Doktori (PhD) értekezés tézisei

Általánosított Lah-számok és néhány kapcsolódó kombinatorikus számsorozat

Rácz Gabriella

Témavezető: Dr. Nyul Gábor

Debreceni Egyetem
Matematika- és Számítástudományok Doktori Iskola
Debrecen, 2021

Short thesis for the degree of doctor of philosophy (PhD)

Generalized Lah numbers and some related combinatorial number sequences

Gabriella Rácz

Supervisor: Dr. Gábor Nyul

University of Debrecen
Doctoral School of Mathematical and Computational Sciences

Debrecen, 2021

1. Bevezető

A disszertációnk kiindulópontját jelentő Stirling-számok alapvető fontosságúak a leszámláló kombinatorikában. Az $\left[{n \atop k}\right]$ elsőfajú Stirling-szám azon S_n-beli permutációk számát adja meg, melyek k darab páronként idegen ciklus szorzataként állnak elő, míg az $\left\{{n \atop k}\right\}$ másodfajú Stirling-szám egy n elemű halmaz k darab osztályba való osztályozásainak a számával egyezik meg ($0 \leq k \leq n$).

Ha a másodfajú Stirling-számok problémáját módosítjuk olyan módon, hogy az osztályokon belül számítson az elemek sorrendje, azaz az osztályok rendezettek legyenek, akkor az időnként harmadfajú Stirling-számoknak is nevezett $\left\lfloor{n \atop k}\right\rfloor$ Lah-számokhoz jutunk ($0 \leq k \leq n$).

Ezek a számok egy szlovén matematikusról, I. Lahról [37, 38] kapták a nevüket, ugyanis ő vezette be azokat az 1950-es évek közepén. Először egy aktuárius matematikai, majd egy statisztikai témájú cikkben kerülnek említésre. Lah a később róla elnevezett számokat az ún. emelkedő és süllyedő faktoriálisok közötti

$$x^{\overline{n}} = \sum_{k=0}^{n} \left\lfloor{n \atop k}\right\rfloor x^{\underline{k}} \quad (n \geq 0)$$

kapcsolat megadásával értelmezte, ahol $x^{\overline{n}}$ az x n-edik emelkedő faktoriálisa, valamint $x^{\underline{k}}$ az x k-adik süllyedő faktoriálisa.

A leszámláló kombinatorikában nagy jelentőséggel bírnak a Bell-számok, amelyek egy adott elemszámú véges halmaz összes osztályozásainak a számát adják meg. Ebből következik, hogy a Bell-számok a másodfajú Stirling-számok összegzésével adódnak rögzített felső paraméter esetén, azaz az n-edik Bell-szám $B_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \left\{{n \atop k}\right\}$ ($n \geq 0$). Ha elkészítjük azt a polinomot, melyben x^k együtthatója az $\left\{{n \atop k}\right\}$ másodfajú Stirling-szám, akkor az n-edik Bell-polinomot kapjuk.

Ha egy adott elemszámú véges halmaz rendezett osztályozásait számoljuk össze, azaz lényeges az osztályok sorrendje, akkor a Fubini-számokhoz jutunk, valamint hozzájuk kapcsolódóan értelmezhetők a Fubini-polinomok is.

A Stirling-számoknak sokféle általánosítása és változata ismert. Ezek közül számunkra az ún. r-általánosítás a legérdekesebb, ahol a halmazunk tartalmaz r darab kitüntetett elemet, melyeknek különböző ciklusokba, illetve osztályokba kell kerülniük. Az r-Stirling-számokat L. Carlitz [12], A. Z. Broder [11] és R. Merris [42] definiálta, egymástól függetlenül.

A Lah-számok hasonló általánosításával korábban nem igazán foglalkoztak. Az értekezés 2. fejezetében, miután röviden áttekintjük az elsőfajú és a másodfajú r-Stirling-számok fogalmát és tulajdonságait, bevezetjük és részletesen tanulmányozzuk az r-Lah-számokat. A fejezet az [55] publikáció alapján készült.

A másodfajú r-Stirling-számok összegzésével értelmezhetők az r-Bell-számok, illetve a kapcsolódó r-Bell-polinomok is. Ezek bevezetése L. Carlitz [12] és Mező I. [43, 45] nevéhez fűződik.

A Bell-számokkal és a Bell-polinomokkal már sokan foglalkoztak, éppen ezért meglepő, hogy a Lah-számokból hasonló módon előállítható $L_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \left\lfloor {n \atop k} \right\rfloor$ $(n \geq 0)$ összegzett Lah-számokat csak nagyon érintőlegesen, az $L_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} \left\lfloor {n \atop k} \right\rfloor x^k$ Lah-polinomokat pedig még nem vizsgálták. A 3. fejezetben ezt általánosabb módon tesszük meg: értelmezzük az összegzett r-Lah-számokat és az r-Lah-polinomokat. A kombinatorikus tulajdonságaik mellett az r-Lah-polinomok gyökeinek vizsgálatával is foglalkozunk. Ez a fejezet az [57] és a [62] publikációk eredményeit tartalmazza.

A dolgozat 4. fejezetében gráfok párosításainak összeszámlálásával fogunk foglalkozni. Először olyan gráfokat konstruálunk, melyekben a párosítások száma Lucas-sorozatok segítségével kapható meg. Ezt követően az r-Lah-számokra és a másodfajú r-Stirling-számokra gráfelméleti interpretációt adunk meg, bizonyos páros gráfok adott elemszámú párosításainak számával összefüggésben. A fejezet az [56] és az [58] publikációk alapján íródott.

A Fubini-számok r-általánosítását Mező I. és Nyul G. [49] definiálta. Azzal az esettel azonban, amikor az osztályok sorrendje is és az osztályokon belül az elemek sorrendje is számít, korábban még nem foglalkoztak. Ezt fogjuk megtenni az 5. fejezetben, értelmezzük az r-Fubini–Lah-számokat és a kapcsolódó polinomokat, továbbá vizsgáljuk ezek tulajdonságait. A fejezet a [63] cikken alapul.

2. Az r-Lah-számok

2.1. Az r-Stirling-számok

L. Carlitz [12], A. Z. Broder [11] és R. Merris [42] definiálták és vizsgálták az r-Stirling-számokat. Ha $0 \leq k \leq n$ és $r \geq 0$ egészek, n, r nem mindkettő 0, akkor az $\left[{n \atop k} \right]_r$ elsőfajú r-Stirling-szám azon S_{n+r}-beli permutációk számát adja meg, amelyek $k + r$ darab páronként idegen ciklus szorzataként állnak elő úgy, hogy r darab kitüntetett elem különböző ciklusban van. Az $\left\{ {n \atop k} \right\}_r$ másodfajú r-Stirling-szám pedig egy $n+r$ elemű halmaz $k+r$ darab osztályba való olyan osztályozásainak a száma, ahol r kitüntetett elem különböző osztályba kerül. Az értekezés 1–3. táblázatában összefoglaljuk az r-Stirling-számok legfontosabb tulajdonságait, melyek között találhatóak korábban nem ismert összefüggések is.

Megemlítjük, hogy az r-Stirling-számok és a T. A. Dowling [18] által bevezetett Whitney-számok közös általánosítását, az r-Whitney-számokat Mező I. [44] értelmezte. Ezekre a számokra Gyimesi E. és Nyul G. [27] adtak új, kombinatorikus interpretációt.

2.2. Az r-Lah-számok és tulajdonságaik

Ebben az alfejezetben definiáljuk az r-Lah-számokat, és vizsgáljuk tulajdonságaikat. Megjegyezzük, hogy az r-Lah-számok néhány tulajdonságát tőlünk függetlenül igazolta H. Belbachir, A. Belkhir [2] és H. Belbachir, E. Bousbaa [3] is, valamint ezek a számok M. Mihoubi és M. Rahmani [52] munkájában is megjelentek.

2.1. Definíció. *Legyenek $0 \le k \le n$ és $r \ge 0$ egész számok. Ha n, r nem mindkettő 0, akkor jelölje $\left\lfloor {n \atop k} \right\rfloor_r$ egy $n+r$ elemű halmaz $k+r$ darab rendezett osztályba való olyan osztályozásainak a számát, ahol r kitüntetett elem különböző rendezett osztályba kerül. Legyen továbbá $\left\lfloor {0 \atop 0} \right\rfloor_0 = 1$. Az $\left\lfloor {n \atop k} \right\rfloor_r$ számokat **r-Lah-szám**oknak nevezzük.*

Ha $r=0$ vagy 1, akkor a klasszikus Lah-számokat kapjuk, pontosabban $\left\lfloor {n \atop k} \right\rfloor_0 = \left\lfloor {n \atop k} \right\rfloor$ és $\left\lfloor {n \atop k} \right\rfloor_1 = \left\lfloor {n+1 \atop k+1} \right\rfloor$.

Kicsi és nagy k értékekre az r-Lah-számok értékei egyszerűen meghatározhatók.

2.2. Tétel. *Legyen $n, r \ge 0$. Ekkor*

1. $\left\lfloor {n \atop 0} \right\rfloor_r = (2r)^{\overline{n}}$,
2. $\left\lfloor {n \atop 1} \right\rfloor_r = (2r+1)^{\overline{n}} - (2r)^{\overline{n}}$ $(n \ge 1)$,
3. $\left\lfloor {n \atop n-1} \right\rfloor_r = n(n-1) + 2nr$ $(n \ge 1)$,
4. $\left\lfloor {n \atop n} \right\rfloor_r = 1$.

Az r-Lah-számok teljesítik a következő rekurziót.

2.3. Tétel. ([55, Theorem 3.1])
Legyen $1 \leq k \leq n$ *és* $r \geq 0$. *Ekkor*

$$\left\lfloor \begin{matrix} n+1 \\ k \end{matrix} \right\rfloor_r = \left\lfloor \begin{matrix} n \\ k-1 \end{matrix} \right\rfloor_r + (n+k+2r) \left\lfloor \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\rfloor_r .$$

Az r-Lah-számokra érvényes egy másik rekurzió is.

2.4. Tétel. ([58, Proposition 1.1])
Ha $n \geq 2$, $1 \leq k \leq n-1$ *és* $r \geq 0$, *akkor*

$$\left\lfloor \begin{matrix} n+1 \\ k \end{matrix} \right\rfloor_r = \left\lfloor \begin{matrix} n \\ k-1 \end{matrix} \right\rfloor_r + (2n+2r) \left\lfloor \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\rfloor_r - n(n+2r-1) \left\lfloor \begin{matrix} n-1 \\ k \end{matrix} \right\rfloor_r .$$

A következő azonosságot az r-Lah-számokra vonatkozó függőleges rekurziónak nevezzük.

2.5. Tétel. ([55, Theorem 3.3])
Legyen $0 \leq k \leq n$ *és* $r \geq 0$. *Ekkor*

$$\left\lfloor \begin{matrix} n+1 \\ k+1 \end{matrix} \right\rfloor_r = \sum_{j=k}^{n} (n+k+2r+1)^{\underline{n-j}} \left\lfloor \begin{matrix} j \\ k \end{matrix} \right\rfloor_r .$$

Az eltolt emelkedő és süllyedő faktoriálisok közötti kapcsolat az r-Lah-számok segítségével írható le.

2.6. Tétel. ([55, Theorem 3.2])
Legyen $n, r \geq 0$. *Ekkor*

1. $(x+2r)^{\overline{n}} = \sum\limits_{k=0}^{n} \left\lfloor \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right\rfloor_r x^{\underline{k}}$,

2. $(x-2r)^{\underline{n}} = \sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \left\lfloor \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right\rfloor_r x^{\overline{k}}$.

A következő két tételben az r-Lah-számokat $(r-s)$-Lah-számok segítségével fejezzük ki, két lényegesen különböző módon.

2.7. Tétel. ([55, Theorem 3.4])
Legyen $0 \leq k \leq n$ *és* $0 \leq s \leq r$. *Ekkor*

$$\left\lfloor \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\rfloor_r = \sum_{j=k}^{n} \binom{n}{j} \left\lfloor \begin{matrix} j \\ k \end{matrix} \right\rfloor_{r-s} (2s)^{\overline{n-j}} .$$

2.8. Tétel. ([55, Theorem 3.5])
Legyen $0 \le k \le n$ és $0 \le s \le r$. Ekkor

$$\left\lfloor {n \atop k} \right\rfloor_r = \sum_{j=k}^{n} \left\lfloor {n \atop j} \right\rfloor_{r-s} \binom{j}{k} (2s)^{\underline{j-k}}.$$

Most az r-Lah-számokra vonatkozó binomiális konvolúciós formulát ismertetjük.

2.9. Tétel. ([55, Theorem 3.6])
Legyen $n, k, l, r, s \ge 0$ és $k + l \le n$. Ekkor

$$\binom{k+l}{k} \left\lfloor {n \atop k+l} \right\rfloor_{r+s} = \sum_{j=k}^{n-l} \binom{n}{j} \left\lfloor {j \atop k} \right\rfloor_r \left\lfloor {n-j \atop l} \right\rfloor_s.$$

Az r-Lah-számokra érvényes az alábbi explicit formula.

2.10. Tétel. ([55, Theorem 3.7])
Legyen $0 \le k \le n$ és $r \ge 0$. Ha k, r nem mindkettő 0, akkor

$$\left\lfloor {n \atop k} \right\rfloor_r = \frac{n!}{k!} \binom{n+2r-1}{k+2r-1}.$$

Az explicit formula segítségével igazolható, hogy rögzített felső paraméter esetén az r-Lah-számok sorozata szigorúan log-konkáv és unimodális.

2.11. Tétel. ([55, Theorem 3.8])
Legyen $n \ge 1$ és $r \ge 0$. Ekkor az $\left(\left\lfloor {n \atop k} \right\rfloor_r\right)_{k=0}^n$ sorozat szigorúan log-konkáv és így unimodális.

A szigorú log-konkavitásból az is következik, hogy az $\left(\left\lfloor {n \atop k} \right\rfloor_r\right)_{k=0}^n$ sorozatnak egy vagy két maximumhelye van. A következő tételben meg is határozzuk ezeket.

2.12. Tétel. ([55, Theorem 3.9])
Legyen $n \ge 1$ és $r \ge 0$.

1. *Ha $n+r^2+1$ nem négyzetszám, akkor az $\left(\left\lfloor {n \atop k} \right\rfloor_r\right)_{k=0}^n$ sorozatnak egy maximumhelye van: $\left\lfloor \sqrt{n+r^2+1} \right\rfloor - r$.*

2. *Ha $n+r^2+1$ négyzetszám, akkor az $\left(\left\lfloor {n \atop k} \right\rfloor_r\right)_{k=0}^n$ sorozatnak két maximumhelye van: $\sqrt{n+r^2+1} - r - 1$ és $\sqrt{n+r^2+1} - r$.*

A következő tételben megadjuk az r-Lah-számok sorozatának exponenciális generátorfüggvényét rögzített k esetén.

2.13. Tétel. ([55, Theorem 3.10])
Legyen $k, r \geq 0$. Ekkor az $\left(\left\lfloor {n \atop k} \right\rfloor_r\right)_{n=k}^{\infty}$ sorozat exponenciális generátorfüggvénye

$$\sum_{n=k}^{\infty} \left\lfloor {n \atop k} \right\rfloor_r \frac{x^n}{n!} = \frac{1}{k!}\left(\frac{x}{1-x}\right)^k \left(\frac{1}{1-x}\right)^{2r}.$$

Az alábbi tétel és következménye az r-Lah-számok (általánosított) önortogonalitását írja le, valamint kapcsolatokat ad meg az r-Lah- és az r-Stirling-számok között.

2.14. Tétel. ([55, Theorem 3.11])
Legyen $0 \leq k \leq n$ és $r, s \geq 0$. Ekkor

1. $\sum\limits_{j=k}^{n} (-1)^{j-k} \left\lfloor {n \atop j} \right\rfloor_r \left\lfloor {j \atop k} \right\rfloor_s = \binom{n}{k} (2r-2s)^{\overline{n-k}}$,

2. $\left[{n \atop k} \right]_{2r-s} = \sum\limits_{j=k}^{n} (-1)^{j-k} \left\lfloor {n \atop j} \right\rfloor_r \left[{j \atop k} \right]_s$, *ha* $2r \geq s$,

3. $\left\{ {n \atop k} \right\}_{2s-r} = \sum\limits_{j=k}^{n} (-1)^{n-j} \left\{ {n \atop j} \right\}_r \left\lfloor {j \atop k} \right\rfloor_s$, *ha* $2s \geq r$,

4. $\left\lfloor {n \atop k} \right\rfloor_{\frac{r+s}{2}} = \sum\limits_{j=k}^{n} \left[{n \atop j} \right]_r \left\{ {j \atop k} \right\}_s$, *ha* $r+s$ *páros.*

2.15. Következmény. ([55, Corollary 3.1])
Legyen $0 \leq k \leq n$ és $r \geq 0$. Ekkor

1. $\sum\limits_{j=k}^{n} (-1)^{n-j} \left\lfloor {n \atop j} \right\rfloor_r \left\lfloor {j \atop k} \right\rfloor_r = \delta_{nk}$,

2. $\left[{n \atop k} \right]_r = \sum\limits_{j=k}^{n} (-1)^{j-k} \left\lfloor {n \atop j} \right\rfloor_r \left[{j \atop k} \right]_r$,

3. $\left\{ {n \atop k} \right\}_r = \sum\limits_{j=k}^{n} (-1)^{n-j} \left\{ {n \atop j} \right\}_r \left\lfloor {j \atop k} \right\rfloor_r$,

4. $\left\lfloor {n \atop k} \right\rfloor_r = \sum\limits_{j=k}^{n} \left[{n \atop j} \right]_r \left\{ {j \atop k} \right\}_r$.

Végül megmutatjuk, hogy sorozatok r-Lah-transzformáltjára és inverz r-Lah-transzformáltjára igaz a következő megfordítási tétel.

2.16. Tétel. ([55, Theorem 3.12])
Legyenek $(a_n)_{n=0}^{\infty}$, $(b_n)_{n=0}^{\infty}$ *komplex számsorozatok, legyen továbbá* $r \geq 0$. *Ekkor* $b_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \left\lfloor {n \atop k} \right\rfloor_r a_k$ $(n \geq 0)$ *akkor és csak akkor teljesül, ha* $a_n = \sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \left\lfloor {n \atop k} \right\rfloor_r b_k$ $(n \geq 0)$.

Megjegyezzük, hogy az elmúlt években, az [55] cikk megjelenése után, részben annak hatására többen is vizsgálták az r-Lah-számok további általánosításait és változatait, lásd [7, 14, 19, 27, 50, 64, 68, 70, 71, 72, 73].

3. Az összegzett r-Lah-számok és az r-Lah-polinomok

3.1. Az r-Bell-számok és az r-Bell-polinomok

L. Carlitz [12] és Mező I. [43, 45] értelmezték a Bell-számok r-általánosítását. Ha $n, r \geq 0$ és n, r nem mindkettő 0, akkor a $B_{n,r}$ n-edik r-Bell-szám egy $n + r$ elemű halmaz összes olyan osztályozásának a számát adja meg, ahol r kitüntetett elem különböző osztályba kerül, azaz $B_{n,r} = \sum\limits_{k=0}^{n} \left\{ {n \atop k} \right\}_r$. A másodfajú r-Stirling-számokhoz kapcsolódóan értelmezhetők a $B_{n,r}(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} \left\{ {n \atop k} \right\}_r x^k$ r-Bell-polinomok is, ezt Mező I. [43, 45] tette meg. A 4. táblázatban összefoglaljuk az r-Bell-polinomok legfontosabb tulajdonságait, a táblázat tartalmaz új eredményeket is. Ezeknek egyszerű helyettesítéssel kaphatók az r-Bell-számokra vonatkozó megfelelői, ugyanis $B_{n,r}(1) = B_{n,r}$.

A Mező I. által bevezetett másodfajú r-Whitney-számok segítségével G.-S. Cheon és J.-H. Jung [14] értelmezték az r-Dowling-polinomokat, amelyek az r-Bell-polinomok általánosításai. Az r-Dowling–Lah-polinomokat, melyeknek együtthatói az r-Whitney–Lah-számok, Gyimesi E. [24] definiálta és vizsgálta.

3.2. Az összegzett r-Lah-számok és az r-Lah-polinomok tulajdonságai

Ebben az alfejezetben az r-Lah-számok összegzésével foglalkozunk, és ehhez kapcsolódóan értelmezzük az r-Lah-polinomokat is.

3.1. Definíció. *Legyenek $n, r \geq 0$ egész számok, nem mindkettő 0. Jelölje $L_{n,r}$ egy $n+r$ elemű halmaz összes rendezett osztályokba való olyan osztályozásainak a számát, ahol r kitüntetett elem különböző rendezett osztályba kerül. Legyen továbbá $L_{0,0} = 1$. Ekkor $L_{n,r}$-et az n-edik **összegzett r-Lah-számnak** nevezzük.*

Megjegyzés. A definícióból azonnal adódik, hogy ha $n, r \geq 0$, akkor

$$L_{n,r} = \sum_{j=0}^{n} \left\lfloor \begin{matrix} n \\ j \end{matrix} \right\rfloor_r .$$

Az összegzett r-Lah-számokhoz kapcsolódóan értelmezzük az r-Lah-polinomokat.

3.2. Definíció. *Legyen $n, r \geq 0$. Ekkor az*

$$L_{n,r}(x) = \sum_{j=0}^{n} \left\lfloor \begin{matrix} n \\ j \end{matrix} \right\rfloor_r x^j$$

*polinomot az n-edik **r-Lah-polinomnak** nevezzük.*

Megjegyzés. Ha $n, r \geq 0$ nem mindkettő 0 és $c \geq 1$, akkor $L_{n,r}(c)$ megadja egy $n+r$ elemű halmaz rendezett osztályokba való olyan osztályozásainak és a rendezett osztályok c darab színnel való színezéseinek a számát, ahol r kitüntetett elem különböző rendezett osztályba kerül, és a kitüntetett elemeket tartalmazó rendezett osztályok nem kapnak színt. Speciálisan $L_{n,r}(1) = L_{n,r}$.

Ha $r = 0$ vagy 1, akkor alapvetően a közönséges összegzett Lah-számokat és a Lah-polinomokat kapjuk.

3.3. Tétel. *Legyen $n \geq 0$. Ekkor*

1. *$L_{n,0}(x) = L_n(x)$ és $L_{n,0} = L_n$,*

2. *$xL_{n,1}(x) = L_{n+1}(x)$ és $L_{n,1} = L_{n+1}$.*

Az alábbi formula az r-Lah-polinomok egy olyan rekurziója, melyben a polinom deriváltja is szerepel.

3.4. Tétel. ([57, Theorem 3.8 bizonyítása])
Legyen $n, r \geq 0$. Ekkor

$$L_{n+1,r}(x) = (x + n + 2r)L_{n,r}(x) + xL'_{n,r}(x).$$

Most egy másodrendű lineáris rekurziós formulát ismertetünk az r-Lah-polinomokra és ezzel együtt az összegzett r-Lah-számokra is.

3.5. Tétel. ([57, Theorem 3.5])
Ha $n \geq 1$ és $r \geq 0$, akkor

$$L_{n+1,r}(x) = (x + 2n + 2r)L_{n,r}(x) - n(n + 2r - 1)L_{n-1,r}(x),$$
$$L_{n+1,r} = (2n + 2r + 1)L_{n,r} - n(n + 2r - 1)L_{n-1,r}.$$

Az r-Lah-polinomok, valamint az összegzett r-Lah-számok kifejezhetők az $(r-s)$-Lah-polinomok, illetve az összegzett $(r-s)$-Lah-számok segítségével.

3.6. Tétel. ([57, Theorem 3.1])
Legyen $n, r, s \geq 0$ és $s \leq r$. Ekkor

$$L_{n,r}(x) = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} L_{j,r-s}(x)(2s)^{\overline{n-j}},$$
$$L_{n,r} = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} L_{j,r-s}(2s)^{\overline{n-j}}.$$

A következő tételben Spivey-típusú formulát adunk meg az r-Lah-polinomokra és az összegzett r-Lah-számokra.

3.7. Tétel. ([57, Theorem 3.3])
Legyen $m, n, r, s \geq 0$ és $s \leq r$. Ekkor

$$L_{m+n,r}(x) = \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{n} \left\lfloor {m \atop i} \right\rfloor_r \binom{n}{j} L_{j,r-s}(x)(m+i+2s)^{\overline{n-j}} x^i,$$
$$L_{m+n,r} = \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{n} \left\lfloor {m \atop i} \right\rfloor_r \binom{n}{j} L_{j,r-s}(m+i+2s)^{\overline{n-j}}.$$

Az r-Lah-polinomokra és az összegzett r-Lah-számokra érvényes az alábbi Dobiński-típusú formula.

3.8. Tétel. ([57, Theorem 3.6])
Legyen $n, r \geq 0$. Ekkor

$$L_{n,r}(x) = \frac{1}{\exp(x)} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(j+2r)^{\overline{n}}}{j!} x^j,$$
$$L_{n,r} = \frac{1}{e} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(j+2r)^{\overline{n}}}{j!}.$$

Most megadjuk az r-Lah-polinomok és az összegzett r-Lah-számok sorozatának exponenciális generátorfüggvényét.

3.9. Tétel. ([57, Theorem 3.7])
Legyen $r \geq 0$. Ekkor az $(L_{n,r}(x))_{n=0}^{\infty}$ sorozat exponenciális generátorfüggvénye

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{L_{n,r}(x)}{n!} y^n = \exp\left(\frac{xy}{1-y}\right) \frac{1}{(1-y)^{2r}},$$

az $(L_{n,r})_{n=0}^{\infty}$ sorozat exponenciális generátorfüggvénye pedig

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{L_{n,r}}{n!} y^n = \exp\left(\frac{y}{1-y}\right) \frac{1}{(1-y)^{2r}}.$$

Végül megmutatjuk, hogy az s-Bell-polinomok, illetve s-Bell-számok sorozatának elsőfajú r-Stirling-transzformáltja az $\frac{r+s}{2}$-Lah-polinomok, illetve az összegzett $\frac{r+s}{2}$-Lah-számok sorozata, ha r és s azonos paritású.

3.10. Tétel. ([57, Theorem 3.11])
Ha $n, r, s \geq 0$ és $r + s$ páros, akkor

$$L_{n,\frac{r+s}{2}}(x) = \sum_{j=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix}_r B_{j,s}(x),$$

$$L_{n,\frac{r+s}{2}} = \sum_{j=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix}_r B_{j,s}.$$

3.3. Az r-Lah-polinomok gyökei

Ebben az alfejezetben az r-Lah-polinomok gyökeinek vizsgálatával foglalkozunk.

Először azt mutatjuk meg, hogy az r-Lah-polinomok minden gyöke valós.

3.11. Tétel. ([57, Theorem 3.8])
Legyen $n \geq 1$. Ekkor $L_{n,0}(x)$ gyökei egyszeresek, valósak, az egyik gyök 0, a többi negatív. Ha $L_{n,0}(x)$ gyökei $\alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_n = 0$ és $L_{n+1,0}(x)$ gyökei $\beta_1 < \beta_2 < \ldots < \beta_{n+1} = 0$, akkor $\beta_1 < \alpha_1 < \beta_2 < \alpha_2 < \ldots < \beta_n < \alpha_n = \beta_{n+1} = 0$.

Legyen $n, r \geq 1$. Ekkor $L_{n,r}(x)$ gyökei egyszeresek, valósak és negatívak. Ha $L_{n,r}(x)$ gyökei $\alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_n$ és $L_{n+1,r}(x)$ gyökei $\beta_1 < \beta_2 < \ldots < \beta_{n+1}$, akkor $\beta_1 < \alpha_1 < \beta_2 < \alpha_2 < \ldots < \beta_n < \alpha_n < \beta_{n+1}$.

Megjegyzés. Ez az eredmény Newton tételével együtt újabb bizonyítását adja a 2.11. tételnek.

Most két egymást követő összegzett r-Lah-szám hányadosára adunk közelítést.

3.12. Következmény. ([57, Corollary 3.10])
Ha $n \geq 1$ és $r \geq 0$, akkor

$$\left| \frac{L_{n+1,r}}{L_{n,r}} - (n+r+1) - \left\lfloor \sqrt{n+r^2+1} \right\rfloor \right| < 1.$$

Érdekes kérdés, hogy mekkora az r-Lah-polinomok legkisebb gyökének nagyságrendje. Vizsgálatainkat azonban nemcsak ezekre a polinomokra végezzük el, hanem a

$$D_{n,m,r}(x) = \sum_{k=0}^{n} W_{m,r}\,(n,k)\, x^k$$

r-Dowling-polinomok [14, 26] és a

$$DL_{n,m,r}(x) = \sum_{k=0}^{n} WL_{m,r}\,(n,k)\, x^k$$

r-Dowling–Lah-polinomok [24] esetére is, ahol $W_{m,r}\,(n,k)$ és $WL_{m,r}\,(n,k)$ rendre a másodfajú r-Whitney-számokat és az r-Whitney–Lah-számokat jelöli. Megjegyezzük, hogy az r-Dowling-polinomok, illetve az r-Dowling–Lah-polinomok rendre általánosítják az r-Bell-polinomokat és az r-Lah-polinomokat, ugyanis $D_{n,1,r}(x) = B_{n,r}(x)$ és $DL_{n,1,r}(x) = L_{n,r}(x)$. Ezekre is igaz, hogy minden gyökük valós, egyszeres és nempozitív (lásd [14, 16] és [24]).

A fent említett polinomok legkisebb gyökeinek becsléséhez E. Laguerre [36] és P. A. Samuelson [67] egy állítását használjuk, ami a dolgozatban 3.13. lemmaként szerepel. Megjegyezzük, hogy a Bell- és az r-Bell-polinomokra Mező I. és R. B. Corcino [48] adott hasonló becsléseket. A tételben a $\mu\,(p(x))$ jelölést használjuk egy nemnegatív együtthatós, csak valós gyökökkel rendelkező $p(x)$ polinom legkisebb gyökének abszolút értékére.

3.14. Tétel. ([62, Theorem])
Legyen $n \geq 2$, $r \geq 0$ és $m \geq 1$. Ekkor

1. $\mu\,(D_{n,m,r}(x)) \leq \frac{m(n-1)}{2} + r + \frac{n-1}{2\sqrt{3}}\sqrt{5m^2n - 7m^2 + 12mr}$;
2. $\mu\,(L_{n,r}(x)) \leq n - 1 + 2r + (n-1)\sqrt{n-1+2r}$;
3. $\mu\,(DL_{n,m,r}(x)) \leq m\,(n-1) + 2r + (n-1)\sqrt{m^2n - m^2 + 2mr}$.

Numerikus számításokat is végeztünk, hogy meghatározzuk az r-Dowling- és az r-Dowling–Lah-polinomok legkisebb gyökeinek pontos értékét. A számításokat szuperszámítógéppel végeztük, a Maple 2015 szoftver használatával.

Az értekezésbeli 5. táblázat $\mu\left(D_{n,m,r}(x)\right)$, a 6. táblázat pedig $\mu\left(DL_{n,m,r}(x)\right)$ felső egész részét tartalmazza az $n = 25000, 50000, 75000$, az $r = 0, 1, 2, 3$ és az $m = 1, 2, 3, 4$ esetekben. Itt csak az r-Lah-polinomokra vonatkozó értékeket tüntetjük fel.

r	$n = 25000$	$n = 50000$	$n = 75000$
0	99828	199783	299752
1	99832	199787	299756
2	99836	199791	299760
3	99840	199795	299764

A számításaink azt mutatják, hogy $\mu\left(D_{n,m,r}(x)\right)$ és $\mu\left(DL_{n,m,r}(x)\right)$ aszimptotikusan lineáris a polinom fokszámában, és n szorzója r-től független, pontosabban $\mu\left(D_{n,m,r}(x)\right) \sim mc_B \cdot n$ és $\mu\left(DL_{n,m,r}(x)\right) \sim mc_L \cdot n$, ahol $c_B \approx e$ és $c_L \approx 4$. Erre az észrevételre adunk néhány heurisztikus magyarázatot, a numerikus számításaink eredményén túl.

4. Kombinatorikus számsorozatok gráfelméleti interpretációja

4.1. Párosítások összeszámolása

Egy gráf éleinek egy halmazát párosításnak hívjuk, ha semelyik két halmazbeli élnek nincs közös végpontja. Egy gráf összes párosításainak a számát (ahol a 0 elemű, üres párosítást is számoljuk) a gráf Hosoya-indexének szokás hívni. Ha pedig elkészítjük azt a polinomot, amelyben x^k együtthatója egy gráf k elemű párosításainak a száma, akkor az adott gráf párosítási generátorpolinomját kapjuk. Ha ebbe a polinomba 1-et helyettesítünk, akkor a gráf Hosoya-indexéhez jutunk.

Ebben a fejezetben gráfelméleti interpretációt adunk meg az r-Lah-számokra és a másodfajú r-Stirling-számokra, páros gráfok párosításainak számával kapcsolatosan. Emellett egy alfejezet erejéig a Lucas-sorozatokra is kitérünk, hogy kiterjesszünk egy közelmúltbeli eredményt.

4.2. Párosítások és a Lucas-sorozatok

Az n csúcsú útgráf Hosoya-indexe az $(n+1)$-edik Fibonacci-számmal egyezik meg, az n csúcsú körgráf összes párosításainak a számát pedig az n-edik Lucas-szám adja meg. Ebben az alfejezetben általánosítjuk ezeket az állításokat.

A továbbiakban legyenek $a, b \geq 1$ egész számok. Ekkor az $(u_n(a,-b))_{n=0}^{\infty}$ elsőfajú és a $(v_n(a,-b))_{n=0}^{\infty}$ másodfajú Lucas-sorozatokat az alábbi kezdeti értékekkel és rekurziókkal definiáljuk:

$$u_0(a,-b) = 0,\ u_1(a,-b) = 1,$$

$$u_{n+2}(a,-b) = au_{n+1}(a,-b) + bu_n(a,-b) \quad (n \geq 0);$$

és

$$v_0(a,-b) = 2,\ v_1(a,-b) = a,$$

$$v_{n+2}(a,-b) = av_{n+1}(a,-b) + bv_n(a,-b) \quad (n \geq 0).$$

Ezek a sorozatok $a = b = 1$ esetén a Fibonacci-számok, illetve a Lucas-számok sorozatát adják vissza.

J. Alexander és P. Hearding [1] olyan gráfokat konstruáltak, melyekben a független csúcshalmazok száma olyan Lucas-sorozatok segítségével írható le, amelyekre $a \geq b$ teljesül. Felmerül a kérdés, hogy ezt a korlátozó feltételt ki lehet-e küszöbölni. Ez a kérdés adta az ötletet a Lucas-sorozatok egy újabb gráfelméleti interpretációjának megadásához, a Hosoya-index segítségével.

Ehhez két gráfcsaládot vezetünk be. Legyenek $n, a, b \geq 1$ egészek. A $P_{n,a,b}$ gráf az alábbi módon áll elő: Tekintsük n darab a csúcsú csillaggráf diszjunkt unióját, jelöljük ezen csillaggráfok középpontjait $w_1, \ldots, w_n$-nel. Majd w_i-t és w_{i+1}-et kössük össze b darab párhuzamos éllel $(i = 1, \ldots, n-1)$.

Jelöljük $C_{n,a,b}$-vel azt a gráfot, amit úgy kapunk meg az előbb értelmezett $P_{n,a,b}$ gráfból, hogy még w_1 és w_n közé felveszünk b darab további párhuzamos élt.

Megjegyezzük, hogy ezek a gráfok az út-, illetve a körgráfok általánosításai, ugyanis $P_{n,1,1}$ az n csúcsú útgráf, míg $C_{n,1,1}$ az n csúcsú körgráf.

4.1. Tétel. ([56, Theorem 1])
Legyen $n, a, b \geq 1$. Ekkor a $P_{n,a,b}$ gráf Hosoya-indexe $u_{n+1}(a,-b)$.

4.2. Tétel. ([56, Theorem 2])
Legyen $n, a, b \geq 1$. Ekkor a $C_{n,a,b}$ gráf Hosoya-indexe $v_n(a,-b)$.

Most az eredeti problémánkat oldjuk meg. Mivel a G gráf egy párosítása a gráf $L(G)$ élgráfjában független csúcshalmaznak felel meg, így a tételeinkből következik az alábbi állítás.

4.3. Következmény. ([56, Corollary])
Legyen $n, a, b \geq 1$. Ekkor az $L(P_{n,a,b})$ és az $L(C_{n,a,b})$ gráfok összes független csúcshalmazainak a száma rendre $u_{n+1}(a, -b)$ és $v_n(a, -b)$.

4.3. Az r-Lah- és a másodfajú r-Stirling-számok kapcsolata a párosításokkal

Ebben az alfejezetben gráfelméleti interpretációt adunk meg az r-Lah- és a másodfajú r-Stirling-számokra, páros gráfok párosításainak összeszámolásán keresztül.

Ha $n, r \geq 1$ és $0 \leq k \leq n$, akkor jelöljük $\ell_r(n, k)$-val a $K_{n,n+r-1}$ teljes páros gráf $n - k$ elemű párosításainak a számát.

A definícióból könnyen adódnak az alábbi speciális értékek.

4.4. Tétel. *Legyen $n \geq 0$ és $r \geq 1$. Ekkor*

1. $\ell_r(n, 0) = r^{\overline{n}}$,
2. $\ell_r(n, 1) = (r + 1)^{\overline{n}} - r^{\overline{n}}$ $(n \geq 1)$,
3. $\ell_r(n, n - 1) = n(n + r - 1)$ $(n \geq 1)$,
4. $\ell_r(n, n) = 1$.

Legyen $n \geq 0$ és $r \geq 1$ esetén

$$\mathcal{L}_{n,r} = \sum_{k=0}^{n} \ell_r(n, k),$$

ami tehát a $K_{n,n+r-1}$ teljes páros gráf Hosoya-indexét adja meg.

Az $\ell_r(n, k)$ számokat együtthatókként használva, $n \geq 0$ és $r \geq 1$ esetén értelmezhető az

$$\mathcal{L}_{n,r}(x) = \sum_{k=0}^{n} \ell_r(n, k)x^k$$

polinom is, ami pedig a $K_{n,n+r-1}$ teljes páros gráf párosítási generátorpolinomjának reciprok polinomja.

Az alábbi tétel adja meg a kapcsolatot a fent definiált számok és polinomok, valamint az r-Lah-számok, az összegzett r-Lah-számok és az r-Lah-polinomok között.

4.5. Tétel. ([58, Theorem 2.1])
Legyen $0 \le k \le n$ *és* $r \ge 1$*. Ekkor*

$$\ell_{2r}(n,k) = \left\lfloor \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\rfloor_r, \quad \mathcal{L}_{n,2r} = L_{n,r}, \quad \mathcal{L}_{n,2r}(x) = L_{n,r}(x).$$

Megjegyzés. A tétel azt mutatja, hogy ezzel a gráfelméleti interpretációval az r-Lah-számok, az összegzett r-Lah-számok és az r-Lah-polinomok félegész r paraméterek esetén is értelmezhetők.

Erre a tételre öt bizonyítást adunk. Az első négy bizonyítás az $\ell_r(n,k)$ számok tulajdonságain (két különböző rekurzión, az eltolt emelkedő és süllyedő faktoriálisok közötti polinomos azonosságon és egy explicit formulán) múlik. Az ötödik bizonyítás egy érdekes bijektív megfeleltetésen alapul.

A gráfelméleti értelmezés segítségével újabb bizonyítást tudunk adni a 2.8. tételre.

4.6. Tétel. ([58, Proposition 4.1])
Ha $0 \le k \le n$ *és* $0 \le s < r$*, akkor*

$$\ell_r(n,k) = \sum_{j=k}^{n} \ell_{r-s}(n,j) \binom{j}{k} s^{\underline{j-k}}.$$

Most négy olyan rekurziót adunk meg, melyeknek az r-Lah-számokra vonatkozóan értelemszerűen nincsenek megfelelőik.

4.7. Tétel. ([58, Proposition 4.2])

1. *Ha* $1 \le k \le n$ *és* $r \ge 1$*, akkor*

$$\ell_r(n+1,k) = \ell_{r+1}(n,k-1) + (n+r)\ell_r(n,k),$$

$$\mathcal{L}_{n+1,r} = \mathcal{L}_{n,r+1} + (n+r)\mathcal{L}_{n,r},$$

$$\mathcal{L}_{n+1,r}(x) = x\mathcal{L}_{n,r+1}(x) + (n+r)\mathcal{L}_{n,r}(x).$$

2. *Ha* $1 \le k \le n$ *és* $r \ge 1$*, akkor*

$$\ell_r(n+1,k) = \ell_{r+1}(n,k-1) + (k+r)\ell_{r+1}(n,k),$$

$$\mathcal{L}_{n+1,r}(x) = (x+r)\mathcal{L}_{n,r+1}(x) + x\mathcal{L}'_{n,r+1}(x).$$

3. Ha $0 \leq k \leq n$ és $r \geq 2$, akkor

$$\ell_r(n+1,k) = \ell_{r-1}(n+1,k) + (n+1)\ell_r(n,k),$$

$$\mathcal{L}_{n+1,r} = \mathcal{L}_{n+1,r-1} + (n+1)\mathcal{L}_{n,r},$$

$$\mathcal{L}_{n+1,r}(x) = \mathcal{L}_{n+1,r-1}(x) + (n+1)\mathcal{L}_{n,r}(x).$$

4. Ha $0 \leq k \leq n$ és $r \geq 2$, akkor

$$\ell_r(n+1,k) = \ell_{r-1}(n+1,k) + (k+1)\ell_{r-1}(n+1,k+1),$$

$$\mathcal{L}_{n+1,r}(x) = \mathcal{L}_{n+1,r-1}(x) + \mathcal{L}'_{n+1,r-1}(x).$$

A 3.11. tétel legfontosabb állítására a 4.5. tétel segítségével új bizonyítást tudunk adni.

4.8. Tétel. ([58, Proposition 4.4])
Ha $n, r \geq 1$, akkor $\mathcal{L}_{n,r}(x)$ minden gyöke negatív valós szám.

Ismert, hogy bizonyos azonos elemszámú csúcsosztályokkal rendelkező páros gráfokban a másodfajú Stirling-számok adják meg a párosítások számát. Most a másodfajú r-Stirling-számok egy gráfelméleti interpretációját adjuk meg, amely általánosítja az imént említett eredményt, valamint hasonló az r-Lah-számokra igazolt 4.5. tételhez, bár a bijektív megfeleltetés konstrukciója itt egyszerűbb.

Legyen a $G_{n,n+r-1}$ páros gráf az a feszítő részgráfja $K_{n,n+r-1}$-nek, melynek csúcsosztályai $A = \{v_{r+1}, \ldots, v_{n+r}\}$ és $B = \{w_1, \ldots, w_{n+r-1}\}$, valamint v_i és w_j pontosan akkor szomszédosak, ha $i > j$ ($i = r+1, \ldots, n+r$ és $j = 1, \ldots, n+r-1$).

4.9. Tétel. ([58, Proposition 5.1])
Ha $0 \leq k \leq n$ és $r \geq 1$, akkor a $G_{n,n+r-1}$ gráf $n-k$ elemű párosításainak száma $\left\{ {n \atop k} \right\}_r$, összes párosításainak száma pedig $B_{n,r}$.

5. Az r-Fubini–Lah-számok és -polinomok

5.1. A Fubini-számok

Egy n elemű halmaz rendezett osztályozásainak a számát az F_n n-edik Fubini-szám adja meg, azaz $F_n = \sum\limits_{k=0}^{n} k! \left\{ {n \atop k} \right\}$ ($n \geq 0$). Ezek a számok először A. Cayley [13] cikkében jelentek meg, későbbi munkákban különböző, de ekvivalens interpretációival találkozhatunk, lásd [22, 23, 31, 78]. Mindezeken túl értelmezhetők az $F_n(x) = \sum_{k=0}^{n} k!\left\{ {n \atop k} \right\} x^k$ $(n \geq 0)$ Fubini-polinomok is. Megjegyezzük, hogy a Fubini-számok és Fubini-polinomok r-általánosításával, valamint azok változataival a [7, 49] cikkek foglalkoznak.

5.2. Az r-Fubini–Lah-számok és -polinomok tulajdonságai

Ebben az alfejezetben definiáljuk és vizsgáljuk az r-Fubini–Lah-számokat és -polinomokat, amik a Fubini-számok és -polinomok olyan változatai, ahol nemcsak az osztályozás, hanem az osztályok is rendezettek, és r kitüntetett elem különböző rendezett osztályba kerül.

5.1. Definíció. *Legyenek $n, r \geq 0$ egész számok, nem mindkettő 0. Jelölje $FL_{n,r}$ egy $n+r$ elemű halmaz rendezett osztályokba való olyan rendezett osztályozásainak a számát, ahol r kitüntetett elem különböző rendezett osztályba kerül. Legyen továbbá $FL_{0,0} = 1$. Ekkor $FL_{n,r}$-et az n-edik **r-Fubini–Lah-szám**nak nevezzük.*

Megjegyzés. A definícióból rögtön látható, hogy ha $n, r \geq 0$, akkor

$$FL_{n,r} = \sum_{j=0}^{n} (j+r)! \left\lfloor {n \atop j} \right\rfloor_r .$$

Ezekhez a számokhoz kapcsolódóan bevezetjük az r-Fubini–Lah-polinomokat is.

5.2. Definíció. *Legyen $n, r \geq 0$. Ekkor az*

$$FL_{n,r}(x) = \sum_{j=0}^{n} (j+r)! \left\lfloor {n \atop j} \right\rfloor_r x^j$$

*polinomot az n-edik **r-Fubini–Lah-polinom**nak nevezzük.*

Megjegyzés. Ha $n, r \geq 0$ nem mindkettő 0 és $c \geq 1$, akkor $FL_{n,r}(c)$ egy $n + r$ elemű halmaz rendezett osztályokba való rendezett osztályozásainak és a rendezett osztályok c színnel való színezéseinek a száma, ahol r kitüntetett elem különböző rendezett osztályba kerül, és a kitüntetett elemeket tartalmazó rendezett osztályok nem kapnak színt. Speciálisan $FL_{n,r}(1) = FL_{n,r}$.

Ha $r = 0$ vagy 1, akkor a következő összefüggések adódnak.

5.3. Tétel.

1. *Ha* $n \geq 1$, *akkor* $FL_{n,0}(x) = n!x(x+1)^{n-1}$ *és* $FL_{n,0} = n!2^{n-1}$.

2. *Ha* $n \geq 0$, *akkor* $xFL_{n,1}(x) = FL_{n+1,0}(x)$ *és* $FL_{n,1} = FL_{n+1,0}$.

Az r-Fubini–Lah-számok és -polinomok teljesítik az alábbi formulákat, amelyek egyszerre rekurziók n-ben és r-ben.

5.4. Tétel. ([63, Theorem 1])
Legyen $n \geq 0$ *és* $r \geq 1$. *Ekkor*

$$FL_{n,r}(x) = r\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}(n-j+1)!FL_{j,r-1}(x) + x\sum_{j=0}^{n-1}\binom{n}{j}(n-j)!FL_{j,r}(x),$$

$$FL_{n,r} = r\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}(n-j+1)!FL_{j,r-1} + \sum_{j=0}^{n-1}\binom{n}{j}(n-j)!FL_{j,r}.$$

Az r-Fubini–Lah-polinomokra egy másik rekurziót is megadunk, ahol már csak n a futó index, viszont ebben a formulában a polinom deriváltja is megjelenik.

5.5. Tétel. ([63, Theorem 2])
Legyen $n, r \geq 0$. *Ekkor*

$$FL_{n+1,r}(x) = ((r+1)x + n + 2r)\,FL_{n,r}(x) + (x^2+x)FL'_{n,r}(x).$$

Az r-Fubini–Lah-számok és -polinomok teljesítik a következő Dobiński-típusú formulákat.

5.6. Tétel. ([63, Theorem 3])
Legyen $n, r \geq 0$. *Ekkor*

$$FL_{n,r}(x) = \frac{1}{(x+1)x^r}\sum_{j=0}^{\infty}(j+r)^{\overline{n}}j^{\underline{r}}\left(\frac{x}{x+1}\right)^j,$$

$$FL_{n,r} = \sum_{j=0}^{\infty}\frac{(j+r)^{\overline{n}}j^{\underline{r}}}{2^{j+1}}.$$

Most megadjuk az r-Fubini–Lah-számok és -polinomok sorozatának exponenciális generátorfüggvényét.

5.7. Tétel. ([63, Theorem 4])
Legyen $r \geq 0$. Ekkor az $(FL_{n,r}(x))_{n=0}^{\infty}$ sorozat exponenciális generátorfüggvénye

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{FL_{n,r}(x)}{n!} y^n = \frac{r!}{(1-y)^{r-1}(1-y-xy)^{r+1}},$$

míg az $(FL_{n,r})_{n=0}^{\infty}$ sorozat exponenciális generátorfüggvénye

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{FL_{n,r}}{n!} y^n = \frac{r!}{(1-y)^{r-1}(1-2y)^{r+1}}.$$

Végül megmutatjuk, hogy az r-Fubini–Lah-polinomok sorozata az r-Fubini-polinomok sorozatának elsőfajú r-Stirling-transzformáltja, és ugyanez a számokra is teljesül.

5.8. Tétel. ([63, Theorem 5])
Legyen $n, r \geq 0$. Ekkor

$$FL_{n,r}(x) = \sum_{j=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix}_r F_{j,r}(x),$$

$$FL_{n,r} = \sum_{j=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix}_r F_{j,r}.$$

Megjegyezzük, hogy az r-Fubini–Lah-számok egyfajta megszorított változata megjelenik Bényi B., M. Méndez és J. L. Ramirez [7] egy újabb és tőlünk független cikkében.

1 Introduction

Stirling numbers are of basic importance in enumerative combinatorics. The Stirling number of the first kind $\left[{n \atop k}\right]$ is the number of those permutations in S_n, which are the product of k pairwise disjoint cycles, while the Stirling number of the second kind $\left\{{n \atop k}\right\}$ counts the number of partitions of an n-element set into k blocks $(0 \leq k \leq n)$.

If we modify the problem of the Stirling numbers of the second kind such that the order of the elements in the blocks matters, i.e., we have ordered blocks, then we arrive at the Lah numbers $\left\lfloor{n \atop k}\right\rfloor$ $(0 \leq k \leq n)$, which are sometimes called Stirling numbers of the third kind.

These numbers are named after a Slovenian mathematician, I. Lah [37, 38], who introduced them in the middle 1950s. They appeared first in an actuarial mathematical, then in a statistical paper. Lah defined these numbers by the connection

$$x^{\overline{n}} = \sum_{k=0}^{n} \left\lfloor{n \atop k}\right\rfloor x^{\underline{k}} \quad (n \geq 0)$$

between rising and falling factorials, where $x^{\overline{n}}$ is the nth rising factorial of x and $x^{\underline{k}}$ is the kth falling factorial of x.

In enumerative combinatorics, Bell numbers are also fundamental objects. They count the total number of partitions of a finite set with a given number of elements. It follows that Bell numbers are sums of Stirling numbers of the second kind with a fixed upper parameter, more precisely, the nth Bell number is $B_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \left\{{n \atop k}\right\}$ $(n \geq 0)$. If we construct the polynomial, where the coefficient of x^k is the Stirling number of the second kind $\left\{{n \atop k}\right\}$, then we get the nth Bell polynomial.

If we count the ordered partitions of a finite set with a given cardinality, which means that the order of the blocks matters, then we arrive at the Fubini numbers, moreover, the related Fubini polynomials can be also introduced.

Stirling numbers have several generalizations and variants. Among them, the so-called r-generalizations are the most important to us, where our set contains r distinguished elements, which have to belong to distinct cycles or blocks. The r-Stirling numbers were independently defined by L. Carlitz [12], A. Z. Broder [11] and R. Merris [42].

Similar generalization of Lah numbers was not systematically investigated before. In Section 2 of the thesis, after we give an overview of the definition and properties of r-Stirling numbers of the first and second kind, we introduce and study the r-Lah numbers. This section is based on the paper [55].

The r-Bell numbers can be defined as the sums of r-Stirling numbers of the second kind, and the related r-Bell polynomials, too. They were defined by L. Carlitz [12] and I. Mező [43, 45].

Although Bell numbers and polynomials are widely investigated, it is surprising that the so-called summed Lah numbers $L_n = \sum_{k=0}^{n} \left\lfloor {n \atop k} \right\rfloor$ $(n \geq 0)$ were studied only slightly, while the Lah polynomials $L_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \left\lfloor {n \atop k} \right\rfloor x^k$ were not treated before. We do this at a more general level in Section 3, we define the summed r-Lah numbers and the r-Lah polynomials. Beside their combinatorial properties, we study the roots of r-Lah polynomials. This section contains the results of the papers [57] and [62].

In Section 4, we enumerate the number of matchings in various graphs. First we construct graphs, in which the number of matchings can be given by Lucas sequences. Thereafter, we give graph theoretical interpretation for r-Lah numbers and r-Stirling numbers of the second kind in connection with the number of matchings in certain bipartite graphs. This section is based on the papers [56] and [58].

The r-generalization of Fubini numbers was defined by I. Mező and G. Nyul [49]. The case, when both the blocks and the partition itself are ordered, was not investigated before. We do this in Section 5, we introduce the r-Fubini–Lah numbers and the related polynomials, and we study their properties. This section contains the results of the paper [63].

2 The r-Lah numbers

2.1 The r-Stirling numbers

L. Carlitz [12], A. Z. Broder [11] and R. Merris [42] defined and studied the r-Stirling numbers. If $0 \leq k \leq n$ and $r \geq 0$ are integers, n, r not both 0, then the r-Stirling number of the first kind $\left[{n \atop k} \right]_r$ is the number of those permutations in S_{n+r}, which are the product of $k+r$ pairwise disjoint cycles and r distinguished elements belong to distinct cycles. The r-Stirling number of the second kind $\left\{ {n \atop k} \right\}_r$ counts the number of those partitions of an $(n+r)$-element set into $k+r$ subsets, where r distinguished elements belong to distinct blocks. In Tables 1–3 of the thesis, we summarize the most important properties of r-Stirling numbers, they include new formulas as well.

We mention that the common generalization of r-Stirling numbers and Whitney numbers (defined by T. A. Dowling [18]), the r-Whitney numbers were introduced by I. Mező [44]. E. Gyimesi and G. Nyul [27] gave a new, combinatorial interpretation for these numbers.

2.2 The r-Lah numbers and their properties

In this subsection, we define the r-Lah numbers and study their properties. We remark that a few of their properties were derived by H. Belbachir, A. Belkhir [2] and H. Belbachir, E. Bousbaa [3] independently of us, and these numbers appeared also in a paper of M. Mihoubi and M. Rahmani [52].

Definition 2.1. *Let $0 \leq k \leq n$ and $r \geq 0$ be integers. If n, r are not both 0, then denote by $\left\lfloor {n \atop k} \right\rfloor_r$ the number of such partitions of an $(n+r)$-element set into $k+r$ ordered subsets, where r distinguished elements belong to distinct ordered blocks. Moreover, let $\left\lfloor {0 \atop 0} \right\rfloor_0 = 1$. The numbers $\left\lfloor {n \atop k} \right\rfloor_r$ are called **r-Lah numbers**.*

If $r = 0$ or 1, then they give back the classical Lah numbers, more precisely, $\left\lfloor {n \atop k} \right\rfloor_0 = \left\lfloor {n \atop k} \right\rfloor$ and $\left\lfloor {n \atop k} \right\rfloor_1 = \left\lfloor {n+1 \atop k+1} \right\rfloor$.
We can determine the values of r-Lah numbers for small and large k easily.

Theorem 2.1. *Let $n, r \geq 0$. Then*

1. $\left\lfloor {n \atop 0} \right\rfloor_r = (2r)^{\overline{n}}$,
2. $\left\lfloor {n \atop 1} \right\rfloor_r = (2r+1)^{\overline{n}} - (2r)^{\overline{n}}$ $(n \geq 1)$,
3. $\left\lfloor {n \atop n-1} \right\rfloor_r = n(n-1) + 2nr$ $(n \geq 1)$,
4. $\left\lfloor {n \atop n} \right\rfloor_r = 1$.

The r-Lah numbers satisfy the following recurrence.

Theorem 2.2. ([55, Theorem 3.1])
Let $1 \leq k \leq n$ and $r \geq 0$. Then

$$\left\lfloor {n+1 \atop k} \right\rfloor_r = \left\lfloor {n \atop k-1} \right\rfloor_r + (n+k+2r) \left\lfloor {n \atop k} \right\rfloor_r .$$

Another recurrence holds for r-Lah numbers.

Theorem 2.3. ([58, Proposition 1.1])
If $n \geq 2$, $1 \leq k \leq n-1$ and $r \geq 0$, then

$$\left\lfloor \begin{matrix} n+1 \\ k \end{matrix} \right\rfloor_r = \left\lfloor \begin{matrix} n \\ k-1 \end{matrix} \right\rfloor_r + (2n+2r) \left\lfloor \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\rfloor_r - n(n+2r-1) \left\lfloor \begin{matrix} n-1 \\ k \end{matrix} \right\rfloor_r .$$

The following identity is called the vertical recurrence of r-Lah numbers.

Theorem 2.4. ([55, Theorem 3.3])
Let $0 \leq k \leq n$ and $r \geq 0$. Then

$$\left\lfloor \begin{matrix} n+1 \\ k+1 \end{matrix} \right\rfloor_r = \sum_{j=k}^{n} (n+k+2r+1)^{\underline{n-j}} \left\lfloor \begin{matrix} j \\ k \end{matrix} \right\rfloor_r .$$

The r-Lah numbers give the connection between shifted rising and falling factorials.

Theorem 2.5. ([55, Theorem 3.2])
Let $n, r \geq 0$. Then

1. $(x+2r)^{\overline{n}} = \sum\limits_{k=0}^{n} \left\lfloor \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right\rfloor_r x^{\underline{k}}$,

2. $(x-2r)^{\underline{n}} = \sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \left\lfloor \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right\rfloor_r x^{\overline{k}}$.

In the following two theorems, we express r-Lah numbers by $(r-s)$-Lah numbers, in two completely different ways.

Theorem 2.6. ([55, Theorem 3.4])
Let $0 \leq k \leq n$ and $0 \leq s \leq r$. Then

$$\left\lfloor \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\rfloor_r = \sum_{j=k}^{n} \binom{n}{j} \left\lfloor \begin{matrix} j \\ k \end{matrix} \right\rfloor_{r-s} (2s)^{\overline{n-j}}.$$

Theorem 2.7. ([55, Theorem 3.5])
Let $0 \leq k \leq n$ and $0 \leq s \leq r$. Then

$$\left\lfloor \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\rfloor_r = \sum_{j=k}^{n} \left\lfloor \begin{matrix} n \\ j \end{matrix} \right\rfloor_{r-s} \binom{j}{k} (2s)^{\underline{j-k}}.$$

Now we present the binomial convolutional identity for r-Lah numbers.

Theorem 2.8. ([55, Theorem 3.6])
Let $n, k, l, r, s \geq 0$ and $k + l \leq n$. Then

$$\binom{k+l}{k} \left\lfloor \begin{matrix} n \\ k+l \end{matrix} \right\rfloor_{r+s} = \sum_{j=k}^{n-l} \binom{n}{j} \left\lfloor \begin{matrix} j \\ k \end{matrix} \right\rfloor_r \left\lfloor \begin{matrix} n-j \\ l \end{matrix} \right\rfloor_s .$$

The following explicit formula holds for r-Lah numbers.

Theorem 2.9. ([55, Theorem 3.7])
Let $0 \leq k \leq n$ and $r \geq 0$. If k, r are not both 0, then

$$\left\lfloor \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\rfloor_r = \frac{n!}{k!} \binom{n+2r-1}{k+2r-1}.$$

Using the explicit formula, we can prove that the sequence of r-Lah numbers with a fixed upper parameter is strictly log-concave and unimodal.

Theorem 2.10. ([55, Theorem 3.8])
Let $n \geq 1$ and $r \geq 0$. Then the sequence $\left(\left\lfloor{n \atop k}\right\rfloor_r\right)_{k=0}^n$ is strictly log-concave, therefore it is unimodal.

From strictly log-concavity, it follows that the sequence $\left(\left\lfloor{n \atop k}\right\rfloor_r\right)_{k=0}^n$ has one or two maximum points. In the next theorem we describe them.

Theorem 2.11. ([55, Theorem 3.9])
Let $n \geq 1$ and $r \geq 0$.

1. *If $n + r^2 + 1$ is not a square number, then the sequence $\left(\left\lfloor{n \atop k}\right\rfloor_r\right)_{k=0}^n$ has one maximum at $\left\lfloor \sqrt{n + r^2 + 1} \right\rfloor - r$.*

2. *If $n + r^2 + 1$ is a square number, then the sequence $\left(\left\lfloor{n \atop k}\right\rfloor_r\right)_{k=0}^n$ has two maxima at $\sqrt{n + r^2 + 1} - r - 1$ and $\sqrt{n + r^2 + 1} - r$.*

In the following theorem, we derive the exponential generating function of the sequence of r-Lah numbers with a fixed k.

Theorem 2.12. ([55, Theorem 3.10])
Let $k, r \geq 0$. Then the exponential generating function of the sequence $\left(\left\lfloor{n \atop k}\right\rfloor_r\right)_{n=k}^\infty$ is

$$\sum_{n=k}^{\infty} \left\lfloor \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\rfloor_r \frac{x^n}{n!} = \frac{1}{k!} \left(\frac{x}{1-x}\right)^k \left(\frac{1}{1-x}\right)^{2r}.$$

The next theorem and its corollary describes the (generalized) self-orthogonality of r-Lah numbers, and they give connections between r-Lah and r-Stirling numbers.

Theorem 2.13. ([55, Theorem 3.11])
Let $0 \leq k \leq n$ and $r, s \geq 0$. Then

1. $\sum\limits_{j=k}^{n} (-1)^{j-k} \left\lfloor {n \atop j} \right\rfloor_r \left\lfloor {j \atop k} \right\rfloor_s = \binom{n}{k} (2r-2s)^{\overline{n-k}}$,

2. $\left[{n \atop k} \right]_{2r-s} = \sum\limits_{j=k}^{n} (-1)^{j-k} \left\lfloor {n \atop j} \right\rfloor_r \left[{j \atop k} \right]_s$ *if* $2r \geq s$,

3. $\left\{ {n \atop k} \right\}_{2s-r} = \sum\limits_{j=k}^{n} (-1)^{n-j} \left\{ {n \atop j} \right\}_r \left\lfloor {j \atop k} \right\rfloor_s$ *if* $2s \geq r$,

4. $\left\lfloor {n \atop k} \right\rfloor_{\frac{r+s}{2}} = \sum\limits_{j=k}^{n} \left[{n \atop j} \right]_r \left\{ {j \atop k} \right\}_s$ *if $r+s$ is even.*

Corollary 2.14. ([55, Corollary 3.1])
Let $0 \leq k \leq n$ and $r \geq 0$. Then

1. $\sum\limits_{j=k}^{n} (-1)^{n-j} \left\lfloor {n \atop j} \right\rfloor_r \left\lfloor {j \atop k} \right\rfloor_r = \delta_{nk}$,

2. $\left[{n \atop k} \right]_r = \sum\limits_{j=k}^{n} (-1)^{j-k} \left\lfloor {n \atop j} \right\rfloor_r \left[{j \atop k} \right]_r$,

3. $\left\{ {n \atop k} \right\}_r = \sum\limits_{j=k}^{n} (-1)^{n-j} \left\{ {n \atop j} \right\}_r \left\lfloor {j \atop k} \right\rfloor_r$,

4. $\left\lfloor {n \atop k} \right\rfloor_r = \sum\limits_{j=k}^{n} \left[{n \atop j} \right]_r \left\{ {j \atop k} \right\}_r$.

Finally, we show that the r-Lah transform and inverse r-Lah transform of sequences satisfy the following inversion theorem.

Theorem 2.15. ([55, Theorem 3.12])
Let $(a_n)_{n=0}^{\infty}$, $(b_n)_{n=0}^{\infty}$ be sequences of complex numbers, moreover let $r \geq 0$. Then $b_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \left\lfloor {n \atop k} \right\rfloor_r a_k$ $(n \geq 0)$ if and only if $a_n = \sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \left\lfloor {n \atop k} \right\rfloor_r b_k$ $(n \geq 0)$.

We note that in the last few years, after the appearance of the paper [55], partly influenced by that, several authors investigated further variants and generalizations of r-Lah numbers, see [7, 14, 19, 27, 50, 64, 68, 70, 71, 72, 73].

3 The summed r-Lah numbers and the r-Lah polynomials

3.1 The r-Bell numbers and the r-Bell polynomials

L. Carlitz [12] and I. Mező [43, 45] defined the r-generalization of Bell numbers. If $n, r \geq 0$, n, r not both 0, then the nth r-Bell number $B_{n,r}$ is the number of those partitions of an $(n+r)$-element set, where r distinguished elements belong to distinct blocks, which means that $B_{n,r} = \sum\limits_{k=0}^{n} \left\{ {n \atop k} \right\}_r$. In connection with r-Stirling numbers of the second kind, the r-Bell polynomials $B_{n,r}(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} \left\{ {n \atop k} \right\}_r x^k$ can be also defined, this was done by I. Mező [43, 45]. In Table 4, we summarize the most important properties of r-Bell polynomials, this table contains again some new results. One can obtain the corresponding formulas for r-Bell numbers by a simple substitution, since $B_{n,r}(1) = B_{n,r}$.

Using r-Whitney numbers of the second kind (introduced by I. Mező), G.-S. Cheon and J.-H. Jung [14] defined the r-Dowling polynomials, which are generalizations of r-Bell polynomials. The r-Dowling–Lah polynomials, whose coefficients are r-Whitney–Lah numbers, were defined and studied by E. Gyimesi [24].

3.2 Properties of the summed r-Lah numbers and the r-Lah polynomials

In this subsection, we study the sums of r-Lah numbers and we introduce the r-Lah polynomials as well.

Definition 3.1. *Let $n, r \geq 0$ be integers, not both 0. Denote by $L_{n,r}$ the total number of those partitions of an $(n+r)$-element set into ordered subsets, where r distinguished elements belong to distinct ordered blocks. Moreover, let $L_{0,0} = 1$. Then we call $L_{n,r}$ the nth **summed r-Lah number**.*

Remark. From the definition, it follows immediately that if $n, r \geq 0$, then

$$L_{n,r} = \sum_{j=0}^{n} \left\lfloor {n \atop j} \right\rfloor_r .$$

In connection with the summed r-Lah numbers we can define the r-Lah polynomials.

Definition 3.2. *Let $n, r \geq 0$. Then the polynomial*

$$L_{n,r}(x) = \sum_{j=0}^{n} \left\lfloor \begin{matrix} n \\ j \end{matrix} \right\rfloor_r x^j$$

*is called the nth **r-Lah polynomial**.*

Remark. If $n, r \geq 0$ are not both 0 and $c \geq 1$, then $L_{n,r}(c)$ gives the number of partitions of an $(n+r)$-element set into ordered subsets and colourings of the ordered blocks with c colours, where r distinguished elements belong to distinct ordered blocks and their ordered blocks are not coloured. Especially, $L_{n,r}(1) = L_{n,r}$.

If $r = 0$ or 1, then we essentially obtain the ordinary summed Lah numbers and Lah polynomials.

Theorem 3.1. *Let $n \geq 0$. Then*

1. $L_{n,0}(x) = L_n(x)$ *and* $L_{n,0} = L_n$,

2. $xL_{n,1}(x) = L_{n+1}(x)$ *and* $L_{n,1} = L_{n+1}$.

The following formula is a recurrence of the r-Lah polynomials, in which the derivative of the polynomial appears.

Theorem 3.2. ([57, proof of Theorem 3.8])
Let $n, r \geq 0$. Then

$$L_{n+1,r}(x) = (x + n + 2r)L_{n,r}(x) + xL'_{n,r}(x).$$

Now we give a second-order linear recurrence for r-Lah polynomials and also for summed r-Lah numbers.

Theorem 3.3. ([57, Theorem 3.5])
If $n \geq 1$ and $r \geq 0$, then

$$L_{n+1,r}(x) = (x + 2n + 2r)L_{n,r}(x) - n(n + 2r - 1)L_{n-1,r}(x),$$

$$L_{n+1,r} = (2n + 2r + 1)L_{n,r} - n(n + 2r - 1)L_{n-1,r}.$$

We can express r-Lah polynomials and summed r-Lah numbers by $(r-s)$-Lah polynomials and summed $(r-s)$-Lah numbers.

Theorem 3.4. ([57, Theorem 3.1])
Let $n, r, s \geq 0$ and $s \leq r$. Then

$$L_{n,r}(x) = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} L_{j,r-s}(x)(2s)^{\overline{n-j}},$$

$$L_{n,r} = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} L_{j,r-s}(2s)^{\overline{n-j}}.$$

In the next theorem, we give Spivey type formulas for r-Lah polynomials and summed r-Lah numbers.

Theorem 3.5. ([57, Theorem 3.3])
Let $m, n, r, s \geq 0$ and $s \leq r$. Then

$$L_{m+n,r}(x) = \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{n} \left\lfloor \begin{matrix} m \\ i \end{matrix} \right\rfloor_r \binom{n}{j} L_{j,r-s}(x)(m+i+2s)^{\overline{n-j}} x^i,$$

$$L_{m+n,r} = \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{n} \left\lfloor \begin{matrix} m \\ i \end{matrix} \right\rfloor_r \binom{n}{j} L_{j,r-s}(m+i+2s)^{\overline{n-j}}.$$

The following Dobiński type formulas hold for r-Lah polynomials and summed r-Lah numbers.

Theorem 3.6. ([57, Theorem 3.6])
Let $n, r \geq 0$. Then

$$L_{n,r}(x) = \frac{1}{\exp(x)} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(j+2r)^{\overline{n}}}{j!} x^j,$$

$$L_{n,r} = \frac{1}{e} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(j+2r)^{\overline{n}}}{j!}.$$

Now we give the exponential generating function of the sequences of r-Lah polynomials and summed r-Lah numbers.

Theorem 3.7. ([57, Theorem 3.7])
Let $r \geq 0$. Then the exponential generating function of the sequence $(L_{n,r}(x))_{n=0}^{\infty}$ is

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{L_{n,r}(x)}{n!} y^n = \exp\left(\frac{xy}{1-y}\right) \frac{1}{(1-y)^{2r}},$$

while the exponential generating function of the sequence $(L_{n,r})_{n=0}^{\infty}$ is

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{L_{n,r}}{n!} y^n = \exp\left(\frac{y}{1-y}\right) \frac{1}{(1-y)^{2r}}.$$

Finally, we show that if r and s have the same parity, then the r-Stirling transform of the first kind of the sequences of s-Bell polynomials and s-Bell numbers are the sequences of $\frac{r+s}{2}$-Lah polynomials and summed $\frac{r+s}{2}$-Lah numbers.

Theorem 3.8. ([57, Theorem 3.11])
If $n, r, s \geq 0$ and $r+s$ is even, then

$$L_{n,\frac{r+s}{2}}(x) = \sum_{j=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix}_r B_{j,s}(x),$$

$$L_{n,\frac{r+s}{2}} = \sum_{j=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix}_r B_{j,s}.$$

3.3 Roots of the r-Lah polynomials

In this subsection, we study the roots of r-Lah polynomials.

First, we show that all roots of r-Lah polynomials are real.

Theorem 3.9. ([57, Theorem 3.8])
Let $n \geq 1$. Then the roots of $L_{n,0}(x)$ are simple, real, one of the roots is 0, the others are negative. Moreover, if the roots of $L_{n,0}(x)$ are $\alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_n = 0$ and the roots of $L_{n+1,0}(x)$ are $\beta_1 < \beta_2 < \ldots < \beta_{n+1} = 0$, then $\beta_1 < \alpha_1 < \beta_2 < \alpha_2 < \ldots < \beta_n < \alpha_n = \beta_{n+1} = 0$.

Let $n, r \geq 1$. Then the roots of $L_{n,r}(x)$ are simple, real and negative. If the roots of $L_{n,r}(x)$ are $\alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_n$ and the roots of $L_{n+1,r}(x)$ are $\beta_1 < \beta_2 < \ldots < \beta_{n+1}$, then $\beta_1 < \alpha_1 < \beta_2 < \alpha_2 < \ldots < \beta_n < \alpha_n < \beta_{n+1}$.

Remark. This result, together with a theorem of Newton, gives another proof of Theorem 2.11.

Now we give an approximation of the quotient of two consecutive summed r-Lah numbers.

Corollary 3.10. ([57, Corollary 3.10])
If $n \geq 1$ and $r \geq 0$, then

$$\left| \frac{L_{n+1,r}}{L_{n,r}} - (n+r+1) - \left\lfloor \sqrt{n+r^2+1} \right\rfloor \right| < 1.$$

It is an interesting problem to describe the magnitude of the smallest roots of r-Lah polynomials. We do our investigations also for the r-Dowling polynomials [14, 26]

$$D_{n,m,r}(x) = \sum_{k=0}^{n} W_{m,r}\left(n,k\right) x^k$$

and for the r-Dowling–Lah polynomials [24]

$$DL_{n,m,r}(x) = \sum_{k=0}^{n} WL_{m,r}\left(n,k\right) x^k,$$

where $W_{m,r}\left(n,k\right)$ and $WL_{m,r}\left(n,k\right)$ denote r-Whitney numbers of the second kind and r-Whitney–Lah numbers, respectively. We note that r-Dowling polynomials and r-Dowling–Lah polynomials are generalizations of r-Bell polynomials and r-Lah polynomials, respectively, since $D_{n,1,r}(x) = B_{n,r}(x)$ and $DL_{n,1,r}(x) = L_{n,r}(x)$. These polynomials also have only real, simple and non-positive roots (see [14, 16] and [24]).

To estimate the smallest roots of the above mentioned polynomials, we use a result of E. Laguerre [36] and P. A. Samuelson [67], which can be found in the thesis as Lemma 3.13. We note that I. Mező and R. B. Corcino [48] gave similar estimations in case of Bell and r-Bell polynomials. In the theorem, we use the notation $\mu\left(p(x)\right)$ for the absolute value of the smallest root of a polynomial $p(x)$ which has non-negative coefficients and real roots only.

Theorem 3.14. ([62, Theorem])
Let $n \geq 2$, $r \geq 0$ and $m \geq 1$. Then

1. $\mu\left(D_{n,m,r}(x)\right) \leq \frac{m(n-1)}{2} + r + \frac{n-1}{2\sqrt{3}}\sqrt{5m^2n - 7m^2 + 12mr}$;
2. $\mu\left(L_{n,r}(x)\right) \leq n - 1 + 2r + (n-1)\sqrt{n-1+2r}$;
3. $\mu\left(DL_{n,m,r}(x)\right) \leq m\left(n-1\right) + 2r + (n-1)\sqrt{m^2n - m^2 + 2mr}$.

We made numerical calculations to determine the exact values of the smallest roots of r-Dowling and r-Dowling–Lah polynomials. These computations were carried out with high performance computers using the software Maple 2015.

In the thesis, Table 5 and Table 6 contain the upper integer parts of $\mu\left(D_{n,m,r}(x)\right)$ and $\mu\left(DL_{n,m,r}(x)\right)$, respectively, for $n = 25000, 50000, 75000$, $r = 0, 1, 2, 3$ and $m = 1, 2, 3, 4$. Here we show these values only for r-Lah polynomials.

r	$n = 25000$	$n = 50000$	$n = 75000$
0	99828	199783	299752
1	99832	199787	299756
2	99836	199791	299760
3	99840	199795	299764

Our computations show that $\mu\left(D_{n,m,r}(x)\right)$ and $\mu\left(DL_{n,m,r}(x)\right)$ are asymptotically linear in the degree of the polynomial, and the multiplier of n is independent of r, more precisely, $\mu\left(D_{n,m,r}(x)\right) \sim mc_B \cdot n$ and $\mu\left(DL_{n,m,r}(x)\right) \sim mc_L \cdot n$, where $c_B \approx e$ and $c_L \approx 4$. We give a few heuristic explanations for this observation beside our numerical results.

4 Graph theoretical interpretation of combinatorial number sequences

4.1 Enumeration of matchings

An edge set of a graph is called a matching if no two edges of the set have a common endpoint. The total number of matchings in a graph (where we count the empty matching as the only 0-element matching) is called the Hosoya index of the graph. If we consider the polynomial where the coefficient of x^k is the number of k-element matchings in a graph, then we get the matching generating polynomial of the graph. If we substitute 1 into this polynomial, then we arrive at the Hosoya index of the graph.

In this section, we give graph theoretical interpretation of r-Lah numbers and r-Stirling numbers in connection with the number of matchings in bipartite graphs. In addition, we deal with Lucas sequences in a short subsection, to extend a result from the recent past.

4.2 Matchings and the Lucas sequences

The Hosoya index of the n-vertex path graph is the $(n+1)$th Fibonacci number, while the total number of matchings in the n-vertex cycle graph is the nth Lucas number. In this subsection, we generalize these statements.

Let $a, b \geq 1$ be integers. Then the Lucas sequence of the first kind $(u_n(a,-b))_{n=0}^{\infty}$ and the Lucas sequence of the second kind $(v_n(a,-b))_{n=0}^{\infty}$ are defined by the following initial values and recurrences:

$$u_0(a,-b) = 0, \ u_1(a,-b) = 1,$$

$$u_{n+2}(a,-b) = au_{n+1}(a,-b) + bu_n(a,-b) \ \ (n \geq 0);$$

and

$$v_0(a,-b) = 2, \ v_1(a,-b) = a,$$

$$v_{n+2}(a,-b) = av_{n+1}(a,-b) + bv_n(a,-b) \ \ (n \geq 0).$$

For $a = b = 1$, they give back the sequences of Fibonacci numbers and Lucas numbers, respectively.

J. Alexander and P. Hearding [1] constructed graphs in which the number of independent vertex sets can be described by Lucas sequences, where $a \geq b$ holds. The question, whether this restrictive condition is possible to eliminate, gave the idea to give another graph theoretical interpretation of Lucas sequences in connection with the Hosoya index.

To do this, we introduce two families of graphs. Let $n, a, b \geq 1$ be integers. The graph $P_{n,a,b}$ is constructed as follows: Consider the disjoint union of n a-vertex star graphs with central vertices $w_1, \ldots, w_n$, then join w_i and w_{i+1} by b parallel edges $(i = 1, \ldots, n-1)$.

Denote by $C_{n,a,b}$ the graph which can be obtained from the above graph $P_{n,a,b}$ by adding b parallel edges between w_1 and w_n.

We note that these graphs are generalizations of path and cycle graphs, since $P_{n,1,1}$ is the n-vertex path graph, while $C_{n,1,1}$ is the n-vertex cycle graph.

Theorem 4.1. ([56, Theorem 1])
Let $n, a, b \geq 1$. Then the Hosoya index of the graph $P_{n,a,b}$ is $u_{n+1}(a,-b)$.

Theorem 4.2. ([56, Theorem 2])
Let $n, a, b \geq 1$. Then the Hosoya index of the graph $C_{n,a,b}$ is $v_n(a,-b)$.

Now we solve our original problem. Since a matching in the graph G corresponds to an independent vertex set in the line graph $L(G)$, the following statement follows from our theorems.

Corollary 4.3. ([56, Corollary])
Let $n, a, b \geq 1$. Then the total number of independent vertex sets of the graphs $L(P_{n,a,b})$ and $L(C_{n,a,b})$ are $u_{n+1}(a, -b)$ and $v_n(a, -b)$, respectively.

4.3 Connection of the r-Lah and the r-Stirling numbers of the second kind with matchings

In this subsection, we give a graph theoretical interpretation of r-Lah and r-Stirling numbers of the second kind by counting matchings in bipartite graphs.

If $n, r \geq 1$ and $0 \leq k \leq n$, then denote by $\ell_r(n, k)$ the number of $(n-k)$-element matchings in the complete bipartite graph $K_{n,n+r-1}$.

From the definition, we can obtain the following special values easily.

Theorem 4.4. *Let $n \geq 0$ and $r \geq 1$. Then*

1. $\ell_r(n, 0) = r^{\overline{n}}$,
2. $\ell_r(n, 1) = (r+1)^{\overline{n}} - r^{\overline{n}}$ $(n \geq 1)$,
3. $\ell_r(n, n-1) = n(n+r-1)$ $(n \geq 1)$,
4. $\ell_r(n, n) = 1$.

For $n \geq 0$ and $r \geq 1$, let

$$\mathcal{L}_{n,r} = \sum_{k=0}^{n} \ell_r(n, k),$$

which gives the Hosoya index of the complete bipartite graph $K_{n,n+r-1}$.

Using the numbers $\ell_r(n, k)$ as coefficients, for $n \geq 0$ and $r \geq 1$ one can define the polynomial

$$\mathcal{L}_{n,r}(x) = \sum_{k=0}^{n} \ell_r(n, k) x^k,$$

which is the reciprocal polynomial of the matching generating polynomial of the complete bipartite graph $K_{n,n+r-1}$.

The following theorem describes the connection between the above defined numbers, polynomials and r-Lah numbers, summed r-Lah numbers, r-Lah polynomials.

Theorem 4.5. ([58, Theorem 2.1])
Let $0 \leq k \leq n$ *and* $r \geq 1$. *Then*

$$\ell_{2r}(n,k) = \left\lfloor \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\rfloor_r, \quad \mathcal{L}_{n,2r} = L_{n,r}, \quad \mathcal{L}_{n,2r}(x) = L_{n,r}(x).$$

Remark. The theorem shows that this graph theoretical interpretation allows us to extend the notions of r-Lah numbers, summed r-Lah numbers and r-Lah polynomials for half-integer parameters r.

We present five proofs for this theorem. The first four proofs are based on the properties of the numbers $\ell_r(n,k)$ (two different recurrences, the polynomial identity between shifted rising and falling factorials and the explicit formula). In the fifth proof, we give an interesting bijective assignment.

Using this graph theoretical interpretation, we can give another proof for Theorem 2.7.

Theorem 4.6. ([58, Proposition 4.1])
If $0 \leq k \leq n$ *and* $0 \leq s < r$, *then*

$$\ell_r(n,k) = \sum_{j=k}^{n} \ell_{r-s}(n,j) \binom{j}{k} s^{\underline{j-k}}.$$

Now we give four recurrences, which obviously do not have counterparts for r-Lah numbers.

Theorem 4.7. ([58, Proposition 4.2])

1. *If* $1 \leq k \leq n$ *and* $r \geq 1$, *then*

$$\ell_r(n+1,k) = \ell_{r+1}(n,k-1) + (n+r)\ell_r(n,k),$$

$$\mathcal{L}_{n+1,r} = \mathcal{L}_{n,r+1} + (n+r)\mathcal{L}_{n,r},$$

$$\mathcal{L}_{n+1,r}(x) = x\mathcal{L}_{n,r+1}(x) + (n+r)\mathcal{L}_{n,r}(x).$$

2. *If* $1 \leq k \leq n$ *and* $r \geq 1$, *then*

$$\ell_r(n+1,k) = \ell_{r+1}(n,k-1) + (k+r)\ell_{r+1}(n,k),$$

$$\mathcal{L}_{n+1,r}(x) = (x+r)\mathcal{L}_{n,r+1}(x) + x\mathcal{L}'_{n,r+1}(x).$$

3. If $0 \leq k \leq n$ *and* $r \geq 2$*, then*

$$\ell_r(n+1,k) = \ell_{r-1}(n+1,k) + (n+1)\ell_r(n,k),$$

$$\mathcal{L}_{n+1,r} = \mathcal{L}_{n+1,r-1} + (n+1)\mathcal{L}_{n,r},$$

$$\mathcal{L}_{n+1,r}(x) = \mathcal{L}_{n+1,r-1}(x) + (n+1)\mathcal{L}_{n,r}(x).$$

4. If $0 \leq k \leq n$ *and* $r \geq 2$*, then*

$$\ell_r(n+1,k) = \ell_{r-1}(n+1,k) + (k+1)\ell_{r-1}(n+1,k+1),$$

$$\mathcal{L}_{n+1,r}(x) = \mathcal{L}_{n+1,r-1}(x) + \mathcal{L}'_{n+1,r-1}(x).$$

Using Theorem 4.5, we can prove the most important statement of Theorem 3.9 in another way.

Theorem 4.8. ([58, Proposition 4.4])
If $n, r \geq 1$*, then every root of* $\mathcal{L}_{n,r}(x)$ *a negative real number.*

It is known that in certain bipartite graphs with partite sets of the same cardinality, Stirling numbers of the second kind count the number of matchings. Now we give a graph theoretical interpretation of r-Stirling numbers of the second kind, which generalizes the above mentioned result and which is similar to Theorem 4.5 proved for the r-Lah numbers, but here the construction of the bijection is easier.

Let the bipartite graph $G_{n,n+r-1}$ be the spanning subgraph of $K_{n,n+r-1}$, which has partite sets $A = \{v_{r+1}, \ldots, v_{n+r}\}$ and $B = \{w_1, \ldots, w_{n+r-1}\}$, moreover v_i and w_j are adjacent if and only if $i > j$ ($i = r+1, \ldots, n+r$ and $j = 1, \ldots, n+r-1$).

Theorem 4.9. ([58, Proposition 5.1])
If $0 \leq k \leq n$ *and* $r \geq 1$*, then the number of* $(n-k)$*-element matchings in the graph* $G_{n,n+r-1}$ *is* $\left\{ {n \atop k} \right\}_r$*, while the total number of matchings is* $B_{n,r}$*.*

5 The r-Fubini–Lah numbers and polynomials

5.1 The Fubini numbers

The number of ordered partitions of an n-element set is the nth Fubini number F_n, that is $F_n = \sum\limits_{k=0}^{n} k! \left\{ {n \atop k} \right\}$ $(n \geq 0)$. These numbers appeared first in a paper of A. Cayley [13], in later works we can find other, but equivalent definitions, see

[22, 23, 31, 78]. Additionally, the Fubini polynomials $F_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} k!\left\{{n \atop k}\right\}x^k$ $(n \geq 0)$ can be also defined. We remark that the r-generalization of Fubini numbers and Fubini polynomials and further variants were investigated in the papers [7, 49].

5.2 Properties of the r-Fubini–Lah numbers and polynomials

In this subsection, we define and study r-Fubini–Lah numbers and polynomials, which are the variants of Fubini numbers and polynomials, where not only the partition, but the blocks are also ordered, and r distinguished elements belong to distinct ordered blocks.

Definition 5.1. *Let $n, r \geq 0$ be integers, not both 0. Denote by $FL_{n,r}$ the number of those ordered partitions of an $(n+r)$-element set into ordered subsets, where r distinguished elements belong to distinct ordered blocks. Moreover, let $FL_{0,0} = 1$. Then $FL_{n,r}$ is called the nth **r-Fubini–Lah number**.*

Remark. From the definition, it follows that if $n, r \geq 0$, then

$$FL_{n,r} = \sum_{j=0}^{n} (j+r)! \left\lfloor {n \atop j} \right\rfloor_r .$$

In connection with these numbers, we introduce the r-Fubini–Lah polynomials.

Definition 5.2. *Let $n, r \geq 0$. Then the polynomial*

$$FL_{n,r}(x) = \sum_{j=0}^{n} (j+r)! \left\lfloor {n \atop j} \right\rfloor_r x^j$$

*is called the nth **r-Fubini–Lah polynomial**.*

Remark. If $n, r \geq 0$, not both 0, and $c \geq 1$, then $FL_{n,r}(c)$ is the number of ordered partitions of an $(n+r)$-element set into ordered blocks and colourings of the ordered blocks with c colours, where r distinguished elements belong to distinct ordered blocks and their ordered blocks are not coloured. Especially, $FL_{n,r}(1) = FL_{n,r}$.

If $r = 0$ or 1, then we have the following identities.

Theorem 5.1.

1. *If $n \geq 1$, then $FL_{n,0}(x) = n!x(x+1)^{n-1}$ and $FL_{n,0} = n!2^{n-1}$.*
2. *If $n \geq 0$, then $xFL_{n,1}(x) = FL_{n+1,0}(x)$ and $FL_{n,1} = FL_{n+1,0}$.*

The r-Fubini–Lah numbers and polynomials satisfy the following formulas, which are recurrences simultaneously in n and r.

Theorem 5.2. ([63, Theorem 1])
Let $n \geq 0$ and $r \geq 1$. Then

$$FL_{n,r}(x) = r\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}(n-j+1)!FL_{j,r-1}(x) + x\sum_{j=0}^{n-1}\binom{n}{j}(n-j)!FL_{j,r}(x),$$

$$FL_{n,r} = r\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}(n-j+1)!FL_{j,r-1} + \sum_{j=0}^{n-1}\binom{n}{j}(n-j)!FL_{j,r}.$$

We give another recurrence for r-Fubini–Lah polynomials, where n is the only running parameter, but here the derivative of the polynomial also appears.

Theorem 5.3. ([63, Theorem 2])
Let $n, r \geq 0$. Then

$$FL_{n+1,r}(x) = ((r+1)x + n + 2r)\,FL_{n,r}(x) + (x^2 + x)FL'_{n,r}(x).$$

The following Dobiński type formulas hold for r-Fubini–Lah numbers and polynomials.

Theorem 5.4. ([63, Theorem 3])
Let $n, r \geq 0$. Then

$$FL_{n,r}(x) = \frac{1}{(x+1)x^r}\sum_{j=0}^{\infty}(j+r)^{\overline{n}}j^{\underline{r}}\left(\frac{x}{x+1}\right)^j,$$

$$FL_{n,r} = \sum_{j=0}^{\infty}\frac{(j+r)^{\overline{n}}j^{\underline{r}}}{2^{j+1}}.$$

Now we derive the exponential generating function of the sequences of r-Fubini–Lah numbers and polynomials.

Theorem 5.5. ([63, Theorem 4])
Let $r \geq 0$. Then the exponential generating function of the sequence $(FL_{n,r}(x))_{n=0}^{\infty}$ is

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{FL_{n,r}(x)}{n!}y^n = \frac{r!}{(1-y)^{r-1}(1-y-xy)^{r+1}},$$

while the exponential generating function of the sequence $(FL_{n,r})_{n=0}^{\infty}$ *is*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{FL_{n,r}}{n!} y^n = \frac{r!}{(1-y)^{r-1}(1-2y)^{r+1}}.$$

Finally, we show that the sequence of r-Fubini–Lah polynomials is the r-Stirling transform of the first kind of the sequence of r-Fubini polynomials, and the same holds for the numbers.

Theorem 5.6. ([63, Theorem 5])
Let $n, r \geq 0$. *Then*

$$FL_{n,r}(x) = \sum_{j=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix}_r F_{j,r}(x),$$

$$FL_{n,r} = \sum_{j=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix}_r F_{j,r}.$$

We note that a certain restricted variant of r-Fubini–Lah numbers appears in a recent, independent paper of B. Bényi, M. Méndez and J. L. Ramirez [7].

Irodalomjegyzék/References

[1] J. Alexander and P. Hearding, *A graph-theoretic encoding of Lucas sequences*, Fibonacci Quarterly **53** (2015), 237–240.

[2] H. Belbachir and A. Belkhir, *Cross recurrence relations for r-Lah numbers*, Ars Combinatoria **110** (2013), 199–203.

[3] H. Belbachir and I. E. Bousbaa, *Combinatorial identities for the r-Lah numbers*, Ars Combinatoria **115** (2014), 453–458.

[4] A. T. Benjamin, D. Gaebler and R. Gaebler, *A combinatorial approach to hyperharmonic numbers*, Integers **3** (2003), A15.

[5] M. Benoumhani, *On some numbers related to Whitney numbers of Dowling lattices*, Advances in Applied Mathematics **19** (1997), 106–116.

[6] M. Benoumhani, *Log-concavity of Whitney numbers of Dowling lattices*, Advances in Applied Mathematics **22** (1999), 186–189.

[7] B. Bényi, M. Méndez and J. L. Ramirez, *Generalized ordered set partitions*, Australasian Journal of Combinatorics **77** (2020), 157–179.

[8] N. L. Biggs, *The roots of combinatorics*, Historia Mathematica **6** (1979), 109–136.

[9] M. Bóna, Combinatorics of Permutations, CRC Press, 2012.

[10] M. Bóna and I. Mező, *Real zeros and partitions without singleton blocks*, European Journal of Combinatorics **51** (2016), 500–510.

[11] A. Z. Broder, *The r-Stirling numbers*, Discrete Mathematics **49** (1984), 241–259.

[12] L. Carlitz, *Weighted Stirling numbers of the first and second kind I*, Fibonacci Quarterly **18** (1980), 147–162.

[13] A. Cayley, *On the analytical forms called trees – Part II*, London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science **18** (1859), 374–378.

[14] G.-S. Cheon and J.-H. Jung, *r-Whitney numbers of Dowling lattices*, Discrete Mathematics **312** (2012), 2337–2348.

[15] C. B. Corcino, R. B. Corcino, I. Mező and J. L. Ramírez, *Some polynomials associated with the r-Whitney numbers*, Proceedings of the Indian Academy of Sciences, Mathematical Sciences **128** (2018), Article 27.

[16] R. B. Corcino, C. B. Corcino and R. Aldema, *Asymptotic normality of the (r,β)-Stirling numbers*, Ars Combinatoria **81** (2006), 81–96.

[17] G. Dobiński, *Summirung der Reihe $\sum \frac{n^m}{n!}$ für $m = 1, 2, 3, 4, 5, \ldots$*, Archiv der Mathematik und Physik **61** (1877), 333–336.

[18] T. A. Dowling, *A class of geometric lattices based on finite groups*, Journal of Combinatorial Theory, Series B **14** (1973), 61–86.

[19] B. S. El-Desouky and F. A. Shiha, *A q-analogue of $\bar{\alpha}$-Whitney numbers*, Applicable Analysis and Discrete Mathematics **12** (2018), 178–191.

[20] J. Engbers, D. Galvin and J. Hilyard, *Combinatorially interpreting generalized Stirling numbers*, European Journal of Combinatorics **43** (2015), 32–54.

[21] P. Flajolet and R. Sedgewick, Analytic Combinatorics, Cambridge University Press, 2009.

[22] I. J. Good, *The number of orderings of n candidates when ties are permitted*, Fibonacci Quarterly **13** (1975), 11–18.

[23] O. A. Gross, *Preferential arrangements*, American Mathematical Monthly **69** (1962), 4–8.

[24] E. Gyimesi, *The r-Dowling–Lah polynomials*, Mediterranean Journal of Mathematics, közlésre elfogadva.

[25] E. Gyimesi and G. Nyul, *A note on combinatorial subspaces and r-Stirling numbers*, Utilitas Mathematica **105** (2017), 137–139.

[26] E. Gyimesi and G. Nyul, *A comprehensive study of r-Dowling polynomials*, Aequationes Mathematicae **92** (2018), 515–527.

[27] E. Gyimesi and G. Nyul, *New combinatorial interpretations of r-Whitney and r-Whitney–Lah numbers*, Discrete Applied Mathematics **255** (2019), 222–233.

[28] E. Gyimesi and G. Nyul, *Associated r-Dowling numbers and some relatives*, Comptes Rendus Mathématique **359** (2021), 47–55.

[29] H. Hosoya, *Topological index. A newly proposed quantity characterizing the topological nature of structural isomers of saturated hydrocarbons*, Bulletin of the Chemical Society of Japan **44** (1971), 2332–2339.

[30] H. Hosoya, *Topological index and Fibonacci numbers with relation to chemistry*, Fibonacci Quarterly **11** (1973), 255–266.

[31] R. D. James, *The factors of a square-free integer*, Canadian Mathematical Bulletin **11** (1968), 733–735.

[32] J. Karamata, *Théorèmes sur la sommabilité exponentielle et d'autres sommabilités s'y rattachant*, Mathematica (Cluj) **9** (1935), 164–178.

[33] Zs. Kereskényi-Balogh and G. Nyul, *Stirling numbers of the second kind and Bell numbers for graphs*, Australasian Journal of Combinatorics **58** (2014), 264–274.

[34] Zs. Kereskényi-Balogh and G. Nyul, *Fubini numbers and polynomials of graphs*, Mediterranean Journal of Mathematics, közlésre elfogadva.

[35] D. E. Knuth, *Two notes on notation*, American Mathematical Monthly **99** (1992), 403–422.

[36] E. Laguerre, *Sur une méthode pour obtenir par approximation les racines d'une équation algébrique qui a toutes ses racines réelles*, Nouvelles Annales de Mathématiques **19** (1880), 161–171, 193–202.

[37] I. Lah, *A new kind of numbers and its application in the actuarial mathematics*, Boletim do Instituto dos Actuários Portugueses **9** (1954), 7–15.

[38] I. Lah, *Eine neue Art von Zahlen, ihre Eigenschaften und Anwendung in der mathematischen Statistik*, Mitteilungsblatt für Mathematische Statistik **7** (1955), 203–212.

[39] L. Lovász, Combinatorial Problems and Exercises, Elsevier, 1993.

[40] L. Lovász and M. D. Plummer, Matching Theory, North-Holland, 1986.

[41] T. Mansour and M. Schork, Commutation Relations, Normal Ordering, and Stirling Numbers, CRC Press, 2016.

[42] R. Merris, *The p-Stirling numbers*, Turkish Journal of Mathematics **24** (2000), 379–399.

[43] I. Mező, *On the maximum of r-Stirling numbers*, Advances in Applied Mathematics **41** (2008), 293–306.

[44] I. Mező, *A new formula for the Bernoulli polynomials*, Results in Mathematics **58** (2010), 329–335.

[45] I. Mező, *The r-Bell numbers*, Journal of Integer Sequences **14** (2011), Article 11.1.1.

[46] I. Mező, *The dual of Spivey's Bell number formula*, Journal of Integer Sequences **15** (2012), Article 12.2.4.

[47] I. Mező, Combinatorics and Number Theory of Counting Sequences, CRC Press, 2020.

[48] I. Mező and R. B. Corcino, *The estimation of the zeros of the Bell and r-Bell polynomials*, Applied Mathematics and Computation **250** (2015), 727–732.

[49] I. Mező and G. Nyul, *The r-Fubini and r-Eulerian numbers*, kézirat.

[50] I. Mező and J. L. Ramírez, *The linear algebra of the r-Whitney matrices*, Integral Transforms and Special Functions **26** (2015), 213–225.

[51] M. Mihoubi and H. Belbachir, *Linear recurrences for r-Bell polynomials*, Journal of Integer Sequences **17** (2014), Article 14.10.6.

[52] M. Mihoubi and M. Rahmani, *The partial r-Bell polynomials*, Afrika Matematika **28** (2017), 1167–1183.

[53] T. S. Motzkin, *Sorting numbers for cylinders and other classification numbers*, Proceedings of Symposia in Pure Mathematics **19** (1971), 167–176.

[54] N. Nielsen, Traité Élémentaire des Nombres de Bernoulli, Gauthier-Villars, 1923.

[55] G. Nyul and G. Rácz, *The r-Lah numbers*, Discrete Mathematics **338** (2015), 1660–1666.

[56] G. Nyul and G. Rácz, *Lucas sequences and the Hosoya index of graphs*, Fibonacci Quarterly **55** (2017), 340–342.

[57] G. Nyul and G. Rácz, *Sums of r-Lah numbers and r-Lah polynomials*, Ars Mathematica Contemporanea **18** (2020), 211–222.

[58] G. Nyul and G. Rácz, *Matchings in complete bipartite graphs and the r-Lah numbers*, Czechoslovak Mathematical Journal, közlésre elfogadva.

[59] M. Petkovšek and T. Pisanski, *Combinatorial interpretation of unsigned Stirling and Lah numbers*, Pi Mu Epsilon Journal **12** (2007), 417–424.

[60] G. Pólya and G. Szegő, Problems and Theorems in Analysis I, Springer, 1998.

[61] J. Quaintance and H. W. Gould, Combinatorial Identities for Stirling Numbers, World Scientific, 2016.

[62] G. Rácz, *On the magnitude of the roots of some well-known enumerative polynomials*, Acta Mathematica Hungarica **159** (2019), 257–264.

[63] G. Rácz, *The r-Fubini–Lah numbers and polynomials*, Australasian Journal of Combinatorics **78** (2020), 145–153.

[64] J. L. Ramírez and M. Shattuck, *A (p, q)-analogue of the r-Whitney–Lah numbers*, Journal of Integer Sequences **19** (2016), Article 16.5.6.

[65] P. Ribenboim, The Little Book of Bigger Primes, Springer-Verlag, 2004.

[66] J. Riordan, *Forests of labeled trees*, Journal of Combinatorial Theory **5** (1968), 90–103.

[67] P. A. Samuelson, *How deviant can you be?*, Journal of the American Statistical Association **63** (1968), 1522–1525.

[68] M. J. Schlosser and M. Yoo, *Elliptic rook and file numbers*, Electronic Journal of Combinatorics **24** (2017), Article P1.31.

[69] M. Sebaoui, D. Laissaoui, G. Guettai and M. Rahmani, *On s-Lah polynomials*, Ars Combinatoria **142** (2019), 111–118.

[70] M. Shattuck, *A generalized recurrence formula for Stirling numbers and related sequences*, Notes on Number Theory and Discrete Mathematics **21** (2015), 74–80.

[71] M. Shattuck, *Generalizations of Bell number formulas of Spivey and Mező*, Filomat **30** (2016), 2683–2694.

[72] M. Shattuck, *Generalized r-Lah numbers*, Proceedings of the Indian Academy of Sciences, Mathematical Sciences **126** (2016), 461–478.

[73] M. Shattuck, *Some formulas for the restricted r-Lah numbers*, Annales Mathematicae et Informaticae **49** (2018), 123–140.

[74] M. A. Shattuck and C. G. Wagner, *Parity theorems for statistics on lattice paths and Laguerre configurations*, Journal of Integer Sequences **8** (2005), Article 05.5.1.

[75] M. Z. Spivey, *A generalized recurrence for Bell numbers*, Journal of Integer Sequences **11** (2008), Article 08.2.5.

[76] R. Sprugnoli, *Riordan arrays and combinatorial sums*, Discrete Mathematics **132** (1994), 267–290.

[77] R. P. Stanley, *Log-concave and unimodal sequences in algebra, combinatorics, and geometry*, Annals of the New York Academy of Sciences **576** (1989), 500–535.

[78] S. M. Tanny, *On some numbers related to the Bell numbers*, Canadian Mathematical Bulletin **17** (1975), 733–738.

Publikációs lista/List of publications

1. G. Nyul and G. Rácz, *The r-Lah numbers*, Discrete Mathematics **338** (2015), 1660–1666.

2. G. Nyul and G. Rácz, *Lucas sequences and the Hosoya index of graphs*, Fibonacci Quarterly **55** (2017), 340–342.

3. G. Rácz, *On the magnitude of the roots of some well-known enumerative polynomials*, Acta Mathematica Hungarica **159** (2019), 257–264.

4. G. Nyul and G. Rácz, *Sums of r-Lah numbers and r-Lah polynomials*, Ars Mathematica Contemporanea **18** (2020), 211–222.

5. G. Rácz, *The r-Fubini–Lah numbers and polynomials*, Australasian Journal of Combinatorics **78** (2020), 145–153.

6. G. Nyul and G. Rácz, *Matchings in complete bipartite graphs and the r-Lah numbers*, Czechoslovak Mathematical Journal, közlésre elfogadva/accepted for publication.

Előadáslista/List of talks

1. *The r-Lah numbers*, International Student Conference on Applied Mathematics and Informatics, 2014. március 27–30., Malenovice (Csehország)

2. *Az r-Lah-számok*, Számelméleti és Kriptográfiai Napok, 2014. május 23–25., Komárno (Szlovákia)

3. *The r-Lah numbers*, Algorithmic and Enumerative Combinatorics Summer School, 2014. augusztus 18–22., Hagenberg (Ausztria)

4. *The r-Lah numbers*, 3. International Eurasian Conference on Mathematical Sciences and Applications, 2014. augusztus 25–27., Bécs (Ausztria)

5. *Summed r-Lah numbers*, International Student Conference on Applied Mathematics and Informatics, 2015. április 23–26., Kočovce (Szlovákia)

6. *Recent results on r-Lah polynomials*, 29th Journées Arithmétiques, 2015. július 6–10., Debrecen

7. *Summed r-Lah numbers and r-Lah polynomials* (poszter), 2nd Algorithmic and Enumerative Combinatorics Summer School, 2015. július 27–31., Hagenberg (Ausztria)

8. *The r-Lah numbers and their summations*, Joint Austrian-Hungarian Mathematical Conference, 2015. augusztus 25–27., Győr

9. *Combinatorial and divisibility properties of generalized Lah numbers and their sums*, 17th International Conference on Fibonacci Numbers and their Applications, 2016. június 27. – július 1., Caen (Franciaország)

10. *A graph theoretical view of r-Lah numbers*, 26th Workshop on Cycles and Colourings, 2017. szeptember 3–8., Nový Smokovec (Szlovákia)

11. *r-Lah numbers using graph theory*, International Student Conference on Applied Mathematics and Informatics, 2018. május 10–13., Malenovice (Csehország)

12. *Overview of our combinatorial and graph theoretical results on r-Lah numbers and r-Lah polynomials*, Discrete Mathematics and Applications Conference, 2018. június 25–29., Veszprém

13. *Recent investigations of r-Lah polynomials*, 27th Annual 3in1 Workshop, 2018. november 21–24., Stryszawa (Lengyelország)

14. *Általánosított Lah-számok és gráfelméleti interpretációjuk*, ADA 2019, 2019. május 24–25., Debrecen

15. *Generalized Lah numbers and their graph theoretical interpretation*, 9th Slovenian International Conference on Graph Theory, 2019. június 23–29., Bled (Szlovénia)

DEBRECENI EGYETEM
EGYETEMI ÉS NEMZETI KÖNYVTÁR
H-4002 Debrecen, Egyetem tér 1, Pf.: 400
Tel.: 52/410-443, e-mail: publikaciok@lib.unideb.hu

Nyilvántartási szám: DEENK/76/2021.PL
Tárgy: PhD Publikációs Lista

Jelölt: Rácz Gabriella
Doktori Iskola: Matematika- és Számítástudományok Doktori Iskola
MTMT azonosító: 10051149

A PhD értekezés alapjául szolgáló közlemények

Idegen nyelvű tudományos közlemények hazai folyóiratban (1)

1. **Rácz, G.**: On the magnitude of the roots of some well-known enumerative polynomials.
   Acta math. Hung. 159 (1), 257-264, 2019. ISSN: 0236-5294.
   DOI: http://dx.doi.org/10.1007/s10474-019-00925-6
   IF: 0.588

Idegen nyelvű tudományos közlemények külföldi folyóiratban (5)

2. Nyul, G., **Rácz, G.**: Matchings in complete bipartite graphs and the r-Lah numbers.
   Czech. Math. J. "Accepted by Publisher", 2021. ISSN: 0011-4642.
   IF: 0.412 (2019)

3. Nyul, G., **Rácz, G.**: Sums of r-Lah numbers and r-Lah polynomials.
   Ars Math. Contemp. 18 (2), 211-222, 2020. ISSN: 1855-3966.
   DOI: http://dx.doi.org/10.26493/1855-3974.1793.c4d
   IF: 0.642 (2019)

4. **Rácz, G.**: The r-Fubini-Lah numbers and polynomials.
   Australas. J. Combin. 78 (1), 145-153, 2020. ISSN: 1034-4942.

5. Nyul, G., **Rácz, G.**: Lucas sequences and the Hosoya index of graphs.
   Fibonacci Q. 55 (4), 340-342, 2017. ISSN: 0015-0517.

DEBRECENI EGYETEM
EGYETEMI ÉS NEMZETI KÖNYVTÁR
H-4002 Debrecen, Egyetem tér 1, Pf.: 400
Tel.: 52/410-443, e-mail: publikaciok@lib.unideb.hu

6. Nyul, G., **Rácz, G.**: The r-Lah numbers.
   Discret. Math. 338 (10), 1660-1666, 2015. ISSN: 0012-365X.
   DOI: http://dx.doi.org/10.1016/j.disc.2014.03.029
   IF: 0.6

A közlő folyóiratok összesített impakt faktora: 2,242
A közlő folyóiratok összesített impakt faktora (az értekezés alapjául szolgáló közleményekre): 2,242

A DEENK a Jelölt által az iDEa Tudóstérbe feltöltött adatok bibliográfiai és tudománymetriai ellenőrzését a tudományos adatbázisok és a Journal Citation Reports Impact Factor lista alapján elvégezte.

Debrecen, 2021.03.01.

UNIVERSITY of DEBRECEN

UNIVERSITY AND NATIONAL LIBRARY
UNIVERSITY OF DEBRECEN
H-4002 Egyetem tér 1, Debrecen
Phone: +3652/410-443, email: publikaciok@lib.unideb.hu

Registry number: DEENK/76/2021.PL
Subject: PhD Publication List

Candidate: Gabriella Rácz
Doctoral School: Doctoral School of Mathematical and Computational Sciences
MTMT ID: 10051149

List of publications related to the dissertation

<u>Foreign language scientific articles in Hungarian journals</u> (1)

1. **Rácz, G.**: On the magnitude of the roots of some well-known enumerative polynomials.
   Acta math. Hung. 159 (1), 257-264, 2019. ISSN: 0236-5294.
   DOI: http://dx.doi.org/10.1007/s10474-019-00925-6
   IF: 0.588

<u>Foreign language scientific articles in international journals</u> (5)

2. Nyul, G., **Rácz, G.**: Matchings in complete bipartite graphs and the r-Lah numbers.
   Czech. Math. J. "Accepted by Publisher", 2021. ISSN: 0011-4642.
   IF: 0.412 (2019)

3. Nyul, G., **Rácz, G.**: Sums of r-Lah numbers and r-Lah polynomials.
   Ars Math. Contemp. 18 (2), 211-222, 2020. ISSN: 1855-3966.
   DOI: http://dx.doi.org/10.26493/1855-3974.1793.c4d
   IF: 0.642 (2019)

4. **Rácz, G.**: The r-Fubini-Lah numbers and polynomials.
   Australas. J. Combin. 78 (1), 145-153, 2020. ISSN: 1034-4942.

5. Nyul, G., **Rácz, G.**: Lucas sequences and the Hosoya index of graphs.
   Fibonacci Q. 55 (4), 340-342, 2017. ISSN: 0015-0517.

UNIVERSITY of DEBRECEN

UNIVERSITY AND NATIONAL LIBRARY
UNIVERSITY OF DEBRECEN
H-4002 Egyetem tér 1, Debrecen
Phone: +3652/410-443, email: publikaciok@lib.unideb.hu

6. Nyul, G., **Rácz, G.**: The r-Lah numbers.
   Discret. Math. 338 (10), 1660-1666, 2015. ISSN: 0012-365X.
   DOI: http://dx.doi.org/10.1016/j.disc.2014.03.029
   IF: 0.6

Total IF of journals (all publications): 2,242
Total IF of journals (publications related to the dissertation): 2,242

The Candidate's publication data submitted to the iDEa Tudóstér have been validated by DEENK on the basis of the Journal Citation Report (Impact Factor) database.

01 March, 2021