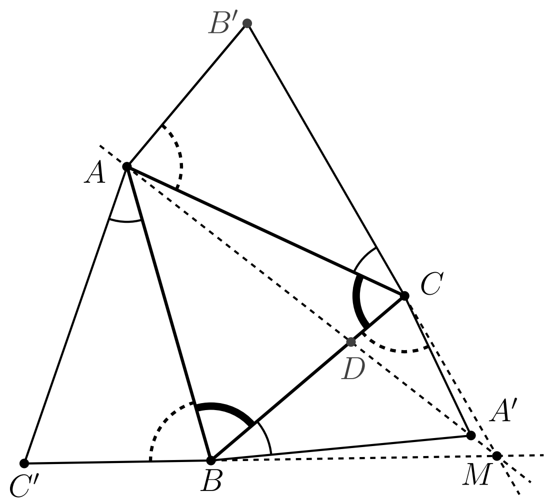
Legyen AA' és BC metszéspontja D. A feladat feltételei szerint a következő szögek egyenlők: $A'BC\angle = B'CA\angle$, $CBA\angle = ACB\angle$, $ABC'\angle = BCA'\angle$. Ezek szerint a következő B -re és C-re illeszkedő sugársorok kettősviszonya megegyezik:

$$(A'B, CB, AB, C'B) = (B'C, AC, BC, A'C).$$

Használjuk ki, hogy $(B'C, AC, BC, A'C) = (A'C, BC, AC, B'C)$, így

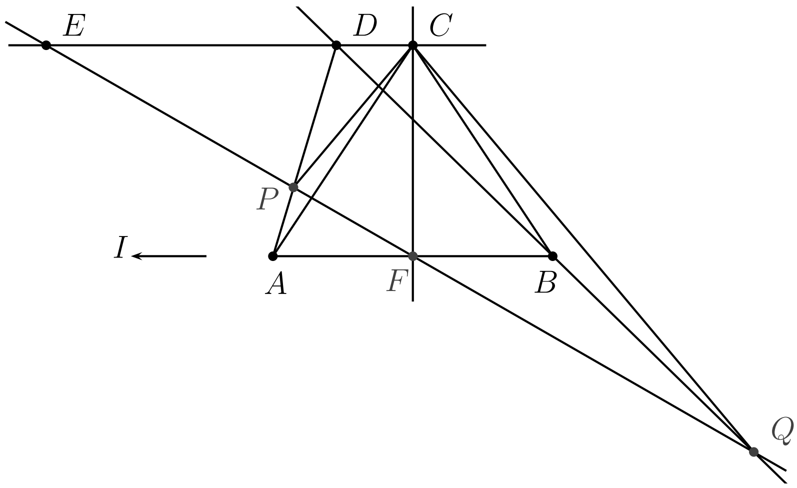
$$(A'B, CB, AB, C'B) = (A'C, BC, AC, B'C).$$

Ezen két sugársort messük el az AA' egyenessel, ekkor az első három egyenes esetén a metszéspontok rendre A', D és A. Mivel a kettősviszonyok egyenlők és adott kettősviszony esetén három pont helyzete egyértelműen meghatározza a negyediket, ezért $C'B$ és $B'C$ is ugyanabban az M pontban metszik AA' egyenesét.



4.2.4. Feladat. *Az $ABCD$ trapéz párhuzamos oldalai AB és CD, $AC = BC$. AB felezőpontja F. Az F-en át húzott egyenes AD-t P-ben, a DB átló B-n túli meghosszabbítását Q-ban metszi. Igazoljuk, $ACP\angle = QCB\angle$.*

Legyen AB ideális pontja I, PQ és CD metszéspontja E. Mivel $(ABFI) = -1$, ezért ezt a pontnégyest D-ből PQ egyenesére vetítve kapjuk, hogy $(PQFE) = -1$. Ez utóbbi négy ponthoz tartozó C-ből induló sugársor is harmonikus négyest alkot, azaz $(CP, CQ, CF, CD) = -1$. Mivel a feladat feltételei szerint CF és CD egymásra merőlegesek, ezért bevezetőnk 7. pontja alapján a $PCQ\angle$ szögfelezője CF. Mivel CF a feladat szövegében szereplő $AC = BC$ feltétel miatt $ACB\angle$ szögfelezője is, így valóban $ACP\angle = QCB\angle$.



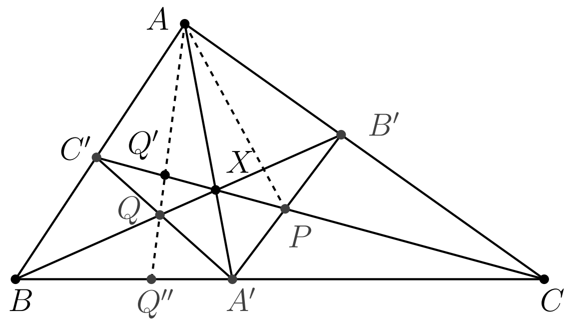
4.2.5. Feladat. *Az ABC háromszög A-ból induló szögfelezője A'-ben metszi a BC oldalt. Legyen az AA' szakasz egy tetszőleges belső pontja X. $BX \cap AC = B'$, $CX \cap AB = C'$, $A'B' \cap CC' = P$, $A'C' \cap BB' = Q$. Igazoljuk, hogy $PAC\angle = QAB\angle$.*

A feladat állítását úgy is fogalmazhatjuk, hogy be kéne látnunk, az AQ és AP egyenesek egymás tükörképei az A-ból induló szögfelezőre. Mivel az AB és AC egyenesek tükrösek a szögfelezőre, ezért egyenesek kettősviszonyával megfogalmazva az állítás: $(AB, AA', AQ, AC) = (AC, AA', AP, AB)$. Megmutatjuk, hogy mindkét kettősviszony értéke -1. Mivel az illeszkedési viszonyokat tekintve az ábra szimmetrikus, ezért elegendő az elsőt bizonyítani.

Legyen CC' és BC metszéspontja az AQ egyenessel rendre Q' és Q''. Az A-ra illeszkedő sugársort elmetsszük CC'-vel és a metszéspontokon átmenő Q-ra illeszkedő sugársort tekintjük: (AB, AA', AQ, AC) $= (C'XQ'C) = (QC', QX, QA, QC)$. Ezt a sugársort metsszük BC-vel, és tekintjük a metszéspontokon átmenő A-ra illeszkedő sugársort:

$(QC', QX, QA, QC) = (A'BQ''C) = (AX, AB, AQ, AC)$. Azt kaptuk, hogy

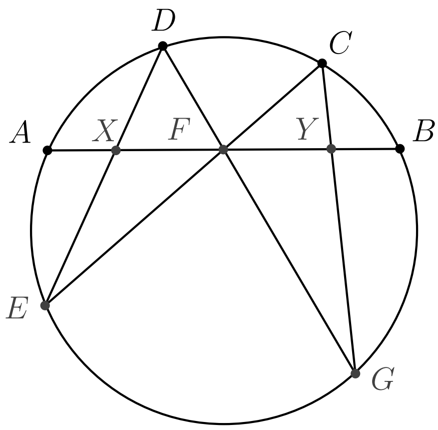
$$(AB, AA', AQ, AC) = (AX, AB, AQ, AC) = -1.$$



A következő tételek és feladatok bemutatják, hogy a bevezetőben említett segítőtárs, a kör, milyen tipikus szituációkban fordul elő. Az előkészítés 9. és 10. pontjai egyszerűnek tűnhetnek, velük nehezebb feladatokkal is könnyedén elbánhatunk.

4.2.6. Feladat. (Pillangó tétel) *Egy kör AB húrjának felezőpontja F. Az egyik AB íven van két további pont, C és D. A CF és DF egyenesek második metszéspontja a körrel rendre E és G. DE és GC húrok az AB húrt rendre X és Y-ban metszik. Igazoljuk, hogy $XF = YF$.*

A bizonyítandó $XF{=}YF$ bizonyításához felhasználjuk, hogy F-re A és B tükrös, ezért elegendő megmutatni, hogy X és Y is tükrös, azaz $(AYFB) = (BXFA)$. Először a C pontból vetítünk a körre: $(AYFB) = (AGEB)$. Most D-ből vetítünk az AB egyenesre: $(AGEB) = (AFXB)$. Mivel $(AFXB) = (BXFA)$, a bizonyítást befejeztük.

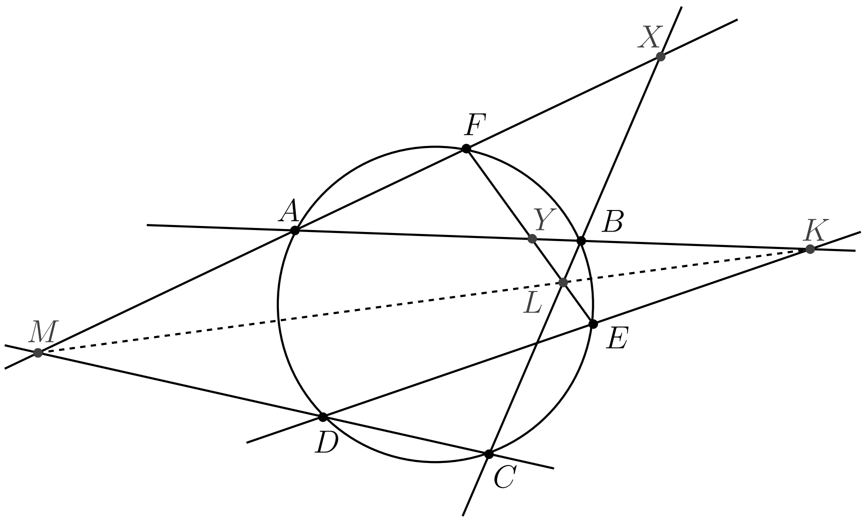


4.2.7. Feladat. (Pascal–tétel) *Egy kör hat pontja A, B, C, D, E, F. Az AB és DE egyenesek metszéspontja K, a BC és EF egyenesek metszéspontja L, a CD és FA egyenesek metszéspontja M. Bizonyítsuk be, hogy K, L, M egy egyenesen vannak.*

Legyen AF és BC metszéspontja X, AB és EF metszéspontja Y. A körön levő $ABDF$ pontnégyest vetítsük először C-ből az AF egyenesre, majd E-ből az AB egyenesre:

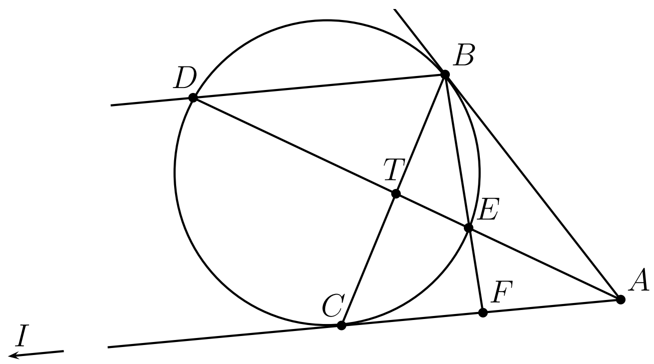
$$(ABDF) = (AXMF) \quad (ABDF) = (ABKY).$$

Mivel $(AXMF) = (ABKY)$ és a két kettősviszonyban az A pont közös, ezért XB és FY metszéspontjából, azaz L-ből egymásra vetíthetők, így L-en áthalad az MK is.



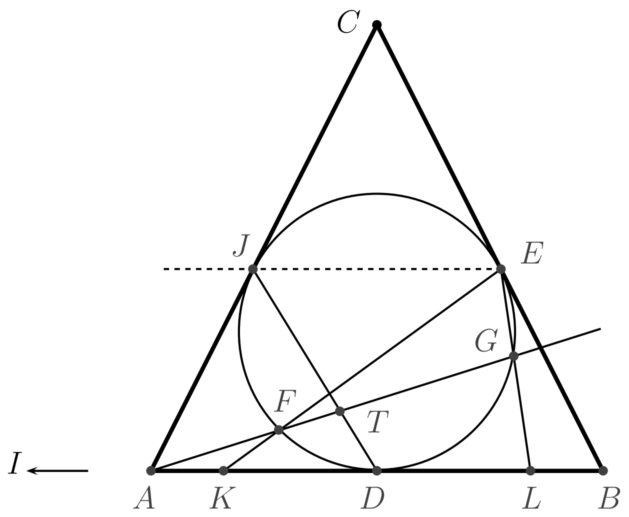
4.2.8. Feladat. *Egy körhöz a külső A pontból érintőket húzunk, az érintési pontok B és C. A B ponton keresztül párhuzamost húzunk AC-vel, ez D-ben metszi a kört. DA a kört E-ben metszi. BE és AC metszéspontja F. Mutassuk meg, hogy F felezi AC-t.*

Legyen az AC egyenes ideális pontja I, BC és AD metszéspontja T. F pontosan akkor lesz AC felezőpontja, ha $(ACFI) = -1$. Vetítsük az A, C, F, I pontokat B-ből a körre: $(ACFI) = (BCED)$. Most C-ből az AD egyenesre vetítve $(BCED) = (TAED)$ adódik. A most kapott pontnégyest B-ből az AC egyenesre vetítve $(TAED) = (CAFI)$. Az kaptuk, hogy $(ACFI) = (CAFI)$, ami csak úgy lehetséges, ha a kettősviszony értéke -1.



4.2.9. Feladat. (MEMO 2008. egyéni verseny) *Az ABC háromszögben $AC = CB$. A beírt kör az AB és BC oldalakat rendre a D és E pontokban érinti. Egy A-n áthaladó, de AE-től különböző egyenes a beírt kört F és G pontokban metszi. AB az EF és EG egyeneseket rendre K és L pontokban metszi. Igazoljuk, hogy $KD = DL$.*

Legyen az AB egyenes ideális pontja I, a beírt kör és AC közös pontja J, DJ és FG egyenesek metszéspontja T. $KD = DL$ pontosan akkor teljesül, ha $(KLDI)$ harmonikus négyes. Vetítsünk a körre E-ből: $(KLDI) = (FGDJ)$. Ezt J-ből FG-re vetítve azt kapjuk, hogy $(FGTA)$. Most D-ből a körre vetítve kapjuk, hogy $(FGTA) = (FGJD)$. Mivel $(FGDJ) = (FGJD)$, így értéke -1, tehát $(KLDI) = -1$, és a bizonyítást befejeztük.

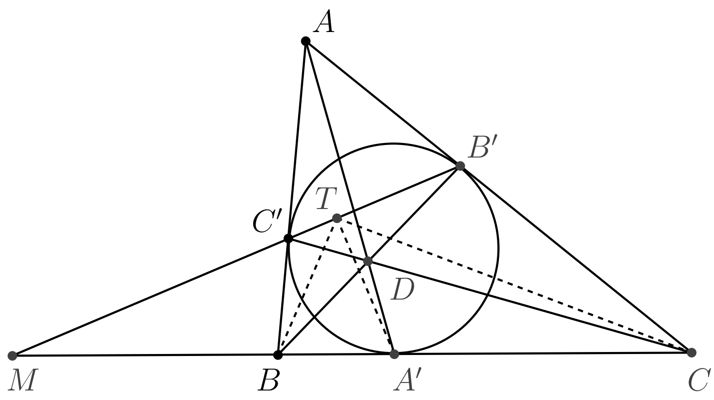


4.2.10. Feladat. *Az ABC háromszög beírt köre a megfelelő oldalakat rendre az A', B', C' pontokban érinti. Az A' pont merőleges vetülete a $B'C'$ egyenesre T. Igazoljuk, hogy*

$$BTA'\angle = A'TC\angle.$$

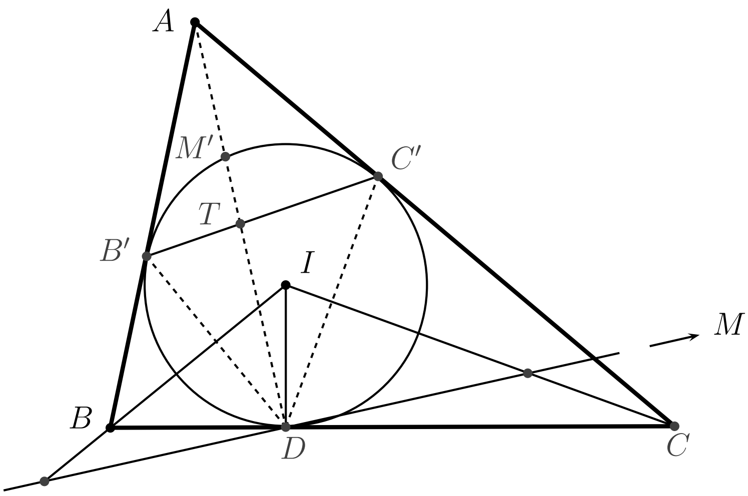
Legyen $B'C'$ és BC metszéspontja M. Ceva tételének egyszerű alkalmazásával adódik, hogy az AA', BB' és CC' szakaszok egy ponton mennek át, legyen ez a pont D, bevezetőnk 8. pontja alapján $(BCA'M) = -1$.

Mivel $(BCA'M) = (TB, TC, TA', TM)$ és TA merőleges TM-re, a bevezető 7. pontja alapján e két egyenes a TB és TC belső és külső szögfelezője, azaz $BTA'\angle = A'TC\angle$.



4.2.11. Feladat. (KöMaL fórum, geometria rovat, 20-as feladat) *Legyen az ABC háromszög beírt körének BC-n lévő érintési pontja D. Igazoljuk, hogy az AD-re D-ben állított merőlegesnek a B ill. C csúcsnál lévő belső szögfelező közti szakaszát D felezi.*

Legyen az ABC beírt körének középpontja I, a beírt kör AB-n és AC-n levő érintési pontjai rendre B' és C'. Az AD-re D-ben emelt merőleges egyenes ideális pontja legyen M, AD és a beírt kör D-től különböző közös pontja M'. Az AD és $B'C'$ közös pontja legyen T. A feladat állítását megfogalmazhatjuk kettősviszonnyal, például az I-n áthaladó egyenesek segítségével: $(IB, IC, ID, IM) = -1$ a bizonyítandó. Az előbbi egyenesek helyett tekintsünk mindegyikre egy merőlegest, és haladjanak át ezek D-n. Ezen egyenesek kettősviszonya is éppen ugyanakkora, a beírt körre vetítve a következőt kaptuk: $(IB, IC, ID, IM) = (B'C'DM')$. Ekkor B'-ből, majd C'-ből vetítve $(B'C'DM') = (ATDM') = (C'B'DM') = -1$, a bizonyítást befejeztük.


A
M′
C′
T
B′
I
M
B
D
C

5. Versenyfeladatok

Ebben a fejezetben olyan versenyfeladatokat ismertetünk, amelyek saját ötletből születtek. Milyennek kell lennie egy versenyfeladatnak? Reiman István ezt a következőképpen foglalja össze [12]: „A feladat elsősorban a versenyzők tudásának a mélységét s ne a mennyiségét tegye próbára; lehetőleg érdekes legyen a mondanivalója vagy az eredménye vagy az eredményhez vezető útja; létezzék a feladatnak olyan megoldása, amely belefér a versenyen arányosan rászabott időbe.” Felhívjuk a figyelmet néhány további szempontra, amely a versenyeknél fontos lehet. A dolgozatok egységes értékelését megkönnyíti, ha vannak olyan világosan elkülöníthető részeredmények, amelyek önállóan értékelhetők. A mezőny széthúzását segíti, ha — az olimpiai pontozást alapul véve — lehet 0-tól 7-ig bármilyen pontszámot szerezni.

A fejezetben tárgyalt feladatok szintje az általános iskola felsőseivel indul, szerepel KöMaLban kitűzött feladat, OKTV példa. Alkalmanként bemutatjuk a probléma lehetséges továbbgondolását. A szerző egyik legnagyobb szakmai sikerének tartja, hogy az olimpián is szerepelt kitűzött feladata. A nemzetközi versenyeken megjelent feladatok sorát ez a példa zárja.

5.1. Általános iskola

Ezeket a kisebbeknek szánt feladatokat nagyon fontosnak tartom. Egyrészt kitalálásuk mindig öröm volt, másrészt többször tapasztaltam, hogy az egyszerű ötletből indulva nehezebb problémákhoz juthatunk.

5.1.1. Feladat. (Fazekas Mihály Főv. Gyak. Gimn. speciális matematika tagozatos felvételi feladat, 8. évfolyam, 1999) *Számrontó Rezsőnek két módszere van egy szám elrontására. Vagy egy jegyet tetszőlegesen megváltoztat, vagy két jegyet kicserél. Ugyanannak a 4 jegyű* *számnak két elrontása az 1323 és az 1213. Mi lehetett az eredeti szám, amit elrontott Rezső?*

Az elrontás módszerét tekintve négy eset lehet. Jelölje a cserét c, a változtatást v, ekkor a 4 eset: cc, cv, vc, vv.

cc: Ez az eset nem fordulhatott elő, mert akkor mindkét elrontott számban az eredeti jegyek lennének, most viszont az elsőben két 3-as van, míg a másodikban csak 1.

cv: Az eredeti szám jegyei ezek szerint valamilyen sorrendben az 1, 2, 3, 3. A változtatott szám ezek szerint az 1213-ban valamelyik 1-es, ezt 3-ra kell visszaváltoztatni. A 3213-ból nem érhető el két szám cseréjével az 1323. Az 1233-ból viszont igen, a középső két jegy cseréjével.

vc: Az előző gondolatmenet mintájára a jegyek 1, 1, 2, 3, az első számban egy 3-ast kell 1-re váltani. 1123 jó megoldás, az 1321 viszont nem.

vv: Mivel mindkét számban csak egyetlen szám változhatott, ezért van két olyan számjegy, mely mindkét számban az eredeti. Ez az első 1 és az utolsó 3. Ha az 1323-ban a százasok helyén álló 3 a változtatott, akkor a tízesek helyén álló 2 az eredeti szám jegye, így az 1213-ból kiderül, a százasok helyén is kettes áll, azaz a megoldás az 1223. Ha az 1323-ban a tízesek helyén álló 2 a változtatott, akkor a százasok helyén álló 3 az eredeti szám jegye, így az 1213-ból kiderül, a tízesek helyén 1 áll, azaz a megoldás az 1313.

4 megoldás van, ezeket összefoglaljuk. Előre írjuk a lehetséges eredeti számot, utána a két elrontottat, amelyekben vastaggal jelöljük a rontást:

1233	c	1**32**3	v	12**1**3
1123	v	1**3**23	c	1**21**3
1223	v	1**3**23	v	12**1**3
1313	v	13**2**3	v	1**2**13

Ez a feladatom felkeltette Szőnyi Tamás és Hraskó András figyelmét, akik a [17] portálon található kódokkal foglalkozó tanítási anyagot készítették és oda beillesztették (5.1. feladat).

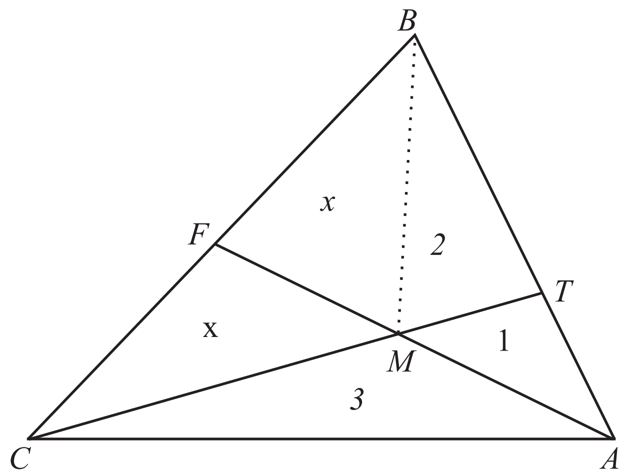
A feladatra könnyű megoldást találni, az összes megoldás megtalálása viszont fegyelmezett gondolkozást és valamilyen rendszerezést kíván. Az esetvizsgálat elég rövid ahhoz, hogy ne rontsa el a feladat bájosságát.

5.1.2. Feladat. (Fazekas Mihály Főv. Gyak. Gimn. speciális matematika tagozatos felvételi feladat, 8. évfolyam, 2003) *Ottó gondolt egy egész számra és felsorolta az osztóit nagyság szerint növekedve az 1-gyel kezdve. A sorrendben éppen a hatodik lett a 15. Keresd meg a legkisebb pozitív egész számot, amire gondolhatott Ottó.*

Jelölje az osztókat $d_1 = 1 < d_2 < d_3 < \ldots < d_6 = 15 < \ldots$. A gondolt számnak osztója a 3 és az 5. Ha 2 is osztaná, akkor a 6 és 10 is osztója lenne, de akkor az 1, 2, 3, 5, 6, 10 mind osztó, a 15 nem a hatodik lenne. Tehát a 2 nem osztó és így nincs is további páros osztó. Ezek szerint $d_2 = 3$ és $d_3 = 5$. A negyedik és ötödik osztó lehet a 7, 9, 11, 13 közül kettő. Ottó száma a legkisebb közös többese lesz a 15-nek, a negyedik és az ötödik osztónak. Ez akkor legkisebb, ha $d_4 = 7$ és $d_5 = 9$. A keresett szám tehát a $[15; 7; 9] = 315$.

A megoldás világosan osztható lépésekre, a páros osztók kizárása a diákoknak jól ment. Ezután a legkisebb közös többes helyett sokan a 3, 5, 7 és 9 szorzatát adták meg.

5.1.3. Feladat. (Fazekas Mihály Főv. Gyak. Gimn. speciális matematika tagozatos felvételi feladat, 8. évfolyam, 2007) *Az ABC háromszög BC oldalának felezőpontja F, az AB oldal egy pontja T. CT és AF metszéspontja M. Az AMT háromszög területe 1, az AMC háromszög területe 3 egységnyi. Mekkora az ABC háromszög területe?*



Mivel $BF = FC$, ezért ABF és ACF háromszögek területe ugyanakkora. Jelölje MCF területét x, ekkor az $MTBF$ négyszög területe $x+2$. Mivel az MCF és MFB háromszögek területe is ugyanakkora, ezért $T_{MFB} = x$, $T_{MTB} = 2$. Az AT és BT szakaszok aránya ugyanakkora, mint az MTA és MTB háromszögek területének aránya, azaz 1:2. Ugyanekkora az ACT és BCT háromszögek területének aránya is, tehát $4 : (2x + 2) = 1 : 2$, amiből $x = 3$. Az ABC háromszög területe 12.

5.1.4. Feladat. (Fazekas Mihály Főv. Gyak. Gimn. speciális matematika tagozatos házi verseny, 7. évfolyam) *A pozitív egészeket helyezzük el három zsákba A, B és C-be úgy, hogy ha valaki egy zsákból kihúz három különböző számot és közli velünk az összegüket, mi ki tudjuk találni, mely zsákból választott.*

A budapesti Fazekas M. Gimnáziumban 1993-ban indult a hat évfolyamos speciális matematika tagozatos képzés. Az első induló osztályt

Orosz Gyula kollégámmal tanítottuk. A halmazok tanításánál tapasztaltam, hogy a feladatgyűjtemények végtelen halmazokkal kapcsolatos anyaga kicsi, a frissítés érdekében igyekeztem újakat kitalálni, ennek eredménye a fenti példa.

Első észrevételünk, hogy a feladat nagyon könnyű, jó megoldás például, ha $n < k$ esetén $A = \{1, 2, ..., n\}$, $B = \{n + 1, n + 2, ..., k\}$ és $C = \{k + 1, k + 2, ...\}$. Ha ezt észreveszi a diák, akkor csavarintunk a példán egyet, legyen mindhárom halmazban végtelen sok szám!

A diákok két típusú megoldást találtak. Az egyikben legyen A a páros számok halmaza, B a $4k + 1$ alakúak, C a $4k + 3$ alakúak. A másik konstrukcióban A-ban vannak a páratlan számok, B a néggyel oszthatók, C a $4k + 2$ alakú számok halmaza.

A megoldás megbeszélése után tovább léphetünk. Legyen 3 helyett n végtelen halmaz és válasszunk ki valamelyikből k darabot. A kérdés kapcsán a diákok egy miniatűr kutatást végezhetnek. Ennek egyre nehezedő lépései:

1. Ha $(n; k) = 1$, akkor az n szerinti maradékok alapján készülhetnek a halmazok.

2. Ha k páratlan, akkor egy tetszőleges m pozitív egész prímtényezős felbontásában legyen a 2 kitevője j. Amennyiben halmazaink a H_i halmazok $i = 1, 2, ..., n$, akkor kerüljön m a H_{j+1} halmazba, ha $j < n - 1$, különben kerüljön m a H_n halmazba.

3. $n = k = 2$ esetén nem oldható meg a feladat. Legyen a két halmaz A és B. Ha mindkét halmaznak végtelen sok eleme van, akkor végtelen sokszor fordul elő, hogy i A-ban van, $i+1$ pedig B-ben, illetve j B-ben van, $j + 1$ pedig A-ban. Ekkor $i + j + 1$ összeget A-ból is kaphatunk $(i) + (j + 1)$ és B-ből is $(i + 1) + (j)$.

Tapasztalatom szerint ez az ötlet, noha nagyon egyszerű, rájönni elég nehéz. Az olimpiai válogatóversenyek feladatai közt találjuk a 2008.1.-es feladatot, amelynek egyik lehetséges megoldása pontosan a most bemutatott ötleten múlik.

4. Pósa Lajos hívta fel a figyelmemet arra, hogy a feladat soha nem oldható meg, ha $n = k$ és n páros. Ennek bizonyítását tőle hallottam, tudomásom szerint még nincs publikálva.

5. Bemutatunk még egy típusú megoldást $n = 9$, $k = 6$ esetén. Először készítünk öt halmazt a számok 5-ös maradéka szerint. Majd az 5-tel osztható számok halmazát további 5 részre vágjuk aszerint, hogy mi a 25-ös maradék. Mivel az 5 és a 25 is 6-hoz relatív prím, ez a szétosztás megfelelő lesz. (A kiindulási feladatban megadott konstrukció is ilyen szerkezetű.)

Ezt a gondolatot tovább fűzve rögzített k esetén további n értékekre kaphatunk megoldásokat, ha tekintjük a k-hoz relatív prím d_1, d_2, ..., d_s számokat. A pozitív egészeket először szétosztjuk a d_1 szerinti maradék alapján, ezután a kapott halmazok közül néhányat tovább osztunk a d_1d_2 szerinti maradék alapján. A keletkezett halmazok közül néhányat tovább osztunk a $d_1d_2d_3$ szerinti maradék alapján stb.

5.2. Magyarországi versenyek

5.2.1. Feladat. (KöMaL B.3676.) *Bergengóciában a totón négy mérkőzésre lehet tippelni. Betli Benő — nevéhez méltó módon — szeretne barátai előtt egy olyan szelvénnyel büszkélkedni, amelyen egyetlen találat sincs. Hány szelvény ügyes kitöltésével mehet biztosra?*

A feladatot a Városok Viadalán [14] (Tournament of Towns, 1996 ősz A forduló, junior kategória 6-os példa) szereplő egyik feladat inspirálta, amelyik bizonyos feltételek mellett lényegében betli lottót jelent. A totó játékban n mérkőzés esetén a betlihez szükséges szelvények minimális számát jelölje b_n. Nyilván $b_1 = 2$. Két mérkőzés esetén az 11, 22, xx tippekkel kitöltött szelvények garantálják a betlit, hiszen valamilyen eredménytípus biztosan nem lesz. Kevesebb, azaz két szelvény pedig nem elég, hiszen előfordulhat, hogy az első mérkőzés éppen az első szelvény, a második pedig a második szelvény eredménye lesz.

Ha i szelvényt töltünk ki, akkor legalább $\lceil \frac{i}{3} \rceil$ szelvényen ugyanaz a tipp szerepel. Ha éppen ez az első mérkőzés eredménye, akkor ezen szelvényeink egyike sem lehet betli szelvény. Emiatt a $b_{n+1} - \lceil \frac{b_{n+1}}{3} \rceil \geq b_n$ feltételt kapjuk. Ebből $b_3 \geq 5$, $b_4 \geq 8$, $b_5 \geq 12$, ... , $b_{13} \geq 315$, ami mutatja, hogy a totón nem is annyira egyszerű betlizni, szemben a lottóval, ahol ez a 90/5-ös változatban már hat szelvénnyel könnyen garantálható.

Az iménti b_i-re vonatkozó becslés $i = 3, 4, 5$ esetén éles. Három mérkőzés esetén megfelelő szelvények az 111, 122, 212, 221, és xxx. Négy mérkőzés esetén egy lehetséges megoldást ad a következő nyolc szelvény: 1111, $11xx$, $1x22$, $221x$, $22x1$, $x122$, $xx11$, $xxxx$. Az ellenőrzésre itt nem térünk ki, ez több eset vizsgálatát jelenti.

Nagyobb n értékek esetén b_n meghatározása további feladat. A bemutatott alsó becslés mellett felső becslés is adható. Azonnal adódó felső becslés a $b_n \leq 2^n$, az x tippet nem használva elkészítjük az összes 1 vagy 2 számokat tartalmazó szelvényeket. Ezt a durva becslést egy kicsit javíthatjuk, ha az egyik szelvény a csupa x, a többin pedig kitöltjük az összes olyan 1 vagy 2 számokat tartalmazó tipposzlopot, ami páros sok 1-est tartalmaz. Ebből $b_n \leq 2^{n-1} + 1$.

Másfajta felső becslést is megadhatunk. A mérkőzéseket osszuk k darab négyes és l darab hármas csoportba. Minden csoportban tekintjük a betlihez szükséges minimális számú tippet és ezek összes lehetséges variációját kitöltjük. Így $b_n \leq 8^k \cdot 5^l$. Ez a becslés akkor ad minél jobb eredményt, ha a négyes csoportokból a lehető legtöbb van, azaz l értéke 0, 1, 2 vagy 3.

5.2.2. Feladat. (OKTV 2007–2008, II. kategória, első forduló, 2. feladat) *Az ABC háromszög BC oldalának felezőpontja F, az AB oldal egy belső pontja T, az AF és CT szakaszok metszéspontja M. Az ATM háromszög területe 8, a CFM háromszög területe 15 egység. Mekkora lehet az ABC háromszög területe?*

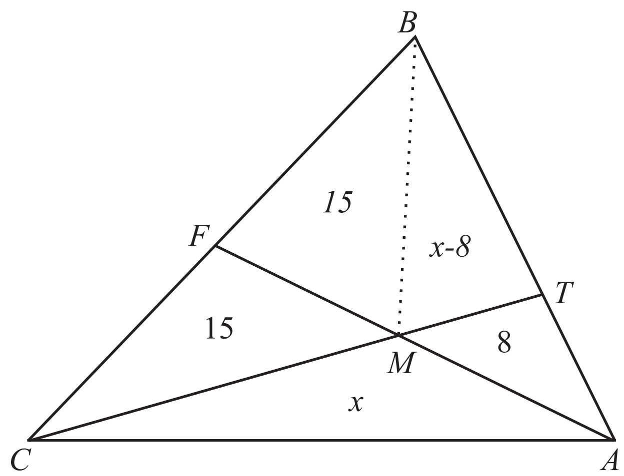
A Fazekas Gimnázium felvételijére készített 5.1.3. számú feladat egy változata ez. Jól mutatja, hogy a feltételek apró változtatásával más nehézségi szintű feladatot kapunk.

Jelölje az AMC háromszög területét x. Mivel F oldalfelező pont, ezért igaz a következő két dolog:

(1) az ACF és AFB háromszögek területe ugyanakkora, így a $BTMF$ négyszög területe $x + 7$;

(2) az MCF és MFB háromszögek területe ugyanakkora, mindkettő 15 egység.

Ezen két észrevételből az következik, hogy az MBT háromszög területe $T_{MBT} = T_{BTMF} - T_{MFB} = (x - 8)$ egység.



Mivel az AB egyeneshez tartozó magassága az MBT és MTA, valamint a CBT és CTA háromszögeknek azonos, ezért területeik aránya éppen a BT és TA szakaszok arányával egyezik meg, azaz:

$$\frac{T_{MBT}}{T_{MTA}} = \frac{T_{CBT}}{T_{CTA}} = \frac{BT}{TA}.$$

Írjuk fel ezt az arányt a korábbi észrevételeink alapján:

$$\frac{x-8}{8} = \frac{(x+7)+15}{8+x}.$$

A nevezőkkel szorozva és 0-ra rendezve $x^2 - 8x - 240 = 0$ adódik, amelynek megoldásai $x_1 = 20$ és $x_2 = -12$, ez utóbbi nem lehet egy háromszög területe.

Az ABC háromszög területe $T_{ABC} = 2x + 30 = 70$ egység.

5.2.3. Feladat. (OKTV 2000–2001, II. kategória, döntő, 1. feladat) *Legyen a $H = \{1, 2, 3, ..., 2000, 2001\}$ halmaz 77 elemű részhalmazai közül azoknak a száma, amelyekben az elemek összege páros S-sel egyenlő, és azoknak a száma, amelyekben az elemek összege páratlan, N-nel egyenlő. Melyik nagyobb: S vagy N? És mennyivel?*

A feladatra két lényegesen különböző megoldást mutatunk be.

1. megoldás: Rendezzük H elemeit párokba $(1; 2)$, $(3; 4)$, ..., egyedül maradt a 2001. Egy részhalmaz összeállításánál a kiválasztott számokat bekarikázzuk. Nevezzük párosnak, illetve páratlannak a részhalmazt, ha benne az elemek összege páros, illetve páratlan. Egy részhalmaz akkor páratlan, ha benne a páratlan számok száma páratlan. A továbbiakban két esetet vizsgálunk aszerint, hogy a 2001-et bekarikáztuk-e vagy sem.

Tegyük fel, hogy a 2001-et nem választottuk ki. Mivel a részhalmaz elemeinek száma 77, ami páratlan, ezért lesz olyan pár, amiben csak egy számot karikáztunk be. Tekintsük a legkisebb ilyen párt, és ebben tegyük a karikát a másik számra. Ezzel a művelettel páros részhalmazból páratlant, páratlanból pedig párosat kapunk, tehát a 2001-et nem tartalmazó páros és páratlan részhalmazok száma egyenlő.

Ha a 2001 be van karikázva, akkor is tekinthetjük a páros és páratlan részhalmazok közti előbbi megfeleltetést minden olyan esetben, ahol van olyan pár, amelynek csupán egyetlen száma karikás. Azok a részhalmazok maradtak ki, amelyekben a 2001 mellett éppen 38 párban van mindkét szám bekarikázva. Ezekben a részhalmazokban ezek szerint 39 páratlan szám van, tehát minden ilyen részhalmaz páratlan. Azt kaptuk, hogy $N > S$, és $N - S = \binom{1000}{38}$, hiszen az 1000 párból ennyi módon választhatunk ki 38-at.

2. megoldás: Számoljuk meg hány részhalmaz tartozik N-be aszerint, hogy hány páratlan szám van a részhalmazban. A 2001 szám közül 1000 páros és 1001 páratlan, ezek közül kell kiválasztani a 77 számot úgy, hogy páratlan sok páratlant választunk. Így

$$N = \sum_{i=0}^{38} \binom{1000}{2i}\binom{1001}{77-2i}.$$

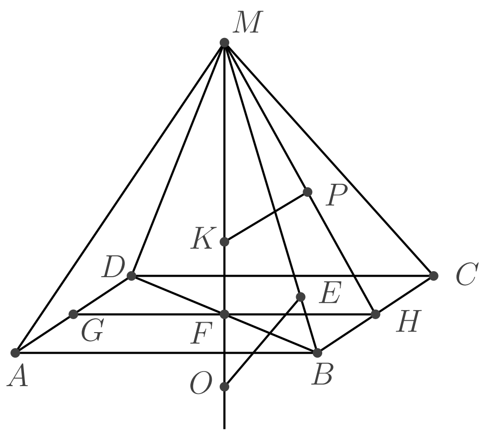
Hasonlóan

$$S = \sum_{j=0}^{38} \binom{1001}{2i}\binom{1000}{77-2i}.$$

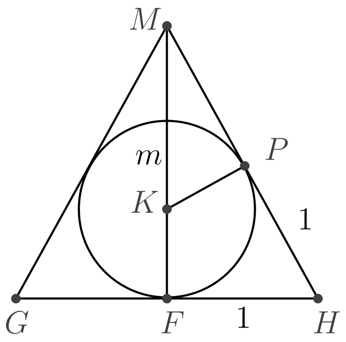
Most tekintsük az $(1+x)^{1000}(1-x)^{1001}$ polinomot és ebben az x^{77} együtthatóját. Ha a binomiális tétel szerint felírjuk $(1+x)^{1000}$-t és $(1-x)^{1001}$-t és ezeket összeszorozzuk, akkor ez az együttható éppen $S - N$.

Amennyiben a polinomot $(1-x^2)^{1000}(1-x)$ alakban írjuk, akkor viszont x^{77} együtthatója $-\binom{1000}{38}$, azaz $N - S = \binom{1000}{38}$.

5.2.4. Feladat. (OKTV 1998–1999, II. kategória, második forduló, 3. feladat) *Egy szabályos négyoldalú gúla beírt gömbjének a középpontja, valamint élérintő gömbjének a középpontja egyenlő távol van a gúla alapsíkjától. Mekkora a gúla térfogata, ha alapélének a hossza 2? (Az élérintő gömb a gúla minden élét az él belső pontjában érinti, a beírt gömb pedig minden lapot belső pontban érint.)*



Legyen a beírt gömb középpontja K, az élérintő gömbé O. A gúla szimmetriái miatt ezek rajta vannak a gúla tengelyén, azaz a csúcsából az alaplapra állított merőlegesen. Mivel az alapsíktól egyenlő távol vannak, ezért vagy egybeesnek, vagy tükrösek az alapsíkra. Megmutatjuk, hogy az első eset nem állhat fenn. Mivelhogy K-tól minden lap síkja egyenlő távol van, ezért egybeesés esetén O-tól is, következésképpen az élérintő gömbből minden lap ugyanakkora kört metszene ki. Viszont a kimetszett körök a lapok beírt körei; ezek azonban nem lehetnek egyenlők, hiszen az alaplap beírt körének átmérője 2, az oldallapoké 2-nél kisebb, mivel a háromszögbe írt kör átmérője kisebb minden háromszögoldalnál.



Legyen a gúla alaplapja az $ABCD$ négyzet, csúcsa M, M-ből az alapra állított merőleges talppontja (a négyzet középpontja) F. A bevezetőben mondottak szerint $MK + MO = 2MF$. Vezessük be az $MF = m$ jelölést, ezek szerint:

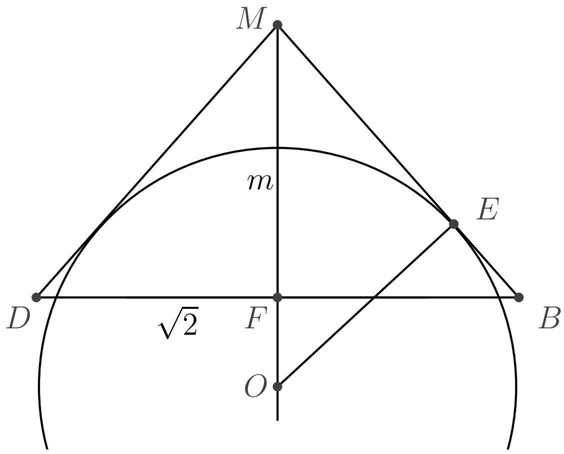
$$MK + MO = 2m. \tag{1}$$

Fejezzük most ki az MK és MO távolságokat m segítségével. A gúla MGH szimmetriasíkja a beírt gömbből az MGH háromszög beírt körét metszi ki, ez az MGH egyenlő szárú háromszög MH szárát a P pontban érinti. Mivel külső pontból a gömbhöz (körhöz) húzott érintőszakaszok egyenlők, $HF = HP = 1$; az MFH derékszögű háromszögből $MH = \sqrt{m^2+1}$. Az MPK és MFH derékszögű háromszögek hasonlók, ezért

$$\frac{MK}{MP} = \frac{MH}{MF}, \text{ azaz } MK = \frac{MP \cdot MH}{MF} = \frac{(-1+\sqrt{m^2+1})\sqrt{m^2+1}}{m},$$

$$MK = \frac{-\sqrt{m^2+1} + m^2 + 1}{m}. \tag{2}$$

Nézzük most a gúla MBD átlómetszetét, ez a gúlából az MBD egyenlő szárú háromszöget metszi ki, az élérintő gömbből pedig olyan kört, amely az MB szárat E-ben érinti és középpontja az MF szimmetriatengelyen van. Mivel az élérintő gömb az alapnégyzet oldalait a felezőpontokban érinti, BH és BE közös pontból induló érintőszakaszok, és ezért $BH = BE = 1$.



Az MFB derékszögű háromszögből $MB = \sqrt{m^2+2}$. Az MFB és MEO hasonló derékszögű háromszögek, ezért

$$\frac{MO}{ME} = \frac{MB}{MF}, \quad MO = \frac{ME \cdot MB}{MF} = \frac{(\sqrt{m^2+2}-1)\sqrt{m^2+2}}{m},$$

$$MO = \frac{m^2+2-\sqrt{m^2+2}}{m}. \tag{3}$$

Helyettesítsük be a (2) és (3) alatti értékeket (1)-be, m-mel mindjárt megszorozzuk az egyenlet mindkét oldalát:

$$-\sqrt{m^2+1} + m^2 + 1 + m^2 + 2 - \sqrt{m^2+2} = 2m^2;$$

átrendezve

$$\sqrt{m^2+1} + \sqrt{m^2+2} = 3.$$

Mindkét oldalt négyzetre emeljük és ismét átrendezzük:

$$\sqrt{(m^2+1)(m^2+2)} = 3 - m^2.$$

Végül még egyszer négyzetre emelve mindkét oldalt, rendezés után a

$$9m^2 = 7, \quad m^2 = \frac{7}{9}$$

eredményt kapjuk, ebből m egyetlen lehetséges értéke $m = \frac{\sqrt{7}}{3}$. A gúla térfogata:

$$V = \frac{2^2 \cdot \sqrt{7}}{3 \cdot 3} = \frac{4\sqrt{7}}{9} \approx 1,18.$$

5.2.5. Feladat. (OKTV 2009–2010, II. kategória, döntő, 3. feladat) *Egy társas összejövetelen n ember vett részt. A társaság tagjai közül időnként leült három ember egy ultipartira. Hazamenetelkor megállapították, hogy bármely három ember legfeljebb egy partiban játszott együtt és bármely két ember pontosan két partiban vett részt együtt.*

Milyen n értékekre lehetséges ez, ha $3 < n < 9$?

A feladatot gráfok segítségével oldjuk meg. Legyenek az emberek a gráf csúcsai. Ha három ember lejátszik egy partit, akkor húzzuk be a nekik megfelelő pontok között futó éleket. Így a feladat feltételei szerint az n pontú teljes gráf éleit éppen kétszeresen fedjük háromszögekkel úgy, hogy egy háromszög legfeljebb egyszer szerepelhet.

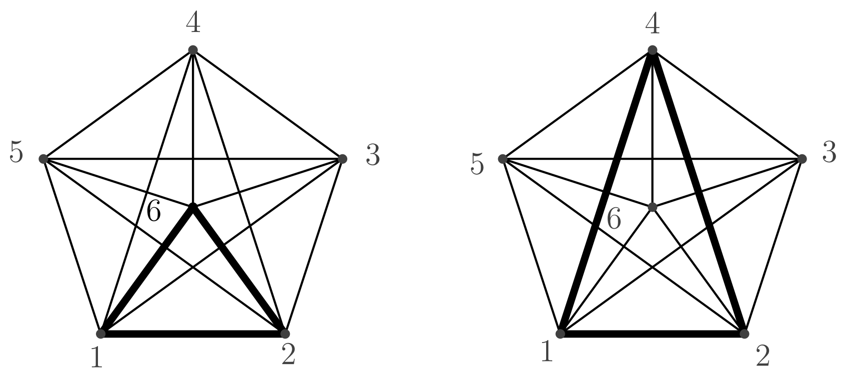
Az n pontú teljes gráfnak éleit kétszer számolva éppen $n(n-1)$-et kapunk, ennek 3-mal oszthatónak kell lennie. Ebből következik, hogy n nem lehet 5 és 8. Minden további szóba jöhető n értékre megadunk egy konstrukciót.

Jelölje a továbbiakban a gráf csúcsait az 1, 2, ..., n. Egy élet a két végpontjával adunk meg, például (1;2). Egy háromszöget a három csúcsával, például (1;3;4). Legyen $n = 4$, ekkor az élek számának kétszerese 12, így 4 háromszögre van szükség. A négy lehetséges háromszög éppen jó lesz, hiszen az 1,2,3,4 számok tetszőleges i, j, k, l permutációja esetén az $(i; j)$ él éppen két háromszögben lesz benne, mégpedig az $(i; j; k)$ és az $(i; j; l)$ háromszögben.

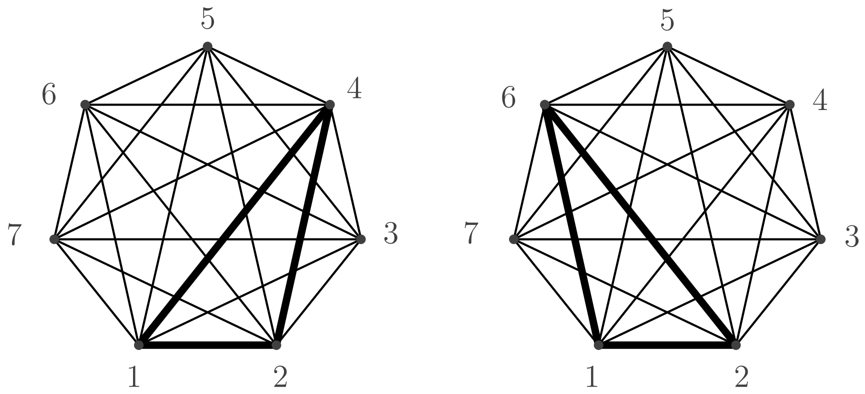
Az $n = 6$ esetben 30 az élek számának kétszerese, tehát 10 háromszög kell. Egy lehetséges megoldás a következő:

$$\begin{array}{ccccc} (1;2;6) & (2;3;6) & (3;4;6) & (4;5;6) & (5;1;6) \\ (1;2;4) & (2;3;5) & (3;4;1) & (4;5;2) & (5;1;3) \end{array}$$

A konstrukciót könnyen ellenőrizhetjük, ha az 1,2,3,4,5 számokat egy szabályos ötszög csúcsainak feleltetjük meg, az ötszög középpontja pedig a 6. A 6-ból induló élek a fenti táblázat első sorában éppen kétszer szerepelnek. Az ötszög két szomszédos csúcsa közt futó él egyszer szerepel a felső, egyszer az alsó sorban, az ötszög átlói pedig éppen kétszer szerepelnek az alsó sorban. Ezt úgy is gondolhatjuk, hogy az ábrán látható két típusú háromszöget forgattuk körbe.



Az $n = 7$ esetben $(7 \cdot 6) : 3 = 14$ háromszögre van szükség. A gráf csúcsai legyenek egy szabályos hétszög csúcsai. A csúcsok közt futó élek hossza háromféle lehet, és mindhárom típusból éppen 7 van. Az ábrán látható két háromszög körbeforgatása jó konstrukciót ad. Így ha i felveszi az 1,2,...,7 értékeket, akkor a háromszögeink $(i; i+1; i+3)$ és $(i; i+1; i+5)$, ahol mindig a számok hetes maradékát tekintjük.



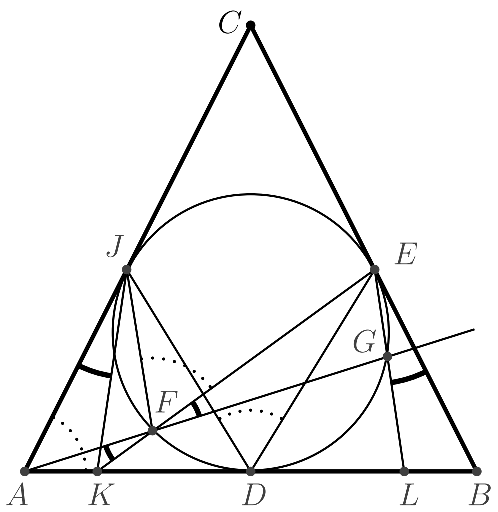
5.3. Nemzetközi versenyek

5.3.1. Feladat. (MEMO 2008, egyéni verseny, 3. feladat) *Az ABC háromszögben $AC = CB$. A beírt kör az AB és BC oldalakat rendre D és E pontokban érinti. Egy A-n áthaladó, de AE-től különböző egyenes a beírt kört F és G pontokban metszi. AB az EF és EG egyeneseket rendre K és L pontokban metszi. Igazoljuk, hogy $KD = DL$.*

A feladattal már találkoztunk a 4. fejezetben (4.2.9.). Itt bemutatunk egy olyan megoldást, ami nem használja a kettősviszonyt, ezzel a megoldással javasoltam a versenyre. Noha a gondolatmenet teljesen elemi, középponti és kerületi szögeket használ és húrnégyszögeket, rájönni mégsem könnyű. Az ábrán nehéz észrevenni a megoldás kulcsát jelentő húrnégyszöget.

Azt az esetet vizsgáljuk, amikor G a rövidebb DE íven van. Az az eset, amikor az FG egyenes nem választja el a D és E pontokat, hasonlóan tárgyalható.

Jelölje AC és a beírt kör közös pontját J. Ekkor $CAB\angle = JDE\angle = JFE\angle$, így $AJFK$ húrnégyszög. Ebben a húrnégyszögben $AJK\angle = AFK\angle$. $AFK\angle = EFG\angle$, hiszen csúcsszögek, $EFG\angle = GEB\angle$ a beírt kör GE ívéhez tartozó kerületi- és érintő szárú kerületi szögek. Azt kaptuk, hogy $AJK\angle = GEB\angle$, amiből következik, hogy AJK és BEL egybevágó háromszögek, ezzel a bizonyítást befejeztük.



5.3.2. Feladat. (MEMO 2009, egyéni verseny, 3. feladat) *Legyen $ABCD$ egy konvex négyszög, melyre AB és CD nem párhuzamosak,* *valamint $AB = CD$. Az AC és BD átlók felezőpontjait E és F jelöli. Az EF egyenes az AB és CD szakaszokat rendre a G és H pontokban metszi. Mutassuk meg, hogy $AGH\angle = DHG\angle$.*

Az általános iskolás versenyeken jól szereplő diákok 2008-as nyári MaMuT táborában tartott foglalkozásokon a területtel kapcsolatos feladatokat oldottunk meg, az ebből készített anyag [7]. Az ott szereplő ötletek felhasználásával készítettem a MEMO feladatot. A feladatnak sok lehetséges megoldása van. Itt egy teljesen elemit mutatunk be, amit egy okos felsős is megérthet, kitalálni azonban nem könnyű.

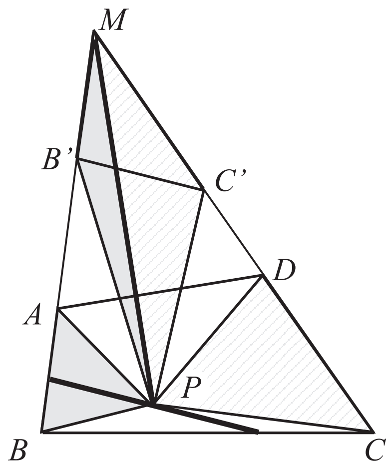
Először egy általános konvex $ABCD$ négyszög esetén vizsgáljuk meg, mi azon P pontok mértani helye a négyszög belsejében, amelyekre az ABP és CDP háromszögek területének összege állandó. Legyen az AB és CD egyenesek metszéspontja M, az M-ből induló A-t tartalmazó félegyenesen legyen B' olyan pont, amelyre $MB' = AB$. Hasonlóan az M-ből induló D-t tartalmazó félegyenesen legyen C', $MC' = CD$. Ekkor

$$T_{ABP} + T_{CDP} = T_{MB'P} + T_{MC'P} = T_{MB'PC'}.$$

Mivel az $MB'PC'$ négyszög három csúcsa adott, ennek területe akkor lesz egy rögzített állandó, ha P egy $B'C'$-vel párhuzamos egyenesen mozog, illetve ennek az $ABCD$ belsejébe eső szakaszán.

Most nézzük meg, hogy a feladat feltételeit hogyan használhatjuk fel. $T_{AFB} = T_{AFD}$, illetve $T_{CFD} = T_{CFB}$ miatt F — és hasonlóan az E pont — rendelkezik azzal a tulajdonsággal, hogy az AFB és CFD háromszögek területeinek összege éppen az $ABCD$ területének a fele. Tehát a feladat szövegében szereplő FE egyenes éppen azon Q pontok mértani helye, amelyekre $T_{ABQ} + T_{CDQ} = \frac{1}{2}T_{ABCD}$.

Másrészt az $AB = CD$ feltételből következik, hogy a P pontok mértani helyeként adódó egyenes merőleges az $AMD\angle$ szögfelezőjére, ezért ugyanakkora szöget zár be az AB és CD egyenesekkel.



5.3.3. Feladat. (IMO 2000.4. feladat) *Egy bűvésznek száz kártyája van, amelyek 1-től 100-ig vannak számozva. Mindegyiket beleteszi három — egy piros doboz, egy fehér doboz és egy kék doboz — valamelyikébe, olymódon, hogy mindegyik dobozban van legalább egy kártya.*

A közönség egy tagja kiválaszt kettőt a három doboz közül és mindegyikből kivesz egy kártyát, majd kihirdeti a kivett kártyákon lévő két szám összegét. Ennek az összegnek az ismeretében a bűvész meg tudja mondani, hogy melyik az a doboz, amiből nem vettek ki kártyát.

Hányféleképpen lehet a kártyákat a dobozokban úgy elhelyezni, hogy ez a mutatvány mindig sikerüljön? (Két elhelyezést különbözőnek tekintünk, ha van legalább egy kártya, ami másik dobozba kerül.)

A feladatnak azt a megoldását mutatjuk itt be, amelyet az olimpiai problémakiválasztó bizottság kapott, így gondoltam ki először. Megjegyezzük, hogy az olimpián a versenyzők közül sokan indukciós gondolatmenettel oldották meg.

Megmutatjuk, hogy 12-féle jó elrendezés van. Egy adott elrendezésben legyen minden szám színe az őt tartalmazó doboz színe: p, f vagy k.

1. eset: Van olyan i, hogy i, $i+1$ és $i+2$ három különböző színű, pl. pfk. Mivel $i+(i+3)=(i+1)+(i+2)$, az $i+3$ színe csak p lehet, különben ez az összeg két különböző színű színpárral is megvalósulna. Ezek szerint három szomszédos, különböző színű szám meghatározza a következőt. Tehát a pfk után p, aztán f, aztán k következik és így tovább. Érvelésünk visszafelé is működik, a pfk előtti szám k, az előtt f stb.

Elég tehát megadni 1, 2 és 3 színét különböző módon, ez 6 lehetőség. Minden ilyen elrendezés valóban jó, mivel a $p+f$, $f+k$, $k+f$ összegeknek más a hármas maradéka.

2. eset: Nincs három különböző színű szomszédos szám. Legyen az 1 színe p. Legyen i a legkisebb nem piros szám, mondjuk f. Legyen a legkisebb kék szám t. Mivel nincs pfk, ezért $i+1<t$.

Tegyük fel, hogy $t<100$. Mivel $i+t=(i-1)+(t+1)$, ezért $(t+1)$ csak p lehet. Ekkor azonban $i+(t+1)=(i+1)+t$ miatt $(i+1)$ csak k lehet, ami ellentmond annak, hogy t a legkisebb kék. Ezért t csak 100 lehet.

Mivel $(i-1)+100=i+99$, a 99 csak f lehet. Megmutatjuk, hogy az 1 p, a 100 k; az összes többi f. Ha $s>1$ p lenne, akkor $s+99=(s-1)+100$ miatt $(s-1)$ csak k lehetne, de a legkisebb kék a 100.

Ebben az esetben a $pff...ffk$ színezést kaptuk, és ez valóban jó is. Ha az összeg 101-nél kisebb, a kimaradó doboz a k; ha az összeg 101, akkor f; ha 101-nél nagyobb, akkor a p maradt ki. Ennél az elrendezésnél az összeg ismeretében pontosan meg tudjuk mondani, mely számokat húzták ki. Most is 6 lehetőségünk van a színek sorrendjét megadni.

6. A magyar IMO csapat kiválasztása

Magyarország csapatának kiválasztása, a hagyományokat követve, nem egyetlen verseny alapján történik. Az éves versenynaptárt időrendben tekintve sorra vesszük, mely versenyek eredményét veszik figyelembe. Az első a Kürschák József verseny október elején. Ezt követi az OKTV döntője és az első válogatóverseny, amely Surányi János emlékverseny néven kerül megrendezésre. Mindkettő március első felében szokott lenni. A tavaszi szünet előtt van a Gillis–Turán verseny, amely a magyar és az izraeli csapat páros versenye. Április végén, vagy májusban van a második válogatóverseny. Az eddig említetteken kívül az angol-magyar téli felkészítő táborban mutatott teljesítmény is számít. A KöMaL pontverseny A és B kategóriájában elért pontszám az utolsó tényező. Mindezeket összevetve általában jól körvonalazódik, mely diákok alkotják a csapatot.

6.1. Válogatóversenyek áttekintése

Az IMO mintájára zajlik a két válogatóverseny, ezeknek a feladatanyagát tekintjük át ebben a fejezetben. A verseny körülményei is az IMO szerintiek: négy és fél óra alatt kell megoldani három feladatot. Az első fél órában tehető fel kérdés a feladatok szövegével kapcsolatban. A feladatokat az összeállítók igyekeznek nehézségi sorrendbe állítani. Így az 1. és a 4. a könnyebb, a 2. és az 5. a közepes és a 3. és 6. a nehéz feladatok.

Az olimpiára a részt vevő országok küldhetnek feladatjavaslatokat, ezekből a problémakiválasztó bizottság készít egy 25–30 feladatot tartalmazó javaslatot, úgynevezett shortlist-et. Ezekből választja ki a nemzetközi zsűri, azaz a csapatvezetők a verseny 6 feladatát. A többi példát egy évig nem hozzák nyilvánosságra, hogy a különböző országok ezeket a feladatokat felhasználhassák saját válogatóversenyeiken. A magyar válogatóversenyeken is leggyakrabban a shortlistről választott példák szerepelnek. Az olimpián a különböző országok kicserélik versenypéldáikat. Ez a feladatkincs a másik fő forrás a feladatokhoz.

Az utóbbi években kialakult rendszer a következő. A központi szakkör vezetője összeállít egy feladatsort, alkalmanként alternatív lehetőségekkel. Ezt a feladatsort elküldi a csapat vezetőjének, Pelikán Józsefnek (ELTE), illetve Kós Gézának (ELTE). Géza több évben tagja volt a problémakiválasztó bizottságnak, ezen kívül ő a KöMaL-ban az A jelű feladatok gazdája. Előfordult már, hogy valamelyikük maga javasolt a válogatóversenyre feladatot. A verseny előtti hetekben a tervezett feladatsort egy volt olimpikon segítségével teszteljük. Ez a kontroll nagyon fontos, segít megítélni a feladatsor nehézségét. A tőlük kapott visszajelzések után alakul ki a végleges változat. A fejezetben 10 év feladatanyagát vizsgáljuk, ez alatt a 10 év alatt Csikvári Péter, Strenner Balázs, Nagy Csaba, Nagy Dániel és Lovász László Miklós végezték az előzetes kontrollt.

Az olimpiai shortlist a feladatokat négy témakör szerint csoportosítja. Az alábbi áttekintésben mi is igyekeztünk e szerint a négy témakör szerint haladni. Meg kell jegyezni, hogy több feladat is egy-egy téma határán mozog, például algebra és kombinatorika, vagy algebra és számelmélet jellegű. A feladatok szövege után megjelöltük a forrást, ahonnan a feladatot választottuk. Ez nem feltétlenül jelzi a feladat eredetét, a példák felbukkanhatnak több helyen, nehéz nyomon követni az igazi forrásukat. Terjedelmi okokból az összes feladat részletes megoldását nem közölhetjük, minden fejezetben találunk három kidolgozott feladatot, amelyek bemutatnak többféle megközelítési módot, az összes feladat pedig tematikusan rendezve szerepel a Függelékben. Végül megjegyzések következnek, amelyek a feladat kiválasztásának didaktikai oldalát világítják meg.

A válogatóversenyek feladatainak összeállítása nehéz munka. Figyelni kell, hogy a feladatsor megfelelő nehézségű, témákat tekintve változatos legyen. Az okos, de kevésbé képzett diák is elérhessen jó eredményt. A feladatok lehetőség szerint érdekesek legyenek. Túl könnyű, vagy nehéz feladat nem húzza szét a mezőnyt, nincs értelme ilyet kitűzni. A többlépcsős feladatok viszont kifejezetten jók, ahol bizonyos részeredmények elérhetők, a teljes megoldás egyre nehezebben meggondolható lépésekből tevődik össze. Hosszú mérlegelés és nagyon sok feladat átnézése előzi meg egy-egy feladatsor elkészítését, ezért ezek összeállítása is komoly matematikai és didaktikai feladat a tanár számára.

6.2. Algebra feladatok

Az algebrai feladatok között az olimpiai shortlisten mindig van egyenlőtlenség, függvényegyenlet és polinomokkal kapcsolatos feladat. Így ezekre a versenyzők külön készülnek, egyre rafináltabb ötletek bevetésére van szükség. A három kiemelt, részletesen bemutatott feladat a 2001.1-es, a 2005.5-ös és a 2004.6-os. Az elsőben algebra és kombinatorika is megjelenik, polinomokkal kapcsolatos. A második olyan egyenlőtlenség, amelyet többféle módon is megközelíthetünk. A harmadikban szerepel függvény, egyenlet, számolás. A feladatok a három nehézségi szintet követik.

6.2.1. Feladat. (2001.1.) *Hány olyan $p(x) = ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex + f$ polinom van, amelynek együtthatói 100-nál nem nagyobb különböző pozitív egészek és $p(x)$ osztható $x^2 + x + 1$-gyel?*

Forrás: Indiai versenyfeladat [1], (58–59 oldal).

Megoldás: Osszuk el a $p(x)$ polinomot $x^2 + x + 1$-gyel:

$$p(x) = (x^2 + x + 1)\big(ax^3 + (b - a)x^2 + (c - b)x + d - c + a\big) +$$
$$+(e + b - d - a)x + (f + c - d - a).$$

Az oszthatóság akkor áll fenn, ha a maradék polinom együtthatói 0-k, azaz $e + b = a + d$ és $f + c = a + d$. Ki kell tehát választanunk az

1,2,...,100 számok közül az a, b, c, d, e, f különböző számokat úgy, hogy ezek páronkénti összegei egyenlők legyenek, $a + d = b + e = c + f = M$. Nézzük meg, egy adott M hányféleképpen írható fel két szám összegeként: Ha $0 < M < 102$, akkor a lehetséges párok (1;$M-1$), (2;$M-2$),...,($M-1$;1). Tehát $M-1$ lehetséges pár van. Páratlan M esetén így mindegyiket kétszer számoltuk, tehát a rendezetlen párok száma $M-1$-nek éppen a fele. Páros M esetén mindegyiket kétszer számoltuk illetve felsoroltuk az ($M/2$; $M/2$) párt is. Tehát a megfelelő rendezetlen párok száma itt $M-2$-nek a fele. Ezt foglaljuk össze:

M értéke	1	2	3	4	5	6	...	99	100	101
rendezetlen párok száma	0	0	1	1	2	2	...	49	49	50

Ha $200 > M > 101$, akkor a megfelelő párok számát vizsgálva csökkenést tapasztalunk. $M = 102$ esetén az 1-et már nem tudjuk használni, a maradék 99 számból alkotható párok (2;100), (3;99), ..., (100;2), de az (51;51) pár nem jó, a többit meg kétszer számoltuk. Hasonlóképpen továbbhaladva a következőt kapjuk:

M értéke	102	103	104	105	106	...	197	198	199
rendezetlen párok	49	49	48	48	47	...	2	1	1

Egy adott M esetén a megfelelő párok közül ki kell választanunk három különbözőt. Mivel a párokban az összeg M, ezért ez valóban hat különböző számot is jelent egyben, azaz a párokban nem lehet azonos szám. A hat szám bármelyike lehet a, ennek párja lesz d. A maradék négy bármelyike lehet b, ennek párja lesz e. Végül a megmaradt két szám közül kiválaszthatjuk, melyik legyen c és a párja lesz f. Ez három rögzített pár esetén $6 \cdot 4 \cdot 2 = 48$ lehetőséget jelent. Végezzük el az összegzést a fenti táblázat alapján. Így megkapjuk a keresett polinomok számát.

$$48 \cdot \left(4 \cdot \left(\binom{1}{3} + \binom{2}{3} + \binom{3}{3} + \binom{4}{3} + ... + \binom{49}{3}\right) + \binom{50}{3}\right) =$$

$$= 48 \cdot \left(4 \cdot \binom{50}{4} + \binom{50}{3}\right).$$

`Megjegyzések:` 1. Az eredeti feladatban az $x^2 + x + 1$-gyel való oszthatóságot másként is elintézhetjük. Ennek a polinomnak a gyökei $-\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$, az 1-től különböző harmadik egységgyökök. Akkor lesz $p(x)$ osztható, ha ezek $p(x)$-nek is gyökei. Behelyettesítve a következőt kapjuk:

$$p\left(-\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = -\frac{1}{2}(a+b-2c+d+e-2f) \pm \frac{\sqrt{3}}{2}(-a+b-d+e)i = 0.$$

A valós és a képzetes rész akkor válik egyaránt 0-vá, ha $a+d = b+e = c+f$.

2. A megoldásban leírt polinomosztást a következő ravasz lépéssel kikerülhetjük:

$p(x) = ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex + f = ax^5 - ax^2 + bx^4 - bx + cx^3 - cx + (a+d)x^2 + (b+e)x + (c+f) = (ax^2 + bx + c)(x^3 - 1) + (a+d)x^2 + (b+e)x + (c+f)$, mivel $(x^3 - 1)$-et osztja $x^2 + x + 1$.

3. A kitűzött példa az indiai versenyfeladat egyszerűsített változata. Az eredeti feladatban $p(x)$ foka $2n - 1$, az együtthatók az $\{1, 2, 3, ..., 2m\}$ halmaz különböző elemei és $p(x)$ osztója az $x^{n-1} + ... + x + 1$ polinom. A megoldást a fentihez hasonló gondolatmenettel kapjuk, az eredmény itt:

$$2^n \cdot n! \cdot \left(4 \cdot \binom{m}{n+1} + \binom{m}{n}\right).$$

4. Az általános esetben az oszthatóság vizsgálata polinomosztással is megy, de sokkal elegánsabb az $x^n - 1$ polinom 1-től különböző gyökeivel dolgozni, jelölje ezeket ω_i (n-edik egységgyökök). Mivel ezek éppen a gyökei $x^{n-1} + ... + x + 1$-nek, ezért mindannyian $p(x)$-nek is gyökei lesznek. Ekkor a $g(x) = (a_{2n-1} + a_{n-1})x^{n-1} + (a_{2n-2} + a_{n-2})x^{n-2} + ... +$

$(a_n + a_0)$ polinomnak is minden ω_i gyöke lesz, tehát $g(x)$ osztható lesz $x^{n-1} + ... + x + 1$-tel. Ez viszont éppen azt jelenti, hogy a megfelelő együtthatók páronkénti összegei egyenlők.

5. A feladat megoldása több lépcsőben történik. Az első az oszthatósági feltételből adódó összefüggés megtalálása az együtthatókra vonatkozóan. A második a leszámlálás része. Az első algebrai, a második kombinatorikai jellegű gondolatmenetet igényel.

6.2.2. Feladat. (2005.5.) *a, b, c, d olyan nemnegatív valós számok, melyekre $a^2 - ab + b^2 = c^2 - cd + d^2$. Igazoljuk a következő egyenlőtlenséget:*

$$(a + b)(c + d) \geq 2(ab + cd).$$

Forrás: Balkán Olimpiára javasolt feladat.

1. megoldás: Legyen $a^2 - ab + b^2 = c^2 - cd + d^2 = x$. Ekkor

$$x = (a + b)^2 - 3ab = (a - b)^2 + ab \geq ab. \tag{1}$$

Ugyanígy $x \geq cd$. A feladatban kitűzött egyenlőtlenség mindkét oldala nemnegatív, ezért ezzel ekvivalens, ha mindkét oldalt négyzetre emeljük és úgy vizsgáljuk. A bal oldal:

$$(a + b)^2(c + d)^2 = (x + 3ab)(x + 3cd) = x^2 + 3x(ab + cd) + 9abcd.$$

Mivel $x \geq ab$ és $x \geq cd$, ezért:

$$3x(ab + cd) \geq 3a^2b^2 + 3c^2d^2. \tag{2}$$

Feltehető, hogy $ab \geq cd$, ezért:

$$abcd \geq c^2d^2 \tag{3}$$

$$8abcd + x^2 \geq 8abcd + a^2b^2 \tag{4}$$

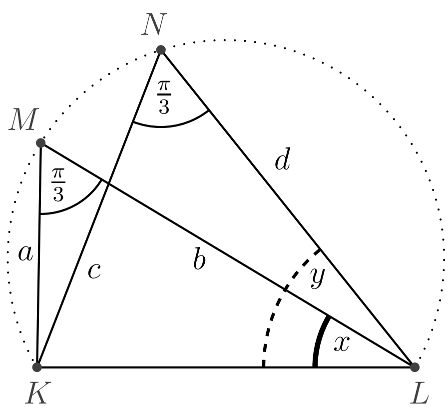
Az (2), (3), (4) egyenlőtlenségek megfelelő oldalait összeadva éppen a bizonyítandó egyenlőtlenség négyzetét kapjuk:

$$x^2 + 3x(ab + cd) + 9abcd \geq 4a^2b^2 + 4c^2d^2 + 8abcd$$

Mivel a feladat feltétele szerint a változók nemnegatívak, ez ekvivalens a bizonyítandóval.

Vizsgáljuk meg, mikor lehet egyenlőség. (1) és (4) alapján $a = b$, (3) miatt vagy $c = d$, és ekkor $a = b = c = d$, vagy a másik lehetőség, hogy $cd = 0$, ebből új esetként adódik, ha három változó egyenlő és a negyedik értéke 0.

2. megoldás: A feladat feltétele emlékeztet egy koszinusztételre: a KLM és KLN háromszögekben az M és N pontoknál levő szög $\frac{\pi}{3}$, $KM = a$, $LM = b$, $KN = c$ és $LN = d$. Legyen a KLM és KLN háromszögek köré írt kör sugara R, $KLM\angle = x$, $KLN\angle = y$. Feltehető, hogy $a \leq b$ és $c \leq d$, azaz x és y $\frac{\pi}{3}$-nál nem nagyobb hegyesszögek.



Ekkor a bizonyítandó állítás a szinusztétel alapján így írható:

$$\left(\sin x + \sin\left(\frac{2\pi}{3} - x\right)\right)\left(\sin y + \sin\left(\frac{2\pi}{3} - y\right)\right) \geq$$

$$\geq 2\left(\sin x \sin\left(\frac{2\pi}{3} - x\right) + \sin y \sin\left(\frac{2\pi}{3} - y\right)\right)$$

A következő trigonometrikus átalakításokat végezzük:

$$\sin x + \sin\left(\frac{2\pi}{3} - x\right) = \sqrt{3}\cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right)$$

$$2\sin x \sin\left(\frac{2\pi}{3} - x\right) = \cos\left(\frac{2\pi}{3} - 2x\right) - \cos\frac{2\pi}{3} =$$

$$= 2\cos^2\left(\frac{\pi}{3} - x\right) - \frac{1}{2}$$

Most egyenlőtlenségünk a következő alakban írható:

$$3\cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right)\cos\left(\frac{\pi}{3} - y\right) + 1 \geq 2\cos^2\left(\frac{\pi}{3} - x\right) + 2\cos^2\left(\frac{\pi}{3} - y\right)$$

Mivel x és y $\frac{\pi}{3}$-nál nem nagyobb hegyesszögek, ezért $\cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right)$ és $\cos\left(\frac{\pi}{3} - y\right)$ $\frac{1}{2}$ és 1 közötti számok. Legyen $\cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right) = 1 - u$ és $\cos\left(\frac{\pi}{3} - y\right) = 1 - v$. Ezt felhasználva és átalakítva a bizonyítandó:

$$3uv + u + v \geq 2u^2 + 2v^2$$

Mivel u és v 0 és $\frac{1}{2}$ közötti számok, ezért $u \geq 2u^2$ és $v \geq 2v^2$ és ezzel a bizonyítást befejeztük.

`Megjegyzés:` A feladat több megközelítése mellett rámutatunk a matematikai háttérre. Az általánosság rovása nélkül feltehető, hogy $a^2 - ab + b^2 = c^2 - cd + d^2 = 1$, tehát gondolhatunk az $x^2 - xy + y^2 = 1$ másodrendű görbe pontjaira. Egy ellipszisről van szó, melynek tengelyei az $y = x$ és $y = -x$ egyenesekre illeszkednek, ezért természetesen adódik a következő transzformáció: $u = \frac{x+y}{2}$ és $v = \frac{\sqrt{3}(x-y)}{2}$, ahol $u^2 + v^2 = 1$. Ezt a transzformációt a bizonyítandó egyenlőtlenségbe írva megkaphatjuk a 2. megoldás végjátékát.

6.2.3. Feladat. (2004.6.) *Az a, b, c valós számokat úgy választottuk, hogy pontosan egy olyan négyzet van, melynek minden csúcsa rajta van az $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ függvény grafikonján. Igazoljuk, hogy a négyzet oldala $\sqrt[4]{72}$.*

Forrás: Olimpiára javasolt feladat [11]

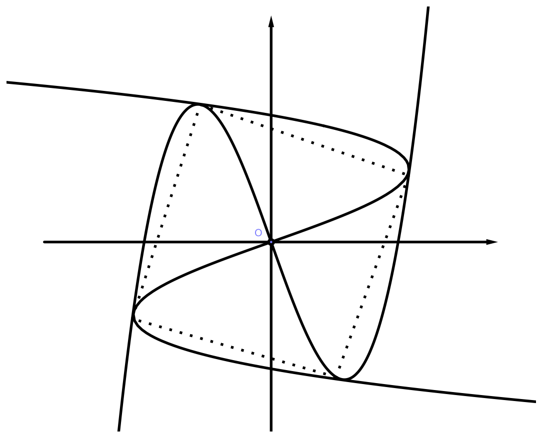
1. megoldás: Először kissé kényelmesebbé tesszük a számolást. A grafikont eltolhatjuk x irányban ($x' = x + \frac{a}{3}$ helyettesítéssel), majd y irányban egy megfelelő konstans hozzáadásával. Így a vizsgált függvényt elég

$$y = x^3 + bx \tag{1}$$

alakban keresnünk. (Persze az itt szereplő b más lesz, mint az eredeti alakban, lényeg, hogy egy konstans.) Ez páratlan függvény, szimmetrikus az origóra. A feladatban említett négyzet középpontja tehát szükségképpen az origó, hiszen különben a négyzetet az origóra tükrözve minden csúcs továbbra is a grafikonon lenne, így egynél több négyzet is lenne. Forgassuk el a négyzetet $90°$-kal az origó körül, így önmagára került, csúcsai pedig rajta vannak a grafikon elforgatottján, melynek egyenlete

$$-x = y^3 + by. \tag{2}$$

Feladatunk a következőképpen módosult: keressük azt a b számot, melyre az (1–2) egyenletrendszernek négy megoldása van az origón kívül. Végezzünk algebrai átalakításokat:



$$y = x^3 + bx \quad \Rightarrow \quad x^3 = y - bx \quad \Rightarrow \quad x^6 = (y - bx)^2$$

$$-x = y^3 + by \quad \Rightarrow \quad y^3 = -x - by \quad \Rightarrow \quad y^6 = (x + by)^2$$

A felső sorból kivonjuk az alsót. A bal oldal:

$$x^6 - y^6 = (x^2 + y^2)(x^4 - x^2y^2 + y^4).$$

A jobb oldal:

$$y^2 - 2bxy + b^2x^2 + x^2 + 2bxy + b^2y^2 = (x^2 + y^2)(1 + b^2),$$

azaz

$$(x^2 + y^2)(x^4 - x^2y^2 + y^4) = (x^2 + y^2)(1 + b^2).$$

Mindkét oldalon szerepel az $x^2 + y^2$, az $x = y = 0$ tehát megoldás. Mivel minket a többi megoldás érdekel, egyszerűsítünk és a bal oldalt kicsit átalakítjuk:

(3) $$(x^2 + y^2)^2 - 3x^2y^2 = 1 + b^2$$

Most tekintsük az (1) és (2) egyenletek megfelelő oldalainak szorzatát:

$$-xy = x^3y^3 + bxy(x^2 + y^2) + b^2xy.$$

Osztunk xy-nal:

$$-1 = x^2y^2 + b(x^2 + y^2) + b^2. \tag{4}$$

A (4) egyenletből kifejezzük x^2y^2-et és a kapott eredményt beírjuk (3)-ba:

$$(x^2 + y^2)^2 + 3(1 + b(x^2 + y^2) + b^2) = 1 + b^2. \tag{5}$$

Ez egy másodfokú egyenlet $d = (x^2 + y^2)$-re, azaz a négyzet csúcsának az origótól való távolságára, pontosabban annak négyzetére. Mi azt szeretnénk, ha csak egy megoldás lenne. A megfelelő diszkrimináns értéke 0, azaz $(3b)^2 - 8(1 + b^2) = 0$, amiből $b = \pm\sqrt{8}$. Ekkor az (5)-ben kapott másodfokú egyenlet megoldása $d = x^2 + y^2 = \frac{-3b}{2}$, mivel d csak pozitív lehet, ezért $b = -\sqrt{8}$. Mivel $d = 3\sqrt{2}$, a négyzet oldala $\sqrt[4]{72}$.

Amennyiben az (5)-nél kapott másodfokú egyenlet diszkriminánsa pozitív, akkor a gyökök és együtthatók közötti összefüggés miatt a két gyök szorzata $d_1d_2 = 1 + b^2$, ez pozitív, így mindkét gyök azonos előjelű. Azaz ha van megoldás, akkor azonnal kettő is van. Ezt a feladat feltétele nem engedi meg.

2. megoldás: Az előző megoldás gondolatmenetével indítunk, de másképpen nyúlunk a kulcsszerepet képező (1–2) egyenletrendszerhez. Egyszerűen behelyettesítünk az (1)-ben kapott y-nal (2)-be:

$$-x = (x^3 + bx)^3 + b(x^3 + bx).$$

Rendezzünk 0-ra és osszunk x-szel, hiszen az $x = 0$ megoldással már nem kell foglalkoznunk:

$$x^8 + 3bx^6 + 3b^2x^4 + b(b^2 + 1)x^2 + b^2 + 1 = 0. \tag{6}$$

Legyenek a keresett négyszög csúcsai (u,v), $(-v,u)$, $(-u,-v)$, $(v,-u)$. Az (1) és (2) görbéi a négyszög csúcsaiban érintik egymást, ezért a (6)-ban kapott nyolcadfokú egyenletnek u, $-u$, v és $-v$ mind kétszeres gyökei lesznek, így:

$$x^8 + 3bx^6 + 3b^2x^4 + b(b^2+1)x^2 + b^2 + 1 = (x^2 - u^2)^2(x^2 - v^2)^2 = 0.$$

Hasonlítsuk össze a megfelelő együtthatókat, x^6 és x^0 esetében $3b = -2u^2 - 2v^2$ illetve $b^2 + 1 = u^4v^4$. Mivel x^2 együtthatójából $b(b^2+1) = -2u^2v^2(u^2+v^2)$, az előzőek felhasználásával

$$b(b^2+1) = -2\frac{u^2+v^2}{3}u^4v^4 = -2u^2v^2(u^2+v^2).$$

Ezek szerint $u^2v^2 = 3$ és így az x^0 együtthatójából $b^2 = 8$. Tekintve az x^6 együtthatójából adódó összefüggést csak $b = -\sqrt{8}$ lehet a megoldás és innen a befejezés az előző megoldás alapján történik. Mostani jelölésünkkel $d = (u^2 + v^2)$.

3. megoldás: (Kis Gergely megoldása alapján.) Az első megoldásból kapott (1) és (2) egyenletektől indulunk és meghatározzuk b értékét. Legyen $g = y/x$, ekkor kiindulási egyenleteink így alakulnak:

$$gx = x^3 + bx \quad \text{és} \quad g^3x^3 + bgx = -x.$$

Az első egyenletet g^3-nal szorozzuk, hozzáadjuk a második megfelelő oldalait:

$$g^4x + g^3x^3 + bgx = g^3x^3 + g^3bx - x.$$

Osztunk x-szel és 0-ra rendezünk:

$$g^4 - g^3b + bg + 1 = 0. \tag{7}$$

Ez egy úgynevezett reciprok típusú egyenlet, ha leosztunk g^2-tel, $z = \frac{1}{g} - g$ helyettesítéssel a következő adódik:

$$z^2 + bz + 2 = 0. \tag{8}$$

Ennek az egyenletnek egyetlenegy megoldása lehet, azaz $b^2 = 8$. Ha $b > 0$, akkor az (1)-ben szereplő függvény szigorúan monoton növekvő, a 90°-os elforgatottjával ilyenkor csak az origóban metszhetik egymást. A $b = -\sqrt{8} < 0$ esetben (8) alapján $z = \sqrt{2}$ és a megfelelő g értékek $g_{1,2} = \frac{-\sqrt{2}\pm\sqrt{6}}{2}$. A két g érték a megoldás elején ábrázolt négyzet átlóinak meredekségét adja. Ezek közül a pozitívat $g_1 = \sqrt{2-\sqrt{3}}$ alakban is írhatjuk.

Behelyettesítve g_1 és b értékét a $gx = x^3 + bx$ egyenletbe a gyökök $x_{1,2} = \pm\sqrt{\sqrt{2-\sqrt{3}}+\sqrt{8}}$. Behelyettesítve $x^2 + y^2 = x^2(1 + g^2)$-be megkapjuk a négyzet átlója felének négyzetét, ebből pedig számolhatjuk a négyzet oldalát.

`Megjegyzés:` Kevés diák oldotta meg a feladatot, tanulságos volta ellenére érdemesebb úgy feladni, ha hosszabb gondolkodási idő áll rendelkezésre. A megoldáshoz a szép ötletek mellett szükséges megfelelő számolási, algebrai rutin.

6.3. Geometria feladatok

Az olimpián kialakult hagyomány szerint a három feladat között mindig van egy geometria. Mivel több országban a tananyagban térgeometria egyáltalán nem szerepel, ezért ebből a témakörből az utóbbi húsz évben már nem volt feladat. A feladatok kiválasztásánál ügyelnek arra, hogy egyszerű analítikus úton lehetőleg ne legyen kézenfekvő a feladat megoldása. A kitartó koordinátageometriai számolás vagy a vektorok, illetve komplex számok virtuóz használata is teljes megoldásokhoz vezethet. A 2004.2-es feladatban három különböző megoldást mutatunk be, ügyesen használva a transzformációk tulajdonságait. A 2008.3-as feladattal már találkoztunk a 4. fejezetben (4.2.11.), itt bemutatunk két további megoldást. Az igazán nehéz feladatok közé sorolhatjuk a 2010.6-os problémát.

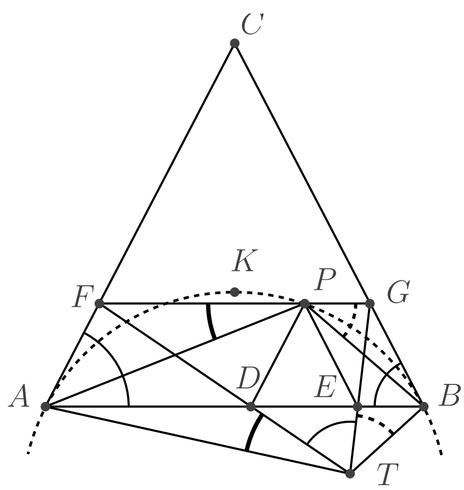
6.3.1. Feladat. (2004.2.) *Az ABC háromszögben $AC = BC$, a* *beírt kör középpontja K. Legyen P az AKB háromszög köré írt kör olyan pontja, mely az ABC háromszög belsejében van. Párhuzamosakat húzunk P-n át az AC és BC szárakkal. Ezek AB-t rendre a D és E pontokban metszik. Párhuzamost húzunk P-n át AB-vel is, ez AC-t és BC-t rendre az F és G pontokban metszi. Igazoljuk, hogy a DF és EG egyenesek metszéspontja az ABC köré írt körön van.*

Forrás: 2003-as IMO shortlist G.3. feladata.

1. megoldás: Legyen a DF és EG egyenesek metszéspontja T. A beírt kör K középpontjára

$$AKB\angle = 90° + \frac{ACB\angle}{2} = 180° - \alpha.$$

Mivel P rajta van az AKB köré írt körön, ezért $APB\angle = AKB\angle = 180° - \alpha$, így $APB\angle = FPE\angle = DPG\angle$. Ez azt jelenti, hogy az $ADPF$ paralelogrammát egy P körüli $180° - \alpha$ szögű forgatva nyújtás viszi a $BGPE$ paralelogrammába. Így az FD egyenes a képével, GE egyenessel ugyanekkora szöget zár be, tehát $FTG\angle = \alpha$.



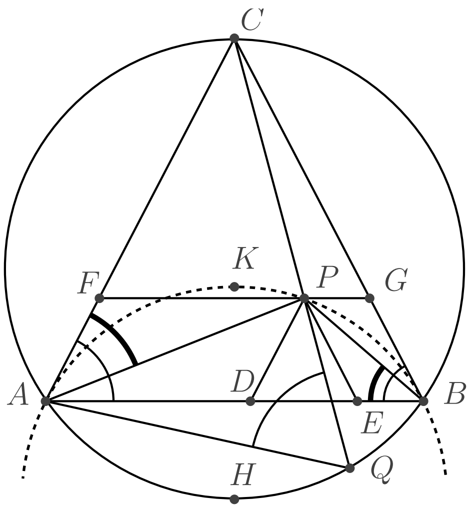
A $DBGP$ húrtrapéz köré írt körön rajta van T, hiszen DG ugyanakkora szögben látszik B-ből és T-ből. Ezen húrötszögben GB-hez tartozó kerületi szögek $GTB\angle = GPB\angle$. Ugyanilyen gondolatmenettel az $AFPET$ húrötszög és $FTA\angle = FPA\angle$. Mivel

$$GPB\angle + FPA\angle = 180^\circ - APB\angle =$$

$$180^\circ - (180^\circ - \alpha) = \alpha = GTB\angle + FTA\angle,$$

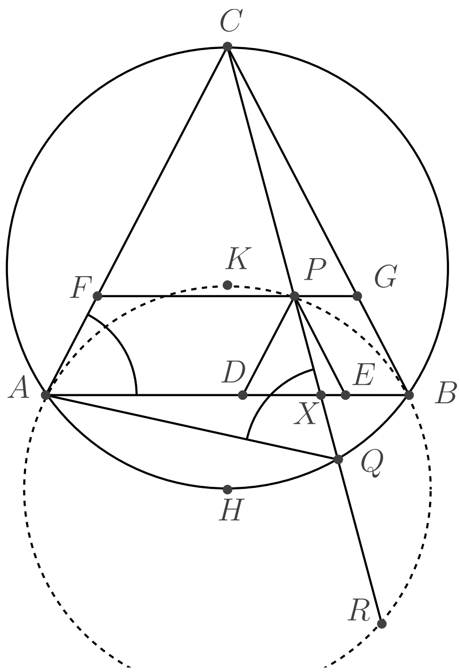
ezért $ATB\angle = 2\alpha$, és így $ATBC$ húrnégyszög, T valóban az ABC köré írt kör pontja.

2. megoldás: Mivel a CGF és PED háromszögek oldalai párhuzamosak, ezért középpontosan hasonlók. Így az FD, GE és CP egyenesek éppen a hasonlósági pontban találkoznak. Ezt fogjuk kihasználni, jelölje CP egyenesének az ABC köré írt körrel vett C-től különböző metszéspontját Q. Megmutatjuk, hogy F, D és Q egy egyenesen vannak. Még egy észrevétel elöljáróban: az AKB köré írt kör középpontja az ABC köré írt kör AB ívének felezőpontja, ami esetünkben éppen a C-vel átellenes H pont, tehát HA merőleges AC-re, és így AC érintője a szaggatottal jelölt H középpontú HA sugarú körnek.



$AQBC$ húrnégyszög, ezért $AQC = \alpha$. Ebből következik, hogy $AQPF$ is húrnégyszög, hiszen $PQA = \alpha$ és $AFP\angle = 180° - \alpha$. Ez utóbbi húrnégyszögben $PQF\angle = PAF\angle$. Bebizonyítjuk, hogy a $PQD\angle$ is ugyanekkora. Mivel $QBA\angle = QCA\angle = QPD\angle$, ezért $QBPD$ húrnégyszög és $PQD\angle = PBD\angle$. Viszont a $PBD\angle$ az AKB háromszög köré írt körben a PA ívhez tartozó kerületi szög, a $PAF\angle$ pedig éppen ehhez az ívhez tartozó érintő szárú kerületi szög. Ugyanígy G, E és Q is kollineáris, a bizonyítást befejeztük.

3. megoldás: (Kocsis Albert Tihamér megoldása alapján.) Legyen most is CP metszéspontja az ABC köré írt körrel Q. A PDE, CAB és CFG háromszögek oldalai párhuzamosak, ezért hasonlók. Messe a CP egyenes AB-t X-ben. Ekkor X-ből nagyítjuk PDE-t CAB-be, majd C-ből kicsinyítjük CAB-t CFG-be. A hasonlóságok aránya $XC : XP$, majd $CP : CX$. A két nagyítás egymásutánja helyettesíthető eggyel, melynek aránya $CP : XP$ és az eredő nagyítás középpontja az XC egyenesen kell legyen. Ha $CP : XP = 1$ lenne, akkor a két nagyítás eredménye egy eltolás lenne. Tervünk a következő: megmutatjuk, hogy Q fixpont, tehát nem lehetett eltolás. Eszerint valóban nagyítás viszi PDE-t CFG-be, ennek csak egyetlen fixpontja lehet, az eredő nagyítás középpontja Q.



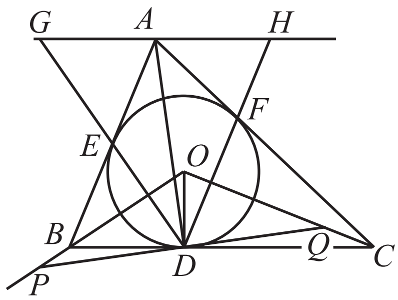
Legyen a PC egyenesnek az AKB köré írt körrel vett másik metszéspontja R. Felírjuk X hatványát a két körre $XR \cdot XP = XA \cdot XB = XQ \cdot XC$. Tehát $XR = XQ \cdot \frac{XC}{XP}$, így Q az X középpontú nagyításnál R-be megy át. Teljesülnie kell, hogy a C középpontú $CP : CX$ kicsinyítés R-et Q-ba viszi. Azaz $CQ \cdot CX = CR \cdot CP$ a bizonyítandó. Az előző megoldásból felhasználjuk, hogy CA érintő, és így C hatványa az AKB köré írt körre $CA^2 = CP \cdot CR$. Elég lenne belátni, hogy $CA^2 = CQ \cdot CX$, azaz hogy CAQ és CXA hasonló háromszögek. Ez viszont teljesül, mert C-nél ugyanakkora szögük van és A-nál, illetve Q-nál mindkettőben éppen α szög van. Ezzel a bizonyítást befejeztük.

`Megjegyzés:` P lehet az ABC háromszögön kívül, akkor is igaz marad az állítás.

6.3.2. Feladat. (2008.3.) *Legyen az ABC háromszög beírt körének BC-n lévő érintési pontja D. Igazoljuk, hogy az AD-re D-ben állított* *merőlegesnek a B, illetve C csúcsnál lévő belső szögfelező közti szakaszát D felezi.*

Forrás: BOHNER GÉZA, a budapesti Szent István Gimnázium tanára tűzte ki a feladatot a KöMaL fórum geometria rovatának 20-as feladataként [20].

1. megoldás: Legyen a beírt kör középpontja O, érintési pontjai AB és AC oldalon rendre E és F. Párhuzamost húzunk A-n át BC-vel, ez ED és FD egyeneseket rendre G és H-ban metszi. Az AD-re D-ben állított merőleges a B-ből és C-ből induló szögfelezőket rendre P és Q-ban metszi.



BED és AGE háromszögek hasonlóak, hiszen oldalaik párhuzamosak. Mivel $BE = BD$, ezért $AG = AE$. Ugyanígy CFD és AHF is hasonlóak, ebből $AH = AF$. Mivel $AE = AF$, ezért $AG = AH$. ODP és GAD háromszögek hasonlóak, hiszen oldalaik páronként merőlegesek. Megfelelő oldalaik aránya egyenlő, azaz $AD : AG = DP : DO$. Ugyanígy ODQ és HAD is hasonlóak, amiből $AD : AH = DQ : DO$. Mivel $AG = AH$, ezért az iménti összefüggések bal oldala ugyanakkora, tehát a jobb oldala is, amiből $DP = DQ$ következik és ezzel az állítást beláttuk.

`Megjegyzés:` Joggal vetődik fel a kérdés, mi motiválja E és F bejelölését és az A-n át BC-vel húzott egyenes megrajzolását. Legyen az

O-n áthaladó AD-re merőleges egyenes d. Az, hogy $DP = DQ$ a projektív geometria nyelvén éppen azt jelenti, hogy $(OB, OC, OD, d) = (DE, DF, BC, DA) = -1$. Azaz a BC-vel húzott párhuzamosok DE és DF közti szakaszát DA felezi. A fenti megoldás éppen ennek megmutatásával indult. A projektív geometriai megoldást részletesen és megfelelően előkészítve a 4.2.11. feladatban láthattuk.

2. megoldás: Helyezzük el a háromszöget a koordináta-rendszerben a következőképpen: legyen az egyszerűbb kezelhetőség érdekében a beírt kör sugara egységnyi, középpontja az y tengelyen, és legyen a BC oldal az x tengelyen. A D pont az origóban van, a B csúcs távolsága az origótól u, a C csúcs távolsága az origótól v, ahol $u > 0$ és $v > 0$, így a csúcsok koordinátái $B(-u; 0)$, $C(v; 0)$. A B-ből és C-ből induló szögfelezők meredeksége

$$\operatorname{tg}\frac{\beta}{2} = \frac{1}{u}, \quad \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} = -\frac{1}{v}.$$

A szögfelező tulajdonsága miatt az oldalegyenesek meredeksége:

$$\operatorname{tg}\beta = \operatorname{tg}\left(2 \cdot \frac{\beta}{2}\right) = \frac{2u}{u^2 - 1}, \quad \operatorname{tg}\gamma = \operatorname{tg}\left(2 \cdot \frac{\gamma}{2}\right) = -\frac{2v}{v^2 - 1}.$$

A szögfelezők egyenlete:

$$f_b: \quad y = \frac{1}{u}(x + u) \quad \text{és} \quad f_c: \quad y = -\frac{1}{v}(x - v).$$

Az oldalegyenesek egyenlete:

$$AB: \quad y = \frac{2u}{u^2 - 1}(x + u) \quad \text{és} \quad AC: \quad y = -\frac{2v}{v^2 - 1}(x - v).$$

Az AB és AC oldalegyenesek metszéspontja az A csúcs, ami az előző egyenletrendszerből

$$A\left(\frac{u - v}{uv - 1}; \frac{2uv}{uv - 1}\right).$$

A D ponton áthaladó AD-re merőleges egyenes egyenlete

$$(u-v)x+2uvy=0.$$

Számítsuk ki mindkét belső szögfelezővel a metszéspontját, ezek

$$P\left(-\frac{2uv}{u+v};\frac{u-v}{u+v}\right) \quad \text{és} \quad Q\left(\frac{2uv}{u+v};-\frac{u-v}{u+v}\right).$$

A két metszéspont valóban az origóra szimmetrikusan helyezkedik el.

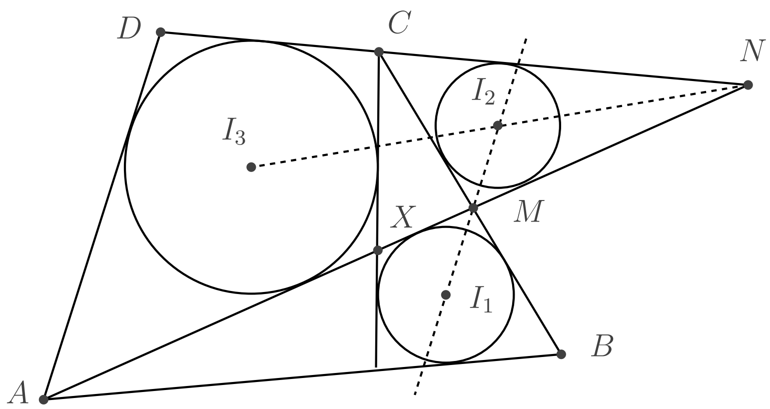
`Megjegyzés:` A koordinátageometriai utat sokan nem tartják olyan elegánsnak, a diákok között viszont meglehetősen népszerű. Ha a feladat egyáltalán kiszámolható, akkor is érdemes ügyesen felvenni a koordináta-rendszert, és a számolásokat minél körültekintőbben végezni. Gyakori csapda, hogy a diák oldalakon át számol, óriási képleteket, formulákat hoz létre, és belegabalyodik ezekbe. Az olimpián az ehhez hasonló megoldásokat szigorúan értékelik, általában egyszerűen lenullázzák.

6.3.3. Feladat. (2010.6.) *Az $ABCD$ érintőnégyszög A csúcsán átmenő e egyenes a BC szakaszt az M, a CD egyenest az N pontban metszi. Legyen az ABM, MNC és NDA háromszög beírt körének középpontja rendre I_1, I_2, I_3. Igazoljuk, hogy az $I_1I_2I_3$ háromszög magasságpontja az e egyenesen van.*

Forrás: 2009-es IMO shortlist G.8. feladata.

Megoldás: Ismeretes, hogy egy háromszög síkjában fekvő e egyenesnek a háromszög oldalegyeneseire vonatkozó tükörképei akkor és csak akkor mennek át egy ponton, ha az e egyenes áthalad a háromszög magasságpontján. Ezt használjuk fel az $I_1I_2I_3$ háromszögre és az AN egyenesre. A háromszög I_1I_2 oldalára tükrözve az AN egyenest a BC egyenest kapjuk, hiszen I_1I_2 felezi AN és BC szögét. A háromszög I_2I_3 oldalára tükrözve az AN egyenest a DC egyenest kapjuk, hiszen

I_2I_3 felezi AN és DC szögét. Ezen két tükörkép közös pontja C. Elegendő azt megmutatnunk, hogy AN-nek I_1I_3-ra vonatkozó tükörképe átmegy C-n. Erre két különböző gondolatmenetet is mutatunk.



(i) Mivel AN az I_1 és I_3 középpontú körök egyik közös belső érintője, ennek I_1I_3-ra vonatkozó tükörképe a másik közös belső érintő. A bizonyításból hiányzó részt úgy látjuk be, hogy megmutatjuk, a C-ből az I_1 középpontú körhöz húzott CB-től különböző érintő érinti az I_3 középpontú kört. Legyen ennek az érintőnek és AN-nek a metszéspontja X. Alkalmazzuk az érintőnégyszögek tételét az $ABCX$ konkáv négyszögre:

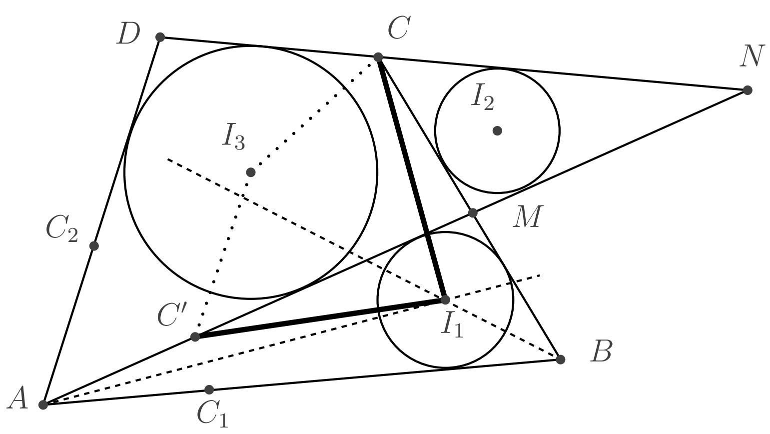
$$AB + CX = BC + XA. \tag{1}$$

Adjuk ennek megfelelő oldalaihoz az $ABCD$ érintőnégyszög oldalaira fennálló $AD + BC = AB + CD$ megfelelő oldalait. A mindkét oldalon megjelenő tagok elhagyása után kapjuk:

$$AD + CX = CD + XA.$$

Ez viszont az érintőnégyszögek tételének megfordítása miatt azt jelenti, hogy $AXCD$ érintőnégyszög, azaz CX érinti az I_3 középpontú kört. Ezzel a bizonyítást befejeztük.

(ii) Legyen C tükörképe BI_1-re C_1, DI_3-ra C_2. C_1 az AB, C_2 az AD egyenesen van, $AC_1 = AB - BC = AD - DC = AC_2$. Tükrözzük C_1-et AI_1-re, C_2-t AI_3-ra, a tükörkép $AC_1 = AC_2$ miatt ugyanaz a C' pont lesz.



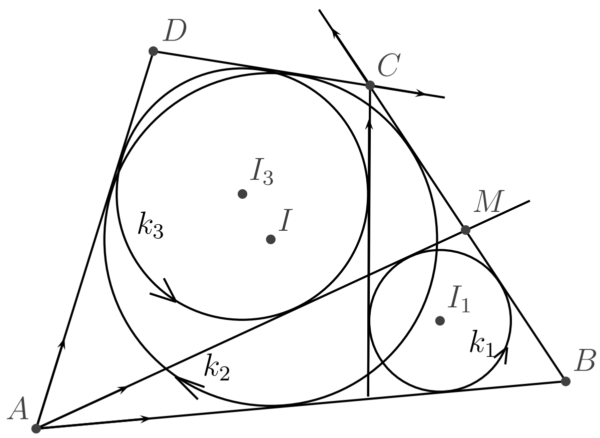
Most nézzük meg, tükrözéseinkből mit kapunk. C-t tükröztük BI_1-re, majd tovább AI_1-re, ezek szorzata I_1 körüli forgatás, ezért $I_1C = I_1C'$. Ugyanígy kapjuk, hogy $I_3C = I_3C'$. Ezek szerint C' tükörképe I_1I_3 egyenesére C. Mivel C' az AM egyenes pontja, ezért AM-nek az I_1I_3-re vonatkozó tükörképe átmegy C-n.

`Megjegyzés:` A feladat az olimpiai shortlist utolsó geometria feladata volt, nagyon nehéz feladat. A válogatóversenyen teljes megoldást egyetlen versenyző adott rá, Frankl Nóra. Többen eljutottak addig a felismerésig, hogy a bizonyítandó: AN-nek I_1I_3-ra vonatkozó tükörképe átmegy C-n.

A feladat szövege szerint $ABCD$ érintőnégyszög. Ez az elnevezés a középiskolai gyakorlat szerint arra vonatkozik, hogy létezik olyan kör, amelyik a négyszög minden oldalát érinti. Ezért nem vizsgáltuk azt az esetet, amikor $ABCD$ konkáv és van olyan kör, ami minden oldalának egyenesét érinti.

Hraskó András hívta fel a figyelmet a feladat egy másik megoldására. Ismeretes, hogy amennyiben egy ABC háromszög síkjában levő P pont esetén az AP, BP és CP egyeneseket tükrözzük a megfelelő csúcsokból induló szögfelezőkre, a tükörképek is egy ponton mennek át, jelölje ezt P'. Az ABC háromszögre vonatkozóan P és P' egymás izogonális konjugáltjai. Az izogonális konjugáltnak egy erősebb változatát adja az alábbi tétel:

Tétel: (Casey–Hart–Malfatti) Adott három irányított kör: k_1, k_2 és k_3. Az e_3, f_3 irányított egyenesek k_1-et érintik, k_2-t antiérintik. Az e_2, f_2 egyenesek k_3-at érintik, k_1-et antiérintik, míg e_1 és f_1 érintik k_2-t, k_3-at antiérintik. Az e_1, e_2 és e_3 egyenesek pontosan akkor mennek át egy közös E ponton, ha f_1, f_2 és f_3 átmennek egy közös F ponton.



A feladatban szereplő körök és egyenesek szereposztása a fenti tételnek megfelelően a következő. Legyen k_1 és k_3 az ABM és NDA háromszögek beírt körei pozitív körüljárással, k_2 az $ABCD$ beírt köre negatív körüljárással. Legyen $e_3 = AB$, $f_3 = BC$, ezek érintik k_1-et és antiérintik k_2-t. Legyen $e_1 = AD$, $f_1 = DC$, ezek érintik k_2-t és antiérintik k_3-at. A harmadik egyenespár $e_2 = AM$ és f_2, ezek érintik k_3-at és antiérintik k_1-et. Mivel $e_1 = AD$, $e_2 = AM$ és $e_3 = AB$ egyenesek az A ponton haladnak át, ezért az $f_1 = DC$, f_2 és $f_3 = BC$ is egy ponton haladnak át, azaz f_2 is áthalad a másik kettő metszéspontján, C-n.

Ezt a gondolatmenetet még érdekesebbé teszi, hogy megmutatható, az E és F pontok egymás izogonális konjugáltjai a három kör középpontjai által alkotott háromszögre vonatkozóan, tehát a feladatban szereplő A és C pontok egymás izogonális konjugáltjai az I_1I_3I háromszögre nézve, ahol I az $ABCD$ négyszög beírt körének középpontja.

6.4. Kombinatorika feladatok

A kombinatorika feladatok változatos témákat érintenek. A bemutatásra kerülő könnyebb feladat a 2008.1-es halmazokkal kapcsolatos, a közepes nehézségű 2010.5-ös trükkös leszámlálós feladat. A nehéz feladat a 2003.3-as irányított gráfokkal leírható probléma. Az olimpián a magyar versenyzők a kombinatorika feladatoknál jól szerepelnek.

6.4.1. Feladat. (2003.3.) *Egy sakk körmérkőzésen k ember vett részt és mindenki mindenkivel egyszer játszott. Miután az összes mérkőzés lezajlott, kiderült, hogy bármely 4 versenyző között van olyan, aki a többi három versenyző közül egyet megvert, egytől kikapott, a harmadikkal döntetlenben egyezett meg. Legyen ilyen feltételek mellett k a lehető legnagyobb. Bizonyítsuk be, hogy $6 \leq k \leq 9$.*

Megoldás: Először mutatunk egy konstrukciót $k = 6$-ra. Legyenek az emberek egy szabályos ötszög csúcsaiban (sorban A, B, C, D, E), egy pedig a közepén (F). A középső mindenkit megvert. Az ötszög csúcsaiban levők a jobb oldali szomszédjukat megverték (pl. A megverte B-t, B megverte C-t, stb.), a bal oldalitól kikaptak, a másodszomszédokkal pedig döntetleneket játszottak. A forgásszimmetria miatt háromféleképpen választhatunk ki 4 embert:

(I.) $ABCD$, ekkor B és C is megfelel. Megfelelőnek nevezzük, aki nyert, vesztett és remizett is.

(II.) $ABCF$, ekkor A megfelel.

(III.) $ABDF$, ekkor A megfelel.

Ezenkívül még sok más konstrukció létezik. Többen megadtak egy példát, de elfelejtették bizonyítani, hogy az valóban jó is.

Most megmutatjuk, hogy már $k = 10$-re sincs jó megoldás. Ebből következik, hogy k nem lehet 10-nél több sem, hiszen több ember esetén közülük bármely 10 elemű részben is teljesülnie kellene a feladat feltételeinek. A továbbiakban a sakkozók legyenek egy gráf pontjai, a döntetlenek pedig legyenek az élek. A gráf pontjait nagybetűkkel jelöljük. Tegyük fel, hogy $k = 10$-re van jó gráf. Először megmutatjuk, hogy ebben a gráfban nem lehet háromszög. A feladat feltételei szerint bármely négyesben van olyan pont, amelyből csak egy él indul a másik háromhoz. Tegyük fel, van egy háromszög, legyen ez ABC. Ekkor ABC-hez hozzávéve egy pontot, csak ez a negyedik pont lehet a megfelelő, hiszen a többiekből már indul két él. Az ABC-n kívül van 7 pont, ezek mindegyikéből egy él indul az ABC valamelyikéhez. Lesz tehát 3 köztük, akik ugyanazzal remiztek, pl. legyen ez A. Közülük ketten (D és E) ráadásul ugyanúgy játszottak B és C ellen, pl. B-től kikaptak, C-t megverték. Ekkor $BCDE$ négyesben csak úgy lesz megfelelő pont, ha DE mérkőzés döntetlen. De ekkor az $ABDE$ négyesben nincs megfelelő ember. Azt kaptuk, hogy a gráfban nem lehet háromszög. Vegyük azt a pontot, amelyből a legtöbb él indul, legyen ez A. Ha négy, vagy több él indul, akkor ezen élek végpontjaiból válasszunk ki négyet B, C, D, E. Köztük nem futhat él, mert A-val háromszöget alkotnának, viszont ekkor $BCDE$ közt nincs megfelelő pont. Ezek szerint A-ból legfeljebb három él indul, azaz van legalább 6 pont, mely nincs összekötve A-val. Viszont ha legalább hat pont között nincs háromszög, akkor van üres háromszög, legyen ez BCD. Ekkor $ABCD$ négyesben nem volt döntetlen, nincs megfelelő pont.

`Megjegyzés:` A $k = 6$-ra adott konstrukcióra indoklással 2 pontot lehetett szerezni. A verseny szűk időkerete miatt a legnagyob k megtalálása irreális elvárás lett volna. Csak a döntetleneket figyelve azt látjuk, hogy a gráfban bármely négy pont között van olyan, amelyből a másik három közül pontosan egyhez fut él. Ebben az esetben nem lehet 7-nél több pont. Ez a feladat megtalálható a „Feladatok a nagyvilágból" c. könyv 79. oldalán 11-es feladatként.

6.4.2. Feladat. (2008.1.) *Legyen n adott pozitív egész. A pozitív egészeket ki szeretnénk színezni 2 színnel, pirossal és kékkel úgy, hogy teljesüljön a következő két feltétel: (i) mindkét szín végtelen sokszor szerepel, (ii) bármely n különböző piros szám összege piros és bármely n különböző kék összege kék. Van-e ilyen színezés, ha (a) $n = 2007$; (b) $n = 2008$?*

Forrás: A 2007-es Cambridge Trinity Camp válogatóverseny első feladata.

Megoldás: (a) Megadunk egy megfelelő színezést. Legyenek a páratlan számok pirosak, a párosak kékek. Ekkor 2007 darab páratlan összege páratlan, 2007 páros összege páros. (b) Megmutatjuk, hogy nincs megfelelő színezés. Tegyük fel, létezik jó színezés. Legyenek azok a piros x számok, amelyekre $x+1$ kék: x_1, x_2,... . Legyenek azok a kék y számok, amelyekre $y + 1$ piros: y_1, y_2,... Mivel mindkét színből végtelen sok van, ezért mindkét sorozat végtelen. Ekkor van 2008 kék és 2008 piros szám, amelyeknek az összege ugyanannyi, ami pedig nem lehet:

$$x_1 + x_2 + ... + x_{1004} + (y_1 + 1) + (y_2 + 1) + ... + (y_{1004} + 1) =$$

$$= (x_1 + 1) + (x_2 + 1) + ... + (x_{1004} + 1) + y_1 + y_2 + ... + y_{1004}$$

Ezzel a bizonyítást befejeztük.

`Megjegyzés:` Mindkét részre olyan megoldást adtunk, amely csak 2007 páratlan, illetve 2008 páros voltát használta ki. Az (a) részben megadott konstrukció minden páratlan n-re megfelelő. A (b) rész alapján pedig semmilyen páros n-re nincs megoldás ($n = 2k$), hiszen található ekkor k darab diszjunkt (piros x_i ; kék $x_i + 1$) és k darab (kék y_i ; piros $y_i + 1$) pár. Ez pontosan ugyanaz az ötlet, amit már láttunk az 5.1.4. feladatnál a 3. pontban $n = k = 2$ esetén.

Az (a) rész jóval könnyebb, arra 2 pontot lehetett kapni.

6.4.3. Feladat. (2010.5.) *Határozzuk meg azon pozitív egész n számokat, amelyekre az $S = \{1, 2, ..., n\}$ halmaz elemei színezhetők pirosra vagy kékre úgy, hogy az $S \times S \times S$ halmaz éppen 2007 olyan $(x; y; z)$ rendezett hármast tartalmaz, amelyre x, y, z azonos színűek és $n|x + y + z$.*

Forrás: 2007-es IMO shortlist C.3. feladata.

Megoldás: Mivel tetszőlegesen választott $(x; y)$ mellé pontosan egy z van, amire $n|x + y + z$, ezért n^2 olyan rendezett hármas van, amire $n|x+y+z$. Eddig a számok színezését nem vettük figyelembe. Legyen a halmazban k darab kék és p darab piros szám. Ha egy rendezett hármas számai nem azonos színűek, akkor az $(x; y)$, $(y; z)$ és $(z; x)$ rendezett párok közül pontosan egy esetén lesz az első piros, a második kék. Megfordítva is igaz, minden ilyen piros-kék pár egyértelműen meghatároz egy „kétszínű” hármast. Vonjuk le az összesből a kétszínű hármasok számát. Mindhárom esetben a piros–kék párt $p{\cdot}k$ féleképpen választhatjuk, ezért a megfelelő rendezett hármasok száma $n^2 - 3pk = (p + k)^2 - 3pk = p^2 - pk + k^2$.

Mivel $2007 = (p+k)^2 - 3pk$ és 2007 osztható 9-cel, ezért $p+k$ is osztható 3-mal, $(p+k)^2$ osztható 9-cel, pk osztható 3-mal. pk és $p+k$ is osztható 3-mal, ebből következik, hogy $3|p = 3q$ és $3|k = 3l$. Ekkor $q^2 - ql + l^2 = 223$.

Innentől több lehetőség is kínálkozik a befejezésre, a diákok az esetek számának leszűkítése után azokat végigpróbálva jutottak célba. Mi itt az olimpiai shortlist elegáns befejezését mutatjuk be, amely a számolást meggyorsítja, az esetek számát radikálisan lecsökkenti.

Legyen $q \geq l$. Mivel

$$892 = 4(q^2 - ql + l^2) = (2l - q)^2 + 3q^2 \geq 3q^2 \quad \text{és}$$

$$3q^2 \geq 3q^2 - 3l(q-l) = 3(q^2 - ql + l^2) = 669,$$

ezért $297 \geq q^2 \geq 223$, azaz $17 \geq q \geq 15$.

Ha $q = 15$, akkor

$$l(15-l) = l(q-l) = q^2 - (q^2 - ql + l^2) = 15^2 - 223 = 2,$$

ami semmilyen egész l esetén sem teljesülhet. Ugyanilyen érveléssel $q = 16$ esetén $l(16-l) = 33$, ami szintén lehetetlen. Végül $q = 17$ esetén $l(17-l) = 66$, melynek az $l = 6$ és $l = 11$ a két megoldása, ebből kapjuk a megfelelő $(p;k)$ párokra az (51;18) és (51;33) számpárokat. Így n lehetséges értékei $n = 51 + 18 = 69$ és $n = 51 + 33 = 84$.

`Megjegyzés:` A 2007-es vietnámi olimpiára Hollandiából érkezett ez a javaslat, és a problémakiválasztó bizottságban dolgozó Kós Géza hívta fel rá a figyelmemet. Noha a zsűri tagjai közül többen az egyik legszellemesebb feladatnak tartották, nem került be az IMO hat feladata közé. A válogatóversenyen többen eljutottak a $2007 = (p+k)^2 - 3pk$ részig. Erre 4 pontot lehetett kapni. A megfelelő n érték meghatározásáig viszont csak Dankovics Attila és Nagy János jutottak el.

6.5. Számelmélet feladatok

A számelméleti feladatok között találunk oszthatósági feladatokat, diofantikus problémákat, négyzetszámokkal, prímekkel kapcsolatos kérdéseket. Az olimpiai feladatok megoldásához gyakran szükséges az általános tantervű osztályokban nem tanított, de a speciális matematika tagozatos osztályok tantervében szereplő Euler–Fermat-tétel, Wilson-tétel. A részletesebben kidolgozott feladatok a 2001.2-es, a 2003.6-os, utóbbihoz három különböző megoldást is bemutatunk. Négyzetszámok szerepelnek a 2004.3-as és a 2007.3-as feladatban. Megjegyezzük, hogy a problémakiválasztó bizottsághoz általában a másik három témakörhöz viszonyítva kevesebb javaslat érkezik számelméletből.

6.5.1. Feladat. (2001.2.) *Legyenek a, b olyan pozitív egészek, hogy $p = \frac{b}{4}\sqrt{\frac{2a-b}{2a+b}}$ prímszám. Legfeljebb mekkora lehet p?*

Forrás: Iráni versenyfeladat, [1] 63. oldal.

Megoldás: Megmutatjuk, hogy p legfeljebb 5 lehet. Ha b páratlan, akkor a kifejezés nem lesz egész. Legyen $b = 2c$. Alakítsuk át ennek segítségével a kiindulási feltételünket:

$$p = \frac{b}{4}\sqrt{\frac{2a-b}{2a+b}} = \frac{c}{2}\sqrt{\frac{a-c}{a+c}}, \quad \text{azaz} \quad \frac{4p^2}{c^2} = \frac{a-c}{a+c}.$$

Legyen

$$\frac{2p}{c} = \frac{m}{n}, \tag{1}$$

ahol $(m, n) = 1$. Ha $(a-c, a+c) = k$, akkor $a-c = km^2$ és $a+c = kn^2$. Ez utóbbi két egyenletből fejezzük ki $2c$-t: $2c = k(n^2 - m^2)$. Írjuk ezt most vissza (1)-be és szorozzunk keresztbe:

$$4pn = km(n^2 - m^2). \tag{2}$$

Most két észrevételt teszünk abból kiindulva, hogy $(m, n) = 1$.

(i) Amennyiben m és n is páratlan, akkor $n^2 - m^2$ osztható 8-cal, tehát (2) bal oldala osztható 8-cal, tehát p osztható 2-vel. Így $p = 2$ adódik. A továbbiakban m és n különböző paritású lehet csak, hiszen nem lehet mindkettő páros.

(ii) Mivel $(m, n) = 1$, ezért $(n, n^2 - m^2) = (n, -m^2) = 1$. Ezeket összevetve (2)-vel azt kapjuk, hogy mivel n osztója a bal oldalnak, csak úgy lehet osztója a másik oldalnak, ha osztója k-nak. Legyen $k = tn$. Ekkor (2) a következőképpen írható:

$$4p = tm(n - m)(n + m). \tag{3}$$

A jobb oldalon $(n-m)$ és $(n+m)$ két különböző páratlan szám. Mivel $4p$-nek összesen csak két páratlan osztója van, az egyetlen lehetséges szereposztás, hogy $n - m = 1$ és $n + m = p$. Most (3)-ból azt kaptuk, hogy $4 = tm$, tehát m lehetséges értékei 1, 2, 4. Mivel $n-m = 1$, ezért a lehetséges (n, m) párok: (2,1), (3,2), (5,4). Mivel $n + m = p$, ezért csak az első két pár felel meg, közülük is a nagyobb a $p = 3 + 2 = 5$. Ez valóban jó is: $n = 3$, $m = 2$, $t = 2$, $k = 6$, $c = 15$, $a = 39$, $b = 30$.

`Megjegyzés:` A megoldás során csak elemi oszthatósági vizsgálatokra van szükség, de ezek láncolata több lépést kíván egymás után. Az eredmény konkrét szám, ami nem sejthető meg könnyen, noha elég kicsi.

6.5.2. Feladat. (2003.6.) *Pozitív egész számok véges halmazait vizsgáljuk. Egy ilyen halmaz összegosztós, ha a halmaz minden eleme osztója az elemek összegének.*

(a) Adjunk meg egy olyan összegosztós halmazt, melynek eleme a 7 és a 17.

(b) Igazoljuk, hogy pozitív egészek egy tetszőleges véges H halmazához létezik olyan összegosztós G halmaz, hogy H részhalmaza G-nek.

Forrás: Olimpiára javasolt feladat [11].

Megoldás: A feladat (a) részére sokféle megoldás adható. A (b) részben leírt módszerek nem takarékosak, meglehetősen sok elemet használnak fel. Ezért itt egy olyan megoldást mutatunk, mely áttekinthető: $\{2, 7, 17, 42, 51, 238, 357\}$, ezen halmaz elemeinek összege $6 \cdot 7 \cdot 17 = 714$. Hogy lehet erre rájönni? Mivel a halmaz elemeinek összege osztható 7-tel és 17-tel, ezért [7,17]=119-cel is. A 119 többesei közül olyat keresünk, amely nem túl nagy, de sok osztója van. Ilyen a 714. A halmaz két legnagyobb elemét ügyesen választjuk: $714 = 119 \cdot (3+2+1) = 357 + 238 + 119$. Ekkor már csak a 119-et kell osztók összegeként előállítani, de a 714-nek sok osztója van, kényelmesen válogathatunk: 119=2+7+17+42+51. Most több megoldást mutatunk a (b) részre.

1. Olyan eljárást adunk, amelynek eredménye egy összegosztós halmaz, amely tartalmazza az 1, 2,..., n számokat. Legyen $1 + 2 + ... + n = S$. Írjuk fel az $(n! - 1)$ számot különböző kettőhatványok összegeként

$$n! - 1 = 2^{t_1} + 2^{t_2} + ... + 2^{t_k} \quad (0 = t_1 < t_2 < ... < t_k)$$

Tekintsük a következő halmazt: $G_0 = \{1, 2, ..., n, 2^{t_1}S, 2^{t_2}S, ..., 2^{t_k}S\}$. Ekkor a G_0 elemeinek összege $n! \cdot S$. Ez osztható az $1, 2, ..., n$ számok mindegyikével és S-sel is, továbbá G_0 elemei mind különbözők. Problémát csak az S-nek valamely 2-hatványszorosa jelenthet. Ezt most további elemek hozzávételével megoldjuk. Legyen

$$G = G_0 \cup \{n!S, n!2S, n!4S, ..., n!2^{t_k}S\}.$$

Csupa új számot vettünk hozzá, és így G elemeinek összege $n!2^{t_k+1}S$. Ez valóban osztható G minden elemével. Szemléltetésként bemutatjuk a módszert $n = 3$ esetén. Ekkor

$$S = 1 + 2 + 3 = 6, \quad n! - 1 = 3! - 1 = 1 + 4, \quad G_0 = \{1, 2, 3, 6, 24\},$$

most G_0 elemeinek összege $36 = n! \cdot S = 3! \cdot 6$. És végül

$$G = \{1, 2, 3, 6, 24, 36, 72, 144\}.$$

Itt G elemeinek összege 288, ami valóban megfelelő.

2. Legyen a H halmaz elemeinek összege s, legkisebb közös többesük pedig p. Legyen $p = p_1 p_2$, ahol p_1 páratlan, p_2 pedig 2-hatvány. Legyen $n = c \cdot \varphi(p_1)$, ahol c egész, $n > 3 + p_2$ és $\varphi(x)$ az Euler féle függvény. Ekkor a $G = H \cup H_1 \cup H_2$ halmaz megfelelő lesz, ahol

$$H_1 = \{2^{n-2}(2^n - 1)s, 2^{n-3}(2^n - 1)s, ..., 2(2^n - 1)s, (2^n - 1)s\}$$

és

$$H_2 = \{2^{n-1}s, 2^{n-2}s, ..., 2s\}.$$

A G-beli elemek mind különbözőek. A G-beli elemek összege:

$$s + (2^n - 1)\, s \left(2^{n-1} - 1\right) + s\,(2^n - 2) = 2^{n-1}\,(2^n - 1)\, s.$$

Ezt jól láthatóan osztja G minden olyan eleme, amely H-ban nincs benne. Viszont H elemei is osztják, mivel az Euler–Fermat-tétel szerint $2^{\varphi(p_1)} \equiv 1 \pmod{p_1}$, tehát $2^{c\cdot\varphi(p_1)} \equiv 1 \pmod{p_1}$, így $p_1 | 2^n - 1$. Másrészt $n > p_2$ miatt $p_2 | 2^n$. Így $p = p_1 p_2$ osztója lesz a G-beli elemek összegének.

3. Jelölje kH azt a halmazt, mely H elemeinek k–szorosait tartalmazza. Legyen H elemeinek szorzata p, összege s. Legyen $H_1 = H \cup (p-1)H$. Nyilván feltehető $p > 2$, ekkor $H \cap (p-1)H = \emptyset$, azaz a további esetekben nem lehet átfedés. A H_1 halmaz elemeinek összege ps. Képezzük most a következő halmazsorozatot, mellette feltüntetve elemeinek összegét:

$$\begin{aligned} H_2 &= H_1 \cup \{(p-2)ps\}, \quad (p-1)ps \\ H_3 &= H_2 \cup \{(p-3)(p-1)ps\}, \quad (p-2)(p-1)ps \end{aligned}$$

$$H_4 = H_3 \cup \{(p-4)(p-2)(p-1)ps\}, \quad (p-3)(p-2)(p-1)ps$$

$$\dots$$

$$G = H_{p-1} = H_{p-2} \cup \{1 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot (p-2)(p-1)ps\}, \quad p!ps$$

Az utolsó sorban kapott halmaz éppen megfelelő. Minden sorban a H_i halmaz elemeinek összegét a H_{i-1} minden eleme osztja, csak az éppen hozzávett elemmel lehet baj. Viszont az utolsó sorban az éppen hozzávett elem is osztja az összeget. Szemléltetésként $H = 1, 4$ esetén az eljárással keletkező halmaz $G = H_3 = \{1, 4, 3, 12, 2 \cdot 4 \cdot 5, 3 \cdot 4 \cdot 5\}$, ahol az elemek összege $6 \cdot 20$.

`Megjegyzés:` A különböző megoldások egyik közös alapgondolatára mutatunk most rá. Bővelkedőnek nevezünk egy d számot, ha osztóinak összege nagyobb, mint $2d$. Ha a H halmaz elemeinek legkisebb közös többese p, akkor általában p-nek egy viszonylag kicsi bővelkedő többese már elérhető, mint G elemeinek összege. A feladat (a) részében sokan erre találtak rá.

6.5.3. Feladat. (2004.3.) *Egy pozitív egész számot közvetlenül egymás után kétszer leírva dupla számot kapunk. (Pl. dupla szám a 357357, amit a 357-ből kaptunk.) Bizonyítsuk be, hogy a négyzetszámok között végtelen sok dupla szám van.*

Forrás: Olimpiára javasolt feladat [11].

Megoldás: Ha a k jegyű S számból képezzük a dupla számot akkor a dupla számunk éppen $S(10^k+1)$. Ha találunk végtelen sok olyan k-t, melyre a (10^k+1)-nek van négyzetszám osztója, akkor készen vagyunk, ilyen például a 121 (lásd később). Ha $(10^k+1) = 121d$, akkor $S = 49d$ választással a dupla négyzetszámunk $S(10^k+1) = 7^2 11^2 d^2$ lesz. Ez biztosan jó, hiszen négyzetszám és az S valóban k jegyű. Ez utóbbi dolgot garantáltuk a 49-es szorzóval. Igazából S lehetett volna d-nek tetszőlegesen választott négyzetszámszorosa is, amely k jegyű. Ezt kaphatjuk úgy is, hogy d-t addig szorozgatjuk 4-gyel, amíg éppen k jegyű nem lesz.

A 121 azért is nagyon kényelmes választás, mert a 11-gyel való oszthatósági szabályt alkalmazhatjuk. Amennyiben k páratlan, $(10^k + 1)$ osztható lesz 11-gyel:

$$(10^k + 1) : 11 = 909090...909091,$$

ahol $k = 2n + 1$ esetén a hányadosban éppen n darab 9-es $n - 1$ darab 0 van felváltva és a végén egy 1-es. A hányadosnak is 11-gyel oszthatónak kell lennie, ez a 11-gyel való oszthatósági szabály szerint akkor teljesül, ha $n = 11r + 5$. Ezzel készen is vagyunk, tetszőleges pozitív egész r-t választva megkapjuk sorra n, k, d és S értékét.

`Megjegyzés:` Elemi oszthatósági megfontolások segítségével oldható meg a feladat, nincs szükség nehezebb tételre. Maga az állítás meghökkentő, bájos. A dupla négyzetszámok elég nagyok ahhoz, hogy próbálgatva rátaláljunk.

6.5.4. Feladat. (2007.3.) *Igazoljuk, hogy végtelen sok olyan pozitív egész n szám van, amire $2^n + 3^n$ osztható n^2 -tel.*

Forrás: Zautikas verseny, Kazahsztán, 2007.

Megoldás: $n = 1$ és $n = 5$ megfelelő, $25|2^5 + 3^5 = 275$. Tegyük fel, hogy n megfelelő, ekkor $2^n + 3^n = kn^2$. Mivel $2^n + 3^n > n^2$, ezért $k > 1$ és mivel $2^n + 3^n$ páratlan, ezért k is páratlan. Bizonyítjuk, hogy kn is megfelelő.

$$2^{kn} + 3^{kn} = (2^n + 3^n)\left(\sum_{i=0}^{k-1}(-1)^i 2^{(k-1-i)n} \cdot 3^{in}\right)$$

A jobb oldal első tényezője éppen kn^2. A második tényezőt jelölje S. Az kell, hogy $(kn)^2|kn^2S$, azaz $k|S$ bizonyítása hiányzik. Mivel 2^n+3^n osztható k-val, ezért

$$-3^n \equiv 2^n \pmod k$$

$$2^{(k-1-i)n} \cdot 3^{in} \cdot (-1)^i \equiv 2^{(k-1-i)n} \cdot 2^{in} \equiv 2^{(k-1)n} \pmod k$$

Ezért $S \equiv k \cdot 2^{(k-1)n} \pmod k$, tehát S osztható k-val és így kn is megfelelő. Ezzel az eljárással minden megfelelő n-hez tudunk találni nála nagyobbat, van megfelelő szám pl. 1 és 5, tehát végtelen sok megoldás létezik.

`Megjegyzés:` Ez a megoldás rövid, két lépésből áll, de nem könnyű rájönni.

7. Összegzés

Az értekezésben az olimpiai felkészítő munka egy keresztmetszetét mutattuk be. Ebben a felkészítő munkában a szerző 14 éve vesz részt, ez alatt az idő alatt összegyűjtött kincseinek egy részet foglalta össze. A témának különleges aktualitást ad, hogy éppen 2009-ben volt az 50. Nemzetközi Matematikai Diákolimpia.

Az általános tehetséggondozás didaktikai oldalról való megközelítésére nem vállalkozhattunk, ennek egy szeletét vizsgáltuk, azt viszont alaposabban elemeztük. Az olimpiával és a felkészítés rendszerével történő megismerkedést szolgálta a 2. és 3. fejezet. Ezeknek három didaktikai elemét emelném ki: a versenyrendszer áttekintése, amely a legjobb diákok megtalálását segíti, a felkészítésben részt vett olimpikonok több szempontból történő feltérképezése és az eredmények áttekintése, valamint a különböző matematikai tréningek bemutatása.

A 4. fejezet első részében az érdeklődést felkeltő, fokozatosan nehezedő, tehetséggondozásra szánt feladatsort találunk. A második rész az olimpikonok matematikai fegyverzetének bővítését szolgálja, a kettősviszony használatához egy rövid bevezető. Egyfajta tanári ars poetica szándékom szerint ez a fejezet.

Az 5. fejezetben a szerző által kitalált és különböző versenyeken előfordult feladataiból válogattunk. A versenyfeladatok összeállításának didaktikai szempontjairól is szóltunk. Bepillantást nyerhetünk a feladatok megoldása mellett azok készítésébe. Több feladat szerepelt nemzetközi versenyek feladatsorában, ezeket igazi tanári trófeának tekinthetjük, köztük egy a diákolimpia feladatsorába is bekerült.

A 6. fejezet 10 év olimpiai válogatóversenyeit tekinti át. Az összes feladat tematikusan rendezve szerepel a függelékben. A fejezet keretén belül bemutatunk különböző nehézségű feladatokat, majd azok megoldásait témakörönként csoportosítva. A feladatsorok összeállításával, azok közreadásával talán sikerült hozzájárulni országos szinten a legjobb diákok képzéséhez, az olimpiai felkészítéshez. A problémákat alaposan szemügyre véve látszik, ez az anyag „nem középiskolás fokon" készült. Sokkal inkább tekinthető az egyetemeken oktatott elemi matematika felsőfokának.

Remélem, hogy az olimpiai felkészítés során a diákok nem csupán problémamegoldó rutint szereznek, ötletek sokaságát tanulhatják meg, hanem rácsodálkozhatnak a matematika sokoldalú szépségére, és ez elindíthatja őket a komoly tudományos oktató-, vagy kutatómunkában.

7.1. Summary

The thesis gives a cross-sectional view of the preparatory work for the International Mathematical Olympiad (IMO). The author has been involved in this task since 1997 and has presented a summary of his treasures collected throughout these years. This topic has an extra timeliness, since the 50th olympiad was held in 2009.

How to work with the mathematically gifted is a huge topic, we have chosen only a segment of it but we tried to analyse it thoroughly. Chapters 2 and 3 are devoted to the introduction of the olympiad and the preparatory work. We underline three components from a didactical point of view: the presentation of the system of competitions, which helps to find the best students; the presentation of the members of the teams, their results; and the description of various mathematical trainings.

In the first part of Chapter 4 there is a chain of problems which arouses interest, gets harder step by step, and is appropriate for working with the talented. In the second part there is a material about cross ratio. This tool does not belong to the most frequently used ones of the mathematical technique so this introduction might help students in preparing for the IMO. This chapter is intended to be an „ars poetica" of my teaching.

In Chapter 5 we give a selection of problems invented by the author

which occurred in different competitions. We gave some didactical guidelines how to put together a good competition problem set. Beside the problems and their solutions we may get some information also about the birth, the origin of the problems. A nice contribution to the world of mathematical competitions are those problems of the author which were selected into the problem set of international competitions, one of them as an IMO problem.

Chapter 6 gives an outline of the problems of the selection tests of the past 10 years. The complete list of the problems can be found in the appendix, here we present some problems and their solutions of various difficulty from four topics. With these competitions, problem sets and their solutions my aim was to help countrywide the education of the best students, and their preparation. Getting a closer look at the problems one might notice that their difficulty is far beyond the secondary school level.

I hope that during the preparation for the IMO students learn not only routine of problem solving, dozens of ideas and technics, but also find the beauty of mathematics, the thousand faces of it. This experience might encourage them to start serious scientific research or to take part in mathematical education.

Irodalomjegyzék

[1] ANDREESCU, T., FENG, Z. (szerk.): Mathematical Olympiads 1998-1999, problems and solutions from around the World, *The Mathematical Association of America,* 2000.

[2] DOBOS, S.: Big small, *A. Ambrus, É. Vásárhelyi (szerk.): Problem Solving in Mathematics Education. Proceedings of the 11th Pro Math conference,* Eötvös Loránd University, Budapest, 2010. (p. 41 – 50).

[3] DOBOS, S.: Nemzetközi Matematikai Diákolimpia, *Ács, K., Kosztolányi, J., Lajos, J. (szerk.): Cserepek* Bolyai János Matematikai Társulat, Budapest, 2010. (p. 24–26).

[4] DOBOS, S.: Cross ratio in use, *The Mathematical Gazette, The Mathematical Association, ISSN: 00255572,* London, March. 2012.

[5] DOBOS, S., HRASKÓ, A., SURÁNYI, L.: Feladatok a nagyvilágból, *Bolyai János Matematikai Társulat,* Budapest, 2000.

[6] DOBOS, S.: Olimpiai válogatóversenyek 2001-2005, *Bolyai János Matematikai Társulat,* Budapest, 2005.

[7] DOBOS, S.: Területek meghatározása, összehasonlítása, felezése, *Raabe Tanácsadó és Kiadó, ISBN 963 86123 9 8,* Budapest, December 2008.

[8] ENGEL, A.: Problem solving strategies, *Springer-Verlag,* New York, 1998.

[9] Levi, F. W.: Die Teilung der projectiven Ebene durch Gerade oder Pseudogerade, *Mathematisch-Physikalische Klasse Sächsische Akademie Wissenschaften,* Berlin, 1926.

[10] Ma, L.: Knowing and Teaching Elementary Mathematics, *Lawrence Erlbaum Associates,* Inc. Mahwah New Jersey, 1999.

[11] Mohamed, A.: 300 défis mathématiques *Ellipses Ferce sur Sarthe* France, 2001.

[12] Reiman, I., Dobos, S.: Nemzetközi Matematikai Diákolimpiák 1959-2003, *Typotex Kiadó, ISBN 963 9548 04 9,* Budapest, 2003.

[13] Reiman, I.: Nemzetközi Matematikai Diákolimpiák 1959 – 1994,*Typotex Kiadó, ISBN 963 7546 76 6,* Budapest, 1997.

[14] Taylor, P. J., Storozhev, A. M. (szerk.): Tournament of Towns 1993-1997, *Australian Mathematics Trust,* University of Canberra, 1998.

[15] Dobos, S., Hraskó, A.: Projektív geometria, *http://matek.fazekas.hu/mathdisplay/cache/pdf/volume_g_iii.pdf* 2008.

[16] Dobos, S.: A budapesti IMO felkészítő szakkör honlapja *http://home.fazekas.hu/ dobos/olimpia/cimlap.htm*

[17] *http://matek.fazekas.hu/portal/tanitasianyagok /Hrasko_Andras/kodok/kodfelgyujt.html*

[18] *www.artofproblemsolving.com*

[19] *www.imo-official.org*

[20] *http://www.komal.hu/forum/*
/forum.cgi?a=to&tid=43&st=25&dr=0&sp=121
[97]-es bejegyzés, 20. feladat

[21] *www.mathlinks.ro*

8. Függelék

A továbbiakban tematikus összeállításban közöljük a 2001–2010 közötti évek válogatóversenyeinek feladatait, az egyes témakörökön belül megtartva az időrendi sorrendet.

8.1. Algebra feladatok

8.1.1. Feladat. (2001.1.) *Hány olyan $p(x) = ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex + f$ polinom van, amelynek együtthatói 100-nál nem nagyobb különböző pozitív egészek és $p(x)$ osztható $x^2 + x + 1$-gyel?*

8.1.2. Feladat. (2001.5.) *Egy számtani sorozat tagjai és differenciája is pozitív egészek. A sorozat első n tagjának a tízes számrendszerbeli alakjában sehol sem szerepel 9-es számjegy. Legfeljebb mekkora lehet n?*

8.1.3. Feladat. (2002.5.) *Mutassuk meg, hogy tetszőleges valós $x_1, x_2, ..., x_n$ számokra teljesül, hogy*

$$\frac{x_1}{1+x_1^2} + \frac{x_2}{1+x_1^2+x_2^2} + ... + \frac{x_n}{1+x_1^2+x_2^2+...+x_n^2} < \sqrt{n}.$$

8.1.4. Feladat. (2003.1.) *Az s_1, s_2, s_3, ... , s_{2003} nemnegatív valós számok összege 2, továbbá tudjuk, hogy $s_1s_2 + s_2s_3 + s_3s_4 + ... + s_{2002}s_{2003} + s_{2003}s_1 = 1$. Legyen $S = s_1^2 + s_2^2 + ... + s_{2003}^2$. Határozzuk meg az adott feltételek mellett S lehetséges legkisebb és legnagyobb értékét.*

8.1.5. Feladat. (2003.4.) *Nemnegatív valós számok végtelen sorozatát jelölje a_1, a_2, ... Van olyan c szám, amelynél nincs a sorozatnak nagyobb eleme. A sorozatról még a következőt is tudjuk: $|a_i - a_j| \geq \dfrac{1}{i+j}$, minden i, j esetén, ha $i \neq j$. Igazoljuk, hogy $c \geq 1$.*

8.1.6. Feladat. (2004.1.) *Egy hóbortos zöldséges csak háromfajta gyümölcsöt árul, almát, körtét és narancsot. Egyszerre csak egyetlen szem gyümölcsöt vehetünk, de hajlandó egy vásárlót napjában több alkalommal is kiszolgálni. Az árak is furcsák: egy alma éppen annyi tallér, ahány körte van még a boltban. Egy körte kétszer annyi tallér, mint ahány narancs van a boltban. Egy narancs éppen háromszor annyi tallér, mint ahány alma van a boltban.*

Furfangos Frigyes egy reggel kifigyelte, hogy a boltban az almák, körték és narancsok száma éppen a=6, k=7, n=3. Szeretné megvásárolni mind a 16 darabot. Legkevesebb hány tallérra van szüksége Frigyesnek és milyen sorrendben vásárolja meg a gyümölcsöket? (Feltételezzük, hogy aznap más vásárló nem volt.) Határozzuk meg a szükséges összeget általában is a, k, n függvényében!

8.1.7. Feladat. (2004.6.) *Az a, b, c valós számokat úgy választottuk, hogy pontosan egy olyan négyzet van, melynek minden csúcsa rajta van az $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ függvény grafikonján. Igazoljuk, hogy a négyzet oldala $\sqrt[4]{72}$.*

8.1.8. Feladat. (2005.5.) *a, b, c, d olyan nemnegatív valós számok, melyekre $a^2 - ab + b^2 = c^2 - cd + d^2$. Igazoljuk a következő egyenlőtlenséget:*

$$(a + b)(c + d) \geq 2(ab + cd).$$

8.1.9. Feladat. (2006.3.) *Jelölje $\mathbf{R}$ a valós számok halmazát. Határozzuk*

meg az összes olyan $f : \mathbf{R} \mapsto \mathbf{R}$ függvényt, amelyre

$$f(x + y) + f(x)f(y) = f(xy) + 2xy + 1 \tag{1}$$

teljesül $\mathbf{R}$ minden x, y elemére.

8.1.10. Feladat. (2006.4.) *Határozzuk meg az x és y valós számokat, ha $x \geq 1$, $y \geq 1$, továbbá A és B nem szomszédos egész számok, ahol $A = \sqrt{x-1} + \sqrt{y-1}$ és $B = \sqrt{x+1} + \sqrt{y+1}$.*

8.1.11. Feladat. (2007.4.) *Valós számok egy $a_0, a_1, a_2, ...$ sorozatát a következőképpen definiáljuk:*

$$a_0 = -1, \quad \sum_{k=0}^{n} \frac{a_{n-k}}{k+1} = 0 \quad \textit{ha} \quad n \geq 1.$$

Igazoljuk, hogy $a_n > 0$, ha $n \geq 1$.

8.1.12. Feladat. (2008.2.) *Tekintsük azon $f : \mathbf{N}^+ \to \mathbf{N}^+$ függvényeket, amelyekre minden $m, n \in \mathbf{N}^+$ esetén teljesül:*

$$f(m+n) \geq f(m) + f(f(n)) - 1.$$

Határozzuk meg $f(2007)$ lehetséges értékeit. ($\mathbf{N}^+$ a pozitív egészek halmazát jelöli.)

8.1.13. Feladat. (2008.6.) *Legyen $c > 2$. Az $a(1), a(2), ...$ nemnegatív valós számok sorozatáról két dolgot tudunk:*

(i) $a(m+n) \leq 2a(m) + 2a(n)$ minden pozitív egész m, n esetén;

(ii) $a(2^k) \leq \dfrac{1}{(k+1)^c}$ minden nemnegatív egész k esetén. Bizonyítsuk be, hogy az $a(n)$ sorozat korlátos.

8.1.14. Feladat. (2009.6.) *A $P(x) = ax^3+bx^2+cx+d$ harmadfokú polinom együtthatói egész számok, $a \neq 0$. Tegyük fel, hogy végtelen sok x, y egész számpárra teljesül, hogy $xP(x) = yP(y)$, ahol $x \neq y$. Bizonyítsuk be, hogy létezik olyan k egész, amelyre $P(k) = 0$.*

8.1.15. Feladat. (2010.3.) *A $P(x)$ valós együtthatós polinomra létezik végtelen sok egészekből álló $(m; n)$ pár, amelyekre $P(m)+P(n) = 0$. Igazoljuk, hogy a polinom által meghatározott $y = P(x)$ függvény grafikonja középpontosan szimmetrikus.*

8.2. Geometria feladatok

8.2.1. Feladat. (2001.3.) *Bizonyítsuk be, hogy a t területű háromszögben*

$$4t\left(\text{tg}\frac{\alpha}{2}+\text{tg}\frac{\beta}{2}+\text{tg}\frac{\gamma}{2}\right)\leq 9R^2,$$

ahol R a körülírt kör sugara.

8.2.2. Feladat. (2001.4.) *(a) Az O középpontú r sugarú K körnek P belső pontja, $OP=p$. Az A és B pontok a K-nak olyan pontjai, amelyekre AP és BP merőlegesek egymásra. Mi az AB szakaszok F felezőpontjainak a mértani helye, ha A és B minden megengedett helyzetet felvesz?*

(b) Az O középpontú r sugarú G gömbnek P belső pontja, $OP=p$. Az A, B, C pontok a G-nek olyan pontjai, amelyekre AP, BP, CP szakaszok páronként merőlegesek egymásra. Mi az ABC háromszögek S súlypontjainak a mértani helye, ha A, B, C minden megengedett helyzetet felvesz?

8.2.3. Feladat. (2002.2.) *A K kerületű háromszög csúcsainak távolságösszege a sík tetszőleges P pontjától D, a háromszög oldalegyeneseinek távolságösszege P-től M. Bizonyítsuk be, hogy*

$$4D^2\geq 4M^2+K^2.$$

8.2.4. Feladat. (2002.6.) *Adott a síkon n olyan pont, hogy bármely kettejük távolsága egész szám ($n\geq 4$).*

(a) Bizonyítsuk be, hogy n=4 esetén van két pont, amelyeknek távolsága 3-mal osztható.

(b) Bizonyítsuk be, hogy $n>4$ esetén a pontok között fellépő távolságoknak legalább az egyhatoda osztható 3-mal.

8.2.5. Feladat. (2003.2.) *A hegyesszögű ABC háromszög belsejében levő P pontra igaz, hogy $APB\angle = BPC\angle = CPA\angle$. A BP és CP egyenesek az AC és AB oldalakat rendre D-ben és E-ben metszik. Mutassuk meg, hogy $AB + AC \geq 4DE$.*

8.2.6. Feladat. (2003.5.) *A k_1 és k_2 körök metszéspontjai P és Q. Választunk k_1-en két pontot, legyenek ezek A_1 és B_1. (A_1, B_1, P és Q négy különböző pont.) Az A_1P és B_1P egyenesek k_2-vel való, P-től különböző metszéspontjai legyenek A_2 és B_2. Legyen C az A_1B_1 és A_2B_2 egyenesek metszéspontja.*

Igazoljuk, hogy A_1 és B_1 különböző választásainál az A_1A_2C háromszög köré írt kör középpontja mindig egy rögzített körön lesz.

8.2.7. Feladat. (2004.2.) *Az ABC háromszögben $AC = BC$, a beírt kör középpontja K. Legyen P az AKB háromszög köré írt kör olyan pontja, mely az ABC háromszög belsejében van. Párhuzamosakat húzunk P-n át az AC és BC szárakkal. Ezek AB-t rendre a D és E pontokban metszik. Párhuzamost húzunk P-n át AB-vel is, ez AC-t és BC-t rendre az F és G pontokban metszi. Igazoljuk, hogy a DF és EG egyenesek metszéspontja az ABC köré írt körön van.*

8.2.8. Feladat. (2004.5.) *Az $ABCD$ konvex négyszög megfelelő csúcsainál meghúztuk a külső szögfelezőket, ezek a, b, c, d. Metszéspontjaik $a \cap b = K$, $b \cap c = L$, $c \cap d = M$, $d \cap a = N$. Tudjuk, hogy a K-ból AB-re, L-ből BC-re, M-ből CD-re bocsátott merőlegesek egy ponton mennek át. Bizonyítsuk be, hogy $ABCD$ húrnégyszög.*

8.2.9. Feladat. (2005.2.) *A k kör és az l egyenes nem metszik egymást. A kör AB átmérője l-re merőleges, az átmérő végpontjai közül B van közelebb l-hez. A kör A-tól és B-től különböző pontja C. Az AC egyenes és l metszéspontja D. D-ből érintőt húzunk a körhöz, az érintési pont E. Tudjuk, hogy B és E az AC egyenesnek ugyanazon* *oldalán vannak. A BE egyenes és l metszéspontja F. Az AF egyenes a kört G-ben metszi. Igazoljuk, hogy az AB egyenesre tükrözve G-t a CF egyenes egy pontját kapjuk.*

8.2.10. Feladat. (2005.4.) *A hegyesszögű ABC háromszögben $\beta > \gamma$. A köréírt kör középpontja O, az AO egyenes D-ben metszi BC-t. Az ABD és ACD háromszögek köré írt köreinek középpontjai rendre E és F. A B és C kezdőpontú BA és CA félegyeneseken van rendre G és H úgy, hogy $AG = AC$ és $AH = AB$. Igazoljuk, hogy $EFGH$ akkor és csak akkor téglalap, ha $\beta - \gamma = 60°$.*

8.2.11. Feladat. (2006.2.) *Az ABC háromszögben $AB + BC = 3AC$. A beírt kör az AB és BC oldalakat rendre D és E pontokban érinti, a beírt kör középpontja I. D-t és E-t az I pontra tükrözve a G és H pontokat kapjuk. Igazoljuk, hogy $ACGH$ húrnégyszög.*

8.2.12. Feladat. (2006.5.) *Az $ABCD$ paralelogramma A csúcsából induló f félegyenes a B-ből induló BC és a D-ből induló DC félegyeneseket rendre az X és Y pontokban metszi. Az ABX és ADY háromszögek BX és DY oldalaihoz hozzáírt körök középpontjai rendre K és L. Igazoljuk, hogy a $KCL\angle$ nem függ f választásától.*

8.2.13. Feladat. (2007.1.) *Az $ABCD$ trapézban $AB||CD$, $AB > CD$. Legyenek K és L rendre az AB és CD szakaszokon úgy, hogy $AK : KB = DL : LC$. A KL szakasz P és Q pontjára teljesül, hogy $APB\angle = BCD\angle$ és $CQD\angle = ABC\angle$. Bizonyítsuk be, hogy $PQBC$ húrnégyszög.*

8.2.14. Feladat. (2007.5.) *Az ABC háromszögben*

$$ACB\angle < BAC\angle < 90°.$$

Az AC oldalon van D pont, amelyre $BD = BA$. Az ABC háromszögbe írt kör az AB és AC oldalakat rendre K és L pontokban érinti.

Legyen a BCD háromszögbe írt kör középpontja J. Igazoljuk, hogy a KL egyenes áthalad az AJ szakasz felezőpontján.

8.2.15. Feladat. (2008.3.) *Legyen az ABC háromszög beírt körének BC-n lévő érintési pontja D. Igazoljuk, hogy az AD-re D-ben állított merőlegesnek a B, illetve C csúcsnál lévő belső szögfelező közti szakaszát D felezi.*

8.2.16. Feladat. (2008.5.) *Az $ABCD$ trapéz átlóinak metszéspontja P. A BC és AD párhuzamos egyenesek közti Q pontra $AQD\angle = CQB\angle$, a CD egyenes elválasztja P-t és Q-t. Bizonyítsuk be, hogy $BQP\angle = DAQ\angle$.*

8.2.17. Feladat. (2009.2.) *Az ABC háromszög beírt köre az AB és AC oldalakat rendre a D és E pontokban érinti. A beírt körnek és az AEB háromszög köré írt körnek E-től különböző közös pontja legyen F, a D pont merőleges vetülete az EB egyenesen G. Igazoljuk, hogy $2ABE\angle = BFG\angle$.*

8.2.18. Feladat. (2009.5.) *Az $ABCD$ konvex négyszög belsejében adottak a P és Q pontok úgy, hogy $PQDA$ és $QPBC$ húrnégyszögek. Tegyük fel, hogy a PQ szakasznak egy E pontjára teljesül, hogy $PAE\angle = QDE\angle$ és $PBE\angle = QCE\angle$. Mutassuk meg, hogy $ABCD$ húrnégyszög.*

8.2.19. Feladat. (2010.2.) *A k körön kívül elhelyezkedő A pontból két szelőt húztunk a körhöz, egyik k-t B és C, a másik D és E pontokban metszi, $AD < AE$. Párhuzamost húzunk AC-vel D-n át, ez k-t F-ben metszi. Legyen AF és k metszéspontja G, az EG és AC egyenesek metszéspontja M. Igazoljuk az alábbi összefüggést:*

$$\frac{1}{AM} = \frac{1}{AB} + \frac{1}{AC}.$$

8.2.20. Feladat. (2010.6.) *Az $ABCD$ érintőnégyszög A csúcsán átmenő e egyenes a BC szakaszt az M, a CD egyenest az N pontban metszi. Legyen az ABM, MNC és NDA háromszög beírt körének középpontja rendre I_1, I_2, I_3. Igazoljuk, hogy az $I_1I_2I_3$ háromszög magasságpontja az e egyenesen van.*

8.3. Kombinatorika feladatok

8.3.1. Feladat. (2001.6.) *Legyenek p és q rögzített relatív prím pozitív egészek. A nemnegatív egészek egy S részhalmazát ideális részhalmaznak nevezzük, ha a következő két feltétel egyszerre teljesül:*

(i) S tartalmazza a nullát;

(ii) ha $n \in S$, akkor $n + p \in S$ és $n + q \in S$.

Határozzuk meg az S ideális részhalmazok számát.

8.3.2. Feladat. (2002.3.) *Adott 101 darab különböző súlyú érme. Közülük 50 darab ezüst, melyek súly szerinti sorrendjét ismerjük. A többi 51 arany, ezek sorrendje is ismert. Van egy kétkarú mérlegünk, mely össze tud hasonlítani egy-egy érmét. Hogyan találhatjuk meg 7 méréssel a 101 érme közül a középsőt?*

8.3.3. Feladat. (2002.4.) *Keressük meg mindazon véges*

$$(x_0, x_1, x_2, ..., x_n)$$

sorozatokat, melyekben minden i-re $(i = 0, 1, 2, ..., n)$ az x_i értéke éppen a sorozatban szereplő i számok számával egyenlő.

8.3.4. Feladat. (2003.3.) *Egy sakk körmérkőzésen k ember vett részt és mindenki mindenkivel egyszer játszott. Miután az összes mérkőzés lezajlott kiderült, hogy bármely 4 versenyző között van olyan, aki a többi három versenyző közül egyet megvert, egytől kikapott, a harmadikkal döntetlenben egyezett meg. Legyen ilyen feltételek mellett k a lehető legnagyobb. Bizonyítsuk be, hogy $6 \leq k \leq 9$.*

8.3.5. Feladat. (2004.4.) *Az 1, 2, ..., N számok mindegyike piros vagy zöld. Egyszerre három szám színét megváltoztathatjuk, ha számtani sorozatot alkotnak. Mely N-re érhető el bármilyen színezésről indulva, hogy minden szám piros legyen?*

8.3.6. Feladat. (2005.1.) *Bergengóciában 2005 város van. Fejletlen a csőpostahálózat, semelyik két várost nem köti össze közvetlen cső. Az új szabályok értelmében kiépíthetnek közvetlen csőkapcsolatot az A és B város között, ha létezik még két további város C és D úgy, hogy nincs közvetlen csőposta sem A és C, sem C és D, sem D és B között. Legfeljebb hány csövet építhetnek ki?*

8.3.7. Feladat. (2005.6.) *Egy* 2005×2005*-ös táblázat elemei az* $\{1, 2, ..., n\}$ *halmazból valók. Az i-dik sor elemei alkotják az X_i halmazt, a j-dik oszlop elemei alkotják az Y_j halmazt. Melyik az a legkisebb n érték, melyre lehetséges, hogy az X_1, X_2, ..., X_{2005}, Y_1, Y_2, ..., Y_{2005} halmazok páronként különbözők?*

8.3.8. Feladat. (2006.1.) *Legyen* $H = \{1, 2, 3, ..., 100\}$. *A H halmaz egy részhalmazát összefüggőnek nevezzük, ha csak egyetlen számot, vagy néhány szomszédos számot tartalmaz. Határozzuk meg a legnagyobb k egész számot, amelyre megadható $H-$nak k részhalmaza úgy, hogy közülük bármely két különbözőnek a metszete összefüggő.*

8.3.9. Feladat. (2007.2.) *A $P_1P_2...P_n$ szabályos n szög oldalaira és átlóira ráírunk egy-egy pozitív egész számot, ezek közül a legnagyobb legyen r. A számozás során az 1, 2, ..., r számok mindegyikét legalább egyszer felhasználtuk. Bármely $P_iP_jP_k$ háromszög oldalai közül kettőn ugyanaz a szám áll, a harmadikon pedig egy kisebb. Határozzuk meg r legkisebb és legnagyobb lehetséges értékét.*

8.3.10. Feladat. (2007.6.) *Adott n pont a síkban, semelyik három nincs egy egyenesen, jelölje ezt a halmazt S. Legyen P olyan konvex* *sokszög, melynek minden csúcsa S beli pont, $a(P)$ jelölje P csúcsainak számát, $b(P)$ jelölje az S halmazból P-n kívül eső pontok számát. Bizonyítsuk be, hogy minden valós x esetén*

$$\sum_P x^{a(P)}(1-x)^{b(P)} = 1,$$

ahol az összeg végigfut az összes lehetséges P-n. A szakaszt, a pontot és az üres halmazt is konvex sokszögnek tekintjük, rendre 2, 1, 0 csúccsal.

8.3.11. Feladat. (2008.1.) *Legyen n adott pozitív egész. A pozitív egészeket ki szeretnénk színezni 2 színnel, pirossal és kékkel úgy, hogy teljesüljön a következő két feltétel: (i) mindkét szín végtelen sokszor szerepel, (ii) bármely n különböző piros szám összege piros és bármely n különböző kék összege kék. Van-e ilyen színezés, ha (a) $n = 2007$; (b) $n = 2008$?*

8.3.12. Feladat. (2009.1.) *A derékszögű koordinátarendszerben nevezzük doboznak az olyan téglalapokat, amelyeknek oldalai a tengelyekkel párhuzamosak. Ha két doboznak van közös belső, vagy határpontja, akkor őket metszőknek nevezzük. Legfeljebb mekkora lehet n, ha megadható n doboz $B_1, B_2, ..., B_n$ úgy, hogy B_i és B_j akkor és csak akkor metszők, ha n nem osztja sem $i-(j+1)$-et, sem $i-(j-1)$-et?*

8.3.13. Feladat. (2009.4.) *Határozzuk meg minden pozitív egész n esetén az $\{1, 2, ..., n\}$ halmaz elemeinek azon $(a_1, a_2, ..., a_n)$ permutációinak számát, amelyekre $2(a_1 + a_2 + ... + a_k)$ osztható k-val minden $k = 1, 2, ..., n$ esetén.*

8.3.14. Feladat. (2010.1.) *Definiálunk egy sorozatot, legyen $a_0 = 0$. Ha n legnagyobb páratlan osztójának 4-es maradéka 1, akkor $a_n = a_{n-1} + 1$, ha a maradék 3, akkor $a_n = a_{n-1} - 1$. A sorozat első néhány eleme : 0,1,2,1,2,3,...*

Bizonyítsuk be, hogy minden pozitív egész végtelen sokszor szerepel a sorozatban.

8.3.15. Feladat. (2010.5.) *Határozzuk meg azon pozitív egész n számokat, amelyekre az $S = \{1, 2, ..., n\}$ halmaz elemei színezhetők pirosra vagy kékre úgy, hogy az $S \times S \times S$ halmaz éppen 2007 olyan $(x; y; z)$ rendezett hármast tartalmaz, amelyre x, y, z azonos színűek és $n | x + y + z$.*

8.4. Számelmélet feladatok

8.4.1. Feladat. (2001.2.) *Legyenek a, b olyan pozitív egészek, hogy $p = \frac{b}{4}\sqrt{\frac{2a-b}{2a+b}}$ prímszám. Legfeljebb mekkora lehet p?*

8.4.2. Feladat. (2002.1.) *Keressük meg mindazon pozitív egész n számokat ($n \geq 2$), melyekre teljesül a következő: Minden n-hez relatív prím a és b szám esetén n akkor és csak akkor osztója $(a - b)$-nek, ha $(ab - 1)$-nek is.*

8.4.3. Feladat. (2003.6.) *Pozitív egész számok véges halmazait vizsgáljuk. Egy ilyen halmaz összegosztós, ha a halmaz minden eleme osztója az elemek összegének.*

(a) Adjunk meg egy olyan összegosztós halmazt, melynek eleme a 7 és a 17.

(b) Igazoljuk, hogy pozitív egészek egy tetszőleges véges H halmazához létezik olyan összegosztós G halmaz, hogy H részhalmaza G-nek.

8.4.4. Feladat. (2004.3.) *Egy pozitív egész számot közvetlenül egymás után kétszer leírva dupla számot kapunk. (Pl. dupla szám a 357357, amit a 357-ből kaptunk.) Bizonyítsuk be, hogy a négyzetszámok között végtelen sok dupla szám van.*

8.4.5. Feladat. (2005.3.) *Legyen p egy 2-nél nagyobb prím. A pozitív egészek a_1, a_2, ..., a_{p-2} sorozatáról tudjuk, hogy p nem osztja sem a_k-t, sem $(a_k^k - 1)$-et ($k = 1, 2, ..., p-2$). Igazoljuk, hogy a sorozat néhány tagjának szorzata 2 maradékot ad p-vel osztva.*

8.4.6. Feladat. (2006.6.) *Határozzuk meg mindazon $n > 1$ egészeket, amelyekre egyértelműen létezik olyan a egész, amelyre $0 < a \leq n!$ és $n!$ osztója $(a^n + 1)$-nek.*

8.4.7. Feladat. (2007.3.) *Igazoljuk, hogy végtelen sok olyan pozitív egész n szám van, amire $2^n + 3^n$ osztható n^2 -tel.*

8.4.8. Feladat. (2008.4.) *Legyenek b és n 1-nél nagyobb egészek. Tegyük fel, hogy minden $k > 1$ egész esetén van olyan a_k egész, amelyre $b - a_k^n$ osztható k-val. Igazoljuk, hogy $b = A^n$, ahol A egész.*

8.4.9. Feladat. (2009.3.) *Igazoljuk, hogy a*

$$\binom{2^n-1}{0}, \quad \binom{2^n-1}{1}, \quad \binom{2^n-1}{2}, \quad \ldots, \quad \binom{2^n-1}{2^{n-1}-1}$$

számok csupa különböző, páratlan maradékot adnak 2^n -nel osztva.

8.4.10. Feladat. (2010.4.) *Keressük meg a legnagyobb valós m értéket, amelyre az alábbi egyenletrendszer tetszőleges x, y, z, u pozitív egész megoldása esetén $m \leq x/y$, ha $x \geq y$:*

$$x + y = z + u \quad \text{és} \quad 2xy = zu.$$