DEBRECENI EGYETEM

Gaál István
Kozma László

Lineáris algebra

KOSSUTH EGYETEMI KIADÓ

DEBRECENI EGYETEM
MATEMATIKAI INTÉZET

Gaál István és *Kozma László*

Lineáris algebra

4. javított kiadás

KOSSUTH EGYETEMI KIADÓ
DEBRECENI EGYETEM
Debrecen, 2009

Lektorálta:

DR BÁCSÓ SÁNDOR
egyetemi docens

Kiadta: a Debreceni Egyetem Egyetemi és Nemzeti Könyvtár
Kossuth Egyetemi Kiadója
Felelős kiadó: Dr. Virágos Márta főigazgató
Felelős szerkesztő: Bálint Ágnes
Készült: a DE sokszorosítóüzemében, 2009-ben
Terjedelem: 15,01 A/5 ív
09-048

Bevezető

A jegyzet célja a lineáris algebra tárgykörébe tartozó alapvető algebrai és geometriai ismeretek hallgatók számára könnyen követhető tárgyalása.

A jegyzet anyaga azon sok éven át tartott előadások során forrott ki, melyeket a szerzők a Debreceni Egyetem matematikus és matematika tanár szakos hallgatóinak tartottak. Néhány, a tananyaghoz szorosan kapcsolódó fejezetet ugyanakkor sokkal részletesebben kifejtettünk, mint ahogyan az a szokásos előadásokon el szokott hangzani. Ezáltal az érdeklődő hallgatók a tananyagon túl is találnak benne önálló feldolgozásra érdemes részeket.

A jegyzetet Függelék egészíti ki, mely tömör formában tartalmazza mindazokat az (elsősorban algebrai jellegű) előismereteket, melyek a jegyzet olvasásához szükségesek.

Ugyancsak a Függelék része a MAPLE komputeralgebrai rendszer részleges ismertetése. Ez egyrészt egy rövid bevezető általában a MAPLE használatába, másrészt tartalmazza a lineáris algebrai programcsomag eljárásainak felsorolását. Oktatási tapasztalataink szerint a hallgatók ezt a segédeszközt örömmel fogadják.

A jegyzet anyagának elsajátítását nagyban segíti Kovács Zoltán [7] feladatgyűjteménye.

Debrecen, 2002. május 15. A Szerzők

Tartalomjegyzék

1. Szabadvektorok és analitikus geometria

Ebben a fejezetben megismerkedünk a szabadvektorok fogalmával, amely a középiskolai vektorfogalom pontosítása. Előzetes ismeretként feltételezzük az euklideszi geometria alapvető fogalmait és összefüggéseit, mint pl. pont, egyenes, sík, párhuzamossság, merőlegesség, szög, stb. A geometriai térből kiindulva értelmezzük a szabadvektor fogalmát, a velük végezhető műveleteket és azok összefüggéseit, majd végül ezeket alkalmazzuk a térbeli egyenesek és síkok leírására.

1.1. A szabadvektor fogalma

Jelölje $\mathcal{E}$ az euklideszi geometriai teret. Ennek pontjait $P, Q, \ldots, A, B, \ldots$ betűkkel jelöljük. Az egyeneseket általában $e, f, g, \ldots$ betűkkel, míg a síkokat S_1, S_2, stb. betűkkel jelöljük.

Az $\mathcal{E}$ tér pontjaiból képzett rendezett párokat, az $\mathcal{E} \times \mathcal{E}$ Descartes szorzat elemeit **irányított szakasz**nak mondjuk. Az (A, B) és (C, D) irányított szakaszt **ekvivalens**nek nevezzük, ha van a térnek olyan $p\colon \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ párhuzamos eltolása, amelyre $p(A) = C$ és $p(B) = D$ teljesül, azaz a p párhuzamos eltolás az első irányított szakasz kezdő-, illetve végpontját a másik kezdő-, illetve végpontjába viszi át. Most megmutatjuk, hogy ez a reláció ekvivalenciareláció. A reflexivitás nyilvánvaló, ugyanis bármely (A, B) irányított szakaszt az identikus transzformáció, azaz a nullvektorral történő eltolás önmagába viszi át. A reláció szimmetriája abból következik, hogy ha egy p eltolás (A, B)-t (C, D)-be viszi át, akkor az ellentett $-p$ eltolás (C, D)-t az (A, B)-be. A tranzitivitáshoz elegendő azt látni, hogy eltolások kompozíciója újra eltolás, vagyis ha p_1 az (A, B)-t (C, D)-be viszi át, p_2 pedig (C, D)-t az (E, F)-be, akkor $p_2 \circ p_1$ is eltolás lesz és (A, B)-t (E, F)-be viszi át. Tekintsük most ezen ekvivalenciarelációhoz tartozó osztályokat.

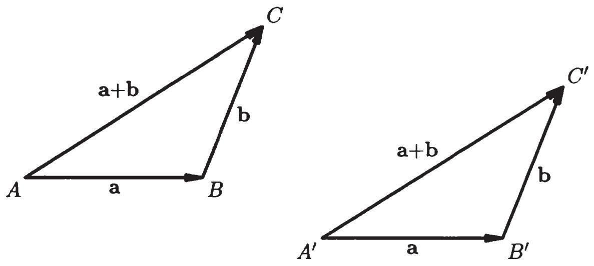
Definíció. *Az euklideszi tér irányított szakaszainak halmazán most bevezetett ekvivalenciareláció osztályait* **szabadvektorok***nak nevezzük. Egy szabadvektort félkövér kis betűvel jelölünk, pl.* $\mathbf{a}$*. Az összes szabadvektor halmazát* $V(\mathcal{E})$*-vel jelöljük.*

A tekintett reláció alapján világos, hogy egy osztályba olyan irányított szakaszok tartoznak, amelyek mind egymásból párhuzamos eltolással megkaphatók. Egy osztály, azaz egy szabadvektor egy elemét a **szabadvektor reprezentánsá**nak mondjuk, és ezt az összefüggést az $(A, B) \in \mathbf{a}$ jelöléssel illetjük. Világos, hogy egy szabadvektornak a tér tetszőleges pontjából indul reprezentánsa, s hogy egy szabadvektor már egy reprezentáns megadásával is egyértelműen meghatározott. Az (A, B) irányított szakasz által meghatározott szabadvektort gyakran $\overrightarrow{AB}$-vel is jelöljük.

1.2. A szabadvektorok összeadása és skalárral szorzása

Definíció. *Az* $\mathbf{a}$ *és* $\mathbf{b}$ *szabadvektorok összegén azt az* $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ *szabadvektort értjük, amelynek egy* (A, C) *reprezentánsához található olyan* $B \in \mathcal{E}$ *pont, hogy* $(A, B) \in \mathbf{a}$

és $(B, C) \in \mathbf{b}$ *teljesül.*



Figyeljük meg, hogy az összeg nem függ a reprezentánsok megválasztásától. Ugyanis, ha másik (A', C') reprezentánsból indulunk ki, akkor B' az $\mathbf{a}$ szabadvektor A'-ből induló reprezentánsának végpontja lesz, és (B', C') éppen $\mathbf{b}$-t reprezentálja.

Az összegvektor fenti meghatározását **összefűzési eljárás**nak is mondják. Nem párhuzamos vektorok esetén ezzel ekvivalens az ún. paralelogramma módszer, amikoris az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ szabadvektokroknak közös kezdőpontból, mondjuk O-ból tekintjük (O, A), illetve (O, B) reprezentánsait, s az OAB pontok által meghatározott paralelogramma negyedik csúcsát C-vel jelölve, az (O, C) átló lesz az összegvektor reprezentánsa.

TÉTEL. *A szabadvektorok összeadása rendelkezik a következő tulajdonságokkal:*

1. $\forall\, \mathbf{a}, \mathbf{b} \in V(\mathcal{E}) : \ \mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$. *(kommutativitás)*
2. $\forall\, \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in V(\mathcal{E}) : \ (\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c})$. *(asszociativitás)*
3. $\exists\, \mathbf{0} \in V(\mathcal{E}) : \ \forall \mathbf{a} \in V(\mathcal{E}) : \ \mathbf{a} + \mathbf{0} = \mathbf{a}$. *(nullvektor létezése)*
4. $\forall\, \mathbf{a} \in V(\mathcal{E}) \ \ \exists!\, (-\mathbf{a}) \in V(\mathcal{E}) : \ \ \mathbf{a} + (-\mathbf{a}) = \mathbf{0}$. *(inverz elem létezése)*

Bizonyítás. 1. A kommutativitás nem párhuzamos vektorok esetén a paralelogramma módszer alapján, míg párhuzamos esetben az összefűzési eljárásás alapján nyilvánvaló.

2. Az asszociativitás igazolásához tekintsük a következő reprezentánsokat: $(O, A) \in \mathbf{a}, (A, B) \in \mathbf{b}, (B, C) \in \mathbf{c}$. Ekkor $(O, B) \in \mathbf{a} + \mathbf{b}$ és $(A, C) \in \mathbf{b} + \mathbf{c}$. Emiatt (O, C) az igazolandó állítás mindkét oldalán lévő szabadvektort reprezentálja, ezért azok egyenlők.

3. A nullvektort nyilvánvalóan az (A, A) típusú irányított szakaszok reprezentálják, s ez teljesíti a kívánalmakat.

4. Ha $(A, B) \in \mathbf{a}$, akkor $-\mathbf{a}$-val jelölve azt a szabadvektort, amelyet (B, A) reprezentál, az elvárt reláció teljesül. □

A következőkben a valós számokat skalárként említjük. Ismertnek feltételezzük, hogy tetszőleges pozitív λ skalár (valós szám) és bármely O pont esetén van egy O középpontú λ arányú középpontos hasonlóság.

Definíció. *Legyen* $\lambda \in \mathbb{R}$ *és* $\mathbf{a} \in V(\mathcal{E})$.

Ha λ *pozitív skalár, tekintsük* $\mathbf{a}$*-nak egy* (O, A) *reprezentánsát, és alkalmazzuk az* O *középpontú* λ *arányú hasonlóságot.* A' *jelölje* A *képét.* $\lambda\mathbf{a}$ *azt a szabadvektort jelenti, amelyet* (O, A') *reprezentál.*

Ha λ *negatív, akkor* $|\lambda|$ *arányú középpontos hasonlóságot alkalmazunk, és* O*-ra tükrözünk, így kapjuk az* A' *pontot.*

Ha $\lambda = 0$*, akkor definíció szerint* $\lambda\mathbf{a} = \mathbf{0}$.

Tétel. *A szabadvektorok skalárral való szorzása rendelkezik a következő tulajdonságokkal:*

1. $\forall\, \lambda, \mu \in \mathbb{R},\ \mathbf{a} \in V(\mathcal{E}):\ (\lambda\mu)\mathbf{a} = \lambda(\mu\mathbf{a}).$ *(asszociativitás)*
2. $\forall\, \lambda \in \mathbb{R},\ \mathbf{a}, \mathbf{b} \in V(\mathcal{E}):\ \lambda(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \lambda\mathbf{a} + \lambda\mathbf{b}.$ *(disztributivitás)*
3. $\forall\, \lambda, \mu \in \mathbb{R},\ \mathbf{a} \in V(\mathcal{E}):\ (\lambda + \mu)\mathbf{a} = \lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{a}.$ *(disztributivitás)*
4. $\forall\, \mathbf{a} \in V(\mathcal{E}):\ 1 \cdot \mathbf{a} = \mathbf{a}.$

Bizonyítás. Az első összefüggés a középpontos hasonlóságok azon tulajdonságából következik, hogy két azonos középpontú hasonlóság kompozíciójakor a hasonlóságok aránya összeszorzódik.

A második részállítás abból adódik, hogy a középpontos hasonlóság paralelogrammát paralelogrammába képez.

A harmadikhoz esetszétválasztást végzünk. Ha λ és μ azonos előjelűek, mondjuk pozitívak, akkor tekintsük az $(O, A) \in \mathbf{a}$ reprezentánst. Reprezentálja (O, A_λ) a $\lambda\mathbf{a}$ szabadvektort, illetve (O, A_μ) a $\mu\mathbf{a}$ szabadvektort, végül $(O, A_{\lambda+\mu})$ a $(\lambda + \mu)\mathbf{a}$ szabadvektort. Nyilvánvalóan $|OA_{\lambda+\mu}| = |OA_\lambda| + |OA_\mu|$, s ezért $|A_\lambda A_{\lambda+\mu}| = |OA_\mu|$, ami állításunkat jelenti.

Különböző előjelű skalárok esetén legyen pl. $\lambda > 0, \mu < 0$, és $\lambda > |\mu|$. Ekkor $|OA_{\lambda+\mu}| = |OA_\lambda| - |OA_\mu|$, azaz megintcsak $|A_\lambda A_{\lambda+\mu}| = |OA_\mu|$, s ez állításunkat adja. □

Amennyiben véges sok vektorból kiindulva, az eddig megismert összeadást és skalárral való szorzást felhasználva újabb vektort állítunk elő, akkor azt mondjuk, hogy **lineáris kombinációt** képeztünk. Pl. az $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k$ szabadvektorok egy lineáris kombinációja az $\alpha_1\mathbf{a}_1 + \cdots + \alpha_k\mathbf{a}_k$ vektor.

Megjegyzés. Ha egy halmazban definiálva van egy összeadásnak nevezett, s az első állításban felsorolt tulajdonságokkal rendelkező művelet, továbbá egy skalárokkal való szorzás, amely a második állításban felsorolt 4 tulajdonsággal rendelkezik, akkor azt mondjuk, hogy egy (absztrakt) vektortér struktúra van megadva. Az ilyen struktúrákat később részletesen fogjuk vizsgálni, s majd akkor úgy fogalmazhatunk, hogy a szabadvektorok halmaza egy valós vektorteret alkot.

1.3. Lineáris függőség a szabadvektorok körében

A lineáris függőséget és függetlenséget most geometriailag értelmezzük, majd megadjuk algebrai jellemzésüket is. Végül megmutatjuk, hogy a szabadvektorok körében 4 vektor már mindig lineárisan függő, s ez vezet a bázis, illetve a koordináták fogalmának bevezetéséhez.

DEFINÍCIÓ. *Egy vektort* **lineárisan függő***nek mondunk, ha az a nullvektor.*

Két vektort **lineárisan függő***nek akkor nevezünk, ha egy egyenessel párhuzamosak, azaz kollineárisak.*

Három vektort akkor mondunk **lineárisan függő***nek, ha egy síkkal párhuzamosak, azaz komplanárisak.*

1, 2 vagy 3 tagú vektorrendszert **lineárisan független***nek nevezünk, ha nem lineárisan függő.*

A most következő állítások algebrai jellemzését adják a lineárisan függő, illetve lineárisan független vektorrendszereknek.

TÉTEL. *Két szabadvektor pontosan akkor lineárisan függő, ha egyik a másiknak skalárszorosa.*

Két szabadvektor pontosan akkor lineárisan független, ha egyik sem skalárszorosa a másiknak.

Bizonyítás. Ha $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ lineárisan függők, akkor közös pontból indított (O, A) és (O, B) reprezentánsaikra igaz, hogy az O, A, B pontok egy egyenesen vannak. Ha $O \neq A$, akkor van olyan $\lambda \in \mathbb{R}$, hogy az O középpontú hasonlóság az A pontot B-be képezi. Ekkor $\mathbf{b} = \lambda\mathbf{a}$. Ha viszont $O = A$, de $O \neq B$, akkor A és B szerepét felcserélve adódik, hogy $\mathbf{a} = \mu\mathbf{b}$. Ha pedig $O = A = B$, akkor $\mathbf{a} = \mathbf{b} = \mathbf{0}$, s így $\mathbf{a} = 0 \cdot \mathbf{a}$.

Fordítva, ha pl. $\mathbf{a} = \lambda\mathbf{b}$, akkor nyilvánvalóan közös pontból induló (O, A) és (O, B) reprezentánsaikra O, A, B egy egyenesen van, ezért $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ kollineárisak, tehát lineárisan függők.

A lineáris függetlenségre vonatkozó összefüggés logikai tagadással keletkezik.
□

TÉTEL. *Három szabadvektor pontosan akkor lineárisan függő, ha közülük valamelyik a másik kettőnek lineáris kombinációja.*

Három szabadvektor pontosan akkor lineárisan független, ha egyik sem fejezhető ki a másik kettő lineáris kombinációjaként.

Bizonyítás. Tegyük fel először, hogy $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ lineárisan függők. Ha $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ lineárisan függő, akkor egyikük pl. $\mathbf{a}$ lineárisan kifejezhető $\mathbf{b}$-vel: $\mathbf{a} = \lambda\mathbf{b}$. Ezért $\mathbf{a} = \lambda\mathbf{b} + 0 \cdot \mathbf{c}$. Ha viszont $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ lineárisan függetlenek, akkor tekintsük mindháromnak O-ból induló reprezentánsát: $(O, A) \in \mathbf{a}$, $(O, B) \in \mathbf{b}$, $(O, C) \in \mathbf{c}$. Most húzzunk párhuzamost C-ből OB-val, illetve OA-vel, ezek messék az OA, illetve OB egyeneseket A', illetve B' pontokban. Az (O, A'), illetve (O, B') irányított szakaszok által meghatározott szabadvektorokra nyilvánvalóan $\overrightarrow{OA'} = \alpha\mathbf{a}$ és $\overrightarrow{OB'} = \beta\mathbf{b}$, továbbá $\mathbf{c} = \overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{OB'}$ érvényes. Ezért $\mathbf{c} = \alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b}$ teljesül.

Fordítva, ha pl. $\mathbf{c} = \alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b}$ teljesül, akkor egy közös kezdőpontból indított reprezentánsokkal könnyen láthatjuk, hogy végpontjaik a kezdőponttal mind egy síkba esnek, ezért komplanárisak.

A lineáris függetlenségre vonatkozó összefüggés logikai tagadással keletkezik.
□

Tetszőleges vektorrendszer tagjaival a nullvektor mindig előállítható $\mathbf{0} = 0 \cdot \mathbf{a}_1 + \cdots + 0 \cdot \mathbf{a}_k$ alakban. Ezt triviális előállításnak mondjuk.

Tétel. *A szabadvektorok egy vektorrendszere pontosan akkor lineárisan függő, ha belőlük a nullvektor nem triviális módon is előállítható.*

A szabadvektorok egy vektorrendszere pontosan akkor lineárisan független, ha belőlük a nullvektor csak triviálisan állítható elő.

Bizonyítás. Ha pl. $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ lineárisan függő, akkor előző állítás alapján tudjuk, hogy valamelyik, pl. $\mathbf{c}$ kifejezhető a többivel: $\mathbf{c} = \alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b}$. Ezért $\mathbf{0} = \alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b} + (-1)\mathbf{c}$. Ez nem triviális előállítása a nullvektornak.

Hasonló egyszerűséggel adódik az állítás 1 és 2 tagú vektorrendszerekre is.

Ha fordítva, pl. $\alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b} + \gamma\mathbf{c} = \mathbf{0}$, és pl. $\gamma \neq 0$, akkor a $\mathbf{c} = -\frac{\alpha}{\gamma}\mathbf{a} - \frac{\beta}{\gamma}\mathbf{b}$ előállítás lehetséges, vagyis ismét az előző állítás alapján $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ lineárisan függő.

A lineáris függetlenségre vonatkozó kijelentés logikai tagadással keletkezik. □

A lineáris függetlenségnek egy önálló jellemzését is adjuk.

Tétel. *Egy vektorrendszer pontosan akkor lineárisan független, ha belőlük egy tetszőleges szabadvektor legfeljebb egyféleképpen állítható elő.*

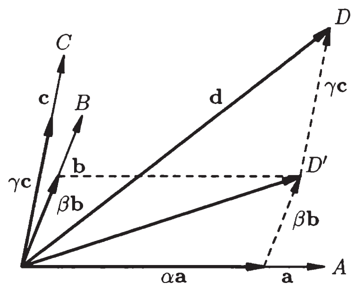
Bizonyítás. A feltétel szükséges: Pl. három tagú $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ vektorrendszer esetén, ha $\mathbf{x} = \alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b} + \gamma\mathbf{c} = \alpha'\mathbf{a} + \beta'\mathbf{b} + \gamma'\mathbf{c}$ teljesedik, akkor

$$(\alpha' - \alpha)\mathbf{a} + (\beta' - \beta)\mathbf{b} + (\gamma' - \gamma)\mathbf{c} = \mathbf{0}.$$

A lineáris függetlenség miatt $\alpha = \alpha', \beta = \beta', \gamma = \gamma'$, tehát $\mathbf{x}$ előállítása csak egyféleképpen lehetséges.

A feltétel elégséges: Ha minden szabadvektor legfeljebb egyféleképpen áll elő a megadott szabadvektorokkal, akkor a nullvektor is, ezért az előző állítás miatt a vektorrendszer lineárisan független. □

Tétel. *Ha* $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ *lineárisan független vektorrendszer,* $\mathbf{d}$ *tetszőleges, akkor* $\mathbf{d}$ *mindig előállítható lineáris kombinációként a megadott* $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ *szabadvektorokkal.*



Bizonyítás. Egy geometriai konstrukciót adunk a lineáris kombináció megkeresésére: Tekintsük mind a négy vektor közös O pontból induló reprezentánsait, a végpontok legyenek A, B, C, D. Az $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ szabadvektorok lineáris függetlensége miatt a az O, A, B, C pontok nincsenek egy síkban. Húzzunk párhuzamost D-ből OC-vel, ez messe az OAB síkot a D' pontban. Mivel D' az OAB síkban van, $\overrightarrow{OD'} = \alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b}$. Másrészt $D'D \parallel OC$, ezért $\overrightarrow{D'D} = \gamma\mathbf{c}$. Ezért $\mathbf{d} = \overrightarrow{OD'} + \overrightarrow{D'D} = \alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b} + \gamma\mathbf{c}$. □

Tételünk azt fejezi ki, hogy a szabadvektorok körében 4 szabadvektor már mindig lineárisan függő.

Az előző állításunkkal kombinálva többet is mondhatunk: 3 tagú lineárisan független vektorrendszer segítségével tetszőleges szabadvektor pontosan egyféleképpen állítható elő. Ennek alapján bevezetjük a következő elnevezéseket:

DEFINÍCIÓ. *A szabadvektorok körében egy lineárisan független 3 tagú vektorrendszert* **bázis***nak nevezünk. Ha* $\mathbf{d} = \alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b} + \gamma\mathbf{c}$, *akkor az* α, β, γ *számhármast a* $\mathbf{d}$ *vektornak az* $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ *bázisra vonatkozó* **koordinátái***nak mondjuk.*

Könnyen láthatjuk, hogy ha lerögzítünk egy bázist, akkor két tetszőleges szabadvektor összegének koordinátái úgy adódnak az egyes szabadvektorok koordinátáiból, hogy a megfelelő koordináták összeadódnak. Skalárral való szorzáskor pedig mindegyik koordináta megszorzódik az adott skalárral.

1.4. Szabadvektorok skaláris szorzata

Most a szabadvektorok skaláris szorzatával foglalkozunk, amely a középiskolai fogalom átismétlését jelenti, csak most a térbeli szabadvektorok esetére. A fogalom tárgyalásánál ismertnek feltételezzük a térbeli távolság- és szögfogalmat. Egy szabadvektor hosszán tetszőleges reprezentánsának hosszát értjük, s két szabadvektor szögén pedig közös pontból induló reprezentánsainak szögét.

A skaláris szorzatot gyakran nevezik belső szorzatnak is.

DEFINÍCIÓ. *Az* $\mathbf{a}$ *és* $\mathbf{b}$ *szabadvektorok skaláris szorzatán az*

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \cos\sphericalangle(\mathbf{a}, \mathbf{b})$$

számot értjük.

Speciális esetként figyeljük meg, hogy ha a két szabadvektor merőleges, akkor skaláris szorzatuk nulla. Ez megfordítható: ha két szabadvektor skaláris szorzata nulla, akkor a vektorok merőlegesek egymásra, beleértve azt is, hogy lehetnek nullvektorok is.

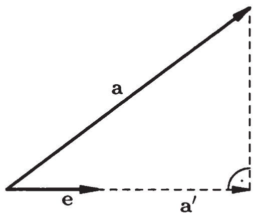
Másrészt, ha egy szabadvektornak önmagával képezzük a skaláris szorzatát, akkor a szabadvektor hosszának négyzetét kapjuk.

Egy szabadvektort **egységvektor**nak nevezünk, ha hossza 1. A skaláris szorzat szoros kapcsolatban van az egységvektorokra történő merőleges vetítéssel.

Nevezetesen, ha $\mathbf{e}$ egy egységvektor, $\mathbf{a}$ tetszőleges szabadvektor, akkor $\mathbf{a}$-nak az $\mathbf{e}$ irányára eső merőleges vetülete éppen az

$$\mathbf{a}' = (\mathbf{e}, \mathbf{a})\mathbf{e}$$

vektor lesz. Ezt könnyen láthatjuk a merőleges vetület hosszának kiszámításával, akár hegyes-, akár tompaszöget zár be a két szabadvektor.



A következő állítás a skaláris szorzat alapvető tulajdonságait fejezi ki.

TÉTEL. *A szabadvektor skaláris szorzata rendelkezik az alábbi tulajdonságokkal:*

1. $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = (\mathbf{b}, \mathbf{a}) \quad \forall\, \mathbf{a}, \mathbf{b} \in V(\mathcal{E})$ *(szimmetrikus)*
2. $(\mathbf{a} + \mathbf{b}, \mathbf{c}) = (\mathbf{a}, \mathbf{c}) + (\mathbf{b}, \mathbf{c}) \quad \forall\, \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in V(\mathcal{E})$ *(additív)*
3. $(\lambda\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \lambda(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \quad \forall\, \mathbf{a}, \mathbf{b} \in V(\mathcal{E}),\ \lambda \in \mathbb{R}$ *(homogén)*
4. $(\mathbf{a}, \mathbf{a}) \geq 0 \quad \forall\, \mathbf{a} \in V(\mathcal{E})$ *és* $= 0 \Longleftrightarrow \mathbf{a} = \mathbf{0}$ *(pozitív definit)*

Bizonyítás. Az 1. és 4. állítás nyilvánvaló.

A 3. a λ skalár előjele szerinti esetszétválasztással könnyen igazolható. Például, ha $\lambda < 0$, akkor a

$$(\lambda\mathbf{a}, \mathbf{b}) = |\lambda| \cdot |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \cos\sphericalangle(\lambda\mathbf{a}, \mathbf{b}) = -\lambda|\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot (-\cos\sphericalangle(\mathbf{a}, \mathbf{b})) = \lambda(\mathbf{a}, \mathbf{b}).$$

A 2. tulajdonságot elegendő belátni, akkor ha pl. $\mathbf{c} = \mathbf{e}$ egységvektor, az 1. és a 3. teljesülése miatt. Most kihasználjuk az adott $\mathbf{e}$ egységvektor irányára eső merőleges vetítés azon nyilvánvaló tulajdonságát, hogy csatlakozó irányított szakaszok merőleges vetülete is csatlakozó. Jelöljük most az $\mathbf{a}$ szabadvektor $\mathbf{e}$-re eső vetületét $\mathbf{a}'$-vel. Az említett tulajdonság akkor így fejezhető ki:

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b})' = \mathbf{a}' + \mathbf{b}'.$$

Ezt kihasználva kapjuk, hogy

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b}, \mathbf{e}) = (\mathbf{a} + \mathbf{b})' = \mathbf{a}' + \mathbf{b}' = (\mathbf{a}, \mathbf{c}) + (\mathbf{b}, \mathbf{e}).$$

□

A skaláris szorzat kiszámítása koordinátákból akkor válik egyszerűvé, ha speciális, ún. ortonormált bázisra vonatkozó koordinátáit tekintjük a vektoroknak.

Egy $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ bázist **ortonormált**nak mondunk, ha mindegyik egységvektor, és páronként merőlegesek. Ez úgy is kifejezhető, hogy

$$(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = \begin{cases} 1 & \text{ha } i = j \\ 0 & \text{ha } i \neq j. \end{cases}$$

TÉTEL. *Legyen $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ egy ortonormált bázis. Az* $\mathbf{a}$ *és* $\mathbf{b}$ *vektorok e bázisra vonatkozó koordinátáit jelölje $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, illetve $\beta_1, \beta_2, \beta_3$. Ekkor*

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3.$$

Bizonyítás. Először azt figyeljük meg, hogy az ortonormált bázisra vonatkozó koordináták a skaláris szorzattal egyszerűen kiszámíthatók:

$$(\mathbf{a}, \mathbf{e}_i) = (\alpha_1\mathbf{e}_1 + \alpha_2\mathbf{e}_2 + \alpha_3\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_i) = \alpha_1(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_i) + \alpha_2(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_i) + \alpha_3(\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_i) = \alpha_i.$$

Ezt felhasználva számítsuk ki most az $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ skaláris szorzatot:

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \beta_1(\mathbf{a}, \mathbf{e}_1) + \beta_2(\mathbf{a}, \mathbf{e}_2) + \beta_3(\mathbf{a}, \mathbf{e}_3) = \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3.$$

□

Az állításban megadott jobboldali formulát a két koordinátahármas **kompozíciós szorzat**ának is nevezik.

1.5. Szabadvektorok vektoriális szorzata

A vektoriális szorzat definiálásához szükségünk van a tér irányításának fogalmára. Ezt a fogalmat teljes pontossággal majd csak egy későbbi lépésben, több eszköz birtokában lehetne megtenni. Most csak egy vázlatos fogalomkiépítést, és egy még szemléletesebb megközelítést írunk le.

Először is emlékeztetünk a térbeli egybevágóságokra. Ezek olyan térbeli távolságtartó transzformációk, amelyek megkaphatók az eltolások, a tengely körüli elforgatások, és a síkra vonatkozó tükrözések véges sokszori, egymás utáni végrehajtásával. Azokat az egybevágóságokat, amelyeknek van olyan előállítása, amelyben síkra vonatkozó tükrözés nem szerepel, mozgásnak mondjuk.

Tekintsünk most két bázist a szabadvektorok körében, s mindezen vektoroknak egyetlen közös kezdőpontból induló reprezentásait. Ha van olyan mozgás, amely az első bázis reprezentánsait úgy képezi le, hogy a képreprezentánsok közül az első a második bázis első vektorának reprezentánsával egy egyenesbe, és egy irányba esik, továbbá a második képreprezentáns a második bázis második vektorának reprezentánsával azonos félsíkba esik, s végül a harmadik képreprezentáns a második bázis harmadik vektorának reprezentánsával azonos féltérbe esik, akkor a két bázist ekvivalensnek (vagy azonos irányításúnak) mondjuk. Könnyen igazolható, hogy ez egy ekvivalenciareláció a bázisok halmazán, s pontosan két osztály van e reláció szerint. Akkor mondjuk, hogy a tér irányítva van, ha ki van jelölve az egyik osztály. Az ebbe a kijelölt osztályba tartozó bázisokat pozitív irányításúnak (vagy röviden pozitívnak) mondjuk, míg a másik osztályba tartozókat negatív irányításúnak.

Később majd be fogjuk látni azt is, hogy a bázisban két vektor cseréje megváltoztatja az irányítást, a ciklikus permutáció viszont nem.

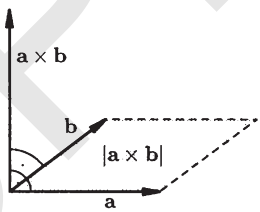
Hétköznapi térszemléletünkre alapozva szokásos a következő elnevezés és fogalombevezetés is. Egy bázist jobbsodrású (vagy jobb-) rendszernek neveznek, ha a 'harmadik végpontja felől nézve az első vektor 180°-nál kisebb szögben forgatható a második vektor irányába az óramutató járásával ellentétes irányban'. (Ezt a fajta tárgyalást részletesebben lásd Hajós György: Bevezetés a geometriába c. művében [5].)

A továbbiakban feltételezzük, hogy a tér irányítva van.

Definíció. *Két lineárisan független szabadvektor,* $\mathbf{a}$ *és* $\mathbf{b}$ **vektoriális szorzat***án azt az* $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$*-vel jelölt szabadvektort értjük, amelyre*

1. $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \sin \sphericalangle(\mathbf{a}, \mathbf{b})$,
2. $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ *merőleges* $\mathbf{a}$*-ra és* $\mathbf{b}$*-re,*
3. $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{a} \times \mathbf{b})$ *pozitív irányítású bázis.*

Ha pedig $\mathbf{a}$ *és* $\mathbf{b}$ *lineárisan függők, akkor vektoriális szorzatuk a nullvektor.*



Megjegyezzük, hogy az első esetben, vagyis amikor $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ lineárisan függetlenek, akkor a vektoriális szorzat sohasem nullvektor. Másrészt, ha $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ merőlegesek egymásra, akkor a vektoriális szorzat hossza éppen az egyes szabadvektorok hosszának szorzata.

A következő állítás a vektoriális szorzás alaptulajdonságait adja meg.

Tétel.

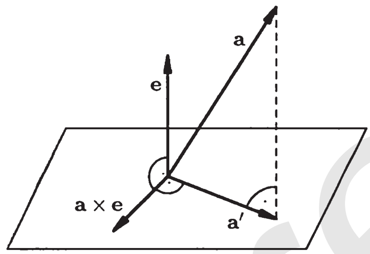
1. $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -(\mathbf{b} \times \mathbf{a}) \qquad \forall\, \mathbf{a}, \mathbf{b} \in V(\mathcal{E})$ *(antiszimmetrikus)*
2. $(\lambda \mathbf{a}) \times \mathbf{b} = \lambda(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \qquad \forall\, \mathbf{a}, \mathbf{b} \in V(\mathcal{E}),\ \lambda \in \mathbb{R}$ *(homogén)*
3. $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{c} + \mathbf{b} \times \mathbf{c} \qquad \forall\, \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in V(\mathcal{E})$ *(additív)*
4. *Az* $\mathbf{a}$ *vektornak az* $\mathbf{e}$ *egységvektorra merőleges komponense*

$$\mathbf{a}_m = (\mathbf{e} \times \mathbf{a}) \times \mathbf{e}.$$

Bizonyítás. Az 1. állítás abból következik, hogy egy vektorhármasban ha felcseréljük két vektor sorrendjét, akkor az irányítás megváltozik, de a $\mathbf{b} \times \mathbf{a}$ első két jellemzője ugyanaz, mint a $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ vektoriális szorzaté.

A 2. állítás pozitív λ esetén nyilvánvaló. Negatív λ esetén az irányításban kétszer történik váltás, ezért végül azonos lesz a jobb- és baloldalon álló vektoriális szorzás képzésénél adódó vektorhármasok irányítása.

Az additivitás belátását megintcsak elegendő ellenőrizni a $\mathbf{c} = \mathbf{e}$ egységvektor esetben. Figyeljük meg, hogy ha $\mathbf{e}$ rögzített egységvektor, akkor tetszőleges $\mathbf{a}$ szabadvektorral képzett vektoriális szorzata két geometriai transzformáció egymás utáni végrehajtásával megkapható:



Először $\mathbf{a}$-t merőlegesen levetítjük az $\mathbf{e}$-re merőleges síkra, majd ezt elforgatjuk 90°-kal $\mathbf{e}$ kezdőpontja körül abban a síkban. Ez a szabadvektor ugyanis éppen megfelelő hosszúságú, merőleges $\mathbf{a}$-ra és $\mathbf{e}$-re, és a megfelelő irányítottság is teljesül. Mint minden geometriai transzformáció, ez is az illeszkedést megtartja, ezért teljesül a

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times \mathbf{e} = \mathbf{a} \times \mathbf{e} + \mathbf{b} \times \mathbf{e}$$

összefüggés.

A fenti gondolatmenet alapján nyilvánvaló, hogy $\mathbf{e} \times (\mathbf{e} \times \mathbf{a}) = -\mathbf{a}_m$, amiből következik a 4. állítás.

□

Ha $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ egy pozitív irányítású ortonormált bázis, akkor könnyen láthatjuk, hogy

$$\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_3,\ \mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_1,\ \mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_2.$$

Ezt is felhasználva kapjuk, hogy a vektoriális szorzat a pozitív irányítású bázisokra vonatkozó koordinátákból számítható ki, viszonylag könnyen.

TÉTEL. *Legyen $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ egy pozitív irányítású ortonormált bázis. Az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorok e bázisra vonatkozó koordinátáit jelölje $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, illetve $\beta_1, \beta_2, \beta_3$. Ekkor*

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_2 & \beta_3 \end{vmatrix} \mathbf{e}_1 + \begin{vmatrix} \alpha_3 & \alpha_1 \\ \beta_3 & \beta_1 \end{vmatrix} \mathbf{e}_2 + \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{vmatrix} \mathbf{e}_3.$$

ahol $\begin{vmatrix} \alpha_i & \alpha_j \\ \beta_i & \beta_j \end{vmatrix} = \alpha_i\beta_j - \alpha_j\beta_i.$

Bizonyítás.

$$
\begin{aligned}
\mathbf{a}\times\mathbf{b} &= (\alpha_1\mathbf{e}_1+\alpha_2\mathbf{e}_2+\alpha_3\mathbf{e}_3)\times(\beta_1\mathbf{e}_1+\beta_2\mathbf{e}_2+\beta_3\mathbf{e}_3)\\
&= \alpha_1\beta_1(\mathbf{e}_1\times\mathbf{e}_1)+\alpha_1\beta_2(\mathbf{e}_1\times\mathbf{e}_2)+\alpha_1\beta_3(\mathbf{e}_1\times\mathbf{e}_3)\\
&\quad +\alpha_2\beta_1(\mathbf{e}_2\times\mathbf{e}_1)+\alpha_2\beta_2(\mathbf{e}_2\times\mathbf{e}_2)+\alpha_2\beta_3(\mathbf{e}_2\times\mathbf{e}_3)\\
&\quad +\alpha_3\beta_1(\mathbf{e}_3\times\mathbf{e}_1)+\alpha_3\beta_2(\mathbf{e}_3\times\mathbf{e}_2)+\alpha_3\beta_3(\mathbf{e}_3\times\mathbf{e}_3)\\
&= \begin{vmatrix}\alpha_2 & \alpha_3\\ \beta_2 & \beta_3\end{vmatrix}\mathbf{e}_1+\begin{vmatrix}\alpha_3 & \alpha_1\\ \beta_3 & \beta_1\end{vmatrix}\mathbf{e}_2+\begin{vmatrix}\alpha_1 & \alpha_2\\ \beta_1 & \beta_2\end{vmatrix}\mathbf{e}_3.
\end{aligned}
$$

A számításban kihasználtuk az állítás előtt jelzett összefüggéseket, s hogy $\mathbf{e}_i\times\mathbf{e}_i=\mathbf{0}$. □

TÉTEL. **Kifejtési tétel**
Tetszőleges $\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}$ *szabadvektorokra*

$$(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times\mathbf{c}=(\mathbf{a},\mathbf{c})\mathbf{b}-(\mathbf{b},\mathbf{c})\mathbf{a}$$

és

$$\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c})=(\mathbf{a},\mathbf{c})\mathbf{b}-(\mathbf{a},\mathbf{b})\mathbf{c}$$

Bizonyítás. Az előző állítás jelöléseit használva legyenek $\mathbf{c}$ koordinátái $\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3$. A bizonyítás érdekében egyszerűen kiszámítjuk a bal- és jobboldalon szereplő vektorok koordinátáit. A baloldali vektor első koordinátája:

$$
\begin{vmatrix}
\begin{vmatrix}\alpha_3 & \alpha_1\\ \beta_3 & \beta_1\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}\alpha_1 & \alpha_2\\ \beta_1 & \beta_2\end{vmatrix}\\
\gamma_2 & \gamma_3
\end{vmatrix}
=(\alpha_3\beta_1-\alpha_1\beta_3)\gamma_3-(\alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1)\gamma_2.
$$

A jobboldal első koordinátája:

$$(\alpha_1\gamma_1+\alpha_2\gamma_2+\alpha_3\gamma_3)\beta_1-(\beta_1\gamma_1+\beta_2\gamma_2+\beta_3\gamma_3)\alpha_1.$$

Láthatjuk, hogy itt az 1. és 4. tag kiesik, a többi tag viszont éppen a baloldal első koordinátájának tagjait adja. Hasonlóan ellenőrizhető a többi koordináták egyenlősége is. □

TÉTEL. **Jacobi azonosság**
Tetszőleges $\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}$ *szabadvektorokra*

$$(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times\mathbf{c}+(\mathbf{b}\times\mathbf{c})\times\mathbf{a}+(\mathbf{c}\times\mathbf{a})\times\mathbf{b}=\mathbf{0}.$$

Bizonyítás. Alkalmazzuk a kifejtési tételt mindhárom tagra:

$$
\begin{aligned}
&(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times\mathbf{c}+(\mathbf{b}\times\mathbf{c})\times\mathbf{a}+(\mathbf{c}\times\mathbf{a})\times\mathbf{b}=\\
&(\mathbf{a},\mathbf{c})\mathbf{b}-(\mathbf{b},\mathbf{c})\mathbf{a}+(\mathbf{b},\mathbf{a})\mathbf{c}-(\mathbf{c},\mathbf{a})\mathbf{b}+(\mathbf{c},\mathbf{b})\mathbf{a}-(\mathbf{a},\mathbf{b})\mathbf{c}=\mathbf{0}.
\end{aligned}
$$

□

1.6. Szabadvektorok vegyes szorzata

Három szabadvektor vegyesszorzata a már megismert két szorzás segítségével adódik, ezért tulajdonságai azokéból könnyen adódnak majd.

DEFINÍCIÓ. $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) \stackrel{\text{def}}{=} (\mathbf{a} \times \mathbf{b}, \mathbf{c})$.

TÉTEL. *Három szabadvektor vegyesszorzata pontosan akkor nulla, ha a vektorok lineárisan függő vektorrendszert alkotnak.*

Bizonyítás. Tegyük fel először, hogy $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ lineárisan függő. Ekkor valamelyik, pl. $\mathbf{c}$ kifejezhető a másik kettővel: $\mathbf{c} = \alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b}$. Behelyettesítve a vegyesszorzat képletébe:

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}, \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}, \alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b}) = \alpha(\mathbf{a} \times \mathbf{b}, \mathbf{a}) + \beta(\mathbf{a} \times \mathbf{b}, \mathbf{b}) = 0.$$

Fordítva, ha $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = 0$, akkor $\mathbf{c}$ merőleges $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$-re, de ilyen $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ is, ezért egy síkkal párhuzamosak, tehát lineárisan függők. □

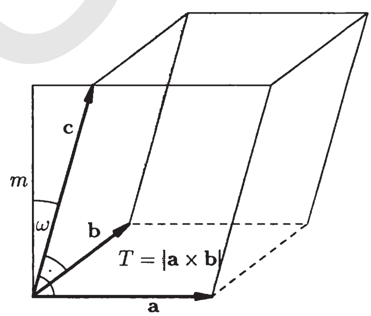
TÉTEL. *Legyenek az* $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ *szabadvektorok lineárisan függetlenek. Ekkor a vegyesszorzatuk értéke megegyezik a közös kezdőpontból indított reprezentánsaik által meghatározott paralelepipedon térfogatával, ha* $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ *pozitív irányítású. Negatív irányítású* $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ *vektorhármas esetén e térfogat* (-1)*-szerese lesz a vegyesszorzat.*

Bizonyítás. Csak pozitív irányítottságú lineárisan független vektorhármas esetén bizonyítunk. Ennek alapján a másik eset is könnyen adódik.

Nevezzük az $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ által kifeszített lapot a paralelepipedon alaplapjának. Ha ω jelöli a magasságnak $\mathbf{c}$-vel bezárt szögét, akkor a paralelepipedon magassága: $m = |\mathbf{c}| \cos\omega$. Az alaplap területe: $T = |\mathbf{a} \times \mathbf{b}|$. Így

$$V = T \cdot m = |\mathbf{a} \times \mathbf{b}| \cdot |\mathbf{c}| \cos\omega = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}, \mathbf{c}) = (\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}).$$

□



Most megadjuk a vegyesszorzás műveleti tulajdonságait:

TÉTEL. *A vegyesszorzat minden változójában additív és homogén, továbbá antiszimmetrikus (másszóval alternáló), azaz bármely két változó felcserélése esetén a vegyesszorzat értéke csak előjelet vált.*

Bizonyítás. Az additivitás és a homogenitás a skaláris és a vektoriális szorzás ilyen tulajdonságaiból következik. Például

$$(\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = ((\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2) \times \mathbf{b}, \mathbf{c}) = ((\mathbf{a}_1 \times \mathbf{b}) + (\mathbf{a}_2 \times \mathbf{b}), \mathbf{c})$$

$$= (\mathbf{a}_1 \times \mathbf{b}, \mathbf{c}) + (\mathbf{a}_2 \times \mathbf{b}, \mathbf{c}) = (\mathbf{a}_1, \mathbf{b}, \mathbf{c}) + (\mathbf{a}_2, \mathbf{b}, \mathbf{c}).$$

Az antiszimmetria igazolásához először figyeljük meg, hogy ha két szabadvektor azonos, akkor a vegyesszorzat értéke 0.

$$(\mathbf{a}, \mathbf{a}, \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \times \mathbf{a}, \mathbf{c}) = (\mathbf{0}, \mathbf{c}) = 0.$$

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{a}) = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}, \mathbf{a}) = 0,$$

hiszen $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ merőleges $\mathbf{a}$-ra.

Az első két változóra vonatkozó antiszimmetria azonnal adódik a vektoriális szorzás antiszimmetriájából:

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}, \mathbf{c}) = -(\mathbf{b} \times \mathbf{a}, \mathbf{c}) = -(\mathbf{b}, \mathbf{a}, \mathbf{c})$$

A második és harmadik vektor felcseréléséhez számítsuk ki a következőt:

$$0 = (\mathbf{a}, \mathbf{b} + \mathbf{c}, \mathbf{b} + \mathbf{c})$$

$$= (\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{b}) + (\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) + (\mathbf{a}, \mathbf{c}, \mathbf{b}) + (\mathbf{a}, \mathbf{c}, \mathbf{c}) = (\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) + (\mathbf{a}, \mathbf{c}, \mathbf{b}).$$

Innen kapjuk, hogy

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = -(\mathbf{a}, \mathbf{c}, \mathbf{b}).$$

□

A vektoriális szorzás és a skaláris szorzat kiszámítási módjából azonnal adódik az alábbi kiszámítási lehetőség a vegyesszorzatra is:

TÉTEL. *Ha az $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ szabadvektorok koordinátái egy pozitív irányítású ortonormált bázisra vonatkozóan $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$; $\beta_1, \beta_2, \beta_3$, illetve $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$, akkor*

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = \begin{vmatrix} \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_2 & \beta_3 \end{vmatrix} \gamma_1 - \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_3 \end{vmatrix} \gamma_2 + \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{vmatrix} \gamma_3 = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix}.$$

1.7. Egyenesek és síkok egyenletei

A térbeli egyenesek és síkok leírásához a koordinátarendszer fogalmát értelmezzük.

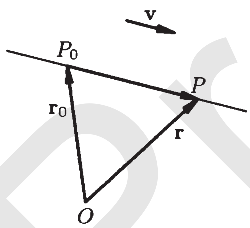
DEFINÍCIÓ. *Az euklideszi geometriai tér egy rögzített O pontjából és a szabadvektorok egy bázisából álló párját a tér* **koordinátarendszer***ének mondjuk. O-t origónak nevezzük. Amennyiben a bázis ortonormált, akkor a Descartes-féle koordinátarendszerről beszélünk.*

A koordinátarendszerek használatát egyrészt az teszi hasznossá, hogy az origó rögzítése által bijektív megfeleltetés alakul ki a tér pontjai és a szabadvektorok halmaza között. Ugyanis, tetszőleges $P \in \mathcal{E}$ ponthoz az $\overrightarrow{OP}$ vektort rendeljük, és fordítva egy $\mathbf{a} \in V(\mathcal{E})$ szabadvektorhoz az O-ból induló reprezentánsának végpontja tartozik. Másrészt a bázisvektorok segítségével a tér pontjaira vonatkozó összefüggéseket algebrai összefüggésekké lehet átalakítani.

Tekintsünk most egy egyenest a térben, s annak egy rögzített pontja legyen P_0, továbbá egy az egyenessel párhuzamos, de nem nullvektor legyen $\mathbf{v}$. Ezt a szabadvektort az egyenes **irányvektorá**nak mondjuk.

TÉTEL. *A tér egyeneseit, és csak azokat lehet előállítani* $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \lambda\mathbf{v}$ *alakban előálló szabadvektorok origóból induló reprezentánsainak végpontjaiként, ahol* $\mathbf{r}_0$ *az origóból az egyenes egy rögzített* P_0 *pontjába mutató vektor,* $\mathbf{v}$ *az egyenes egy irányvektora,* $\mathbf{r}$ *pedig az origóból az egyenes tetszőleges pontjába mutató vektor,* $\lambda \in \mathbb{R}$ *tetszőleges.*

Az egyenes ilyen előállítását **paraméteres vektorelőállítás**nak nevezik.



Bizonyítás. Ha egy egyenest tekintünk, s a jelzett adatokat, akkor az egyenes tetszőleges P pontja esetén $\overrightarrow{P_0P}$ párhuzamos az egyenessel, ezért van olyan λ, hogy $\overrightarrow{P_0P} = \lambda\mathbf{v}$. Ezért $\mathbf{r} = \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_0} + \overrightarrow{P_0P} = \mathbf{r}_0 + \lambda\mathbf{v}$.

Fordítva, ha egy előállítás adott tetszőleges $\mathbf{r}_0$ és $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ vektorokkal, akkor megkonstruálhatjuk a megfelelő egyenest: $\mathbf{r}_0$-nak (O, P_0) reprezentánsa végpontján keresztül átmenő $\mathbf{v}$-vel párhuzamos egyenest tekintjük. Ilyen egyenes egyértelműen létezik, s ennek éppen a megadott lesz a vektoros előállítása. □

Az $(O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ koordinátarendszerre vonatkozóan a pontokhoz koordináták rendelhetők, mégpedig a P pont koordinátáinak az $\overrightarrow{OP}$ vektor koordinátáit tekintjük.

Ha koordinátáikkal adottak a pontok, és a szabadvektorok:

$$P_0\,(x_0, y_0, z_0), \qquad P\,(x, y, z), \qquad \mathbf{v}\,(v_1, v_2, v_3),$$

akkor a fenti vektoregyenlet az alábbi három, koordinátákkal kifejezett egyenlet rendszerével lesz ekvivalens:

$$\begin{aligned} x &= x_0 + \lambda v_1 \\ y &= y_0 + \lambda v_2 \\ z &= z_0 + \lambda v_3. \end{aligned}$$

Ezt szokták nevezni az egyenes koordinátás egyenletrendszerének. Ha $\mathbf{v}$ szabadvektor egyik koordinátája sem nulla, azaz egyik koordinátasíkkal sem párhuzamos az egyenes, akkor ez az egyenletrendszer átalakítható a következővé:

$$\frac{x-x_0}{v_1}=\frac{y-y_0}{v_2}=\frac{z-z_0}{v_3}.$$

Megjegyezzük, hogy ha pl. $v_1=0$, akkor az egyenletrendszer alakja

$$x=x_0,\quad \frac{y-y_0}{v_2}=\frac{z-z_0}{v_3},$$

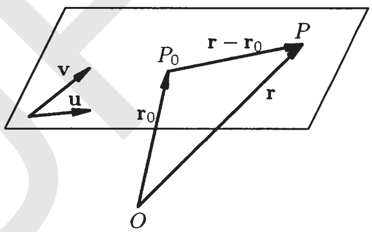
és ha $v_1=0$, $v_2=0$, akkor pedig

$$x=x_0,\quad y=y_0.$$

Most a sík paraméteres vektorelőállítása következik.

TÉTEL. *A tér síkjait, és csak azokat lehet előállítani* $\mathbf{r}=\mathbf{r}_0+\lambda\mathbf{u}+\mu\mathbf{v}$ *alakban előálló szabadvektorok origóból induló reprezentánsainak végpontjaiként, ahol* $\mathbf{r}_0$ *az origóból a sík egy rögzített* P_0 *pontjába mutató vektor,* $\mathbf{u}$ *és* $\mathbf{v}$ *a sík két egymással nem párhuzamos irányvektora,* $\mathbf{r}$ *pedig az origóból a sík tetszőleges pontjába mutató vektor,* $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$ *tetszőleges.*

A bizonyítás az egyenes esetéhez hasonlóan történhet.



A paraméteres koordinátás előállítás:

$$\begin{aligned} x &= x_0+\lambda u_1+\mu v_1\\ y &= y_0+\lambda u_2+\mu v_2\\ z &= z_0+\lambda u_3+\mu v_3. \end{aligned}$$

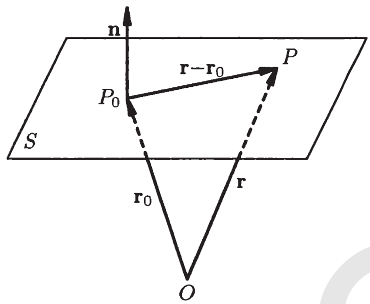
A skaláris szorzat felhasználásával leírva a síkokat, kapjuk a síkok **Hesse-féle egyenletét.** Általában egy alakzat egyenletén olyan egyenletet értünk, amelyet az alakzat pontjainak koordinátái kielégítenek, de az alakzathoz nem tartozó pontok koordinátái nem.

Egy adott S sík esetében egy arra merőleges, nem nulla vektort a **sík normálvektor**ának nevezünk.

TÉTEL. *Ha rögzítve van a térben az origó, akkor a tér síkjai, és csak azok rendelkeznek*

$$(\mathbf{n}, \mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = 0$$

alakú egyenlettel, ahol $\mathbf{r}_0$ *az origóból a sík egy rögzített* P_0 *pontjába mutató vektor,* $\mathbf{n}$ *a sík egy normálvektora,* $\mathbf{r}$ *pedig az origóból a sík tetszőleges pontjába mutató vektor.*



Bizonyítás. Ha adott egy S sík, továbbá egy rögzített P_0 pontja és egy $\mathbf{n}$ normálvektora, akkor a sík egy P pontja — és csak azok esetén — $\overrightarrow{P_0P} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_0$ párhuzamos a síkkal, azaz merőleges az $\mathbf{n}$ normálvektorra:

$$(\mathbf{n}, \mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = 0.$$

Fordítva, ha egy egyenlet adott tetszőleges $\mathbf{r}_0$ és $\mathbf{n} \neq \mathbf{0}$ vektorral, akkor megkonstruálhatjuk a megfelelő síkot: ez az $\mathbf{r}_0$ O-ból induló reprezentánsának végpontján átmenő $\mathbf{n}$-re merőleges sík lesz. □

Ha a normálvektor koordinátáit (n_1, n_2, n_3)-mal jelöljük, akkor a Hesse-féle egyenlet koordinátákkal kifejezett alakja:

$$n_1(x - x_0) + n_2(y - y_0) + n_3(z - z_0) = 0.$$

Ezt gyakran átrendezzük az

$$Ax + By + Cz = D$$

alakba, jelezve azt, hogy egy tetszőleges ilyen egyenlet megadásával, — ahol $(A, B, C) \neq (0, 0, 0)$ — minden esetben síkot kapunk.

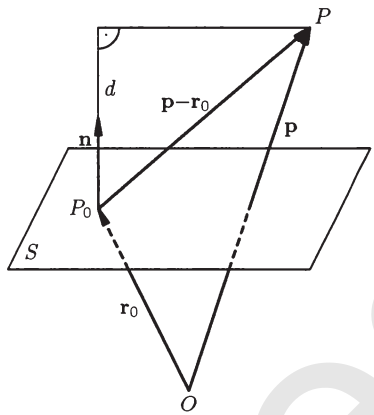
Amennyiben a normálvektor egységvektor is, akkor a Hesse-féle egyenletet **normálegyenlet**nek nevezik.

Egyetlen alkalmazásként egy pontnak egy síktól való távolságát fejezzük ki: Ha P egy tetszőleges pont a térben, koordinátái (x, y, z), és az S síknak egy normálegyenlete adott, akkor a pont és sík távolsága a $\overrightarrow{P_0P} = \mathbf{p} - \mathbf{r}_0$ vektornak az $\mathbf{n}$ (egységnyi hosszú) normálvektorra eső merőleges vetületének a hossza:

$$d(P, S) = |(\mathbf{n}, \mathbf{p} - \mathbf{r}_0)|.$$

Koordinátákkal kifejezve:

$$d(P,S) = |n_1(x - x_0) + n_2(y - y_0) + n_3(z - z_0)|.$$



2. Determinánsok

2.1. A determináns értelmezése

A determinánsok a mátrixok mellett a lineáris algebrai számítások alapvető segédeszközei. Mivel a mátrixszámítás egyes részei felhasználják a determinánsokat, célszerű ezt a témakört minél hamarabb tárgyalni.

Az alábbiakban $\mathbb{T}$ egy tetszőleges nullkarakterisztikájú testet jelöl (ld. Függelék). A következő fejezetekben, mindaddig, míg lehetséges, állításainkat ezen tetszőleges test felett fogalmazzuk meg. Az alkalmazásokban $\mathbb{T}$ legtöbbször a valós vagy komplex számtestet jelenti.

DEFINÍCIÓ. *Legyenek* α_{ij} $(1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n)$ *egy* $\mathbb{T}$ *test elemei. Akkor az*

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & & \alpha_{mn} \end{pmatrix}$$

számtáblázatot $m \times n$ **típusú mátrix***nak nevezzük. Az* A *mátrix* **főátló***ja az* $\alpha_{11}, \alpha_{22}, \alpha_{33}, \ldots$ *átló,* **mellékátló***ja* $\alpha_{m1}, \alpha_{m-1,2}, \alpha_{m-2,3}, \ldots$. *Az* A *mátrix* A^t **transzponáltjá***t az* A*-ból a főátlóra való tükrözéssel kapjuk:*

$$A^t = \begin{pmatrix} \alpha_{11} \alpha_{21} \ldots & \alpha_{m1} \\ \alpha_{12} \alpha_{22} \ldots & \alpha_{m2} \\ \vdots \quad \vdots & \vdots \\ \vdots \quad \vdots & \vdots \\ \vdots \quad \vdots & \vdots \\ \alpha_{1n} \alpha_{2n} \ldots & \alpha_{mn} \end{pmatrix}$$

JELÖLÉSEK.

1. Az α_{ij} elemekkel rendelkező $m \times n$ típusú A mátrixot $A = (\alpha_{ij})_{m \times n}$ módon is szokták jelölni. Az A mátrix i-edik sor j-edik elemének jelölésére $(A)_{ij}$ is használatos.

2. Az A mátrix i-edik **sora** $(1 \leq i \leq m)$

$$A_i = (\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \ldots, \alpha_{in})$$

j-edik **oszlopa** $(1 \leq j \leq n)$

$$A^{(j)} = \begin{pmatrix} \alpha_{1j} \\ \alpha_{2j} \\ \vdots \\ \alpha_{mj} \end{pmatrix}.$$

Ennek megfelelően az

$$A = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_m \end{pmatrix}$$

és

$$A = (A^{(1)}, A^{(2)}, \ldots, A^{(n)})$$

jelölés is szokásos.

A determináns egy szám, mely egy $n \times n$ típusú mátrixhoz van rendelve.

DEFINÍCIÓ. *Legyenek* $\alpha_{ij}(1 \leq i, j \leq n)$ *egy* $\mathbb{T}$ *test elemei. Az*

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \ldots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}$$

$n \times n$ típusú (négyzetes) mátrix **determinánsa**

$$D = |A| = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \ldots & \alpha_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$= \sum_{(i_1,i_2,\ldots,i_n)\in P_n} (-1)^{I(i_1,i_2,\ldots,i_n)} \alpha_{1i_1}\alpha_{2i_2}\ldots\alpha_{ni_n}$$

*ahol P_n jelöli az $(1, 2, \ldots, n)$ összes permutációinak halmazát. Ha az A mátrix $n \times n$ típusú, akkor D-t n-***edrendű determinánsnak** *nevezzük.*

MEGJEGYZÉS.

1. Más szóval képezzük az A mátrix elemeiből az összes lehetséges n tényezős szorzatot úgy, hogy ezen szorzatokban minden sorból és minden oszlopból pontosan egy elem szerepel, majd ezen szorzatokat megfelelő előjelekkel ellátva összeadjuk.

2. A determináns definíciója és tulajdonságainak bizonyítása feltételezik a permutációk alapvető tulajdonságainak ismeretét. Ezek megtalálhatóak a 12.2. részben.

LEMMA. **Sarrus szabály**

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{vmatrix} = \alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{21}\alpha_{12}$$

továbbá

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= \alpha_{11}\alpha_{22}\alpha_{33} + \alpha_{12}\alpha_{23}\alpha_{31} + \alpha_{13}\alpha_{21}\alpha_{32} - \alpha_{31}\alpha_{22}\alpha_{13} - \alpha_{32}\alpha_{23}\alpha_{11} - \alpha_{33}\alpha_{21}\alpha_{12}$$

Bizonyítás. A determináns definíciója alapján látható. □

MEGJEGYZÉS. A Sarrus szabály szerint másod- és harmadrendű determinánsok értéke kiszámítható úgy, hogy a főátlóval párhuzamos szorzatokat pozitív, a mellékátlóval párhuzamos szorzatokat negatív előjellel vesszük. Fontos megjegyezni, hogy az analóg módszer magasabb rendű determinánsok esetén téves eredményre vezet.

2.2. A determináns elemi tulajdonságai

Az alábbiakban pontokba szedve felsoroljuk a determináns kiszámításának elemi tulajdonságait.

0. Ha az A mátrix egy sorának minden eleme nulla, akkor a mátrix determinánsa is nulla.

Bizonyítás. A determináns definíciójából közvetlenül látható: a szereplő összeg minden tagjában egy szorzótényező nulla. □

1. Transzponált mátrix determinánsa megegyezik az eredeti mátrix determinánsával.

Bizonyítás. Tekintsük a

$$D = |A| = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & & \alpha_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$= \sum_{(i_1,i_2,\dots,i_n)\in P_n} (-1)^{I(i_1,i_2,\dots,i_n)} \alpha_{1i_1}\alpha_{2i_2}\dots\alpha_{ni_n}$$

és a

$$D' = |A^t| = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} & & \alpha_{n1} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & & \alpha_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{1n} & \alpha_{2n} & & \alpha_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$= \sum_{(j_1,j_2,\dots,j_n)\in P_n} (-1)^{I(j_1,j_2,\dots,j_n)} \alpha_{j_1 1}\alpha_{j_2 2}\dots\alpha_{j_n n}$$

determinánsokat. Mindkettőben ugyanazon elemekből képzett n tényezős szorzatok szerepelnek, a szorzatok mindkettőben A minden sorából és minden oszlopából pontosan egy elemet tartalmaznak. Ilyen módon tehát a D-ben szereplő minden n tényezős szorzatnak megfelel D' egy n tényezős szorzata, amely ugyanazon tényezőket tartalmazza, csak más sorrendben. Meg kell vizsgálni, hogy ezen egymásnak megfelelő szorzatok azonos előjellel vannak-e véve.

Tegyük fel, hogy $\alpha_{1i_1}\alpha_{2i_2}\ldots\alpha_{ni_n}$ és $\alpha_{j_11}\alpha_{j_22}\ldots\alpha_{j_nn}$ ugyanazon tényezőket tartalmazza, csak más sorrendben. Ez azt jelenti, hogy miközben a $(j_1, j_2, \ldots, j_n)$ sorindexeket átrendezzük úgy, hogy $(1, 2, \ldots, n)$ sorrendben kövessék egymást, közben az $(1, 2, \ldots, n)$ oszlopindexek $(i_1, i_2, \ldots, i_n)$ sorrendbe kerülnek. Tehát

$$\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & \ldots & j_n \\ 1 & 2 & \ldots & n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & & n \\ i_1 & i_2 & & i_n \end{pmatrix}$$

vagyis az $(i_1, i_2, \ldots, i_n)$ és $(j_1, j_2, \ldots, j_n)$ permutációk egymás inverzei. Ekkor azonban paritásuk megegyezik (ld. 12.2. rész), tehát D-ben és D'-ben az egymásnak megfelelő szorzatok azonos előjellel vannak véve. □

2. Ha a determináns egy sorában minden elem két másik összegére bomlik, akkor a determináns két determináns összegére bontható, pontosabban

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & & \alpha_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \beta_{i1}+\gamma_{i1} & \beta_{i2}+\gamma_{i2} & & \beta_{in}+\gamma_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & & \alpha_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & & \alpha_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \beta_{i1} & \beta_{i2} & & \beta_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \ldots & \alpha_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & & \alpha_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \gamma_{i1} & \gamma_{i2} & & \gamma_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \ldots & \alpha_{nn} \end{vmatrix}$$

feltéve, hogy az i-ediktől eltekintve minden más sorban az eredeti elemek szerepelnek.

Bizonyítás.

$$\sum_{(j_1,\ldots,j_i,\ldots,j_n)\in P_n} (-1)^{I(j_1,\ldots,j_i,\ldots,j_n)}\alpha_{1j_1}\ldots(\beta_{ij_i}+\gamma_{ij_i})\ldots\alpha_{nj_n}$$

$$= \sum_{(j_1,\ldots,j_i,\ldots,j_n)\in P_n} (-1)^{I(j_1,\ldots,j_i,\ldots,j_n)}\alpha_{1j_1}\ldots\beta_{ij_i}\ldots\alpha_{nj_n}$$

$$+ \sum_{(j_1,\ldots,j_i,\ldots,j_n)\in P_n} (-1)^{I(j_1,\ldots,j_i,\ldots,j_n)}\alpha_{1j_1}\ldots\gamma_{ij_i}\ldots\alpha_{nj_n}$$

□

3. Ha egy $n \times n$ típusú mátrix két sorát felcseréljük, akkor a mátrix determinánsa (-1)-szeresére változik.

Bizonyítás. Jelölje B azt a mátrixot, melyet az A mátrixból a k-adik és l-edik sorok felcserélésével kapunk. A determináns definíciója szerint

$$|A| = \begin{vmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_k \\ \vdots \\ A_l \\ \vdots \\ A_n \end{vmatrix} =$$

$$= \sum_{(i_1,\ldots,i_k,\ldots,i_l\ldots,i_n)\in P_n} (-1)^{I(i_1,\ldots,i_k,\ldots,i_l\ldots,i_n)} \alpha_{1i_1}\ldots\alpha_{ki_k}\ldots\alpha_{li_l}\ldots\alpha_{ni_n},$$

másrészt

$$|B| = \begin{vmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_l \\ \vdots \\ A_k \\ \vdots \\ A_n \end{vmatrix} =$$

$$= \sum_{(i_1,\ldots,i_l,\ldots,i_k\ldots,i_n)\in P_n} (-1)^{I(i_1,\ldots,i_l,\ldots,i_k\ldots,i_n)} \alpha_{1i_1}\ldots\alpha_{li_l}\ldots\alpha_{ki_k}\ldots\alpha_{ni_n}.$$

Nyilvánvalóan a két összegben szereplő szorzatok csak a tényezők sorrendjében térnek el egymástól. Mivel elemcserénél a permutációk paritása ellenkezőjére változik (ld. 12.2. rész), az $(i_1,\ldots,i_l,\ldots,i_k,\ldots,i_n)$ és $(i_1,\ldots,i_k,\ldots,i_l,\ldots,i_n)$ permutációk paritása ellenkező, a megfelelő szorzatok ellentétes előjellel szerepelnek. □

4. Ha egy négyzetes mátrix két sora megegyezik, akkor a mátrix determinánsa nulla.

Bizonyítás. Ha a két azonos sort megcseréljük, akkor egyrészt a determináns előjelet vált, másrészt (a sorok azonos volta miatt) nem változik. Így $D = -D$, tehát $D = 0$. □

5. Ha egy négyzetes mátrix egy sorának minden eleméből egy konstans szorzó kiemelhető, akkor az a mátrix determinánsából is kiemelhető, pontosabban

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & & \alpha_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \gamma \cdot \alpha_{i1} & \gamma \cdot \alpha_{i2} & & \gamma \cdot \alpha_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & & \alpha_{nn} \end{vmatrix} = \gamma \cdot \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & & \alpha_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{i1} & \alpha_{i2} & & \alpha_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & & \alpha_{nn} \end{vmatrix}$$

feltéve, hogy a többi sorokban az eredeti elemek szerepelnek.

Bizonyítás. A bal és jobb oldalon álló kifejezések értéke

$$\sum_{(j_1,\ldots,j_i,\ldots,j_n)\in P_n} (-1)^{I(j_1,\ldots,j_i,\ldots,j_n)} \alpha_{1j_1} \ldots (\gamma \cdot \alpha_{ij_i}) \ldots, \alpha_{nj_n}$$

$$= \gamma \cdot \sum_{(j_1,\ldots,j_i,\ldots,j_n)\in P_n} (-1)^{I(j_1,\ldots,j_i,\ldots,j_n)} \alpha_{1j_1} \ldots \alpha_{ij_i} \ldots \alpha_{nj_n}$$

alapján egyenlő. □

6. Ha egy mátrixban egy sor elemei rendre egy másik sor megfelelő elemeinek konstansszorosai, akkor a mátrix determinánsa nulla, vagyis

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & & \alpha_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \gamma\alpha_{j1} & \gamma\alpha_{j2} & & \gamma\alpha_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{j1} & \alpha_{j2} & & \alpha_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & & \alpha_{nn} \end{vmatrix} = 0$$

Bizonyítás. Következik az 4. és 5. tulajdonságokból. □

Megjegyzés. Hasonlóan belátható, hogy a determináns értéke nulla, ha valamelyik sora a többi sorok lineáris kombinációjaként áll elő, vagyis a többi sorok konstans szorzókkal súlyozott összegével egyenlő.

7. A determináns értéke nem változik, ha egy sorához hozzáadjuk egy másik sorának konstansszorosát, pontosabban

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & & \alpha_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{i1}+\gamma\alpha_{j1} & \alpha_{i2}+\gamma\alpha_{j2} & & \alpha_{in}+\gamma\alpha_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{j1} & \alpha_{j2} & & \alpha_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & & \alpha_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & & \alpha_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{i1} & \alpha_{i2} & & \alpha_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{j1} & \alpha_{j2} & & \alpha_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & & \alpha_{nn} \end{vmatrix}$$

Bizonyítás. A 2.,6. tulajdonságok miatt a bal oldali determináns értéke

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & & \alpha_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{i1} & \alpha_{i2} & & \alpha_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{j1} & \alpha_{j2} & & \alpha_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & & \alpha_{nn} \end{vmatrix} + \gamma \cdot \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & & \alpha_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{j1} & \alpha_{j2} & & \alpha_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{j1} & \alpha_{j2} & & \alpha_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & & \alpha_{nn} \end{vmatrix}$$

ahol a második tag 0. □

MEGJEGYZÉS. Ez a tulajdonság hasonló módon több összeadandóra is igazolható: a determináns értéke nem változik, ha egy sorához hozzaádjuk többi sorának lineáris kombinációját, vagyis többi sorának konstans szorzókkal súlyozott összegét.

8. Az 0,2–7 tulajdonságok érvényesek oszlopokra is.

Bizonyítás. Következik az 1. tulajdonságból. Transzponáláskor a sorok és oszlopok szerepe megcserélődik. □

2.3. A determináns kifejtése

A definíció alapján magasabbrendű determinánsokat nehezen lehet kiszámítani. A következőkben a determináns kiszámítására más, egyszerűbb módszereket tárgyalunk, melyek természetesen felhasználják a determináns kiszámításának fenti elemi tulajdonságait is.

DEFINÍCIÓ. *Legyen $A = (\alpha_{ij})$ egy $n \times n$ típusú mátrix ($\alpha_{ij} \in \mathbb{T}$). A $D = |A|$ determináns α_{ij}* **eleméhez tartozó D_{ij} aldeterminráns** *annak az $(n-1)$-edrendű* *mátrixnak a determinánsa, mely A-ból az i-edik sor és a j-edik oszlop törlésével keletkezik:*

$$D_{ij} = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & & \alpha_{1,j-1} & \alpha_{1,j+1} & & \alpha_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{i-1,1} & \dots & \alpha_{i-1,j-1} & \alpha_{i-1,j+1} & & \alpha_{i-1,n} \\ \alpha_{i+1,1} & \dots & \alpha_{i+1,j-1} & \alpha_{i+1,j+1} & & \alpha_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{n1} & \dots & \alpha_{n,j-1} & \alpha_{n,j+1} & & \alpha_{nn} \end{vmatrix}$$

Az α_{ij} **elemhez tartozó algebrai aldetermináns**

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} D_{ij}.$$

LEMMA. *Ha az A mátrix i-edik sorában az α_{ij} elemet kivéve minden más elem nulla, akkor $|A| = \alpha_{ij} A_{ij}$.*

MEGJEGYZÉS. Az állítás természetesen oszlopokra is igaz.

Bizonyítás.

I. Először az $i = j = 1$ esetre bizonyítjuk az állítást.

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & 0 & & 0 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & & \alpha_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{(i_1,i_2,\dots,i_n)\in P_n} (-1)^{I(i_1,i_2,\dots,i_n)} \alpha_{1i_1}\alpha_{2i_2}\dots\alpha_{ni_n}$$

$$= \sum_{(1,i_2,\dots,i_n)\in P_n} (-1)^{I(1,i_2,\dots,i_n)} \alpha_{11}\alpha_{2i_2}\dots\alpha_{ni_n}$$

mivel $i_1 \neq 1$-re $\alpha_{1i_1} = 0$. Ekkor azonban az összegből α_{11} kiemelhető, és $(i_2, \dots, i_n)$ az $(n-1)$ elemű $(2, \dots, n)$ halmaz permutációit futja be. Tehát a fenti összeg

$$\alpha_{11} \sum_{(i_2,\dots,i_n)\in P_{n-1}} (-1)^{I(i_2,\dots,i_n)} \alpha_{2i_2}\dots\alpha_{ni_n} = \alpha_{11} \begin{vmatrix} \alpha_{22} & & \alpha_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} \end{vmatrix}$$

alakba írható, ahol a szereplő determináns éppen $D_{11} = A_{11}$.

II. Most tekintsük a tetszőleges i, j esetét. Induljunk ki az

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & & \alpha_{1,j-1} & \alpha_{1j} & \alpha_{1,j+1} & & \alpha_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{i-1,1} & & \alpha_{i-1,j-1} & \alpha_{i-1,j} & \alpha_{i-1,j+1} & & \alpha_{i-1,n} \\ 0 & & 0 & \alpha_{ij} & 0 & & 0 \\ \alpha_{i+1,1} & & \alpha_{i+1,j-1} & \alpha_{i+1,j} & \alpha_{i+1,j+1} & & \alpha_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{n1} & & \alpha_{n,j-1} & \alpha_{nj} & \alpha_{n,j+1} & & \alpha_{nn} \end{vmatrix}$$

determinánsból. A j edik oszlopot minden lépésben az előző oszloppal megcserélve $(j-1)$ lépésben elérhetjük, hogy az első helyre kerüljön. Hasonlóan, az i-edik sort minden lépésben az előző sorral megcserélve $(i-1)$ lépésben elérhetjük, hogy az első helyre kerüljön. Mivel minden sor- ill. oszlopcsere alkalmával a determináns értéke (-1)-szeresére változik, az előző determináns értéke

$$(-1)^{j-1+i-1}\begin{vmatrix} \alpha_{ij} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_{1j} & \alpha_{11} & \alpha_{1,j-1} & \alpha_{1,j+1} & \alpha_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_{i-1,j} & \alpha_{i-1,1} & \alpha_{i-1,j-1} & \alpha_{i-1,j+1} & \alpha_{i-1,n} \\ \alpha_{i+1,j} & \alpha_{i+1,1} & \alpha_{i+1,j-1} & \alpha_{i+1,j+1} & \alpha_{i+1,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_{nj} & \alpha_{n1} & \alpha_{n,j-1} & \alpha_{n,j+1} & \alpha_{nn} \end{vmatrix}.$$

Ezen determináns első sor első helyén álló α_{ij} eleméhez tartozó aldeterminánsa éppen az eredeti A mátrix i-edik sor j-edik eleméhez tartozó D_{ij} aldetermináns. Ezért a fenti kifejezés az I. pont szerint éppen $(-1)^{i+j}\alpha_{ij}D_{ij} = \alpha_{ij}A_{ij}$. □

TÉTEL. **Kifejtési tétel**
Egy determináns értékét kiszámíthatjuk úgy, hogy egy sorának minden elemét megszorzunk a hozzá tartozó algebrai aldeterminánssal, és a keletkezett szorzatokat összeadjuk.

MEGJEGYZÉS.

1. Az állítás hasonlóképpen igaz oszlopokra is.
2. A kifejtési tétel képletben $(1 \leq i \leq n)$

$$|A| = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ik}A_{ik} = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ki}A_{ki}.$$

Bizonyítás. Előző Lemmánk és a determináns additív tulajdonsága miatt

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_{i1} & \alpha_{i2} & \alpha_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \alpha_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_{i1} & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \alpha_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \alpha_{i2} & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \alpha_{nn} \end{vmatrix} +$$

$$+\ldots+\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & & \alpha_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & & \alpha_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \ldots & \alpha_{nn} \end{vmatrix} = \alpha_{i1}A_{i1} + \alpha_{i2}A_{i2} + \ldots + \alpha_{in}A_{in}.$$

□

TÉTEL. **Ferde kifejtési tétel**
Ha determináns egy sorának minden elemét megszorzunk egy másik sor megfelelő eleméhez tartozó algebrai aldeterminánssal és a szorzatokat összeadjuk, akkor nullát kapunk.

MEGJEGYZÉS.

1. Az állítás hasonló módon érvényes oszlopokra is.
2. A ferde kifejtési tétel képletben: ha $i \neq j$, akkor

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_{ik}A_{jk} = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ki}A_{kj} = 0.$$

Bizonyítás. Tekintsük a

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{i1} & \alpha_{i2} & & \alpha_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{i1} & \alpha_{i2} & & \alpha_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \ldots & \alpha_{nn} \end{vmatrix}$$

determinánst, ahol a j-edik sor megegyezik az i-edik sorral. Ezen determináns értéke a determináns elemi tulajdonságai szerint 0. Másrészt, a determinánst a j-edik sora szerint kifejtve éppen a $\sum_{k=1}^{n} \alpha_{ik}A_{jk}$ összeget kapjuk. □

DEFINÍCIÓ. **Felső trianguláris mátrix***nak nevezünk egy olyan négyzetes mátrixot, melyben a főátló alatt minden elem nulla:*

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & & \alpha_{1n} \\ 0 & \alpha_{22} & & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}$$

Alsó trianguláris mátrix*nak nevezünk egy olyan négyzetes mátrixot, melyben a főátló fölött minden elem nulla:*

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & 0 & & 0 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & & \alpha_{nn} \end{pmatrix}$$

TÉTEL. *Felső vagy alsó trianguláris mátrix determinánsa megegyezik a főátlóbeli elemek szorzatával.*

Bizonyítás. A felső trianguláris mátrixot első oszlopa szerint kifejtve

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & & \alpha_{1n} \\ 0 & \alpha_{22} & \alpha_{23} & & \alpha_{2n} \\ 0 & 0 & \alpha_{33} & & \alpha_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & & \alpha_{nn} \end{vmatrix} = \alpha_{11} \begin{vmatrix} \alpha_{22} & \alpha_{23} & & \alpha_{2n} \\ 0 & \alpha_{33} & & \alpha_{3n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & & \alpha_{nn} \end{vmatrix}$$

Az eljárást ismételve kapjuk a bizonyítandó állítást. Alsó trianguláris mátrix esetén a kifejtést sorok szerint végezzük. □

2.4. Eliminációs módszer determinánsok kiszámítására

A determináns kiszámításának elemi tulajdonágait felhasználva a mátrix felső trianguláris alakúra hozható, ilyen mátrixok determinánsa pedig a fentiek szerint könnyen meghatározható. Innen ered a determinánsok kiszámításának gyorsasága miatt gyakorlatban legtöbbször használt módszere.

Tekintsük a determináns első oszlopát. Ha abban minden elem nulla, akkor a determináns értéke nulla. Ha van nem nulla elem, akkor sorok cseréjével elérhető, hogy az első sor első eleme ne legyen nulla (a sor cserénél fellépő előjelváltásra természetesen tekintettel kell lenni). Ezek után az első sor megfelelő konstansszorosait a második, harmadik, stb., utolsó sorokhoz adva elérhetjük, hogy az első oszlop második, harmadik, stb., utolsó eleme nullává váljon. Tekintsük most a második oszlopot. Ha ebben a második, harmadik, stb., utolsó elemek mindegyike nulla, akkor a determináns értéke nulla, ugyanis az első oszlop arányos a második oszloppal. Ha van nem nulla elem, akkor esetleg sorcserével elérhető, hogy a második sor második eleme ne legyen nulla. Ezután a második sor megfelelő konstansszorosait a harmadik, stb., utolsó sorokhoz adva elérhető, hogy a második oszlop harmadik, stb., utolsó eleme nullává váljon. Hasonlóképpen folytatjuk az eljárást a harmadik, stb., utolsó oszlopokkal, végül a mátrixunk felső trianguláris alakú lesz.

2.5. Laplace-féle kifejtési tétel

A Laplace-féle kifejtési tétel az előző részben szerepelt kifejtési tétel általánosítása. Tárgyalásához néhány fogalom bevezetésére van szükségünk.

DEFINÍCIÓ. *Legyen D az $n \times n$ típusú A mátrix determinánsa. A D determináns egy k-adrendű d* **aldeterminánsát** *úgy kapjuk, hogy az A mátrixban kijelölünk k db sort és k db oszlopot, és vesszük a kijelölt sorok és oszlopok metszéspontjaiban álló elemek által alkotott $k \times k$ típusú mátrix determinánsát.*

A D determináns d **aldeterminánsához tartozó d^*aldetermináns** *azon $(n-k) \times (n-k)$ típusú mátrix determinánsa, melynek elemei nem szerepelnek a kijelölt sorokban, ill. oszlopokban.*

Ha a kijelölt sorok indexei $i_1, \ldots, i_k$ a kijelölt oszlopok indexei $j_1, \ldots, j_k$, akkor a d **aldeterminánshoz tartozó algebrai aldetermináns**

$$d^+ = (-1)^{i_1+\ldots+i_k+j_1+\ldots+j_k} d^*$$

MEGJEGYZÉS. Elsőrendű aldeterminánshoz tartozó aldetermináns, ill. algebrai aldetermináns éppen az illető elemhez tartozó aldetermináns, ill. algebrai aldetermináns.

LEMMA. *Legyen D determináns, d egy aldeterminánsa, d^+ pedig a d-hez tartozó algebrai aldetermináns. Mindegyik determináns értékét tekintsük a determináns eredeti definíciójának megfelelő összeg alakban. Akkor a d-beli összeg tetszőleges tagját a d^+-beli összeg egy tetszőleges tagjával megszorozva megkapjuk a D-beli összeg egy tagját.*

Bizonyítás.

I. A bizonyítást először az $i_1 = j_1 = 1, \ldots, i_k = j_k = k$ esetre végezzük el.

Legyen $(l_1, \ldots, l_k)$ az $(1, \ldots, k)$ egy tetszőleges permutációja. A d egy tagja akkor

$$(-1)^{I(l_1,\ldots,l_k)} \alpha_{1l_1} \ldots \alpha_{kl_k}$$

alakban írható fel.

Legyen $(l_{k+1}, \ldots, l_n)$ a $(k+1, \ldots, n)$ egy tetszőleges permutációja. A d^+ (mely $(1+\ldots+k)+(1+\ldots+k)$ páros volta miatt megegyezik d^*-gal) egy tagja akkor

$$(-1)^{I(l_{k+1},\ldots,l_n)} \alpha_{k+1,l_{k+1}} \cdots \alpha_{nl_n}$$

alakban írható fel.

Ezek szorzata éppen

$$(-1)^{I(l_1,\ldots,l_k)+I(l_{k+1},\ldots,l_n)} \alpha_{1l_1} \ldots \alpha_{kl_k} \alpha_{k+1,l_{k+1}} \cdots \alpha_{nl_n}$$

ami

$$I(l_1, \ldots, l_k) + I(l_{k+1}, \ldots, l_n) = I(l_1, \ldots, l_k, l_{k+1}, \ldots, l_n)$$

miatt éppen a D egy tagja. Az inverziók számára vonatkozó utóbbi egyenlőség abból következik, hogy $(l_1, \dots, l_k)$ egyike sem lehet inverzióban az $(l_{k+1}, \dots, l_n)$ valamelyikével.

II. Tekintsük most az általános esetet, amikor a kiválasztott sorok $i_1, \dots, i_k$ és a kiválasztott oszlopok $j_1, \dots, j_k$ indexei tetszőlegesek.

Az i_1-edik sort minden lépésben az előző sorral megcserélve $(i_1 - 1)$ lépésben elérhetjük, hogy az i_1-edik sor az első helyre kerüljön. Utána az i_2-edik sort minden lépésben az előzővel megcserélve $(i_2 - 1)$ lépésben elérhetjük, hogy az i_2-edik sor a második helyre kerüljön. Hasonlóképpen járunk el a többi kiválasztott sor esetén is. A kiválasztott $j_1, \dots, j_k$-adik oszlopokat hasonló oszlopcserékkel az eslő k helyre hozhatjuk. Így összesen

$$t = (i_1 - 1) + \ldots + (i_k - k) + (j_1 - 1) + \ldots + (j_k - k)$$

sor ill. oszlopcsere árán elérhetjük, hogy a kiválasztott sorok és oszlopok az első k helyen legyenek. Az eredeti D determinánsból eközben egy olyan D_0 determináns alakul ki, melyben a kiválasztott sorok és oszlopok az első k helyen vannak és

$$D = (-1)^t D_0 = (-1)^{i_1 + \ldots + i_k + j_1 + \ldots + j_k} D_0.$$

Most hogyha α a d-nek egy tagja, β a d^*-nak egy tagja, akkor I. miatt $\alpha\beta$ tagja D_0-nak és az előző egyenlőség miatt

$$(-1)^{i_1 + \ldots + i_k + j_1 + \ldots + j_k} \alpha\beta$$

tagja D-nek. □

Tétel. **Laplace–féle kifejtési tétel.**
Legyen D egy determináns. Válasszunk ki belőle tetszőlegesen k db sort. Ezen sorok segítségével képezzük az összes lehetséges k-adrendű aldeterminánsokat. Ha minden ilyen aldeterminánst megszorzunk a hozzá tartozó algebrai aldeterminánssal és a szorzatokat összeadjuk, akkor megkapjuk D értékét.

Megjegyzés.

1. Ha $k = 1$, akkor a Laplace–féle kifejtési tételből a kifejtési tétel következik.

2. A Laplace–féle kifejtési tétel képletben

$$D = \sum dd^+$$

ahol az összegzés kiterjed a kiválasztott k sorral képezhető összes aldeterminánsra.

Bizonyítás. Legyen D rendje n. Az előző Lemma szerint ha a d aldetermináns egy tetszőleges tagját megszorozzuk a hozzá tartozó d^+ algebrai aldetermináns egy tetszőleges tagjával, akkor megkapjuk D egy tagját. Mivel d egy k-adrendű, d^+

pedig egy $(n-k)$-adrendű aldetermináns, így ilyen módon $k!(n-k)!$ db tagját kapunk meg D-nek. Mivel a kiválasztott k sor segítségével

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

db k-adrendű aldetermináns képezhető, így a D-nek $n!$ db tagját kapjuk meg. Könnyen látható, hogy ezen tagok mind különbözőek, így a D-ben szereplő $n!$ tag mindegyikét pontosan egyszer kapjuk meg. □

PÉLDA. Legyen

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 7 & 2 & 3 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Válasszuk ki a második és negyedik oszlopokat. A szereplő nullák miatt ha ezekhez a második és negyedik soroktól különböző sorokat választunk, akkor a keletkező aldetermináns értéke nulla, mert tartalmaz egy nullákból álló sort. Ezért

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (-8) \cdot (-2) = 16.$$

3. Mátrixok

3.1. Alapműveletek mátrixokkal

A determinánsokhoz hasonlóan a mátrixok is alapvető szerepet játszanak a lineáris algebrai számításokban. Ezen fejezet célja a mátrixok halmazán műveleteket értelmezni és megvizsgálni, hogy ezen műveletek milyen tulajdonságokkal rendelkeznek. Ennek megfogalmazásához fel fogjuk használni a 12.1. részben szereplő algebrai alapfogalmakat is.

DEFINÍCIÓ. *Az* $A = (\alpha_{ij}) \in \mathcal{M}_{m\times n}$ *és* $B = (\beta_{ij}) \in \mathcal{M}_{m\times n}$ **mátrixok egyenlőek**, *ha (azonos típusúak és) elemenként megegyeznek:*

$$\alpha_{ij} = \beta_{ij}, \quad (1 \le i \le m, 1 \le j \le n).$$

DEFINÍCIÓ. *Azonos típusú* $A = (\alpha_{ij}) \in \mathcal{M}_{m\times n}$ *és* $B = (\beta_{ij}) \in \mathcal{M}_{m\times n}$ **mátrixok összege** *az a* $C = (\gamma_{ij}) \in \mathcal{M}_{m\times n}$ *mátrix, melyre*

$$\gamma_{ij} = \alpha_{ij} + \beta_{ij} \quad (1 \le i \le m, 1 \le j \le n).$$

TÉTEL. $(\mathcal{M}_{m\times n}, +)$ *kommutatív csoport.*

Bizonyítás. A művelet asszociatív és kommutatív tulajdonsága öröklődik $\mathbb{T}$–ből. A nullelem az a mátrix, melynek minden eleme nulla. Az $A = (\alpha_{ij})$ mátrix additív inverze $(-A) = (-\alpha_{ij})$. □

DEFINÍCIÓ. *Ha* $A = (\alpha_{ij}) \in \mathcal{M}_{m\times n}$ *és* $\lambda \in \mathbb{T}$ *akkor a* λA *az az* $m \times n$ *típusú mátrix, melyre*

$$(\lambda A)_{ij} = \lambda\alpha_{ij} \quad (1 \le i \le m, 1 \le j \le n).$$

TÉTEL. $\mathcal{M}_{m\times n}$ *vektortér* $\mathbb{T}$ *fölött.*

Bizonyítás. A műveleti tulajdonságok öröklődnek $\mathbb{T}$–ből. □

DEFINÍCIÓ. *Ha* $A = (\alpha_{ij}) \in \mathcal{M}_{m\times n}, B = (\beta_{ij}) \in \mathcal{M}_{n\times k}$ *akkor ezen két* **mátrix szorzata** *az a* $C = (\gamma_{ij}) \in \mathcal{M}_{m\times k}$ *mátrix, melyre*

$$\gamma_{ij} = \sum_{\ell=1}^{n} \alpha_{i\ell}\beta_{\ell j}.$$

MEGJEGYZÉS. Két mátrix csak akkor szorozható össze, ha az első oszlopainak a száma megegyezik a második sorainak a számával. Az eredmény mátrixnak annyi sora van, mint az első tényezőnek, és annyi oszlopa, mint a második tényezőnek. A szorzatmátrix i–edik sor j–edik eleme az első mátrix i–edik sorának és a második mátrix j–edik oszlopának a kompozíciós szorzata.

TÉTEL. *Ha* $A \in \mathcal{M}_{m\times n}, B \in \mathcal{M}_{n\times k}, C \in \mathcal{M}_{k\times l}$, *akkor*

$$A(BC) = (AB)C$$

Bizonyítás. Legyen $A = (\alpha_{ij}), B = (\beta_{ij}), C = (\gamma_{ij})$, akkor

$$(A(BC))_{ij} = \sum_{g=1}^{n} \alpha_{ig}(BC)_{gj} = \sum_{g=1}^{n} \alpha_{ig} \left(\sum_{h=1}^{k} \beta_{gh}\gamma_{hj} \right)$$

$$= \sum_{g=1}^{n}\sum_{h=1}^{k} \alpha_{ig}\beta_{gh}\gamma_{hj} = \sum_{h=1}^{k}\sum_{g=1}^{n} \alpha_{ig}\beta_{gh}\gamma_{hj}$$

$$= \sum_{h=1}^{k} \left(\sum_{g=1}^{n} \alpha_{ig}\beta_{gh} \right) \gamma_{hj} = \sum_{h=1}^{k} (AB)_{ih}\gamma_{hj} = ((AB)C)_{ij}$$

□

Ezen állításból a négyzetes mátrixokra vonatkozóan azonnal következik, hogy

TÉTEL. $(\mathcal{M}_{n\times n}, \cdot)$ *félcsoport.*

Ha a négyzetes mátrixok halmazán az összeadás és a szorzás műveletét együttesen tekintjük, akkor kapjuk, hogy

TÉTEL. $(\mathcal{M}_{n\times n}, +, \cdot)$ *nem kommutatív, egységelemes gyűrű.*

Bizonyítás. Előző tételeinkből következik, hogy $(\mathcal{M}_{n\times n}, +)$ kommutatív csoport, és a szorzás asszociatív. Könnyen lehet igazolni a kétoldali disztributivitás fennállását is: tetszőleges $A = (\alpha_{ij}), B = (\beta_{ij}), C = (\gamma_{ij}) \in \mathcal{M}_{n\times n}$ esetén minden $1 \le i, j \le n$–re

$$(A(B+C))_{ij} = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ik}(\beta_{kj} + \gamma_{kj}) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ik}\beta_{kj} + \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ik}\gamma_{kj} =$$

$$= (AB)_{ij} + (AC)_{ij} = (AB + AC)_{ij}.$$

A másik oldali disztributivitás bizonyítása hasonló. Az egységelem a szorzásra vonatkozóan az **egységmátrix**:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & & 0 \\ 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & & 1 \end{pmatrix}$$

□

Ha tekintetbe vesszük a skalárral való szorzás műveletét is, akkor egy nevezetes példát kapunk algebrára:

TÉTEL. *$\mathcal{M}_{n\times n}$ algebra a $\mathbb{T}$ test felett.*

Bizonyítás. Mivel már bizonyítottuk, hogy $\mathcal{M}_{n\times n}$ vektortér $\mathbb{T}$ felett, és hogy gyűrű, csak azt kell ellenőrizni, hogy tetszőleges $\lambda \in \mathbb{T}$ valamint $A, B \in \mathcal{M}_{n\times n}$ esetén

$$\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B),$$

ami könnyen igazolható. □

TÉTEL. **Determinánsok szorzástétele**
Tetszőleges $A, B \in \mathcal{M}_{n\times n}$ esetén

$$|AB| = |A|\,|B|.$$

Bizonyítás. Legyenek $A = (\alpha_{ij}), B = (\beta_{ij})$ és tekintsük az alábbi $(2n) \times (2n)$ típusú tömbös alakú mátrix determinánsát, melynek bal felsősarkában A, jobb felső sarkában a nulla mátrix, bal alsó sarkában az egységmátrix (-1)–szerese, jobb alsó sarkában B helyezkedik el:

$$|C| = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & & \alpha_{1n} & 0 & & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{n1} & & \alpha_{nn} & 0 & & 0 \\ -1 & & 0 & \beta_{11} & & \beta_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & & -1 & \beta_{n1} & & \beta_{nn} \end{vmatrix}.$$

Ha a Laplace–féle kifejtési tételt alkalmazzuk a C mátrix első n sorára, akkor az első n sorhoz csak az első n oszlopot választhatjuk (különben a keletkező aldetermináns nulla volna). Mivel a kiválasztott sor és oszlopindexek összege páros, azért azt kapjuk, hogy $|C| = |A|\,|B|$.

Most olyan átalakításokat végzünk C–n, melyek a determinánsát nem változtatják meg. Adjuk hozzá az $(n+1)$–edik sor α_{11}–szeresét, az $(n+2)$–edik sor α_{12}–szeresét, stb., a $(2n)$–edik sor α_{1n}–szeresét a C első sorához. Adjuk hozzá az $(n+1)$–edik sor α_{21}–szeresét, az $(n+2)$–edik sor α_{22}–szeresét, stb., a $(2n)$–edik sor α_{2n}–szeresét a C második sorához. Az eljárást folytatva, végül adjuk hozzá az $(n+1)$–edik sor α_{n1}–szeresét, az $(n+2)$–edik sor α_{n2}–szeresét, stb, a $(2n)$–edik sor α_{nn}–szeresét a C n–edik sorához.

Az így keletkező determináns

$$
|C_1| = \begin{vmatrix}
0 & & 0 & (AB)_{11} & & (AB)_{1n} \\
\vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\
0 & & 0 & (AB)_{n1} & & (AB)_{nn} \\
-1 & & 0 & \beta_{11} & & \beta_{1n} \\
\vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\
0 & & -1 & \beta_{n1} & & \beta_{nn}
\end{vmatrix}
$$

melynek bal felső sarka a nulla mátrix, jobb felső sarka az AB mátrix, bal alsó és jobb alsó sarka ugyanaz, mint C–ben.

Ha most a Laplace–féle kifejtési tételt a $|C_1|$ determináns első n sorára alkalmazzuk, akkor hozzá csak az $n+1, \ldots, 2n$ oszlopokat lehet választani (különben a keletkező aldetermináns nulla lenne), így azt kapjuk, hogy

$$|C_1| = |AB|(-1)^n(-1)^{(n+1)+\ldots+(2n)+1+\ldots+n}$$

ahol $(-1)^n$ a bal alsó sarokban elhelyezkedő mátrix determinánsa. A (-1) kitevőinek az összege páros szám, ezért $|C_1| = |AB|$. Mivel az átalakítások a C determinánsát nem változtatták meg, azért $|C| = |C_1|$, amiből következik a bizonyítandó állítás. □

3.2. Mátrixok inverze

Definíció. *Az $A \in \mathcal{M}_{n\times n}$* **mátrix invertálható**, *ha létezik olyan $B \in \mathcal{M}_{n\times n}$ mátrix, hogy*

$$AB = BA = E$$

ahol $E \in \mathcal{M}_{n\times n}$ az egységmátrix. A B mátrixot az A **inverz mátrix***ának nevezzük.*

Jelölés. $B = A^{-1}$.

Megjegyzés. Az A mátrix invertálhatósága azt jelenti, hogy A–nak a mátrixok szorzás műveletére nézve létezik inverz eleme. Az alábbiakból nyilvánvaló lesz, hogy négyzetes mátrixok esetén $AB = E$ és $BA = E$ egymással egyenértékű, s hogy az inverz egyértelműen létezik.

Tétel. *Az $A \in \mathcal{M}_{n\times n}$ mátrix pontosan akkor invertálható, ha determinánsa nem nulla.*

Megjegyzés. A nem nulla determinánsú $A \in \mathcal{M}_{n\times n}$ mátrixot **regulárisnak**, a nulla determinánsút **szingulárisnak** is szokták nevezni.

Bizonyítás. Tegyük fel először, hogy van olyan $B \in \mathcal{M}_{n\times n}$ mátrix, melyre $AB = E$. Akkor a determinánsok szorzástétele alapján

$$|A||B| = |AB| = |E| = 1$$

tehát $|A| \neq 0$.

Fordítva, tegyük fel, hogy az $A = (\alpha_{ij})$ mátrix determinánsa nem nulla. Legyen $B = (\beta_{ij})$ a következő mátrix:

$$\beta_{ij} = \frac{A_{ji}}{|A|} \quad (1 \leq i, j \leq n),$$

ahol A_{ji} az A mátrix j–edik sor i–edik eleméhez tartozó algebrai aldetermináns.

Megmutatjuk, hogy ez a B mátrix valóban inverz mátrixa A–nak.

$$(AB)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ik}\beta_{kj} = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ik}\frac{A_{jk}}{|A|} = \frac{1}{|A|}\sum_{k=1}^{n} \alpha_{ik}A_{jk} = \frac{1}{|A|}(\delta_{ij}|A|),$$

ahol $\delta_{ij} = 1$ ha $i = j$ és $\delta_{ij} = 0$ ha $i \neq j$ a Kronecker-féle delta szimbólum. Az eredményt $i = j$–re a kifejtési tétel, $i \neq j$–re a ferde kifejtési tétel alkalmazásával kapjuk. Mivel (δ_{ij}) éppen az egységmátrix, következik, hogy $AB = E$. A $BA = E$ egyenlőséget hasonlóan kapjuk:

$$(BA)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} \beta_{ik}\alpha_{kj} = \sum_{k=1}^{n} \frac{A_{ki}}{|A|}\alpha_{kj} = \frac{1}{|A|}\sum_{k=1}^{n} A_{ki}\alpha_{kj} = \frac{1}{|A|}(\delta_{ij}|A|).$$

□

MEGJEGYZÉS. Fontos megjegyezni, hogy a bizonyításban a B mátrix definíciója egyben módszert is ad az inverz mátrix kiszámítására vonatkozóan. Ez a módszer különösen nagyobb méretű mátrixok esetén túlságosan műveletigényes. Az alábbiakban egy gyorsabb eljárást mutatunk a mátrix inverzének kiszámítására.

3.3. Inverz mátrix kiszámítása eliminációs módszerrel

DEFINÍCIÓ. ***A mátrix soraival végzett elemi átalakítások*** *alatt a következőeket értjük:*
1. Sor szorzása $\lambda \neq 0$ számmal.
2. Egy sor λ–szorosának hozzáadása egy másik sorhoz.
3. Sorok sorrendjének felcserélése.

TÉTEL. *Legyen $A \in \mathcal{M}_{n\times n}$ egy mátrix és legyen $E \in \mathcal{M}_{n\times n}$ az egységmátrix. Ha az $n \times (2n)$ típusú $(A|E)$ mátrix sorokkal végzett elemi átalakítások útján $(E|B)$ alakúra hozható, akkor A invertálható és inverze B.*

MEGJEGYZÉS. Az alábbiakból könnyen látható, hogy $(A|E)$ kizárólag reguláris A mátrixok esetén hozható $(E|B)$ alakúra. Ha A szinguláris, akkor az eljárás megakad egy bizonyos ponton.

Bizonyítás. Először megmutatjuk, hogy a sorokkal végzett elemi átalakításokat megfelelő mátrixokkal való szorzással el lehet érni.

Legyen $C \in \mathcal{M}_{n\times n}$ az a mátrix, mely az egységmátrixtól csak abban különbözik, hogy a főátló i–edik eleme $\lambda \neq 0$. Ha ezen C mátrixszal megszorzunk egy $D \in \mathcal{M}_{n\times n}$ mátrixot, akkor az eredmény mátrix D–től csak abban különbözik, hogy i–edik sorában a D–beli elemek λ–szorosa áll.

Legyen most $\{i_1, i_2, \ldots, i_n\}$ az $\{1, 2, \ldots, n\}$ egy permutációja. Legyen továbbá $C \in \mathcal{M}_{n\times n}$ olyan mátrix, melynek minden eleme nulla, kivéve első sorának i_1–edik elemét, második sorának i_2–edik elemét, stb. utolsó sorának i_n–edik elemét, amely helyeken 1 áll. Ha ezen C mátrixszal megszorzunk egy $D \in \mathcal{M}_{n\times n}$ mátrixot, akkor a szorzat mátrix első sora D i_1–edik sorát, második sora D i_2–edik sorát, stb., utolsó sora D i_n–edik sorát fogja tartalmazni.

Végül legyen $C \in \mathcal{M}_{n\times n}$ az a mátrix, mely abban különbözik az $E \in \mathcal{M}_{n\times n}$ egységmátrixtól, hogy i–edik sorának j–edik eleme λ. Ha ezzel a C mátrixszal megszorzunk egy $D \in \mathcal{M}_{n\times n}$ mátrixot, akkor a szorzatmátrix i–edik sora a D i–edik sorának és j–edik sora λ–szorosának összegét fogja tartalmazni ($i \neq j$), a többi elemei megegyeznek D megfelelő elemeivel.

A fenti típusú C mátrixok mind regulárisak. Sorokkal végzett elemi átalakítások ilyen típusú mátrixokkal való bal oldali szorozásként interpretálhatóak. Ha $P, Q \in \mathcal{M}_{n\times n}$ és egy ilyen C mátrixszal szorozzuk balról az $n\times(2n)$ típusú $(P|Q)$ mátrixot, akkor $C(P|Q) = (CP|CQ)$ miatt mindkét $n \times n$ típusú blokkon ugyanaz az átalakítás hajtódik végre. Bonyolultabb átalakítások több ilyen egyszerű mátrix C szorzatával való bal szorzásként interpretálhatóak. A determinánsok szorzástétele miatt reguláris mátrixok szorzata is reguláris. Tegyük föl tehát, hogy

$$C(A|E) = (E|B).$$

Akkor $CA = E$ és $C = CE = B$ miatt $BA = E$ tehát A inverze B. □

A gyakorlatban az inverz mátrix kiszámítása legtöbbször a fenti tétel alkalmazásával, az $(A|E)$ mátrix $(E|B)$ alakúra hozása útján, eliminációs módszerrel történik. Ha az A mátrix első oszlopának minden eleme nulla, akkor A szinguláris mátrix. Ha van nem nulla elem, akkor az $(A|E)$ mátrix sorainak cseréjével elérhető, hogy az az első sorba kerüljön. Megfelelő $\lambda \neq 0$ konstanssal való szorzással elérhető az is, hogy az 1 legyen. Ezek után az első sor megfelelő konstansszorosait a második, stb., n–edik sorokhoz adva elérhetjük, hogy az első oszlop többi eleme nullává váljon. Tekintsük most a második oszlopot. Ha abban a második, stb., n–edik helyek egyikén sincs nem nulla elem, akkor A szinguláris (mivel első két oszlopa arányos). Ha van, akkor azt sorok cseréjével a második sorba hozzuk, majd $\lambda \neq 0$ konstanssal szorozzuk, hogy 1 legyen. Ezen után a második sor megfelelő konstansszorosait az első, harmadik, negyedik, stb., n–edik sorokhoz adva elérhetjük, hogy a második oszlop többi eleme nullává váljon. Az eljárást hasonlóképpen folytatjuk tovább. Fontos megjegyezni, hogy műveleteket mindig az egész $(2n)$ hosszú sorokkal végzünk.

3.4. Mátrixműveletek néhány további tulajdonsága

TÉTEL. *A reguláris $n \times n$ típusú mátrixok a szorzásra nézve csoportot alkotnak.*

MEGJEGYZÉS. A csoport nem kommutatív.

Bizonyítás. A determinánsok szorzástétele szerint reguláris mátrixok szorzata is reguláris. Előző tételeink szerint reguláris mátrixok invertálhatóak és inverzük is reguláris. A csoport egységeleme az egységmátrix.

□

TÉTEL. *Ha $A, B \in \mathcal{M}_{m\times n}, \lambda \in \mathbb{T}$, akkor*

$$(A+B)^t = A^t + B^t$$

$$(\lambda A)^t = \lambda A^t.$$

Ha $A \in \mathcal{M}_{m\times n}, B \in \mathcal{M}_{n\times k}$ akkor

$$(AB)^t = B^t A^t.$$

Bizonyítás. Az első két állítás nyilvánvaló. A harmadik állítás bizonyításához legyen $A = (\alpha_{ij})_{m\times n}, B = (\beta_{ij})_{n\times k}$. Minden $1 \le i \le k, 1 \le j \le m$ esetén

$$((AB)^t)_{ij} = (AB)_{ji} = \sum_{l=1}^{n} \alpha_{jl}\beta_{li} = \sum_{l=1}^{n} (B^t)_{il}(A^t)_{lj} = (B^t A^t)_{ij}$$

□

TÉTEL. *Ha $A, B \in \mathcal{M}_{n\times n}$ reguláris mátrixok, akkor A^t és AB is reguláris, és*

$$(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t,$$

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

Bizonyítás. Ha $|A| \neq 0$ és $|B| \neq 0$, akkor $|A^t| \neq 0$ és $|AB| \neq 0$. Az előző tétel felhasználásával

$$(A^{-1})^t A^t = (AA^{-1})^t = E^t = E.$$

Továbbá

$$(B^{-1}A^{-1})(AB) = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}B = E.$$

A fordított sorrendű szorzások hasonlóképpen az egységmátrixot adják eredményül.

□

4. Vektorterek

4.1. Vektortér fogalma

Az előző két fejezetben kiépítettük a lineáris algebrai számítások eszköztárát. Ebben a fejezetben rátérünk a lineáris algebra alapvető tárgyát képező struktúrák, a vektorterek tanulmányozására. Felhasználunk a 12.1. részben szereplő néhány fogalmat is.

DEFINÍCIÓ. *A V nem üres halmazt* **vektortér***nek nevezzük a $\mathbb{T}$ test felett, ha értelmezve van rajta egy $+$ művelet, melyre nézve $(V,+)$ kommutatív csoport, továbbá minden $\lambda \in \mathbb{T}$ és minden $a \in V$ esetén értelmezve van $\lambda a \in V$, és teljesülnek az alábbi műveleti tulajdonságok:*

$$\begin{aligned}\lambda(a+b) &= \lambda a + \lambda b\\ (\lambda+\mu)a &= \lambda a + \mu a\\ (\lambda\mu)a &= \lambda(\mu a) = \mu(\lambda a)\\ 1a &= a\end{aligned}$$

minden $\lambda, \mu \in \mathbb{T}$-és minden $a, b \in V$ esetén, ahol 1 a $\mathbb{T}$ test multiplikatív egységelemét jelöli.

JELÖLÉS. A vektorokat latin kisbetűk $(a, b, c, \ldots)$, a skalárokat görög kisbetűk $(\alpha, \beta, \gamma, \ldots)$ jelölik. A **nullvektort**, azaz $(V,+)$ neutrális elemét 0 (vagy $\underline{0}$) jelöli, minden vektortér esetén, ha ez nem okozhat félreértést.

MEGJEGYZÉS.

1. V elemeit vektoroknak, $\mathbb{T}$ elemeit skalároknak szokták nevezni.
2. Egyszerűen látható, hogy tetszőleges $\lambda \in \mathbb{T}$, $a \in V$ esetén

$$\begin{aligned}\lambda \cdot \underline{0} &= \underline{0}\\ 0 \cdot a &= \underline{0}\\ \lambda \cdot a &= \underline{0} \Longleftrightarrow \lambda = 0 \quad \text{vagy} \quad a = \underline{0}\\ (-a) &= (-1) \cdot a\end{aligned}$$

ahol 0 a $\mathbb{T}$ nullelemét és $\underline{0}$ a V-beli nullvektort jelöli.

PÉLDÁK.

1. Síkban vagy térben értelmezhető a szabadvektorok vektortere (a valós számok teste felett). Erre vonatkozóan ld. az 1. fejezetet.
2. A $\mathbb{T}$–beli elemekből alkotott n–esek vektorteret alkotnak $\mathbb{T}$ felett. Ezt a vektorteret $\mathbb{T}^n$–nel jelöljük. $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)^t, (\beta_1, \ldots, \beta_n)^t \in \mathbb{T}^n, \lambda \in \mathbb{T}$ esetén

$$\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\beta_1\\ \vdots\\ \beta_n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha_1+\beta_1\\ \vdots\\ \alpha_n+\beta_n\end{pmatrix},$$

$$\lambda \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda\alpha_1 \\ \vdots \\ \lambda\alpha_n \end{pmatrix}.$$

3. A legföljebb n–edfokú $\mathbb{T}$–beli együtthatós polinomok vektorteret alkotnak $\mathbb{T}$ felett a polinomok szokásos összeadás és konstanssal való szorzás műveletére. Ezt a vektorteret $\mathbb{T}_n[x]$–szel jelöljük.

4. Az összes $\mathbb{T}$–beli együtthatós polinom vektorteret alkot $\mathbb{T}$ felett a polinomok szokásos összeadás és konstanssal való szorzás műveletére. Ezt a vektorteret $\mathbb{T}[x]$–szel jelöljük.

5. A $\mathbb{T}$–beli elemű $m \times n$ típusú mátrixok vektorteret alkotnak $\mathbb{T}$ felett a mátrixoknál szokásos összeadás és skalárral való szorzás műveletére.

4.2. Alterek

DEFINÍCIÓ. *A V vektortér nem üres L részhalmaza* **altér**, *ha L maga is vektortér a V–beli műveletekre.*

MEGJEGYZÉS. Az egész V, valamint a nullvektorból álló egyelemű halmaz mindig altér. Ezeket **triviális alter**eknek nevezzük.

Az alábbi egyszerű állítás egy jól alkalmazható kritériumot ad annak eldöntésére, hogy egy vektortér egy részhalmaza altér–e.

TÉTEL. **Altérkritérium**
Legyen L a V vektortér nem üres részhalmaza. L pontosan akkor altér V–ben, ha az alábbi két tulajdonság teljesül:

$$\forall a, b \in L: \quad a - b \in L \tag{1}$$
$$\forall \lambda \in \mathbb{T}, \forall a \in L: \quad \lambda a \in L \tag{2}$$

MEGJEGYZÉS. Az (1), (2) összefüggésekkel ekvivalens az a feltétel, hogy minden $\lambda, \mu \in \mathbb{T}$, $a, b \in L$ esetén $\lambda a + \mu b \in L$.

Bizonyítás. Ha L altér, akkor (1), (2) nyilvánvalóan teljesül. Tegyük fel most, hogy (1), (2) teljesül. (1)–et $b = a$–ra alkalmazva kapjuk, hogy $a - a = 0 \in L$, tehát a nulla vektor benne van L–ben. Ugyancsak (1) alapján, ha $a \in L$, akkor $0 - a = -a \in L$, tehát minden L–beli vektor additív inverze is benne van L–ben. Végül, $a, b \in L$ esetén, mivel $a, -b \in L$, azért, (1)–et $a, -b$–re alkalmazva kapjuk, hogy $a - (-b) = a + b \in L$, tehát az összeadás nem vezet ki L–ből. (2) szerint a konstanssal való szorzásra nézve is zárt L. A műveleti tulajdonságok V–ből öröklődnek. □

Példák.

1. A térbeli szabadvektorok terében azon vektorok, melyek origóból kiinduló reprezentánsai egy origón átmenő egyenes pontjaiba mutatnak, alteret alkotnak. Hasonlóan, azon vektorok, melyek origóból kiinduló reprezentánsai egy origón átmenő sík pontjaiba mutatnak, ugyancsak alteret alkotnak. Ezen állítások origón nem átmenő egyenesekre, ill. síkokra nem maradnak érvényesek.

2. $\mathbb{T}^4$–ben alteret alkotnak a következő vektorhalmazok:

$$\{(x_1, 0, x_2, 0) \mid x_1, x_2 \in \mathbb{T}\}$$

$$\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \mid x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{T}, x_1 - x_2 + 3x_3 = 0\}.$$

3. $\mathbb{T}_5[x]$–ben, ill. $\mathbb{T}[x]$–ben altér $\mathbb{T}_3[x]$.

4. $\mathcal{M}_{3\times 2}$–ben alteret alkotnak azon $A = (a_{ij})$ mátrixok, amelyekre $a_{11} = a_{31} = 0$.

5. $\mathcal{M}_{n\times n}$–ben alteret alkotnak a szimmetrikus mátrixok, vagyis amelyekre $A^t = A$.

Tétel. *Legyen V vektortér, Γ tetszőleges indexhalmaz. $L_\gamma, (\gamma \in \Gamma)$ alterek V–ben. Akkor*

$$\bigcap_{\gamma \in \Gamma} L_\gamma$$

is altér V–ben.

Bizonyítás. Az előző Tételt alkalmazva, megmutatjuk, hogy ha a, b tetszőleges eleme a metszetnek és $\lambda \in \mathbb{T}$, akkor $a - b, \lambda a$ is eleme a metszetnek. Ekkor ugyanis $a, b \in L_\gamma$ minden $\gamma \in \Gamma$ esetén. De akkor $a - b, \lambda a \in L_\gamma$ is teljesül, minden $\gamma \in \Gamma$ esetén. Tehát $a - b, \lambda a \in \bigcap_{\gamma \in \Gamma} L_\gamma$. □

Definíció. *Legyen V vektortér $\mathbb{T}$ fölött, $a_1, \ldots, a_n \in V$ valamint $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{T}$. Akkor $\lambda_1 a_1 + \ldots + \lambda_n a_n \in V$ az $a_1, \ldots, a_n$ vektorok $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ együtthatókkal vett* **lineáris kombinációja**.

Definíció. *Legyen V vektortér, H nem üres részhalmaz V–ben. A H által* **generált $\mathcal{L}(H)$ altér** *V–nek az a legszűkebb altere, mely tartalmazza H–t.*

Megjegyzés.

1. $\mathcal{L}(H)$–t a H lineáris lezártjának is nevezik.

2. $\mathcal{L}(H)$ éppen az összes V–beli H–t tartalmazó altér metszete.

TÉTEL. *$\mathcal{L}(H)$ éppen a H–beli vektorok összes lineáris kombinációinak a halmaza:*

$$\mathcal{L}(H) = \{\lambda_1 a_1 + \ldots + \lambda_n a_n \mid \lambda_i \in \mathbb{T}, a_i \in V, 1 \leq i \leq n, n = 1, 2, \ldots\}.$$

Bizonyítás. Először az Altérkritérium felhasználásával belátjuk, hogy a H–beli vektorok lineáris kombinációinak halmaza altér. Legyenek b, c tetszőleges lineáris kombinációi H–beli vektoroknak. Tegyük fel, hogy a lineáris kombinációkban szereplő H–beli vektorok uniója $\{a_1, \ldots, a_n\}$, azaz léteznek olyan $\lambda_i, \mu_i \in \mathbb{T}$ skalárok, hogy

$$b = \lambda_1 a_1 + \ldots + \lambda_n a_n, \quad c = \mu_1 a_1 + \ldots + \mu_n a_n.$$

Akkor

$$b - c = (\lambda_1 - \mu_1) a_1 + \ldots + (\lambda_n - \mu_n) a_n,$$

és tetszőleges $\gamma \in \mathbb{T}$ skalár esetén

$$\gamma b = (\gamma \lambda_1) a_1 + \ldots + (\gamma \lambda_n) a_n,$$

tehát $b - c$ és γb is H–beli vektorok lineáris kombinációja.

A H–beli vektorok lineáris kombinációinak halmaza egy olyan altér, mely tartalmazza H–t. Továbbá, ez a legszűkebb a H–t tartalmazó alterek között, mert minden H–t tartalmazó altérben a H–beli vektorokkal együtt azok lineáris kombinációi is benne kell hogy legyenek. □

TÉTEL. *Az $\{a_1, \ldots, a_n\}$ vektorrendszer által generált altér nem változik, ha a vektorrendszeren az alábbi átalakításokat végezzük:*
1. Egy vektor szorzása $\lambda \neq 0$-val.
2. Egy vektorhoz hozzáadni egy másik vektor λ-szorosát.
3. Elhagyni a vektorrendszerből olyan vektort, mely előáll a megmaradóak lineáris kombinációjaként.
4. Vektorok sorrendjének felcserélése.

Bizonyítás. Könnyen látható, hogy a régi és az új vektorrendszer vektorai lineáris kombinációinak halmaza megegyezik. □

DEFINÍCIÓ. *A V vektortér H részhalmaza* **generátorrendszere** *V–nek, ha*

$$\mathcal{L}(H) = V.$$

DEFINÍCIÓ. *Egy vektortér* **végesen generált**, *ha van véges sok elemből álló generátorrendszere.*

PÉLDÁK.

1. $\mathbb{T}^3$–ban $\{(1,1,0)^t, (1-2,1)^t, (1,3,-1)^t, (3,1,7)^t\}$ generátorrendszer.
2. $\mathbb{T}_2[x]$–ben $\{x^2 + x, x^2 - 2x + 1, x^2 + 3x - 1, 3x^2 + x + 7\}$ generátorrendszer.
3. $\mathbb{T}[x]$ nem végesen generált vektortér.

4.3. Lineáris függőség, függetlenség, bázis, dimenzió

DEFINÍCIÓ. *A V vektortér $a_1, \ldots, a_n$ vektorai* **lineárisan függetlenek,** *ha $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{T}$ együtthatókkal vett lineáris kombinációjukra*

$$\lambda_1 a_1 + \ldots + \lambda_n a_n = 0$$

csak

$$\lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0$$

esetén teljesülhet. Ellenkező esetben $a_1, \ldots, a_n$ **lineárisan függő***ek.*

Vektorok egy végtelen sok elemet tartalmazó halmaza akkor lineárisan független, ha bármely véges részhalmaza lineárisan független.

MEGJEGYZÉS. Nullvektort tartalmazó vektorrendszer mindig lineárisan függő.

DEFINÍCIÓ. *A V vektortér egy lineárisan független generátorrendszerét a V egy* **bázis***ának nevezzük.*

MEGJEGYZÉS. Belátható, hogy minden vektortérnek van bázisa. Végesen generált vektortér esetén ez következik abból, hogy a generátorrendszer vektorai közül elhagyhatjuk a megmaradóaktól függő vektorokat mindaddig, míg lineárisan független generátorrendszert nem kapunk.

DEFINÍCIÓ. *A V vektortér H részhalmaza* **maximális lineárisan független vektorrendszer,** *ha*
1. H lineárisan független vektorrendszer
2. tetszőleges $a \in V$ esetén $\{a\} \cup H$ lineárisan függő .

TÉTEL. *Az $(a_1, \ldots, a_n)$ vektorrendszer pontosan akkor bázis a V vektortérben, ha maximális lineárisan független vektorrendszer.*

Bizonyítás. Tegyük fel először, hogy $(a_1, \ldots, a_n)$ bázis. Akkor lineárisan független vektorrendszer. Mivel generátorrendszer is, tetszőleges a vektor esetén vannak olyan $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ skalárok, hogy

$$a = \lambda_1 a_1 + \ldots + \lambda_n a_n.$$

De akkor $a - \lambda_1 a_1 - \ldots - \lambda_n a_n = 0$ és itt nem minden együttható nulla, azért $\{a, a_1, \ldots, a_n\}$ már lineárisan függő, tehát $\{a_1, \ldots, a_n\}$ maximális lineárisan független vektorrendszer.

Fordítva, tegyük fel, hogy $\{a_1, \ldots, a_n\}$ maximális lineárisan független vektorrendszer. Ekkor nyilván lineárisan független, csak azt kell megmutatni, hogy generátorrendszer. Legyen $a \in V$ egy tetszőleges vektor. Akkor $\{a, a_1, \ldots, a_n\}$ lineárisan függő, tehát vannak olyan $\lambda, \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{T}$ skalárok, hogy

$$\lambda a + \lambda_1 a_1 + \ldots + \lambda_n a_n = 0,$$

és ezen skalárok nem mindegyike nulla. Ha most $\lambda = 0$ volna, és csak $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ között volnának 0–tól különbözőek, akkor ellentmondásra jutnánk azzal, hogy $\{a_1, \dots, a_n\}$ lineárisan független. Ha azonban $\lambda \neq 0$, akkor

$$a = -(\lambda_1/\lambda)a_1 - \dots - (\lambda_n/\lambda)a_n$$

tehát $\{a_1, \dots, a_n\}$ generátorrendszer. □

Tétel. *Végesen generált vektortérben minden bázis azonos számosságú.*

Bizonyítás. Indirekt tegyük föl, hogy van két különböző elemszámú bázis, $(a_1, \dots, a_m)$ és $(b_1, \dots, b_n)$ melyekre $m < n$.

Mivel $(a_1, \dots, a_m)$ bázis, azért generátorrendszer, tehát vannak olyan $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{T}$ skalárok, hogy

$$b_1 = \lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_m a_m. \tag{3}$$

Ha itt minden λ_i nulla volna, akkor b_1 is nullvektor lenne, ami ellentmond annak, hogy b_1 bázisvektor. Ezért valamelyik λ_i nem nulla. Tegyük fel, hogy $\lambda_m \neq 0$ (ez a bázisvektorok sorrendjének átrendezésével elérhető). Akkor

$$a_m = \frac{1}{\lambda_m} b_1 - \frac{\lambda_1}{\lambda_m} a_1 - \dots - \frac{\lambda_{m-1}}{\lambda_m} a_{m-1}. \tag{4}$$

Belátjuk, hogy akkor $(b_1, a_1, \dots, a_{m-1})$ is bázis.

Ha valamely $\nu, \nu_1, \dots, \nu_{m-1}$ konstansokkal

$$\nu b_1 + \nu_1 a_1 + \dots + \nu_{m-1} a_{m-1} = 0,$$

akkor (3) szerint

$$(\nu\lambda_1 + \nu_1)a_1 + \dots + (\nu\lambda_{m-1} + \nu_{m-1})a_{m-1} + \nu\lambda_m a_m = 0.$$

Felhasználva, hogy $(a_1, \dots, a_m)$ lineárisan független, adódik, hogy ebben az egyenletben minden együttható nulla. $\lambda_m \neq 0$ miatt akkor $\nu = 0$, és ebből $\nu_1 = \dots = \nu_{m-1} = 0$ következik, tehát $(b_1, a_1, \dots, a_{m-1})$ lineárisan független.

Másrészt, $(b_1, a_1, \dots, a_{m-1})$ nyilván generátorrendszer, ugyanis, ha tetszőleges vektor előállítható $(a_1, \dots, a_m)$ lineáris kombinációjaként, akkor (4) szerint előállítható $(b_1, a_1, \dots, a_{m-1})$ lineáris kombinációjaként is.

Hasonlóképpen belátható, hogy $(b_1, b_2, a_1, \dots, a_{m-2})$, stb., $(b_1, \dots, b_{m-1}, a_1)$, $(b_1, \dots, b_m)$ is bázis. (Az újonnan bevett b_j vektorok esetén, amikor b_j-t előállítjuk $b_1, \dots, b_{j-1}, a_1, \dots, a_{m-j+1}$ lineáris kombinációjaként, belátható, hogy mindig valamelyik a_i vektornak nullától különböző az együtthatója. A b_j vektor bevételekor éppen ezt az a_i vektort hagyjuk el a bázisból.)

De akkor $(b_1, \dots, b_m)$ maximális lineárisan független vektorrendszer, tehát $n > m$ miatt $(b_1, \dots, b_m, \dots, b_n)$ lineárisan függő, ami ellentmond bázis voltának. □

Definíció. *Egy végesen generált vektortér bázisainak közös számosságát a vektortér* **dimenzió***jának nevezzük.*

Jelölés. A V vektortér dimenzióját $\dim V$–vel jelöljük.

Megjegyzés.

1. Ha a V vektortér dimenziója n, akkor belátható, hogy minden n elemű lineárisan független vektorrendszer bázist alkot V–ben.
2. Ha a V vektortér dimenziója n, akkor minden n–nél kisebb elemszámú lineárisan független vektorrendszer bázissá egészíthető ki további vektorok hozzávételével.

   Az 1. és 2. megjegyzés az előbbi bizonyítás elvét alkalmazva látható be. Vegyünk V–ben egy tetszőleges bázist, és ezen bázis megfelelő elemeit sorra cseréljük ki a szóbanforgó vektorrendszer vektoraira.
3. Ha L altér V–ben, akkor $0 \leq \dim L \leq \dim V$.

Példák.

1. A síkbeli szabadvektorok terében bázist alkot bármely két olyan nem nulla vektor, melynek reprezentánsai nem párhuzamosak egymással. A térbeli szabadvektorok terében bázist alkot bármely három olyan vektor, melyek reprezentánsai nem párhuzamosak egyazon síkkal.
2. $\mathbb{T}^n$–ben az $((1,0,\ldots,0)^t,(0,1,\ldots,0)^t,(0,0,\ldots,1)^t)$ vektorrendszer bázist alkot. Ezt **természetes bázis**nak nevezzük.
3. $\mathbb{T}^3$–ban bázis az $((1,2,1)^t,(3,-1,2)^t,(1,0,1)^t)$ vektorrendszer is.
4. $\mathbb{T}_n[x]$–ben bázis $(1,x,x^2,\ldots,x^n)$.

Tétel. *Ha $(a_1,\ldots,a_n)$ bázis V–ben, akkor minden $a \in V$ vektorhoz egyértelműen tartoznak olyan $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ skalárok, hogy*

$$a = \lambda_1 a_1 + \ldots + \lambda_n a_n.$$

Bizonyítás. Ilyen skalárok az $(a_1,\ldots,a_n)$ generátorrendszer volta miatt léteznek. Ha valamely $\mu_1,\ldots,\mu_n$ skalárokkal ugyancsak fennállna

$$a = \mu_1 a_1 + \ldots + \mu_n a_n$$

akkor

$$(\lambda_1 - \mu_1)a_1 + \ldots + (\lambda_n - \mu_n)a_n = 0$$

amiből az $(a_1,\ldots,a_n)$ lineáris függetlensége miatt $\lambda_i = \mu_i$ $(1 \leq i \leq n)$ adódik, tehát az előállítás egyértelmű. □

Definíció. *Ha $(a_1,\ldots,a_n)$ bázis V–ben, $a \in V$, akkor azon $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ skalárokat, melyekre*

$$a = \lambda_1 a_1 + \ldots + \lambda_n a_n,$$

az a vektornak az $(a_1, \ldots, a_n)$ bázisra vonatkozó **koordinátái***nak nevezzük.*

Megjegyzés. A koordinátákat oszlopvektorként célszerű kezelni. Ha az a vektor koordinátái $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)^t$, a b vektoré $(\mu_1, \ldots, \mu_n)^t$, akkor

$$a + b = (\lambda_1 + \mu_1)a_1 + \ldots + (\lambda_n + \mu_n)a_n$$

$$\nu a = (\nu\lambda_1)a_1 + \ldots + (\nu\lambda_n)a_n$$

miatt az $a + b$ vektor koordinátái $(\lambda_1 + \mu_1, \ldots, \lambda_n + \mu_n)^t$, a νa vektoré $(\nu\lambda_1, \ldots, \nu\lambda_n)^t$.

4.4. Vektorterek lineáris leképezései

Definíció. *Legyenek V_1, V_2 vektorterek a $\mathbb{T}$ test felett. A $\varphi : V_1 \to V_2$* **leképezést lineáris***nak nevezzük, ha additív és homogén, azaz*

$$\begin{aligned} \forall a, b \in V_1: \quad \varphi(a+b) &= \varphi(a) + \varphi(b) \\ \forall a \in V_1, \forall \lambda \in \mathbb{T}: \quad \varphi(\lambda a) &= \lambda\varphi(a) \end{aligned}$$

Jelölés. A $\varphi : V_1 \to V_2$ lineáris leképezések halmazát $L(V_1, V_2)$-vel jelöljük.

Az alábbi tételek a lineáris leképezések két alapvető tulajdonságát fogalmazzák meg.

Tétel. **Lineáris leképezések 1. alaptétele**
Legyen $(e_1, \ldots, e_n)$ bázis a V_1 vektortérben. Ha $\varphi, \psi : V_1 \to V_2$ lineáris leképezések, és $\varphi(e_i) = \psi(e_i), 1 \leq i \leq n$, akkor bármely $a \in V_1$–re $\varphi(a) = \psi(a)$.

Bizonyítás. Legyen $a = \lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_n e_n$. Akkor a φ, ψ linearitása miatt

$$\varphi(a) = \lambda_1\varphi(e_1) + \ldots + \lambda_n\varphi(e_n) = \lambda_1\psi(e_1) + \ldots + \lambda_n\psi(e_n) = \psi(a).$$

□

Tétel. **Lineáris leképezések 2. alaptétele**
Legyen $(e_1, \ldots, e_n)$ bázis a V_1 vektortérben, és legyenek $a_1, \ldots, a_n$ tetszőleges vektorok V_2–ben. Akkor pontosan egy olyan $\varphi : V_1 \to V_2$ lineáris leképezés létezik, melyre $\varphi(e_i) = a_i, 1 \leq i \leq n$.

Bizonyítás. Tetszőleges $a = \lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_n e_n$ vektorra legyen

$$\varphi(a) = \lambda_1 a_1 + \ldots + \lambda_n a_n.$$

Ez a leképezés lineáris. Legyen ugyanis $a = \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i, b = \sum_{i=1}^n \mu_i e_i, \nu \in \mathbb{T}$. Akkor

$$\varphi(a+b) = \varphi\left(\sum_{i=1}^n (\lambda_i + \mu_i)e_i\right) = \sum_{i=1}^n (\lambda_i + \mu_i)a_i = \sum_{i=1}^n \lambda_i a_i + \sum_{i=1}^n \mu_i a_i = \varphi(a) + \varphi(b),$$

másrészt

$$\varphi(\nu a) = \varphi\left(\sum_{i=1}^{n}(\nu\lambda_i)e_i\right) = \sum_{i=1}^{n}(\nu\lambda_i)a_i = \nu\sum_{i=1}^{n}\lambda_i a_i = \nu\varphi(a).$$

Az előző tétel alapján csak egyetlen $\varphi(e_i) = a_i$ $(1 \leq i \leq n)$ tulajdonságú lineáris leképezés létezik. □

Definíció. *Legyenek V_1, V_2 vektorterek a $\mathbb{T}$ test felett. A $\varphi : V_1 \to V_2$ leképezést* **izomorf***nak nevezzük, ha lineáris és bijektív (injektív és szürjektív). A V_1, V_2 vektortereket izomorfaknak nevezzük, ha létezik $\varphi : V_1 \to V_2$* **izomorf leképezés (izomorfizmus)**.

Jelölés. A V_1, V_2 vektorterek izomorfiáját $V_1 \cong V_2$ módon jelöljük.

Megjegyzés. Két vektortér izomorfiája szemléletesen azt jelenti, hogy a két vektortér pontosan azonos módon „működik".

Tétel. *Legyenek V_1, V_2 végesen generált vektorterek a $\mathbb{T}$ test felett. V_1 és V_2 pontosan akkor izomorfak, ha $\dim V_1 = \dim V_2$.*

Bizonyítás.

I. Először tegyük fel, hogy V_1 és V_2 izomorfak, azaz létezik $\varphi : V_1 \to V_2$ izomorfizmus. Legyen $(e_1, \ldots, e_n)$ bázis V_1–ben, belátjuk, hogy akkor $(\varphi(e_1), \ldots, \varphi(e_n))$ bázis V_2–ben, tehát a dimenzióik megegyeznek. Tegyük fel, hogy valamely $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ skalárokkal

$$\lambda_1\varphi(e_1) + \ldots + \lambda_n\varphi(e_n) = 0$$

Akkor φ linearitása miatt

$$\varphi(\lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_n e_n) = 0$$

Minden lineáris leképezés a homogenitás miatt a nulla vektort a nulla vektorba viszi át (ui. $\varphi(\underline{0}) = \varphi(0 \cdot \underline{0}) = 0 \cdot \varphi(\underline{0}) = \underline{0}$). Ezért a fenti egyenlőségből φ kölcsönösen egyértelműsége miatt $\lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_n e_n = 0$, amiből $(e_1, \ldots, e_n)$ lineáris függetlensége alapján $\lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0$ következik, tehát $(\varphi(e_1), \ldots, \varphi(e_n))$ lineárisan független.

Másrészt minden $b \in V_2$–höz a φ szürjektivitása miatt létezik $a \in V_1$, melyre $\varphi(a) = b$. Ha $a = \lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_n e_n$ az a vektor báziselőállítása, akkor φ linearitása miatt

$$b = \varphi(a) = \lambda_1\varphi(e_1) + \ldots + \lambda_n\varphi(e_n),$$

tehát $(\varphi(e_1), \ldots, \varphi(e_n))$ generátorrendszer is V_2–ben.

II. Fordítva, tegyük fel, hogy $\dim V_1 = \dim V_2$. Legyen $(e_1, \ldots, e_n)$ bázis V_1–ben, $(f_1, \ldots, f_n)$ bázis V_2–ben. A lineáris leképezések 2. alaptétele szerint van olyan $\varphi : V_1 \to V_2$ leképezés, melyre $\varphi(e_i) = f_i$ $(i = 1, \ldots, n)$. Megmutatjuk, hogy φ izomorf módon képezi le V_1–et V_2–re.

Ha $a = \lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_n e_n, b = \mu_1 e_1 + \ldots + \mu_n e_n \in V_1$ esetén $\varphi(a) = \varphi(b)$, akkor $\lambda_1 f_1 + \ldots + \lambda_n f_n = \mu_1 f_1 + \ldots + \mu_n f_n$, tehát az $(f_1, \ldots, f_n)$ lineáris függetlensége miatt $\lambda_i = \mu_i$ $(1 \leq i \leq n)$, vagyis $a = b$, azaz φ injektív.

Végül, tetszőleges $b = \lambda_1 f_1 + \ldots + \lambda_n f_n \in V_2$ vektor éppen az $a = \lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_n e_n \in V_1$ vektor φ általi képe, tehát φ szürjektív. □

TÉTEL. *Legyen V n dimenziós vektortér, $(e_1, \ldots, e_n)$ bázis V–ben. Akkor a vektorokhoz az $(e_1, \ldots, e_n)$ bázisra vonatkozó koordinátaoszlop hozzárendelése izomorf leképezése V–nek $\mathbb{T}^n$–be.*

Bizonyítás. Mint azt a 4.3. részben láttuk, a vektorokhoz a koordinátaoszlop hozzárendelése kölcsönösen egyértelmű és lineáris. Mivel tetszőleges koordinátaoszlophoz tartozik valamely vektor, azért a hozzárendelés nyilván szürjektív is. □

KÖVETKEZMÉNY. *Ezen tételből következően minden $\mathbb{T}$ test feletti n dimenziós vektortér izomorf $\mathbb{T}^n$–nel.*

MEGJEGYZÉS. Az $a_1, \ldots, a_k$ vektorok pontosan akkor lineárisan függőek, ha egy rögzített $(e_1, \ldots, e_n)$ bázisra vonatkozó koordinátaoszlopaik lineárisan függőek $\mathbb{T}^n$–ben. Így minden lineáris függőséggel kapcsolatos kérdés vizsgálható $\mathbb{T}^n$–ben.

4.5. Bázis- és koordinátatranszformáció

DEFINÍCIÓ. *Legyenek $(e) = (e_1, \ldots, e_n)$ és $(f) = (f_1, \ldots, f_n)$ bázisok V–ben. Az $(e) \to (f)$* **bázistranszformáció mátrixa** *az az $S = (\alpha_{ij}) \in \mathcal{M}_{n\times n}$ mátrix, melynek j–edik oszlopában az f_j vektor (e) bázisra vonatkozó koordinátaoszlopa található $(1 \leq j \leq n)$, azaz*

$$f_j = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{kj} e_k$$

JELÖLÉS. Ha S az $(e) \to (f)$ bázistranszformáció mátrixa, azt röviden $(e) \xrightarrow{S} (f)$ módon jelöljük.

TÉTEL. *Legyenek $(e) = (e_1, \ldots, e_n)$ és $(f) = (f_1, \ldots, f_n)$ bázisok V–ben. Jelölje S az $(e) \to (f)$ bázistranszformáció mátrixát, T pedig az $(f) \to (e)$ bázistranszformáció mátrixát. Akkor S, T reguláris mátrixok és $T = S^{-1}$.*

Bizonyítás. Legyen $S = (\alpha_{ij}), T = (\beta_{ij})$. Akkor tetszőleges j–re $(1 \leq j \leq n)$

$$f_j = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{kj} e_k = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{kj} \left(\sum_{l=1}^{n} \beta_{lk} f_l \right) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} \alpha_{kj} \beta_{lk} f_l$$

$$= \sum_{l=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{n} \beta_{lk} \alpha_{kj} \right) f_l = \sum_{l=1}^{n} (TS)_{lj} f_l$$

ahonnan a $(TS)_{lj} = \delta_{lj} (1 \leq l, j \leq n)$ következik, tehát $TS = E$. Ebből az is adódik, hogy S, T nyilván reguláris. □

TÉTEL. *Legyenek* $(e) = (e_1, \dots, e_n)$ *és* $(f) = (f_1, \dots, f_n)$ *bázisok a* V *vektortérben, és legyen* S *az* $(e) \to (f)$ *bázistranszformáció mátrixa. Legyen* $a = x_1e_1 + \dots + x_ne_n = y_1f_1 + \dots + y_nf_n$ *az* $a \in V$ *vektor előállítása az* (e) *illetve* (f) *bázisban. Jelölje*

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

az a *vektor koordinátaoszlopait az* (e) *illetve* (f) *bázisra vonatkozóan. Akkor*

$$Y = S^{-1}X.$$

MEGJEGYZÉS. Ezen összefüggés alapján az S^{-1} mátrixot az $(e) \to (f)$ bázistranszformációhoz tartozó **koordinátatranszformáció mátrixá**nak nevezzük.

Bizonyítás. Fölhasználva a bázisok közötti összefüggést

$$\sum_{k=1}^{n} x_ke_k = a = \sum_{j=1}^{n} y_jf_j = \sum_{j=1}^{n} y_j \left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_{kj}e_k \right) =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} (\alpha_{kj}y_je_k) = \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_{kj}y_j \right) e_k$$

ahonnan

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_{kj}y_j = x_k \quad (1 \le k \le n)$$

következik, azaz $X = SY$. □

4.6. Vektorrendszer rangja, mátrix rangja

DEFINÍCIÓ. *Ha* $a_1, \dots, a_n$ *a* V *vektortér elemei, akkor az* $\{a_1, \dots, a_n\}$ **vektorrendszer rangja** *alatt az általa generált altér dimenzióját értjük:* $\dim \mathcal{L}(a_1, \dots, a_n)$.

JELÖLÉS. Az $\{a_1, \dots, a_n\}$ vektorrendszer rangját $\rho(a_1, \dots, a_n)$ jelöli.

TÉTEL. *Adott vektorrendszer rangjával azonos rangú vektorrendszert kapunk, ha a vektorrendszeren az alábbi átalakításokat végezzük el:*
1. Egy vektor szorzása $\lambda \neq 0$*–val.*
2. Egy vektorhoz hozzáadni egy másik vektor λ*–szorosát.*
3. Elhagyni a rendszerből olyan vektort, mely előáll a megmaradóak lineáris kombinációjaként.
4. Vektorok sorrendjének felcserélése.

Bizonyítás. Lásd a 4.1. rész megfelelő tételét. □

DEFINÍCIÓ. *Egy* **mátrix rangján** *a sorvektorrendszere rangját értjük.*

JELÖLÉS. Az A mátrix rangját $\rho(A)$ jelöli.

MEGJEGYZÉS. Mint korábban, az $A = (\alpha_{ij}) \in \mathcal{M}_{m\times n}$ $(\alpha_{ij} \in \mathbb{T})$ mátrix sorvektorait $A_1, \dots, A_m$, oszlopvektorait $A^{(1)}, \dots, A^{(n)}$ jelöli. A sorvektorok a $\mathbb{T}^n$, az oszlopvektorok a $\mathbb{T}^m$ tér elemei. Így

$$\rho(A) = \rho(A_1, \dots, A_m) = \dim \mathcal{L}(A_1, \dots, A_m)$$

ahol a szereplő altér $\mathbb{T}^n$ altere.

TÉTEL. *Legyen D az A mátrix maximális rendű el nem tűnő (vagyis nem nulla determinánsú) aldeterminánsa. Akkor A azon sorai, melyek D–ben szerepelnek, az A mátrix sorvektorrendszerében maximális lineárisan független vektorrendszert alkotnak.*

Bizonyítás. Feltehető, hogy D az A mátrix bal felső sarkában helyezkedik el, ugyanis a vektorok vagy komponenseik sorrendjének felcserélése nem változtatja meg a lineáris összefüggéseket. Jelölje r a D determináns rendjét.

Megmutatjuk, hogy
I. $A_1, \dots, A_r$ lineárisan függetlenek $\mathbb{T}^n$–ben
II. $A_s = \lambda_1 A_1 + \dots + \lambda_r A_r$, minden $r+1 \le s \le m$ esetén valamely (s–től függő) $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ skalárokkal.

I. Ha $A_1, \dots, A_r$ lineárisan függőek volnának $\mathbb{T}^n$–ben, akkor hasonló lineáris függés állna fenn első r komponensükre is, azaz a D determináns sorai lineárisan függőek volnának, ami ellentmond $D \ne 0$–nak.

II. Legyenek az A mátrix elemei $A = (\alpha_{ij})$ és legyen $r+1 \le s \le m$. Az $A_s = \lambda_1 A_1 + \dots + \lambda_r A_r$ egyenlőség komponensekre nézve az alábbi egyenletrendszert jelenti:

$$\lambda_1\alpha_{1k} + \dots + \lambda_r\alpha_{rk} = \alpha_{sk} \quad (1 \le k \le n). \tag{5}$$

ahol a $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ skalárok minden k esetén ugyanazok. Be kell bizonyítanunk, hogy ilyen skalárok léteznek. Ebből a célból tekintsük az $r+1$–edrendű

$$D(s,k) = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \dots & \alpha_{1r} & \alpha_{1k} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \alpha_{r1} & \dots & \alpha_{rr} & \alpha_{rk} \\ \alpha_{s1} & \dots & \alpha_{sr} & \alpha_{sk} \end{vmatrix}$$

determinánst, melynek bal felső $r \times r$ típusú tömbjében D sorai helyezkednek el. $1 \le k \le r$ esetén $D(s,k)$–nak van két azonos oszlopa, $r+1 \le k \le n$ esetén pedig $D(s,k)$ az A–nak $(r+1)$–edrendű aldeterminánsa, tehát $D(s,k) = 0$ minden $1 \le k \le n$ esetén. Fejtsük ki most $D(s,k)$–t az utolsó oszlopa szerint:

$$0 = \alpha_{1k}\mu_1 + \dots + \alpha_{rk}\mu_k + \alpha_{sk}D$$

ahol az együtthatók nem függenek k–tól. Így megkapjuk az (5) egyenletrendszer keresett együtthatóit $\lambda_i = -\mu_i/D$ $(1 \le i \le r)$ választással. $\square$

Ezen tételből a mátrixok rangjára vonatkozóan az alábbi fontos következményeket vonhatjuk le:

TÉTEL. **Rangszámtétel**
Mátrix rangja egyenlő a maximális rendű el nem tűnő aldeterminánsai közös rendjével.

KÖVETKEZMÉNY. *Mátrix rangja egyenlő transzponáltja rangjával.*

Bizonyítás. A transzponált mátrix aldeterminánsai az eredeti mátrix aldeterminánsainak transzponáltjai. Transzponáláskor az aldeterminánsok értéke nem változik. $\square$

KÖVETKEZMÉNY. *Mátrix rangja egyenlő oszlopvektorrendszerének rangjával.*

Bizonyítás. A transzponált mátrix rangja egyenlő az eredeti mátrix rangjával, sorvektorai viszont az eredeti mátrix oszlopvektorai. $\square$

4.7. Mátrix rangjának kiszámítása eliminációs módszerrel

Fölhasználva a vektorrendszer ranginvariáns átalakításait, a korábbiakhoz hasonló egyszerű eliminációs módszerrel számíthatjuk ki a mátrix rangját.

Tekintsük a mátrix első oszlopát. Ha abban minden elem nulla, akkor elhagyhatjuk. Ha van benne nem nulla elem, akkor esetleg sorcserével elérhetjük, hogy az első sor első eleme nullától különböző legyen. Ezután az első sor megfelelő konstansszorosait a második, stb. utolsó sorokhoz adva kinullázhatjuk az első oszlop második, stb., utolsó elemeit. Tekintsük most a második oszlopot. Ha a második, stb., utolsó elemek mind nullák, akkor elhagyhatjuk, mert lineárisan függ az első oszloptól. Ha van köztük nem nulla, akkor esetleg sorcserével elérhetjük, hogy a második sor második eleme ne legyen nulla. Ezután a második sor megfelelő konstansszorosait a további sorokhoz adva kinullázzuk a második oszlop harmadik, stb., utolsó elemét. Az eljárást hasonlóan folytatjuk. Azon sorokat vagy oszlopokat, melyek csak nulla elemet tartalmaznak, vagy arányosak egy másikhoz (lineáris függenek a többitől), el lehet hagyni. Az eljárás végén ún. trapéz alakú mátrixot kapunk (ld. 5.2. rész), amelyben a sorok száma kisebb vagy egyenlő az oszlopok számánál, a főátlóban nem nulla elemek állnak, a főátló alatt pedig nullák. Ezen mátrixnak a főátlóra illeszkedő aldeterminánsa rangmeghatározó aldetermináns, ezért rangja megegyezik sorai számával. Mivel mindvégig ranginvariáns átalakításokat végzetünk, az eredeti mátrix rangja megegyezik a legvégül kapott mátrix sorai számával.

4.8. Alterek összege és direkt összege

Ebben a részben egy vektortér altereinek értelmezzük az összegét és a direkt összegét. Ezen műveletek fontos szerepet fognak játszani a későbbiekben, amikor a vektorterek struktúrájának a pontosabb leírása azáltal válik majd lehetővé, hogy egyszerűbb szerkezetű alterei direkt összegére bontjuk föl.

DEFINÍCIÓ. *Legyenek L_1, L_2 alterek a $\mathbb{T}$ test feletti V vektortérben. Az L_1 és L_2* **alterek összegén** *az*

$$L_1 + L_2 = \{l_1 + l_2 \mid l_1 \in L_1, l_2 \in L_2\}$$

halmazt értjük.

TÉTEL. *A V vektortér két alterének összege újra altér V–ben.*

Bizonyítás. Legyenek $l_1 + l_2, l_1' + l_2' (l_1, l_1' \in L_1; l_2, l_2' \in L_2)$ tetszőleges vektorok $L_1 + L_2$–ben, $\lambda \in \mathbb{T}$ tetszőleges. Akkor

$$(l_1 + l_2) - (l_1' + l_2') = (l_1 - l_1') + (l_2 - l_2') \in L_1 + L_2,$$

$$\lambda(l_1 + l_2) = (\lambda l_1) + (\lambda l_2) \in L_1 + L_2,$$

tehát az Altérkritérium szerint $L_1 + L_2$ altér. □

TÉTEL. *Ha L_1, L_2 alterek V–ben, akkor $L_1 + L_2$ éppen az $L_1 \cup L_2$ által generált altere V–nek.*

Bizonyítás. Nyilván $L_1 \subseteq L_1 + L_2$ és $L_2 \subseteq L_1 + L_2$, tehát $L_1 \cup L_2 \subseteq L_1 + L_2$. Továbbá, mivel $L_1 + L_2$ altér, azért biztosan tartalmazza az $L_1 \cup L_2$ által generált alteret.

Fordítva, tetszőleges $l_1 \in L_1, l_2 \in L_2$ esetén $l_1 + l_2$ nyilván benne van az $L_1 \cup L_2$ által generált altérben. Ezért $L_1 + L_2$ is részhalmaza az $L_1 \cup L_2$ által generált altérnek. □

MEGJEGYZÉS. Ha $L_1, \ldots, L_k$ alterek V–ben, akkor **összegük** az $l_1 + \ldots + l_k$ alakú vektorok halmaza, ahol $l_i \in L_i, 1 \leq i \leq k$. A fentiekhez hasonlóan látható, hogy $L_1 + \ldots + L_k$ is altér.

Két altér összegét akkor nevezzük direkt összegnek, ha a lehető legkisebb mértékben fedik át egymást, vagyis ha a metszetük csak a nullvektort tartalmazza:

DEFINÍCIÓ. *Legyenek L_1, L_2 alterek a V vektortérben. Az $L_1 + L_2$ összeg* **direkt összeg,** *ha $L_1 \cap L_2 = \{0\}$.*

JELÖLÉS. A direkt összeget $L_1 \oplus L_2$–vel jelöljük.

MEGJEGYZÉS. Legyenek $L_1, \ldots, L_k$ alterek V–ben. Ezen alterek összege akkor **direkt összeg**, ha minden $1 \leq i \leq k$ esetén

$$L_i \bigcap \left(\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{k} L_j \right) = \{0\}$$

vagyis ha bármelyiknek a többi összegével vett metszete a triviális, csak a nullvektorból álló altér. A direkt összeg alábbi ekvivalens megfogalmazásait is természetes módon át lehet vinni több altér esetére.

TÉTEL. *Legyenek L_1, L_2 alterek V–ben. Az alábbi tulajdonságok egymással ekvivalensek:*
1. $L_1 + L_2$ direkt összeg.
2. Az L_1+L_2 altér minden a vektora egyértelműen állítható elő $a = l_1+l_2$ alakban, ahol $l_1 \in L_1, l_2 \in L_2$.
3. $dim\,(L_1 + L_2) = dim\,L_1 + dim\,L_2$.

Bizonyítás. Bebizonyítjuk, hogy 1→2, 2→3, 3→1.

1→2. Ha az $a \in L_1 + L_2$ vektor két különböző $a = l_1 + l_2 = l_1' + l_2'$ $(l_1, l_1' \in L_1; l_2, l_2' \in L_2)$ alakban volna előállítható, akkor a nem nulla $l_1 - l_1' = l_2' - l_2$ vektor benne van $L_1 \cap L_2$–ben. De $L_1 \cap L_2 = \{0\}$, tehát $l_1 = l_1', l_2 = l_2'$, azaz az előállítás egyértelmű.

2→3. Legyen $(e_1, \ldots, e_k)$ bázis L_1–ben, $(f_1, \ldots, f_l)$ bázis L_2–ben. Megmutatjuk, hogy akkor $(e_1, \ldots, e_k, f_1, \ldots, f_l)$ bázis $L_1 + L_2$–ben vagyis fennáll 3, különben ellentmondásra jutnánk 2–vel. Mivel L_1+L_2 minden vektora l_1+l_2 $(l_1 \in L_1; l_2 \in L_2)$ alakú, azért $(e_1, \ldots, e_k, f_1, \ldots, f_l)$ nyilván generátorrendszer $L_1 + L_2$–ben. Ha ezen vektorok lineárisan függőek volnának, akkor valamely λ_i, μ_i konstansokkal, melyek nem mindegyike nulla,

$$\lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_k e_k + \mu_1 f_1 + \ldots + \mu_l f_l = 0$$

teljesülne. Ez csak úgy lehet, ha az $l_1 = \lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_k e_k \in L_1$ és $l_2 = \mu_1 f_1 + \ldots + \mu_l f_l \in L_2$ vektorok egyike sem nulla. (Ha nullák volnának ugyanis, akkor abból az következne, hogy minden λ_i, μ_i együttható nulla.) Ezekre $l_1+l_2 = 0$ teljesül. Ha most $a = l_1' + l_2' \in L_1 + L_2$ $(l_1' \in L_1; l_2' \in L_2)$ az a vektor előállítása, akkor $a = (l_1 + l_1') + (l_2 + l_2')$ egy másik előállítás, ami ellentmond 2–nek.

3→1. Tegyük föl, hogy az $L_1 \cap L_2$ altér dimenziója $k \geq 0$. Megmutatjuk, hogy 3 alapján $k = 0$ következik, azaz fennáll 1. Legyen $(e_1, \ldots, e_k)$ bázisa $L_1 \cap L_2$–nek ($k = 0$ esetén a nullvektorból álló triviális altér). Ezt egészítsük ki L_1 illetve L_2 bázisává: legyen $(e_1, \ldots, e_k, f_1, \ldots, f_l)$ bázisa L_1–nek $(l \geq 0)$, $(e_1, \ldots, e_k, g_1, \ldots, g_m)$ bázisa L_2–nek $(m \geq 0)$. Akkor $\dim L_1 = k + l, \dim L_2 = k+m$ és mivel $(e_1, \ldots, e_k, f_1, \ldots, f_l, g_1, \ldots, g_m)$ nyilván generátorrendszere L_1+L_2–nek, azért $\dim\,(L_1 + L_2) \leq k + l + m$. 3 szerint így a dimenziókra

$$2k + l + m = \dim L_1 + \dim L_2 = \dim\,(L_1 + L_2) \leq k + l + m$$

adódik, ami csak $k = 0$ mellett lehetséges. □

4.9. Vektorterek faktorterei

DEFINÍCIÓ. *Legyen V vektortér, L altere V–nek, $a \in V$ egy vektor. Akkor az*

$$a + L = \{a + l \mid l \in L\}$$

halmazt **lineáris sokaság***nak nevezzük. Az a vektort az $a + L$ lineáris sokaság* **reprezentáns elem***ének nevezzük.*

PÉLDÁK.

1. Egy inhomogén lineáris egyenletrendszer megoldáshalmaza lineáris sokaság (ld. 5. fejezet).
2. A szabadvektorok három dimenziós terében azon vektorok, melyek origóból kiinduló reprezentánsai egy origón át nem menő sík (vagy egyenes) pontjaiba mutatnak, lineáris sokaságot alkotnak.

TÉTEL. *Legyen L altere a V vektortérnek, $a, b \in V$. Az $a + L$ és $b + L$ lineáris sokaságok (mint halmazok) pontosan akkor egyeznek meg, ha $a - b \in L$.*

Bizonyítás. Ha $a - b \in L$, akkor van olyan $l \in L$, hogy $a - b = l$. Ha most x tetszőleges eleme $a + L$–nek, akkor $x = a + l_1$ $(l_1 \in L)$. Akkor $x = a + l_1 = b + l + l_1 \in b + L$. Fordítva, ha y a $b + L$ tetszőleges eleme, akkor $y = b + l_2$ $(l_2 \in L)$. Akkor $y = b + l_2 = a - l + l_2 \in a + L$. Tehát $a + L = b + L$.

Másrészt, ha $a + L = b + L$, akkor vannak olyan $l_1, l_2 \in L$ vektorok, hogy $a + l_1 = b + l_2$, de akkor $a - b = l_2 - l_1 \in L$. □

A lineáris sokaságok, és a felhasználásukkal alább definiálandó faktorterek további vizsgálatainkban fontos szerepet kapnak majd. A faktorterek definíciójához legelőször (egy nagyon természetes módon) műveleteket értelmezünk lineáris sokaságok között.

TÉTEL. *Legyen V vektortér, L altér V–ben. Akkor az $\{a + L | a \in V\}$ lineáris sokaságok vektorteret alkotnak az alábbi műveletekre vonatkozóan:*

$$\begin{aligned}(a + L) + (b + L) &= (a + b) + L \\ \lambda(a + L) &= (\lambda a) + L\end{aligned}$$

ahol $a, b \in V, \lambda \in \mathbb{T}$ tetszőlegesek.

MEGJEGYZÉS.

1. A műveletek definícióiban a jobb és bal oldalon álló halmazok egymással megegyeznek. Ez indokolja a definíciót.
2. Könnyen belátható, hogy a lineáris sokaságok közötti műveletek eredménye független a reprezentáns vektorok választásától.

Bizonyítás. A vektortér nulleleme $0 + L$, az $a + L$ additív inverze $(-a) + L$. A műveleti tulajdonságok mind levezethetőek a V–beli műveleti tulajdonságok felhasználásával, pl. $\lambda, \mu \in \mathbb{T}, a \in V$ esetén

$$(\lambda + \mu)(a + L) = ((\lambda + \mu)a) + L = (\lambda a + \mu a) + L =$$

$$= (\lambda a + L) + (\mu a + L) = \lambda(a + L) + \mu(a + L).$$

□

Definíció. *Ha L altere a V vektortérnek, akkor az $\{a + L | a \in V\}$ lineáris sokaságok alkotta fenti tételben szereplő vektorteret a V vektortér L altere szerinti* **faktortér***nek nevezzük.*

Jelölés. A V vektortér L altere szerinti faktorteret V/L-lel jelöljük.

Tétel. *Legyen L altér a V vektortérben. Akkor a V/L lineáris sokaságai a V-nek osztályozását alkotják, mely kompatibilis a műveletekkel.*

Bizonyítás. Ahhoz, hogy a lineáris sokaságok osztályozását alkotják V-nek, $a \in a + L$ miatt csak azt kell megmutatni, hogy ha $a + L$ és $b + L$-nek van közös eleme, akkor egybeesnek. Valóban, ha $a + l_1 = b + l_2$ $(l_1, l_2 \in L)$, akkor $a - b = l_2 - l_1 \in L$, tehát az előző tétel miatt $a + L = b + L$.

Másrészt tetszőleges $x \in a + L, y \in b + L, \lambda \in \mathbb{T}$ esetén $x + y \in (a + b) + L$ és $\lambda x \in (\lambda a) + L$, tehát az osztályozás kompatibilis a műveletekkel. □

Tétel. *Legyen L altér a végesen generált V vektortérben. Akkor*

$$dim\ (V/L) = dim\, V - dim\, L.$$

Bizonyítás. Legyen $(e_1, \dots, e_k)$ bázis L-ben. Egészítsük ezt ki V-nek egy $(e_1, \dots, e_k, e_{k+1}, \dots, e_n)$ bázisává. Megmutatjuk, hogy $(e_{k+1} + L, \dots, e_n + L)$ bázis V/L-ben.

Ha ezek egy lineáris kombinációja a nulla elem, azaz $0 + L$ volna, akkor

$$0 + L = \lambda_{k+1}(e_{k+1} + L) + \dots + \lambda_n(e_n + L) = (\lambda_{k+1}e_{k+1} + \dots + \lambda_n e_n) + L$$

tehát $\lambda_{k+1}e_{k+1} + \dots + \lambda_n e_n \in L$ teljesülne. Akkor vannak olyan $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ skalárok, hogy

$$\lambda_{k+1}e_{k+1} + \dots + \lambda_n e_n = \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_k e_k.$$

Ebből $e_1, \dots, e_k, e_{k+1}, \dots, e_n$ lineáris függetlensége miatt következik, hogy minden szereplő együttható nulla, azaz $\lambda_{k+1} = \dots = \lambda_n = 0$, tehát $\{e_{k+1} + L, \dots, e_n + L\}$ lineárisan függetlenek V/L-ben.

Legyen $a = \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_k e_k + \lambda_{k+1}e_{k+1} + \dots + \lambda_n e_n$ tetszőleges vektor V-ben. Akkor

$$a + L = (\lambda_{k+1}e_{k+1} + \dots + \lambda_n e_n) + L = \lambda_{k+1}(e_{k+1} + L) + \dots + \lambda_n(e_n + L)$$

mivel $a - (\lambda_{k+1}e_{k+1} + \dots + \lambda_n e_n) = \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_k e_k \in L$. Ezek alapján $(e_{k+1} + L, \dots, e_n + L)$ generátorrendszer is V/L-ben. □

5. Lineáris egyenletrendszerek

5.1. Általános tulajdonságok

Definíció. *Legyen* $A = (\alpha_{ij}) \in \mathcal{M}_{m\times n}$ $\mathbb{T}$*–beli elemű mátrix,* $b = (\beta_1, \ldots, \beta_m)^t \in \mathbb{T}^m$ *oszlopvektor. Az*

$$\begin{array}{rcl} \alpha_{11}x_1 + \ldots + \alpha_{1n}x_n & = & \beta_1 \\ & & \\ \alpha_{m1}x_1 + \ldots + \alpha_{mn}x_n & = & \beta_m \end{array}$$

egyenletrendszert **lineáris egyenletrendszer***nek nevezzük. Az* A *mátrixot az egyenletrendszer* **alapmátrix***ának, a* b *vektort a* **szabad tagok vektorá***nak, az*

$$(A|b) = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{1n} & \beta_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{mn} & \beta_m \end{pmatrix}$$

$m \times (n+1)$ *típusú mátrixot az egyenletrendszer* **kibővített mátrix***ának nevezzük. Az alapmátrix oszlopait*

$$a_i = \begin{pmatrix} \alpha_{1i} \\ \vdots \\ \alpha_{mi} \end{pmatrix}$$

jelöli $(1 \leq i \leq n)$*.* $X = (x_1, \ldots, x_n)^t$ *az* **ismeretlenek oszlop vektora***.*

A lineáris egyenletrendszer **partikuláris megoldása** *a* $(\gamma_1, \ldots, \gamma_n)^t \in \mathbb{T}^n$ *szám* n*–es, ha* $x_1 = \gamma_1, \ldots, x_n = \gamma_n$ *helyettesítéssel az egyenletrendszerben minden egyenlőség fennáll.*

A lineáris egyenletrendszer **megoldható***, ha létezik partikuláris megoldása,* **ellentmondásos***, ha nincs partikuláris megoldása.*

Egy megoldható lineáris egyenletrendszert **határozott***nak nevezzünk, ha csak egy partikuláris megoldása van,* **határozatlan***nak, ha több is.*

A lineáris egyenletrendszer **általános megoldása** *az összes partikuláris megoldásainak halmaza.*

Megjegyzés.

1. A következőekben nyilvánvalóvá válik, hogy ha a lineáris egyenletrendszernek egynél több megoldása van, akkor végtelen sok megoldása van.

2. Ha $\{a_1, \ldots, a_n\}$ lineárisan független akkor az egyenletrendszer vagy ellentmondásos, vagy határozott.

3. Ha $m < n$, vagyis kevesebb egyenlet van, mint ismeretlen, akkor az $\{a_1, \ldots, a_n\}$ vektorrendszer lineárisan függő. Ekkor az egyenletrendszer vagy ellentmondásos, vagy határozatlan.

Definíció. *A lineáris egyenletrendszer* **mátrixos alakja**

$$AX = b,$$

vektoros alakja

$$x_1 a_1 + \ldots + x_n a_n = b$$

ahol a_i jelöli az A mátrix i–edik oszlopát $(1 \le i \le n)$.

Az alábbi tétel Kronecker–Capelli tétel néven ismeretes.

Tétel. **1. Rangkritérium**
A lineáris egyenletrendszer pontosan akkor megoldható, ha az alapmátrix rangja megegyezik a kibővített mátrix rangjával:

$$\rho(A) = \rho(A|b).$$

Megjegyzés. Vektoros alakban a rangszámtétel szerint a feltétel:

$$\rho(a_1, \ldots, a_n) = \rho(a_1, \ldots, a_n, b).$$

Bizonyítás. Ha az egyenletrendszer megoldható, akkor b kikombinálható az $a_1, \ldots, a_n$ vektorokból, azaz $\mathcal{L}(a_1, \ldots, a_n) = \mathcal{L}(a_1, \ldots, a_n, b)$, tehát $\rho(a_1, \ldots, a_n) = \rho(a_1, \ldots, a_n, b)$.

Tegyük fel fordítva, hogy teljesül $\rho(a_1, \ldots, a_n) = \rho(a_1, \ldots, a_n, b)$. Legyen $(a_1, \ldots, a_r)$ bázis az $\mathcal{L}(a_1, \ldots, a_n)$ altérben. Mivel $\mathcal{L}(a_1, \ldots, a_n) \subseteq \mathcal{L}(a_1, \ldots, a_n, b)$, és ezen alterek dimenziója megegyezik, azért maguk az alterek is megegyeznek. Tehát $(a_1, \ldots, a_r)$ bázis az $\mathcal{L}(a_1, \ldots, a_n, b)$ altérben is. Ezért vannak olyan $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ skalárok, hogy

$$b = \lambda_1 a_1 + \ldots + \lambda_r a_r.$$

Ebből következően $(\lambda_1, \ldots, \lambda_r, 0, \ldots, 0)^t \in \mathbb{T}^n$ megoldása az egyenletrendszernek. □

Tétel. **2. Rangkritérium**
Egy megoldható lineáris egyenletrendszer pontosan akkor határozott, ha az alapmátrix rangja megegyezik az ismeretlenek számával:

$$\rho(A) = n.$$

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy az egyenletrendszer megoldható, határozott, és bizonyítsuk be, hogy akkor $\rho(A) = n$. Tegyük fel indirekt, hogy $\rho(A) < n$, azaz hogy $a_1, \ldots, a_n$ lineárisan függőek volnának. Akkor vannak olyan $\mu_1, \ldots, \mu_n$

skalárok, melyek nem mindegyike nulla, hogy $\mu_1 a_1 + \ldots + \mu_n a_n = 0$. Ha most $(\gamma_1, \ldots, \gamma_n)^t$ megoldás, azaz $\gamma_1 a_1 + \ldots + \gamma_n a_n = b$, akkor előző egyenletünk szerint

$$(\gamma_1 + \mu_1)a_1 + \ldots + (\gamma_n + \mu_n)a_n = b$$

is fennáll, azaz $(\gamma_1 + \mu_1, \ldots, \gamma_n + \mu_n)^t$ egy másik, $(\gamma_1, \ldots, \gamma_n)^t$–től különböző megoldás, ami ellentmond a határozottságnak.

Fordítva, tegyük fel, hogy az egyenletrendszer megoldható és $\rho(A) = n$. Akkor $b \in \mathcal{L}(a_1, \ldots, a_n)$. Másrészt $\rho(a_1, \ldots, a_n) = n$ miatt $(a_1, \ldots, a_n)$ lineárisan függetlenek, azaz bázist alkotnak az $\mathcal{L}(a_1, \ldots, a_n)$ altérben. A bázisvektorokból az altér b vektora nyilván csak egyféleképpen kombinálható ki, tehát a megoldás egyértelmű. □

Definíció. *A* **lineáris egyenletrendszer homogén**, *ha* $\beta_1 = \ldots = \beta_m = 0$, **inhomogén**, *ha* $\beta_1, \ldots, \beta_m$ *között van nullától különböző.*

Tétel. *Homogén lineáris egyenletrendszer összes partikuláris megoldásainak halmaza alteret alkot* $\mathbb{T}^n$*–ben. Ezen altér dimenziója* $n - \rho(A)$*.*

Megjegyzés.

1. Ezt az alteret **megoldástér**nek nevezzük. Homogén egyenletrendszernek a nullvektor mindig megoldása, ez a triviális megoldás.

2. A tétel alapján látható, hogy ha homogén lineáris egyenletrendszernek van nemtriviális megoldása, akkor végtelen sok megoldása van.

Bizonyítás. Az Altérkritérium alkalmazásához csak azt kell megmutatni, hogy ha $c, d \in \mathbb{T}^n$ megoldás, akkor $c - d$ és $\lambda \in \mathbb{T}$ esetén λc is megoldás. Valóban, ha c, d megoldás, akkor $Ac = 0$, $Ad = 0$, de ebből azonnal következik $A(c-d) = Ac - Ad = 0 - 0 = 0$ és $A(\lambda c) = \lambda A c = \lambda 0 = 0$ is.

A megoldástér dimenziójának vizsgálatához tegyük fel, hogy $\rho(A) = r$ és $(a_1, \ldots, a_r)$ bázisát alkotja az $\mathcal{L}(a_1, \ldots, a_n)$ altérnek.

Vegyük észre, hogy akkor tetszőleges $\lambda_{r+1}, \ldots, \lambda_n$ skalárokhoz egyértelműen léteznek olyan $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ skalárok, hogy $(\lambda_1, \ldots, \lambda_r, \lambda_{r+1}, \ldots, \lambda_n)^t$, megoldás. Valóban, ezen altér $(-\lambda_{r+1} a_{r+1} - \ldots - \lambda_n a_n)$ vektorának egyértelműen léteznek $(\lambda_1, \ldots, \lambda_r)$ koordinátái az $(a_1, \ldots, a_r)$ bázisra vonatkozóan, ami azt jelenti, hogy $\lambda_1 a_1 + \ldots + \lambda_r a_r + \lambda_{r+1} a_{r+1} + \ldots + \lambda_n a_n = 0$.

Hasonlóan, $r + 1 \le i \le n$–re egyértelműen léteznek olyan $\alpha_{i1}, \ldots, \alpha_{ir} \in \mathbb{T}$ számok, hogy

$$a_i = -\alpha_{i1} a_1 - \ldots - \alpha_{ir} a_r.$$

Ez azt jelenti, hogy az

$$\begin{aligned}
f_{r+1} &= (\alpha_{r+1,1}, \ldots, \alpha_{r+1,r}, 1, 0, 0, \ldots, 0)^t \\
f_{r+2} &= (\alpha_{r+2,1}, \ldots, \alpha_{r+2,r}, 0, 1, 0, \ldots, 0)^t \\
f_{r+3} &= (\alpha_{r+3,1}, \ldots, \alpha_{r+3,r}, 0, 0, 1, \ldots, 0)^t \\
&\ldots \\
f_n &= (\alpha_{n1}, \ldots, \alpha_{nr}, 0, 0, 0, \ldots, 1)^t
\end{aligned}$$

vektorok megoldásai az egyenletrendszernek. Állítjuk, hogy ezek a megoldástér bázisát alkotják.

Legyenek ugyanis $\lambda_{r+1}, \ldots, \lambda_n$ tetszőleges skalárok. Akkor

$$\lambda_{r+1} f_{r+1} + \lambda_{r+2} f_{r+2} + \ldots + \lambda_n f_n = (\gamma_1, \ldots, \gamma_r, \lambda_{r+1}, \lambda_{r+2}, \ldots, \lambda_n)^t$$

valamely $\gamma_1, \ldots, \gamma_r$ skalárokkal. Ez a vektor csak úgy lehet nulla, ha minden λ_i együttható nulla, tehát az $f_{r+1}, \ldots, f_n$ vektorok lineárisan függetlenek. Legyen most $(\lambda_1, \ldots, \lambda_r, \lambda_{r+1}, \ldots, \lambda_n)^t$ tetszőleges megoldás. Mivel a megoldások alteret alkotnak, $\lambda_{r+1} f_{r+1} + \lambda_{r+2} f_{r+2} + \ldots + \lambda_n f_n$ is megoldás, melynek utolsó $n - r$ koordinátája megegyezik a $(\lambda_1, \ldots, \lambda_r, \lambda_{r+1}, \ldots, \lambda_n)^t$ utolsó $n - r$ koordinátájával. Fenti megjegyzésünk szerint azonban rögzített utolsó $n - r$ koordinátával csak egy megoldásvektor létezhet, tehát az első r koordináta is megegyezik, azaz $f_{r+1}, \ldots, f_n$ generátorrendszere is a megoldástérnek. □

TÉTEL. *Ha az $Ax = b$ inhomogén lineáris egyenletrendszer megoldható, akkor összes partikuláris megoldásainak halmaza*

$$c + H = \{c + h \mid h \in H\}$$

alakú lineáris sokasága $\mathbb{T}^n$–nek, ahol H az $Ax = 0$ homogén rész megoldástere, $c \in \mathbb{T}^n$ pedig az inhomogén rendszer tetszőleges partikuláris megoldása.

MEGJEGYZÉS.

1. Az inhomogén lineáris egyenletrendszer lehet ellentmondásos is.
2. A tétel alapján látható, hogy ha az inhomogén lineáris egyenletrendszer nem határozott, akkor végtelen sok megoldása van.

Bizonyítás. Először megmutatjuk, hogy $c + H$ minden eleme megoldás. Legyen $h \in H$, akkor $A(c + h) = Ac + Ah = b + 0 = b$, mivel c az inhomogén, h a homogén egyenletrendszer megoldása.

Mutassuk most meg, hogy az inhomogén egyenletrendszer minden megoldása benne van a $c + H$ halmazban. Ha d az inhomogén rendszer tetszőleges megoldása, tehát $Ad = b$, akkor $A(d - c) = Ad - Ac = b - b = 0$ miatt $d - c$ megoldása a homogén rendszernek. Ezért van olyan $h \in H$, hogy $d - c = h$, de ekkor nyilván $d = c + h \in c + H$. □

A következő tétel explicit formulát ad a megoldásra abban a speciális esetben, amikor az alapmátrix négyzetes és nem nulla determinánsú. Ezt a tételt főleg elméleti számításokban gyakran alkalmazzuk.

TÉTEL. **Cramer szabály**
Tegyük föl, hogy az $Ax = b$ lineáris egyenletrendszerben
1. az A alapmátrix négyzetes, azaz $m = n$,
2. az A alapmátrix reguláris, azaz $|A| \neq 0$.
Akkor a lineáris egyenletrendszer megoldható, határozott, és egyetlen megoldása

$$x_k = \frac{\Delta_k}{|A|} \quad (k = 1, \ldots, n)$$

ahol Δ_k annak a mátrixnak a determinánsa, mely A–ból úgy keletkezik, hogy k–adik oszlopa helyére a b vektort írjuk:

$$\Delta_k = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{1,k-1} & \beta_1 & \alpha_{1,k+1} & \alpha_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n,k-1} & \beta_n & \alpha_{n,k+1} & \alpha_{nn} \end{vmatrix}.$$

Bizonyítás. Mivel $|A| \neq 0$, azért $\rho(A) = n$. Tehát az $(A|b)$ kibővített mátrix rangja sem lehet n–nél kisebb (az oszlopvektorrendszerben benne vannak A oszlopai), de nem lehet n–nél nagyobb sem, mert csak n sora van. Ezért $\rho(A) = \rho(A|b) = n$, tehát az egyenletrendszer megoldható és határozott. Legyen $c = (\gamma_1, \dots, \gamma_n)' \in \mathbb{T}^n$ a megoldás, vagyis $Ac = b$, tehát $c = A^{-1}b$. Ez komponensekre kiírva azt jelenti, hogy

$$\gamma_k = (A^{-1}b)_k = \sum_{i=1}^{n}(A^{-1})_{ki}\beta_i = \sum_{i=1}^{n}\frac{A_{ik}}{|A|}\beta_i = \frac{1}{|A|}\sum_{i=1}^{n}A_{ik}\beta_i = \frac{\Delta_k}{|A|}$$

mivel az utolsó összeg éppen a Δ_k determináns kifejtése a k–adik oszlopa szerint. □

5.2. Gauss–féle eliminációs módszer

Ebben a részben a lineáris egyenletrendszerek megoldására egy gyors, praktikus módszert tárgyalunk. A Gauss–tól származó módszer jelentősége abban is megmutatkozik, hogy a módszer különböző változatai a lineáris algebra összes alapfeladatának megoldását lehetővé teszik (ld. a determináns, inverz mátrix, mátrix rangja kiszámításának eliminációs módszereit).

DEFINÍCIÓ. *Két n ismeretlenes lineáris egyenletrendszert ekvivalensnek nevezünk, ha általános megoldásuk (összes megoldásaik halmaza) megegyezik.*

TÉTEL. *Az alábbi átalakítások a lineáris egyenletrendszert vele ekvivalens lineáris egyenletrendszerbe viszik át:*
1. Egyenlet szorzása $\lambda \neq 0$ számmal.
2. Egy egyenlethez hozzáadni egy másik egyenlet λ–szorosát.
3. Olyan egyenlet elhagyása, mely a megmaradóak lineáris kombinációja.
4. Egyenletek sorrendjének felcserélése.
5. Az ismeretlenek sorrendjének felcserélése együtthatóikkal együtt minden egyenletben.

MEGJEGYZÉS. Minden átalakítás úgy értendő, hogy az egyenlet bal oldalával ugyanazt az átalakítást végezzük, mint a jobb oldalon álló konstansokkal.

Bizonyítás. Az eredeti és átalakított egyenletrendszerek megoldáshalmazainak azonosságáról minden esetben egyszerűen meg lehet győződni. □

DEFINÍCIÓ. *Egy* $A = (\alpha_{ij}) \in \mathcal{M}_{k\times n}$ **mátrixot trapéz alakú***nak nevezünk, ha* $k \leq n$, $\alpha_{ii} \neq 0$ *minden* i*–re és* $\alpha_{ij} = 0$ *minden* $i > j$ *esetén, vagyis a főátlóban nem nulla, főátló alatt nulla elemek állnak.*

PÉLDA. Példák trapéz alakú mátrixokra:

$$\begin{pmatrix} 12 & 31 & -1 & 4 & 7 \\ 0 & 23 & 4 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 27 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 78 & 17 & 2 \\ 0 & 34 & 21 \\ 0 & 0 & 67 \end{pmatrix}.$$

TÉTEL. *Ha az* $Ax = b$ *lineáris egyenletrendszer megoldható, akkor a fenti 1.–5. ekvivalens átalakítások véges sokszori alkalmazásával alapmátrixa az alábbi trapéz alakúra hozható:*

$$\begin{aligned} \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \ldots + \alpha_{1k}x_k + \alpha_{1,k+1}x_{k+1} + \ldots + \alpha_{1n}x_n &= \beta_1 \\ \alpha_{22}x_2 + \ldots + \alpha_{2k}x_k + \alpha_{2,k+1}x_{k+1} + \ldots + \alpha_{2n}x_n &= \beta_2 \\ \\ \alpha_{kk}x_k + \alpha_{k,k+1}x_{k+1} + \ldots + \alpha_{kn}x_n &= \beta_k \end{aligned}$$

ahol $k \leq n, \alpha_{ii} \neq 0, 1 \leq i \leq k$.

Továbbá az $x_{k+1}, \ldots, x_n$ *ismeretlenek tetszőleges* $x_{k+1} = \gamma_{k+1}, \ldots, x_n = \gamma_n$ *rögzítése esetén egyértelműen létezik az egyenletrendszernek* $(\gamma_1, \ldots, \gamma_k, \gamma_{k+1}, \ldots, \gamma_n)^t$ *alakú partikuláris megoldása, és minden megoldás megkapható ilyen módon.*

MEGJEGYZÉS.

1. Mivel az $x_{k+1}, \ldots, x_n$ ismeretlenek értéke szabadon választható, ezeket **szabad ismeretlenek**nek nevezzük.

2. Ha $k = n$, akkor az egyenletrendszer határozott, ha $k < n$ akkor határozatlan.

3. A lineáris egyenletrendszer ekvivalens átalakításai az alapmátrixra nézve ranginvariáns átalakítások. Ezért, mivel a fenti trapéz alakú mátrixban szereplő alapmátrix rangja nyilván k, az eredeti mátrix rangja is k.

4. Mint az az alábbi bizonyításból látható, **ellentmondásos lineáris egyenletrendszer** esetén az eliminációs módszer használata

$$0 = \beta$$

alakú egyenletre vezet, ahol az ismeretlenek mindegyikének együtthatója nulla, de a jobb oldalon álló konstans tag nem nulla.

Bizonyítás. Először vázoljuk, hogy az egyenletrendszer alapmátrixa hogyan hozható trapéz alakúra. Az egyenletek sorrendjének, vagy az ismeretlenek (együtthatóikkal együtti) sorrendjének felcserélése útján elérhető, hogy az alapmátrix bal felső sarkában nem nulla elem álljon. Ezután az első egyenlet megfelelő konstansszorosait a következő egyenletekhez hozzáadva elérhetjük, hogy az alapmátrix első oszlopának további elemei nullák legyenek. Tekintsük most a második oszlopot. Szükség esetén a második, harmadik, stb., utolsó egyenletek sorrendjének, vagy a második, harmadik, stb., utolsó ismeretlenek sorrendjének felcserélése útján elérhető, hogy a második sor második eleme nullától különböző legyen. Most a második egyenlet megfelelő konstansszorosait a további egyenletekhez adva elérhetjük, hogy a második oszlop további elemei mind nullává váljanak. Az eljárást hasonlóképpen folytatjuk, amíg rendelkezésre állnak a fentieknek megfelelő nem nulla elemek.

Az eljárás végén lehetséges, hogy $0 = 0$ alakú egyenleteket (ahol mind az ismeretlenek együtthatói, mind a jobb oldali konstans tag nulla), vagy $0 = \beta$ alakú egyenleteket (ahol az ismeretlenek együtthatói nullák, de a jobb oldali konstans tag nem nulla) kapunk. A $0 = 0$ alakú egyenleteket elhagyhatjuk.

Ha az eliminációs eljárás közben nem kapunk $0 = \beta$ alakú egyenletet, akkor az egyenletrendszer alapmátrixa trapéz alakot vesz fel, tehát, mint azt alább belátjuk, megoldható. Ebből következően, ellentmondásos egyenletrendszer esetén az eliminációs módszer szükségképpen $0 = \beta$ alakú egyenletre vezet, melyből azonnal nyilvánvaló, hogy nincs megoldás.

Ha az egyenletrendszer alapmátrixa a tételben szereplő trapéz alakú, akkor az $x_{k+1} = \gamma_{k+1}, \ldots, x_n = \gamma_n$ tetszőleges rögzítése esetén $\alpha_{ii} \neq 0$ $(1 \leq i \leq k)$ miatt egyértelműen meghatározható rendre $x_k, x_{k-1}, \ldots, x_1$ értéke. Továbbá, ha $(\gamma_1, \ldots, \gamma_k, \gamma_{k+1}, \ldots, \gamma_n)^t$ egy tetszőleges megoldása az egyenletrendszernek, akkor ezt a szabad ismeretlenek $x_{k+1} = \gamma_{k+1}, \ldots, x_n = \gamma_n$ választásával kaphatjuk meg, mivel a megoldásvektorok utolsó $n - k$ koordinátája egyértelműen meghatározza az első k koordinátát. □

6. Lineáris leképezések és transzformációk

6.1. Vektorterek lineáris leképezései

Korábban már definiáltuk vektorterek lineáris leképezéseit (ld. a 4.4. részt). Most célunk a lineáris leképezések struktúrájának a részletesebb tanulmányozása.

Definíció. *Legyenek V_1, V_2 vektorterek ugyanazon $\mathbb{T}$ test felett, $\varphi : V_1 \to V_2$ lineáris leképezés. A φ* **képtere**

$$\varphi(V_1) = \{\varphi(a) \mid a \in V_1\}$$

nulltere

$$\mathrm{Ker}\varphi = \{a \in V_1 \mid \varphi(a) = 0\}.$$

Megjegyzés. Nyilvánvalóan $\varphi(V_1) \subseteq V_2$ és $\mathrm{Ker}\varphi \subseteq V_1$.

Tétel. *Ha V_1, V_2 vektorterek, $\varphi : V_1 \to V_2$ lineáris leképezés, akkor φ képtere altér V_2–ben, nulltere altér V_1–ben.*

Bizonyítás. Állításunkat az Altérkritérium felhasználásával bizonyítjuk.

Ha $x, y \in \varphi(V_1)$, akkor van olyan $a, b \in V_1$, hogy $x = \varphi(a), y = \varphi(b)$. De akkor $x - y = \varphi(a - b)$ és $\lambda \in \mathbb{T}$ esetén $\lambda x = \varphi(\lambda a)$ tehát $x - y, \lambda x \in \varphi(V_1)$.

Hasonlóan, ha $a, b \in \mathrm{Ker}\varphi$, azaz $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$, akkor $\varphi(a - b) = 0$ és $\lambda \in T$ esetén $\varphi(\lambda a) = 0$, tehát $a - b, \lambda a \in \mathrm{Ker}\varphi$. □

Tétel. **Homomorfia tétel**

Legyenek V_1, V_2 vektorterek ugyanazon $\mathbb{T}$ test felett, $\varphi : V_1 \to V_2$ lineáris leképezés. Akkor

$$V_1/\mathrm{Ker}\varphi \cong \varphi(V_1).$$

Bizonyítás. Megmutatjuk, hogy az ún. **természetes homomorfizmus**,

$$F(a + \mathrm{Ker}\varphi) = \varphi(a)$$

izomorf leképezése $V_1/\mathrm{Ker}\varphi$–nek $\varphi(V_1)$–re. Először azt mutatjuk meg, hogy F lineáris. Legyenek $a, b \in V_1, \lambda \in \mathbb{T}$. Akkor

$$F((a + \mathrm{Ker}\varphi) + (b + \mathrm{Ker}\varphi)) = F((a + b) + \mathrm{Ker}\varphi) = \varphi(a + b) = \varphi(a) + \varphi(b)$$

$$= F(a + \mathrm{Ker}\varphi) + F(b + \mathrm{Ker}\varphi),$$

másrészt

$$F(\lambda(a + \mathrm{Ker}\varphi)) = F(\lambda a + \mathrm{Ker}\varphi) = \varphi(\lambda a) = \lambda\varphi(a) = \lambda F(a + \mathrm{Ker}\varphi).$$

Ha $F(a + \mathrm{Ker}\varphi) = F(b + \mathrm{Ker}\varphi)$, azaz $\varphi(a) = \varphi(b)$, akkor $\varphi(a - b) = 0$, azaz $a - b \in \mathrm{Ker}\varphi$, de akkor a lineáris sokaságokról tanultak szerint $a + \mathrm{Ker}\varphi = b + \mathrm{Ker}\varphi$, tehát F injektív.

Végül, $\varphi(V_1)$ tetszőleges eleme $\varphi(a)$ alakú ($a \in V_1$), és $F(a+\mathrm{Ker}\varphi) = \varphi(a)$, tehát F szürjektív is. □

MEGJEGYZÉS. Nyilvánvalóan φ pontosan akkor szürjektív, ha $\varphi(V_1) = V_2$. Ehhez hasonló, egyszerű kritériumot ad az injektivitásra a következő tétel.

TÉTEL. *Legyenek V_1, V_2 vektorterek, $\varphi : V_1 \to V_2$ lineáris leképezés. φ pontosan akkor injektív, ha* $\mathrm{Ker}\varphi = \{0\}$.

Bizonyítás. Mivel $\varphi(0) = 0$, azért ha φ injektív, akkor $\mathrm{Ker}\varphi = \{0\}$. Fordítva, tegyük fel, hogy $\mathrm{Ker}\varphi = \{0\}$. Ha most $a, b \in V_1$–re $\varphi(a) = \varphi(b)$, akkor $\varphi(a-b) = 0$, tehát $a - b \in \mathrm{Ker}\varphi$, de akkor $a - b = 0$. Tehát φ injektív. □

DEFINÍCIÓ. *Egy lineáris leképezés képterének dimenzióját a* **leképezés rangjá***nak, nullterének dimenzióját a* **leképezés defektusá***nak nevezzük.*

JELÖLÉS. Ha V_1, V_2 vektorterek, $\varphi : V_1 \to V_2$ lineáris leképezés, φ rangja

$$\rho(\varphi) = \dim \varphi(V_1).$$

Hasonlóan, φ defektusa $\dim \mathrm{Ker}\varphi$.

A homomorfia tétel és a faktortér dimenziójára vonatkozó összefüggés alapján kapjuk az alábbi fontos összefüggést:

KÖVETKEZMÉNY. **Nullitás-rang tétel.**
Ha V_1, V_2 végesen generált vektorterek, $\varphi : V_1 \to V_2$ lineáris leképezés, akkor

$$dim\, V_1 = dim\,\mathrm{Ker}\varphi + dim\,\varphi(V_1). \tag{6}$$

6.2. Lineáris transzformációk

A következőkben lineáris transzformációkat vagyis egy vektorteret önmagába képező lineáris leképezéseket vizsgálunk. Ezek sok olyan speciális tulajdonsággal rendelkeznek, melyekkel általában a lineáris leképezések nem.

DEFINÍCIÓ. *Legyen V vektortér, $\varphi : V \to V$ lineáris leképezés. Akkor φ–t V–n ható* **lineáris transzformáció***nak nevezzük.*

MEGJEGYZÉS. A lineáris transzformációkat **lineáris operátor**oknak is nevezik.

JELÖLÉS. Legyen V vektortér. A V–n ható összes lineáris transzformációk halmazát τ_V–vel jelöljük.

PÉLDÁK.

1. Az identikus leképezés, az azonosan nulla leképezés, valamint az ún. λ–nyújtás ($\varphi(a) = \lambda a$) nyilvánvalóan lineáris transzformációk.
2. A síkbeli szabadvektorok terében a vektorok adott szöggel való elforgatása lineáris transzformáció.

3. A térbeli szabadvektorok körében egy rögzített síkra vonatkozó merőleges vetítés lineáris transzformáció.

4. Tetszőleges $\mathbb{T}$-beli elemű, $n \times n$ típusú mátrix esetén a $\varphi(x) = Ax$ leképezés lineáris leképezése $\mathbb{T}^n$-nek.

TÉTEL. *Legyen V véges dimenziós vektortér, $\varphi \in \tau_V$. φ pontosan akkor injektív, ha szürjektív.*

Bizonyítás. Az előbbi tételünk szerint φ pontosan akkor injektív, ha $\mathrm{Ker}\varphi = \{0\}$. Másrészt az (6) egyenlőség lineáris transzformációk esetén

$$\dim V = \dim \mathrm{Ker}\varphi + \dim \varphi(V)$$

alakba írható. Ebből következően a nulltér pontosan akkor nulla dimenziós, ha a képtér dimenziója $\dim V$, azaz $\varphi(V) = V$, vagyis φ szürjektív. □

DEFINÍCIÓ. *Legyen $(e) = (e_1, \ldots, e_n)$ bázis a $\mathbb{T}$ test feletti V vektortérben, és legyen $\varphi \in \tau_V$. A φ* **lineáris transzformáció** *(e)* **bázisra vonatkozó mátrixa** *alatt azt az $A = (\alpha_{ij}) \in \mathcal{M}_{n\times n}$ mátrixot értjük, melynek i–edik oszlopában a $\varphi(e_i)$ vektor (e) bázisra vonatkozó koordinátaoszlopa áll $(1 \le i \le n)$, vagyis*

$$\varphi(e_i) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ji} e_j.$$

TÉTEL. *Legyen V vektortér $(e) = (e_1, \ldots, e_n)$ bázissal, és legyen $\varphi \in \tau_V$, melynek a mátrixa az (e) bázisra vonatkozóan A. Legyen $a = x_1 e_1 + \ldots + x_n e_n \in V$, $\varphi(a) = y_1 e_1 + \ldots + y_n e_n$, és*

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

a megfelelő koordinátaoszlopok. Akkor

$$Y = AX.$$

Bizonyítás. A lineáris transzformáció $A = (\alpha_{ij})$ mátrixa definícióját felhasználva

$$\sum_{j=1}^{n} y_j e_j = \varphi(a) = \varphi\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i\right) = \sum_{i=1}^{n} x_i \varphi(e_i) = \sum_{i=1}^{n}\left(x_i \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ji} e_j\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ji}x_i e_j = \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_{ji}x_i\right) e_j = \sum_{j=1}^{n}(AX)_j e_j.$$

□

TÉTEL. *Legyen V vektortér, legyenek $(e) = (e_1, \ldots, e_n)$ és $(f) = (f_1, \ldots, f_n)$ bázisok V-ben, és jelölje S az $(e) \to (f)$ bázistranszformáció mátrixát. Legyen $\varphi \in \tau_V$ és jelölje a φ mátrixát az (e) bázisra vonatkozóan A, az (f) bázisra vonatkozóan pedig B. Akkor*

$$B = S^{-1}AS.$$

Bizonyítás. Legyen $A = (\alpha_{ij}), B = (\beta_{ij}), S = (\gamma_{ij})$. Tetszőleges j-re $(1 \leq j \leq n)$

$$\varphi(f_j) = \varphi\left(\sum_{i=1}^{n}\gamma_{ij}e_i\right) = \sum_{i=1}^{n}\gamma_{ij}\varphi(e_i) = \sum_{i=1}^{n}\gamma_{ij}\left(\sum_{k=1}^{n}\alpha_{ki}e_k\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\gamma_{ij}\alpha_{ki}e_k = \sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_{ki}\gamma_{ij}\right)e_k = \sum_{k=1}^{n}(AS)_{kj}e_k$$

Másrészt,

$$\varphi(f_j) = \sum_{i=1}^{n}\beta_{ij}f_i = \sum_{i=1}^{n}\beta_{ij}\left(\sum_{k=1}^{n}\gamma_{ki}e_k\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\beta_{ij}\gamma_{ki}e_k$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n}\gamma_{ki}\beta_{ij}\right)e_k = \sum_{k=1}^{n}(SB)_{kj}e_k.$$

A két eredményt összehasonlítva $AS = SB$, tehát $B = S^{-1}AS$. □

A következőkben szükségünk lesz az alábbi segédtételre.

LEMMA. *Legyenek V_1, V_2 vektorterek, $\varphi : V_1 \to V_2$ izomorf leképezés. Akkor tetszőleges $\{a_1, \ldots, a_k\} \subseteq V_1$ vektorrendszer esetén*

$$\rho(a_1, \ldots, a_k) = \rho(\varphi(a_1), \ldots, \varphi(a_k)).$$

Bizonyítás. Könnyű ellenőrizni, hogy ha φ izomorf, akkor inverze, $\varphi^{-1} : V_2 \to V_1$ is izomorf. Ebből következően valamely $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ skalár együtthatókkal

$$\lambda_1 a_1 + \ldots + \lambda_k a_k = 0$$

pontosan akkor áll fenn, ha

$$\lambda_1\varphi(a_1) + \ldots + \lambda_k\varphi(a_k) = 0.$$

Tehát φ a lineáris összefüggéseket nem változtatja meg. Ennek alapján nyilvánvaló, hogy $\{a_1, \ldots, a_k\}$ egy részrendszere pontosan akkor maximális lineárisan független vektorrendszer $\mathcal{L}(a_1, \ldots, a_k)$–ban, ha a benne szereplő vektorok φ általi képei maximális lineárisan független vektorrendszert alkotnak $\mathcal{L}(\varphi(a_1), \ldots, \varphi(a_k))$–ban. Tehát ezen alterek dimenziói megegyeznek. □

TÉTEL. *Legyen V vektortér, $(e) = (e_1, \ldots, e_n)$ bázis V–ben, $\varphi \in \tau_V$, és jelölje a φ mátrixát az (e) bázisra vonatkozóan A. Akkor*

$$\rho(\varphi) = \rho(A).$$

MEGJEGYZÉS. Mivel $\rho(\varphi)$ a bázistól független, azért a tétel következményeként egy lineáris transzformáció mátrixának a rangja bármely bázisban ugyanannyi.

Bizonyítás. Tudjuk, hogy

$$\rho(\varphi) = \dim \varphi(V) = \dim \mathcal{L}(\varphi(e_1), \ldots, \varphi(e_k)) = \rho(\varphi(e_1), \ldots, \varphi(e_k)).$$

Továbbá, $\rho(A) = \rho(A^{(1)}, \ldots, A^{(n)})$, ahol $A^{(i)}$ jelöli az A mátrix oszlopait. Mivel az A mátrix oszlopai éppen a megfelelő bázisvektorok képeinek koordinátáit tartalmazzák, és a képvektorokhoz a koordinátaoszlopok hozzárendelése izomorfizmus, azért tételünk állítása az előbbi lemmából következik. □

DEFINÍCIÓ. *Legyen V vektortér, $\varphi, \psi \in \tau_V, \lambda \in \mathbb{T}$. A φ és ψ* **összegén, szorzatán,** *és φ–nek a λ–***szorosán** *azon $\varphi + \psi$, $\varphi \circ \psi$, $\lambda\varphi : V \to V$ leképezéseket értjük, melyekre tetszőleges $a \in V$ esetén*

$$\begin{aligned} (\varphi + \psi)(a) &= \varphi(a) + \psi(a) \\ (\varphi \circ \psi)(a) &= \varphi(\psi(a)) \\ (\lambda\varphi)(a) &= \lambda\varphi(a). \end{aligned}$$

TÉTEL. *Lineáris transzformációk összege, szorzata, skalárszorosa is lineáris transzformáció.*

Bizonyítás. Legyenek $\varphi, \psi \in \tau_V, \lambda \in \mathbb{T}$. A $\varphi + \psi, \varphi \circ \psi, \lambda\varphi$ additivitása és homogenitása direkt módon igazolható. Például $a, b \in V$ esetén

$$(\varphi \circ \psi)(a + b) = \varphi(\psi(a + b)) = \varphi(\psi(a) + \psi(b)) =$$

$$= \varphi(\psi(a)) + \varphi(\psi(b)) = (\varphi \circ \psi)(a) + (\varphi \circ \psi)(b).$$

□

TÉTEL. *Legyen V vektortér a $\mathbb{T}$ test felett. Akkor a lineáris transzformációkon fent értelmezett összeadás, szorzás és skalárral való szorzás műveleteire nézve τ_V algebra $\mathbb{T}$ felett.*

Bizonyítás. A vektortér struktúrában a nullvektor szerepét az azonosan nulla transzformáció játssza, a φ additív inverze $(-\varphi)$, melyre $(-\varphi)(a) = -\varphi(a), a \in V$. A műveleti tulajdonságok teljesülése közvetlenül ellenőrizhető, pl. $\varphi, \psi, \rho \in \tau_V, a \in V$ esetén

$$(\varphi \circ (\psi \circ \rho))(a) = \varphi((\psi \circ \rho)(a)) = \varphi(\psi(\rho(a))) = (\varphi \circ \psi)(\rho(a)) = ((\varphi \circ \psi) \circ \rho)(a)$$

tehát a szorzás asszociatív. □

TÉTEL. *Legyen V vektortér $(e) = (e_1, \ldots, e_n)$ bázissal, legyen $\varphi \in \tau_V$ mátrixa (e)–re vonatkozóan A, $\psi \in \tau_V$ mátrixa (e)–re vonatkozóan B. Akkor $\varphi + \psi$ mátrixa $A + B$, $\varphi \circ \psi$ mátrixa AB, és $\lambda \in \mathbb{T}$ esetén $\lambda\varphi$ mátrixa λA.*

Bizonyítás. Legyen $A = (\alpha_{ij}), B = (\beta_{ij})$. Kiszámítjuk $\varphi + \psi, \varphi\psi, \lambda\varphi$ hatását a bázisvektorokon.

$$(\varphi + \psi)(e_i) = \varphi(e_i) + \psi(e_i) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ji} e_j + \sum_{j=1}^{n} \beta_{ji} e_j = \sum_{j=1}^{n} (\alpha_{ji} + \beta_{ji}) e_j =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} (A + B)_{ji} e_j,$$

$$(\varphi \circ \psi)(e_i) = \varphi(\psi(e_i)) = \varphi\left(\sum_{j=1}^{n} \beta_{ji} e_j\right) = \sum_{j=1}^{n} \beta_{ji} \varphi(e_j) = \sum_{j=1}^{n} \beta_{ji} \left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_{kj} e_k\right)$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} (\beta_{ji} \alpha_{kj} e_k) = \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_{kj} \beta_{ji}\right) e_k = \sum_{k=1}^{n} (AB)_{ki} e_k,$$

$$(\lambda\varphi)(e_i) = \lambda(\varphi(e_i)) = \lambda \sum_{j=1}^{k} \alpha_{ji} e_j = \sum_{j=1}^{k} \lambda \alpha_{ji} e_j = \sum_{j=1}^{k} (\lambda A)_{ji} e_j,$$

tehát az i–edik bázisvektor képének koordinátái rendre éppen az $A + B, AB, \lambda A$ mátrix i–edik oszlopában helyezkednek el. □

Az előbbi tétel szerint ha a φ lineáris transzformációhoz hozzárendeljük egy rögzített bázisra vonatkozó mátrixát, akkor ez a leképezés megtartja a műveleteket. Megmutatjuk azt is, hogy ez a hozzárendelés bijektív is, azaz a τ_V és $\mathcal{M}_{n \times n}$ algebrák izomorfak az alábbi értelemben.

DEFINÍCIÓ. *Legyenek A_1, A_2 algebrák egy $\mathbb{T}$ test felett. Az A_1* **izomorf** *A_2–vel, ha létezik olyan $F : A_1 \to A_2$ leképezés, mely lineáris (additív, homogén), megtartja a szorzást, azaz*

$$\forall a, b \in A_1 : F(ab) = F(a)F(b)$$

és bijektív. Az ilyen F leképezést **algebra izomorfizmus***nak nevezzük.*

TÉTEL. *Legyen V vektortér a $\mathbb{T}$ test felett, $(e) = (e_1, \ldots, e_n)$ bázissal. Jelölje $F : \tau_V \to \mathcal{M}_{n\times n}$ azt a leképezést, mely tetszőleges φ lineáris transzformációhoz hozzárendeli az (e) bázisra vonatkozó mátrixát. Ez az F leképezés izomorfizmus a τ_V és $\mathcal{M}_{n\times n}$ algebrák között.*

KÖVETKEZMÉNY.

$$\dim \tau_V = n^2.$$

Bizonyítás. Az előző tétel szerint F művelettartó. F kölcsönösen egyértelmű, ugyanis ha két lineáris transzformáció mátrixa megegyezik akkor a hatásuk a bázisvektorokon ugyanaz, tehát minden vektoron azonosan hatnak (ld. Lineáris leképezések 1. alaptétele). Végül, tetszőleges mátrix egy lineáris transzformáció mátrixa, mert a bázisvektorokon a lineáris transzformáció hatását tetszőlegesen előírhatjuk (ld. Lineáris leképezések 2. alaptétele). □

6.3. Hasonló mátrixok

DEFINÍCIÓ. *Az $A, B \in \mathcal{M}_{n\times n}$* **mátrixok hasonlóak**, *ha van olyan $S \in \mathcal{M}_{n\times n}$ reguláris mátrix, hogy*

$$B = S^{-1}AS.$$

MEGJEGYZÉS. Mint azt az előzőekben láttuk, egy lineáris transzformáció különböző bázisokra vonatkozó mátrixai hasonlóak.

TÉTEL. *Mátrixok hasonlósága ekvivalenciareláció.*

Bizonyítás. Tetszőleges $A \in \mathcal{M}_{n\times n}$ esetén az $E \in \mathcal{M}_{n\times n}$ egységmátrixszal fennáll $A = E^{-1}AE$, tehát a reláció reflexív. Ha $A, B \in \mathcal{M}_{n\times n}$ mátrixokra az $S \in \mathcal{M}_{n\times n}$ reguláris mátrixszal fennáll $B = S^{-1}AS$, akkor $A = (S^{-1})^{-1}B(S^{-1})$ és S^{-1} is nyilván reguláris, tehát a reláció szimmetrikus. Végül, ha az $A, B, C \in \mathcal{M}_{n\times n}$ mátrixokra az $S, T \in \mathcal{M}_{n\times n}$ reguláris mátrixokkal fennáll $B = S^{-1}AS$ és $C = T^{-1}BT$, akkor $C = (ST)^{-1}A(ST)$ és a determinánsok szorzástétele szerint ST is reguláris, tehát a reláció tranzitív. □

TÉTEL. *Hasonló mátrixoknak megegyezik a rangja és a determinánsa.*

MEGJEGYZÉS. A későbbiekben látni fogjuk, hogy hasonló mátrixok karakterisztikus polinomja is ugyanaz.

Bizonyítás. Ha $S \in \mathcal{M}_{n\times n}$ reguláris mátrix, $a \in \mathbb{T}^n$ tetszőleges szám n–es, akkor könnyen látható, hogy az $a \to Sa$ leképezés automorfizmusa $\mathbb{T}^n$–nek. Ezért, az előző részbeli Lemma felhasználásával kapjuk, hogy ha $A \in \mathcal{M}_{n\times n}$ tetszőleges mátrix, $S \in \mathcal{M}_{n\times n}$ reguláris mátrix, akkor $\rho(SA) = \rho(A)$, mivel ha A–nak az oszlopai $A^{(1)}, \ldots, A^{(n)}$, akkor az SA oszlopai $SA^{(1)}, \ldots, SA^{(n)}$, és egyik vektorrendszert a másikba egy izomorfizmus viszi, ami a rangot nem változtatja meg.

Legyenek most $A, B \in \mathcal{M}_{n\times n}$ hasonló mátrixok, azaz $B = S^{-1}AS$ valamely S reguláris mátrixszal. Akkor az iménti állításunkat kétszer is alkalmazva kapjuk, hogy

$$\rho(B) = \rho(S^{-1}AS) = \rho(S(S^{-1}AS)) = \rho(AS) = \rho((AS)^t) = \rho(S^tA^t)$$
$$= \rho((S^t)^{-1}(S^tA^t)) = \rho(A^t) = \rho(A).$$

A determinánsok szorzástételéből adódóan

$$|B| = |S^{-1}AS| = |S^{-1}|\,|A|\,|S| = |S|^{-1}\,|A|\,|S| = |A|.$$

□

6.4. Automorfizmusok

Definíció. *Ha V vektortér és a $\varphi \in \tau_V$ lineáris transzformáció bijektív, akkor φ–t* **automorf** *leképezésnek (***automorfizmus***nak) nevezzük.*

Tétel. *Legyen V vektortér, $\varphi \in \tau_V$. Akkor*
1. φ pontosan akkor automorfizmus, ha mátrixa tetszőleges bázisra vonatkozóan reguláris.
2. Ha φ automorf, akkor φ^{-1} is automorf, és ha egy $(e) = (e_1, \ldots, e_n)$ bázisra vonatkozóan φ mátrixa A, akkor φ^{-1} mátrixa A^{-1}.

Bizonyítás.
1. Mint azt korábban már bizonyítottuk, a φ lineáris transzformáció pontosan akkor injektív, ha szürjektív. Tehát φ pontosan akkor automorf, ha $\rho(\varphi) = \dim \varphi(V) = n$. Mivel φ rangja megegyezik a mátrixának a rangjával, ez ekvivalens azzal, hogy φ tetszőleges $(e_1, \ldots, e_n)$ bázisra vonatkozó A mátrixára $\rho(A) = n$, azaz A reguláris.

2. Ha φ automorf, akkor könnyen ellenőrizhető, hogy φ^{-1} is automorf. A két lineáris transzformáció szorzata az identikus transzformáció, melynek a mátrixa az egységmátrix, tehát φ és φ^{-1} mátrixának szorzata az egységmátrix. □

Tétel. *Legyen V n dimenziós vektortér, $\varphi \in \tau_V$. A következő állítások ekvivalensek:*
1. φ automorfizmus
2. φ injektív
3. $\mathrm{Ker}(\varphi) = \{0\}$
4. φ szürjektív
5. $\varphi(V) = V$
6. $\rho(\varphi) = n$
7. φ mátrixa bármely bázisra vonatkozóan reguláris.

Bizonyítás. Alkalmazzuk korábbi tételeinket. □

6.5. Lineáris transzformáció invariáns alterei

Definíció. *Legyen L altér a V vektortérben, és legyen $\varphi \in \tau_V$. Az L alteret φ–**invariáns alter**ének nevezzük, ha*

$$\forall a \in L : \varphi(a) \in L.$$

Megjegyzés. Nyilvánvalóan $V, \{0\}, \varphi(V), \mathrm{Ker}(\varphi)$ mindig invariáns alterek.

Példák.

1. A λ–nyújtás esetén minden altér φ–invariáns.
2. A síkbeli szabadvektorok terében egy vektor képe legyen az a vektor, melynek egy reprezentánsa az eredeti vektor egy reprezentánsának egy adott egyenesre vonatkozó merőleges vetülete. Ekkor azon vektorok, melyek reprezentánsai párhuzamosak az adott egyenessel, invariáns alteret alkotnak.
3. A síkbeli szabadvektorok terében a forgatásra vonatkozóan nincs triviálistól különböző invariáns altér, ha a forgatás szöge nem π egész számú többszöröse.

Tétel. *Legyen V vektortér, $\varphi \in \tau_V$. Pontosan akkor invariáns V–nek minden altere φ–re nézve, ha φ λ–nyújtás, azaz van olyan $\lambda \in \mathbb{T}$, hogy*

$$\forall a \in V : \varphi(a) = \lambda a.$$

Bizonyítás. Nyilvánvaló, hogy ha φ λ–nyújtás, akkor minden altér φ invariáns.

Tegyük most fel, hogy V minden altere φ invariáns. Válasszunk egy tetszőleges, nem nulla $a \in V$ vektort, és tekintsük az általa generált $\mathcal{L}(a)$ alteret. Mivel ez φ–invariáns, azért $\varphi(a) \in \mathcal{L}(a)$, de mivel $\mathcal{L}(a)$ csak egy dimenziós, azért kell lenni olyan $\lambda \in \mathbb{T}$–nek, hogy $\varphi(a) = \lambda a$. Megmutatjuk, hogy φ minden más vektoron is ugyanilyen λ–val való nyújtásként hat.

Válasszunk egy tetszőleges, nullától különböző $b \in V$ vektort. Ha $b \in \mathcal{L}(a)$, akkor valamely $\mu \in \mathbb{T}$–vel $b = \mu a$, és akkor $\varphi(b) = \varphi(\mu a) = \mu\varphi(a) = \mu\lambda a = \lambda(\mu a) = \lambda b$, azaz b–n ugyanolyan λ–nyújtásként hat φ. Ha b nem eleme $\mathcal{L}(a)$–nak, azaz b lineárian független a–tól, akkor az $\mathcal{L}(b)$ invariáns alteret tekintve adódik, hogy van olyan $\mu \in \mathbb{T}$, hogy $\varphi(b) = \mu b$. Hasonlóan, az $\mathcal{L}(a + b)$ invariáns alteret tekintve adódik, hogy van olyan $\nu \in \mathbb{T}$, hogy $\varphi(a+b) = \nu(a+b)$. Most fölhasználva φ linearitását adódik, hogy

$$\nu(a + b) = \varphi(a + b) = \varphi(a) + \varphi(b) = \lambda a + \mu b$$

azaz $(\nu-\lambda)a+(\nu-\mu)b = 0$, amiből a és b lineáris függetlensége alapján $\nu = \lambda, \nu = \mu$ azaz $\lambda = \mu$ következik, tehát φ ugyanolyan λ–nyújtásként hat b–n is, mint a–n.

$\square$

DEFINÍCIÓ. *Legyen L altér a V vektortérben, $\varphi \in \tau_V$. Tegyük fel, hogy L φ–invariáns altér. A φ L–re való* **megszorítás**a *(leszűkítése) alatt azt a $\varphi/L : L \to L$ lineáris transzformációt értjük, melyre*

$$\forall a \in L : \quad (\varphi/L)(a) = \varphi(a).$$

Az invariáns alterekre leszűkített lineáris transzformációk nagy segítséget fognak nyújtani abban, hogy bonyolultabb lineáris transzformációk szerkezetét egyszerűbb transzformációk felhasználásával le tudjuk írni.

TÉTEL. *Legyen V vektortér, $\varphi \in \tau_V$. Legyenek L, M φ–invariáns alterek, melyekre $L \oplus M = V$. Legyen $(e_1, \dots, e_k)$ bázis L–ben, jelölje A a φ/L mátrixát erre a bázisra vonatkozóan. Legyen $(f_1, \dots, f_l)$ bázis M–ben, jelölje B a φ/M mátrixát erre a bázisra vonatkozóan. Akkor a φ mátrixa a V vektortér $(e_1, \dots, e_k, f_1, \dots, f_l)$ bázisára vonatkozóan tömbös alakú:*

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$$

Fordítva, ha a V vektortér valamely bázisában φ mátrixa ilyen tömbös alakú, akkor V felbomlik φ–invariáns alterek direkt összegére.

Bizonyítás. Az állítás nyilvánvaló a lineáris transzformáció mátrixának és a direkt összegnek az értelmezése alapján. □

7. Lineáris transzformációk spektrálelmélete

Ezen fejezet célja a lineáris transzformációk struktúrájának közelebbi vizsgálata. A lineáris transzformációk sajátvektorai azon vektorok, melyeken a lineáris transzformáció a lehető legegyszerűbb módon, nyújtásként hat. A sajátvektorhoz tartozó sajátérték a nyújtás együtthatója.

Pontosan jellemezni fogjuk azon lineáris transzformációkat, melyek esetén a transzformáció tere felbomlik olyan alterek direkt összegére, melyeken a transzformáció λ–nyújtásként hat. Ezen esetekben lehetséges olyan bázis konstruálása, melyben a transzformáció mátrixa diagonális. Ez nagyban megkönnyíti a számolást is a transzformáció mátrixával.

Nem létezik azonban minden lineáris transzformáció esetén olyan bázis, melyben a transzformáció mátrixa diagonális alakú. Általában, (legalábbis komplex vektorterek esetén) konstruálható olyan bázis, mely esetén a transzformáció mátrixa csak a főátlóban és alatta tartalmazhat nem nulla elemeket (a sajátértékeket, ill. 1–eseket). Az ilyen mátrixot a transzformáció mátrixa Jordan–féle normálalakjának nevezzük.

7.1. Sajátérték, sajátvektor

DEFINÍCIÓ. *Legyen V vektortér a $\mathbb{T}$ test felett, és legyen $\varphi \in \tau_V$. Ha valamely $\lambda \in \mathbb{T}$ skalárral és nullától különböző $a \in V$ vektorral*

$$\varphi(a) = \lambda a$$

teljesül, akkor λ–t a φ **sajátérték***ének, a–t a φ transzformáció λ sajátértékhez tartozó* **sajátvektor***ának nevezzük.*

TÉTEL. *Legyen V vektortér, $\varphi \in \tau_V$, és legyen λ sajátértéke φ–nek. Azon a vektorok, melyekre $\varphi(a) = \lambda a$, alteret alkotnak V–ben.*

Bizonyítás. Alkalmazzuk az Altérkritériumot. Legyenek $a, b \in V$, melyekre $\varphi(a) = \lambda a, \varphi(b) = \lambda b$ és legyen $\mu \in \mathbb{T}$. Akkor $\varphi(a - b) = \varphi(a) - \varphi(b) = \lambda a - \lambda b = \lambda(a - b)$, másrészt $\varphi(\mu a) = \mu\varphi(a) = \mu(\lambda a) = \lambda(\mu a)$, tehát $a - b, \mu a$ is benne van a halmazban. □

DEFINÍCIÓ. *Ha λ sajátértéke φ–nek, akkor az*

$$L_\lambda = \{a \mid \varphi(a) = \lambda a\}$$

alteret a λ sajátértékhez tartozó **sajátaltér***nek nevezzük.*

MEGJEGYZÉS.

1. Az L_λ sajátaltér tartalmazza az összes λ–hoz tartozó sajátvektort és a nullvektort.

2. Az előbbi tétel szerint adott sajátértékhez több sajátvektor is tartozik. Ezzel szemben egy sajátvektor nyilvánvalóan csak egy sajátértékhez tartozhat.

3. Legyen A a φ mátrixa a V egy tetszőleges bázisára vonatkozóan. Jelölje $X_0 \in \mathbb{T}^n$ az $a \in V$ vektor ezen bázisra vonatkozó koordinátaoszlopát. $\varphi(a) = \lambda a$ azzal ekvivalens, hogy $AX_0 = \lambda X_0$, azaz $(A - \lambda E)X_0 = 0$. Tehát a sajátaltér vektorainak koordinátái éppen az
$$(A - \lambda E)X = 0$$
homogén lineáris egyenletrendszer megoldásterének elemei.

4. A sajátaltér invariáns altere φ–nek.

TÉTEL. *Legyen V vektortér, $\varphi \in \tau_V$. A φ páronként különböző sajátértékeihez tartozó sajátvektorok lineárisan független vektorrendszert alkotnak V–ben.*

Bizonyítás. Legyenek $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ páronként különböző sajátértékek, $a_1, \ldots, a_k$ a hozzájuk tartozó sajátvektorok. Az állítást teljes indukcióval bizonyítjuk. $k = 1$–re nyilván igaz, mert a_1 nem nulla vektor. Most tegyük fel, hogy már beláttuk, hogy $a_1, \ldots, a_{k-1}$ lineárisan függetlenek, és vizsgáljuk meg, hogy lehet-e az $a_1, \ldots, a_{k-1}, a_k$ vektorok egy lineáris kombinációja nulla:
$$\mu_1 a_1 + \ldots + \mu_{k-1} a_{k-1} + \mu_k a_k = 0 \tag{7}$$
ahol $\mu_i \in \mathbb{T}$, $1 \le i \le k$. Alkalmazva a (7) egyenletre a φ lineáris transzformációt, kapjuk, hogy
$$\lambda_1 \mu_1 a_1 + \ldots + \lambda_{k-1} \mu_{k-1} a_{k-1} + \lambda_k \mu_k a_k = 0,$$
másrészt a (7) egyenletet λ_k–val beszorozva adódik, hogy
$$\lambda_k \mu_1 a_1 + \ldots + \lambda_k \mu_{k-1} a_{k-1} + \lambda_k \mu_k a_k = 0.$$
Az utóbbi két egyenlőséget egymásból kivonva kapjuk, hogy
$$(\lambda_1 - \lambda_k)\mu_1 a_1 + \ldots + (\lambda_{k-1} - \lambda_k)\mu_{k-1} a_{k-1} = 0.$$
Az indukciós feltétel alapján ez a lineáris kombináció csak úgy lehet nulla, ha minden kombináló együttható nulla. Ez a sajátértékek különbözősége miatt csak $\mu_1 = \ldots = \mu_{k-1} = 0$ esetben lehetséges. Ekkor azonban a (7) egyenlőség $\mu_k a_k = 0$ alakot kap, tehát μ_k is nulla kell hogy legyen. Tehát $a_1, \ldots, a_k$ lineárisan független. □

TÉTEL. *Legyen V vektortér, $\varphi \in \tau_V$. A φ különböző sajátértékeihez tartozó sajátalterek összege direkt összeg.*

Bizonyítás. Legyenek $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ a φ különböző sajátértékei. Legyen $a \in L_{\lambda_1} + \ldots + L_{\lambda_k}$ egy tetszőleges vektor. Megmutatjuk, hogy csak egyféleképpen állhat elő $a = l_1 + \ldots + l_k$ alakban, ahol $l_i \in L_{\lambda_i}, 1 \le i \le k$. Tegyük föl, hogy $a = l'_1 + \ldots + l'_k, l'_i \in L_{\lambda_i}, 1 \le i \le k$ egy másik előállítás. Akkor

$$(l_1 - l'_1) + \ldots + (l_k - l'_k) = 0$$

ahol a zárójelben különböző sajátértékekhez tartozó sajátalterek vektorai állnak. Mivel előző tételünk szerint ezek közül a nullától különbözők lineárisan függetlenek, és ez egy nem triviális lineáris kombináció, ezért $l_i = l'_i, 1 \le i \le k$, tehát az a vektor előállítása egyértelmű. □

7.2. Karakterisztikus polinom

Ebben a részben megmutatjuk, hogy egy lineáris transzformáció sajátértékei éppen a transzformációhoz tartozó ún. karakterisztikus polinom skalártartományba tartozó gyökei. Először mátrixok karakterisztikus polinomját értelmezzük.

Definíció. *Egy $A \in \mathcal{M}_{n\times n}$ $\mathbb{T}$–beli elemekkel rendelkező* **mátrix karakterisztikus polinomja**

$$f(x) = |A - xE|$$

ahol $E \in \mathcal{M}_{n\times n}$ az egységmátrix.

Megjegyzés. Ha $A = (\alpha_{ij})$, akkor az

$$f(x) = |A - xE| = \begin{vmatrix} \alpha_{11} - x & \alpha_{12} & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} - x & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \alpha_{nn} - x \end{vmatrix}$$

determináns x–nek n–edfokú polinomja, az x^n együtthatója $(-1)^n$, a konstans tag $|A|$.

Tétel. **Cayley–Hamilton tétel**
Minden négyzetes mátrix gyöke saját karakterisztikus polinomjának.

Megjegyzés. Ezt a tételt nem bizonyítjuk, mivel nem fogjuk alkalmazni. Ha az A mátrix karakterisztikus polinomja

$$f(x) = \alpha_n x^n + \alpha_{n-1} x^{n-1} + \ldots + \alpha_1 x + \alpha_0$$

(ahol $\alpha_i \in \mathbb{T}, 0 \le i \le n$), akkor a tétel azt jelenti, hogy mátrixokra fennáll az

$$f(A) = \alpha_n A^n + \alpha_{n-1} A^{n-1} + \ldots + \alpha_1 A + \alpha_0 E = 0$$

egyenlőség, ahol E az egységmátrix, 0 a nullamátrix.

Tétel. *Hasonló mátrixok karakterisztikus polinomja ugyanaz.*

Megjegyzés. Tehát hasonló mátrixoknak közös a rangja, determinánsa és karakterisztikus polinomja.

Bizonyítás. Legyenek $A, B, S \in \mathcal{M}_{n\times n}$, legyen S reguláris, és tegyük fel, hogy $B = S^{-1}AS$. Akkor

$$|B - xE| = |S^{-1}AS - xE| = |S^{-1}AS - xS^{-1}ES| = |S^{-1}(A - xE)S|$$

$$= |S^{-1}||A - xE||S| = |A - xE|.$$

□

Ez a tétel teszi lehetővé a következő definíciót:

Definíció. *Legyen a $\varphi \in \tau_V$ lineáris transzformáció mátrixa a V vektortér egy $(e_1, \ldots, e_n)$ bázisára vonatkozóan A. Akkor φ* **karakterisztikus polinomja**

$$f(x) = |A - xE|.$$

Megjegyzés. Különböző bázisokra vonatkozóan φ mátrixai egymáshoz hasonlóak, ezért előbbi tételünk szerint φ karakterisztikus polinomja nem függ a kiválasztott bázistól.

Definíció. *Legyen V vektortér a $\mathbb{T}$ test felett. A $\varphi \in \tau_V$ lineáris transzformáció* **karakterisztikus gyöke** *alatt a φ karakterisztikus polinomjának $\mathbb{T}$–beli gyökét értjük.*

Megjegyzés. Ha $\mathbb{T} = \mathbb{C}$, akkor az algebra alaptétele szerint a karakterisztikus polinom minden gyöke $\mathbb{C}$–beli, tehát karakterisztikus gyök. Azonban $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ esetén általában a karakterisztikus polinomnak vannak valós és (nem valós) komplex gyökei is, ezek közül csak a valósak a karakterisztikus gyökök.

Tétel. *$\lambda \in \mathbb{T}$ pontosan akkor sajátértéke $\varphi \in \tau_V$–nek, ha λ karakterisztikus gyöke φ–nek.*

Bizonyítás. Legyen $(e_1, \ldots, e_n)$ bázis V–ben és jelölje A a φ mátrixát erre a bázisra vonatkozóan. Ha $\lambda \in \mathbb{T}$ sajátérték, akkor van olyan $0 \neq a \in V$ vektor, hogy

$$\varphi(a) = \lambda a.$$

Ha $a = x_1e_1 + \ldots + x_ne_n$ és X_0 jelöli az $(x_1, \ldots, x_n)^t \in \mathbb{T}^n$ oszlopvektort, akkor ez azt jelenti, hogy $AX_0 = \lambda X_0$, azaz $(A - \lambda E)X_0 = 0$, tehát létezik nem triviális megoldása az

$$(A - \lambda E)X = 0$$

homogén lineáris egyenletrendszernek. Ez csak úgy lehet, ha az egyenletrendszer alapmátrixa szinguláris, vagyis λ karakterisztikus gyök. A fordított állítást a gondolatmenetet lépésenként visszafelé követve kapjuk. □

Definíció. *Legyen $\lambda \in \mathbb{T}$ sajátértéke φ–nek.*
A λ **algebrai multiplicitása** *(multλ) alatt azt értjük, hogy λ hányszoros gyöke a φ karakterisztikus polinomjának (azaz $(x-\lambda)$–nak melyik az a legmagasabb hatványa, amely még osztja a karakterisztikus polinomot $\mathbb{T}[x]$–ben).*
A λ **geometriai multiplicitás***a alatt a hozzá tartozó sajátaltér dimenzióját értjük: $\dim L_\lambda$.*

Tétel. *Legyen λ sajátértéke $\varphi \in \tau_V$–nek. Akkor*

$$\dim L_\lambda \leq \text{mult}\lambda.$$

Bizonyítás. Legyen $(e_1, \ldots, e_k)$ bázisa az L_λ sajátaltérnek, és egészítsük ezt ki V egy $(e_1, \ldots, e_k, e_{k+1}, \ldots, e_n)$ bázisává. Ebben a bázisban φ mátrixa olyan felépítésű, hogy bal felső $k \times k$ típusú tömbje a $k \times k$–as egységmátrix λ–szorosa, bal alsó $(n-k) \times k$ típusú tömbjében pedig minden elem nulla:

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 & \alpha_{1,k+1} & \alpha_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \lambda & \alpha_{k,k+1} & \alpha_{kn} \\ 0 & 0 & \alpha_{k+1,k+1} & \alpha_{k+1,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \alpha_{n,k+1} & \alpha_{nn} \end{pmatrix}.$$

Ennek a mátrixnak a karakterisztikus polinomja biztosan osztható $(\lambda - x)^k$–nal. Tehát mult$\lambda \geq k = \dim L_\lambda$. □

7.3. Lineáris transzformációk spektruma

Definíció. *$\varphi \in \tau_V$* **spektruma** *a φ sajátértékeinek a rendszere, mindegyiket annyiszor véve, ahányszoros gyöke φ karakterisztikus polinomjának. φ spektruma teljes, ha $\dim V = n$ elemből áll.*

Jelölés. φ spektrumát Spφ-vel jelöljük.

Megjegyzés. $\mathbb{T} = \mathbb{C}$ esetén Spφ mindig teljes, $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ esetén nem mindig.

A lineáris transzformációk szerkezetének, működésének áttekintése, valamint a képvektorok koordinátáinak kiszámítása akkor a legegyszerűbb, ha létezik olyan bázis, melyben a lineáris transzformáció mátrixa diagonális alakú. Ilyen bázis létezése azt jelenti, hogy a transzformáció tere fölbontható olyan invariáns alterek direkt összegére, melyeken a transzformáció nyújtásként hat. Az alábbiakban megvizsgáljuk, milyen feltételek mellett lehetséges ilyen bázis konstruálása.

Tétel. *A V vektortérnek pontosan akkor létezik $\varphi \in \tau_V$ sajátvektoraiból álló bázisa, ha a következő két feltétel teljesül:*

1. $\mathrm{Sp}\varphi$ *teljes*
2. φ *minden* λ *sajátértéke esetén* $\mathrm{mult}\lambda = \dim L_\lambda$.

Bizonyítás.

I. Tegyük fel, hogy 1,2 teljesül. Jelölje $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$ a φ különböző sajátértékeit. 1 szerint ezek algebrai multiplicitásainak összege $\dim V = n$, 2 szerint a geometriai multiplicitások megegyeznek az algebrai multiplicitásokkal, tehát a sajátalterek dimenzióinak összege is n. Mivel korábbi tételünk alapján a különböző sajátértékekhez tartozó sajátalterek összege direkt összeg, ez azt jelenti, hogy $L_{\lambda_1} \oplus \ldots \oplus L_{\lambda_s} = V$. Így a sajátalterek bázisainak egyesítése V–nek bázisát adja. Ez a bázis nyilván φ sajátvektoraiból áll.

II. Fordítva, tegyük fel, hogy létezik V–nek φ sajátvektoraiból álló bázisa. Legyenek $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$ azok a sajátértékek, amelyekhez a bázisvektorok mint sajátvektorok tartoznak. Tegyük fel, hogy λ_1–hez k_1 db, $\ldots$, λ_s–hez k_s db bázisvektor tartozik. Akkor $k_1 + \ldots + k_s = n$. Mivel a bázisvektorok lineárisan függetlenek, azért $k_j \leq \dim L_{\lambda_j}$, továbbá előző tételünk szerint $\dim L_{\lambda_j} \leq \mathrm{mult}\lambda_j (1 \leq j \leq s)$. Azonban a karakterisztikus polinomnak nem lehet n–nél több gyöke, azaz $\mathrm{mult}\lambda_1 + \ldots + \mathrm{mult}\lambda_s \leq n$ amiből következően mindenhol $\leq$ helyett csakis egyenlőség állhat, többek között $\mathrm{mult}\lambda_j = \dim L_{\lambda_j}$ és $\mathrm{mult}\lambda_1 + \ldots + \mathrm{mult}\lambda_s = n$, azaz $\mathrm{Sp}\varphi$ teljes. □

TÉTEL. *Valós vagy komplex vektortér feletti lineáris transzformációnak mindig van egy– vagy kétdimenziós invariáns altere.*

Bizonyítás. Komplex vektortér esetén mindig van sajátérték, és ekkor egy tetszőleges sajátvektor egy egydimenziós invariáns alteret generál.

Legyen most V valós vektortér, $\varphi \in \tau_V$. Ha van φ–nek sajátértéke, akkor az előbbiekhez hasonlóan egy sajátvektora egy egydimenziós invariáns alteret generál. Tegyük föl, hogy φ karakterisztikus polinomjának minden gyöke komplex. Legyen $\lambda = \alpha + i\beta$ egy komplex gyök ($\alpha, \beta \in \mathbb{R}$), azaz

$$|A - (\alpha + i\beta)E| = 0,$$

ahol A jelöli a φ mátrixát a V egy $(e_1, \ldots, e_n)$ bázisában. Tekintsük most az

$$(A - (\alpha + i\beta)E)X = 0$$

homogén lineáris egyenletrendszer megoldásait $\mathbb{C}^n$–ben. Mivel az egyenletrendszer alapmátrixa szinguláris, azért van nem triviális $(\gamma_1, \ldots, \gamma_n)^t \in \mathbb{C}^n$ megoldása. Legyen $\gamma_j = \mu_j + i\nu_j; \mu_j, \nu_j \in \mathbb{R}, 1 \leq j \leq n$, továbbá $X_0 = (\mu_1, \ldots, \mu_n)^t, Y_0 = (\nu_1, \ldots, \nu_n)^t \in \mathbb{R}^n$. Ez azt jelenti, hogy

$$0 = (A - (\alpha + i\beta))(X_0 + iY_0) = (AX_0 - \alpha X_0 + \beta Y_0) + i(AY_0 - \alpha Y_0 - \beta X_0).$$

A valós és a képzetes részeket szétválasztva

$$AX_0 = \alpha X_0 - \beta Y_0, \quad AY_0 = \alpha Y_0 + \beta X_0$$

adódik. Ha most $a = \mu_1 e_1 + \ldots + \mu_n e_n, b = \nu_1 e_1 + \ldots + \nu_n e_n$, akkor ezek szerint

$$\varphi(a) = \alpha a - \beta b, \quad \varphi(b) = \alpha b + \beta a$$

teljesül. Tehát $\mathcal{L}(a, b)$ invariáns altér, melynek dimenziója legfeljebb kettő. □

7.4. Nilpotens operátorok

Az előző részben láttuk, hogy nem minden lineáris transzformáció esetén lehetséges a transzformáció mátrixát diagonalizálni. Mostani vizsgálatunk célja megmutatni, hogy legalábbis a komplex számtest (vagy algebrailag zárt test) feletti vektorterek esetén mindig lehetséges olyan bázis konstruálása, melyben a lineáris transzformáció mátrixa egy egyszerű kanonikus alakot vesz fel. Ezt Jordan–féle normálformának fogjuk nevezni. Hogy ehhez eljuthassunk, először az ún. nilpotens transzfomációk vizsgálata szükséges. Ezen és a következő részben Halmos [6] könyve ide vonatkozó részének a gondolatmenetét követjük.

DEFINÍCIÓ. *Legyen V vektortér, $\varphi \in \tau_V$. A φ* **lineáris transzformációt nilpotens***nek nevezzük, ha van olyan r pozitív egész, hogy $\varphi^r = \mathcal{O}$, az azonosan nulla operátor. A legkisebb ilyen r–et a φ* **nilpotencia indexé***nek nevezzük.*

TÉTEL. *Legyen V vektortér, $\varphi \in \tau_V$ pedig r nilpotencia indexű nilpotens operátor és tegyük fel, hogy $e \in V$ olyan vektor, hogy $\varphi^{r-1}(e) \neq 0$. Akkor*
I. $(e, \varphi(e), \ldots, \varphi^{r-1}(e))$ lineárisan független vektorok
II. $M = \mathcal{L}(e, \varphi(e), \ldots, \varphi^{r-1}(e))$ φ–invariáns altér és létezik hozzá olyan N φ–invariáns altér, hogy $M \oplus N = V$.

Bizonyítás.
I. Indirekt tegyük fel, hogy a vektorrendszer lineárisan függő, azaz vannak olyan $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{r-1} \in \mathbb{T}$ skalárok, melyek nem mindegyike nulla és

$$\alpha_0 e + \alpha_1 \varphi(e) + \ldots + \alpha_{r-1}\varphi^{r-1}(e) = 0.$$

Jelölje j azt a minimális indexet, melyre $\alpha_j \neq 0$. Mivel $\varphi^{r-1}(e) \neq 0$, azért $j < r-1$. Az

$$\alpha_j \varphi^j(e) + \ldots + \alpha_{r-1}\varphi^{r-1}(e) = 0$$

egyenlőségből $\alpha_j \neq 0$ miatt $\varphi^j(e) = \varphi^{j+1}(u)$ adódik, ahol
$u = -(\alpha_{j+1}/\alpha_j)e - \ldots - (\alpha_{r-1}/\alpha_j)\varphi^{r-j-2}(e)$. Akkor

$$\varphi^{r-1}(e) = \varphi^{r-j-1}(\varphi^j(e)) = \varphi^{r-j-1}(\varphi^{j+1}(u) = \varphi^r(u) = 0$$

mivel r a φ nilpotencia indexe. Ez viszont ellentmond e választásának.

II. Legyen $M = \mathcal{L}(e, \varphi(e), \ldots, \varphi^{r-1}(e))$. Mivel a generátor vektorok képei is M–ben vannak, azért M φ–invariáns. Az N altér létezését az r nilpotencia index szerinti teljes indukcióval fogjuk bizonyítani. Ha $r = 1$, akkor φ az azonosan nulla operátor, ha $(e_1, \ldots, e_n)$ bázisa V–nek, akkor lehet $M = \mathcal{L}(e_1), N = \mathcal{L}(e_2, \ldots, e_n)$–et választani. Tegyük most fel, hogy az állítás igaz $(r-1)$ nilpotencia indexű operátorokra, és ennek felhasználásával mutassuk meg, hogy r nilpotencia index esetén is igaz.

A $\varphi(V)$ képtér invariáns altere φ–nek. A $\varphi/\varphi(V)$ leszűkített operátor nyilván $(r-1)$ nilpotencia indexű. Legyen $u = \varphi(e)$, akkor $u \in \varphi(V)$ és $\varphi^{r-2}(u) \neq 0$ az e választása miatt. Az I. pontot alkalmazva kapjuk, hogy $(u, \varphi(u), \ldots, \varphi^{r-2}(u))$ lineárisan függetlenek. Az $M_0 = \mathcal{L}(u, \varphi(u), \ldots, \varphi^{r-2}(u))$ altér invariáns altere

$\varphi(V)$–nek. Akkor az indukciós feltevés szerint van olyan N_0 invariáns altere $\varphi(V)$–nek, hogy

$$M_0 \oplus N_0 = \varphi(V) \tag{8}$$

1. Legyen

$$N_1 = \{x \in V \mid \varphi(x) \in N_0\}.$$

Ha $x, y \in N_1$, azaz $\varphi(x), \varphi(y) \in N_0$, akkor $\varphi(x-y) = \varphi(x) - \varphi(y)$ és tetszőleges $\lambda \in \mathbb{T}$–vel $\varphi(\lambda x) = \lambda\varphi(x)$ is elemei N_0–nak (mert N_0 altér), tehát $x - y, \lambda x \in N_1$, tehát N_1 altér (ld. Altérkritérium). Továbbá, nyilvánvalóan

$$\varphi(N_1) \subseteq N_0. \tag{9}$$

2. Most megmutatjuk, hogy

$$V = M + N_1. \tag{10}$$

Legyen $a \in V$ tetszőleges vektor. Akkor $\varphi(a) \in \varphi(V) = M_0 \oplus N_0$, tehát vannak olyan $m_0 \in M_0, n_0 \in N_0$ vektorok, hogy $\varphi(a) = m_0 + n_0$. Az M_0 altér definíciója szerint vannak olyan $\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_{r-2} \in \mathbb{T}$ skalárok, hogy $m_0 = \gamma_0 u + \gamma_1\varphi(u) + \ldots + \gamma_{r-2}\varphi^{r-2}(u)$, azaz $m_0 = \varphi(m_1)$ ahol $m_1 = \gamma_0 e + \gamma_1\varphi(e) + \ldots + \gamma_{r-2}\varphi^{r-2}(e) \in M$. Most $\varphi(a) = \varphi(m_1) + n_0$–ból következően $\varphi(a - m_1) = n_0 \in N_0$ tehát N_0 definíciója szerint $a - m_1 \in N_1$. Vagyis $a = m_1 + (a - m_1), m_1 \in M, a - m_1 \in N_1$ ami bizonyítja (10)–et.

3. Megmutatjuk, hogy

$$M \cap N_0 = \{0\}. \tag{11}$$

Ha $x \in M \cap N_0$ akkor egyrészt $x \in M$, azaz $\varphi(x) \in M_0$, másrészt $x \in N_0$ azaz $\varphi(x) \in N_0$ (N_0 invariáns altér). De akkor $\varphi(x) \in M_0 \cap N_0$ tehát $\varphi(x) = 0$, mivel M_0 és N_0 összege direkt összeg. Mivel $x \in M$, azért vannak olyan $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{r-1} \in \mathbb{T}$ skalárok, hogy $x = \alpha_0 e + \alpha_1\varphi(e) + \ldots + \alpha_{r-1}\varphi^{r-1}(e)$, tehát $\varphi(x) = \alpha_0\varphi(e) + \alpha_1\varphi^2(e) + \ldots + \alpha_{r-2}\varphi^{r-1}(e) = 0$. Mivel $(\varphi(e), \varphi^2(e), \ldots, \varphi^{r-1}(e))$ lineárisan független vektorok, azért innen $\alpha_0 = \ldots = \alpha_{r-2} = 0$. Ezért $x = \alpha_{r-1}\varphi^{r-1}(e)$, de ez a vektor benne van $M_0 \cap N_0$–ban, tehát $x = 0$, mivel $M_0 \cap N_0 = \{0\}$.

4. Belátjuk, hogy N_0 és $M \cap N_1$ alterei N_1–nek, melyek metszete csak a nulla vektorból áll. Valóban, ha $a \in N_0$, akkor N_0 φ–invariáns volta miatt $\varphi(a) \in N_0$, de akkor az N_0 definíciója miatt $a \in N_1$. Tehát $N_0 \subseteq N_1$. Másrészt $M \cap N_1$ nyilván altere N_1–nek. Végül, (11) felhasználásával adódik, hogy $(M \cap N_1) \cap N_0 \subseteq M \cap N_0 = \{0\}$.

5. Az előző pont szerint N_0 és $M \cap N_1$ összege direkt összeg, és ez a direkt összeg altere N_1–nek. Akkor létezik olyan N_1^+ altere N_1–nek, hogy

$$N_1^+ \oplus N_0 \oplus (M \cap N_1) = N_1. \tag{12}$$

Azt állítjuk, hogy akkor a keresett altér

$$N = N_1^+ \oplus N_0.$$

5a. Mivel $N_1 = N \oplus (M \cap N_1)$, tehát $N \cap (M \cap N_1) = \{0\}$, valamint $N \subseteq N_1$, azért

$$M \cap N \subseteq N \cap (M \cap N_1) = \{0\}.$$

tehát M és N összege direkt összeg.

5b. Mivel $M \subseteq M \oplus N$, továbbá $N_1 = N \oplus (M \cap N_1) \subseteq M \oplus N$, azért (10) felhasználásával $V = M + N_1 \subseteq M \oplus N$, tehát $M \oplus N = V$.

5c. Felhasználva, hogy $N \subseteq N_1$, valamint N_1 és N definíciójának figyelembe vételével

$$\varphi(N) \subseteq \varphi(N_1) \subseteq N_0 \subseteq N,$$

tehát N φ–invariáns altér. □

TÉTEL. *Ha $\varphi \in \tau_V$ nilpotens, nilpotencia indexe r, akkor léteznek olyan $r_1, \ldots, r_k$ természetes számok, $e_1, \ldots, e_k$ vektorok, hogy*
1. $r_1 \geq \ldots \geq r_k$
2. $(e_1, \varphi(e_1), \ldots, \varphi^{r_1-1}(e_1), \ldots, e_k, \varphi(e_k), \ldots, \varphi^{r_k-1}(e_k))$ bázis V–ben
3. $\varphi^{r_1}(e_1) = \ldots = \varphi^{r_k}(e_k) = 0$.

Bizonyítás. Legyen $r_1 = r$, válasszuk az e_1 vektort úgy, hogy $\varphi^{r_1-1}(e_1) \neq 0$. Akkor előző tételünk szerint $(e_1, \varphi(e_1), \ldots, \varphi^{r_1-1}(e_1))$ lineárisan függetlenek és az $M_1 = \mathcal{L}(e_1, \varphi(e_1), \ldots, \varphi^{r_1-1}(e_1))$ altér φ–invariáns. Továbbá, van hozzá olyan N_1 φ–invariáns altér hogy $M_1 \oplus N_1 = V$. A φ/N_1 operátor is nyilván nilpotens, nilpotencia indexe $r_2 \leq r_1$. Legyen $e_2 \in N_1$ olyan vektor, hogy $\varphi^{r_2-1}(e_2) \neq 0$. Akkor $(e_2, \varphi(e_2), \ldots, \varphi^{r_2-1}(e_2))$ lineárisan függetlenek és az $M_2 = \mathcal{L}(e_2, \varphi(e_2), \ldots, \varphi^{r_2-1}(e_2))$ altér φ–invariáns. Hozzá található olyan N_2 φ–invariáns altere N_1–nek, hogy $N_1 = M_2 \oplus N_2$. Tehát $V = M_1 \oplus M_2 \oplus N_2$. Tovább folytatva az eljárást az véges sok lépésben véget ér, mert az M_j alterek dimenzióinak összege $\dim V$. Végül azt kapjuk, hogy vannak olyan fenti tulajdonságú $M_1, \ldots, M_k$ φ–invariáns alterek, hogy $V = M_1 \oplus \ldots \oplus M_k$. Az M_j alterek bázisainak egyesítése bázist alkot V–ben. □

MEGJEGYZÉS. Az M_j altér $(e_j, \varphi(e_j), \ldots, \varphi^{r_j-1}(e_j))$ bázisában φ/M_j mátrixa

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

vagyis a főátló alatt 1–ek vannak, mindenütt másutt nullák. A tétel által leírt bázisban φ mátrixa a főátlóra felfűzött ilyen típusú tömbökből áll, mindenütt másutt nullák vannak a mátrixban.

7.5. Jordan–féle normálforma

Ebben a részben feltételezzük, hogy $\mathrm{Sp}\varphi$ teljes. Ez a feltevés helyettesíthető azzal, hogy a skalártartomány algebrailag zárt, azaz minden felette vett nem konstans polinomnak a gyökei is a test elemei. Ismeretes, hogy a komplex számtest algebrailag zárt.

A továbbiakban szükségünk lesz az alábbi segédtételre:

LEMMA. *Legyen $\varphi \in \tau_V$ tetszőleges lineáris transzformáció. Tegyük fel, hogy $V = R \oplus N$, ahol R, N φ–invariáns alterek, φ/R automorf, φ/N nilpotens. Ha L tetszőleges olyan φ–invariáns altér, hogy φ/L automorf, akkor $L \subseteq R$.*

Bizonyítás. Tetszőleges $x \in V$ vektor felírható $x = r + n$ alakban, ahol $r \in R, n \in N$. Legyen q a φ/N nilpotencia indexe, akkor $\varphi^q(x) = \varphi^q(r) + \varphi^q(n) = \varphi^q(r)$ tehát $\varphi^q(V) \subseteq \varphi^q(R) \subseteq R$, mivel R φ–invariáns. Ha φ/L automorf, akkor $\varphi(L) = L$, tehát $L = \varphi^q(L) \subseteq \varphi^q(V) \subseteq R$. □

TÉTEL. *Legyen $\varphi \in \tau_V$. Akkor léteznek olyan R, N φ–invariáns alterek, hogy φ/N nilpotens, φ/R automorf és $V = R \oplus N$.*

Bizonyítás.

1. A φ növekvő hatványainak nullterei egymásba vannak ágyazva: $\mathrm{Ker}\varphi \subseteq \mathrm{Ker}\varphi^2 \subseteq \ldots$. Valóban, ha $x \in \mathrm{Ker}\varphi^k$, azaz $\varphi^k(x) = 0$, akkor $\varphi^{k+1}(x) = \varphi(\varphi^k(x)) = \varphi(0) = 0$, tehát $x \in \mathrm{Ker}\varphi^{k+1}$.

2. Ha valamely k–ra $\mathrm{Ker}\varphi^k = \mathrm{Ker}\varphi^{k+1}$, akkor innentől a lánc stagnál: $\mathrm{Ker}\varphi^k = \mathrm{Ker}\varphi^{k+j}$ minden $j \geq 0$–ra. Ha ugyanis $x \in \mathrm{Ker}\varphi^{k+j}$, akkor $0 = \varphi^{k+j}(x) = \varphi^{k+1}(\varphi^{j-1}(x))$ azaz $\varphi^{j-1}(x) \in \mathrm{Ker}\varphi^{k+1}$. De akkor a feltevés szerint $\varphi^{j-1}(x) \in \mathrm{Ker}\varphi^k$, tehát $\varphi^k(\varphi^{j-1}(x)) = 0$, azaz $x \in \mathrm{Ker}\varphi^{k+j-1}$. Az eljárást folytatva belátható, hogy $x \in \mathrm{Ker}\varphi^k$. Ez az 1 ponttal együtt a bizonyítandó állítást jelenti.

3. Mivel V dimenziójának végessége miatt az 1 pontban szereplő lánc nem nőhet korlátlanul, azért egy idő után elkezd stagnálni. Legyen q az a legkisebb index, melyre $\mathrm{Ker}\varphi^q = \mathrm{Ker}\varphi^{q+1}$. Legyen

$$N = \mathrm{Ker}\varphi^q \quad \text{és} \quad R = \varphi^q(V).$$

Megmutatjuk, hogy ezek megfelelő alterek. Ha $x \in N$, akkor $\varphi^q(x) = 0$, ahonnan $\varphi^{q+1}(x) = 0$, azaz $\varphi(x) \in \mathrm{Ker}\varphi^q = N$, tehát N φ–invariáns. Hasonlóan, ha $x \in R$, azaz $x = \varphi^q(u)$, akkor $\varphi(x) = \varphi^q(\varphi(u))$, tehát $\varphi(x) \in \varphi^q(V) = R$, azaz R is φ–invariáns.

4. Megmutatjuk, hogy

$$V = R \oplus N.$$

Ha $x \in R \cap N$, akkor egyrészt $x = \varphi^q(u)$, másrészt $\varphi^q(x) = 0$. Tehát $\varphi^{2q}(u) = 0$, azaz $u \in \mathrm{Ker}\varphi^{2q}$. A q értelmezése és a 2 pont szerint akkor $u \in \mathrm{Ker}\varphi^q$, azaz $x = \varphi^q(u) = 0$. Ezek alapján az $N + R$ összeg direkt összeg. A homomorfia tételből következően dimenzióik összege $\dim V$–vel egyezik meg, tehát valóban $R \oplus N = V$.

5. Belátjuk, hogy φ/N nilpotens. Valóban, ha $x \in N$, akkor $\varphi^q(x) = 0$, tehát a nilpotencia indexe $\leq q$.

6. Megmutatjuk, hogy $\phi = \varphi/R$ automorf. Ennek bizonyításához tegyük fel, hogy $x \in \mathrm{Ker}\phi$, azaz $\phi(x) = \varphi(x) = 0$. Mivel $x \in R$, azért van olyan $u \in V$, hogy

$x = \varphi^q(u)$. De akkor $\varphi^{q+1}(u) = 0$, azaz $u \in \mathrm{Ker}\varphi^{q+1} = \mathrm{Ker}\varphi^q$, azaz $x = \varphi^q(u) = 0$. □

TÉTEL. *Legyenek $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ a $\varphi \in \tau_V$ különböző sajátértékei, rendre $m_1, \dots, m_p$ (algebrai) multiplicitásokkal. Akkor vannak olyan $M_1, \dots, M_p$ alterek V–ben, hogy*
1. $V = M_1 \oplus \dots \oplus M_p$
2. $\dim M_j = m_j (1 \le j \le p)$
3. M_j φ–invariáns altere V–nek $(1 \le j \le p)$
4. $\varphi - \lambda_j\varepsilon$ nilpotens M_j–n $(1 \le j \le p)$, ahol ε az identikus transzformáció.

MEGJEGYZÉS. Ezen tételben használjuk ki, hogy $\mathrm{Sp}\varphi$ teljes.

Bizonyítás.

1. Minden egyes j–re $(1 \le j \le p)$ legyen $\varphi_j = \varphi - \lambda_j\varepsilon$. Az előző tétel szerint vannak olyan R_j, M_j φ_j–invariáns alterek V–ben, hogy φ_j/R_j automorf, φ_j/M_j nilpotens, és $V = M_j \oplus R_j$. Könnyű ellenőrizni, hogy ezen R_j, M_j alterek invariánsak φ–re, sőt más φ_k–ra nézve is $(1 \le k \le p)$.

2. Mivel $V = R_j \oplus M_j$, azért ha V–nek olyan bázisát választunk, mely R_j és M_j bázisainak egyesítése, akkor abban a bázisban φ mátrixa tömbös alakú lesz:

$$\begin{pmatrix} \varphi/R_j & 0 \\ 0 & \varphi/M_j \end{pmatrix}.$$

Ennek alapján könnyen belátható, hogy φ karakterisztikus polinomja egyenlő φ/R_j karakterisztikus polinomjának és φ/M_j karakterisztikus polinomjának a szorzatával.

3. A φ/M_j karakterisztikus polinomjának csak λ_j gyöke. Tegyük fel ugyanis, hogy a $0 \ne x \in M_j$ vektorra és valamely λ skalárra fennáll $\varphi(x) = \lambda x$. Akkor $\varphi_j(x) = (\varphi - \lambda_j\varepsilon)(x) = (\lambda - \lambda_j)x$. Legyen k a φ_j nilpotencia indexe. Akkor $0 = \varphi_j^k(x) = (\lambda - \lambda_j)^k x$. Ez csak úgy lehet, ha $\lambda = \lambda_j$.

4. φ/R_j karakterisztikus polinomjának λ_j nem gyöke. Ennek belátásához legyen φ/R_j mátrixa az R_j egy rögzített bázisában A_j. Akkor φ_j/R_j mátrixa ugyanebben a bázisban $A_j - \lambda_j E$. Mivel φ_j/R_j automorf, azért mátrixa reguláris, $|A_j - \lambda_j E| \ne 0$, azaz φ/R_j–nek λ_j nem sajátértéke, ezért nem is karakterisztikus gyöke.

A 2,3,4 pontok következményeként $\dim M_j = \mathrm{mult}\lambda_j = m_j$ adódik.

5. Megmutatjuk, hogy ha $i \ne j$, akkor $M_i \subseteq R_j$. Legyen ugyanis φ/M_i mátrixa az M_i valamely bázisára vonatkozóan A_i. Akkor a φ_j/M_i mátrixa ugyanebben a bázisban $A_i - \lambda_j E$. Mivel φ/M_i–nek a 3 pont szerint λ_i az egyetlen sajátértéke, azért λ_j nem sajátértéke, $|A_i - \lambda_j E| \ne 0$, vagyis φ_j reguláris M_i–n. A legutóbbi Lemmánk szerint ebből $M_i \subseteq R_j$ következik.

6. Az 5 pont szerint

$$\sum_{\substack{i=1 \\ i \ne j}}^{n} M_i \subseteq R_j.$$

Mivel $M_j \cap R_j = \{0\}$, azért

$$\Big(\sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{n} M_i\Big) \cap M_j = \{0\}.$$

Tehát az $M_1, \ldots, M_p$ alterek összege direkt összeg. Végül $\dim M_i = m_i$, és $m_1 + \ldots + m_p = \dim V$ alapján kapjuk, hogy $V = M_1 \oplus \ldots \oplus M_p$. □

Megjegyzés. Mivel φ_j/M_j nilpotens, azért a nilpotens operátorokra vonatkozó tételünk szerint lehet M_j-nek olyan bázisát konstruálni, melyben φ_j/M_j mátrixa

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

alakú tömbökből áll. Mivel $\varphi = \varphi_j + \lambda_j \varepsilon$, azért ugyanebben a bázisban φ/M_j mátrixa

$$\begin{pmatrix} \lambda_j & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 1 & \lambda_j & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda_j & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & \lambda_j \end{pmatrix}$$

alakú, ún. **Jordan–féle tömb**ökből áll, ahol a főátlóban λ_j, alatta 1, máshol 0 áll a mátrixban. Ha minden egyes M_j altérnek ilyen típusú bázisát konstruálunk, és V bázisát ezen bázisok egyesítéseként rögzítjük, akkor φ mátrixa ebben a bázisban olyan lesz, hogy a főátlóra a fenti típusú Jordan–féle tömbök lesznek felfűzve, máshol 0 áll. Ugyanazon sajátértékhez a fentiekből következően több, különböző méretű Jordan–féle tömb is tartozhat. Ezt az alakot a φ mátrixa **Jordan–féle normálalak**jának nevezzük.

8. Véges dimenziós terek formái

8.1. Lineáris formák

Ebben a szakaszban értelmezzük a lineáris formák fogalmát, mint a vektortéren értelmezett skalárértékű lineáris leképezéseket, megmutatjuk, hogy véges dimenziós terek esetén a lineáris formák a kiinduló vektortérrel izomorf teret alkotnak, de mégis más természetűek: a lineáris formák megfelelő, ún. duális bázisra vonatkozó koordinátái másként transzformálódnak.

DEFINÍCIÓ. *Legyen V egy vektortér a $\mathbb{T}$ test felett. Az $\ell\colon V \to \mathbb{T}$ lineáris leképezéseket* **lineáris formák***nak nevezzük.*

MEGJEGYZÉS. Amennyiben V függvénytér, szokásos elnevezés a lineáris funkcionál is.

A V vektortér lineáris formáinak halmazát V^*-gal jelöljük, elnevezése **konjugált tér** vagy **duális tér.** V^* a leképezések szokásos műveleteire nézve vektorteret alkot.

TÉTEL. *Ha $(b_1, \dots, b_n)$ bázis V-ben és ℓ a V vektortéren értelmezett lineáris forma, akkor tetszőleges $x \in V$ vektorra az ℓ lineáris forma hatása*

$$\ell(x) = a_1x_1 + \dots a_nx_n$$

ahol $(x_1, \dots, x_n)$ az x vektornak a bázisra vonatkozó koordinátái, $a_1, \dots, a_n$ pedig a x vektortól független, csak ℓ-től és a bázistól függő állandók. Az utóbbiakat a lineáris forma megadott bázisra vonatkozó **együtthatói***nak nevezzük.*

Bizonyítás. A lineáris forma linearitását kihasználva, s bevezetve az $a_i = \ell(b_i)$ jelölést, azt kapjuk, hogy

$$\ell(x) = \ell(x_1b_1 + \dots + x_nb_n) = \ell(x_1b_1) + \dots + \ell(x_nb_n) = a_1x_1 + \dots + a_nx_n.$$

□

TÉTEL. *A V vektortér tetszőleges $(b_1, \dots, b_n)$ bázisához egyértelműen létezik V^*–nak olyan $(\ell_1, \dots, \ell_n)$ bázisa, melyre*

$$\ell_i(b_j) = \delta_{ij} \qquad 1 \le i, j \le n.$$

Bizonyítás. A lineáris leképezések alaptétele alapján egyértelműen léteznek olyan $\ell_1, \dots, \ell_n$ lineáris formák melyekre teljesül

$$\ell_i(b_j) = \delta_{ij} \qquad 1 \le i, j \le n.$$

E lineáris formák lineárisan függetlenek, hiszen ha $\lambda_1\ell_1 + \dots + \lambda_n\ell_n = O$, akkor minden $j = 1, \dots, n$ esetén $(\lambda_1\ell_1 + \dots + \lambda_n\ell_n)(b_j) = 0$, s így $\lambda_j = \lambda_1\ell_1(b_j) + \dots + \lambda_n\ell_n(b_j) = 0$.

Az $\ell_1, \ldots, \ell_n$ lineáris formák generátorrendszert alkotnak, mivel ha $\ell \in V^*$ tetszőleges lineáris forma, akkor

$$\ell = \ell(b_1)\ell_1 + \ldots + \ell(b_n)\ell_n$$

érvényes, ugyanis bármely $1 \leq i \leq n$ esetén

$$(\ell(b_1)\ell_1 + \ldots + \ell(b_n)\ell_n)(b_i) =$$
$$\ell(b_1)\ell_1(b_i) + \ldots + \ell(b_n)\ell_n(b_i) = \ell(b_i).$$

□

A tétel következményeképpen adódik, hogy $\dim V = \dim V^*$. Ennek alapján a következő elnevezéssel élünk:

DEFINÍCIÓ. *A V vektortér egy $(b_1, \ldots, b_n)$ bázisát és a konjugált V^* tér egy $(\ell_1, \ldots, \ell_n)$ bázisát* **duális bázispár***nak nevezzük, ha*

$$\ell_i(b_j) = \delta_{ij} \qquad 1 \leq i, j \leq n.$$

Szokásos elnevezés a **biortogonális bázispár** *is.*

A fordított irányú egzisztencia a most következő tétel következménye.

TÉTEL. *Tekintsük a véges dimenziós V vektortér második konjugált terét: $V^{**} = (V^*)^*$. Ekkor a*

$$\tau \colon V \to V^{**}$$
$$x \mapsto \tau_x$$

leképezés, melyre $\tau_x(\ell) = \ell(x)$ minden $\ell \in V^*$ esetén, izmorfizmust ad meg V és V^{**} között. Ezt az izomorfizmust természetes megfeleltetésnek nevezzük.

Bizonyítás. Először belátjuk, hogy τ lineáris leképezés. Ugyanis, bármely $\ell \in V^*$ esetén

$$\tau_{\lambda x + \mu y}(\ell) = \ell(\lambda x + \mu y) = \lambda\ell(x) + \mu\ell(y) = \lambda\tau_x(\ell) + \mu\tau_y(\ell) = (\lambda\tau_x + \mu\tau_y)(\ell)$$

ezért

$$\tau_{\lambda x + \mu y} = (\lambda\tau_x + \mu\tau_y).$$

τ injektivitásához figyeljük meg, hogy adott $0 \neq x \in V$-hez mindig van olyan $\ell \in V^*$, hogy $\ell(x) \neq 0$. Ezért $\tau_x = O$, azaz minden $\ell \in V^*$ esetén $\tau_x(\ell) = \ell(x) = 0$ csak akkor lehetséges, ha $x = 0$. Mivel V és V^{**} azonos dimenziójúak, a nullitás-rangtétel alapján τ szürjektív is, tehát τ valóban izomorfizmus. □

KÖVETKEZMÉNY. *Bármely $(\ell_1, \ldots, \ell_n)$ V^*-beli bázishoz van V-ben duális bázis.*

Bizonyítás. A megadott $(\ell_1, \ldots, \ell_n)$ V^*-beli bázishoz előbbi állításunk alapján van egy duális $(\tau_1, \ldots, \tau_n)$ bázis V^{**}-ban. A természetes megfeleltetés alapján $\tau_i = \tau_{b_i}$. Ekkor $(b_1, \ldots, b_n)$ duális bázisa $(\ell_1, \ldots, \ell_n)$-nek, mivel

$$\ell_i(b_j) = \tau_{b_j}(\ell_i) = \tau_j(\ell_i) = \delta_{ij}.$$

□

Megfigyelhetjük, hogy ha egy duális bázispár adott, akkor egy tetszőleges $x \in V$ vektor $(x_1, \ldots, x_n)$ koordinátáira $x_i = \ell_i(x)$ teljesül. Ugyanis, a jobboldalon az $x = \sum_{j=1}^{n} x_j b_j$ összefüggést helyettesítve

$$\ell_i(x) = \ell_i\left(\sum_{j=1}^{n} x_j b_j\right) = \sum_{j=1}^{n} x_j \ell_i(b_j) = \sum_{j=1}^{n} x_j \delta_{ij} = x_i$$

adódik. Másrészt egy lineáris forma $(b_1, \ldots, b_n)$ bázisra vonatkozó együtthatói megegyeznek a lineáris formának az $(\ell_1, \ldots, \ell_n)$ duális bázisra vonatkozó koordinátáival:

$$\ell = \ell(b_1)\ell_1 \cdots + \ell(b_n)\ell_n.$$

TÉTEL. *Legyenek $(b_1, \ldots, b_n)$ és $(f_1, \ldots, f_n)$ bázis a V vektortérben, továbbá $(\ell_1, \ldots, \ell_n)$, illetve $(m_1, \ldots, m_n)$ hozzájuk duális bázis V^*-ban. Ha a V vektortérben a $(b) \to (f)$ bázistranszformáció mátrixa S, akkor a V^*-beli duális bázisok között a az $(\ell) \to (m)$ bázistranszformáció mátrixa $(S^{-1})^t$.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy a duális bázisok közötti átmenet mátrixa $R = (r_{ij})$:

$$m_i = \sum_{k=1}^{n} r_{ki}\ell_k.$$

Legyen $S = (s_{ij})$. A dualitást kétszer kihasználva adódik, hogy

$$\delta_{ij} = m_i(f_j) = \sum_{k=1}^{n} r_{ki}\ell_k\left(\sum_{l=1}^{n} s_{lj} b_l\right) = \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} r_{ki}s_{lj}\ell_k(b_l) =$$

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} r_{ki}s_{lj}\delta_{kl} = r_{ki}s_{kj}$$

Ez azt jelenti, hogy $R^t S = E$, azaz $R = (S^{-1})^t$. □

KÖVETKEZMÉNY. *A lineáris formák együtthatói az S^t mátrixszal transzformálódnak.*

8.2. Bilineáris formák

A bilineáris formák skalárértékű két vektorváltozós leképezések. A szimmetrikus bilineáris formák kvadratikus formákat szolgáltatnak és viszont. Mátrixelőállításuk akkor könnyen áttekinthető, ha mátrixuk diagonális. Az ilyen mátrixú előállítást *kanonikus alak*nak mondjuk, ezek megkeresése központi kérdés e témakörben.

DEFINÍCIÓ. *Legyen V egy $\mathbb{T}$ test feletti vektortér. Az $L\colon V \times V \to \mathbb{T}$ leképezést* **bilineáris formá***nak nevezünk, ha mindkét változójában lineáris, azaz*

$$L(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2, y) = \lambda_1 L(x_1, y) + \lambda_2 L(x_2, y)$$

$$L(x, \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2) = \lambda_1 L(x, y_1) + \lambda_2 L(x, y_2)$$

teljesül minden $x, x_1, x_2, y, y_1, y_2 \in V$ *és* $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{T}$ *esetén.*

Bilineáris formák összegét, skalárral való szorzatát a függvényeknél szokásos módon értelmezzük. Így szintén egy $\mathbb{T}$ test feletti vektorteret kapunk, melynek dimenziója n^2, ha V dimenziója n. Ez könnyen következik a bilineáris formák mátrixokkal való előállítási lehetőségéből:

Ha $(b_1, \dots, b_n)$ bázis V-ben, akkor a L bilineáris forma mátrixának nevezzük az $\alpha_{ij} = L(b_i, b_j)$ számokból álló $n \times n$-típusú mátrixot. A mátrix elemeit a bilineáris forma megadott bázisra vonatkozó együtthatóinak is mondjuk. Ha az $x, y \in V$ vektorok $(b_1, \dots, b_n)$ bázisra vonatkozó koordinátaoszlopai $X, Y \in \mathbb{T}^n$ akkor a bilineáris forma értékét a következőképpen lehet kiszámítani :

$$L(x, y) = X^t AY,$$

ugyanis

$$L(x, y) = L\left(\sum_{i=1}^n x_i b_i, \sum_{j=1}^n y_j b_j\right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i y_j L(b_i, b_j) =$$

$$= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i y_j \alpha_{ij} = X^t AY.$$

MEGJEGYZÉS. Adott bázis esetén a bilineáris forma együtthatórendszere egyértelmű.

A bázis megváltoztatása esetén természetesen megváltozik egy bilineáris forma együtthatómátrixa is a következők szerint:

TÉTEL. *Legyen* $(b_1, \dots, b_n)$ *és* $(f_1, \dots, f_n)$ *két bázis a* V *vektortérben, a* $(b) \to (f)$ *bázistranszformáció mátrixa* S. *Ha az* L *bilineáris forma mátrixa e bázisokra vonatkozólag* A, *illetve* B, *akkor érvényes közöttük az*

$$B = S^t AS$$

összefüggés.

Bizonyítás. Legyen $S = (s_{ij}), A = (\alpha_{ij}), B = (\beta_{ij})$. Akkor

$$f_j = \sum_{k=1}^n s_{kj} b_k.$$

Ezt megfelelően behelyettesítve, kihasználva a bilineáris forma mindkét változóban való linearitását, azt kapjuk, hogy

$$\beta_{ij} = L(f_i, f_j) = L\left(\sum_{k=1}^n s_{ki} b_k, \sum_{l=1}^n s_{lj} b_l\right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} s_{ki} s_{lj} L(b_k, b_l) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} s_{ki} \alpha_{kl} s_{lj}.$$

Ez a bizonyítandót jelenti. □

A kapott formulából következik, hogy egy adott bilineáris forma bármely bázisra vonatkozó mátrixának a rangja mindig ugyanannyi, ezt a **bilineáris forma rangjá**nak is mondjuk.

Definíció. *Egy $L\colon V \times V \to \mathbb{T}$ bilineáris formát* **szimmetrikus***nak mondunk, ha $L(x, y) = L(y, x)$ teljesül minden $x, y \in V$ esetén.* **Antiszimmetrikus***nak (vagy ferdeszimmetrikusnak) nevezzük akkor, ha minden $x, y \in V$ vektorra $L(y, x) = -L(x, y)$.*

Szimmetrikus bilineáris forma együtthatómátrixa bármely bázisra vonatkozóan szimmetrikus, és hasonlóan antiszimmetrikusé antiszimmetrikus mátrix.

Könnyen belátható az is, hogy a szimmetrikus bilineáris formák $\mathcal{S}(V)$ halmaza altér a bilineáris formák $\mathcal{B}(V)$ vektorterében, hasonlóképpen az antiszimmetrikus formák $\mathcal{A}(V)$ halmaza is altér $\mathcal{B}(V)$-ben, sőt $\mathcal{S}(V)$ és $\mathcal{A}(V)$ direkt összeadandók $\mathcal{B}(V)$-ben. Dimenziójukra $\dim \mathcal{S}(V) = \frac{n(n+1)}{2}$, illetve $\dim \mathcal{A}(V) = \frac{n(n-1)}{2}$ érvényes.

A szimmetrizálás operátora tetszőleges bilineáris formához egy szimmetrikusat rendel a következőképpen

$$L \in \mathcal{B}(V) \mapsto L_s \in \mathcal{S}(V)$$

$$L_s(x, y) = \frac{1}{2}(L(x, y) + L(y, x)),$$

míg az antiszimmetrizálás operátorát így értelmezzük:

$$L \in \mathcal{B}(V) \mapsto L_a \in \mathcal{A}(V)$$

$$L_a(x, y) = \frac{1}{2}(L(x, y) - L(y, x)).$$

Látható, hogy tulajdonképpen a szimmetrizálás, illetve az antiszimmetrizálás operátora projekció a szimmetrikus, illetve az antiszimmetrikus formák alterére.

Definíció. *Legyen $L\colon V \times V \to \mathbb{T}$ szimmetrikus bilineáris forma. A belőle származtatott $Q(x) = L(x, x)$, $Q\colon V \to \mathbb{T}$ függvényt* **kvadratikus formá***nak nevezzük.*

A kvadratikus forma mindig egyértelműen meghatározza azt a szimmetrikus bilineáris formát, amelyből származtatható. Ugyanis, bármely $x, y \in V$-re

$$\begin{aligned} Q(x+y) = L(x+y, x+y) &= L(x,x) + 2L(x,y) + L(y,y) \\ &= Q(x) + 2L(x,y) + Q(y) \end{aligned}$$

s ebből

$$L(x, y) = \frac{1}{2}\left(Q(x+y) - Q(x) - Q(y)\right)$$

adódik.

TÉTEL. *Ha* $(b_1, \dots, b_n)$ *bázis* V*-ben, akkor tetszőleges kvadratikus forma előállítható* $Q(x) = \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij} x_i x_j$ *alakban egy szimmetrikus* $A = (\alpha_{ij})$ *mátrixszal, ahol* $(x_1, \dots, x_n)$ *az* x *vektor* $(b_1, \dots, b_n)$ *bázisra vonatkozó koordinátáit jelöli. Másrészt minden ilyen előállítás kvadratikus formát ad meg.*

Bizonyítás. Az állítás első része azonnal következik a bilineáris formák előállíthatóságából x-et helyettesítve mindkét változóba.

A második belátásához tekintsük azt a bilineáris formát, amelynek együtthatómátrixa az adott bázisra vonatkozóan B. Ilyen egyértelműen létezik, s a belőle származó kvadratikus forma a megadott Q kvadratikus formával egyezik meg. □

MEGJEGYZÉS. A bázis rögzítése után a kvadratikus forma együtthatórendszere egyértelmű.

8.3. Kanonikus alak

Egy véges dimenziós vektortéren értelmezett L bilineáris forma esetén L **kanonikus bázisának** nevezünk egy olyan $(b_1, \dots, b_n)$ bázist, amelyre vonatkozóan L mátrixa diagonális, azaz előállítása

$$L(x, y) = \lambda_1 x_1 y_1 + \dots + \lambda_n x_n y_n$$

alakú. Az ilyen bázist az L-ből származtatható Q kvadratikus forma kanonikus bázisának is mondjuk. A kvadratikus forma előállítása kanonikus bázisra vonatkozóan

$$Q(x_1, \dots, x_n) = \lambda_1 x_1^2 + \dots + \lambda_n x_n^2$$

alakú. Az ilyen előállítást **kanonikus alak**ként is említjük.

TÉTEL. **Lagrange tétel.** *Véges dimenziós vektortéren értelmezett bármely* L *szimmetrikus bilineáris formának van kanonikus bázisa.*

Bizonyítás. A bizonyítás a vektortér dimenziója szerinti teljes indukcióval történik.

Az állítás $n = \dim V = 1$ esetén nyilvánvalóan igaz. Tegyük fel, hogy $n - 1$ dimenziós vektorterek esetén az állítás teljesül. $L = 0$ esetén az állítás triviálisan teljesül. Ha viszont $L \neq 0$, akkor — mivel a szimmetrikus bilineáris formát teljesen meghatározzák az átlón felvett értékei — választhatunk egy olyan $b_n \neq 0$ vektort, amelyre $L(b_n, b_n) \neq 0$ (ami azért teljesül, mert L értékei előállíthatóak $Q(y) = L(y, y)$ értékeivel). Tekintsük most azt az $\ell \colon V \to \mathbb{T}$ lineáris formát, melyet L-ből kapunk: $\ell(x) = L(b_n, x)$. Ez a lineáris forma b_n választása miatt nem nulla, ezért rangja 1, nullterének dimenziója $n - 1$. Szorítsuk meg L-et a nulltérre, s erre alkalmazzuk az indukciós feltevést: van olyan $(b_1, \dots b_{n-1})$ bázis a $\operatorname{Ker} \ell$ nulltérben, melyre $L(b_i, b_j) = 0$ minden $1 \leq i, j, \leq n - 1, i \neq j$ esetén. Ezt kiegészítve b_n-nel,

V-nek kapjuk meg egy bázisát, amely kanonikus lesz az L bilineáris formának, hiszen $1 \le i \le n-1$ esetén $b_i \in \operatorname{Ker} \ell$, ezért $L(b_n, b_i) = \ell(b_i) = 0$. □

MEGJEGYZÉS.

1. Ha $r = \operatorname{rang} L$, akkor a bázistagok cseréjével elérhető, hogy

$$L(x,y) = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i x_i y_i, \qquad \lambda_i \neq 0, i = 1, \dots, r$$

alakot kapjunk.

2. Egy szimmetrikus bilineáris forma mindegyik kanonikus alakjában a nullától különböző tagok száma ugyanannyi, nevezetesen r.

A valós vagy a komplex esetben a kanonikus alak még tovább egyszerűsíthető. Ugyanis a valós esetben a kanonikus $(b_1, \dots, b_n)$ bázisról a $\frac{b_1}{\sqrt{|\lambda_1|}}, \dots, \frac{b_n}{\sqrt{|\lambda_n|}}$ bázisra áttérve a kanonikus alak:

$$L(x,y) = \sum_{i=1}^{r} \varepsilon_i x_i y_i, \text{ ahol } \varepsilon_i = \pm 1.$$

A komplex esetben pedig a $(b_1, \dots, b_n)$ kanonikus bázisról a $\frac{b_1}{\sqrt{\lambda_1}}, \dots, \frac{b_n}{\sqrt{\lambda_n}}$ bázisra áttérve a kanonikus alak:

$$L(x,y) = \sum_{i=1}^{r} x_i y_i.$$

Ez utóbbi két előállítást **normálalak**nak nevezzük.

Hamarosan több gyakorlati módszert is bemutatunk a bilineáris és kvadratikus formák kanonikus bázisának megkeresésére. De már most belátjuk, hogy a kanonikus alakban szereplő pozitív, illetve negatív együtthatójú tagok száma nem függ a kanonikus alakra hozás módjától. Ezt nevezik **Sylvester–féle tehetetlenségi törvénynek.**

TÉTEL. *Legyen L az n dimenziós valós V vektortéren értelmezett bilineáris forma. Ekkor L valamennyi kanonikus előállításában a pozitív (negatív) együtthatók száma mindig ugyanaz.*

Bizonyítás. Legyen $(b_1, \dots, b_n)$ és $(b'_1, \dots, b'_n)$ két kanonikus bázisa az L bilineáris formának, melyekre $k_i = L(b_i, b_i) > 0$ minden $i = 1, \dots, p$ esetén, és $k_i = L(b_i, b_i) \le 0$ minden $i = p+1, \dots, n$ esetén, illetve $k'_i = L(b'_i, b'_i) > 0$ minden $i = 1, \dots, s$ esetén, és $k'_i = L(b'_i, b'_i) \le 0$ minden $i = s+1, \dots, n$ esetén.

Megmutatjuk, hogy a $b_1, \dots, b_p, b'_{s+1}, \dots, b'_n$ vektorrendszer lineárisan független. Ugyanis, ha

$$\lambda_1 b_1 + \dots + \lambda_p b_p + \mu_{s+1} b'_{s+1} + \dots + \mu_n b'_n = 0,$$

akkor legyen

$$a = \lambda_1 b_1 + \dots + \lambda_p b_p = -\mu_{s+1} b'_{s+1} - \dots - \mu_n b'_n.$$

Az a vektor kétféle előállítása miatt egyrészt

$$L(a,a) = \lambda_1^2 k_1 + \cdots + \lambda_p^2 k_p \geq 0,$$

másrészt

$$L(a,a) = \mu_{s+1}^2 k'_{s+1} + \cdots + \mu_n^2 k'_n \leq 0.$$

Ez csak úgy lehetséges, hogy $L(a,a) = 0$, s ezért $\lambda_1 = \cdots = \lambda_p = 0$, tehát $a = 0$. Kihasználva $b'_{s+1}, \ldots, b'_n$ lineáris függetlenségét $\mu_{s+1} = \cdots = \mu_n = 0$ is adódik.

E vektorrendszer lineáris függetlenségéből $p + (n-s) \leq n$ adódik, azaz $p \leq s$. Felcserélve a két bázis szerepét ugyanígy kapjuk, hogy $s \leq p$. Tehát $p = s$. □

Gyakorlati módszerek kvadratikus formák kanonikus alakjának meghatározására

1. Lagrange–féle teljes négyzetté kiegészítés módszere

Legyen adott a valós $\mathbb{R}^n$ vektortéren értelmezett $Q(x) = Q(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij} x_i x_j$ kvadratikus forma. Ha $n = 1$, akkor a kvadratikus forma bármely bázisban kanonikus alakú. Ha viszont $n > 1$, akkor megmutatjuk, hogy mindig visszevezethető $\mathbb{R}^{n-1}$-en értelmezett kvadratikus forma kanonikus alakjának keresésére. Így lépésről lépésre, egyre több változó fog csupán tisztán négyzetes tagban szerepelni.

A) Első esetben tegyük fel, hogy a kvadratikus forma előállításában nincs négyzetes tag: $\alpha_{ii} = 0$ minden $i = 1, \ldots, n$ esetén, de pl. $\alpha_{12} \neq 0$. Ekkor egy olyan koordinátatranszformációt hajtunk végre, hogy az új koordinátákkal megadott előállítás tartalmazzon négyzetes tagot. Ilyen pl. az

$$\begin{aligned} x'_1 &= \frac{1}{2}(x_1 + x_2) \\ x'_2 &= \frac{1}{2}(x_1 - x_2) \\ x'_i &= x_i, \qquad \text{ha} \qquad i = 3, \ldots, n \end{aligned}$$

koordinátatranszformáció. Ezt megfelelően behelyettesítve, a kvadratikus forma előállítása tartalmazni fog $x_1'^2$ alakú négyzetes tagot.

B) Tegyük fel, hogy a kvadratikus forma előállításában van négyzetes tag, s ez $\alpha_{11} x_1^2$. Végezzük el a következő átalakításokat:

$$\begin{aligned} Q(x_1, \ldots, x_n) &= \alpha_{11} \left(x_1^2 + 2 \sum_{i=2}^{n} \frac{\alpha_{i1}}{\alpha_{11}} x_1 x_i \right) + \sum_{i,j=2}^{n} \alpha_{ij} x_i x_j \\ &= \alpha_{11} \left(x_1 + \sum_{i=2}^{n} \frac{\alpha_{i1}}{\alpha_{11}} x_i \right)^2 - \alpha_{11} \sum_{i=2}^{n} \frac{\alpha_{i1}^2}{\alpha_{11}^2} x_i^2 \\ &\quad -2 \sum_{i,j=2}^{n} \frac{\alpha_{i1}\alpha_{j1}}{\alpha_{11}} x_i x_j + \sum_{i,j=2}^{n} \alpha_{ij} x_i x_j \end{aligned}$$

Bevezetve a

$$\begin{aligned} x_1' &= x_1 + \sum_{i=2}^{n} \frac{\alpha_{i1}}{\alpha_{11}} x_i \\ x_i' &= x_i \qquad \text{ha} \qquad i = 2, \ldots, n \end{aligned}$$

koordinátatranszformációt, a következő alakra jutunk:

$$Q(x_1, \ldots, x_n) = \alpha_{11} x_1'^2 + \tilde{Q}(x_2', \ldots, x_n').$$

Ezáltal a kanonikus alakra hozás problémáját visszavezettük eggyel kevesebb változót, azaz koordinátát tartalmazó, $\mathbb{R}^{n-1}$-en értelmezett kvadratikus forma kanonikus alakra hozására.

Megjegyezzük, hogy mind az A) mind a B) lépésben alkalmazott átalakítások valóban koordinátatranszfomációt jelentenek. Erről a transzformációhoz tartozó mátrix felírásával győződhetünk meg: azok invertálhatók. Az új koordinátáknak megfelelő bázisvektorokat úgy kaphatjuk meg, hogy a koordinátatranszformációk mátrixait invertáljuk, s a megkapott bázistranszformáció mátrixának oszlopvektorai jelentik tulajdonképpen a kanonikus bázis vektorait.

Egy korlátozottan alkalmazható másik gyakorlati módszert ad meg az alábbi tétel:

TÉTEL. **Jacobi tétele.**
Legyen adott az $\mathbb{R}^n$ valós vektortéren az $L(x,y) = \sum_{i,j,=1}^{n} \alpha_{ij} x_i y_j$ szimmetrikus bilineáris forma. Ha a $\Delta_i = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & & \alpha_{i1} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_{i1} & \ldots & \alpha_{ii} \end{vmatrix}$ ún. sarokminorok egyike sem nulla, akkor van olyan $(b_1, \ldots, b_n)$ bázis, melyben L kanonikus alakú, és előállítása

$$L(x,y) = \frac{\Delta_0}{\Delta_1} x_1 y_1 + \cdots + \frac{\Delta_{n-1}}{\Delta_n} x_n y_n,$$

ahol $(x_1, \ldots, x_n)$ és $(y_1, \ldots, y_n)$ az x és y vektorok $(b_1, \ldots, b_n)$ bázisra vonatkozó koordinátáit jelöli, és $\Delta_0 = 1$.

Bizonyítás. A $(b_1, \ldots, b_n)$ kanonikus bázis megkonstruálása indukcióval történik. Jelölje $(e_1, \ldots, e_n)$ az $\mathbb{R}^n$ tér természetes bázisát, s legyen $b_1 = \frac{1}{L(e_1,e_1)} e_1$. Itt a nevezőben nem nulla áll, hiszen $\Delta_1 = L(e_1, e_1)$. Tegyük fel, hogy már ismertek a $b_1, \ldots, b_{k-1}$ vektorok, és a következő b_k vektort $b_k = \beta_1 e_1 + \ldots \beta_{k-1} e_{k-1} + \beta_k e_k$ alakban keressük azzal a feltétellel, hogy

$$\begin{aligned} L(e_j, b_k) &= 0, \qquad j = 1, \ldots, k-1 \\ L(e_k, b_k) &= 1. \end{aligned}$$

Behelyettesítve b_k keresett előállítását, kihasználva L linearitását a második változóban, a következő inhomogén lineáris egyenletrendszerhez jutunk:

$$\begin{aligned}
\beta_1 L(e_1, e_1) + \cdots + \beta_k L(e_1, e_k) &= 0 \\
&\vdots \\
\beta_1 L(e_{k-1}, e_1) + \cdots + \beta_k L(e_{k-1}, e_k) &= 0 \\
\beta_1 L(e_k, e_1) + \cdots + \beta_k L(e_k, e_k) &= 1
\end{aligned}$$

A fenti egyenletrendszerben $L(e_i, e_j) = \alpha_{ij}$, ezért a $\Delta_k \neq 0$ feltétel miatt a Cramer tétel szerint egyértelmű megoldás létezik, s az utolsó ismeretlen $\beta_k = \frac{\Delta_{k-1}}{\Delta_k}$.

Az indukciós lépéseket egész b_n megkeresésig folytatjuk. Láthatjuk, hogy a kapott $(b_1, \ldots, b_n)$ vektorok valóban bázist alkotnak, hiszen az $(e_1, \ldots, e_n) \to (b_1, \ldots, b_n)$ átmenet mátrixa felsőtrianguláris. Továbbá a kapott bázis kanonikus, hiszen minden $i < k$ esetén

$$L(b_i, b_k) = L\left(\sum_{j=1}^{i} \beta_j e_j, b_k\right) = \sum_{j=1}^{i} \beta_j L(e_j, b_k) = 0.$$

$i > k$ esetén a szimmetria miatt teljesül ugyanez. Az ígért előállítás is fönnáll, hiszen

$$L(b_i, b_i) = L\left(\sum_{j=1}^{i} \beta_j e_j, b_i\right) = \sum_{j=1}^{i} \beta_j L(e_j, b_i) = \beta_i = \frac{\Delta_{i-1}}{\Delta_i}.$$

□

Következmény. **Jacobi tétele.**

Legyen adott az $\mathbb{R}^n$ *valós vektortéren a* $Q(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i,j,=1}^{n} \alpha_{ij} x_i x_j$ *kvadratikus forma. Ha a* $\Delta_i = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & & \alpha_{i1} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_{i1} & \ldots & \alpha_{ii} \end{vmatrix}$ *ún. sarokminorok egyike sem nulla, akkor van olyan* $(b_1, \ldots, b_n)$ *bázis, melyben* Q *kanonikus alakú, és előállítása*

$$Q(y_1, \ldots, y_n) = \frac{\Delta_0}{\Delta_1} y_1^2 + \cdots + \frac{\Delta_{n-1}}{\Delta_n} y_n^2,$$

ahol $(y_1, \ldots, y_n)$ *a* $(b_1, \ldots, b_n)$ *bázisra vonatkozó koordinátákát jelöli, és* $\Delta_0 = 1$.

A kvadratikus formák igen fontos osztályai a definit, azaz előjelben nem változó kvadratikus formák. Többek között ilyenek segítségével definiálhatók majd az euklideszi terek.

Definíció. *A* Q *kvadratikus forma* **pozitív definit**, *ha* $Q(x) > 0$ *minden* $x \neq 0$*-ra, illetve* **pozítív szemidefinit**, *ha* $Q(x) \geq 0$ *minden* $x \in R^n$*-re.* Q **negatív (szemi)definit**, *ha* $-Q$ *pozitív (szemi)definit.*

A definitség felismerését rendkívül megkönnyíti az, ha a kvadratikus formának kanonikus alakja ismert. A

$$Q(x_1, \ldots, x_n) = \lambda_1 x_1^2 + \cdots + \lambda_n x_n^2$$

kanonikus alak alapján nyilvánvalóan, pl. Q pontosan akkor pozitív definit, ha $\lambda_1 > 0, \ldots, \lambda_n > 0$, míg akkor pozitív szemidefinit, ha $\lambda_1 \geq 0, \ldots, \lambda_n \geq 0$.

A kanonikus alak kiszámítása a Lagrange módszerrel minden esetben egyszerű módon lehetséges. Inkább elméleti szempontból érdekes a kvadratikus formák definitségének a sarokminorokkal való jellemzése:

Tétel. *Egy $\mathbb{R}^n$-en értelmezett kvadratikus forma pontosan akkor pozitív definit, ha minden sarokminora pozitív.*

Bizonyítás. A feltétel elégségessége Jacobi tételéből egyszerűen adódik. Ugyanis, ilyenkor alkalmazhatjuk Jacobi tételét, s az ott adódó kanonikus alakban minden együttható pozitív lesz.

A feltétel szükségességének belátásához először azt mutatjuk meg, hogy a Jacobi tétel feltételei teljesülnek, azaz a sarokminorok nem nullák.

Legyen L az a szimmetrikus bilineáris forma, melyből Q származik. A bizonyítás indirekt. Tegyük fel, hogy valamilyen k-re $\Delta_k = 0$. Ekkor a megfelelő sarokmátrix oszlopai lineárisan függők, tehát vannak olyan nem csupa nulla $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ együtthatók, hogy

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} L(e_1, e_1) \\ \vdots \\ L(e_k, e_1) \end{pmatrix} + \cdots + \alpha_k \begin{pmatrix} L(e_1, e_k) \\ \vdots \\ L(e_k, e_k) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ez azt jelenti, hogy minden i-re $(1 \leq i \leq k)$

$$\sum_{j=1}^{k} \alpha_j L(e_i, e_j) = 0.$$

L linearitását kihasználva

$$L(e_i, \sum_{j=1}^{k} \alpha_j e_j) = 0.$$

Szorozzuk meg mindegyik egyenletet α_i-vel, majd összeadva, újra a linearitást kihasználva

$$L\left(\sum_{i=1}^{k} \alpha_i e_i, \sum_{j=1}^{k} \alpha_j e_j \right) = 0$$

adódik. Ez azt jelenti, hogy van olyan $x = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j e_j \neq 0$, hogy $L(x, x) = 0$, de ez ellentmond Q pozitív definitségének.

Mostmár alkalmazhatjuk a Jacobi tételt: a kanonikus alakban a pozitív definitség miatt mindegyik együttható pozitív, ezért az első együtthatóból $\Delta_1 > 0$, a másodikból $\Delta_2 > 0$, és így tovább az utolsóból $\Delta_n > 0$.

□

A későbbiekben megismerkedünk majd még egy módszerrel a kvadratikus formák kanonikus alakjának megkeresésére. Az csak euklideszi terek esetén alkalmazható, viszont ott jobb eredményt, nevezetesen ortonormált kanonikus bázist szolgáltat.

9. Euklideszi és unitér terek

9.1. Az euklideszi tér fogalma

DEFINÍCIÓ. *Egy véges dimenziós valós E vektorteret* **euklideszi vektortér***nek nevezünk, ha meg van adva egy olyan szimmetrikus bilineáris forma, amelyből származó kvadratikus forma pozitív definit. E bilineáris formát ilyenkor* **belső szorzat***nak, vagy* **skaláris szorzat***nak is mondjuk. Két $x, y \in E$ vektor belső szorzatát (x, y)-nal jelöljük. Az $x \in E$ vektor* **hossza (normája)**

$$||x|| = \sqrt{(x, x)}$$

Láthatjuk, hogy tetszőleges vektor normája értelmezhető így, mivel az (x, x) belső szorzat nemnegatív valós szám.

PÉLDÁK.

1. $\mathbb{R}^n$ standard belső szorzatán a következő szimmetrikus bilineáris formát értjük:
$$(x, y) = x_1y_1 + \cdots + x_ny_n$$
tetszőleges $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ esetén.

2. A szabadvektorok tere esetében a szokásos belső szorzat megadása a szög és a vektorok hossza fogalmának felhasználásával történik (lásd 1.4):
$$(x, y) = |x| \cdot |y| \cos \sphericalangle(x, y).$$

3. Függvényterek esetén általában integrállal definiálunk belső szorzatot: Pl. az $[a, b]$-n folytonos valós függvények $\mathcal{C}[a, b]$ vektorterén a szokásos belső szorzat:
$$(f, g) = \int_a^b f(x)g(x)\,dx$$

4. Véges dimenziós valós vektorterek esetén sokféleképpen adhatunk meg belső szorzatot, például egy tetszőlegesen rögzített bázisra vonatkozó koordinátákkal az 1. példában említett képlet szerint.

TÉTEL. **Cauchy-Bunyakovszkij-Schwarz egyenlőtlenség.**
Bármely $x, y \in E$ esetén

$$|(x, y)| \leq ||x|| \cdot ||y||$$

Egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha x és y lineárisan függő.

Bizonyítás. A pozitív definit tulajdonság miatt bármely $\lambda \in \mathbb{R}$ esetén

$$(x + \lambda y, x + \lambda y) \geq 0$$

azaz

$$(x,x) + 2\lambda(x,y) + \lambda^2(y,y) \geq 0$$

Tehát e másodfokú polinom diszkriminánsa $D \leq 0$:

$$4(x,y)^2 - 4(x,x)(y,y) \leq 0.$$

ami ekvivalens a bizonyítandóval. Ha a Cauchy-Bunyakovszkij-Schwarz egyenlőtlenségben az egyenlőség áll, akkor a diszkrimináns nulla, tehát van gyöke a polinomnak, azaz van olyan λ, hogy $x + \lambda y = 0$. □

A Cauchy-Bunyakovszkij-Schwarz egyenlőtlenség következtében euklideszi vektorterekben értelmezhetjük a vektorok szögét:

DEFINÍCIÓ. *A nullvektortól különböző x, y vektorok* **szöge** *az az α szám, melyre*

$$\cos\alpha = \frac{(x,y)}{||x|| \cdot ||y||}.$$

Ez az összefüggés egyértelműen határoz meg egy $0 \leq \alpha \leq \pi$ szöget, hiszen a koszinusz függvény e tartományon kölcsönösen egyértelmű, s a fenti hányados a Cauchy-Bunyakovszkij-Schwarz egyenlőtlenség miatt minden esetben a $[-1,1]$ intervallumba esik.

PÉLDÁK.

1. $\mathbb{R}^n$ standard belső szorzata esetén a Cauchy-Bunyakovszkij-Schwarz egyenlőtlenség alakja a következő:

$$(x_1y_1 + \cdots + x_ny_n)^2 \leq (x_1^2 + \cdots + x_n^2)(y_1^2 + \cdots + x_n^2)$$

2. A $\mathcal{C}[a,b]$ függvénytér esetén a Cauchy-Bunyakovszkij-Schwarz egyenlőtlenség a következőt jelenti (valós esetben):

$$\left|\int_a^b f(t)g(t)dt\right|^2 \leq \int_a^b f^2(t)dt \cdot \int_a^b g^2(t)dt$$

TÉTEL. **Minkowski egyenlőtlenség.** *Bármely $x, y \in E$ vektor esetén*

$$||x+y|| \leq ||x|| + ||y||$$

Egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha az egyik vektor a másik nemnegatív számszorosa.

Bizonyítás. A norma definícióját és a Cauchy-Bunyakovszkij-Schwarz egyenlőtlenséget alkalmazzuk:

$$||x+y||^2 = (x+y, x+y) = (x,x) + 2(x,y) + (y,y) \leq ||x||^2 + 2|(x,y)| + ||y||^2$$

$$\leq ||x||^2 + 2||x|| \cdot ||y|| + ||y||^2 = (||x|| + ||y||)^2$$

ahonnan gyökvonással adódik a Minkowski egyenlőtlenség. Az egyenlőtlenségsorozat első és utolsó tagja pontosan akkor egyenlő, ha mindkét becslésnél egyenlőség áll fenn. A Cauchy-Bunyakovszkij-Schwarz egyenlőtlenség miatt a második becslésnél az egyenlőség azt jelenti, hogy x és y lineárisan függőek. Az első becslénél viszont pontosan akkor nem történik növelés, ha $(x,y) \geq 0$, azaz – a függőségüket figyelembe véve – x és y egymásnak nemnegatív skalárszorosa.

□

MEGJEGYZÉS.

1. Az egyenlőtlenség azt fejezi ki, hogy a normának ugyanolyan tulajdonsága van, mint az abszolútérték fogalmának a valós számok és a komplex számok esetében.
2. Ezt az állítást szokták háromszög-egyenlőtlenségként is említeni. Az elnevezést az sugallja, hogy ha bevezetjük a vektorok távolságának fogalmát:

   $$d(x,y) = ||x - y||$$

   akkor az egyenlőtlenség így is kifejezhető:

   $$d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$$

   A fentiek alapján (E,d) metrikus tér.

9.2. Ortogonalitás

DEFINÍCIÓ. *Az euklideszi vektortér két x és y vektorát* **ortogonális***nak mondjuk, ha $(x,y) = 0$. Jele: $x \perp y$. Az $x \in E$ vektor* **egységvektor***, ha $||x|| = 1$. Egy vektorrendszer* **ortogonális***, ha páronként ortogonális vektorokból áll. Egy $e_1, e_2, \ldots, e_k$ vektorrendszer* **ortonormált***, ha páronként ortogonális és egységvektorokból áll.*

Az ortonormáltságot kifejezhetjük a következő formulával:

$$(e_i, e_j) = \delta_{ij} \quad (1 \leq i,j \leq n)$$

Az ortogonalitás fogalma a merőlegesség általánosítása; a szabadvektorok skaláris szorzata esetén ugyanazt jelenti. Ez a fogalom fontos szemléleti módot ad az általános euklideszi vektorterek vizsgálatában. Legegyszerűbb példája ennek a Pitagorasz tétel általánosítása:

LEMMA. *Az x és y vektorok pontosan akkor ortogonális, ha $||x+y||^2 = ||x||^2 + ||y||^2$.*

Bizonyítás. Az

$$||x+y||^2 = (x+y, x+y) = (x,x) + 2(x,y) + (y,y) = ||x||^2 + ||y||^2 + 2(x,y)$$

alapján nyilvánvaló. □

A szám n-esek $\mathbb{R}^n$ euklideszi vektorterében a természetes bázis nyilvánvalóan ortonormált bázist ad meg. A szabadvektorok körében pedig pl. egy kocka egy csúcsából induló élvektorai határoznak meg ortonormált bázist.

TÉTEL. *Egy nullvektort nem tartalmazó ortogonális vektorrendszer mindig lineárisan független.*

Bizonyítás. Ha $\alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_k e_k = 0$, akkor minden $i = 1, \dots, k$ esetén

$$0 = (0, e_i) = (\alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_k e_k, e_i) =$$

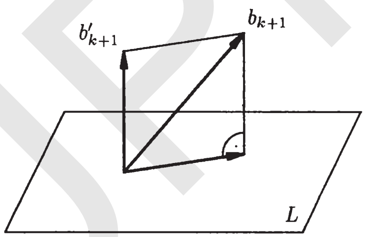
$$= \alpha_1(e_1, e_i) + \dots + \alpha_k(e_k, e_i) = \alpha_i(e_i, e_i)$$

s így $(e_i, e_i) \neq 0$ miatt $\alpha_i = 0$ adódik minden $i = 1, 2, \dots, k$-ra. □

Most megmutatjuk, hogy minden véges dimenziós euklideszi vektortérben van ortonormált bázis.

TÉTEL. **Gram–Schmidt ortogonalizálási eljárás**
Az E euklideszi vektortér bármely $(b_1, b_2, \dots, b_n)$ bázisához konstruálható olyan $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ ortonormált bázis, melyre $\mathcal{L}(e_1, \dots, e_k) = \mathcal{L}(b_1, \dots, b_k)$ teljesül minden $k = 1, 2, \dots, n$-re. E bázis tagjai előjeltől eltekintve egyértelműek.

Bizonyítás.



$L = \mathcal{L}(b_1, \dots, b_k) = \mathcal{L}(e_1, \dots, e_k)$

A bizonyítás konstruktív: legyen $e_1 = \frac{b_1}{||b_1||}$. Ha $e_1, \dots, e_k$ már ismert és rendelkezik a generált alterekre megkívánt tulajdonsággal, akkor e_{k+1}-hez a következőképp jutunk. Előbb legyen

$$e'_{k+1} = b_{k+1} - (b_{k+1}, e_1)e_1 - \dots - (b_{k+1}, e_k)e_k,$$

majd

$$e_{k+1} = \frac{e'_{k+1}}{||e'_{k+1}||}.$$

Itt az osztás lehetséges, hiszen e'_{k+1} nem lehet nullvektor. Ugyanis, ha az volna, akkor $b_{k+1} = (b_{k+1}, e_1)e_1 + \dots + (b_{k+1}, e_k)e_k$ miatt, figyelembe véve, hogy $\mathcal{L}(e_1, \dots, e_k) = \mathcal{L}(b_1, \dots, b_k)$, a $b_1, \dots, b_k, b_{k+1}$ vektorrendszer lineárisan függő lenne.

Megmutatjuk, hogy az indukciós lépés során a tételben megkívánt tulajdonságok megmaradnak. Egyrészt az ortogonalitás: Ha $1 \le i \le k$, akkor

$$(e'_{k+1}, e_i) = (b_{k+1} - (b_{k+1}, e_1)e_1 - \cdots - (b_{k+1}, e_k)e_k, e_i) =$$

$$= (b_{k+1}, e_i) - (b_{k+1}, e_1)(e_1, e_i) - \cdots - (b_{k+1}, e_k)(e_k, e_i) = 0.$$

Másrészt a generált alterekre mondott tulajdonság továbbra is fönnáll:

$$\mathcal{L}(e_1, \ldots, e_k, e_{k+1}) = \mathcal{L}(e_1, \ldots, e_k, b_{k+1}) = \mathcal{L}(b_1, \ldots, b_k, b_{k+1})$$

□

Megjegyzés. Ortonormált bázisok alkalmazása azért hasznos, mert ilyenkor a koordinátákkal ugyanúgy lehet számolni, mint $\mathbb{R}^n$-ben a komponensekkel. Speciálisan, az ortonormált bázisokra vonatkozó koordináták kiszámolhatók a belső szorzat segítségével: Ha $(e_1, \ldots, e_n)$ ortonormált bázis E-ben és $x = x_1e_1 + \cdots + x_ne_n$, akkor $x_i = (x, e_i)$ minden $i = 1, \ldots, n$-re. Ugyanis

$$(x, e_i) = (x_1e_1 + \cdots + x_ne_n, e_i) = x_1(e_1, e_i) + \cdots + x_n(e_n, e_i) = x_i(e_i, e_i) = x_i.$$

Továbbá, ha $x = x_1e_1 + \cdots + x_ne_n$ és $y = y_1e_1 + \cdots + y_ne_n$, akkor

$$(x, y) = (x, y_1e_1 + \cdots + y_ne_n) = y_1(x, e_1) + \cdots + y_n(x, e_n) = x_1y_1 + \cdots + x_ny_n,$$

illetve

$$||x||^2 = x_1^2 + \cdots + x_n^2.$$

Láthatjuk tehát, hogy két vektor belső szorzatának, illetve egy vektor normájának a kiszámítása egy ortonormált bázisra vonatkozó koordinátákkal ugyanúgy történhet, mint $\mathbb{R}^n$ standard belső szorzata esetén.

Definíció. *Az E_1 és E_2* **euklideszi tereket izomorf***nak mondjuk, ha van olyan $\varphi\colon E_1 \to E_2$ leképezés, mely egyrészt vektorterek közötti izomorfia, másrészt a belső szorzatot is megőrzi:*

$$(\varphi(x), \varphi(y)) = (x, y) \qquad (x, y \in E_1).$$

Tétel. *Két azonos véges dimenziójú euklideszi vektortér mindig izomorf egymással.*

Bizonyítás. Mindkettőben ortonormált bázist véve, tekintsük azt a lineáris leképezést, amely rendre megfelelteti egymásnak a bázisvektorokat. A belső szorzat megőrzése abból következik, hogy a belső szorzatot mindkét térben a megadott bázisokra vonatkozó koordinátákból ugyanúgy számolhatjuk ki. □

Definíció. *Az E euklideszi vektortér egy L alterének* **ortogonális komplementer***én azon vektorok összességét értjük, melyek ortogonálisak L minden vektorára. Jelben:*

$$L^\perp = \{x \in E \mid x \perp y \quad \forall y \in L\}.$$

Megjegyzés. Az ortogonális komplementumot magyarul nevezhetnénk merőlegesen kiegészítő altérnek is. Könnyen látható, hogy $L^\perp$ is altér, ui. az Altérkritérium alapján ha $x_1, x_2 \in L^\perp, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, akkor $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 \in L^\perp$ is teljesül, hiszen

$$(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2, y) = \lambda_1(x_1, y) + \lambda_2(x_2, y) = 0.$$

Tétel. *Tetszőleges véges dimenziós euklideszi vektortér bármely L altere esetén*

$$L \oplus L^\perp = E,$$

továbbá

$$(L^\perp)^\perp = L.$$

Bizonyítás. Ha $x \in L \cap L^\perp$, akkor $(x, x) = 0$, s ezért $x = 0$. Tehát L és $L^\perp$ direkt összeadandók.

Tekintsük E-nek olyan $(b_1, \dots, b_n)$ bázisát, amelynek első l vektora L-nek bázisa. A Gram-Schmidt ortogonalizálási eljárás után adódó $(e_1, \dots, e_n)$ ortonormált bázisra is érvényes, hogy közülük az első l darab L-nek adja bázisát. Nyilván az $(e_{l+1}, \dots, e_n)$ vektorok mind $L^\perp$-ben vannak, hiszen L egy bázisának minden vektorára merőlegesek. Másrészt lineárisan függetlenek, mivel bázis részét alkotják. Emiatt $L^\perp$ dimenziója legalább $n - l$. Az $L^\perp$ altér dimenziója viszont nem lehet több $(n - l)$-nél, mivel L és $L^\perp$ direkt összeadandók, és ezért

$$n = \dim(E) \geq \dim(L \oplus L^\perp) = \dim L + \dim L^\perp = l + \dim L^\perp.$$

Tehát $\dim L^\perp = n - l$, ahonnan az utolsó egyenlőtlenségsor alapján

$$L \oplus L^\perp = E.$$

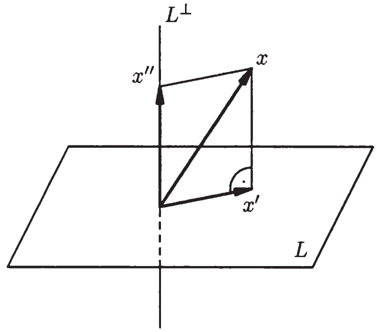
A második összefüggés belátásához először figyeljük meg, hogy $L \subseteq (L^\perp)^\perp$. Ugyanis, ha $x \in L$, akkor bármely $y \in L^\perp$ esetén $(x, y) = 0$, azaz $x \in (L^\perp)^\perp$. Alkalmazzuk az első összefüggésünket $L^\perp$-re:

$$L^\perp \oplus (L^\perp)^\perp = E.$$

Ezért $\dim L^\perp + \dim(L^\perp)^\perp = \dim E$, amiből $\dim L^\perp = \dim(L^\perp)^\perp$ és $L \subset (L^\perp)^\perp$ alapján $L = (L^\perp)^\perp$. □

Megjegyzés.

1. A tétel alapján adott L altér esetén tetszőleges $x \in E$ vektorhoz egyértelműen található olyan $x' \in L$ és $x'' \in L^\perp$, hogy $x = x' + x''$. Ekkor x'-t az x vektor L altérre eső **merőleges vetület**ének mondjuk, a $p_L \colon E \to E, x \mapsto x'$ leképezést merőleges vetítésnek, vagy **ortogonális projekció**nak nevezzük. Ez a leképezés nyilvánvalóan lineáris és teljesíti a $p_L^2 = p_L$ tulajdonságot (idempotens).



2. A merőleges vetület kiszámítását illetően: ha $(e_1, \ldots, e_k, e_{k+1}, \ldots, e_n)$ olyan ortonormált bázis E-ben, hogy $(e_1, \ldots, e_k)$ L-nek bázisa, akkor

$$x' = (x, e_1)e_1 + \cdots + (x, e_k)e_k \in L$$

$$x'' = (x, e_{k+1})e_{k+1} + \cdots + (x, e_n)e_n \in L^{\perp}.$$

A merőleges vetület meghatározása bonyolultabb nem ortonormált bázis ismerete esetén. Tegyük fel, hogy $L = \mathcal{L}(b_1, b_2, \ldots, b_k)$, és x'-t $x' = \beta_1 b_1 + \cdots + \beta_k b_k$ alakban keressük. Ekkor $x - x' \in L^{\perp}$, ezért $(b_i, x - x') = 0$-nak kell teljesülni minden $i = 1, \ldots, k$ esetén. Részletesebben

$$\begin{aligned} \beta_1(b_1, b_1) + \cdots + \beta_k(b_1, b_k) &= (b_1, x) \\ &\vdots \\ \beta_1(b_k, b_1) + \cdots + \beta_k(b_k, b_k) &= (b_k, x) \end{aligned}$$

Ezen inhomogén lineáris egyenletrendszer megoldása útján kapjuk meg a $\beta_1, \ldots, \beta_k$ együtthatókat, s velük az x' merőleges vetületvektort.

TÉTEL. **Bessel egyenlőtlenség.**
Ha $(e_1, \ldots, e_k)$ ortonormált vektorrendszer az E euklideszi térben, akkor bármely $x \in E$ vektor esetén

$$(x, e_1)^2 + \cdots + (x, e_k)^2 \leq ||x||^2$$

teljesül. Ebben az egyenlőtlenségben minden $x \in E$-re egyenlőség pontosan akkor áll fenn, ha $(e_1, \ldots, e_k)$ bázis E-ben.

Bizonyítás. Jelölje x' az x vektornak az $L = \mathcal{L}(e_1, \ldots, e_k)$ altérre eső merőleges vetületét. Fenti megjegyzésünk szerint

$$x' = (x, e_1)e_1 + \ldots + (x, e_k)e_k.$$

A pitagoraszi összefüggés alapján a merőleges vetület hossza nem lehet nagyobb az eredeti vektor hosszánál:

$$||x'|| \leq ||x||.$$

Figyelembe véve a norma koordinátákkal való kiszámítását ebből következően

$$(x, e_1)^2 + \ldots + (x, e_k)^2 = ||x'||^2 \leq ||x||^2.$$

Ha minden $x \in E$ esetén $||x'|| = ||x||$, akkor $x' - x = 0$, azaz $x' = x$, vagyis $x \in \mathcal{L}(e_1, \ldots, e_k)$. Tehát ha minden $x \in E$ esetén egyenlőség áll fenn a Bessel egyenlőtlenségben, akkor

$$E = \mathcal{L}(e_1, \ldots, e_k),$$

azaz $(e_1, \ldots, e_k)$ generátorrendszere E-nek. Az ortonormáltságot figyelembe véve az $(e_1, \ldots, e_k)$ vektorok lineárisan függetlenek, tehát bázist alkotnak E-ben. □

Megjegyzés.

1. A Bessel egyenlőtlenség teljesüléséhez nem szükséges, hogy E véges dimenziós legyen, csak az, hogy az altér véges dimenziós legyen.
2. A $k = \dim E$ esetben az állítás szerint minden x vektorra egyenlőség teljesül. Ezt **Parseval egyenlőségnek** nevezzük.

Definíció. *Az x vektornak az L* **altértől mért távolságán** *a*

$$d(x, L) = ||x - x'||$$

értéket értjük.

Megjegyzés. Ez a távolságfogalom is rendelkezik a minimumtulajdonsággal, azaz

$$d(x, L) = \min\{||x - y|| \mid y \in L\}$$

ugyanis

$$||x - y||^2 = ||(x - x') + (x' - y)||^2 = ||x - x'||^2 + ||x' - y||^2 \geq ||x - x'||^2.$$

9.3. Unitér terek

Mielőtt az unitér tér fogalmát ismertetnénk, újabb formatípusokat vezetünk be komplex vektorterek esetén.

Definíció. *Az U komplex vektortéren értelmezett $\ell\colon U \to \mathbb{C}$ leképezést* **konjugált-lineáris formának** *mondjuk, ha bármely $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ és $x, y \in U$ esetén*

$$\ell(\lambda x + \mu y) = \bar{\lambda}\ell(x) + \bar{\mu}\ell(y)$$

teljesül.

Megjegyzés. Ha $(b_1, \ldots, b_n)$ bázis az U térben, akkor egyértelműen léteznek olyan $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{C}$ skalárok, hogy minden $x = x_1 b_1 + \ldots + x_n b_n \in U$ esetén

$$\ell(x) = \alpha_1 \overline{x}_1 + \ldots + \alpha_n \overline{x}_n.$$

Definíció. *Az U komplex vektortéren értelmezett $L\colon U \times U \to \mathbb{C}$ leképezés* **Hermite-bilineáris forma**, *ha első változójában lineáris, míg második változójában konjugált-lineáris. Egy L Hermite-bilineáris forma* **Hermite-szimmetrikus**, *ha minden $x, y \in U$ esetén*

$$L(y,x) = \overline{L(x,y)}.$$

Megjegyzés.

1. Komplex vektortéren adott Hermite–bilineáris formák – hasonlóan a bilineáris formákhoz – egy bázis rögzítése után előállíthatóak koordinátákkal. Ha $(b_1, \dots, b_n)$ bázis U-ban, és $X = (x_1, \dots, x_n)^t \in \mathbb{C}^n$ és $Y = (y_1, \dots, y_n)^t \in \mathbb{C}^n$ az x és y vektor ezen bázisra vonatkozó koordinátái, akkor

$$L(x,y) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \alpha_{jk} x_j \overline{y}_k = X^t A \overline{Y}$$

ahol $A = (\alpha_{jk})$ az Hermite bilineáris forma együtthatómátrixa, azaz $\alpha_{jk} = L(b_j, b_k)$.

2. A valós esethez hasonlóan Hermite–bilineáris formák esetén a $(b_1, \dots, b_n)$ bázist akkor mondjuk kanonikusnak, ha $\alpha_{jk} = L(b_j, b_k) = 0$ minden $j \neq k$ esetén. Ilyenkor az együtthatómátrix diagonális. Ha a $(b_1, \dots, b_n)$ bázis kanonikus, az x, y vektorok együtthatói ebben a bázisban $(x_1, \dots, x_n)^t$ és $(y_1, \dots, y_n)^t$, valamint $\lambda_j = L(b_j, b_j)$, akkor

$$L(x,y) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_j \overline{y}_j$$

vagyis a kanonikus alakban a második változó koordinátáinak konjugáltjai szerepelnek.

Definíció. *Ha L Hermite–szimmetrikus Hermite–bilineáris forma az U komplex vektortéren, akkor a $Q\colon U \to \mathbb{C}$ leképezést, melyre*

$$Q(x) = L(x,x) \quad (x \in U)$$

kvadratikus formá*nak nevezzük U-n.*

Megjegyzés. Ha $(b_1, \dots, b_n)$ bázis U-ban, és $X = (x_1, \dots, x_n)^t \in \mathbb{C}^n$ az x vektor ezen bázisra vonatkozó koordinátái, akkor

$$Q(x) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \alpha_{jk} x_j \overline{x}_k = X^t A \overline{X}$$

ahol $A = (\alpha_{jk})$ a kvadratikus forma együtthatómátrixa, azaz $\alpha_{jk} = L(b_j, b_k)$. Belátható, hogy a bázis rögzítése után az együtthatórendszer egyértelműen létezik. A kvadratikus forma kanonikus alakú, ha együtthatórendszere diagonális mátrix, azaz valamely $(b_1, \ldots, b_n)$ bázisra vonatkozóan minden $x = x_1 b_1 + \ldots + x_n b_n$ vektorra

$$Q(x) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j |x_j|^2.$$

DEFINÍCIÓ. **Unitér tér**en *olyan komplex vektorteret értünk, amelyen meg van adva egy Hermite-szimmetrikus Hermite-bilineáris forma, amelyből pozitív definit kvadratikus forma származik. E bilineáris formát most is belső szorzatnak mondjuk, és (x, y)-nal jelöljük.*

MEGJEGYZÉS. A komplex esetben a Hermite-szimmetria biztosítja azt, hogy a kapott kvadratikus forma valós értékű:

$$(x, x) = \overline{(x, x)} \implies (x, x) \in \mathbb{R}$$

Az Hermite-féle bilinearitás pedig azért szükséges, hogy az (x, x) kvadratikus forma pozitív definit lehessen. Ha csak bilinearitást követelnénk meg, akkor

$$(ix, ix) = i^2(x, x) = -(x, x)$$

teljesedne, ami megakadályozná a pozitív definitséget. A pozitív definitség viszont a norma értelmezéséhez elengedhetetlen (lásd a norma definícióját).

PÉLDÁK.

1. Unitér térre a tipikus példa $\mathbb{C}^n$, ellátva a következő belső szorzattal

$$(x, y) = x_1 \bar{y}_1 + \cdots + x_n \bar{y}_n$$

tetszőleges $x = (x_1, \ldots, x_n)^t$, $y = (y_1, \ldots, y_n)^t \in \mathbb{C}^n$ esetén.

2. Komplex értékű függvényterek esetén az integrálos definíció a következőképpen módosul:

$$(f, g) = \int_a^b f(x)\overline{g(x)}\, dx$$

Így unitér teret kapunk.

MEGJEGYZÉS. Az euklideszi vektorterekben bevezetett fogalmak és igazolt összefüggések jó része szinte pontosan ugyanúgy történhet unitér terek esetén is. Most főként csak a különbségekre utalunk.

- A belső szorzatnak és a normának a kiszámítása ortonormált bázisra vonatkozó koordinátákból a komplex szám n-esek standard belső szorzatának képletére alakul át:

$$\begin{aligned} (x, y) &= x_1 \bar{y}_1 + \cdots + x_n \bar{y}_n. \\ \|x\|^2 &= |x_1|^2 + \cdots + |x_n|^2. \end{aligned}$$

- Unitér tér esetén az euklideszi térben szokásos definíció nem alkalmas szög definiálására, mivel a belső szorzat értéke ott nem valós szám.

- Az ortogonalitás fogalma pontosan ugyanúgy definiálható, és pontosan ugyanazokkal a tulajdonságokkal rendelkezik, mint euklideszi terekben. Pontosan ugyanúgy működik a Gram–Schmidt–féle ortogonalizálási eljárás is.

- A Cauchy-Bunyakovszkij-Schwarz egyenlőtlenség változatlanul igaz, de bizonyítása másképpen lehetséges. Például: Ha x-et merőlegesen vetítjük az $y \neq 0$ vektor irányára, a merőleges vetület $\tilde{x} = (x, y)\dfrac{y}{(y, y)}$ lesz. A Pitagorasz tétel alapján ha egy vektort merőlegesen vetítünk egy másik irányára, a merőleges vetület normája nem lehet hosszabb, mint az eredetié:
$$\|(x, y)\frac{y}{(y, y)}\| \leq \|x\|.$$
Innen átalakítással adódik a Cauchy-Bunyakovszkij-Schwarz egyenlőtlenség.

10. Transzformációk belső szorzatos tereken

Ezen fejezetben ahol lehetséges, párhuzamosan tárgyaljuk az euklideszi és unitér terek transzformációit, rámutatva a közös és eltérő tulajdonságokra.

10.1. Formák előállítása belső szorzattal

Bevezetésképpen megmutatjuk, hogy véges dimenziós euklideszi (unitér) tér lineáris (konjugált lineáris) formái a belső szorzat segítségével hogyan állíthatók elő. Ezt követően belátjuk, hogy a bilineáris (Hermite bilineáris) formákhoz kétféleképpen is hozzárendelhető egy-egy lineáris transzformáció a belső szorzaton keresztül. Ez teszi majd lehetővé a következő szakaszban a transzformációk adjungálását.

Tétel. *A véges dimenziós W euklideszi (unitér) vektortér tetszőleges $\ell \in W^*$ lineáris formájához egyértelműen van olyan $a \in W$, hogy*

$$\ell(x) = (x, a) \quad (x \in W).$$

A W unitér tér minden ℓ konjugált–lineáris formájához egyértelműen létezik olyan $a \in W$, hogy

$$\ell(x) = (a, x) \quad (x \in W).$$

Bizonyítás. Legyen először ℓ lineáris forma. Legyen $(b_1, \ldots, b_n)$ ortonormált bázis W-ben és legyenek $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ az ℓ lineáris forma ezen bázisra vonatkozó együtthatói. Legyen továbbá $a = \overline{\alpha}_1 b_1 + \ldots + \overline{\alpha_n} b_n$. Akkor minden $x = x_1 b_1 + \ldots + x_n b_n \in W$ vektorra

$$\ell(x) = \alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_n x_n = (x, a).$$

Tehát létezik megfelelő a vektor. Ezen vektor egyértelmű, ugyanis ha az $a, b \in W$ vektorokkal minden $x \in W$-re

$$(x, a) = \ell(x) = (x, b),$$

akkor $(x, a - b) = 0$ minden x-re, azaz $(a - b, a - b) = 0$, tehát $a = b$.

Legyen most ℓ konjugált lineáris forma a W unitér téren. Legyen $(b_1, \ldots, b_n)$ ortonormált bázis W-ben és legyenek $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ az ℓ lineáris forma ezen bázisra vonatkozó együtthatói. Legyen továbbá $a = \alpha_1 b_1 + \ldots + \alpha_n b_n$. Akkor minden $x = x_1 b_1 + \ldots + x_n b_n \in W$ vektorra

$$\ell(x) = \alpha_1 \overline{x}_1 + \ldots + \alpha_n \overline{x}_n = (a, x).$$

Az a vektor egyértelműsége a fentiekhez hasonlóan látható.

□

Tétel. *A W euklideszi (unitér) tér minden L bilineáris (Hermite-bilineáris) formájához egyértelműen léteznek olyan $\varphi, \psi \in \tau_W$ lineáris transzformációk, hogy minden $x, y \in W$ esetén*

$$L(x, y) = (\varphi(x), y) = (x, \psi(y)).$$

Bizonyítás. Az első előállításra igazolunk mindent, a második hasonlóan történhet, felcserélve a két változó szerepét.

Először az unicitást látjuk be. Ha bármely $x, y \in W$ esetén

$$(\varphi_1(x), y) = (\varphi_2(x), y)$$

akkor

$$((\varphi_1 - \varphi_2)(x), y) = 0,$$

illetve speciálisan

$$((\varphi_1 - \varphi_2)(x), (\varphi_1 - \varphi_2)(x)) = 0,$$

ami csak a $(\varphi_1 - \varphi_2)(x) = 0$ esetben lehetséges. Ezért $\varphi_1 = \varphi_2$.

Az egzisztencia igazolásához az L bilineáris (Hermite-bilineáris) formában rögzítsük az első változót. Az így adódó $L_x(y) = L(x, y)$ (konjugált) lineáris forma előző állításunk miatt előállítható valamely $\varphi(x)$-szel jelölt vektorral a $L_x(y) = (\varphi(x), y)$ alakban. Megmutatjuk, hogy az $x \in W \mapsto \varphi(x) \in W$ leképezés lineáris. Kihasználjuk a bilineáris formák (Hermite bilineáris formák) és a belső szorzat alapvető tulajdonságait:

$$(\varphi(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2), y) = L(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2, y) = \lambda_1 L(x_1, y) + \lambda_2 L(x_2, y) =$$

$$= \lambda_1(\varphi(x_1), y) + \lambda_2(\varphi(x_2), y) = (\lambda_1 \varphi(x_1) + \lambda_2 \varphi(x_2), y).$$

Ez tetszőleges $y \in E$ esetén teljesedik, emiatt

$$\varphi(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) = \lambda_1 \varphi(x_1) + \lambda_2 \varphi(x_2).$$

□

10.2. Transzformációk adjungálása

A bilineáris formák belső szorzattal történő előállításának kétféle módja teszi lehetővé az adjungálás fogalmának kialakítását. Ugyanis, tetszőleges φ lineáris transzformáció esetén a $(\varphi(x), y)$ képlettel egy bilineáris (Hermite bilineáris) formát értelmezhetünk, amelyet előállíthatunk $(x, \psi(y))$ alakban is az előző szakasz utolsó állítása alapján.

DEFINÍCIÓ. *Ha egy W euklideszi (unitér) vektortér φ és ψ lineáris transzformációjára $(\varphi(x), y) = (x, \psi(y))$ teljesül minden $x, y \in W$ esetén, akkor ψ-t a φ* **lineáris transzformáció adjungáltjá***nak mondjuk. Az adjungált jelölése: φ^*.*

Az adjungálás a következő egyszerű tulajdonságokkal rendelkezik.

TÉTEL. *Legyen W euklideszi (unitér) tér, φ és ψ két tetszőleges lineáris transzformáció W-n, és legyen $\lambda \in \mathbb{R}$ ($\lambda \in \mathbb{C}$). Ekkor*

$$(\varphi + \psi)^* = \varphi^* + \psi^*$$

$$(\lambda\varphi)^* = \overline{\lambda}\varphi^*$$
$$(\varphi \circ \psi)^* = \psi^* \circ \varphi^*$$
$$\varphi^{**} = \varphi.$$

Bármely ortonormált bázis esetén φ^* mátrixa φ mátrixának konjugált transzponáltjával egyezik meg.

Bizonyítás. Tetszőleges $x, y \in W$ esetén érvényes a következő átalakítás. Közben kihasználjuk az adjungálás definícióját, s a belső szorzás alaptulajdonságait:

$$\begin{aligned}(x, (\varphi+\psi)^*(y)) &= ((\varphi+\psi)(x), y) = \\ &= (\varphi(x)+\psi(x), y) = (\varphi(x), y) + (\psi(x), y) = \\ &= (x, \varphi^*(y)) + (x, \psi^*(y)) = (x, (\varphi^*+\psi^*)(y))\end{aligned}$$

Ez minden $x \in W$-re teljesül, emiatt

$$(\varphi+\psi)^*(y) = (\varphi^*+\psi^*)(y)$$

tetszőleges $y \in W$-re, azaz

$$(\varphi+\psi)^* = \varphi^* + \psi^*.$$

Hasonlóan a következő levezetésekből adódik a második, harmadik és negyedik bizonyítandó összefüggés:

$$\begin{aligned}(x, (\lambda\varphi)^*(y)) &= ((\lambda\varphi)(x), y) = \lambda(\varphi(x), y) = \\ &= \lambda(x, \varphi^*(y)) = (x, \overline{\lambda}\varphi^*(y)) = (x, (\overline{\lambda}\varphi^*)(y)), \\ (x, (\varphi\circ\psi)^*(y)) &= ((\varphi\circ\psi)(x), y) = (\varphi(\psi(x)), y) = \\ &= (\psi(x), \varphi^*(y)) = (x, \psi^*(\varphi^*(y))) = (x, (\psi^*\circ\varphi^*)(y)), \\ (x, \varphi^{**}(y)) &= (\varphi^*(x), y) = \overline{(y, \varphi^*(x))} = \overline{(\varphi(y), x)} = (x, \varphi(y)).\end{aligned}$$

Tekintsünk egy $(e_1, \ldots, e_n)$ ortonormált bázist W-ben. Jelölje φ mátrixát e bázisra vonatkozóan $A = (\alpha_{ij})$, illetve φ^* mátrixát $B = (\beta_{ij})$. Ilyenkor $\varphi^*(e_k) = \sum_{j=1}^n \beta_{jk} e_j$. Számítsuk ki $(\varphi(e_k), e_l)$-et kétféleképpen:

$$(\varphi(e_k), e_l) = \left(\sum_{j=1}^n \alpha_{jk} e_j, e_l\right) = \sum_{j=1}^n \alpha_{jk}(e_j, e_l) = \sum_{j=1}^n \alpha_{jk}\delta_{jl} = \alpha_{lk},$$

másrészt

$$(\varphi(e_k), e_l) = (e_k, \varphi^*(e_l)) = (e_k, \sum_{j=1}^n \beta_{jl} e_j) = \sum_{j=1}^n \overline{\beta}_{jl}(e_k, e_j) = \sum_{j=1}^n \overline{\beta}_{jl}\delta_{kj} = \overline{\beta}_{kl}.$$

Innen $B = \overline{A}^t$ következik. □

Az alábbiakban definiáljuk a transzformációk azon speciális osztályait, melyekkel részletesen fogunk foglalkozni.

Definíció. *A W euklideszi (unitér) tér φ* **lineáris transzformációja**

- **önadjungált,** *ha* $\varphi^* = \varphi$
- **ortogonális (unitér),** *ha* $\varphi^* = \varphi^{-1}$
- **normális,** *ha* $\varphi \circ \varphi^* = \varphi^* \circ \varphi$

Előbbi tételünk (a φ és φ^* ortonormált bázisra vonatkozó mátrixainak összefüggése alkalmat ad rá, hogy mátrixok adjungáltját is értelmezzük:

Definíció. *A valós (komplex) elemű $n \times n$ típusú A* **mátrix adjungáltja**

$$A^* = \overline{A}^t.$$

Ha a mátrixok szoros kapcsolatban vannak az adjungálás műveletével, akkor a transzformációkhoz hasonló elnevezésekkel illetjük őket:

Definíció. *A valós (komplex) elemű $n \times n$ típusú* **mátrix**

- **önadjungált,** *ha* $A^* = A$
- **ortogonális (unitér),** *ha* $A^* = A^{-1}$
- **normális,** *ha* $A\,A^* = A^*\,A$

Következmény. *Bármely φ transzformáció és adjungáltjának rangja, illetve defektusa megegyezik, továbbá φ és φ^* sajátértékei egymás konjugáltjai.*

Bizonyítás. Egy transzformáció rangja megegyezik mátrixának rangjával, továbbá transzponáláskor és konjugáláskor egy mátrix rangja nem változik. Ezért egy ortonormált bázisra vonatkozó mátrixát tekintve φ-nek és φ^*-nek, az teljesül, hogy

$$\rho(\varphi) = \rho(A) = \rho(\overline{A}^t) = \rho(\varphi^*).$$

A defektus a rangot kiegészíti a tér dimenziójára, emiatt φ és φ^* defektusa is megegyezik.

Mivel a sajátértékek a karakterisztikus polinom gyökei, elég azt belátni, hogy φ és φ^* karakterisztikus polinomjai egymás konjugáltjai:

$$p_\varphi(\lambda) = \det(A - \lambda E) = \det(A - \lambda E)^t =$$

$$= \det(A^t - \lambda E) = \overline{\det(\overline{A}^t - \overline{\lambda} E)} = \overline{p_{\varphi^*}(\overline{\lambda})}.$$

Tehát λ pontosan akkor gyöke a φ karakterisztikus polinomjának, ha $\overline{\lambda}$ gyöke φ^* karakterisztikus polinomjának. □

TÉTEL. *A W euklideszi vagy unitér tér tetszőleges φ lineáris transzformációja és adjungáltjának nullterei, illetve képterei között fennáll a következő összefüggés:*

$$Ker\,\varphi^* = (\varphi(W))^\perp$$

$$Ker\,\varphi = (\varphi^*(W))^\perp.$$

Bizonyítás. $y \in \mathrm{Ker}\,\varphi^* \iff \forall x \in E \quad (x, \varphi^*(y)) = 0 \iff \forall x \in E \quad (\varphi(x), y) = 0 \iff y \perp \varphi(W) \iff y \in (\varphi(W))^\perp$. A második állítás hasonlóan igazolható. □

10.3. Önadjungált transzformációk

Az önadjungáltság tulajdonsága azt jelenti, hogy minden x, y vektor esetén teljesedik

$$(\varphi(x), y) = (x, \varphi(y)).$$

Ez a φ ortonormált bázisra vonatkozó A mátrixa esetén azt jelenti, hogy $A = \overline{A}^t$.

PÉLDÁK.

1. Legyen W euklideszi (unitér) tér, $\lambda \in \mathbb{R}$. A λ-val való $\varphi_\lambda \colon W \to W$, $x \mapsto \lambda x$ szorzás önadjungált lineáris transzformáció.

2. Tekintsük a síkban a szabadvektoroknak egy tengelyre vonatkozó tükrözését. A belső szorzatot most a vektorok hosszával és szögével számolhatjuk ki, amely értékek a tengelyes tükrözés során nem változnak, ezért

$$(\varphi(x), y) = (x, \varphi(y)).$$

3. Az $L \subset W$ altérre történő merőleges vetítés (ortogonális projekció) önadjungált: Az $W = L \oplus L^\perp$ fölbontáshoz tartozóan $x = x' + x''$, illetve $y = y' + y''$ (ahol $x', y' \in L, x'', y'' \in L^\perp$), s így

$$(p_L(x), y) = (x', y' + y'') = (x', y') + (x', y'') =$$

$$= (x', y') + (x'', y') = (x' + x'', y') = (x, p_L(y))$$

mivel $(x', y'') = (x'', y') = 0$.

4. Ha egy ortonormált bázisban a transzformáció mátrixa valós elemű diagonális mátrix, akkor a transzformáció önadjungált. Az alábbiakban meg fogjuk mutatni, hogy minden önadjungált transzformációhoz létezik ilyen ortonormált bázis.

TÉTEL. *A W euklideszi (unitér) tér tetszőleges önadjungált transzformációja esetén a karakterisztikus polinom gyökei valós számok.*

Következmény. *Euklideszi (unitér) tér önadjungált transzformációinak spektruma teljes.*

Bizonyítás. Legyen $(e_1, \ldots, e_n)$ ortonormált bázis W-ben és legyen A a φ önadjungált transzformáció mátrixa erre a bázisra vonatkozóan. Nyilván $A = \overline{A}^t$. Legyen λ (esetleg komplex) gyöke az A karakterisztikus polinomjának. Legyen $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{C}^n$ az $(A - \lambda E)X = 0$ homogén lineáris egyenletrendszer egy nemtriviális megoldása. Tekintsük most a W tér W' komplexifikáltját, azaz az $\mathcal{L}(e_1, \ldots, e_n)$ generátumot $\mathbb{C}$ fölött. Ezen a téren jelölje φ' azt a transzformációt, melynek mátrixa az $(e_1, \ldots, e_n)$ bázisban A. A φ' ugyancsak önadjungált W'-n. Az $x = x_1e_1 + \ldots + x_ne_n \neq 0$ vektor eleme a W'-nek, melyre $\varphi'(x) = \lambda x$. Nyilván

$$\lambda(x, x) = (\varphi'(x), x) = (x, (\varphi')^*(x)) = (x, \lambda x) = \overline{\lambda}(x, x)$$

ahonnan $(x, x) \neq 0$ miatt $\lambda = \overline{\lambda}$ következik, azaz λ valós szám. □

Tétel. *A W euklideszi (unitér) tér tetszőleges önadjungált transzformációja esetén különböző sajátértékekhez tartozó sajátvektorok ortogonálisak.*

Bizonyítás. Legyen x és y a φ önadjungált transzformáció két különböző sajátértékéhez tartozó sajátvektora:

$$\varphi(x) = \lambda x, \qquad \varphi(y) = \mu y, \qquad \lambda \neq \mu.$$

$$\lambda(x, y) = (\lambda x, y) = (\varphi(x), y) = (x, \varphi(y)) = (x, \mu y) = \overline{\mu}(x, y) = \mu(x, y)$$

mert az előző tétel alapján μ valós szám. Mivel $\lambda \neq \mu$, ez csak egy úgy lehetséges, hogy $(x, y) = 0$. □

Az önadjungált transzformációk főtételéhez a következő lemmán keresztül jutunk el.

Lemma. *Ha $H \subset W$ invariáns altere a W euklideszi (unitér) tér a φ önadjungált lineáris transzformációnak, akkor $H^\perp$ is invariáns altere φ-nek.*

Bizonyítás. Legyen $x \in H^\perp$, azaz minden $h \in H$-ra $(x, h) = 0$. Ekkor

$$(\varphi(x), h) = (x, \varphi(h)) = 0$$

hiszen $\varphi(h) \in H$. Ezért $\varphi(x) \in H^\perp$. □

Tétel. **Struktúratétel.**
Véges dimenziós euklideszi vagy unitér vektortéren adott tetszőleges önadjungált transzformáció esetén van a térnek a transzformáció sajátvektoraiból álló ortonormált bázisa.

Bizonyítás. A bizonyítás a tér dimenziója szerinti indukcióval történik. Ha $\dim W = 1$, akkor az állítás triviálisan teljesül.

Most feltesszük, hogy $\dim W = n$-nél kisebb dimenziójú terek esetén igaz az állítás. Vegyünk egy n-dimenziós téren adott önadjungált transzformációt. Fenti tételünk szerint létezik a transzformációnak sajátértéke, s hozzátartozó sajátvektora. Tekintsünk egy sajátvektor által generált alteret: $H = \mathcal{L}(a)$.

Természetesen H invariáns altere φ-nek, s a lemma szerint $H^\perp$ is az. Tekintsük most φ megszorítását a $H^\perp$ altérre. Így egy $(n-1)$-dimenziós vektortéren értelmezett önadjungált transzformációt kapunk. Erre alkalmazva az indukciós feltevést, megadhatunk egy $e_1, \dots, e_{n-1} \in H^\perp$ ortonormált bázist a $H^\perp$ altérben, amely φ sajátvektoraiból áll. Ezt kiegészítve $e_n = a$-val, megkapjuk a kívánt bázist.
□

Az önadjungált transzformációk ezen alaptételének egyik fontos alkalmazása a kvadratikus formákról szól, melyet **főtengelytranszformáció tételé**nek neveznek. Az elnevezés a másodrendű görbék és felületek elméletéből származik.

TÉTEL. *Egy véges dimenziós euklideszi vagy unitér vektortéren adott tetszőleges kvadratikus formának van ortonormált kanonikus bázisa. Továbbá a kanonikus alakban szereplő együtthatók éppen a kvadratikus forma valamely ortonormált bázisra vonatkozó mátrixának sajátértékei.*

Bizonyítás. A Q kvadratikus forma egy (Hermite) szimmetrikus bilineáris formából származik, amelyet viszont egy φ önadjungált transzformációval állíthatunk elő belső szorzat alakban:

$$Q(x) = (\varphi(x), x).$$

A φ önadjungált transzformációhoz tekintsünk egy, az előző tételünk szerint létező φ sajátvektoraiból álló ortonormált bázist. Ez lesz a kanonikus bázis is Q számára, ugyanis

$$Q(x) = (\varphi(x), x) = \left(\varphi\left(\sum_{j=1}^{n} x_j e_j\right), x\right) = \sum_{j=1}^{n} x_j (\varphi(e_j), x) =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_j (e_j, x) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j |x_j|^2.$$

Tételünk második részéhez figyeljük meg, hogy a Q kvadratikus forma és a hozzátartozó φ lineáris transzformáció mátrixa ortonormált bázisra vonatkozóan megegyeznek. □

A következőkben a főtétel átfogalmazásait adjuk meg. Elsőként a önadjungált mátrixokra vonatkozó következményt.

TÉTEL. *Bármely valós (komplex) elemű önadjungált mátrix hasonló valamely valós elemű diagonális mátrixhoz, mégpedig ortogonális (unitér) hasonlósági mátrixszal.*

Bizonyítás. Legyen A $n \times n$ típusú önadjungált mátrix. A skalár-n-esek $\mathbb{R}^n$ ($\mathbb{C}^n$) euklideszi (unitér) vektorterén A egy lineáris transzformációt ad meg. Ez a transzformáció önadjungált, mivel mátrixa a természetes bázisra vonatkozóan éppen A, s az önadjungált. Alkalmazva a főtételt, ezen önadjungált transzformációnak van sajátvektorokból álló ortonormált bázisa, jelöljünk egy ilyet $e'_1, \dots, e'_n$-nel. Erre az új bázisra vonatkozó mátrixa a transzformációnak diagonális, s hasonló A-hoz. Azon bázistranszformációs mátrixok, melyek ortonormált bázist ortonormált bázisba visznek, ortogonálisak (unitérek). (Lásd 10.4. szakaszt.) □

Az ún. **spektráltétel** megfogalmazása a további alkalmazások szempontjából lényeges, nevezetesen az önadjungált (és később unitér téren a normális) transzformációk függvényeinek értelmezésénél hasznos.

TÉTEL. **Spektráltétel.**
Véges dimenziós euklideszi (unitér) tér egy lineáris transzformációja akkor és csak akkor önadjungált, ha előállítható vele felcserélhető $\pi_1, \dots, \pi_k$ nullától különböző ortogonális projekciókkal és $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ különböző valós számokkal $\lambda_1\pi_1 + \dots + \lambda_k\pi_k$ alakban, ahol $\pi_i \circ \pi_j = 0$, ha $i \neq j$, és $\pi_1 + \dots + \pi_k = id$. Ez az előállítás a tagok sorrendjétől eltekintve egyértelmű.

Bizonyítás. Ha φ rendelkezik a tételben mondott előállítással, akkor az ortogonális projekciók önadjungáltsága miatt φ is önadjungált, ezért a feltétel elégséges.

Ha φ önadjungált transzformáció, akkor alkalmazva a struktúratételt, tekintsük a különböző $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ sajátértékekhez tartozó $L_1, \dots, L_k$ sajátaltereket. Ezek egyrészt páronként ortogonális alterek, másrészt direkt összegben az egész E teret adják ki:

$$E = L_1 \oplus \dots \oplus L_k.$$

Az ezen alterekre történő merőleges vetítéseket jelöljük $\pi_1, \dots, \pi_k$-val. Ezekkel teljesül a tételben mondott előállítás. □

10.4. Ortogonális és unitér transzformációk

TÉTEL. *Ha L invariáns altere egy véges dimenziós euklideszi (unitér) téren értelmezett φ ortogonális (unitér) transzformációnak, akkor annak $L^\perp$ ortogonális komplementere is invariáns altér.*

Bizonyítás. Legyen x' az ortogonális komplementer egy tetszőleges eleme. Ekkor bármely $l \in L$ esetén

$$(\varphi(x'), l) = (x', \varphi^*(l)) = (x', \varphi^{-1}(l)) = 0$$

hiszen φ megszorítható L-re, s ott bijektív, ezért $\varphi^{-1}(l)$ is L-ben van. □

TÉTEL. *Legyen $\varphi\colon W \to W$ egy lineáris transzformáció a véges dimenziós W euklideszi (unitér) téren. Ekkor a következő kijelentések ekvivalensek:*

1. *φ ortogonális (unitér)*
2. *φ belső szorzat tartó, azaz minden $x, y \in W$ esetén $(\varphi(x), \varphi(y)) = (x, y)$.*
3. *φ normatartó, azaz minden $x \in W$ esetén $\|\varphi(x)\| = \|x\|$.*
4. *φ bármely ortonormált bázist ortonormált bázisba képez le.*

Bizonyítás. 1. ⇒ 2. :

$$(\varphi(x), \varphi(y)) = (x, \varphi^*(\varphi(y)) = (x, \varphi^{-1}(\varphi(y)) = (x, y).$$

2. ⇒ 1. :

$$(x, y) = (\varphi(x), \varphi(y)) = (x, \varphi^*(\varphi(y)))$$

alapján $\varphi^* \circ \varphi = \mathrm{id}$, azaz $\varphi^* = \varphi^{-1}$.
2. ⇒ 3. :

$$\|\varphi(x)\| = \sqrt{(\varphi(x), \varphi(y))} = \sqrt{(x, y)} = \|x\|.$$

3. ⇒ 2. : Először tekintsük a valós esetet. Felhasználjuk, hogy két vektor belső szorzata kiszámítható a normákból:

$$(x, y) = \frac{1}{2}\left(\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2\right).$$

Így

$$(\varphi(x), \varphi(y)) = \frac{1}{2}\left(\|\varphi(x) + \varphi(y)\|^2 - \|\varphi(x)\|^2 - \|\varphi(y)\|^2\right) =$$
$$= \frac{1}{2}\left(\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2\right) = (x, y).$$

A komplex esetben a bizonyítás hasonló, felhasználva, hogy akkor

$$(x, y) = \frac{1}{4}(||x+y||^2 - ||x-y||^2 + i||x+iy||^2 - i||x-iy||^2)$$

2. ⇒ 4. : Legyen $(e_1, \dots, e_n)$ ortonormált bázis. Akkor ezen vektorok képeire

$$(\varphi(e_i), \varphi(e_j)) = (e_i, e_j) = \delta_{ij} \quad (1 \le i, j \le n),$$

tehát $(\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n))$ is ortonormált bázis.
4. ⇒ 2. : Ha x és y előállítása az $e_1, \dots, e_n$ ortonormált bázisban

$$x = x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n, \quad y = y_1 e_1 + \cdots + y_n e_n,$$

akkor $\varphi(x)$ és $\varphi(y)$ ugyanazokkal a koordinátákkal rendelkezik a $\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n)$ ortonormált bázisban:

$$\varphi(x) = x_1\varphi(e_1) + \cdots + x_n\varphi(e_n), \quad \varphi(y) = y_1\varphi(e_1) + \cdots + y_n\varphi(e_n).$$

Így

$$(\varphi(x), \varphi(y)) = x_1\overline{y}_1 + \cdots + x_n\overline{y}_n = (x, y).$$

□

Megjegyzés.

1. Ha φ ortogonális (unitér) transzformáció, akkor bármely ortonormált bázisra vonatkozó mátrixa ortogonális (unitér). Ez egyszerűen következik abból, hogy az $\varphi^* \circ \varphi = \mathrm{id}$ összefüggés mátrixaikkal kifejezve az $\overline{A}^t A = E$ összefüggéssel ekvivalens. Fordítva, ugyanebből adódik, hogy ha egy transzformációnak valamely ortonormált bázisra vonatkozó mátrixa ortogonális (unitér), akkor maga a transzformáció is ortogonális (unitér).

2. Egy ortogonális transzformációnak $+1$ és -1-en kívül más sajátértéke nem lehet. Unitér transzformáció sajátértékei 1 abszolút értékűek. Ugyanis, ha $\varphi(a) = \lambda a$, akkor a normatartás miatt
$$\|a\| = \|\varphi(a)\| = \|\lambda a\| = |\lambda|\,\|a\|,$$
s ez csak úgy lehetséges, ha $|\lambda| = 1$.

3. Ha egy euklideszi (unitér) térben ortonormált bázisok cseréjét hajtjuk végre, akkor a bázistranszformáció mátrixa ortogonális (unitér) mátrix. Ugyanis, ha $S = (s_{ij})$ jelöli az $(e_1, \dots, e_n) \to (f_1, \dots, f_n)$ bázistranszformáció mátrixát, s mindkét bázis ortonormált, akkor
$$\delta_{ij} = (f_i, f_j) = \left(\sum_{k=1}^{n} s_{ki} e_k, \sum_{l=1}^{n} s_{lj} e_l \right) =$$
$$= \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} s_{ki} \overline{s}_{lj} (e_k, e_l) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} s_{ki} \overline{s}_{lj} \delta_{kl} = \sum_{k=1}^{n} s_{ki} \overline{s}_{kj}$$
miatt $S^t \overline{S} = E$, ahonnan konjugálással $S^* S = E$.

   Fordítva, ha az $(e_1, \dots, e_n)$ ortonormált bázist egy ortogonális (unitér) mátrix az $(f_1, \dots, f_n)$ bázisba viszi, akkor $(f_1, \dots, f_n)$ ortonormált.

Tétel. *Egy $n \times n$ típusú mátrix pontosan akkor ortogonális (unitér), ha oszlopvektorai ortonormált bázist alkotnak $\mathbb{R}^n$-ben ($\mathbb{C}^n$-ben), azaz $\mathbb{R}^n$ ($\mathbb{C}^n$) standard belső szorzata szerint páronként ortogonális egységvektorok.*

Az ortogonális mátrixok determinánsának értéke ± 1. Unitér mátrixok determinánsa 1 abszolút értékű.

Bizonyítás. Jelölje az $A = (a_{ij})$ mátrix oszlopvektorait $A^{(1)}, \dots, A^{(n)}$. Az $\mathbb{R}^n$ standard belső szorzata alapján
$$(A^{(i)}, A^{(j)}) = \sum_{k=1}^{n} a_{ki} \overline{a}_{kj}.$$
A kapott összeg éppen az $A^t \overline{A} = \overline{A^* A}$ szorzatmátrix (i, j)-edik eleme. Ennek alapján $(A^{(i)}, A^{(j)}) = \delta_{ij}$ pontosan akkor teljesül, ha $A^* A = E$.

A második állítás igazolásához a determinánsok szorzástételét alkalmazzuk:

$$1 = \det(E) = \det(\overline{A}^t A) = \det(\overline{A})\det(A) = \overline{\det(A)}\det(A) = |\det(A)|^2$$

(ahol a félreértés elkerülése végett det(.) jelöli a determinánst és |.| az abszolút értéket) tehát $|\det(A)| = 1$. □

10.5. Euklideszi terek ortogonális transzformációi

Az alábbiakban részletesen foglalkozunk valós euklideszi terek ortogonális transzformációival, melyek egyes alkalmazások szempontjából fontos szerepet játszanak.

A normatartás teljesülése alapján láthatjuk, hogy a síkbeli szabadvektorok körében a tengelyes tükrözés, a középpontos tükrözés és a pont körüli forgatás mind ortogonális transzformáció. Következő állításunk azt fejezi ki, hogy kétdimenziós euklideszi vektortéren lényegében más ortogonális transzformáció nincs is.

TÉTEL. *Kétdimenziós euklideszi vektortéren adott tetszőleges ortogonális transzformáció vagy az identikus transzformáció, vagy középpontos tükrözés, vagy tengelyes tükrözés vagy az origó körüli forgatás.*

Bizonyítás. a) Tegyük fel először, hogy egyetlen sajátértéke van a transzformációnak. Ez vagy 1 vagy -1. Ha 1 az egyetlen sajátérték, akkor tekintve egy a sajátvektort, az általa generált altérnek az ortogonális komplementere is invariáns altér, de mivel egy dimenziós, egy b sajátvektor által generált. Ez a b sajátvektor is az 1 sajátértékhez tartozik, s így ilyenkor az identikus transzformációt kapjuk. Ha viszont -1 az egyetlen sajátérték, ugyanezzel az érveléssel a középpontos tükrözéshez jutunk.

b) Tegyük fel most, hogy két különböző sajátérték van. Az 1 sajátértékhez tartozó sajátvektor legyen a. Az a által generált altér ortogonális komplementere is invariáns altér, azt egy b sajátvektor generálja, ez a -1 sajátértékhez tartozik. Ez a tengelyes tükrözést jelenti.

c) Ha egyetlen sajátérték sincs, akkor válasszunk egy tetszőleges e_1, e_2 ortonormált bázist. Az e_1 vektor $\varphi(e_1)$ képvektora a normatartás miatt egységvektor, s valamilyen $\alpha \neq 0°, 180°$ szöget zár be az e_1 vektorral:

$$\varphi(e_1) = \cos\alpha\, e_1 + \sin\alpha\, e_2.$$

$\varphi(e_2)$ a szögtartás miatt a $\varphi(e_1)$-re merőleges, emiatt vagy

$$\varphi(e_2) = \cos(\alpha - \frac{\pi}{2})\, e_1 + \sin(\alpha - \frac{\pi}{2})\, e_2$$

vagy

$$\varphi(e_2) = \cos(\alpha + \frac{\pi}{2})\, e_1 + \sin(\alpha + \frac{\pi}{2})\, e_2.$$

Az első esetben a transzformáció mátrixát felírva, s kiszámolva a karakterisztikus polinomot, $p_\varphi(\lambda) = \lambda^2 - 1$ adódik, ami azt jelenti, hogy mégiscsak 2 sajátérték lenne, ellentmondva kiindulási feltételezésünknek. A második esetben viszont a karakterisztikus polinom $p_\varphi(\lambda) = \lambda^2 - 2\cos\alpha\lambda + 1$, tehát $\alpha \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ esetén valóban nincs sajátérték. Ekkor a transzformáció mátrixa:

$$M_\varphi = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}.$$

Ez jelenti az α szögű elforgatást. □

Az ortogonális transzformációk struktúratétele:

TÉTEL. *Ha φ egy E véges dimenziós euklideszi vektortéren adott ortogonális transzformáció, akkor létezik a térnek olyan*

$$E = L_1 \oplus \cdots \oplus L_k$$

ortogonális fölbontása, ahol az L_i alterek a φ transzformációnak 1 *vagy* 2 *dimenziós invariáns alterei.*

Bizonyítás. A bizonyítás a tér dimenziója szerinti teljes indukcióval történik. Ha E dimenziója 1 vagy 2, az állítás nyilvánvalóan teljesül.

Tegyük fel, hogy n dimenziós euklideszi terek ortogonális transzformációira az állítás teljesül, s legyen E egy $n+1$ dimenziós euklideszi vektortér és φ azon egy ortogonális transzformáció. Tudjuk, hogy minden transzformációnak van 1 vagy 2 dimenziós altere, jelöljön egy ilyet L_1. Ennek $L_1^\perp$ ortogonális komplementere invariáns altér. Erre megszorítva a transzformációt, alkalmazhatjuk az indukciós feltevést, azaz vannak olyan φ-re nézve invariáns $L_2, \ldots, L_k$ egymásra ortogonális 1 vagy 2 dimenziós alterek, hogy

$$L_1^\perp = L_2 \oplus \cdots \oplus L_k.$$

Ezt L_1-gyel kiegészítve kapjuk φ-re vonatkozó állításunkat. □

MEGJEGYZÉS. Az 1 dimenziós altereken az ortogonális transzformáció vagy identitásként vagy origóra való tükrözésként hat, míg a kétdimenziós (tovább nem bontható) altereken origó körüli forgatásként. Ezért ha a fölbontásban szereplő mindegyik altérben választunk egy-egy ortonormált bázist, ezekből együttesen E-nek olyan ortonormált bázisát kapjuk, melyben a transzformáció mátrixa

$$M_\varphi = \begin{pmatrix} \cos\alpha_1 & -\sin\alpha_1 & 0 & & & & 0 \\ \sin\alpha_1 & \cos\alpha_1 & & & & & \\ & 0 & & & & & \\ & \vdots & \cos\alpha_s & -\sin\alpha_s & & & \\ & & \sin\alpha_s & \cos\alpha_s & & & \\ & & & & \lambda_1 & & \\ & \vdots & & & & & 0 \\ & 0 & & & & & \lambda_{n-2s} \end{pmatrix},$$

ahol $\lambda_j = \pm 1$. Az ilyen mátrixokat **kvázidiagonális**nak nevezzük.

TÉTEL. *Ha A egy ortogonális mátrix, akkor létezik olyan S szintén ortogonális mátrix, hogy S^tAS kvázidiagonális.*

Bizonyítás. Az A mátrix egy ortogonális transzformációt ad meg $\mathbb{R}^n$-en, melynek a természetes bázisra vonatkozó mátrixa éppen A. Ha S jelöli egy az előbbi megjegyzésünkben szereplő ortonormált bázisra való áttérés mátrixát, akkor S is ortogonális: $S^t = S^{-1}$. A különböző bázisokra vonatkozó mátrixok közötti kapcsolat alapján következik állításunk. □

10.6. Unitér terek normális transzformációi

Unitér terek lineáris transzformációinak minden esetben van sajátértéke, hiszen a komplex számtest algebrailag zárt, ezért tetszőleges lineáris transzformáció a karakterisztikus polinomjának van komplex gyöke. Így pl. az önadjungált transzformációk spektrálfelbontása ugyanúgy érvényes, mint a valós esetben. Azonban látni fogjuk, hogy a spektráltétel, azaz a transzformáció sajátvektoraiból álló ortonormált bázis létezése, most a transzformációk egy jóval szélesebb osztályára az ún. normális transzformációk esetén is érvényes.

TÉTEL. *Egy véges dimenziós unitér tér bármely lineáris transzformációja egyértelműen állítható elő $\varphi = \varphi_1 + i\varphi_2$ alakban φ_1, φ_2 önadjungált transzformációkkal. φ akkor és csak akkor normális, ha φ_1 és φ_2 felcserélhető.*

Bizonyítás. Legyen $\varphi_1 = \frac{1}{2}(\varphi+\varphi^*)$ és $\varphi_2 = \frac{1}{2i}(\varphi-\varphi^*)$. Láthatjuk, hogy ezekkel teljesül a kívánt előállítás és φ_1, illetve φ_2 önadjungált. Ugyanis pl. φ_2 esetén:

$$\varphi_2^* = \overline{\left(\frac{1}{2i}\right)}(\varphi^* - \varphi) = -\frac{1}{2i}(\varphi^* - \varphi) = \varphi_2.$$

Az egyértelműség belátásához képezzük az előállítás adjungáltját:

$$\varphi^* = \varphi_1^* + \bar{i}\varphi_2^* = \varphi_1 - i\varphi_2$$

Ezt az eredetivel összeadva, illetve kivonva adódik, hogy

$$\varphi + \varphi^* = 2\varphi_1 \qquad \varphi - \varphi^* = 2i\varphi_2,$$

ahonnan látható, hogy csak a megadott előállítás lehetséges.

A normalitás vizsgálatára a fenti előállítást használjuk:

$$\varphi \circ \varphi^* - \varphi^* \circ \varphi = (\varphi_1 + i\varphi_2) \circ (\varphi_1 + i\varphi_2)^* - (\varphi_1 + i\varphi_2)^* \circ (\varphi_1 + i\varphi_2) =$$

$$= 2i(\varphi_2 \circ \varphi_1 - \varphi_1 \circ \varphi_2).$$

Innen következik, hogy φ pontosan akkor normális, ha φ_1 és φ_2 felcserélhető. □

TÉTEL. *Ha φ_1 és φ_2 egy véges dimenziós unitér (vagy euklideszi) tér felcserélhető önadjungált lineáris transzformációi, akkor van a térnek olyan ortonormált bázisa, amelynek minden tagja közös sajátvektora φ_1-nek és φ_2-nek.*

Bizonyítás. Legyen λ sajátértéke φ_1-nek és H_λ a λ-hoz tartozó sajátaltere φ_1-nek. Ekkor $\varphi_1(x) = \lambda x$ minden $x \in H_\lambda$ esetén.

Megmutatjuk, hogy H_λ invariáns altere φ_2-nek is. Ugyanis, ha x λ-hoz tartozó sajátvektora φ_1-nek, akkor

$$\varphi_1(\varphi_2(x)) = \varphi_2(\varphi_1(x)) = \varphi_2(\lambda x) = \lambda\varphi_2(x)$$

miatt $\varphi_2(x)$ is az, ezért $\varphi_2(x) \in H_\lambda$.

Így φ_2-t megszoríthatjuk a H_λ altérre, s akkor egy $\varphi_2|_{H_\lambda}$ önadjungált transzformációt kapunk. Tekinthetjük ennek sajátvektorait, illetve azokból kiválasztott ortonormált bázist a H_λ altérben. Ezek a vektorok természetesen sajátvektorai lesznek a φ_1 transzformációnak is. Ez azt eljárást elvégezhetjük φ_1 minden egyes sajátértékéhez tartozó sajátaltere esetében. A φ_1 transzformáció $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ sajátértékekhez tartozó $H_{\lambda_1}, \dots, H_{\lambda_k}$ sajátalterek direkt összegben az egész teret adják, ezért az egyes alterekben kiválasztott bázisok együttvéve a tér kívánt bázisát adják. □

Tétel. **Struktúratétel.**
Egy véges dimenziós U unitér tér φ lineáris transzformációja esetén pontosan akkor létezik sajátvektoraiból álló ortonormált bázis, ha φ normális.

Bizonyítás. Ha φ normális, akkor előállítható egymással felcserélhető φ_1, φ_2 önadjungált lineáris transzformációkkal $\varphi = \varphi_1 + i\varphi_2$ alakban. Az előző állításunk szerint található olyan $(e_1, \dots, e_n)$ ortonormált bázis, amelynek tagjai mindkét transzformációnak sajátvektorai:

$$\varphi_1(e_j) = \lambda_j e_j$$
$$\varphi_2(e_j) = \mu_j e_j$$

Ez lesz a megfelelő bázis a normális transzformáció számára is, mivel

$$\varphi(e_j) = \varphi_1(e_j) + i\varphi_2(e_j) = (\lambda_j + i\mu_j)e_j.$$

Fordítva, ha létezik a transzformációhoz sajátvektoraiból álló ortonormált bázis, akkor mátrixa e bázisban diagonális, az átlóban a sajátértékek állnak. φ^*-nak a mátrixa konjugált-transzponálással adódik. Ezért mind $\varphi \circ \varphi^*$, mind $\varphi^* \circ \varphi$ mátrixa diagonális és a főátlóban a $\lambda_i\bar{\lambda}_i$ értékek állnak. Emiatt $\varphi \circ \varphi^*$ és $\varphi^* \circ \varphi$ egyenlő, tehát φ normális. □

E tétel alapján megadhatjuk az önadjungált, illetve az unitér transzformációk jellemzését a normális transzformációk között.

Tétel. *Az unitér tér egy normális transzformációja pontosan akkor önadjungált, ha sajátértékei valós számok. Az unitér tér egy normális transzformációja pontosan akkor unitér, ha sajátértékei egységnyi abszolútértékűek.*

Bizonyítás. Ha a φ normális transzformáció esetén tekintjük egy sajátvektoraiból álló bázisát, akkor mátrixában a főátlóban a $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ sajátértékek állnak, az adjungált transzformáció mátrixában pedig a $\bar{\lambda}_1, \dots, \bar{\lambda}_n \in \mathbb{C}$ értékek. $\varphi = \varphi^*$ pontosan akkor teljesül, ha $\lambda_i = \bar{\lambda}_i$, azaz mindegyik λ_i valós szám.

$\varphi \circ \varphi^*$ mátrixában a főátlóban a $\lambda_i\bar{\lambda}_i$ értékek állnak, ezért $\varphi \circ \varphi^* = \mathrm{id}$ pontosan akkor teljesül, ha $\lambda_i\bar{\lambda}_i = |\lambda_i|^2 = 1$, azaz a sajátértékek egységnyi abszolútértékűek. □

10.7. Transzformációk polárfelbontása

DEFINÍCIÓ. *Az W euklideszi vagy unitér tér egy φ* **lineáris transzformációját pozitív definit***nek nevezzük, ha önadjungált és bármely $0 \neq x \in W$ esetén* $(\varphi(x), x) > 0$.

TÉTEL. *A véges dimenziós W euklideszi vagy unitér tér egy önadjungált φ lineáris transzformációja pontosan akkor pozitív definit, ha minden sajátértéke pozitív.*

Bizonyítás. Jelölje $(e_1, \dots, e_n)$ a φ sajátvektoraiból álló ortonormált bázisát. Ha $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$, akkor

$$(\varphi(x), x) = \left(\varphi\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i\right), \sum_{j=1}^{n} x_j e_j\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i \overline{x}_j (\varphi(e_i), e_j) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i \overline{x}_j (\lambda_i e_i, e_j) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i \overline{x}_j \lambda_i (e_i, e_j) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i |x_i|^2$$

Innen világos, hogy $\lambda_i > 0$ esetén $(\varphi(x), x) > 0$. Fordítva, φ pozitivitásából $(\varphi(e_i), e_i) = \lambda_i > 0$ következik. □

TÉTEL. *Ha φ egy véges dimenziós W euklideszi vagy unitér tér pozitív definit transzformációja, akkor egyértelműen létezik olyan ψ pozitív definit transzformáció, hogy $\psi^2 = \varphi$.*

Bizonyítás. A φ önadjungált transzformáció spektrálelőállítását használjuk: $\varphi = \lambda_1 \pi_1 + \dots + \lambda_k \pi_k$. Legyen $\psi = \sqrt{\lambda_1}\pi_1 + \dots + \sqrt{\lambda_k}\pi_k$. A $\psi^2 = \varphi$ összefüggés nyilvánvalóan teljesül, hiszen $\pi_i \circ \pi_j = 0$ bármely $i \neq j$ esetén.

Az egyértelműség belátásához tegyük fel, hogy $\tilde{\psi}$ is egy olyan pozitív definit transzformáció, amelyre $\tilde{\psi}^2 = \varphi$. Tekintsük $\tilde{\psi}$ spektrálelőállítását: $\tilde{\psi} = \mu_1 \tilde{\pi}_1 + \dots + \mu_k \tilde{\pi}_k$. Ekkor $\tilde{\psi}^2 = \mu_1^2 \tilde{\pi}_1 + \dots + \mu_k^2 \tilde{\pi}_k$. A spektrálelőállítás egyértelmű, ezért csak a tagok sorrendjében különbözhetnek. Így átindexelés után $\tilde{\pi}_i = \pi_i$, $\mu_i^2 = \lambda_i$, azaz $\mu_i = \sqrt{\lambda_i}$. □

Minden nem nulla komplex szám felírható egy pozitív valós szám és egy egységnyi abszolútértékű szám szorzataként. Ez az előállítás egyértelmű. Most megmutatjuk, hogy analóg tulajdonság érvényesül az unitér terek körében, s itt a pozitív definit transzformációk játsszák a valós számok szerepét, az unitér (ortogonális) transzformációk pedig az egységnyi abszolút értékű komplex számokét.

TÉTEL. **Polárfelbontási tétel.**

Egy véges dimenziós euklideszi (unitér) tér bármely invertálható φ lineáris transzformációja előállítható $\varphi = \psi \circ \tau$ alakban, ahol ψ invertálható pozitív definit transzformáció és τ (ortogonális) unitér transzformáció.

Bizonyítás. Az adjungálás alapvető tulajdonságait kihasználva láthatjuk, hogy $\varphi \circ \varphi^*$ önadjungált transzformáció. Ugyanis

$$(\varphi \circ \varphi^*)^* = (\varphi^*)^* \circ \varphi^* = \varphi \circ \varphi^*.$$

Sőt pozitív definit transzformáció is, hiszen $x \neq 0$ esetén

$$((\varphi \circ \varphi^*)(x), x) = (\varphi(\varphi^*(x)), x) = (\varphi^*(x), \varphi^*(x)) > 0.$$

Legyen ψ most a $\varphi \circ \varphi^*$ transzformáció négyzetgyöke: $\psi^2 = \varphi \circ \varphi^*$. ψ invertálható transzformáció, hiszen φ is és φ^* is az. Megmutatjuk, hogy a $\tau = \psi^{-1} \circ \varphi$ transzformáció ortogonális (unitér):

$$\tau \circ \tau^* = (\psi^{-1} \circ \varphi) \circ (\psi^{-1} \circ \varphi)^* = \psi^{-1} \circ (\varphi \circ \varphi^*) \circ (\psi^{-1})^* = \psi^{-1} \circ \psi^2 \circ \psi^{-1} = \mathrm{id}\,.$$

Innen átszorozva kapjuk a kívánt $\varphi = \psi \circ \tau$ előállítást. $\square$

11. Másodrendű görbék és felületek

A következő két fejezetben az $\mathbb{R}^n$ euklideszi térben dolgozunk, a kanonikus skaláris szorzattal. Mint az szokásos, $\mathbb{R}^n$ vektorait gyakran pontoknak mondjuk.

A fejezet célja, hogy a másodrendű alakzatok általános elméletéhez motivációt adjon, a legegyszerűbb eset önálló tanulmányozásával. Az itt szereplő alakzatok többsége a középiskolából ismerős (pl. ellipszis, parabola, hiperbola; ezek geometriai származtatását megtaláljuk **Hajós György** [5] művének 41. §-ában).

11.1. Másodrendű görbék a valós síkon

Definíció. *Legyen $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ nem zéró önadjungált lineáris operátor, $b \in \mathbb{R}^2$ rögzített vektor, $c \in \mathbb{R}$ rögzített szám.* **Másodrendű görbén** *az alábbi halmazt értjük:*

$$q = \{x \in \mathbb{R}^2 | (A(x), x) + 2(b, x) + c = 0\}.$$

Az $(A(x), x) + 2(b, x) + c = 0$ egyenletet a másodrendű görbe **előállítás***ának nevezzük. A másodrendű görbéhez tartozó vektorokat gyakran a másodrendű görbe* **pontjai***nak mondjuk.*

Megjegyzés. Euklideszi térben az önadjungált lineáris operátorok és a kvadratikus formák közt, valamint a lineáris formák és a vektorok közt kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés van, ennek megfelelően a másodrendű görbe előállítását a következőképpen is megadhatjuk:

$$q = \{x \in \mathbb{R}^2 | Q(x) + 2\ell(x) + c = 0\},$$

ahol Q egy nem triviális kvadratikus forma, ℓ pedig lineáris forma. Valóban, a definícióból kiindulva $Q(x) = (A(x), x)$ $(x \in \mathbb{R}^2)$ egy kvadratikus forma, $\ell(x) = (b, x)$ egy lineáris forma; illetve megfordítva, tetszőleges kvadratikus formából és lineáris formából kiindulva az előbbi formulák egyértelműen meghatározzák A-t és b-t. A későbbiekben néha ezt az előállítást is használjuk. Q rangját, ill. szignatúráját a másodrendű görbe rangjának, ill. szignatúrájának nevezzük.

Megadjuk a másodrendű görbék koordinátás előállítását is. Felhívjuk a figyelmet arra, hogy szokásos módon a vektorok, (pontok) koordinátáit 2 dimenzióban nem indexeljük, hanem (x, y)-nal jelöljük. Ez kis figyelmet kíván, mert az x gyakran vektort jelöl (azaz $\mathbb{R}^2$ elemét), máskor pedig egy bázisra vonatkozó első koordinátát. A kvadratikus formák és a lineáris formák báziselőállításából közvetlenül következik az alábbi tétel:

Tétel. **Másodrendű görbe egyenlete.**
Legyen

$$q = \{x \in \mathbb{R}^2 | (A(x), x) + 2(b, x) + c = 0\}$$

egy másodrendű görbe. Rögzítsünk $\mathbb{R}^2$-ben egy bázist, a $Q(x) = (A(x), x)$ kvadratikus forma erre vonatkozó mátrixa

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \qquad (a_{12} = a_{21})$$

az $\ell(x) = (b, x)$ lineáris forma együtthatórendszere (b_1, b_2). $\mathbb{R}^2$ egy vektora akkor és csakis akkor eleme a q másodrendű görbének, ha (x, y) koordinátáira

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2b_1x + 2b_2y + c = 0$$

teljesül. A fenti összefüggést a q **másodrendű görbe egyenlet***ének is nevezzük.*

Úgy is fogalmazhatunk, hogy egy másodrendű görbe egy kétváltozós másodfokú polinom zérushelyeinek halmaza $\mathbb{R}^2$-ben. Megjegyezzük, hogy egy másodrendű görbének nemcsak másodfokú egyenlete lehet, de ha egy másodrendű görbe egyenletéről beszélünk, akkor mindig az előző tétel szerint hozzá tartozó kétváltozós másodfokú egyenletre gondolunk. (Egyébként még ez a másodfokú egyenlet sem egyértelműen tartozik a görbéhez, ld. később.)

PÉLDA. Az alábbi előállítások másodrendű görbéket határoznak meg $\mathbb{R}^2$-ben:

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | F(x, y) = 0\},$$

ahol

- $F(x, y) = x^2 + y^2 - 1$: kör.
- $F(x, y) = x^2 + y^2 + 1$: üres halmaz.
- $F(x, y) = x^2 - y^2 - 1$: hiperbola.
- $F(x, y) = x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$: metsző egyenespár.
- $F(x, y) = x^2 + y^2$: egyetlen pont.
- $F(x, y) = y - x^2$: parabola.
- $F(x, y) = x^2 - 1$: párhuzamos egyenespár.
- $F(x, y) = x^2$: az $x = 0$ egyenes.
- $F(x, y) = x^2 + 1$: ez a másodrendű görbe ismét az üres halmaz.

Megjegyezzük, hogy a definíció szerint egy egyenes ($\mathbb{R}^2$-ben) mindig tekinthető másodrendű görbének. Legyen ugyanis az egyenes normálegyenlete $F(x, y) = 0$ — ahol F a változók elsőfokú polinomja. Az $[F(x, y)]^2 = 0$ egyenlet nyilvánvalóan ugyanannak a ponthalmaznak az egyenlete, de a változóknak már másodfokú polinomja. Az üres halmaz is mindig tekinthető másodrendű görbének.

Már az előző példák is rámutatnak egy nagyon fontos problémára, tudniillik egy másodrendű görbéhez nem egyértelműen tartozik előállítás. Egyrészről ez triviális észrevétel, mert ha

$$(A(x), x) + 2(b, x) + c = 0$$

egy másodrendű görbe előállítása, akkor

$$((\lambda A)(x), x) + 2(\lambda b, x) + \lambda c = 0$$

($\lambda \neq 0$) szintén ugyanennek a másodrendű görbének az előállítása. Az előbb azonban ettől eltérő példát is láttunk: az üres halmazt, mint másodrendű görbét kétféleképpen is előállítottuk, és ezek az előállítások egymásnak nem skalárszorosai voltak. Bővíthetjük a példák sorát a ponttal is, pl. a $3x^2 + y^2 = 0$ egyenlet az origónak olyan egyenlete, mely nem skalárszorosa az $x^2 + y^2 = 0$ egyenletnek. Különbözik azonban az $x^2 + y^2 = -1$ egyenlet és az $x^2 = -1$ egyenlet megoldáshalmaza $\mathbb{C}^2$-ben, hasonlóan $a^2x^2 + b^2y^2 = (ax + iby)(ax - iby) = 0$ is más ponthalmazt határoz meg $\mathbb{C}^2$-ben különböző együtthatókra. $\mathbb{R}^2$ tehát sok tekintetben nem túl jó színtér a másodrendű görbék tanulmányozására. $\mathbb{C}^2$-ben viszont teljesül az előállítás egyértelműsége.

A következőekben a másodrendű görbe egyenletének egyszerűsítése a cél.

TÉTEL. **Euklideszi normálegyenletek.**
Létezik az A önadjungált operátor sajátvektoraiból álló ortonormált bázis úgy, hogy a

$$q = \{x \in \mathbb{R}^2 | (A(x), x) + 2(b, x) + c = 0\}$$

másodrendű görbe egyenlete az alábbiak közül valamelyik:

$$\begin{array}{lll} a_1(x-u)^2 + a_2(y-v)^2 & = 0 & I \\ a_1(x-u)^2 + a_2(y-v)^2 & = 1 & II \\ a_1(x-u)^2 & = 2(y-v), & III \end{array}$$

ahol a_1, a_2, u, v konstansok; I-nél és II-nél a_1 és a_2 közül legalább az egyik nem 0, III-nál $a_1 \neq 0$.

Bizonyítás. Legyenek az A sajátértékei λ_1 és λ_2. A sajátvektoraiból álló ortonormált bázisban a q egyenlete ekkor

$$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + 2b_1 x + 2b_2 y + c = 0,$$

hiszen ortonormált bázisban az A mátrixa és a $Q(x) = (A(x), x)$ kvadratikus forma mátrixa megegyezik. Legyen először mindkét sajátérték zérustól különböző. Ekkor a q egyenlete

$$\lambda_1 \left(x + \frac{b_1}{\lambda_1}\right)^2 + \lambda_2 \left(y + \frac{b_2}{\lambda_2}\right)^2 = -c + \frac{b_1^2}{\lambda_1} + \frac{b_2^2}{\lambda_2}.$$

Ha $\nu = -c + \frac{b_1^2}{\lambda_1} + \frac{b_2^2}{\lambda_2} = 0$, akkor rögtön megkaptuk az I. egyenletet: $a_1 = \lambda_1$, $a_2 = \lambda_2$. Ha $\nu = -c + \frac{b_1^2}{\lambda_1} + \frac{b_2^2}{\lambda_2} \neq 0$, akkor ezzel mindkét oldalt osztva a II. egyenletet kapjuk: $a_1 = \frac{\lambda_1}{\nu}$, $a_2 = \frac{\lambda_2}{\nu}$.

Legyen most az egyik sajátérték zéró, ekkor a másik biztosan nullától különböző, mert feltettük, hogy A nem zéró operátor. A sajátvektorokból álló ortonormált bázisban a bázisvektorok sorrendje most legyen olyan, hogy az első bázisvektor tartozzon a nemzéró sajátértékhez: $\lambda_1 \neq 0$, $\lambda_2 = 0$. q egyenlete ebben a bázisban:

$$\lambda_1 \left(x + \frac{b_1}{\lambda_1}\right)^2 = -2b_2 y - c + \frac{b_1^2}{\lambda_1}.$$

Ha $b_2 = 0$ és $\frac{b_1^2}{\lambda_1} - c = 0$, akkor az I. egyenletet kapjuk $a_1 = \lambda_1$ és $a_2 = 0$-val. Ha $b_2 = 0$, de $\mu = \frac{b_1}{\lambda_1^2} - c \neq 0$, akkor $\frac{b_1^2}{\lambda_1} - c$-vel osztva a II. egyenletet kapjuk: $a_1 = \frac{\lambda_1}{\mu}$, $a_2 = 0$. Végül, ha $b_2 \neq 0$, akkor

$$\lambda_1 \left(x + \frac{b_1}{\lambda_1} \right)^2 = -2b_2 \left(y + \frac{c}{2b_2} - \frac{b_1^2}{2\lambda_1 b_2} \right),$$

s ezt az egyenletet $-b_2$-vel osztva a III. egyenletet kapjuk. □

TÉTEL. *A másodrendű görbék $\mathbb{R}^2$-ben pontosan az alábbiak: ellipszis/kör, parabola, hiperbola, egyenespár, pont, üres halmaz. Az egyenespár lehet metsző egyenespár, párhuzamos de nem egybeeső egyenespár, egybeeső egyenespár.*[1]

Bizonyítás. Az euklideszi normálegyenletek alapján egy másodrendű görbe az alábbi 8 alakzat valamelyike, azok közül pontosan az egyik:

1. Üres halmaz: II. egyenlet $a_1 \leq 0$, $a_2 \leq 0$, (de $a_1^2 + a_2^2 > 0$).
2. Pont: I. egyenlet, $a_1 > 0$, $a_2 > 0$.
3. Párhuzamos egyenespár (beleértve az egybeeső egyenespárt, vagyis az egyenest is): II. egyenlet, a két együttható közül az egyik pozitív, a másik 0, vagy I. egyenlet, a két együttható közül az egyik pozitív, a másik 0.
4. Metsző egyenespár: I. egyenlet, a két együttható ellentétes előjelű.
5. Ellipszis (vagy kör): II. egyenlet, mindkét együttható pozitív.
6. Parabola: III. egyenlet.
7. Hiperbola: II. egyenlet, a_1 és a_2 ellentétes előjelű.

Az előforduló a_1, a_2 együtthatók minden lehetséges szignatúráját megvizsgáltuk, tehát a felsoroltakon kívül más típusú egyenlethez nem juthatunk. Nyilvánvaló, hogy egy másodrendű görbe nem tartozhat két csoportba is, hiszen a csoportok között geometriai jellegű különbség van. (Pl. egy ellipszis sohasem hiperbola, mert más tulajdonságú pontok halmaza az ellipszis, ill. a hiperbola, stb.) □

A másodrendű görbéről bizonyos információt euklideszi normálegyenletük nélkül is kaphatunk. Az előző bizonyítást figyelmesen tanulmányozva észrevehetjük, hogy $\det A = \lambda_1 \cdot \lambda_2$ előjele megegyezik $a_1 \cdot a_2$ előjelével (a III. egyenletben legyen $a_1 = 1$, $a_2 = 0$), tehát $\operatorname{sgn}(\det A) = \operatorname{sgn}(a_1 \cdot a_2)$. Ez azt jelenti, hogy $\operatorname{sgn} a_1 a_2$ meghatározásához nem kell a görbét normálalakra hozni.

DEFINÍCIÓ. *A*

$$q = \{x \in \mathbb{R}^2 | (A(x), x) + 2(b, x) + c = 0\}$$

[1] Mint az a lineáris algebrában szokásos, két egyenest párhuzamosnak nevezünk, ha egysíkúak és nincs közös pontjuk, vagy egybeesnek. Az egybeeső egyenespárra a **kettős egyenes** elnevezést is használjuk.

másodrendű görbét **elliptikus***nak nevezzük, ha* $\det A > 0$, **parabolikus***nak, ha* $\det A = 0$, **hiperbolikus***nak, ha* $\det A < 0$.

Következmény. *Az elliptikus másodrendű görbék az ellipszis a pont és az üres halmaz, a parabolikus másodrendű görbék a parabola, a párhuzamos egyenespár (beleértve a kettős egyenest is) és az üres halmaz, a hiperbolikus másodrendű görbék a hiperbola és a metsző egyenespár.* (Mint láttuk, az üres halmazra — mint valós másodrendű görbére — a definíció az előállítástól függ, van elliptikus és parabolikus előállítása is az üres halmaznak.)

Az euklideszi normálegyenletben szereplő u, v konstansok „eltüntetésével" az egyenleteket tovább egyszerűsíthetjük, ehhez azonban már affin koordinátarendszert kell használni. Ha az origót az (u, v) koordinátájú pontban rögzítjük (az euklideszi normálegyenlethez tartozó bázist használva), akkor az

$$\begin{array}{lll} \text{I.} & a_1x^2 + a_2y^2 & = 0 \\ \text{II.} & a_1x^2 + a_2y^2 & = 1 \\ \text{III.} & a_1x^2 & = y, \end{array}$$

egyenletekhez jutunk, de az itt szereplő koordináták már nem egy bázisra, hanem egy olyan Descartes–féle koordináta–rendszerre vonatkoznak, mely az A operátor sajátvektoraiból álló ortonormált bázisból, s az előbb megadott origóból áll. Ezekben az egyenletekben a konstansokat átjelölve, az ortonormált bázis vektorait esetleg felcserélve kapjuk az ún. **kanonikus** egyenleteket.

Tétel. **Másodrendű görbék kanonikus egyenlete.**
Tetszőleges másodrendű görbéhez létezik olyan Descartes–féle koordináta–rendszer, melyben a görbe egyenlete az az alábbiak valamelyike:

típus	*I*	*II*	*III*
hiperbolikus	$\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 0$	$\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$	
parabolikus	$x^2 = 0$	$\dfrac{x^2}{a^2} = 1$ $\dfrac{x^2}{a^2} = -1$	$\dfrac{1}{2p}x^2 = y$
elliptikus	$\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 0$	$\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = -1$	

11.2. Valós másodrendű hiperfelületek

Definíció. *Legyen $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ nem zéró önadjungált lineáris operátor, $b \in \mathbb{R}^n$ rögzített vektor, $c \in \mathbb{R}$ rögzített szám.* **Másodrendű hiperfelületen** *az alábbi halmazt értjük:*

$$q = \{x \in \mathbb{R}^n | (A(x), x) + 2(b, x) + c = 0\}.$$

$\mathbb{R}^2$ másodrendű hiperfelületeit **másodrendű görbéknek**, *$\mathbb{R}^3$ másodrendű hiperfelületeit* **másodrendű felületeknek** *nevezzük. A másodrendű hiperfelülethez tartozó vektorokat gyakran a másodrendű hiperfelület* **pontjainak** *nevezzük.*

Megjegyzés. Euklideszi térben az önadjungált lineáris operátorok és a kvadratikus formák közt, valamint a lineáris formák és a vektorok közt kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés van, ennek megfelelően a másodrendű hiperfelület előállítását a következőképpen is megadhatjuk:

$$q = \{x \in \mathbb{R}^n | Q(x) + 2\ell(x) + c = 0\},$$

ahol Q egy nem triviális kvadratikus forma, ℓ pedig lineáris forma. Valóban, a definícióból kiindulva $Q(x) = (A(x), x)$ $(x \in \mathbb{R}^n)$ egy kvadratikus forma, $\ell(x) = (b, x)$ egy lineáris forma; illetve megfordítva tetszőleges kvadratikus formából és lineáris formából kiindulva az előbbi formulák egyértelműen meghatározzák A-t és b-t. Q rangját, ill. szignatúráját a másodrendű hiperfelület rangjának, ill. szignatúrájának nevezzük.

Tétel. **Másodrendű hiperfelület báziselőállítása.**
Legyen

$$q = \{x \in \mathbb{R}^n | (A(x), x) + 2(b, x) + c = 0\}$$

egy másodrendű hiperfelület. Rögzítsünk $\mathbb{R}^n$-ben egy bázist, a $Q(x) = (A(x), x)$ kvadratikus forma erre vonatkozó mátrixát jelölje szintén $A = (a_{ij})$, az $\ell(x) = (b, x)$ lineáris forma együtthatórendszere a $B = (b_i)$ oszlopvektor. Egy $x \in \mathbb{R}^n$ vektor akkor és csakis akkor eleme a q másodrendű hiperfelületnek, ha a koordinátáiból képezett $X = (x_1, \ldots, x_n)^t$ oszlopvektorra

$$X^t A X + 2X^t \cdot B + c = 0,$$

azaz

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j + 2 \sum_{i=1}^{n} x_i b_i + c = 0.$$

A fenti összefüggést a q **másodrendű hiperfelület egyenletének** *is nevezzük.*

Bizonyítás. A kvadratikus formák és a lineáris formák báziselőállításából közvetlenül következik. □

A következőekben a másodrendű hiperfelület egyenletének egyszerűsítése a célunk.

Tétel. **Euklideszi normálegyenletek.**
Létezik az A operátor sajátvektoraiból álló ortonormált bázis $\mathbb{R}^n$-ben, hogy a q valós másodrendű hiperfelület egyenlete az alábbiak közül valamelyik:

$$\begin{array}{lll} \sum_{i=1}^{n} a_i(x_i - c_i)^2 & = 0 & I. \\ \sum_{i=1}^{n} a_i(x_i - c_i)^2 & = 1 & II. \\ \sum_{i=1}^{n-1} a_i(x_i - c_i)^2 & = 2(x_n - c_n) & III. \end{array}$$

Bizonyítás. Az A operátor nullától különböző sajátértékei legyenek $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$, a sajátvektorokból álló ortonormált bázis legyen olyan, hogy az első r bázisvektor rendre ezekhez a sajátértékekhez tartozzon. Ebben a bázisban q egyenlete:

$$\sum_{i=1}^{r} \lambda_i x_i^2 + \sum_{i=1}^{n} 2b_i x_i + c = 0.$$

Ezt az egyenletet a következőképpen alakíthatjuk:

$$\sum_{i=1}^{r} \lambda_i \left(x_i + \frac{b_i}{\lambda_i} \right)^2 + \sum_{i=r+1}^{n} 2b_i x_i = \bar{c},$$

ahol a második szummás tag értelemszerűen nem szerepel, ha $r = n$, azaz nincs nulla sajátérték. Ha $b_{r+1} = \ldots = b_n = 0$ és $\bar{c} = 0$, akkor az I. egyenletet kapjuk. Ha $b_{r+1} = \ldots = b_n = 0$, de $\bar{c} \neq 0$, akkor $\bar{c}$-vel osztva a II. egyenletet kapjuk.

Ha $b_{r+1}^2 + \cdots + b_n^2 > 0$, akkor a következőképpen járunk el. Először osszuk el az egyenletet $\sqrt{b_{r+1}^2 + \cdots + b_n^2}$-el:

$$\sum_{i=1}^{r} a_i \left(x_i + \frac{b_i}{\lambda_i} \right)^2 + \sum_{i=r+1}^{n} 2\bar{b}_i x_i = \bar{\bar{c}}.$$

A $(\bar{b}_{r+1}, \ldots, \bar{b}_n)^t \in \mathbb{R}^{n-r}$ egységvektort egészítsük ki $\mathbb{R}^{n-r}$ ortonormált bázisává. A kapott ortonormált bázist jelöljük a következőképpen:

$$\begin{pmatrix} c_{11} \\ c_{21} \\ \vdots \\ c_{n-r,1} \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} c_{1,n-r-1} \\ c_{2,n-r-1} \\ \vdots \\ c_{n-r,n-r-1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \bar{b}_{r+1} \\ \\ \vdots \\ \bar{b}_n \end{pmatrix}.$$

A

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ c_{11} \\ \vdots \\ c_{n-r,1} \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ c_{1,n-r-1} \\ \vdots \\ c_{n-r,n-r-1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \bar{b}_{r+1} \\ \vdots \\ \bar{b}_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \qquad (*)$$

koordinátájú vektorok az A operátor 0 sajátértékhez tartozó sajátvektorai. (A koordináták a bizonyítás elején rögzített sajátvektorokból alkotott bázisra vonatkoznak.) Ebben a bázisban ugyanis A mátrixa az alábbi diagonális mátrix:

$$\left(\begin{array}{ccc|cc}
\lambda_1 & & 0 & & \\
0 & \lambda_2 & 0 & & \\
 & & & & \\
0 & & \lambda_r & & \\
\hline
 & & & 0 & \\
 & & & & \\
 & & & & 0
\end{array}\right),$$

s a $(*)$ vektorokat balról beszorozva ezzel a mátrixszal 0-t kapunk.

Most megállapítjuk a másodrendű hiperfelület egyenletét abban a bázisban, mely első r vektora ugyanaz, mint a bizonyítás elején, a további vektorok pedig a $(*)$ vektorok. Az új bázis egyrészt ortonormált, mert a bázistranszformáció mátrixa a konstrukció miatt ortogonális, másrészt az A sajátvektoraiból áll, mint arra már utaltunk. A bázistranszformáció mátrixa

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}
1 & & & & & \\
 & 1 & & & & \\
 & & & & & \\
 & & 1 & & & \\
\hline
 & & & c_{11} & \dots & \bar{b}_{r+1} \\
 & & & & & \\
 & & & c_{n-r,1} & & \bar{b}_n
\end{array}\right),$$

ahol az első r oszlop után a $(*)$ vektorait írtuk be. A jobb felső és a bal alsó sarokban minden mátrixelem zéró. A megfelelő koordinátatranszformáció mátrixa az inverz mátrix, azaz a bázistranszformáció (ortogonális) mátrixának transzponáltja. Az új koordináták tehát:

$$\begin{aligned}
\bar{x}_1 &= x_1 \\
\\
\bar{x}_r &= x_r \\
&\vdots \\
\bar{x}_n &= \bar{b}_{r+1}x_{r+1} + \cdots + \bar{b}_n x_n.
\end{aligned}$$

(r + 1-től n − 1-ig nincs szükségünk a képletekre.) Ezt beírva a másodfokú hiperfelület egyenletébe, az új bázisban az egyenlet:

$$\sum_{i=1}^{r} a_i \left(\bar{x}_i + \frac{b_i}{\lambda_i}\right)^2 + 2\bar{x}_n = \bar{\bar{c}}.$$

Ez egyszerű rendezés után a harmadik típus. □

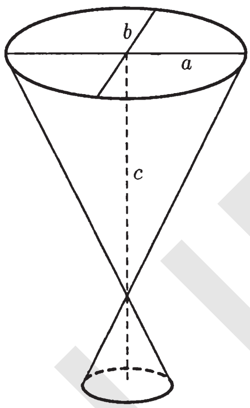
2 dimenzióban természetesen visszakapjuk a már megkapott egyenleteket. Három dimenzióban pedig az alábbi kanonikus egyenleteket kapjuk (a koordinátákat x, y, z-vel jelölve).

Következmény. **Másodrendű felületek kanonikus egyenlete.** *Minden valós másodrendű felülethez létezik olyan Descartes–féle koordináta–rendszer, hogy egyenlete az alábbiak valamelyike:*

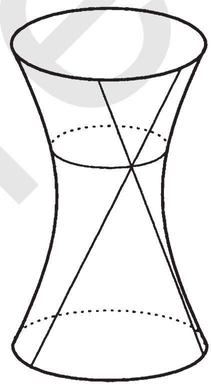
I	*II*	*III*
$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=0$	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=2z$
$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=-1$	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=2z$
$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0$	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$	$\frac{x^2}{a^2}=2z$
$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0$	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$	
$x^2=0$	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$	
	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=-1$	
	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$	
	$\frac{x^2}{a^2}=1$	
	$\frac{x^2}{a^2}=-1$	

Elnevezések az előbbi táblázatnak megfelelően az alábbiak. (A geometriai vonatkozásokat ld. pl. Hajós György [5] könyvében):

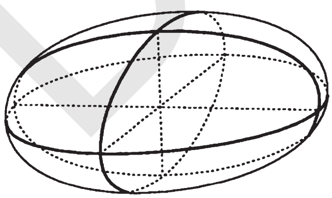
I	II	III
pont	ellipszoid/gömb	elliptikus paraboloid
másodrendű kúp	üres halmaz	hiperbolikus paraboloid
egyenes	egyköpenyű hiperboloid	parabolikus henger
metsző síkpár	kétköpenyű hiperboloid	
(kettős) sík	elliptikus henger	
	üres halmaz	
	hiperbolikus henger	
	párhuzamos síkpár	
	üres halmaz	



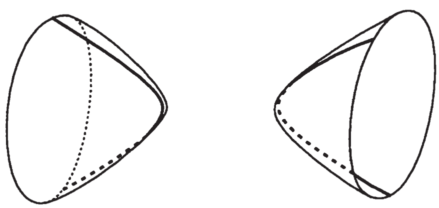
másodrendű kúp



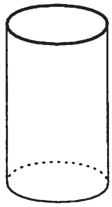
egyköpenyű hiperboloid



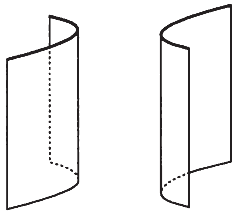
ellipszoid



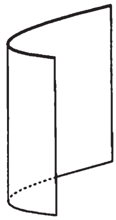
kétköpenyű paraboloid



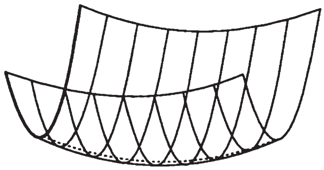
elliptikus henger



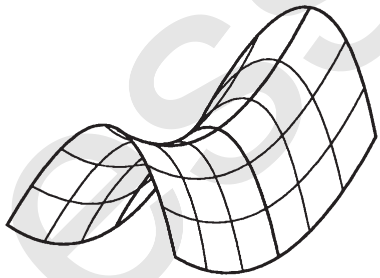
hiperbolikus henger



parabolikus henger



elliptikus paraboloid



hiperbolikus paraboloid

12. Függelék

12.1. Algebrai alapfogalmak

Ebben a fejezetben felsoroljuk azokat az algebrai alapfogalmakat, melyeket a jegyzetben felhasználunk. Minden esetben adunk példákat, egy közismert egyszerű példát és egy lineáris algebrai jellegűt.

Definíció. *A H nem üres halmazon $*$* **művelet**, *ha bármely $a, b \in H$–hoz egyértelműen létezik egy $c \in H$, melyre*

$$c = a * b.$$

Ha a H halmazon a $*$ művelet értelmezve van, akkor $(H, *)$–ot algebrai struktúrának nevezzük.

Megjegyzés. A művelet H–n tulajdonképpen egy $H \times H \to H$ leképezés.

Definíció. *Az $(F, *)$ algebrai struktúra* **félcsoport**, *ha a művelet* **asszociatív**:

$$\forall a, b, c \in F: \quad a * (b * c) = (a * b) * c.$$

Példák.

1. Félcsoportot alkot a természetes számok halmaza a szorzásra nézve.
2. Félcsoportot alkotnak a valós elemű 2×2 típusú mátrixok a szorzásra nézve.

Definíció. *A $(G, *)$ algebrai struktúra* **csoport**, *ha*

- *$(G, *)$ félcsoport*
- *létezik* **neutrális elem**, *azaz olyan $e \in G$, melyre*

$$\forall a \in G: \quad a * e = e * a = a$$

- *és minden elemnek van* **inverze**, *azaz*

$$\forall a \in G \ \exists a' \in G: \quad a * a' = a' * a = e.$$

Példák.

1. Csoportot alkotnak az egész számok az összeadásra nézve.
2. Csoportot alkotnak a 2×2 típusú valós elemű reguláris mátrixok a szorzásra nézve.

Megjegyzés.

1. A $(G,*)$ csoport **kommutatív csoport, vagy Abel–féle csoport**, ha $(G,*)$ olyan csoport, melyen a művelet kommutatív:
$$\forall a,b \in G: \quad a*b=b*a$$
Az előző példák közül az első kommutatív, a második nem kommutatív csoport.
2. Ha a művelet összeadás, akkor a neutrális elemet **nullelem**nek, ha a művelet szorzás, akkor a neutrális elemet **egységelem**nek nevezzük.

Definíció. *Az $(R,+,*)$ algebrai struktúra* **gyűrű**, *ha*

- *$(R,+)$ kommutatív csoport*
- *$(R,*)$ félcsoport*
- *érvényes a* **disztributivitás**, *azaz*
$$\forall a,b,c \in R: \quad \begin{aligned} a*(b+c)&=(a*b)+(a*c)\\ (a+b)*c&=(a*c)+(b*c). \end{aligned}$$

Példák.

1. Az egész számok halmaza gyűrű az összeadás és szorzás műveletére nézve.
2. A valós elemű 3×3 típusú mátrixok gyűrűt alkotnak a mátrixokon szokásos összeadás és szorzás műveletére nézve.

Definíció. *A $(T,+,*)$ algebrai struktúra* **test**, *ha*

- *$(T,+)$ kommutatív csoport*
- *$(T \setminus \{0\},*)$ kommutatív csoport, ahol 0 jelöli a neutrális elemet a + műveletre nézve*
- *teljesül a disztributivitás.*

Példa. A racionális számok testet alkotnak a szokásos összeadás és szorzás műveletére nézve.

Definíció. *A $(T,+,*)$ test* **karakterisztikája nulla**, *ha nem létezik olyan n természetes szám, hogy minden $t \in T$-re $n \cdot t = 0$, ahol $n \cdot t$ az n tagú $t + \ldots + t$ összeget jelöli.*

Példa. A racionális, valós, komplex számok teste nullkarakterisztikájú.

Definíció. *A V nem üres halmaz* **vektortér** *a T test felett, ha*

- $(V,+)$ *kommutatív csoport*
- *bármely* $a, b \in V$ *vektorok és* $\lambda, \mu \in T$ *skalárok esetén fennállnak az alábbi azonosságok:*

$$\begin{aligned}
\lambda(a+b) &= \lambda a + \lambda b \\
(\lambda+\mu)a &= \lambda a + \mu a \\
(\lambda\mu)a &= \lambda(\mu a) = \mu(\lambda a) \\
1a &= a
\end{aligned}$$

ahol 1 a T *test multiplikatív egységeleme.*

PÉLDÁK.

1. A valós számok halmaza vektortér a racionális számok teste felett.
2. A valós elemű számhármasok vektorteret alkotnak a valós számok teste felett az alábbi műveletekre nézve:

$$\begin{aligned}
(x_1, x_2, x_3) + (y_1, y_2, y_3) &= (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3) \\
\lambda(x_1, x_2, x_3) &= (\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3)
\end{aligned}$$

DEFINÍCIÓ. *Az* A *nem üres halmaz* **algebra** *a* T *test felett, ha*

- *A vektortér* T *felett*
- $(A, +, *)$ *gyűrű*
- *Bármely* $a, b \in A$ *és* $\lambda \in T$ *esetén fennáll*

$$\lambda(a * b) = (\lambda a) * b = a * (\lambda b).$$

MEGJEGYZÉS. Természetesen a vektortéren és a gyűrűben értelmezett összeadás ugyanaz a művelet.

PÉLDÁK.

1. A komplex számok halmaza algebra a racionális számok teste felett.
2. A valós elemű, 3×3 típusú mátrixok algebrát alkotnak a valós számok teste felett.

12.2. Alapvető tudnivalók permutációkról

Ebben a fejezetben összefoglaljuk a permutációk azon tulajdonságait, melyeket a determinánsokról szóló fejezetben felhasználunk.

DEFINÍCIÓ. *Az* $(1, 2, \ldots, n)$ *számok egy sorrendjét ezen számok egy* **permutációjá***nak nevezzük.*

JELÖLÉSEK.

1. Az $(1, 2, \ldots, n)$ összes permutációinak halmazát P_n–nel jelöljük.
2. Ha $\pi = (i_1, i_2, \ldots, i_n)$ az $(1, 2, \ldots, n)$ egy permutációja, akkor azt a jelölést is szokás alkalmazni, hogy

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & & n \\ i_i & i_2 & & i_n \end{pmatrix}$$

A felső sorban a számoknak nem feltétlenül nagyság szerint növekvő sorrendben kell következniük.

MEGJEGYZÉS.

1. A permutáció tekinthető az $(1, 2, \ldots, n)$ halmaz önmagára történő kölcsönösen egyértelmű leképezésének is.
2. Az $(1, 2, \ldots, n)$ számok összes permutációinak száma $n!$.

DEFINÍCIÓ. *Az* $(1, 2, \ldots, n)$ *számok* $(i_1, i_2, \ldots, i_n)$ *permutációjában* i_k **inverzió***ban áll* i_l*–lel, ha* $k < l$ *de* $i_k > i_l$ $(1 \leq k < l \leq n)$.

JELÖLÉS. Az $(i_1, i_2, \ldots, i_n)$ összes inverzióinak a számát $I(i_1, i_2, \ldots, i_n)$–nel jelöljük.

PÉLDA. Az $(5, 1, 4, 2, 3)$ permutáció inverzióinak száma 6.

DEFINÍCIÓ. *Egy* **permutáció páros**, *ha összes inverzióinak száma páros, egyébként* **páratlan**.

LEMMA. *Bármely* $(i_1, i_2, \ldots, i_n)$ *permutáció létrehozható az* $(1, 2, \ldots, n)$*–ből kiindulva, csak elempárok egymásutáni cseréjével.*

Bizonyítás. Az i_1–et az első számmal megcserélve elérhetjük, hogy az első helyre kerüljön. Hasonló módon hozzuk az i_2–t a második helyre, stb. □

LEMMA. *Két elem cseréjénel az inverziók számának paritása ellenkezőjére változik.*

Bizonyítás. Tekintsük az $(i_1, \ldots, i_k, \ldots, i_l, \ldots, i_n)$ permutációt és benne cseréljük fel az i_k és i_l számokat, így az $(i_1, \ldots, i_l, \ldots, i_k, \ldots, i_n)$ permutációt

kapjuk. A cserekor i_k–nak ellenkezőjére változik az inverziója az i_k és i_l között lévő s db számmal. (Ha nem voltak inverzióban, akkor inverzióban lesznek a csere után, és ha eddig inverzióban voltak, akkor a csere után nem lesznek.) Ugyancsak, i_l–nek ellenkezőjére változik az inverziója az i_k és i_l között lévő s db számmal. Végül, i_k és i_l egymás közötti inverziója is megváltozik. Más elemek közötti inverzióban nem történik változás. Így összesen $2s+1$ változás történik az inverziók számában.
□

Definíció. *A*

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \quad & n \\ i_1 & i_2 & \quad & i_n \end{pmatrix} \quad \text{és} \quad \rho = \begin{pmatrix} 1 & 2 & & n \\ j_1 & j_2 & \ldots & j_n \end{pmatrix}$$

permutációk szorzata

$$\pi \cdot \rho = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \quad & n \\ j_{i_1} & j_{i_2} & \quad & j_{i_n} \end{pmatrix}.$$

Példa.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 1 & 5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & 5 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 4 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

Megjegyzés.

1. A permutációk szorzása nem kommutatív.
2. A permutációk ezen műveletre nézve csoportot alkotnak, melynek egységeleme az $(1, 2, \ldots, n)$ identikus permutáció.
3. Egy π permutáció **inverzén** azt a ρ permutációt értjük, melyre $\pi\rho$ az identikus permutáció.

Lemma. *Azonos paritású permutációk szorzata páros, ellenkező paritású permutációk szorzata páratlan.*

Bizonyítás. A $\pi\rho$ szorzat elvégzésekor a π permutációban szereplő sorrendet rendezzük tovább a ρ permutációnak megfelelően. Ha a π permutációt az $(1, 2, \ldots, n)$ permutációból k db elempárcserével lehet létrehozni, a ρ permutációt l db elempár cserével, akkor a $\pi\rho$ permutáció létrehozható $k+l$ db elempár cseréjével. Ha k, l paritása azonos, akkor $k+l$ páros, egyébként $k+l$ páratlan. □

Megjegyzés. Könnyen ellenőrizhető, hogy a

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \quad & n \\ i_1 & i_2 & \quad & i_n \end{pmatrix}$$

permutáció inverze

$$\pi^{-1} = \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & & i_n \\ 1 & 2 & & n \end{pmatrix}$$

LEMMA. *A permutációnak a paritása megegyezik inverzének paritásával.*

Bizonyítás. A szorzatuk az egységpermutáció, ami páros, tehát az előző Lemma értelmében vagy mindkettő páros, vagy mindkettő páratlan. □

12.3. MAPLE: lineáris algebrai programcsomag

Ezen fejezet célja a MAPLE komputeralgebra programcsomag lineáris algebrával kapcsolatos eljárásainak áttekintése. Ezen eljárások igen hatékony eszközt adnak felhasználóik kezébe a lineáris algebrai feladatok numerikus megoldására.

12.3.1 A Maple általános használata

Először megismerkedünk a MAPLE programcsomag használatának néhány általános vonásával. Tudnivaló, hogy a MAPLE–t lehet interaktív módon használni és lehet programot is írni MAPLE utasítások felhasználásával. Mi itt csakis a MAPLE interaktív használatának bemutatására szorítkozunk. Leírásunk korántsem teljes, csak ízelítőt ad a lehetséges felhasználási területekből.

A MAPLE programcsomagot konkrét installációjától függően legtöbbször a

```
maple
```

paranccsal lehet betölteni. Ezután a képernyőn megjelenik a MAPLE cég emblémája, és egy > prompt a sor elején, mely után lehet a parancsokat beírni. A parancs általában egy ; jellel záródik. A parancs beírása után az Enter billentyűt nyomjuk meg, melyre az adott parancs végrehajtódik, és az eredmény a képernyőn megjelenik. Amennyiben a parancsot a : jellel zárjuk, a parancs végrehajtódik, de az eredmény nem jelenik meg a képernyőn.

Kilépés:

```
> quit;
```

Megjegyzés.

1. *HELP* funkció aktiválása. A DOS-os verzióban F1-gyel a Windows-os verzióban a megfelelő ikonra való kattintással történik. A *help menüben* magától értetődő módon lehet keresni a kívánt információt. Célszerű mindenképpen kipróbálni. A *help* funkciót lehet konkrét eljárások nevével is hívni, ekkor a konkrét eljárás használatáról ad információt. Pl. a *help* hívása a *det* eljárásra vonatkozóan:

   ```
   > help(det);
   ```

2. *Visszalapozás a képernyőn.* A DOS-os verzióban F5-tel, a Windows-os verzióban a szokásos módon történik. Akkor használjuk, ha az eredmény túl hosszú, vagy korábbi eredményre vagyunk kíváncsiak.

3. *Parancsok megismétlése, módosítása* A DOS-os verzióban a fölfelé és lefelé mutató kurzor nyilak segítségével, a Windows-os verzióban az egérrel lehet a már beadott parancsok között keresni. Ha a parancs, melyet használni akarunk nem sokban tér el egy korábbitól, akkor azt előkeresve és módosítva gyorsabban célhoz érünk, mint újra a teljes parancsot begépelve.

4. A " jel a legutoljára kiszámított eredményre utal, "" az azelőttire, stb.

Szimbólikus változóknak betűvel kezdődő, betűkből, számokból és egyéb (nem műveleti) jelekből álló összefüggő jelsorozatokat használunk. A kis és nagy betűk között különbség tevődik. A már értéket kapott szimbólumok értékeit (ha azok nem vektorok vagy mátrixok) kiírathatjuk úgy, hogy a parancs sorba a szimbólum neve mögé ;–t teszünk. Mátrixok vagy vektorok értékeit a *print* utasítással írathatjuk ki. Az értékadó utasítást := –val jelöljük.

```
> a:=1/2+3/7+2/11;
                                          171
                                     a := ---
                                          154

> 154*a;

                                     171
```

A MAPLE a számokat pontos közönséges tört alakban tárolja, amíg a tizedes tört alak kiszámítását az *evalf* paranccsal elő nem írjuk:

```
> evalf(a);
                                1.110389610
```

A tizedes törtek 10 jegy pontosságúak, ami azonban a *Digits* változó megfelelő beállításával változtatható:

```
> Digits:=40;
                                Digits := 40
> evalf(a);
                  1.110389610389610389610389610389610389610
> Digits:=10;
                                Digits := 10
> h:=tan(3/7*Pi);
                              h := tan(3/7 Pi)
> evalf(h);
                                4.381286277
```

A *Pi,E,I* rendre a $\pi, e, \sqrt{-1}$ szimbólumokat jelölik.

Az alapműveletek jele a szokásos $+, *, /$, a hatványozás jele a "háztető ".

```
> p:=2^(2^6)+1;
                         p := 18446744073709551617
```

Egész számokat az *ifactor*, egész együtthatós polinomokat a *factor* eljárással bonthatunk szorzatra.

```
> ifactor(p);
                        (67280421310721) (274177)
```

```
> f:=x^4-1;
                         4
                   f := x  - 1

> factor(f);
                                      2
               (x - 1) (x + 1) (x  + 1)
```

A *normal* eljárás törteket hoz egyszerűsített alakra.

```
> g:=(x^2-y^2)/(x-y)^3;
                         2    2
                        x  - y
                   g := --------
                               3
                        (x - y)

> g:=normal(g);
                          x + y
                   g := --------
                               2
                        (x - y)
```

Algebrai kifejezések egyszerűsítésére használhatjuk a *simplify* eljárást is, ennek előnye, hogy megadhatóak azon összefüggések, melyeket az egyszerűsítésnél fel lehet használni. Például, ha x, az x^2+x+1 polinom gyöke, akkor az x^5+x^3+1 polinom egyszerűsítése:

```
> simplify(x^5+x^3+1,{x^2+x+1=0});

                   1 - x
```

A szorzat alakok kiszámítása, a szorzás elvégzése az *expand* eljárással lehetséges.

```
> expand((x-y)*(x+y));

                    2    2
                   x  - y
```

A *subs* eljárás alkalmas algebrai kifejezések helyettesítési értékeinek kiszámítására.

```
> f:= x*y;
                   f:= x y
> f1:=subs(x=4,y=5,f);
                   f1:=20
> f2:=subs(x=3,y=7,f);
                   f2:=21
```

Komplex számok használata esetén az imaginárius egységet az I jelöli.

```
> a:=3+2*I;b:=1+5*I;
> c:=a/b;
> rc:=Re(c);
> ic:=Im(c);
```

Bonyolultabb komplex értékű kifejezéseket az *evalc* eljárással lehet kiértékeltetni.

Polinomok valós gyökeit az *fsolve* eljárás számítja ki, mely a *complex* paraméterrel kiegészítve a komplex gyököket is kiszámítja. Minden esetben az eljárás első paramétere a polinom, második pedig a változó szimbóluma. A gyököket eltárolhatjuk egy változóba is, ekkor ez a változó egy vektor lesz, melynek komponensei a megfelelő sorszámú gyököket tartalmazzák.

```
> f:=3*x^5-2*x^2+1;
> fsolve(f,x);
> g:=fsolve(f,x,complex);
> g[1];
```

A MAPLE–ben egyszerű módon lehet **függvényeket** megadni. Például azt a kétváltozós függvényt, melynek értéke az (i, j) helyen $(-1)^{i+j}$ így lehet definiálni:

```
> f:=(i,j)->(-1)^(i+j);
```

Ezek után a függvény hívása:

```
> f(2,3);
                                  - 1
```

12.3.2 Alapvető utasításelemek

Az *if* utasítás a szokásos kétféle alakban használatos (*else* ággal vagy anélkül). Lezárása *fi*–vel történik. Az *if, then, else, fi* szavak közötti esetleg több utasítás egy blokkot alkot.

```
> if a<12 then b:=3 fi;
> if a<12 then b:=3 else b:=4 fi;
```

A ciklikus utásítások legegyszerűbb formája a *for* ciklus, melyet *od* zár le. Ha nem adjuk meg a kezdőindexet (*from*) és a lépésközt (*by*), akkor a számlálás 1–től 1–esével történik. A *do* és *od* szavak közötti esetleg több utasítás alkotja a ciklus magját, ezek minden lépésben végrehajtódnak.

```
> for i from -1 by 2 to 14 do
   ...........
> od;

> k:=1;
> for j to 6 do k:=k*j od;
```

12.3.3 Lineáris algebra programcsomag

A MAPLE programcsomag tartalmaz számos olyan eljárást, melyek lineáris algebrai jellegű számítások elvégzését teszik lehetővé. Szemben az eddig tárgyalt eljárásokkal, ezek a MAPLE behívásakor nem kerülnek betöltésre. Használatuk csak akkor lehetséges, ha a

```
> with(linalg);
```

paranccsal külön betöltjük őket.

Adatstruktúrák

A lineáris algebrában leggyakrabban vektorokkal és mátrixokkal számolunk. Ezeket lehet definiálni vagy a méreteik megadásával és az elemek értékének megadásával, vagy közvetlenül az elemek megadásával. Mátrix elemeinek felsorolásakor az értékadás sorfolytonosan történik. A vektorok ill. mátrixok elemeire a megfelelő sor és oszlopindexek szögletes zárójelbeni megadásával hivatkozhatunk. Vektorokat vagy mátrixokat a *print* eljárás ír ki a képernyőre. Ennek megfelelően az alábbi vektor illetve mátrix definíciók egyenértékűek.

```
> v:=vector(3);v[1]:=-1;v[2]:=7;v[3]:=5;
> v:=vector([-1,7,5]);

> K:=matrix(2,3);
> K[1,1]:=1;K[1,2]:=-1;K[1,3]:=2;K[2,1]:=5;K[2,2]:=6;K[2,3]:=7;
> K:=matrix(2,3,[1,-1,2,5,6,7]);
> K:=matrix([[1,-1,2],[5,6,7]]);
```

Alapműveletek

Additív műveleteket egymással egyező típusú vektorokon vagy mátrixokon lehet végezni, és az eredmény is ugyanolyan típusú lesz. Mátrixok szorzásakor az ismert szabályok érvényesülnek a szorzandó és a szorzat méretére vonatkozóan.

Azonos típusú vektorok vagy mátrixok összeadása:

```
> C:=add(A,B);
```

Azonos típusú A, B vektorok vagy mátrixok lineáris kombinációja $c1, c2$ együtthatókkal:

```
> C:=matadd(A,B,c1,c2);
```

Az A vektor vagy mátrix elemeinek szorzása x–szel:

```
> scalarmul(A,x);
```

Az A mátrix i–edik sorának szorzása x–szel:

```
> mulrow(A,i,x);
```

Az A mátrix i–edik oszlopának szorzása x–szel:

```
> mulcol(A,i,x);
```

Egy A mátrix i–edik sorának x–szeresét hozzáadni a j–edik sorához:

```
> addrow(A,i,j,x);
```

Egy A mátrix i–edik oszlopának x–szeresét hozzáadni a j–edik oszlopához:

```
> addcol(A,i,j,x);
```

Az $n \times n$ típusú egységmátrix c-szeresének előállítása:

```
> band([c],n);
```

Olyan $n \times n$ típusú mátrix előállítása, melyben a főátló alatt $c1$, a főátlóban $c2$, a főátló fölött $c3$ áll:

```
> band([c1,c2,c3],n);
```

A B mátrixba az A mátrix bemásolása úgy, hogy az A bal felső sarka a B (m, n)–edik elemén lesz:

```
> copyinto(A,B,m,n);
```

Az A mátrixban az r,...,s sorok törlése:

```
> delrows(A,r..s);
```

Az A mátrixban az r,...,s oszlopok törlése:

```
> delcols(A,r..s);
```

Az A mátrix bővítése m sorral és n oszloppal, az új helyeket x–szel feltöltve:

```
> extend(A,m,n,x);
```

Az A mátrixban az r–edik sor és az s–edik oszlop elhagyása:

```
> minor(A,r,s);
```

Az A mátrix i–edik sora:

```
> row(A,i);
```

Az A mátrix i–edik oszlopa:

```
> col(A,i);
```

A B mátrix összeállítása a $v1, \ldots, vk$ vektorokból:

```
> B:=concat(v1,...,vk);
```

A v vektor dimenziója:

```
> vectdim(v);
```

Az A mátrix sorainak száma:

```
> rowdim(A);
```

Az A mátrix oszlopainak száma:

```
> coldim(A);
```

Az A mátrix transzponáltja:

```
> transpose(A);
```

Az A mátrix nyoma (azaz főátlóbeli elemeinek összege):

```
> trace(A);
```

Mátrixok vagy vektorok szorzása. A művelet csak megfelelő méretű mátrixok vagy vektorok esetén használható. Több összeszorzandó mátrix vagy vektor is megadható paraméterként.

```
> multiply(A,B);
> multiply(A,B,C);
```

Az A mátrix rangja:

```
> rank(A);
```

Az A négyzetes mátrix adjungáltja. Az adjungált mátrix (i, j)–edik eleme az a_{ji}–hez tartozó algebrai aldetermináns ($A * adj(A) = det(A) * E$).

```
> adj(A);
```

Az A négyzetes mátrix determinánsa:

```
> det(A);
```

Az A négyzetes mátrix inverze:

```
> inverse(A);
```

Az A vektor vagy mátrix normája. Második paraméterként megadható a norma típusa. Ez mátrixoknál $1, 2, frobenius, infinity$ lehet, vektoroknál pozitív egész szám, $frobenius, infinity$ lehet. Külön specializáció nélkül a végtelen norma kerül kiszámításra.

```
> norm(A);
> norm(A,infinity);
> norm(A,1);
> norm(A,2);
```

Az $i_1, \ldots, i_k$ számokhoz tartozó Vandermonde–féle mátrix:

```
> vandermonde([i1,...,ik]);
```

Mátrixokkal vagy vektorokkal végzett alapműveletek kiértékelése. Az *evalm* eljárás alkalmazásával az összeadás, skalárral való szorzás és szorzás műveleteinek kiszámítását nagyban egyszerűsíthetjük. Például, ha A és B azonos típusú négyzetes mátrixok, akkor $A^2 + A * B - 2 * A + 5 * B$ egy utasítással kiszámítható. Jegyezzük meg, hogy a szorzás műveletét ekkor &* jelöli:

```
> evalm(A^2+A&*B-2*A+5*B);
```

Vektorterek

A vektorterek és alterek bázisait halmazba lehet foglalni, és az eljárások paramétereként a bázisvektorok felsorolása helyett az őket tartalmazó halmazokat is meg lehet adni. Az eljárások egy részénél az eredmény is egy vektorhalmaz, melynek adott sorszámú elemére mint komponensére lehet hivatkozni:

```
a:=vector([1,4,2]);
b:=vector([-1,2,-7]);
alter:={a,b};
alter[1];
alter[2];
```

A $v_1, \ldots, v_k$ (azonos dimenziójú) vektorok által generált altér bázisa:

```
> basis({v1,...,vk});
```

vagy

```
> w:={v1,...,vk};
> t:=basis(w);
```

a bázis első eleme:

```
> t[1];
```

A $\{v_1, \ldots, v_k\}$ és a $\{w_1, \ldots, w_l\}$ bázissal rendelkező alterek összegének a bázisa:

```
> sumbasis({v1,...,vk},{w1,...,wl});
```

vagy

```
> s:={v1,...,vk};
> r:={w1,...,wl};
> t:=sumbasis(s,r);
```

a bázis első eleme:

```
> t[1];
```

A $\{v_1, \ldots, v_k\}$ és a $\{w_1, \ldots, w_l\}$ bázissal rendelkező alterek metszetének a bázisa:

```
> intbasis({v1,...,vk},{w1,...,wl});
```

vagy

```
> s:={v1,...,vk};
> r:={w1,...,wl};
> t:=intbasis(s,r);
```

a bázis első eleme:

```
> t[1];
```

Az A mátrix sorai által generált altér bázisa. Ha második paraméterként aposztrófok között megadunk még egy változót, akkor abban az altér dimenziója tárolódik:

```
> rowspace(A);
> rowspace(A,'dim');
```

a bázis tárolása, az első báziselem és a dimenzió kiíratása:

```
> s:=rowspace(A,'dim');
> s[1];
> dim;
```

Az A mátrix oszlopai által generált altér bázisa. Ha második paraméterként aposztrófok között megadunk még egy változót, akkor abban az altér dimenziója tárolódik:

```
> colspace(A);
> colspace(A,'dim');
> s:=colspace(A,'dim');
> s[1];
> dim;
```

Lineáris egyenletrendszerek

Az A négyzetes mátrix felső háromszög alakra hozása sorokkal végzett elemi átalakításokkal. Ha aposztrófok között második és harmadik paramétereket is megadunk, akkor az ott szereplő változókba a mátrix rangja illetve determinánsa tárolódik:

```
> gausselim(A,'rang','determinans');
> rang;
> determinans;
```

Az $Ax = b$ lineáris egyenletrendszer (paraméteres megoldása):

```
> linsolve(A,b);
```

Lineáris transzformációk

Az A négyzetes mátrix nulltere. A nulltér egy bázisa egy vektorhalmazban kerül tárolásra. Ha aposztrófok között még egy paramétert megadunk, abban a nulltér dimenziója tárolódik:

```
> kernel(A);
```

vagy

```
> s:=kernel(A,'dim');
> s[1];
> dim;
```

Az A (komplex) mátrix Jordan–féle normál alakja. Ha aposztrófok között egy második paramétet is megadunk, abban a bázistranszformáció P mátrixa kerül tárolásra, melyre fennáll $P^{-1}JP = A$.

```
> jordan(A);
> J:=jordan(A,'P');
```

$n \times n$ típusú x sajátértéket tartalmazó Jordan blokk előállítása, melyben a főátlóban x, felette 1, máshol 0 van:

```
> JordanBlock(x,n);
```

Megjegyzés. A mi tárgyalásunktól eltérően a MAPLE által használt Jordan–féle blokkok nem a főátló alatt, hanem fölötte tartalmaznak 1–eseket, és a Jordan–féle normálalak is ilyen típusú blokkokból épül fel. Belátható, hogy ez elvi eltérést nem jelent, a bázisvektorok megfelelő sorbarendezésével egyik alakból megkapható a másik.

Karakterisztikus polinom, sajátérték, sajátvektor

Az A négyzetes mátrix karakterisztikus mátrixa, x változóval, az $xE-A$ mátrix, ahol E az egységmátrix:

```
> charmat(A,x);
```

Megjegyzés. Mint látható, a MAPLE az általunk használt $A-xE$ mátrix helyett az $xE - A$ mátrixot használja. Ez azt eredményezi, az A mátrix karakterisztikus polinomja esetleg előjelben eltérhet az általunk használt polinomtól, de más (elvi) eltérés nincs.

Az A négyzetes mátrix karakterisztikus polinomja ($det(x * E - A)$). Ehhez természetesen eljuthatunk úgy is, hogy a karakterisztikus mátrixnak képezzük a determinánsát.

```
> charpoly(A,x);
```

vagy másképpen

```
> B:=charmat(A,x);
> d:=det(B);
```

vagy

```
> d:=det(charmat(A,x));
```

Az A négyzetes mátrix minimálpolinomja, az a legkisebb fokú polinom, melynek a mátrix gyöke (ez mindig a karakterisztikus polinom osztója):

```
> minpoly(A,x);
```

Az A négyzetes mátrix sajátértékeinek kiszámítása. A sajátértékek egy vektorban kerülnek tárolásra. Ehhez el lehet jutni a karakterisztikus polinom megoldása útján is:

```
> eigenvals(A);
> lambda:=eigenvals(A);
> lambda[1];
> evalc(lambda[1]);
> evalf(lambda[2]);
```

vagy másképpen

```
> f:=charpoly(A,x);
> fsolve(f,x);
> fsolve(f,x,complex);
```

Az A négyzetes mátrix sajátvektorainak kiszámítása. Az eredmény blokkok formájában jelenik meg, minden blokk tartalmazza a sajátértéket, annak multiplicitását, és a hozzá tartozó sajátaltér egy bázisát. Ehhez a karakterisztikus mátrix nullterének kiszámítása útján is el lehet jutni.

```
> eigenvects(A);
```

vagy másképpen

```
> nullspace(charmat(A,ei));
```

ahol ei egy sajátértéke az A mátrixnak.

Euklideszi terek

Annak eldöntése, hogy az A mátrix ortogonális–e (eredmény logikai típusú, true vagy false):

```
> orthog(A);
```

3 dimenziós vektorok külső szorzatának kiszámítása:

```
> crossprod(a,b);
```

Azonos dimenziójú a, b vektorok belső (kompozíciós) szorzata:

```
> dotprod(a,b);
> innerprod(a,b);
```

Az x, y vektorok belső szorzata az A mátrixra vonatkozóan $(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} A_{ij}x_i y_j)$:

```
> innerprod(x,A,y);
```

A $v_1, \ldots, v_k$ lineárisan független vektorrendszer ortogonalizálása, normálás nélkül a Gram–Schmidt–féle eljárással. A vektorok szeletei által generált alterekre szokásos feltételt a kiszámított vektorok általában más sorrendben elégítik ki.

```
> GramSchmidt({v1,...,vk});
```

vagy

```
> s:={v1,...,vk};
> u:=GramSchmidt(s);
> u[1];
```

Megjegyzés. Mint látható, a fenti eljárás csak ortogonalizálja a vektorokat, de nem normálja. Ortonormált bázis kiszámításához a vektorokat el kell osztani hosszukkal.

Ajánlott irodalom

[1] *Bélteky Károly:* Analitikus geometria és lineáris algebra. Tankönyvkiadó, 1987.

[2] *D.K. Fagyejev – I.Sz. Szominszkij:* Felsőfokú algebrai feladatok. Műszaki Könyvkiadó, 1973.

[3] *Fried Ervin:* Klasszikus és lineáris algebra. Tankönyvkiadó, 1979.

[4] *I.M. Gelfand:* Előadások a lineáris algebrából. Akadémiai Kiadó, 1955.

[5] *Hajós György:* Bevezetés a geometriába. Tankönyvkiadó, 1972.

[6] *P.R. Halmos:* Véges dimenziós vektorterek. Műszaki Könyvkiadó, 1984.

[7] *Kovács Zoltán:* Feladatgyűjtemény lineáris algebra gyakorlatokhoz. Kossuth Egyetemi Kiadó, 1998.

[8] *A.G. Kuros:* Felsőbb algebra. Tankönyvkiadó, 1968.

[9] *Molnárka Győző és tsai:* A Maple V és alkalmazásai, Springer Hungarica, 1996.

[10] *Rózsa Pál:* Lineáris algebra és alkalmazásai. Műszaki Könyvkiadó, 1974.

Tárgymutató