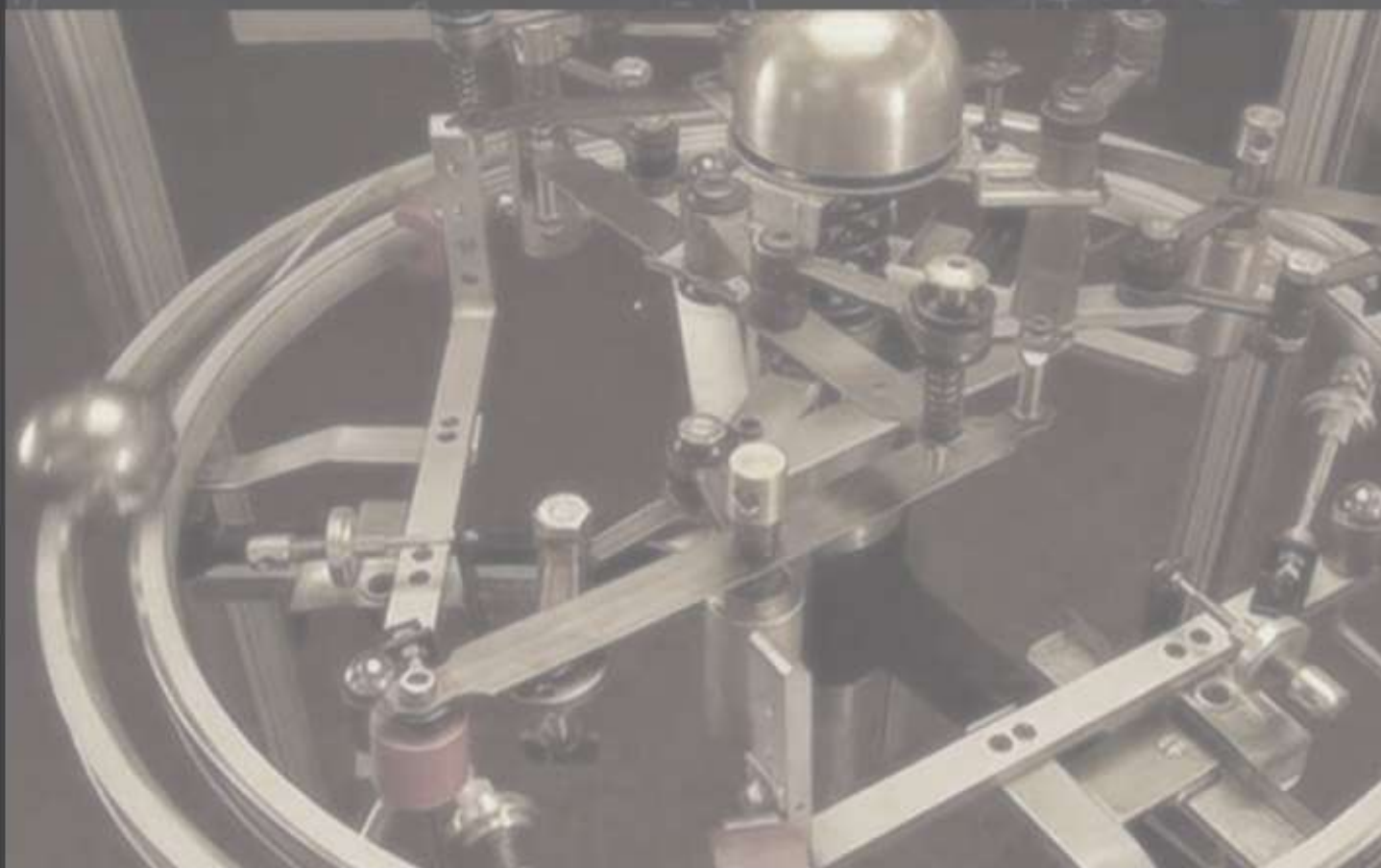


Szántó Attila

Mérnöki fizika

feladatgyűjtemény



Debreceni Egyetem Műszaki Kar
Műszaki Alaptárgyi Tanszék

Mérnöki Fizika Feladatgyűjtemény

Szántó Attila

2021

Tartalomjegyzék

1. Matematikai bevezetés	3
2. Geometriai optika	5
2.1 Fényvisszaverődés és fénytörés	5
2.2 Képzalkotás tükrökkel és lencsékkel	7
3. A klasszikus mechanika alapjai	10
3.1 Anyagi pont kinematikája	10
3.1.1 Egyenletes és egyenletesen változó egyenes vonalú mozgás	10
3.1.2 Síkmozgás állandó gyorsulással	19
3.1.3 Egyenletes és egyenletesen változó körmozgás	25
3.2 Anyagi pont kinetikája	32
3.2.1 Newton törvényeinek alkalmazása	32
3.2.2 Munkatétel alkalmazása	47
4. Elektrosztatika	57
5. Elektromos ellenállás számítása	61
6. Egyenáramú hálózatok megoldása	65
7. Hőtranszport állandósult állapotban	72
7.1 Hővezetés	72
7.2 Hőátadás	77
7.3 Hősugárzás	82
Irodalomjegyzék	85
Köszönetnyilvánítás	85

1. Matematikai bevezetés

1. feladat

Adott három vektor koordinátaival:

$$\vec{a} = 2,5 \cdot \vec{i} + 4,2 \cdot \vec{j} - 3 \cdot \vec{k}$$

$$\vec{b} = -3,5 \cdot \vec{i} + 5 \cdot \vec{j} + 6 \cdot \vec{k}$$

$$\vec{c} = 3,2 \cdot \vec{i} + 2 \cdot \vec{j} - 4,8 \cdot \vec{k}$$

a) Számítsuk ki a $(\vec{a} - \vec{b}) \cdot \vec{c}$ vektort.

b) Számítsuk ki a $\vec{a} \times \vec{b}$ és $\vec{b} \times \vec{a}$ vektorokat.

c) Számítsuk ki azon $\vec{e}_1$ és $\vec{e}_2$ egységvektorokat, amelyek merőlegesek az $\vec{a}$ és $\vec{b}$ vektorok síkjára.

d) Számítsuk ki az $\vec{e}_1$ és $\vec{c}$ vektorok által bezárt szöget.

Megoldás:

a)

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2,5 \\ 4,2 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -3,5 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 3,2 \\ 2 \\ -4,8 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} (\vec{a} - \vec{b}) \cdot \vec{c} &= \left(\begin{pmatrix} 2,5 \\ 4,2 \\ -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3,5 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} 3,2 \\ 2 \\ -4,8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -0,8 \\ -9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3,2 \\ 2 \\ -4,8 \end{pmatrix} \\ &= 6 \cdot 3,2 + (-0,8) \cdot 2 + (-9) \cdot (-4,8) = 60,8 \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} \vec{a} \times \vec{b} &= \begin{pmatrix} 2,5 \\ 4,2 \\ -3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -3,5 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2,5 & 4,2 & -3 \\ -3,5 & 5 & 6 \end{vmatrix} \\ &= \vec{i} \cdot \begin{vmatrix} 4,2 & -3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} - \vec{j} \cdot \begin{vmatrix} 2,5 & -3 \\ -3,5 & 6 \end{vmatrix} + \vec{k} \cdot \begin{vmatrix} 2,5 & 4,2 \\ -3,5 & 5 \end{vmatrix} \\ &= \vec{i} \cdot (4,2 \cdot 6 - (-3 \cdot 5)) - \vec{j} \cdot (2,5 \cdot 6 - (-3 \cdot -3,5)) + \vec{k} \cdot (2,5 \cdot 5 - (4,2 \cdot -3,5)) \\ &= 40,2 \cdot \vec{i} - 4,5 \cdot \vec{j} + 27,2 \cdot \vec{k} \end{aligned}$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} 40,2 \\ -4,5 \\ 27,2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{b} \times \vec{a} = -(\vec{a} \times \vec{b}) = \begin{pmatrix} -40,2 \\ 4,5 \\ -27,2 \end{pmatrix}$$

c)

$$\vec{e}_1 = \frac{\vec{a} \times \vec{b}}{|\vec{a} \times \vec{b}|} = \frac{\begin{pmatrix} 40,2 \\ -4,5 \\ 27,2 \end{pmatrix}}{\sqrt{(40,2)^2 + (-4,5)^2 + (27,2)^2}} = \frac{\begin{pmatrix} 40,2 \\ -4,5 \\ 27,2 \end{pmatrix}}{48,73} = \begin{pmatrix} 0,825 \\ -0,092 \\ 0,558 \end{pmatrix}$$

$$\vec{e}_2 = -\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} -0,825 \\ 0,092 \\ -0,558 \end{pmatrix}$$

d)

$$\cos \alpha_{e_1c} = \frac{\bar{e}_1 \cdot \bar{c}}{|\bar{e}_1| \cdot |\bar{c}|} = \frac{0,825 \cdot 3,2 + (-0,092 \cdot 2) + (0,558 \cdot -4,8)}{1 \cdot \sqrt{(3,2)^2 + (2)^2 + (-4,8)^2}} = -0,0367 \Rightarrow \alpha_{e_1c} = 92,1^\circ$$

2. feladat

Két pont adott koordinátaival:

$$A = (-2; 4; 8), B = (4; -8; 4).$$

a) Számítsuk ki az A és B pontok távolságát!

b) Számítsuk ki az $\bar{r}_{OA}$ és $\bar{r}_{OB}$ vektorok által bezárt szöget!

c) Számítsuk ki azt az egységvektort, amely merőleges az OAB síkra!

Megoldás:

Javasoljuk, hogy készítsen ábrát a megoldás előtt.

a)

$$\bar{r}_{OA} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix}, \bar{r}_{OB} = \begin{pmatrix} 4 \\ -8 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$d_{AB} = |\bar{r}_{AB}| = |\bar{r}_{OB} - \bar{r}_{OA}| = \left| \begin{pmatrix} 4 \\ -8 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} 6 \\ -12 \\ -4 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{(6)^2 + (-12)^2 + (-4)^2} = 14$$

b)

$$\cos \alpha_{AOB} = \frac{\bar{r}_{OA} \cdot \bar{r}_{OB}}{|\bar{r}_{OA}| \cdot |\bar{r}_{OB}|} = -0,089 \Rightarrow \alpha_{AOB} = 95,1^\circ$$

c)

$$\bar{e}_1 = \frac{\bar{r}_{OA} \times \bar{r}_{OB}}{|\bar{r}_{OA} \times \bar{r}_{OB}|} = \begin{pmatrix} 0,894 \\ 0,447 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\bar{e}_2 = -\bar{e}_1 = \begin{pmatrix} -0,894 \\ -0,447 \\ 0 \end{pmatrix}$$

3. feladat

Három pont adott koordinátaival:

$$A = (3; 5; 0), B = (0; -2; 3), C = (-4; 0; 2)$$

Számítsuk ki az ABC háromszög területét!

Megoldás:

Készítsünk ábrát a megoldás előtt.

$$\bar{r}_{OA} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}, \bar{r}_{OB} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \bar{r}_{OC} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\bar{r}_{AB} = \bar{r}_{OB} - \bar{r}_{OA} = \begin{pmatrix} -3 \\ -7 \\ 3 \end{pmatrix}, \bar{r}_{AC} = \bar{r}_{OC} - \bar{r}_{OA} = \begin{pmatrix} -7 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$T_\Delta = \frac{|\bar{r}_{AB}| \cdot |\bar{r}_{AC}| \cdot \sin \alpha_{BAC}}{2} = \frac{|\bar{r}_{AB} \times \bar{r}_{AC}|}{2} = 18,59$$

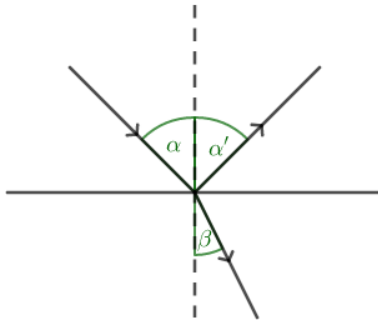
2. Geometriai optika

2.1 Fényvisszaverődés és fénytörés

1. feladat

Egy vastag üveglapot víz alá helyezünk, amelyre egy fénysugár érkezik a vízből 40 fokos beesési szöggel.

Adatok: $n_{\text{víz}} = 1,33$, $n_{\text{üveg}} = 1,63$



- a) Mekkora a fénysugár visszaverődési szöge?
- b) Mekkora az üveglapba bejutó fénysugár törési szöge?

Megoldás:

- a) A visszaverődési szög egyenlő a beesési szöggel, tehát:

$$\alpha' = \alpha = 40^\circ$$

- b) Az üveg vízre vonatkozó relatív törésmutatója az abszolút törésmutatók hányadosa, azaz:

$$n_{\text{üveg,víz}} = \frac{n_{\text{üveg}}}{n_{\text{víz}}} = \frac{1,63}{1,33} = 1,226$$

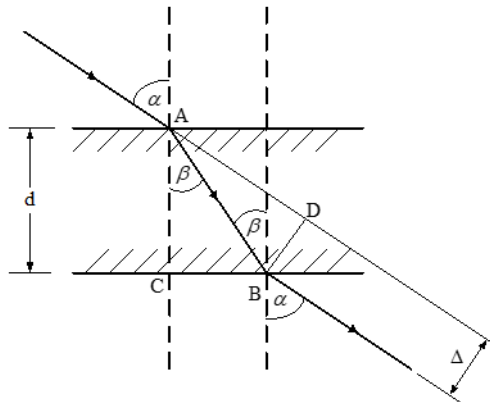
A Snellius-Descartes törvény alapján:

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = n_{\text{üveg,víz}} \Rightarrow \beta = \arcsin \frac{\sin \alpha}{n_{\text{üveg,víz}}} = \arcsin \frac{\sin 40^\circ}{1,226} = 31,62^\circ$$

2. feladat

Egy d vastagságú üveglapot vízbe helyezünk. A vízből érkező fénysugár α beesési szöggel érkezik.

Adatok: $n_{\text{víz}} = 1,33$, $n_{\text{üveg}} = 1,63$, $d = 20 \text{ [mm]}$, $\alpha = 65^\circ$



- a) Mekkora a fénysugár törési szöge az üveg túlsó oldalán?
b) Mekkora az eltolódás a két fénysugár között?

Megoldás:

- a) Az üveg vízre vonatkozó relatív törésmutatója:

$$n_{\text{üveg},\text{víz}} = \frac{n_{\text{üveg}}}{n_{\text{víz}}} = \frac{1,63}{1,33} = 1,226$$

A Snellius-Descartes törvény alapján:

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = n_{\text{üveg},\text{víz}} \Rightarrow \beta = \arcsin \frac{\sin \alpha}{n_{\text{üveg},\text{víz}}} = \arcsin \frac{\sin 65^\circ}{1,226} = 47,66^\circ$$

Az üveg túlsó oldalához a fénysugár β beesési szöggel érkezik.

A víz üvegre vonatkozó relatív törésmutatója:

$$n_{\text{víz},\text{üveg}} = \frac{n_{\text{víz}}}{n_{\text{üveg}}} = \frac{1,33}{1,63} = 0,816$$

A Snellius-Descartes törvény alapján:

$$\frac{\sin \beta}{\sin \gamma} = n_{\text{víz},\text{üveg}} \Rightarrow \gamma = \arcsin \frac{\sin \beta}{n_{\text{víz},\text{üveg}}} = \arcsin \frac{\sin 47,66^\circ}{0,816} = 65^\circ$$

Azaz a γ törési szög megegyezik a korábbi α beesési szöggel, ebből adódóan az üveglapra beérkező és onnan távozó fénysugarak párhuzamosak egymással.

- b) ABC derékszögű háromszögben:

$$\frac{d}{AB} = \cos \beta \Rightarrow AB = \frac{d}{\cos \beta} = \frac{20}{\cos 47,66^\circ} = 29,69 \text{ [mm]}$$

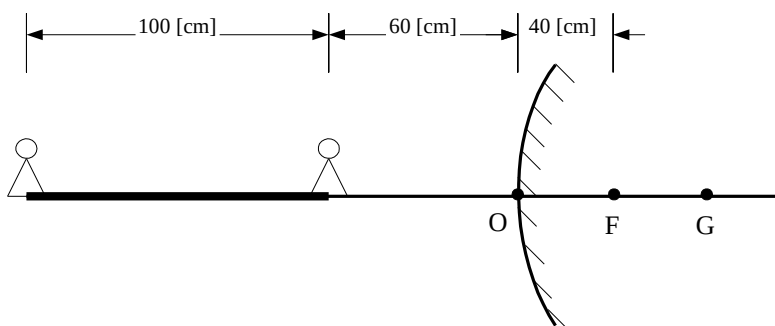
ABD derékszögű háromszögben az A csúcsnál lévő szög egyenlő $\alpha - \beta$ -val, így:

$$\frac{\Delta}{AB} = \sin(\alpha - \beta) \Rightarrow \Delta = AB \cdot \sin(\alpha - \beta) = 29,69 \cdot \sin(65^\circ - 47,66^\circ) = 8,85 \text{ [mm]}$$

2.2 Képzalkotás tükrökkel és lencsékkel

1. feladat

Egy méterrúdat elhelyezünk egy konvex gömbtükör optikai tengelyében. A tükör fókusz távolsága 40 [cm] . A méterrúd tükörhöz közelebbi vége 60 [cm] távolságra van a tükör felszínétől. A méterrúd két végére egy-egy 10 [cm] magas sakkfigurát helyezünk, az optikai tengelyre merőlegesen álló helyzetben.



- a) Milyen hosszú lesz a méterrúd tükör által létrehozott virtuális képe?
b) Milyen magasak a sakkfigurák a virtuális képen és hogyan helyezkednek el?

Megoldás:

a) A leképezési törvényből:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{t} + \frac{1}{k} \Rightarrow k = \frac{t \cdot f}{t - f}$$

$$f = -40\text{ [cm]}$$

$$t_1 = 60\text{ [cm]}$$

$$k_1 = \frac{t_1 \cdot f}{t_1 - f} = \frac{60 \cdot (-40)}{60 - (-40)} = \frac{-2400}{100} = -24\text{ [cm]}$$

$$f = -40\text{ [cm]}$$

$$t_2 = 160\text{ [cm]}$$

$$k_2 = \frac{t_2 \cdot f}{t_2 - f} = \frac{160 \cdot (-40)}{160 - (-40)} = \frac{-6400}{200} = -32\text{ [cm]}$$

A méterrúd képének hossza:

$$|k_2 - k_1| = |-32 - (-24)| = 8\text{ [cm]}$$

b) A tükör nagyítása:

$$N = \frac{K}{T} = -\frac{k}{t}$$

A közelebbi figura:

$$T_1 = 10\text{ [cm]}$$

$$t_1 = 60 \text{ [cm]}$$

$$k_1 = -24 \text{ [cm]}$$

$$N_1 = -\frac{k_1}{t_1} = -\frac{-24}{60} = 0,4$$

$$K_1 = T_1 \cdot N_1 = 10 \cdot 0,4 = 4 \text{ [cm]}$$

A távolabbi figura:

$$T_2 = 10 \text{ [cm]}$$

$$t_2 = 160 \text{ [cm]}$$

$$k_2 = -32 \text{ [cm]}$$

$$N_2 = -\frac{k_2}{t_2} = -\frac{-32}{160} = 0,2$$

$$K_2 = T_2 \cdot N_2 = 10 \cdot 0,2 = 2 \text{ [cm]}$$

2. feladat

Egy homorú gömbtükrő fókusz távolsága 20 [cm]. Milyen távol helyeztük el a tárgyat a tükrőtől, ha a tárgy virtuális képe 10 [cm]-re jelenik meg?

Megoldás:

$$f = 20 \text{ [cm]}$$

$$k = -10 \text{ [cm]} \text{ (negatív, mivel virtuális a kép)}$$

A leképezési törvény:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{t} + \frac{1}{k}$$

$$\frac{1}{t} = \frac{1}{f} - \frac{1}{k} = \frac{1}{20} - \frac{1}{-10} = 0,05 + 0,1 = 0,15 \left[\frac{1}{\text{cm}} \right]$$

$$t = \frac{1}{0,15} = 6,66 \text{ [cm]}$$

Vagyis a tükrőtől a tárgyat 6,66 [cm]-re helyeztük el.

3. feladat

Egy mindkét oldalán domború vékony gyűjtőlencsét nagyítóként használunk. A lencse elülső és hátsó felületének görbületi sugara 10 és 18 [cm]. A lencse anyagának abszolút törésmutatója $n_{lencse} = 1,52$. (A lencse abszolút és levegőre vonatkozó törésmutatója közötti különbséget elhanyagoljuk.)

a) Mennyi a lencse fókusz távolsága levegőben?

b) Mennyi a lencse fókusz távolsága vízben? ($n_{víz} = 1,33$)

c) Függ-e a fókusz távolság attól, hogy a lencse melyik oldalát fordítjuk a fény felé?

Megoldás:

$$a) f = \frac{1}{(n_{lencse}-1) \cdot \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right)} = \frac{1}{(1,52-1) \cdot \left(\frac{1}{10} + \frac{1}{18} \right)} = 12,36 \text{ [cm]}$$

b) A lencse vízre vonatkozó törésmutatója:

$$n_{lencse, víz} = \frac{n_{lencse}}{n_{víz}} = \frac{1,52}{1,33} = 1,14$$

$$f = \frac{1}{(n_{lencse, víz} - 1) \cdot \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right)} = \frac{1}{(1,14 - 1) \cdot \left(\frac{1}{10} + \frac{1}{18}\right)} = 45,92 \text{ [cm]}$$

c)

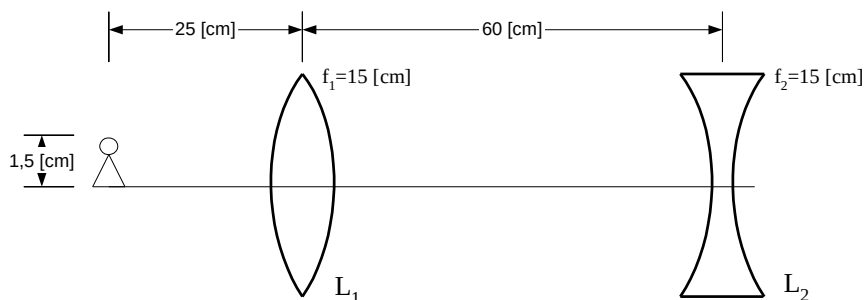
$$f = \frac{1}{(n_{lencse, víz} - 1) \cdot \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right)} = \frac{1}{(1,52 - 1) \cdot \left(\frac{1}{10} + \frac{1}{18}\right)} = 12,36 \text{ [cm]}$$

$$f = \frac{1}{(n_{lencse, víz} - 1) \cdot \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right)} = \frac{1}{(1,52 - 1) \cdot \left(\frac{1}{18} + \frac{1}{10}\right)} = 12,36 \text{ [cm]}$$

Azaz nincs különbség.

4. feladat

Egy 15 [cm] fókusz távolságú vékony gyűjtő- és egy szintén 15 [cm] fókusz távolságú vékony szórólencséből álló optikai eszköz képalkotását vizsgáljuk. A két lencse egymástól mért távolsága 60 [cm]. A gyűjtőlencsétől 25 [cm] távolságra elhelyezünk egy 1,5 [cm] magasságú tárgyat.



a) Hol jelenik meg az eszköz által alkotott éles kép?

b) Valós vagy virtuális a kép?

c) Mekkora lesz a mérete?

d) Normál vagy fordított állású?

Megoldás:

a) L_1 lencse: $f_1 = 15 \text{ [cm]}$, $t_1 = 25 \text{ [cm]}$

a képtávolság:

$$\frac{1}{f_1} = \frac{1}{t_1} + \frac{1}{k_1} \Rightarrow k_1 = \frac{t_1 \cdot f_1}{t_1 - f_1} = \frac{25 \cdot 15}{25 - 15} = 37,5 \text{ [cm]}$$

L_2 lencse: $f_2 = -15 \text{ [cm]}$, $t_2 = 60 - 37,5 = 22,5 \text{ [cm]}$

a képtávolság:

$$\frac{1}{f_2} = \frac{1}{t_2} + \frac{1}{k_2} \Rightarrow k_2 = \frac{t_2 \cdot f_2}{t_2 - f_2} = \frac{22,5 \cdot (-15)}{22,5 - (-15)} = -9 \text{ [cm]}$$

Tehát a kép a két lencse között lesz, a második lencsétől 9 [cm]-re.

b) Mivel a képtávolság negatív, ezért a kép virtuális lesz.

c) L_1 lencse nagyítása:

$$N_1 = -\frac{k_1}{t_1} = \frac{-37,5}{25} = -1,5$$

K_1 kép mérete:

$$K_1 = N_1 \cdot T_1 = -1,5 \cdot 1,5 = -2,25 \text{ [cm]}$$

L_2 lencse nagyítása:

$$N_2 = -\frac{k_2}{t_2} = -\frac{-9}{22,5} = 0,4$$

K_2 kép mérete:

$$K_2 = N_2 \cdot T_2 = -0,4 \cdot (-2,25) = -0,9 \text{ [cm]}$$

d) Tehát a kép nagysága 0,9 [cm], kicsinyített és mivel K_2 negatív ezért fordított állású.

3. A klasszikus mechanika alapjai

3.1 Anyagi pont kinematikája

3.1.1 Egyenletes és egyenletesen változó egyenes vonalú mozgás

1. feladat

Egy gépkocsi a 0-ás kilométerköttől álló helyzetből indulva, állandó a gyorsulással halad Δt ideig.

$$\text{Adatok: } s(0) = 0 \text{ [m]}, v(0) = 0 \left[\frac{\text{m}}{\text{s}} \right], a = 3 \left[\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right], \Delta t = 6 \text{ [s]}$$

a) Hol lesz a gépkocsi, és mekkora lesz a sebessége Δt idő elteltével?

b) Mennyi idő alatt tesz meg 15 métert?

Megoldás:

a) A gépkocsi egyenletesen változó mozgást végez, mivel gyorsulása állandó. A gépkocsi pályakoordinátája az idő függvényében:

$$s(\Delta t) = s(0) + v(0) \cdot \Delta t + \frac{a}{2} \cdot (\Delta t)^2 = 0 + 0 \cdot 6 + \frac{3}{2} \cdot 6^2 = 54 \text{ [m]}$$

Pályamenti sebessége az idő függvényében:

$$v(\Delta t) = v(0) + a \cdot \Delta t = 0 + 3 \cdot 6 = 18 \left[\frac{\text{m}}{\text{s}} \right]$$

b) Ismét felírjuk a gépkocsi pályakoordinátáját az idő függvényében:

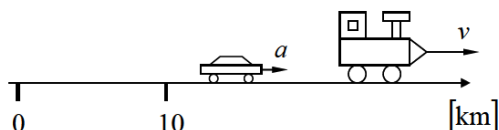
$$s(\Delta t) = s(0) + v(0) \cdot \Delta t + \frac{a}{2} \cdot (\Delta t)^2$$

behelyettesítve:

$$15 = 0 + 0 \cdot \Delta t + \frac{3}{2} \cdot (\Delta t)^2 \Rightarrow \Delta t = \sqrt{\frac{15 \cdot 2}{3}} \Rightarrow \Delta t = 3,16 \text{ [s]}$$

2. feladat

Egy autó a 10-es kilométerkőnél áll, amikor egy mozdony állandó v sebességgel elhalad mellette. Az elhaladás pillanatában az autó elindul, és állandó a gyorsulással üldözni kezdi a mozdonyt. Mindkét járművet anyagi ponttal modellezzük.



Adatok: $s(0) = 10 \text{ [km]}$, $v = 72 \left[\frac{\text{km}}{\text{h}} \right] = 20 \left[\frac{\text{m}}{\text{s}} \right]$, $a = 4 \left[\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right]$

- Számítsuk ki, hogy mennyi idő alatt éri utol az autó a mozdonyt! Adjuk meg a járművek helyét az utolérés pillanatában!
- Számítsuk ki az autó pályamenti sebességét, amikor az utoléri a mozdonyt!

Megoldás:

- Jelölje az utolérés idejét t . Az autó sebessége a 10-es kilométerkőnél: $v(0)=0$.

$$s_{\text{mozdony}}(t) = s(0) + v \cdot t = 10000 + 20 \cdot t \text{ [m]}$$

$$s_{\text{autó}}(t) = s(0) + v(0) \cdot t + \frac{a}{2} \cdot t^2 = 10000 + 0 \cdot t + \frac{4}{2} \cdot t^2 \text{ [m]}$$

Amikor az autó utoléri a mozdonyt:

$$s_{\text{mozdony}}(t) = s_{\text{autó}}(t)$$

$$10000 + 20 \cdot t = 10000 + 2 \cdot t^2 \Rightarrow 2 \cdot t^2 - 20 \cdot t = 0 \Rightarrow t = 10 \text{ [s]}$$

A járművek helye ekkor:

$$s_{\text{mozdony}}(t) = s_{\text{autó}}(t) = 10000 + 20 \cdot 10 = 10200 \text{ [m]}$$

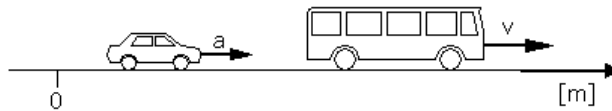
- Az autó sebessége, amikor utoléri a mozdonyt:

$$v_{\text{autó}}(t) = v(0) + a \cdot t = 0 + 4 \cdot 10 = 40 \left[\frac{\text{m}}{\text{s}} \right]$$

3. feladat

Egy állandó $15 \left[\frac{\text{m}}{\text{s}} \right]$ sebességgel haladó autóbusz éppen akkor előz meg egy $5 \left[\frac{\text{m}}{\text{s}} \right]$ sebességgel haladó autót, amikor annak sofőrje rálép a gázra és az autó $2 \left[\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right]$ gyorsulással halad tovább.

Adatok: $v_{\text{busz}} = 15 \left[\frac{\text{m}}{\text{s}} \right]$, $v_{\text{autó}} = 5 \left[\frac{\text{m}}{\text{s}} \right]$, $a_{\text{autó}} = 2 \left[\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right]$



- Mennyi idővel az indulás után előzi meg az autó a buszt?
- Mennyi lesz az előzés pillanatában az autó sebessége?
- Mennyi utat tesz meg az autó az előzésig?

Megoldás:

a) Keressük azt az időpillanatot, amikor az autó és a busz pályakoordinátája azonos lesz. Legyen az előzés pillanatában mindkét jármű esetében $s(0) = 0$ [m]. A busz egyenletes mozgást végez, gyorsulása 0. Pályakoordinátája az idő függvényében:

$$s_{busz}(\Delta t) = s(0) + v(0) \cdot \Delta t = 0 + 15 \cdot \Delta t$$

Az autó egyenletesen változó mozgást végez, gyorsulása állandó. Pályakoordinátája az idő függvényében:

$$s_{autó}(\Delta t) = s(0) + v(0) \cdot \Delta t + \frac{a}{2} \cdot (\Delta t)^2 = 0 + 5 \cdot \Delta t + \frac{2}{2} \cdot (\Delta t)^2$$

A két egyenletet egymással egyenlővé téve, egyszerűsítve, majd átrendezve kapjuk, hogy:

$$15 \cdot \Delta t = 5 \cdot \Delta t + (\Delta t)^2$$

$$0 = -10 \cdot \Delta t + (\Delta t)^2$$

$$0 = \Delta t \cdot (\Delta t - 10)$$

Az egyenlet akkor nulla, ha $\Delta t = 0$, vagy $\Delta t - 10 = 0$. Tehát:

$$0 = \Delta t - 10 \Rightarrow \Delta t = 10 \text{ [s]}$$

b) A gépkocsi egyenletesen változó mozgást végez, gyorsulása állandó. Sebessége az idő függvényében:

$$v(\Delta t) = v(0) + a \cdot \Delta t = 5 + 2 \cdot 15 = 35 \left[\frac{\text{m}}{\text{s}} \right]$$

c) Az autó pályakoordináta-idő függvényébe visszaírva Δt -t megkapjuk a megtett távolságot:

$$s_{autó}(\Delta t) = s(0) + v(0) \cdot \Delta t + \frac{a}{2} \cdot (\Delta t)^2 = 0 + 5 \cdot 10 + \frac{2}{2} \cdot 10^2 = 150 \text{ [m]}$$

4. feladat

Egy motoros álló helyzetből indulva 8 másodpercig állandó gyorsulással 144 [km/h] sebességre gyorsul fel. Ezt a sebességét tartva 20 másodpercig halad tovább, majd 5 másodperc alatt állandó lassulással megáll.

Milyen távol állt meg a kiindulás helyétől, ha végig egyenes vonalban haladt?

Megoldás:

1. szakasz: egyenletesen gyorsuló mozgás

$$\Delta t_0 = 8 \text{ [s]}, v(0) = 0 \left[\frac{\text{m}}{\text{s}} \right], v(t_1) = 144 \left[\frac{\text{km}}{\text{h}} \right] = 40 \left[\frac{\text{m}}{\text{s}} \right]$$

$$v(t_1) = v(0) + a_0 \cdot \Delta t_0 \Rightarrow a_0 = \frac{v(t_1) - v(0)}{\Delta t_0} = \frac{40}{8} = 5 \left[\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right]$$

Az 1. szakasz végén a pályakoordináta értéke:

$$s(t_1) = s(0) + v(0) \cdot \Delta t_0 + \frac{a_0}{2} \cdot (\Delta t_0)^2 = 0 + 0 \cdot 8 + \frac{5}{2} \cdot 8^2 = 160 \text{ [m]}$$

2. szakasz: egyenletes mozgás

$$\Delta t_1 = 20 \text{ [s]}$$

A 2. szakasz végén a pályakoordináta értéke:

$$s(t_2) = s(t_1) + v(t_1) \cdot \Delta t_1 = 160 + 40 \cdot 20 = 960 \text{ [m]}$$

3. szakasz: egyenletesen lassuló mozgás

$$\Delta t_2 = 5 \text{ [s]}, v(t_2) = v(t_1) = 40 \left[\frac{\text{m}}{\text{s}} \right], v(t_3) = 0 \left[\frac{\text{m}}{\text{s}} \right]$$

$$a_2 = \frac{v(t_3) - v(t_2)}{\Delta t_2} = \frac{-40}{5} = -8 \left[\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right]$$

A 3. szakasz végén a pályakoordináta értéke:

$$s(t_3) = s(t_2) + v(t_2) \cdot \Delta t_2 + \frac{a_2}{2} \cdot (\Delta t_2)^2 = 960 + 40 \cdot 5 - \frac{8}{2} \cdot 5^2 = 1060 \text{ [m]}$$

Tehát végül a motor 1060 méterre állt meg a kiindulási helyétől.

5. feladat

A metróban két szemben haladó mozgólépcsőn álló egy-egy utas másodpercenként 90 cm-rel kerül közelebb egymáshoz. Az egyik mozgólépcső kétszer akkora sebességgel mozog, mint a másik.

Mennyi idő elteltével érnek egymás mellé az utasok, ha az indulás pillanatában 45 m távolságra voltak egymástól?

Megoldás:

A mozgólépcső egyenletes mozgást végez. Mivel az egyik mozgólépcső kétszer gyorsabban mozog, mint a másik, és a két utas közti távolság másodpercenként összesen 90 cm-rel csökken, így a lassabb lépcső 30 cm-t, a gyorsabb pedig 60 cm-t tesz meg másodpercenként. Tehát a sebességük:

$$v_{gyors} = \frac{0,6}{1} = 0,6 \left[\frac{\text{m}}{\text{s}} \right]$$

$$v_{lassú} = \frac{0,3}{1} = 0,3 \left[\frac{\text{m}}{\text{s}} \right]$$

A kezdeti távolság az utasok között 45 méter volt, tehát:

$$45 = \Delta s = v_{gyors} \cdot \Delta t + v_{lassú} \cdot \Delta t = 0,6 \cdot \Delta t + 0,3 \cdot \Delta t \Rightarrow \Delta t = 50 \text{ [s]}$$

6. feladat

Egy motoros és egy autós versenyeznek. Mindkét jármű álló helyzetből indul, egymás mellől. A motoros állandó $10 \left[\frac{m}{s^2} \right]$ gyorsulással haladva $20 [s]$ alatt ér célba. Az autó szintén állandó gyorsulással halad, így $30 [s]$ alatt ér célba. Mekkora a gyorsulása?

Megoldás:

Először számítsuk ki a versenytáv hosszát:

$$s(t) = s(0) + v(0) \cdot \Delta t + \frac{a_{motor}}{2} \cdot \Delta t^2 \Rightarrow \Delta s = s(t) - s(0) = 0 \cdot 20 + \frac{10}{2} \cdot 20^2 = 2000 [m]$$

Ezt a távot teszi meg a személyautó is. A gyorsulása:

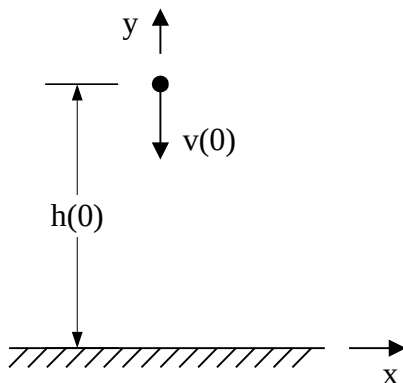
$$\Delta s = v(0) \cdot \Delta t + \frac{a_{autó}}{2} \cdot \Delta t^2$$

$$2000 = 0 \cdot 30 + \frac{a}{2} \cdot 30^2$$

$$a_{autó} = \frac{2000 \cdot 2}{30^2} = 4,44 \left[\frac{m}{s^2} \right]$$

7. feladat

A Föld felszínétől $h(0) = 300 [m]$ magasságból leejtünk $(v(0) = 0 \left[\frac{m}{s} \right])$ egy követ. A közegellenállástól eltekintünk.



a) Milyen magasan lesz a kő a Föld felszínétől $4[s]$ múlva?

b) Mennyi idő alatt ér földet a kő, és mekkora ekkor sebességének nagysága?

Megoldás:

a) A kő egyenletesen változó mozgást végez, gyorsulása állandó. A kőre csak a Föld gravitációs ereje hat, így a kő gyorsulásának nagysága megegyezik a gravitációs gyorsulás nagyságával. Ha a koordináta tengelyt úgy vesszük fel, hogy függőlegesen felfelé mutasson, akkor: $a = -g = -9,81 \left[\frac{m}{s^2} \right]$.

Számítsuk ki, hogy a Föld felszíne fölött milyen magasan lesz a kő $4 [s]$ múlva:

$$h(4) = h(0) + v(0) \cdot 4 + \frac{a}{2} \cdot (4)^2 = 300 + 0 \cdot 4 - \frac{9,81}{2} \cdot 4^2 = 221,52 [m]$$

b) Számítsuk ki, hogy mennyi idő alatt ér földet a kő. Jelöljük a földet érésig eltelt időt Δt -vel:

$$h(\Delta t) = h(0) + v(0) \cdot \Delta t + \frac{a}{2} \cdot (\Delta t)^2$$

$$0 = 300 + 0 \cdot \Delta t - \frac{9,81}{2} \cdot (\Delta t)^2$$

$$\Delta t = \sqrt{\frac{2 \cdot 300}{9,81}} = 7,82 \text{ [s]}$$

Ezt az értéket felhasználva kapjuk meg a kő sebességét:

$$v(\Delta t) = v(0) + a \cdot \Delta t = 0 - 9,81 \cdot 7,82 = -76,71 \left[\frac{\text{m}}{\text{s}} \right]$$

8. feladat

A Föld felszínétől mért 500 [m]-es magasságból elhajítunk függőlegesen lefelé egy követ 10 [m/s] nagyságú kezdősebességgel. A légellenállástól eltekintünk. Ha a koordináta tengelyt úgy vesszük fel, hogy függőlegesen felfelé mutasson, akkor az adatok: $h(0) = 500 \text{ [m]}$, $v(0) = -10 \left[\frac{\text{m}}{\text{s}} \right]$, $a = -g = -9,81 \left[\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right]$.

a) Számítsuk ki, hogy a felszíntől milyen távolságban lesz a kő az eldobás után 4 [s]-al!

b) Számítsuk ki, hogy mennyi idő alatt éri el a kő a Földet!

c) Számítsuk ki becsapódáskor a kő sebességének nagyságát!

Megoldás:

a)

$$h(4) = h(0) + v(0) \cdot 4 - \frac{g}{2} \cdot 4^2 = 500 - 10 \cdot 4 - \frac{9,81}{2} \cdot 4^2 = 381,5 \text{ [m]}$$

b)

Jelölje az eldobás és a becsapódás között eltelt időt Δt .

$$h(\Delta t) = h(0) + v(0) \cdot \Delta t - \frac{g}{2} \cdot \Delta t^2 = 500 - 10 \cdot \Delta t - \frac{9,81}{2} \cdot \Delta t^2 = 0 \text{ [m]}$$

A fenti egyenletből azt kapjuk, hogy:

$$4,905 \cdot \Delta t^2 + 10 \cdot \Delta t - 500 = 0$$

$$\Delta t_{1,2} = \frac{-10 \pm \sqrt{100 - 4 \cdot 4,905 \cdot (-500)}}{9,81} \Rightarrow \Delta t_1 = 9,13 \text{ [s]}, \Delta t_2 = -11,17 \text{ [s]}$$

Így az eltelt idő:

$$\Delta t = 9,13 \text{ [s]}$$

c)

$$|v(\Delta t)| = |v(0) + g \cdot \Delta t| = |-10 - 9,81 \cdot 9,13| = 99,57 \left[\frac{\text{m}}{\text{s}} \right]$$

9. feladat

$v(0)$ kezdősebességgel, függőlegesen felfelé feldobunk egy labdát. Ha a koordináta tengelyt úgy vesszük fel, hogy függőlegesen felfelé mutasson, akkor az adatok: $h(0) = 0 \text{ [m]}$, $v(0) = 35 \left[\frac{\text{m}}{\text{s}} \right]$, $a = -g = -9,81 \left[\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right]$.

a) Milyen magasra repül fel a labda?

b) Az indulástól számítva mennyi idő elteltével esik vissza a földre?

c) Mekkora lesz a földet éréskor a labda sebességének nagysága?

Megoldás:

a) A labda egyenletesen változó mozgást végez.

A labda addig emelkedik, amíg sebessége nullára nem csökken. Sebessége az idő függvényében:

$$v(\Delta t) = v(0) - g \cdot \Delta t$$

$$0 = 35 - 9,81 \cdot \Delta t \Rightarrow \Delta t = \frac{35}{9,81} = 3,57 \text{ [s]}$$

A labda magassága az idő függvényében:

$$h(\Delta t) = h(0) + v(0) \cdot \Delta t - \frac{g}{2} \cdot (\Delta t)^2 = 0 + 35 \cdot 3,57 - \frac{9,81}{2} \cdot 3,57^2 = 62,44 \text{ [m]}$$

b) A labda 3,57 [s] alatt ért el a tetőpontra, itt sebessége nullára csökkent. Innen 0 kezdősebességgel, g gyorsulással kezd el mozogni (gyorsulni) lefelé, és a földet érésig 62,44 [m]-t tesz meg.

A labda pályakoordinátáját az idő függvényében:

$$h(\Delta t^*) = h(0) + v(0) \cdot \Delta t^* + \frac{g}{2} \cdot (\Delta t^*)^2$$

behelyettesítve:

$$0 = 0 + 35 \cdot \Delta t^* - \frac{9,81}{2} \cdot (\Delta t^*)^2 \Rightarrow \Delta t^* = 7,14 \text{ [s]}$$

c) A labda sebessége az idő függvényében:

$$v(\Delta t^*) = v(0) + g \cdot \Delta t^* = 35 - 9,81 \cdot 7,14 = -35 \left[\frac{\text{m}}{\text{s}} \right]$$

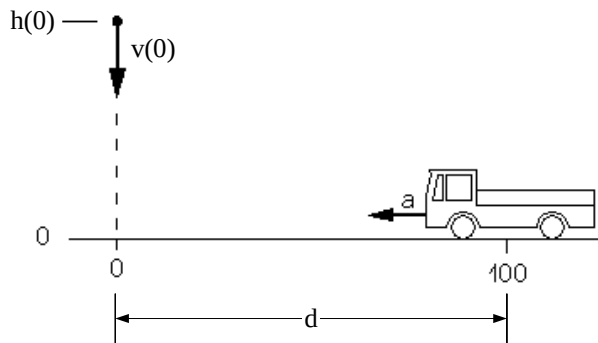
Tehát a labda ugyanakkora nagyságú sebességre gyorsul fel, mint amekkora a kezdősebessége volt.

10. feladat

200 [m] magasságból, 5 [m/s] nagyságú kezdősebességgel ledobunk egy követ. A közegellenállástól eltekintünk.

A talajszinten, tőle vízszintes irányban 100 [m]-re álló teherautó a dobás pillanatában elindul, majd az ábra szerint állandó gyorsulással halad. Mekkora a gyorsulás értéke, ha a kő éppen a teherautó platójára esik? (A teherautót anyagi ponttal modellezzük.)

Adatok: $h(0) = 200 \text{ [m]}$, $v(0) = 5 \left[\frac{\text{m}}{\text{s}} \right]$, $d = 100 \text{ [m]}$



Megoldás:

Számítsuk ki, hogy mennyi idő alatt teszi meg a kő a 200 [m] -t:

$$h(\Delta t) = h(0) + v(0) \cdot \Delta t + \frac{a}{2} \cdot (\Delta t)^2$$

$$200 = 0 + 5 \cdot \Delta t + \frac{9,81}{2} \cdot (\Delta t)^2$$

$$0 = \frac{9,81}{2} \cdot (\Delta t)^2 + 5 \cdot \Delta t - 200$$

$$\Delta t_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot \frac{9,81}{2} \cdot (-200)}}{2 \cdot \frac{9,81}{2}} = 5,9 \text{ [s]}$$

A teherautónak ennyi idő alatt kell megtennie a 100 [m] -t. Ezután számítsuk ki a teherautó gyorsulását:

$$s(\Delta t) = s(0) + v(0) \cdot \Delta t + \frac{a}{2} \cdot (\Delta t)^2$$

$$0 = 100 + 0 \cdot 5,9 - \frac{a}{2} \cdot 5,9^2$$

$$a = \frac{100 \cdot 2}{5,9^2} = 5,75 \left[\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right]$$

11. feladat

Egy repülő felszállás előtt 10 másodpercen keresztül gyorsít, mialatt 450 [m] utat tesz meg.

a) Mekkora a gyorsulása?

b) Mekkora a sebessége a 10 másodperc elteltével?

c) Mennyi utat tett meg az utolsó 2 másodpercben?

Megoldás:

a) A repülő pályakoordinátája az idő függvényében:

$$s(\Delta t) = s(0) + v(0) \cdot \Delta t + \frac{a}{2} \cdot (\Delta t)^2$$

$$450 = 0 + 0 \cdot 10 + \frac{a}{2} \cdot 10^2$$

$$a = \frac{900}{10^2} = 9 \left[\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right]$$

b) A repülő sebessége a 10 másodperc elteltével:

$$v(\Delta t) = v(0) + a \cdot \Delta t = 0 + 9 \cdot 10 = 90 \left[\frac{\text{m}}{\text{s}} \right] = 324 \left[\frac{\text{km}}{\text{h}} \right]$$

c) Az első 8 másodperc alatt megtett út:

$$s(8) = s(0) + v(0) \cdot \Delta t + \frac{a}{2} \cdot (\Delta t)^2 = 0 + 0 \cdot 8 + \frac{9}{2} \cdot 8^2 = 288 \text{ [m]}$$

Az utolsó 2 másodpercben megtett út a két pályakoordináta különbsége:

$$\Delta s[8; 10] = s(10) - s(8) = 450 - 288 = 162 \text{ [m]}$$

12. feladat

Egy személyautó 90 [km/h] állandó sebességgel halad az országúton. A sofőr 65 [m]-re maga előtt meglát egy tehenet az úton. A sofőr reakcióideje 0,5 [s] és az autó lassulásának nagysága 6 [m/s²].

Meg tudja-e állítani az autót az állat előtt?

Megoldás:

$$(90 \text{ [km/h]} = 25 \text{ [m/s]})$$

Először számítsuk ki a reakcióidő alatt megtett utat (ekkor a jármű még nem lassul):

$$\Delta s(\Delta t_r) = v(0) \cdot \Delta t_r = 25 \cdot 0,5 = 12,5 \text{ [m]}$$

Majd számítsuk ki a megálláshoz szükséges időt:

$$v(\Delta t) = v(0) + a \cdot \Delta t$$

$$0 = 25 - 6 \cdot \Delta t$$

$$\Delta t = \frac{25}{6} = 4,16 \text{ [s]}$$

Ezt követően a megállás pillanatáig megtett út:

$$\Delta s(\Delta t) = v(0) \cdot \Delta t + \frac{a}{2} \cdot (\Delta t)^2 = 25 \cdot 4,16 - \frac{6}{2} \cdot 4,16^2 = 52 \text{ [m]}$$

A fékút összesen a reakcióidő alatt megtett és a fékezés pillanatától a megállás pillanatáig megtett út összege:

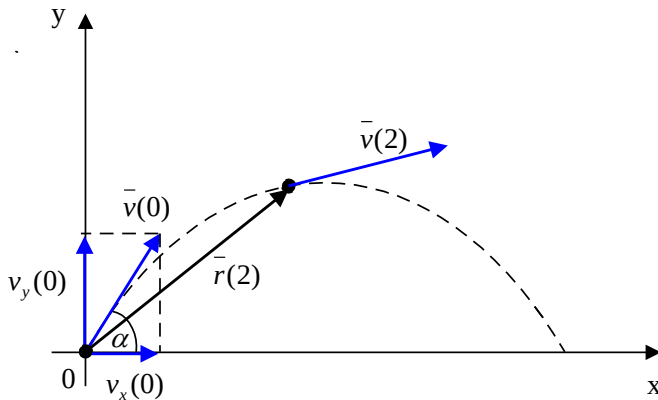
$$\Delta s(\Delta t_r + \Delta t) = \Delta s(\Delta t_r) + \Delta s(\Delta t) = 12,5 + 52 = 64,5 \text{ [m]}$$

Mivel az állat 65 [m]-re van, így a járművezető meg tudja állítani az autót.

3.1.2 Síkmozgás állandó gyorsulással

1. feladat

A talajszintről $v(0)$ nagyságú kezdősebességgel eldobunk egy követ. A kezdősebesség vízszintessel bezárt szöge α .



Adatok: $v(0) = 100 \left[\frac{m}{s} \right]$, $\alpha = 40^\circ$, $g = 9,81 \left[\frac{m}{s^2} \right]$

- Számítsuk ki a kő hely- és sebességvektorát az eldobást követően 2 [s]-al!
- Számítsuk ki ekkor a kő távolságát az eldobás helyétől!
- Számítsuk ki a fenti pillanatban a kő sebességének nagyságát!

Megoldás:

a) Ismert adatok:

$$\vec{r}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} [m], \quad \vec{g} = \begin{pmatrix} 0 \\ -9,81 \end{pmatrix} \left[\frac{m}{s^2} \right],$$

$$\vec{v}(0) = \begin{pmatrix} v_x(0) \\ v_y(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v(0) \cdot \cos \alpha \\ v(0) \cdot \sin \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100 \cdot \cos 40^\circ \\ 100 \cdot \sin 40^\circ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 76,6 \\ 64,28 \end{pmatrix} \left[\frac{m}{s} \right]$$

A kő helyvektora az idő függvényében:

$$\vec{r}(t) = \vec{r}(0) + \vec{v}(0) \cdot t + \frac{\vec{g}}{2} \cdot t^2$$

$$\vec{r}(2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 76,6 \\ 64,28 \end{pmatrix} \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -9,81 \end{pmatrix} \cdot 2^2 = \begin{pmatrix} 76,6 \cdot 2 \\ 64,28 \cdot 2 - \frac{9,81}{2} \cdot 2^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 153,2 \\ 108,94 \end{pmatrix} [m]$$

A kő sebességvektora az indulás után 2 másodperccel:

$$\vec{v}(2) = \vec{v}(0) + \vec{g} \cdot t = \begin{pmatrix} 76,6 \\ 64,28 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -9,81 \end{pmatrix} \cdot 2 = \begin{pmatrix} 76,6 \\ 64,28 - 9,81 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 76,6 \\ 44,66 \end{pmatrix} \left[\frac{m}{s} \right]$$

b)

$$d = |\vec{r}(2) - \vec{r}(0)| = |\vec{r}(2)| = \sqrt{153,2^2 + 108,94^2} = 188 [m]$$

Tehát a kő az eldobás helyétől 188 [m] távolságra kerül.

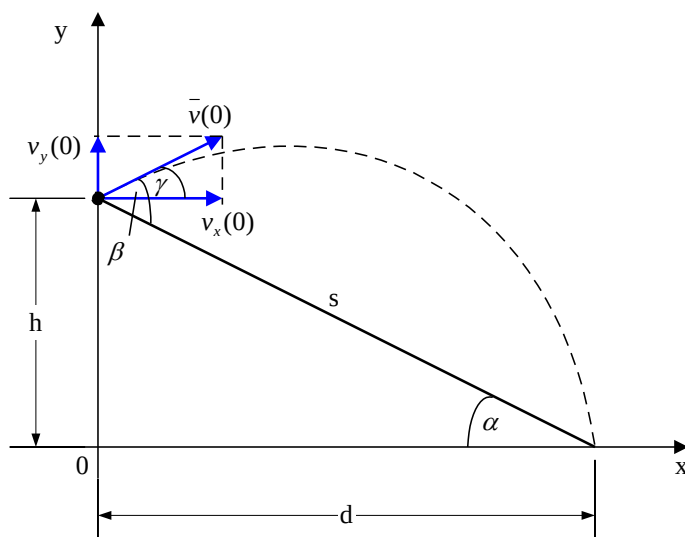
c)

A kő sebességének nagysága az eldobás után 2 másodperccel:

$$|\vec{v}(2)| = \sqrt{76,6^2 + 44,66^2} = 88,67 \left[\frac{m}{s} \right]$$

2. feladat

Egy s hosszúságú lejtő tetejéről egy ágyúval tüzelünk. A lejtő vízszintessel bezárt szöge α , az ágyú csöve a lejtővel β szöget zár be.



Adatok: $s = 100 \text{ [m]}$, $\alpha = 30^\circ$, $\beta = 45^\circ$, $g = 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$

- Számítsuk ki, hogy mekkora a lövedék kezdősebességének nagysága, ha az éppen a lejtő alján csapódik be! (A légellenállástól eltekintünk.)
- Számítsuk ki a lövedék sebességének nagyságát a becsapódáskor!

Megoldás:

a) Jelölje t a lövés és a becsapódás között eltelt idő. Az ismert adatok:

$$\vec{r}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 100 \cdot \sin 30^\circ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 50 \end{pmatrix} \text{ [m]}, \quad \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} d \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100 \cdot \cos 30^\circ \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 86,6 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ [m]}$$

$$\vec{g} = \begin{pmatrix} 0 \\ -9,81 \end{pmatrix} \frac{\text{m}}{\text{s}^2}, \quad \gamma = \beta - \alpha = 45 - 30 = 15^\circ$$

$$\vec{v}(0) = \begin{pmatrix} v_x(0) \\ v_y(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v(0) \cdot \cos \gamma \\ v(0) \cdot \sin \gamma \end{pmatrix} \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Írjuk fel a helyvektort t időpillanatban:

$$\vec{r}(t) = \vec{r}(0) + \vec{v}(0) \cdot t + \frac{\vec{g}}{2} \cdot t^2$$

$$\begin{pmatrix} 86,6 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 50 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v(0) \cdot \cos 15^\circ \\ v(0) \cdot \sin 15^\circ \end{pmatrix} \cdot t + \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -g \end{pmatrix} \cdot t^2 = \begin{pmatrix} v(0) \cdot \cos 15^\circ \cdot t \\ 50 + v(0) \cdot \sin 15^\circ \cdot t - \frac{9,81}{2} \cdot t^2 \end{pmatrix}$$

Innen két egyenletet kapunk:

$$\text{I. } 86,6 = v(0) \cdot \cos 15^\circ \cdot t$$

$$\text{II. } 0 = 50 + v(0) \cdot \sin 15^\circ \cdot t - \frac{9,81}{2} \cdot t^2$$

Ezt az egyenletrendszert megoldva:

$$\text{I. } t = \frac{86,6}{v(0) \cdot \cos 15^\circ}$$

$$\text{II. } 0 = 50 + v(0) \cdot \sin 15^\circ \cdot \frac{86,6}{v(0) \cdot \cos 15^\circ} - \frac{9,81}{2} \cdot \left(\frac{86,6}{v(0) \cdot \cos 15^\circ} \right)^2$$

$$0 = 50 + 86,6 \cdot \tan 15^\circ - \frac{9,81}{2} \cdot \frac{86,6^2}{v(0)^2 \cdot \cos^2 15^\circ} = 73,2 - \frac{39426,4}{v(0)^2}$$

$$v(0)^2 = \frac{39426,4}{73,2}$$

$$v(0) = \sqrt{\frac{39426,4}{73,2}} = 23,2 \left[\frac{\text{m}}{\text{s}} \right]$$

b) A becsapódásig eltelt időt az I. egyenletből kapjuk:

$$t = \frac{86,6}{v(0) \cdot \cos 15^\circ} = \frac{86,6}{23,2 \cdot \cos 15^\circ} = 3,86 \text{ [s]}$$

A sebességvektor, és a sebesség nagysága becsapódáskor:

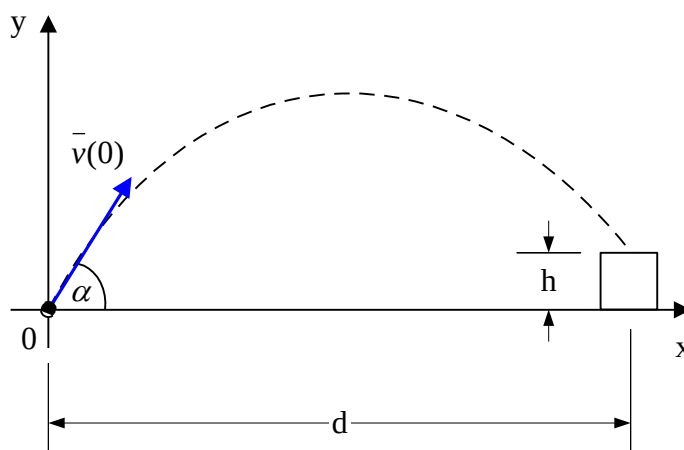
$$\vec{v}(t) = \vec{v}(0) + \vec{g} \cdot t = \begin{pmatrix} 23,2 \cdot \cos 15^\circ \\ 23,2 \cdot \sin 15^\circ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -9,81 \end{pmatrix} \cdot 3,86 = \begin{pmatrix} 22,41 \\ -31,86 \end{pmatrix} \left[\frac{\text{m}}{\text{s}} \right]$$

$$|\vec{v}(t)| = \sqrt{22,41^2 + (-31,86)^2} = 38,95 \left[\frac{\text{m}}{\text{s}} \right]$$

3. feladat

Egy a vízszintessel α szöget bezáró, $v(0)$ nagyságú kezdősebességgel indított kő t idő elteltével a d távolságra lévő, h magasságú doboz tetejére esik.

Adatok: $v(0) = 25 \left[\frac{\text{m}}{\text{s}} \right]$, $t = 3,5 \text{ [s]}$, $\alpha = 45^\circ$



a) Milyen vízszintes irányú távolságra (d) van a doboz az indulási helytől?

b) Milyen magas (h) a doboz?

c) Mennyi idő alatt éri el a kő a maximális magasságot?

d) Mekkora a kő által elért maximális magasság és az ehhez tartozó vízszintes irányú távolság?

Megoldás:

a) Ismert adatok:

$$\vec{g} = \begin{pmatrix} 0 \\ -9,81 \end{pmatrix} \left[\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right], \quad \vec{r}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} [\text{m}], \quad \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} d \\ h \end{pmatrix} [\text{m}]$$

$$\vec{v}(0) = \begin{pmatrix} v_x(0) \\ v_y(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v(0) \cdot \cos \alpha \\ v(0) \cdot \sin \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25 \cdot \cos 45^\circ \\ 25 \cdot \sin 45^\circ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17,67 \\ 17,67 \end{pmatrix} \left[\frac{\text{m}}{\text{s}} \right]$$

A kő helyvektora t időpillanatban:

$$\vec{r}(t) = \vec{r}(0) + \vec{v}(0) \cdot t + \frac{\vec{g}}{2} \cdot t^2$$

$$\begin{pmatrix} d \\ h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 17,67 \\ 17,67 \end{pmatrix} \cdot 3,5 + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ -9,81 \end{pmatrix} \cdot 3,5^2$$

$$I. d = 0 + 17,67 \cdot 3,5 + \frac{0}{2} \cdot 5^2 = 17,67 \cdot 3,5 = 61,85 \text{ [m]}$$

$$II. h = 0 + 17,67 \cdot 3,5 - \frac{9,81}{2} \cdot 3,5^2$$

b) Az előző részben felírt II. egyenlet alapján:

$$h = 0 + 17,67 \cdot 3,5 - \frac{9,81}{2} \cdot 3,5^2 = 1,76 \text{ [m]}$$

c) A kő akkor éri el a legnagyobb magasságot, mikor a sebességének függőleges irányú komponense nullára csökken. Jelölje t_{max} a tetőpont eléréséig tartó időt. Ebből adódóan:

$$\vec{v}(t_{max}) = \vec{v}(0) + \vec{g} \cdot t_{max} \Rightarrow \begin{pmatrix} 17,67 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17,67 \\ 17,67 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -9,81 \end{pmatrix} \cdot t_{max}$$

$$I. 17,67 = 17,67$$

$$II. 0 = 17,67 - 9,81 \cdot t_{max} \Rightarrow t_{max} = \frac{17,67}{9,81} = 1,8 \text{ [s]}$$

d) Így a kő 1,8 másodperc alatt éri el a maximális magasságot. Ennek ismeretében kiszámolható a maximális magasság (h_{max}) értéke:

$$\vec{r}(t_{max}) = \vec{r}(0) + \vec{v}(0) \cdot t_{max} + \frac{\vec{g}}{2} \cdot t_{max}^2$$

$$\begin{pmatrix} d_{hmax} \\ h_{max} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 17,67 \\ 17,67 \end{pmatrix} \cdot 1,8 + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ -9,81 \end{pmatrix} \cdot 1,8^2$$

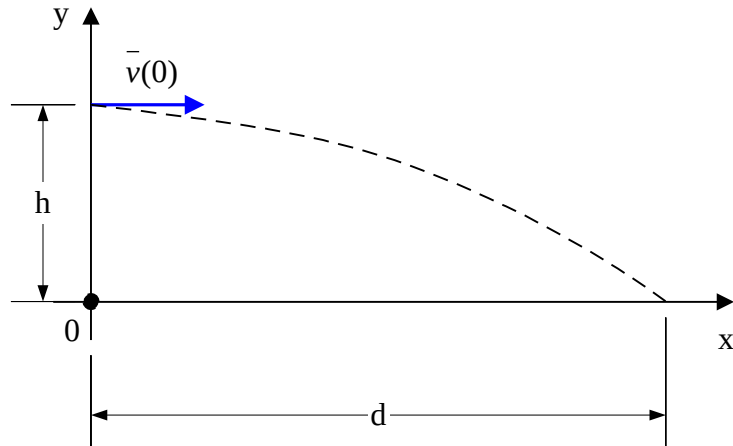
$$I. d_{hmax} = 17,67 \cdot 1,8 = 31,8 \text{ [m]}$$

$$II. h_{max} = 17,67 \cdot 1,8 - \frac{9,81}{2} \cdot 1,8^2 = 15,91 \text{ [m]}$$

4. feladat

Egy h magasságú épület tetejéről vízszintes irányú $v(0)$ nagyságú kezdősebességgel elrúgunk egy labdát.

Adatok: $h = 20 \text{ [m]}$, $v(0) = 20 \left[\frac{\text{m}}{\text{s}} \right]$



- a) Az elrúgás után mennyi idő múlva ér földet a labda?
 b) Mekkora vízszintes irányú d távolságra repül el a labda?
 c) Mekkora lesz a földet éréskor sebességének nagysága?

Megoldás:

a) Ismert adatok:

$$\vec{g} = \begin{pmatrix} 0 \\ -9,81 \end{pmatrix} \left[\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right], \quad \vec{r}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 20 \end{pmatrix} [\text{m}], \quad \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} d \\ 0 \end{pmatrix} [\text{m}]$$

$$\vec{v}(0) = \begin{pmatrix} v_x(0) \\ v_y(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v(0) \cdot \cos \alpha \\ v(0) \cdot \sin \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \cdot \cos 0^\circ \\ 20 \cdot \sin 0^\circ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ 0 \end{pmatrix} \left[\frac{\text{m}}{\text{s}} \right]$$

A labda hely-idő függvénye a becsapódás pillanatában felírva (azaz t az elrúgástól a becsapódásig eltelt idő):

$$\vec{r}(t) = \vec{r}(0) + \vec{v}(0) \cdot t + \frac{\vec{g}}{2} \cdot t^2$$

$$\begin{pmatrix} d \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 20 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 20 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot t + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ -9,81 \end{pmatrix} \cdot t^2$$

I.

$$d = 0 + 20 \cdot t + \frac{0}{2} \cdot t^2 = 20 \cdot t$$

II.

$$0 = 20 + 0 \cdot t - \frac{9,81}{2} \cdot t^2 \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2 \cdot 20}{9,81}} = 2,02 [\text{s}]$$

b) Az előző részben felírt I. egyenlet alapján:

$$d = 20 \cdot t = 20 \cdot 2,02 = 40,4 [\text{m}]$$

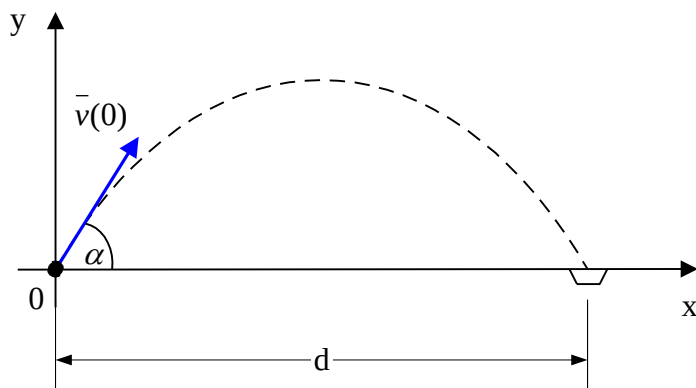
c) A labda sebességvektora a t időpillanatban:

$$\vec{v}(t) = \vec{v}(0) + \vec{g} \cdot t = \begin{pmatrix} 20 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -9,81 \end{pmatrix} \cdot 2,02 = \begin{pmatrix} 20 + 0 \cdot 2,02 \\ 0 - 9,81 \cdot 2,02 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ -19,82 \end{pmatrix} \left[\frac{\text{m}}{\text{s}} \right]$$

$$|\vec{v}(t)| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{20^2 + (-19,82)^2} = 28,16 \left[\frac{\text{m}}{\text{s}} \right]$$

5. feladat

Katonák vízszintes terepen felállított aknavetőjükkel tüzelnek egy lövészárók irányába. A lövedék kezdősebességének nagysága $50 \left[\frac{m}{s} \right]$, amellyel szeretnének beletalálni az aknavetőtől 125 m-re lévő ellenséges lövészárókba. (A légellenállástól eltekintünk.)



A vízszinteshez képest milyen α szögben kell beállítaniuk az aknavető csövét, hogy a lövedék becsapódjon a lövészárókba?

Megoldás:

Ismert adatok:

$$\vec{g} = \begin{pmatrix} 0 \\ -9,81 \end{pmatrix} \left[\frac{m}{s^2} \right], \quad \vec{r}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} [m], \quad \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} 125 \\ 0 \end{pmatrix} [m]$$

$$\vec{v}(0) = \begin{pmatrix} v_x(0) \\ v_y(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v(0) \cdot \cos \alpha \\ v(0) \cdot \sin \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 50 \cdot \cos \alpha \\ 50 \cdot \sin \alpha \end{pmatrix} \left[\frac{m}{s} \right],$$

A lövedék hely-idő függvénye a becsapódás pillanatában felírva (azaz t a kilövéstől a becsapódásig eltelt idő):

$$\vec{r}(t) = \vec{r}(0) + \vec{v}(0) \cdot t + \frac{\vec{g}}{2} \cdot t^2$$

$$\begin{pmatrix} 125 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 50 \cdot \cos \alpha \\ 50 \cdot \sin \alpha \end{pmatrix} \cdot t + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ -9,81 \end{pmatrix} \cdot t^2$$

$$I. 125 = 50 \cdot \cos \alpha \cdot t \Rightarrow t = \frac{125}{50 \cdot \cos \alpha}$$

$$II. 0 = 50 \cdot \sin \alpha \cdot t - \frac{9,81}{2} \cdot t^2$$

$$0 = 50 \cdot \sin \alpha \cdot \frac{125}{50 \cdot \cos \alpha} - \frac{9,81}{2} \cdot \left(\frac{125}{50 \cdot \cos \alpha} \right)^2$$

Alkalmazva, hogy:

$$\frac{1}{\cos^2 \alpha} = \tan^2 \alpha + 1 \Rightarrow 0 = 125 \cdot \tan \alpha - \frac{9,81}{2} \cdot \frac{125^2}{50^2} \cdot \tan^2 \alpha + 1$$

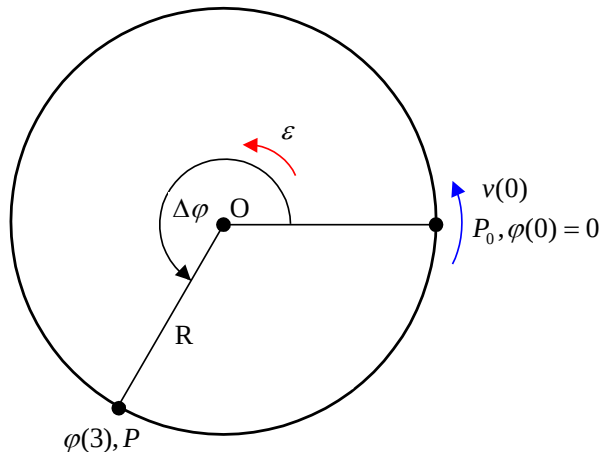
Az így kapott másodfokú egyenletet megoldva:

$$\alpha_1 = 75,31^\circ, \quad \alpha_2 = 14,69^\circ$$

3.1.3 Egyenletes és egyenletesen változó körmozgás

1. feladat

Egy anyagi pont a körpálya P_0 pontjából $v(0)$ pályamenti sebességgel indulva egyenletesen változó körmozgást végez ε szöggyorsulással.



Adatok: $R = 5 \text{ [m]}$, $v(0) = 3 \left[\frac{\text{m}}{\text{s}} \right]$, $\varepsilon = \frac{2}{5} \left[\frac{\text{rad}}{\text{s}^2} \right]$

- Számítsuk ki az anyagi pont pályamenti és szögsebességét az indulás után 3 [s]-al!
- Számítsuk ki a szögkoordináta értékét a fenti pillanatban! ($\varphi(0) = 0$)
- Számítsuk ki az érintő- és normálirányú gyorsulást, valamint a gyorsulásvektor nagyságát az indulás után 3 [s]-al!

Megoldás:

a)

$$\omega(0) = \frac{v(0)}{R} = \frac{3}{5} \left[\frac{\text{rad}}{\text{s}} \right]$$

$$\omega(3) = \omega(0) + \varepsilon \cdot 3 = \frac{3}{5} + \frac{2}{5} \cdot 3 = \frac{9}{5} = 1,8 \left[\frac{\text{rad}}{\text{s}} \right]$$

$$v(3) = \omega(3) \cdot R = 9 \left[\frac{\text{m}}{\text{s}} \right]$$

b)

$$\varphi(3) = \underbrace{\varphi(0)}_0 + \omega(0) \cdot 3 + \frac{\varepsilon}{2} \cdot 3^2 = \frac{3}{5} \cdot 3 + \frac{1}{5} \cdot 3^2 = \frac{9}{5} + \frac{9}{5} = \frac{18}{5} = 3,6 \text{ [rad]} = 206,3^\circ$$

c)

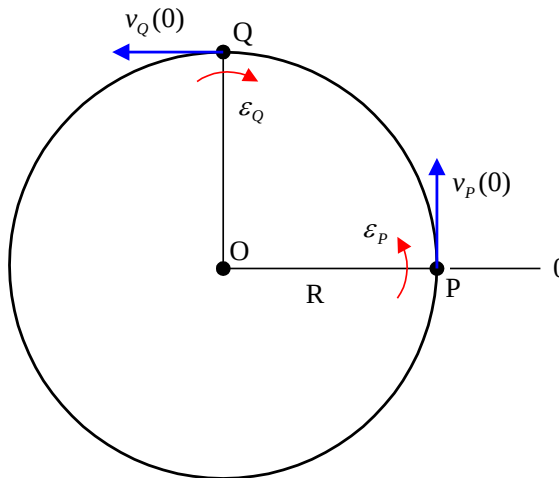
$$a_e(3) = a = \varepsilon \cdot R = 2 \left[\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right]$$

$$a_n(3) = \frac{v^2(3)}{R} = \frac{9^2}{5} = \frac{81}{5} = 16,2 \left[\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right]$$

$$|\vec{a}(3)| = \sqrt{2^2 + 16,2^2} = 16,32 \left[\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right]$$

2. feladat

Az R sugarú körpálya P és Q pontjából egyidejűleg elindul két anyagi pont. Az egyik egyenletesen gyorsuló, a másik egyenletesen lassuló körmozgást végez. A kezdő pályamenti sebességeket $v_P(0)$ és $v_Q(0)$, a szöggyorsulásokat pedig ε_P és ε_Q jelöli.



Adatok: $v_P(0) = 4 \left[\frac{m}{s} \right]$, $v_Q(0) = 10 \left[\frac{m}{s} \right]$, $\varepsilon_P = 3 \left[\frac{rad}{s^2} \right]$, $\varepsilon_Q = -2 \left[\frac{rad}{s^2} \right]$, $R = 3 [m]$.

- Mennyi idő (t) múlva éri utol a P pontból induló anyagi pont a Q pontból indulót? Számítsuk ki a szögkoordináta értékét ebben a pillanatban!
- Számítsuk ki a szögsebességek értékét a fenti pillanatban!
- Számítsuk ki ekkor az érintő és normál irányú gyorsulásokat, valamint a gyorsulásvektorok nagyságát!

Megoldás:

a)

$$\varphi_P(0) = 0, \varphi_Q(0) = \frac{\pi}{2} [rad]$$

Amikor utoléri egymás a két pont, szögkoordinátáik megegyeznek:

$$\varphi_P(t) = \varphi_Q(t)$$

A kezdeti szögsebességek:

$$\omega_P(0) = \frac{v_P(0)}{R} = \frac{4}{3} \left[\frac{rad}{s} \right]$$

$$\omega_Q(0) = \frac{v_Q(0)}{R} = \frac{10}{3} \left[\frac{rad}{s} \right]$$

A két pont szögkoordinátái az idő függvényében:

$$\varphi_P(t) = \varphi_P(0) + \omega_P(0) \cdot t + \frac{\varepsilon_P}{2} \cdot t^2 = 0 + \frac{4}{3} \cdot t + \frac{3}{2} \cdot t^2$$

$$\varphi_Q(t) = \varphi_Q(0) + \omega_Q(0) \cdot t + \frac{\varepsilon_Q}{2} \cdot t^2 = \frac{\pi}{2} + \frac{10}{3} \cdot t - \frac{2}{2} \cdot t^2$$

Egymással egyenlővé téve a két egyenletet:

$$\frac{4}{3} \cdot t + \frac{3}{2} \cdot t^2 = \frac{\pi}{2} + \frac{10}{3} \cdot t - \frac{2}{2} \cdot t^2$$

$$\frac{5}{2} \cdot t^2 - 2 \cdot t - \frac{\pi}{2} = 0 \Rightarrow t = 1,29 \text{ [s]}$$

$$\varphi_P(t) = \varphi_P(0) + \omega_P(0) \cdot t + \frac{\varepsilon_P}{2} \cdot t^2 = 0 + \frac{4}{3} \cdot 1,29 + \frac{3}{2} \cdot 1,29^2 = 4,22 \text{ [rad]} = 241,79^\circ$$

b)

$$\omega_P(t) = \omega_P(0) + \varepsilon_P \cdot t = \frac{4}{3} + 3 \cdot 1,29 = 5,2 \left[\frac{\text{rad}}{\text{s}} \right]$$

$$\omega_Q(t) = \omega_Q(0) + \varepsilon_Q \cdot t = \frac{10}{3} - 2 \cdot 1,29 = 0,75 \left[\frac{\text{rad}}{\text{s}} \right]$$

c)

$$a_{Pe}(t) = a_P = \varepsilon_P \cdot R = 9 \left[\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right]$$

$$a_{Pn}(t) = \frac{v_P^2(t)}{R} = \omega_P^2(t) \cdot R = 5,2^2 \cdot 3 = 81 \left[\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right]$$

$$a_{Qe}(t) = a_Q = \varepsilon_Q \cdot R = -6 \left[\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right]$$

$$a_{Qn}(t) = \frac{v_Q^2(t)}{R} = \omega_Q^2(t) \cdot R = 1,72 \left[\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right]$$

$$|\bar{a}_P(t)| = \sqrt{a_{Pe}^2(t) + a_{Pn}^2(t)} = \sqrt{9^2 + 81^2} = 81,5 \left[\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right]$$

$$|\bar{a}_Q(t)| = \sqrt{a_{Qe}^2(t) + a_{Qn}^2(t)} = \sqrt{(-6)^2 + 1,72^2} = 6,24 \left[\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right]$$

3. feladat

Mekkora sugarú körpályán mozog az a pontszerű test, amely $v(0) = 2,7 \left[\frac{\text{m}}{\text{s}} \right]$ pályamenti sebességgel indulva, és $\varepsilon = 1,3 \left[\frac{\text{rad}}{\text{s}^2} \right]$ állandó szöggyorsulással haladva, 2 [s] alatt 180 fokot fordul el?

Adatok: $\varepsilon = 1,3 \left[\frac{\text{rad}}{\text{s}^2} \right]$, $t = 2 \text{ [s]}$, $\Delta\varphi = 180^\circ$, $v(0) = 2,7 \left[\frac{\text{m}}{\text{s}} \right]$

Megoldás:

A szögelfordulás nagyságát először is váltjuk át radiánba:

$$\varphi(t) = 180^\circ = 180 \cdot \frac{\pi}{180} [\text{rad}] = \pi [\text{rad}]$$

A pillanatnyi szögkoordinátájából kiszámítható a kezdő szögsebesség nagysága:

$$\Delta\varphi = \omega(0) \cdot t + \frac{\varepsilon}{2} \cdot t^2$$

$$\pi = \omega(0) \cdot 2 + \frac{1,3}{2} \cdot 2^2$$

$$\omega(0) = \frac{\pi - (0,65 \cdot 2^2)}{2} = 0,27 \left[\frac{\text{rad}}{\text{s}} \right]$$

A kezdő szögsebesség és a kerületi sebesség között a pálya sugara teremt kapcsolatot:

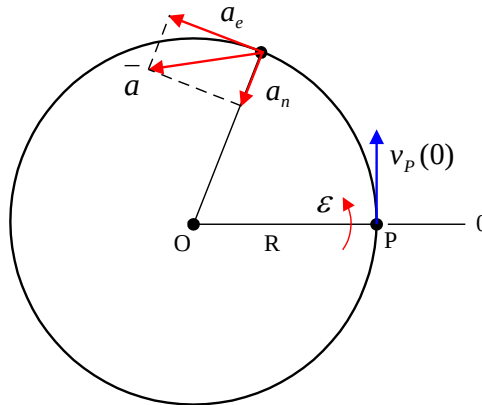
$$\omega(0) = \frac{v(0)}{R} \Rightarrow R = \frac{v(0)}{\omega(0)} = \frac{2,7}{0,27} = 10 \text{ [m]}$$

4. feladat

Egy R sugarú körpályán a P anyagi pont egyenletesen gyorsuló körmozgást végez.

Mekkora lesz az indulás után 3 másodperccel a vektoriális gyorsulásának nagysága?

Adatok: $v(0) = 5 \left[\frac{\text{m}}{\text{s}} \right]$, $R = 5[\text{m}]$, $\varepsilon = 4 \left[\frac{\text{rad}}{\text{s}^2} \right]$



Megoldás:

A vektoriális gyorsulás kiszámításához először meg kell határoznunk az érintő és a normál irányú gyorsulást. Az érintő irányú gyorsulás:

$$a_e = \varepsilon \cdot R = 4 \cdot 5 = 20 \left[\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right]$$

A normál irányú gyorsulásra az alábbi összefüggés érvényes:

$$a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{(\omega \cdot R)^2}{R} = \omega^2 \cdot R$$

Ennek kiszámításához először a szögsebességet kell kiszámolnunk az indulás után 3 másodperccel:

$$\omega(t) = \omega(0) + \varepsilon \cdot t = \frac{v(0)}{R} + \varepsilon \cdot t = \frac{5}{5} + 4 \cdot 3 = 13 \left[\frac{\text{rad}}{\text{s}} \right]$$

Ezt követően kiszámolhatjuk a normál irányú gyorsulást:

$$a_n = \omega^2(t) \cdot R = 13^2 \cdot 5 = 845 \left[\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right]$$

Végül a vektoriális gyorsulás nagysága:

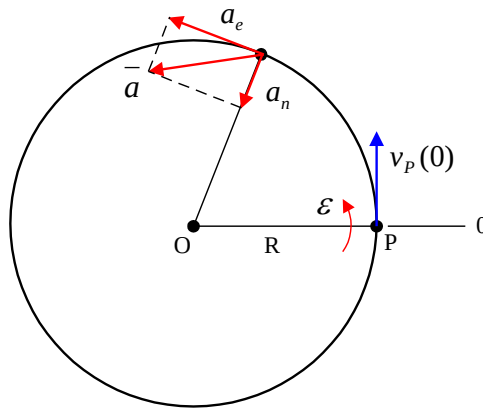
$$a = \sqrt{a_e^2 + a_n^2} = \sqrt{20^2 + 845^2} = 845,24 \left[\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right]$$

5. feladat

Egy R sugarú körpályán egy P anyagi pont egyenletesen gyorsuló körmozgást végez. Az indulás után 3 másodperccel a pont vektoriális gyorsulásának nagysága $500 \text{ [m/s}^2\text{]}$.

Mekkora a pont kezdeti pályamenti sebességének nagysága?

Adatok: $|\vec{a}(3)| = a(3) = 500 \left[\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right]$, $R = 10[\text{m}]$, $\varepsilon = 2 \left[\frac{\text{rad}}{\text{s}^2} \right]$



Megoldás:

A kezdeti pályamenti sebesség meghatározásához ki kell számolnunk a kezdeti szögsebességet. Ehhez először az $\bar{a}(3)$ gyorsulás nagyságából kiszámoljuk a 3 másodperchez tartozó szögsebességet:

$$a_e = \varepsilon \cdot R = 2 \cdot 10 = 20 \left[\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right]$$

$$a(3) = \sqrt{a_e^2 + a_n^2(3)} \Rightarrow a_n(3) = \sqrt{a^2(3) - a_e^2} = \sqrt{500^2 - 20^2} = 499,6 \left[\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right]$$

$$a_n(3) = \omega^2(3) \cdot R \Rightarrow \omega(3) = \sqrt{\frac{a_n(3)}{R}} = \sqrt{\frac{499,6}{10}} = 7,07 \left[\frac{\text{rad}}{\text{s}} \right]$$

Majd a 3 másodperchez tartozó szögsebesség ismeretében kiszámíthatjuk a keresett kezdeti pályamenti sebességet:

$$\omega(3) = \omega(0) + \varepsilon \cdot t = \frac{v(0)}{R} + \varepsilon \cdot t \Rightarrow$$

$$v(0) = (\omega(3) - \varepsilon \cdot t) \cdot R = (7,07 - 2 \cdot 3) \cdot 10 = 10,7 \left[\frac{\text{m}}{\text{s}} \right]$$

6. feladat

Egy repülőgép $v=720$ [km/h] állandó nagyságú sebességgel 25 [km] sugarú köríven fordul.

- Mekkora és milyen irányú a gyorsulása ekkor?
- Mekkora a szögsebessége?
- Mennyi idő alatt fordul északi irányból nyugati irányba?
- Mennyi utat tesz meg ez alatt?

Megoldás:

$$(720 \text{ [km/h]} = 200 \text{ [m/s]})$$

a) Mivel egyenletes körmozgást végez, így szöggyorsulása és egyben érintő irányú gyorsulása is nulla. Vektoriális gyorsulásának nagysága egyenlő a normál irányú gyorsulással:

$$a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{200^2}{25000} = 1,6 \left[\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right]$$

$$|\vec{a}| = a = \sqrt{a_e^2 + a_n^2} = \sqrt{0^2 + 1,6^2} = 1,6 \left[\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right]$$

b) A repülő szögsebessége:

$$\omega = \frac{v}{R} = \frac{200}{25000} = 0,008 \left[\frac{\text{rad}}{\text{s}} \right]$$

c) Miközben északiból nyugati irányba fordul a szögelfordulása: $90^\circ = \frac{\pi}{2} [\text{rad}]$.

$$\Delta\varphi = \omega \cdot \Delta t$$

$$\frac{\pi}{2} = 0,008 \cdot \Delta t$$

$$\Delta t = \frac{\pi}{2 \cdot 0,008} = 196,35 [\text{s}]$$

d) A 90 fokos elfordulás során a repülő egy negyedkört tesz meg:

$$K = 2 \cdot R \cdot \pi \Rightarrow \Delta s = \frac{2 \cdot R \cdot \pi}{4} = \frac{2 \cdot 25000 \cdot \pi}{4} = 39269,9 [\text{m}]$$

7. feladat

Egy forgó kerék két pontja $v_1=14 [\text{m/s}]$ és $v_2=8 [\text{m/s}]$ nagyságú sebességgel körpályán halad. A két pont ugyanarra a sugárra esik, közöttük a távolság 25 [cm]. Mekkora a kerék szögsebessége?

Megoldás:

Először fejezzük ki mindkét esetben a sugarat:

$$v_1 = \omega \cdot R_1 \Rightarrow R_1 = \frac{v_1}{\omega}$$

$$v_2 = \omega \cdot R_2 \Rightarrow R_2 = \frac{v_2}{\omega}$$

A két pont közötti távolság:

$$\Delta R = R_1 - R_2 \Rightarrow \Delta R = \frac{v_1}{\omega} - \frac{v_2}{\omega}$$

Ebből fejezzük ki a szögsebességet:

$$\omega = \frac{v_1 - v_2}{\Delta R} = \frac{14 - 8}{0,25} = 24 \left[\frac{\text{rad}}{\text{s}} \right]$$

8. feladat

Mekkora sebességgel mozog a toronyóra kismutatójának a hegye, ha a mutató hossza 80 cm?

Megoldás:

A kismutató 1 kört 12 óra alatt tesz meg, szögsebessége:

$$\omega = \frac{2 \cdot \pi}{12 \cdot 3600} = 1,45 \cdot 10^{-4} \left[\frac{\text{rad}}{\text{s}} \right]$$

A kerületi sebessége:

$$v = \omega \cdot R = 1,45 \cdot 10^{-4} \cdot 0,8 = 1,16 \cdot 10^{-4} \left[\frac{\text{m}}{\text{s}} \right]$$

9. feladat

Egy motoros álló helyzetből indulva egyenletesen növekvő sebességgel 30 [m] sugarú vízszintes körpályán mozog. Érintő irányú (pályamenti) gyorsulása $4 \left[\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right]$.

a) Mennyi idő múlva lesz vektoriális gyorsulásának nagysága kétszerese a kezdőértéknek?

b) Mekkora ez alatt a megtett út?

Megoldás:

a) Először is lássuk, hogy mekkora a gyorsulás kezdeti értéke. Mivel álló helyzetből indul, így a kezdeti normál irányú gyorsulás nulla, tehát a kezdeti gyorsulás nagysága egyenlő az érintő irányú gyorsulásával, ami állandó a mozgás során:

$$a_e = a = 4 \left[\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right]$$

$$a_n(0) = 0 \left[\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right]$$

Így a kezdeti gyorsulás kétszerese:

$$|\vec{a}(t)| = 2 \cdot 4 = 8 \left[\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right]$$

Ennek ismeretében számítsuk ki, hogy a kétszeres kezdeti gyorsuláshoz mekkora szögsebesség tartozik:

$$|\vec{a}(t)| = \sqrt{a_e^2 + a_n^2}$$

$$8 = \sqrt{4^2 + a_n^2(t)} = \sqrt{4^2 + (\omega^2(t) \cdot R)^2} \Rightarrow \omega(t) = \sqrt[4]{\frac{64 - 16}{30^2}} = 0,48 \left[\frac{\text{rad}}{\text{s}} \right]$$

Ezután számítsuk ki a szöggyorsulást:

$$\varepsilon = \frac{a_e}{R} = \frac{4}{30} = 0,133 \left[\frac{\text{rad}}{\text{s}^2} \right]$$

Az imént kiszámolt szögsebesség eléréséhez szükséges idő:

$$\omega(t) = \omega(0) + \varepsilon \cdot t = 0 + 0,133 \cdot t \Rightarrow t = \frac{0,48}{0,133} = 3,6 \text{ [s]}$$

b) A fenti idő alatt a szögelfordulás:

$$\Delta\varphi = \varphi(t) - \varphi(0) = \omega(0) \cdot t + \frac{\varepsilon}{2} \cdot t^2$$

$$\Delta\varphi = 0 \cdot 3,6 + \frac{0,133}{2} \cdot 3,6^2 = 0,862 \text{ [rad]} = 49,39^\circ$$

Az ez idő alatt megtett út:

$$\Delta s = R \cdot 0,862 = 25,86 \text{ [m]}$$

10. feladat

2,4 m átmérőjű körpályán, egyenletes sebességgel halad egy vasútmodell. 6 perc alatt 24 teljes kört tesz meg.

Mekkora a modell normál irányú gyorsulása?

Megoldás:

A normál irányú gyorsulás meghatározásához először kiszámoljuk a szögsebességet. Mivel a vasútmodell egyenletes körmozgást végez, így a szögsebessége állandó.

$$\varphi(t) = \varphi(0) + \omega \cdot t$$

$$\omega = \frac{\varphi(t) - \varphi(0)}{t} = \frac{24 \cdot 2\pi}{6 \cdot 60} = 0,419 \left[\frac{\text{rad}}{\text{s}} \right]$$

Ennek ismeretében a normál irányú gyorsulás:

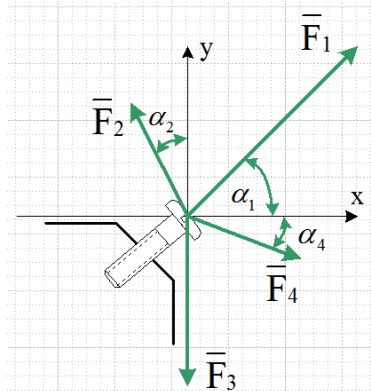
$$a_n = \omega^2 \cdot R = 0,419^2 \cdot 1,2 = 0,21 \left[\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right]$$

3.2 Anyagi pont kinetikája

3.2.1 Newton törvényeinek alkalmazása

1. feladat

Egy csavarfejre négy erő hat az alábbi ábra szerint:



Adatok: $F_1 = 150[\text{N}]$, $F_2 = 80[\text{N}]$, $F_3 = 110[\text{N}]$, $F_4 = 100[\text{N}]$, $\alpha_1 = 30^\circ$, $\alpha_2 = 20^\circ$, $\alpha_4 = 15^\circ$.

- Számítsuk ki az erőrendszer eredő erejét!
- Számítsuk ki az eredő erő nagyságát!

Megoldás:

a)

$$\bar{F}_1 = \begin{pmatrix} F_1 \cdot \cos \alpha_1 \\ F_1 \cdot \sin \alpha_1 \end{pmatrix} [\text{N}]$$

$$\bar{F}_2 = \begin{pmatrix} -F_2 \cdot \sin \alpha_2 \\ F_2 \cdot \cos \alpha_2 \end{pmatrix} [\text{N}]$$

$$\bar{F}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -F_3 \end{pmatrix} [N]$$

$$\bar{F}_4 = \begin{pmatrix} F_4 \cdot \cos \alpha_4 \\ -F_4 \cdot \sin \alpha_4 \end{pmatrix} [N]$$

$$\bar{F} = \sum_i \bar{F}_i = \bar{F}_1 + \bar{F}_2 + \bar{F}_3 + \bar{F}_4 = \begin{pmatrix} F_1 \cdot \cos \alpha_1 \\ F_1 \cdot \sin \alpha_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -F_2 \cdot \sin \alpha_2 \\ F_2 \cdot \cos \alpha_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -F_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} F_4 \cdot \cos \alpha_4 \\ -F_4 \cdot \sin \alpha_4 \end{pmatrix}$$

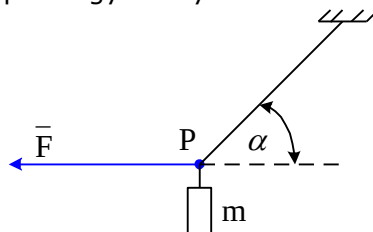
$$= \begin{pmatrix} 200,26 \\ 14,29 \end{pmatrix} [N]$$

b)

$$F = |\bar{F}| = \sqrt{(200,26)^2 + (14,29)^2} = 200,78 [N]$$

2. feladat

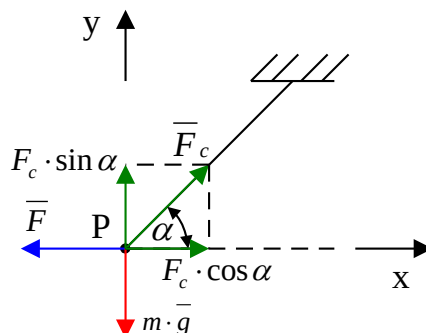
Az ábrán látható P anyagi pont egyensúlyban van.



Adatok: $F = 150 [N]$, $\alpha = 30^\circ$, $g = 9,81 \left[\frac{m}{s^2} \right]$.

Számítsuk ki a kötélen ébredő erő nagyságát és az anyagi pont tömegét!

Megoldás:



$$\bar{F} = \begin{pmatrix} -F \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -150 \\ 0 \end{pmatrix} [N]$$

$$\bar{F}_c = \begin{pmatrix} F_c \cdot \cos 30^\circ \\ F_c \cdot \sin 30^\circ \end{pmatrix} [N]$$

$$m \cdot \bar{g} = \begin{pmatrix} 0 \\ -m \cdot 9,81 \end{pmatrix} [N]$$

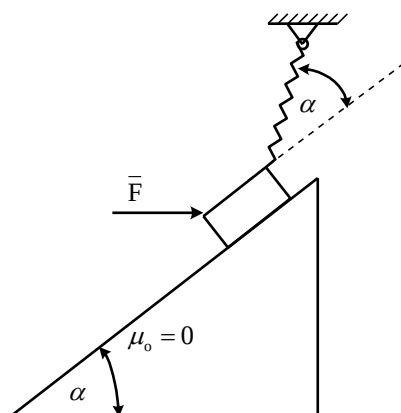
$$\bar{F} = \sum_i \bar{F}_i = \begin{pmatrix} -150 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} F_c \cdot \cos 30^\circ \\ F_c \cdot \sin 30^\circ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -m \cdot 9,81 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$I. \quad -150 + F_c \cdot \cos 30^\circ = 0 \Rightarrow F_c = 173,2 \text{ [N]}$$

$$II. \quad F_c \cdot \sin 30^\circ - m \cdot 9,81 = 0 \Rightarrow m = 8,83 \text{ [kg]}$$

3. feladat

Az ábrán látható, sima felületű lejtőn elhelyezkedő m tömegű anyagi pont egyensúlyban van. A rugó Δr deformációja és D rugómerevsége ismert.



Adatok: $m = 40 \text{ [kg]}$, $\alpha = 30^\circ$, $D = 1000 \left[\frac{\text{N}}{\text{mm}} \right]$, $\Delta r = 2 \text{ [mm]}$, $g = 9,81 \left[\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right]$.

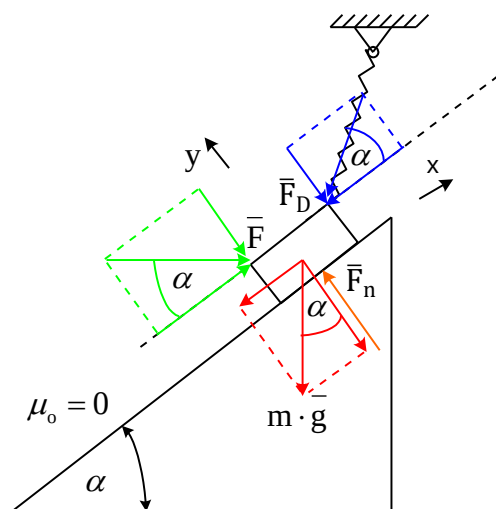
a) Számítsuk ki az $\bar{F}$ erő nagyságát ($\bar{F}$ vízszintes irányú)!

b) Számítsuk ki a lejtő által kifejtett kényszererő nagyságát!

Megoldás:

a) és b)

Mivel a lejtő tökéletesen sima, a kényszererő merőleges a lejtő felületére. Ez alapján az anyagi pontra ható erők:



$$\vec{F} = \begin{pmatrix} F \cdot \cos 30^\circ \\ -F \cdot \sin 30^\circ \end{pmatrix} [N]$$

$$m \cdot \vec{g} = \begin{pmatrix} -40 \cdot 9,81 \cdot \sin 30^\circ \\ -40 \cdot 9,81 \cdot \cos 30^\circ \end{pmatrix} [N]$$

$$\vec{F}_D = \begin{pmatrix} -D \cdot \Delta r \cdot \cos \alpha \\ -D \cdot \Delta r \cdot \sin \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2000 \cdot \cos 30^\circ \\ -2000 \cdot \sin 30^\circ \end{pmatrix} [N]$$

$$\vec{F}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ F_n \end{pmatrix} [N]$$

Mivel az anyagi pont egyensúlyban van, a ráható eredő erő zérus:

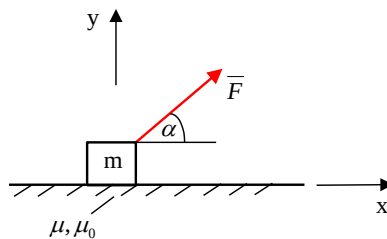
$$\vec{F}_{eredő} = \sum_i \vec{F}_i = \begin{pmatrix} F \cdot \cos 30^\circ \\ -F \cdot \sin 30^\circ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -40 \cdot 9,81 \cdot \sin 30^\circ \\ -40 \cdot 9,81 \cdot \cos 30^\circ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2000 \cdot \cos 30^\circ \\ -2000 \cdot \sin 30^\circ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ F_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$I. \quad F \cdot \cos 30^\circ - 40 \cdot 9,81 \cdot \sin 30^\circ - 2000 \cdot \cos 30^\circ = 0 \Rightarrow F = 2227 [N]$$

$$II. \quad -F \cdot \sin 30^\circ - 40 \cdot 9,81 \cdot \cos 30^\circ - 2000 \cdot \sin 30^\circ + F_n = 0 \Rightarrow F_n = 2453,3 [N]$$

4. feladat

Egy vízszintes, érdes síkfelületen nyugvó anyagi pontra $\vec{F}$ erővel hatunk az ábra szerint.

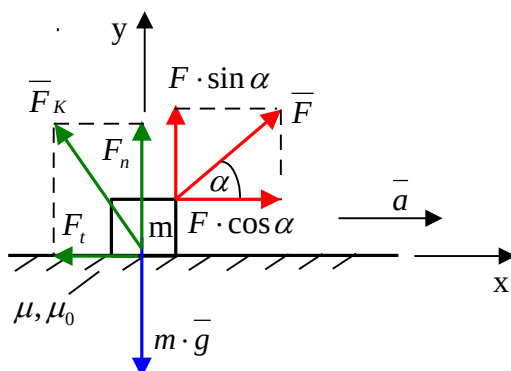


Adatok: $F = 1500 [N]$, $m = 1000 [kg]$, $\mu_0 = 0,15$, $\mu = 0,1$, $\alpha = 15^\circ$

- Az anyagi pont elmozdul, vagy nyugalomban marad?
- Ha elmozdul, akkor számítsuk ki gyorsulásának nagyságát, valamint a mozgás során a talaj által rá kifejtett kényszererő nagyságát!
- Ha az anyagi pont nyugalomból indult, számítsuk ki sebességének nagyságát az indulás után 5 másodperccel!
- Számítsuk ki, hogy mekkora távolságot tesz meg az anyagi pont a fenti 5 másodperc alatt!

Megoldás:

Rajzoljuk be a testekre ható erőket:



a) Feltételezzük az anyagi pont egyensúlyát, majd megvizsgáljuk, hogy az milyen F értékek esetén áll fenn.

Egyensúlyi egyenletek:

$$\sum_i \vec{F}_i = \vec{F} + m \cdot \vec{g} + \vec{F}_K = \vec{0}$$

$$\begin{pmatrix} F \cdot \cos \alpha \\ F \cdot \sin \alpha \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -m \cdot g \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -F_t \\ F_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{I. } F \cdot \cos \alpha - F_t = 0 \Rightarrow F_t = F \cdot \cos \alpha$$

$$\text{II. } F \cdot \sin \alpha - m \cdot g + F_n = 0 \Rightarrow F_n = m \cdot g - F \cdot \sin \alpha$$

Az anyagi pont egyensúlyban van akkor, és csak akkor, ha:

$$|F_t| \leq \mu_0 \cdot F_n$$

$$-\mu_0 \cdot F_n \leq F_t \leq \mu_0 \cdot F_n$$

1. eset:

$$-\mu_0 \cdot F_n \leq F_t$$

$$-\mu_0 \cdot (m \cdot g - F \cdot \sin \alpha) \leq F \cdot \cos \alpha$$

$$-\mu_0 \cdot m \cdot g + \mu_0 \cdot F \cdot \sin \alpha \leq F \cdot \cos \alpha$$

$$-\mu_0 \cdot m \cdot g \leq F \cdot (\cos \alpha - \mu_0 \cdot \sin \alpha)$$

$$-1481,4 [N] \leq F$$

2. eset:

$$F_t \leq \mu_0 \cdot F_n$$

$$F \cdot \cos \alpha \leq \mu_0 \cdot (m \cdot g - F \cdot \sin \alpha)$$

$$F \cdot \cos \alpha \leq \mu_0 \cdot m \cdot g - \mu_0 \cdot F \cdot \sin \alpha$$

$$F \cdot (\cos \alpha + \mu_0 \cdot \sin \alpha) \leq \mu_0 \cdot m \cdot g$$

$$F \leq 1367 [N]$$

Tehát az anyagi pont egyensúlyban van akkor, és csak akkor, ha:

$$-1481,4 [N] \leq F \leq 1367 [N]$$

Következtetésképp, ha $F=1500 [N]$ akkor az anyagi pont elmozdul. A negatív előjel ebben az esetben az erő nyomó, míg a pozitív húzó jellegére utal.

b) A mozgásegyenlet (Newton II. törvénye):

$$\sum_i \vec{F}_i = \vec{F} + m \cdot \vec{g} + \vec{F}_K = m \cdot \vec{a}$$

$$\begin{pmatrix} F \cdot \cos\alpha \\ F \cdot \sin\alpha \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -m \cdot g \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -F_s \\ F_n \end{pmatrix} = m \cdot \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{I. } F \cdot \cos\alpha - F_s = m \cdot a$$

$$\text{II. } F \cdot \sin\alpha - m \cdot g + F_n = 0 \Rightarrow F_n = m \cdot g - F \cdot \sin\alpha$$

$$\text{III. } F_s = \mu \cdot F_n = \mu \cdot (m \cdot g - F \cdot \sin\alpha) = 942,2 \text{ [N]}$$

$$\text{I. } F \cdot \cos\alpha - \underbrace{\mu \cdot (m \cdot g - F \cdot \sin\alpha)}_{F_s} = m \cdot a$$

$$m \cdot a = F \cdot \cos\alpha + \mu \cdot F \cdot \sin\alpha - \mu \cdot m \cdot g$$

$$m \cdot a = F \cdot (\cos\alpha + \mu \cdot \sin\alpha) - \mu \cdot m \cdot g$$

$$a = \frac{F}{m} \cdot (\cos\alpha + \mu \cdot \sin\alpha) - \mu \cdot g = 0,507 \left[\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right]$$

$$|\vec{F}_K| = F_K = \sqrt{F_s^2 + F_n^2} = \sqrt{942,2^2 + 9422^2} = 9468,7 \text{ [N]}$$

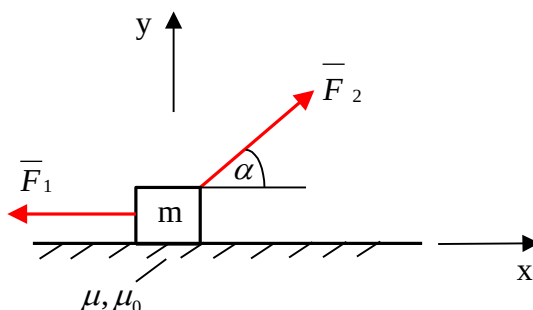
$$\text{c) } v(5) = \underbrace{v(0)}_0 + a \cdot 5 = 0,507 \cdot 5 = 2,535 \left[\frac{\text{m}}{\text{s}} \right]$$

$$\text{d) } s(5) = \underbrace{s(0)}_0 + \underbrace{v(0)}_0 \cdot 5 + \frac{a}{2} \cdot 5^2$$

$$\Delta s = s(5) - s(0) = \frac{a}{2} \cdot 5^2 = \frac{0,507}{2} \cdot 5^2 = 6,337 \text{ [m]}$$

5. feladat

Vízszintes, érdes felületen állandó nagyságú $\vec{F}_1$ és $\vec{F}_2$ erőkkel hatunk egy m tömegű testre az ábra szerint. A testet anyagi ponttal modellezzünk, és tudjuk, hogy a megadott adatok esetén a test elmozdul.



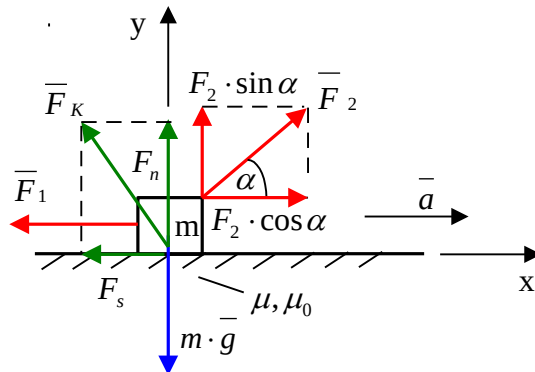
Adatok: $m = 50 \text{ [kg]}$, $F_1 = 50 \text{ [N]}$, $F_2 = 500 \text{ [N]}$, $\alpha = 30^\circ$, $\mu_0 = 0,25$, $\mu = 0,1$

a) Mekkora a talaj által kifejtett kényszererő súrlódási komponensének nagysága (súrlódási erő)?

b) Mekkora lesz a test gyorsulása?

Megoldás:

Rajzoljuk be a testekre ható erőket:



a) Írjuk fel a mozgásegyenletet:

$$\sum_i \vec{F}_i = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + m \cdot \vec{g} + \vec{F}_K = m \cdot \vec{a}$$

$$\begin{pmatrix} -F_1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} F_2 \cdot \cos \alpha \\ F_2 \cdot \sin \alpha \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -m \cdot g \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -F_s \\ F_n \end{pmatrix} = m \cdot \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{I. } -F_1 + F_2 \cdot \cos \alpha - F_s = m \cdot a$$

$$\text{II. } F_2 \cdot \sin \alpha - m \cdot g + F_n = 0 \Rightarrow F_n = m \cdot g - F_2 \cdot \sin \alpha$$

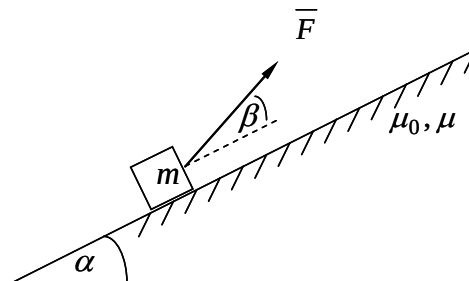
$$\text{III. } F_s = \mu \cdot F_n = \mu \cdot (m \cdot g - F_2 \cdot \sin \alpha) = 0,1 \cdot (50 \cdot 9,81 - 500 \cdot \sin 30^\circ) = 24,05 \text{ [N]}$$

b) A test gyorsulása:

$$\text{I. } a = \frac{-F_1 + F_2 \cdot \cos \alpha - F_s}{m} = \frac{-F_1 + F_2 \cdot \cos \alpha - \mu \cdot (m \cdot g - F_2 \cdot \sin \alpha)}{m} = 7,18 \left[\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right]$$

6. feladat

Egy m tömegű pontszerű testet egyenes vonalú, a vízszintessel α szöget bezáró érdes lejtőn állandó $\vec{F}$ erővel Δt ideig húzunk felfelé.



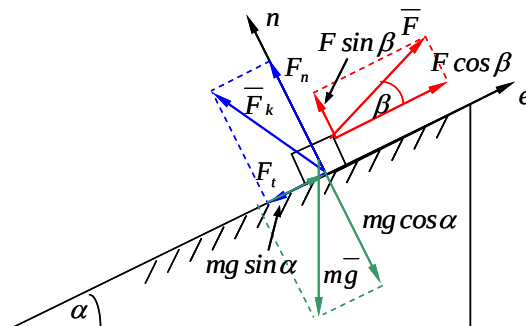
Adatok: $F = 5 \text{ [kN]}$, $m = 500 \text{ [kg]}$, $v(0) = 0 \left[\frac{\text{m}}{\text{s}} \right]$, $\Delta t = 3 \text{ [s]}$, $\mu_0 = 0,3$, $\mu = 0,1$, $\alpha = 30^\circ$, $\beta = 10^\circ$, $g = 9,81 \left[\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right]$.

a) Elegendő-e a megadott erő nagysága ahhoz, hogy a test elmozduljon a lejtőn felfelé?

- b) Ha igen, akkor mekkora a test gyorsulása, és a talaj által rá kifejtett kényszererő nagysága a mozgás során?
 c) Mekkora lesz a test pályamenti sebessége Δt idő elteltével, ha kezdetben nulla volt?
 d) Mekkora Δs pályaszakaszt fut be a test a megadott Δt idő alatt.

Megoldás:

a) Feltételezzük az egyensúlyt, majd megvizsgáljuk, hogy az milyen F értékek esetén áll fenn:



Egyensúlyi egyenlet:

$$\sum_i \vec{F}_i = \vec{F} + \vec{F}_g + \vec{F}_k = 0$$

$$\begin{pmatrix} F \cdot \cos \beta \\ F \cdot \sin \beta \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -m \cdot g \cdot \sin \alpha \\ -m \cdot g \cdot \cos \alpha \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -F_t \\ F_n \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$I. F \cdot \cos \beta - m \cdot g \cdot \sin \alpha - F_t = 0 \Rightarrow F_t = F \cdot \cos \beta - m \cdot g \cdot \sin \alpha$$

$$II. F \cdot \sin \beta - m \cdot g \cdot \cos \alpha + F_n = 0 \Rightarrow F_n = m \cdot g \cdot \cos \alpha - F \cdot \sin \beta$$

A test nyugalomban marad, ha:

$$|F_t| \leq \mu_0 \cdot F_n \rightarrow -\mu_0 \cdot F_n \leq F_t \leq \mu_0 \cdot F_n$$

1. eset:

$$-\mu_0 \cdot F_n \leq F_t$$

$$-\mu_0 \cdot (m \cdot g \cdot \cos \alpha - F \cdot \sin \beta) \leq F \cdot \cos \beta - m \cdot g \cdot \sin \alpha$$

$$-0,3 \cdot (500 \cdot 9,81 \cdot \cos 30^\circ - F \cdot \sin 10^\circ) \leq F \cdot \cos 10^\circ - 500 \cdot 9,81 \cdot \sin 30^\circ$$

$$1174,14 \leq 0,933 \cdot F$$

$$1262,7[N] = F_{min} \leq F$$

2. eset:

$$F_t \leq \mu_0 \cdot F_n$$

$$F \cdot \cos \beta - m \cdot g \cdot \sin \alpha \leq \mu_0 \cdot (m \cdot g \cdot \cos \alpha - F \cdot \sin \beta)$$

$$F \cdot \cos 10^\circ - 500 \cdot 9,81 \cdot \sin 30^\circ \leq 0,3 \cdot (500 \cdot 9,81 \cdot \cos 30^\circ - F \cdot \sin 10^\circ)$$

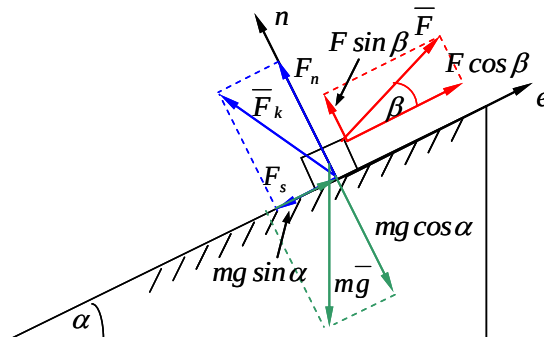
$$1,037 \cdot F \leq 3726,86$$

$$F \leq F_{max} = 3593,9 [N]$$

Tehát a test nyugalomban marad, ha: $1262,7 \text{ [N]} \leq F \leq 3593,9 \text{ [N]}$

Mivel $F = 5 \text{ [kN]}$, nagyobb, mint F_{max} , ezért a test elmozdul felfele.

b)



Mozgásegyenlet:

$$\sum_i \vec{F}_i = \vec{F} + \vec{F}_g + \vec{F}_k = m \cdot \vec{a}$$

$$\begin{pmatrix} F \cdot \cos \beta \\ F \cdot \sin \beta \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -m \cdot g \cdot \sin \alpha \\ -m \cdot g \cdot \cos \alpha \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -F_s \\ F_n \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m \cdot a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$I. F \cdot \cos \beta - m \cdot g \cdot \sin \alpha - F_s = m \cdot a$$

$$II. F \cdot \sin \beta - m \cdot g \cdot \cos \alpha + F_n = 0 \Rightarrow F_n = m \cdot g \cdot \cos \alpha - F \cdot \sin \beta$$

A kényszererő komponensei közötti kapcsolat:

$$III. F_s = \mu \cdot F_n$$

$$I. a = \frac{F \cdot \cos \beta - m \cdot g \cdot \sin \alpha - \mu \cdot (m \cdot g \cdot \cos \alpha - F \cdot \sin \beta)}{m} = 4,27 \left[\frac{m}{s^2} \right]$$

A kényszererő nagysága:

$$F_k = \sqrt{F_s^2 + F_n^2} = \sqrt{(\mu \cdot F_n)^2 + F_n^2} = F_n \cdot \sqrt{\mu^2 + 1} = 3396,45 \text{ [N]}$$

c)

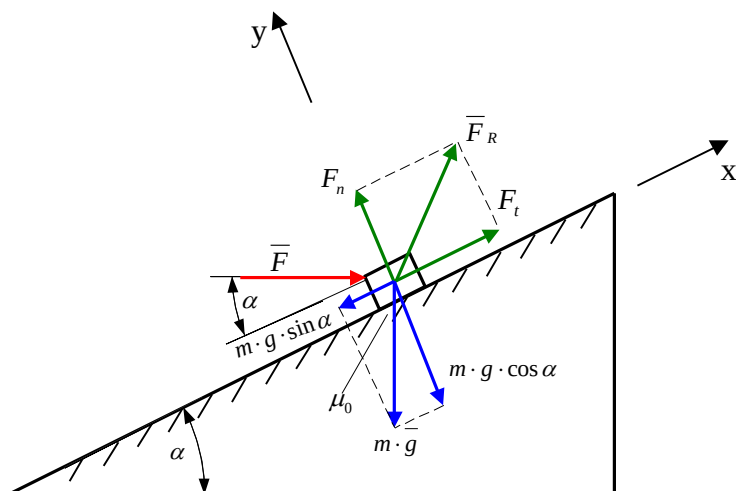
$$v = v(0) + a \cdot \Delta t = 4,27 \cdot 3 = 12,81 \left[\frac{m}{s} \right]$$

d)

$$\Delta s = v(0) \cdot \Delta t + \frac{a}{2} \cdot \Delta t^2 = \frac{4,27}{2} \cdot 3^2 = 19,21 \text{ [m]}$$

7. feladat

Az ábrán látható érdes felületű lejtőn elhelyezkedő anyagi pontra vízszintes irányú F erővel hatunk az ábra szerint.



Adatok: $\alpha = 30^\circ$, $m \cdot g = 100 \text{ [N]}$, $\mu_0 = 0,3$

a) Számítsuk ki, hogy az F erő milyen minimális és maximális értékek között változhat ($F_{\min}$ és $F_{\max}$) az anyagi pont egyensúlya esetén!

b) Számítsuk ki a lejtő által az anyagi pontra kifejtett kényszererő nagyságát az előző minimális és maximális F értékek esetén.

Megoldás:

a) Feltételezzük az egyensúlyt, majd megvizsgáljuk, hogy az milyen F értékek esetén áll fenn:

$$\sum \vec{F} = \vec{F}_R + \vec{F} + m \cdot \vec{g} = \vec{0} = \begin{pmatrix} F_t \\ F_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} F \cdot \cos \alpha \\ -F \cdot \sin \alpha \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -m \cdot g \cdot \sin \alpha \\ -m \cdot g \cdot \cos \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{I. } F_t + F \cdot \cos \alpha - m \cdot g \cdot \sin \alpha = 0 \Rightarrow F_t = m \cdot g \cdot \sin \alpha - F \cdot \cos \alpha = 50 - 0,866 \cdot F$$

$$\text{II. } F_n - F \cdot \sin \alpha - m \cdot g \cdot \cos \alpha = 0 \Rightarrow F_n = m \cdot g \cdot \cos \alpha + F \cdot \sin \alpha = 86,6 + 0,5 \cdot F$$

A test nyugalomban marad, ha:

$$|F_t| \leq \mu_0 \cdot F_n \rightarrow -\mu_0 \cdot F_n \leq F_t \leq \mu_0 \cdot F_n$$

1. eset:

$$-\mu_0 \cdot F_n \leq F_t$$

$$-0,3 \cdot (86,6 + 0,5 \cdot F) \leq 50 - 0,866 \cdot F$$

$$0,716 \cdot F \leq 76$$

$$F \leq F_{\max} = 106,14 \text{ [N]}$$

2. eset:

$$F_t \leq \mu_0 \cdot F_n$$

$$50 - 0,866 \cdot F \leq 0,3 \cdot (86,6 + 0,5 \cdot F)$$

$$24 \leq 1,016 \cdot F$$

$$23,62 \text{ [N]} = F_{\min} \leq F$$

$$23,62 \text{ [N]} \leq F \leq 106,14 \text{ [N]}$$

b)

$$F_{tmin} = 50 - 0,866 \cdot F_{min} = 50 - 0,866 \cdot 23,62 = 29,55 \text{ [N]}$$

$$F_{tmax} = 50 - 0,866 \cdot F_{max} = 50 - 0,866 \cdot 106,14 = -41,92 \text{ [N]}$$

$$F_{nmin} = 86,6 + 0,5 \cdot F_{min} = 86,6 + 0,5 \cdot 23,62 = 98,41 \text{ [N]}$$

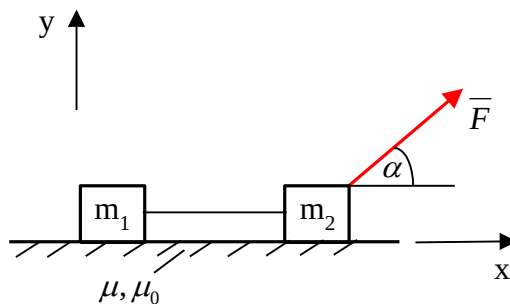
$$F_{nmax} = 86,6 + 0,5 \cdot F_{max} = 86,6 + 0,5 \cdot 106,14 = 139,67 \text{ [N]}$$

$$F_{Rmin} = \sqrt{F_{tmin}^2 + F_{nmin}^2} = \sqrt{29,55^2 + 98,41^2} = 102,75 \text{ [N]}$$

$$F_{Rmax} = \sqrt{F_{tmax}^2 + F_{nmax}^2} = \sqrt{(-41,92)^2 + 139,67^2} = 145,83 \text{ [N]}$$

8. feladat

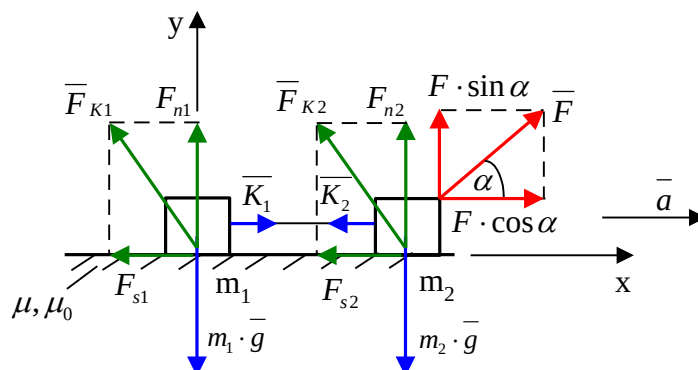
Az m_1 és m_2 tömegű testeket egy ideális kötéllel összekötjük, majd az m_2 tömegű testet egy állandó $\bar{F}$ erővel húzzuk az alábbi ábra szerint. A rendszer elmozdul. Mekkora lesz a testek gyorsulása?



Adatok: $F = 500 \text{ [N]}$, $m_1 = 40 \text{ [kg]}$, $m_2 = 20 \text{ [kg]}$, $\mu = 0,15$, $\alpha = 30^\circ$

Megoldás:

Rajzoljuk be a testekre ható erőket:



Írjuk fel az m_1 testre a mozgásegyenletet:

$$\sum_i \vec{F}_i = m_1 \cdot \vec{a}_1$$

$$m_1 \cdot \vec{g} + \vec{F}_{k1} + \vec{K}_1 = m_1 \cdot \vec{a}_1$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ -m_1 \cdot g \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -F_{s1} \\ F_{n1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} K_1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_1 \cdot a_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Innen három egyenletet kapunk:

$$\text{I. } 0 - F_{s1} + K_1 = m_1 \cdot a_1$$

$$\text{II. } -m_1 \cdot g + F_{n1} = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{n1} = m_1 \cdot g$$

$$\text{III. } F_{s1} = \mu \cdot F_{n1} = \mu \cdot m_1 \cdot g$$

Írjuk fel az m_2 testre is a mozgásegyenletet:

$$\sum_i \vec{F}_i = m_2 \cdot \vec{a}_2$$

$$m_2 \cdot \vec{g} + \vec{F} + \vec{F}_{k2} + \vec{K}_2 = m_2 \cdot \vec{a}_2$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ -m_2 \cdot g \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} F \cdot \cos \alpha \\ F \cdot \sin \alpha \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -F_{s2} \\ F_{n2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -K_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_2 \cdot a_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Így további három egyenletet kapunk:

$$\text{IV. } F \cdot \cos \alpha - F_{s2} - K_2 = m_2 \cdot a_2$$

$$\text{V. } -m_2 \cdot g + F \cdot \sin \alpha + F_{n2} = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{n2} = m_2 \cdot g - F \cdot \sin \alpha$$

$$\text{VI. } F_{s2} = \mu \cdot F_{n2} = \mu \cdot (m_2 \cdot g - F \cdot \sin \alpha)$$

Mivel a kötélt ideális (veszteségmentes), ezért: $a_1 = a_2 = a$ és $K_1 = K_2 = K$. Ezt követően a II., III., és az V., VI. egyenletből behelyettesítünk az I. és a IV. egyenletbe:

$$\text{I. } -\mu \cdot m_1 \cdot g + K = m_1 \cdot a$$

$$\text{IV. } F \cdot \cos \alpha - \mu \cdot (m_2 \cdot g - F \cdot \sin \alpha) - K = m_2 \cdot a$$

Így két egyenletet kapunk, melyekben ismeretlen a kötélerő és a gyorsulás. A két egyenletet összeadva kifejezhetjük a gyorsulást:

$$-\mu \cdot m_1 \cdot g + F \cdot \cos \alpha - \mu \cdot (m_2 \cdot g - F \cdot \sin \alpha) = m_1 \cdot a + m_2 \cdot a$$

$$a = \frac{-\mu \cdot m_1 \cdot g + F \cdot \cos \alpha - \mu \cdot (m_2 \cdot g - F \cdot \sin \alpha)}{m_1 + m_2}$$

$$a = \frac{(-0,15 \cdot 40 \cdot 9,81) + (500 \cdot \cos 30^\circ) - 0,15 \cdot (20 \cdot 9,81 - 500 \cdot \sin 30^\circ)}{40 + 20} = 6,37 \left[\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right]$$

Ha kérdés lenne, hogy mekkora erő ébred a kötéltben, akkor például az I. egyenletből kiszámítható:

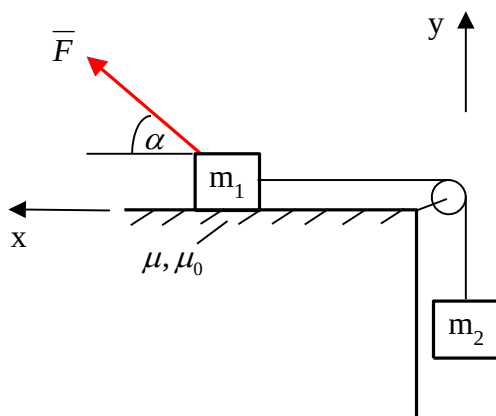
$$\text{I.} \quad -\mu \cdot m_1 \cdot g + K = m_1 \cdot a$$

ebből:

$$K = m_1 \cdot a + \mu \cdot m_1 \cdot g = 40 \cdot 6,37 + 0,15 \cdot 40 \cdot 9,81 = 313,66 \text{ [N]}$$

9. feladat

Az m_1 és m_2 tömegű testeket egy ideális dobon átvett ideális kötéllel összekötjük, majd az m_1 tömegű testet egy állandó $\vec{F}$ erővel húzzuk az alábbi ábra szerint. A rendszer elmozdul.



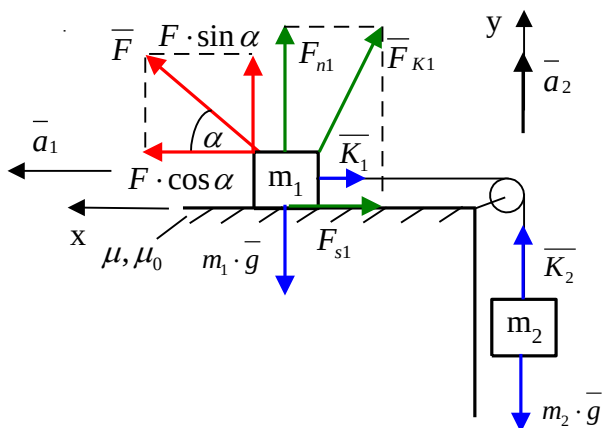
Adatok: $F = 400 \text{ [N]}$, $m_1 = 80 \text{ [kg]}$, $m_2 = 10 \text{ [kg]}$, $\mu = 0,2$, $\alpha = 10^\circ$

a) Mekkora lesz a testek gyorsulása?

b) Mekkora erő ébred a kötélben?

Megoldás:

a)



Írjuk fel az m_2 testre a mozgásegyenletet:

$$\sum_i \vec{F}_i = m_2 \cdot \vec{a}_2$$

$$m_2 \cdot \vec{g} + \vec{K}_2 = m_2 \cdot \vec{a}_2$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ -m_2 \cdot g \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ K_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ m_2 \cdot a \end{pmatrix}$$

Innen egy egyenletet kapunk:

$$\text{I. } -m_2 \cdot g + K_2 = m_2 \cdot a$$

Írjuk fel az m_1 testre is a mozgásegyenletet:

$$\sum_i \vec{F}_i = m_1 \cdot \vec{a}_1$$

$$m_1 \cdot \vec{g} + \vec{F} + \vec{F}_{K1} + \vec{K}_1 = m_1 \cdot \vec{a}_1$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ -m_1 \cdot g \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} F \cdot \cos \alpha \\ F \cdot \sin \alpha \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -F_s \\ F_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -K_1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_1 \cdot a \\ 0 \end{pmatrix}$$

Innen további három egyenletet kapunk:

$$\text{II. } F \cdot \cos \alpha - F_s - K_1 = m_1 \cdot a$$

$$\text{III. } -m_1 \cdot g + F \cdot \sin \alpha + F_n = 0 \quad \Rightarrow \quad F_n = m_1 \cdot g - F \cdot \sin \alpha$$

$$\text{IV. } F_s = \mu \cdot F_n = \mu \cdot (m_1 \cdot g - F \cdot \sin \alpha)$$

A III. és IV. egyenletből helyettesítsünk be a II-ba, és fejezzük ki a kötélrőt:

$$\text{II. } K_1 = F \cdot \cos \alpha - m_1 \cdot a - F_s = F \cdot \cos \alpha - m_1 \cdot a - \mu \cdot (m_1 \cdot g - F \cdot \sin \alpha)$$

Mivel a kötélt ideális (vesztésmentes), így $K_1 = K_2$. A II. egyenletből kifejezett kötélrőt helyettesítsük be az I-be:

$$\text{I. } -m_2 \cdot g + F \cdot \cos \alpha - m_1 \cdot a - \mu \cdot (m_1 \cdot g - F \cdot \sin \alpha) = m_2 \cdot a$$

Ebből fejezzük ki a gyorsulást:

$$-m_2 \cdot g + F \cdot \cos \alpha - \mu \cdot (m_1 \cdot g - F \cdot \sin \alpha) = a \cdot (m_1 + m_2)$$

$$a = \frac{-m_2 \cdot g + F \cdot \cos \alpha - \mu \cdot (m_1 \cdot g - F \cdot \sin \alpha)}{m_1 + m_2}$$

$$a = \frac{-10 \cdot 9,81 + 400 \cdot \cos 10^\circ - 0,2 \cdot (80 \cdot 9,81 - 400 \cdot \sin 10^\circ)}{80 + 10} = 1,7 \left[\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right]$$

b)

$$\text{I. } -m_2 \cdot g + K = m_2 \cdot a$$

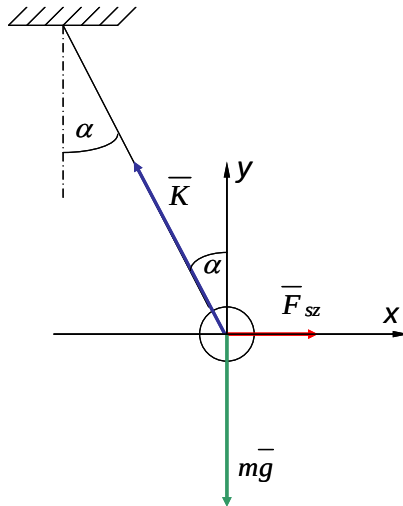
ebből:

$$K = m_2 \cdot a + m_2 \cdot g = 10 \cdot 1,7 + 10 \cdot 9,81 = 115,1 \text{ [N]}$$

10. feladat

Az ábrán látható, nyújthatatlan fonálhoz erősített m tömegű, d átmérőjű pingponglabdát szélesség mérése céljára használjuk. Egy adott szélerősségnél megmérjük a fonál függőlegessel bezárt α szögét, a gömb C alakú tényezője ismert.

Határozzuk meg a megadott adatokból a mozgó levegő (szél) által a nyugvó labdára kifejtett F_{sz} közegellenállási erő nagyságát, majd abból a szélességet!



Adatok: $m = 2,465 \text{ [g]}$, $d = 37,7 \text{ [mm]}$, $C = 0,45$, $\rho_{\text{levegő}} = 1,204 \left[\frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \right]$, $\alpha = 30^\circ$, $g = 9,81 \left[\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right]$

Megoldás:

Felírjuk a labda egyensúlyi egyenletét:

$$\vec{F}_k + m \cdot \vec{g} + \vec{F}_{sz} = 0$$

A mozgás leírásához az ábrán látható koordinátarendszert választjuk, majd az összes erőt x és y komponensekre bontjuk. A labda egyensúlyi egyenlete ezt követően:

$$\begin{pmatrix} -F_k \cdot \sin \alpha \\ F_k \cdot \cos \alpha \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -m \cdot g \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} F_{sz} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ebből az alábbi két skaláregyenlet adódik:

$$\text{I. } -F_k \cdot \sin \alpha + F_{sz} = 0$$

$$\text{II. } F_k \cdot \cos \alpha - m \cdot g = 0$$

A fenti egyenletekből:

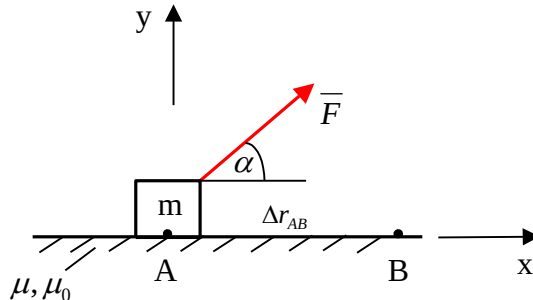
$$F_{sz} = \frac{m \cdot g}{\cos \alpha} \cdot \sin \alpha = 0,014 \text{ [N]}$$

$$F_{sz} = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot A \cdot C \cdot v^2 \Rightarrow v = \sqrt{\frac{2 \cdot F_{sz}}{\rho \cdot A \cdot C}} = 6,805 \left[\frac{\text{m}}{\text{s}} \right]$$

3.2.2 Munkatétel alkalmazása

1. feladat

Vízszintes, érdes felületen nyugvó pontszerű testre állandó $\vec{F}$ erővel hatunk az alábbi ábra szerint. Az test az A pontból elmozdul a B pontba.

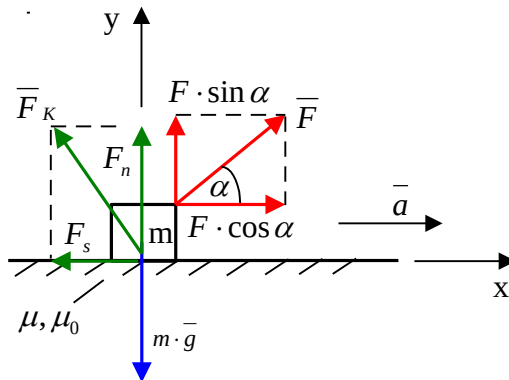


Adatok: $F = 4000 \text{ [N]}$, $m = 300 \text{ [kg]}$, $\mu = 0,1$, $\alpha = 30^\circ$, $\Delta r_{AB} = 10 \text{ [m]}$

- Számítsuk ki az egyes erők által a testen végzett munkákat!
- Mekkora lesz a test sebessége a B pontban, ha nyugalomból indult?

Megoldás:

- Rajzoljuk be a testre ható erőket:



Az elmozdulás vektor:

$$\Delta \vec{r}_{AB} = \begin{pmatrix} \Delta r_{AB} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \end{pmatrix} [\text{m}]$$

Az $\vec{F}$ erő által végzett munka:

$$\begin{aligned} W_F^{A \rightarrow B} &= \vec{F} \cdot \Delta \vec{r}_{AB} = \begin{pmatrix} F \cdot \cos \alpha \\ F \cdot \sin \alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \Delta r_{AB} \\ 0 \end{pmatrix} = F \cdot \cos \alpha \cdot \Delta r_{AB} + F \cdot \sin \alpha \cdot 0 = \\ &= 4000 \cdot \cos 30^\circ \cdot 10 = 34641 \text{ [J]} \end{aligned}$$

Azaz látható, hogy a munka megegyezik az erő elmozdulás irányú komponensének és az elmozdulás nagyságának a szorzatával.

Az $m \cdot \vec{g}$ gravitációs erő által végzett munka:

$$W_{m \cdot g}^{A \rightarrow B} = m \cdot \vec{g} \cdot \Delta \vec{r}_{AB} = \begin{pmatrix} 0 \\ -m \cdot g \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \Delta r_{AB} \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \cdot \Delta r_{AB} - m \cdot g \cdot 0 = 0 \text{ [J]}$$

Az $\vec{F}_K$ kényszererő által végzett munka:

$$W_{F_k}^{A \rightarrow B} = \vec{F}_K \cdot \Delta \vec{r}_{AB} = \begin{pmatrix} -F_s \\ F_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \Delta r_{AB} \\ 0 \end{pmatrix} = -F_s \cdot \Delta r_{AB} = -\mu \cdot F_n \cdot \Delta r_{AB} \\ = -\mu \cdot (m \cdot g - F \cdot \sin \alpha) \cdot \Delta r_{AB} =$$

$$= -0,1 \cdot (300 \cdot 9,81 - 4000 \cdot \sin 30^\circ) \cdot 10 = -943 \text{ [J]}$$

(F_n értéke a test y irányú egyensúlyi egyenletéből adódik.)

b) A munkatétel alapján:

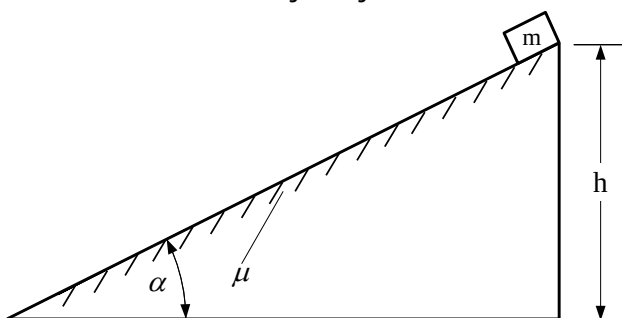
$$\sum W_{F_i}^{A \rightarrow B} = W_F^{A \rightarrow B} + W_{m \cdot g}^{A \rightarrow B} + W_{F_k}^{A \rightarrow B} = \frac{1}{2} m \cdot v_B^2 - \frac{1}{2} m \cdot v_A^2$$

$$34641 + 0 - 943 = \frac{1}{2} \cdot 300 \cdot v_B^2 - \frac{1}{2} \cdot 300 \cdot 0^2$$

$$v_B = \sqrt{\frac{33698 \cdot 2}{300}} = 14,98 \left[\frac{\text{m}}{\text{s}} \right]$$

2. feladat

Egy alfa szögű, érdes felületű, h magasságú lejtő tetején magára hagyunk egy pontszerű testet. A test lecsúszik a lejtő aljára.

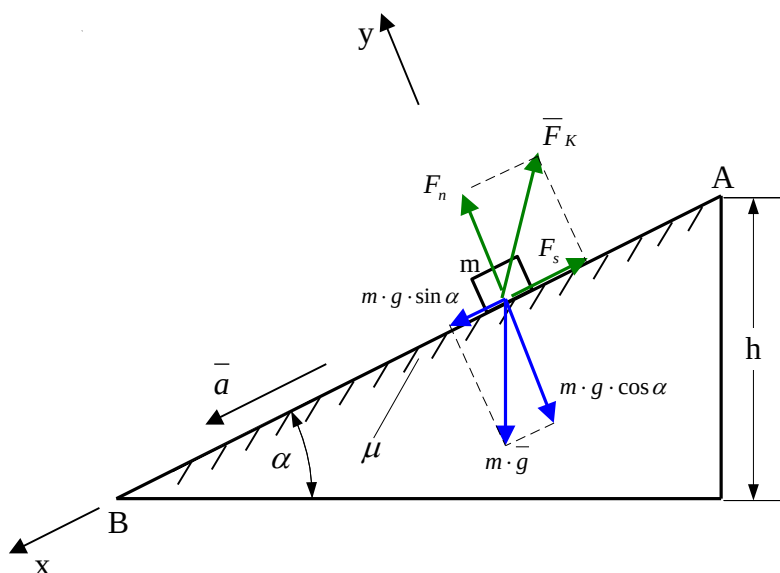


Adatok: $m = 150 \text{ [kg]}$, $\mu = 0,1$, $\alpha = 45^\circ$, $h = 10 \text{ [m]}$

- Számítsuk ki az egyes erők által a testen végzett munkákat!
- Mekkora lesz a test sebessége a lejtő alján?

Megoldás:

- Vegyük fel a koordináta rendszert, és rajzoljuk be az erőket:



$$\Delta r_{AB} = \frac{h}{\sin \alpha}, \Delta \bar{r}_{AB} = \begin{pmatrix} \frac{h}{\sin \alpha} \\ 0 \end{pmatrix} [\text{m}]$$

Az $m \cdot \bar{g}$ gravitációs erő által végzett munka:

$$W_{m \cdot g}^{A \rightarrow B} = m \cdot \bar{g} \cdot \Delta \bar{r}_{AB} = \begin{pmatrix} m \cdot g \cdot \sin \alpha \\ -m \cdot g \cdot \cos \alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{h}{\sin \alpha} \\ 0 \end{pmatrix} = m \cdot g \cdot \sin \alpha \cdot \frac{h}{\sin \alpha} = m \cdot g \cdot h =$$

$$= 150 \cdot 9,81 \cdot 10 = 14715 \text{ [J]}$$

A $W_{m \cdot g}^{A \rightarrow B} = m \cdot g \cdot h$ összefüggéssel minden esetben kiszámolható a gravitációs erő munkája.

Az $\bar{F}_K$ kényszererő által végzett munka:

$$W_{F_K}^{A \rightarrow B} = \bar{F}_K \cdot \Delta \bar{r}_{AB} = \begin{pmatrix} -F_s \\ F_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{h}{\sin \alpha} \\ 0 \end{pmatrix} = -F_s \cdot \frac{h}{\sin \alpha}$$

$$F_s = -\mu \cdot F_n = -\mu \cdot (m \cdot g \cdot \cos \alpha)$$

$$W_{F_K}^{A \rightarrow B} = -\mu \cdot (m \cdot g \cdot \cos \alpha) \cdot \frac{h}{\sin \alpha} = \frac{-\mu \cdot m \cdot g \cdot h}{\tan \alpha} = \frac{-0,1 \cdot 150 \cdot 9,81 \cdot 10}{\tan 45^\circ} = -1471,5 \text{ [J]}$$

b) Munkatételből:

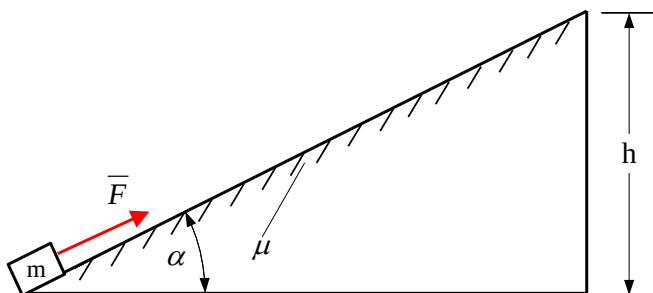
$$\sum W_{Fi}^{A \rightarrow B} = W_{m \cdot g}^{A \rightarrow B} + W_{F_K}^{A \rightarrow B} = \frac{1}{2} m \cdot v_B^2 - \frac{1}{2} m \cdot v_A^2$$

$$14715 - 1471,5 = \frac{1}{2} \cdot 150 \cdot v_B^2 - \frac{1}{2} \cdot 150 \cdot 0^2$$

$$v_B = \sqrt{\frac{13243,5 \cdot 2}{150}} = 13,29 \left[\frac{\text{m}}{\text{s}} \right]$$

3. feladat

Egy α szögű, érdes felületű lejtő aljáról, a lejtővel párhuzamos irányú, F nagyságú erővel, h magasságba felhúzzunk egy pontszerű testet.

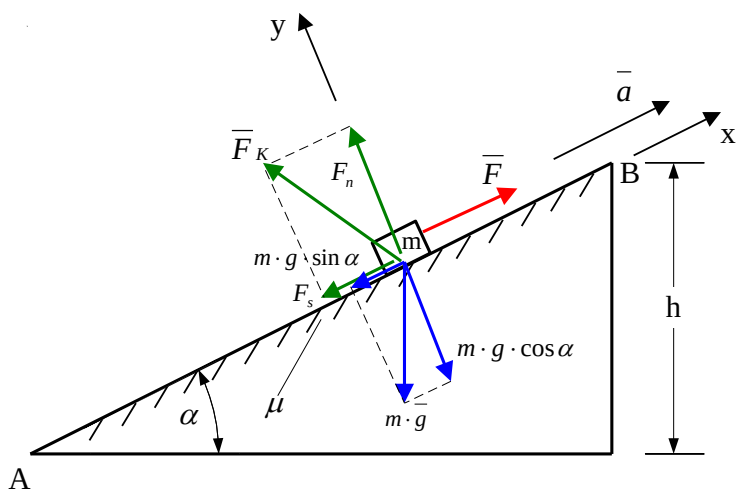


Adatok: $m = 100$ [kg], $F = 2000$ [N], $\mu = 0,12$, $\alpha = 35^\circ$, $h = 10$ [m]

- Számítsuk ki az egyes erők által a testen végzett munkákat!
- Mekkora lesz a test sebessége a lejtő tetején, ha nyugalomból indult?

Megoldás:

- Vegyük fel a koordináta-rendszert célszerűen, és rajzoljuk be az erőket:



$$\Delta r_{AB} = \frac{h}{\sin \alpha}, \quad \Delta \vec{r}_{AB} = \begin{pmatrix} \frac{h}{\sin \alpha} \\ 0 \end{pmatrix} [\text{m}]$$

Az $\vec{F}$ erő által végzett munka:

$$W_F^{A \rightarrow B} = \vec{F} \cdot \Delta \vec{r}_{AB} = \begin{pmatrix} F \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{h}{\sin \alpha} \\ 0 \end{pmatrix} = F \cdot \frac{h}{\sin \alpha} = 2000 \cdot \frac{10}{\sin 35} = 34868,9 \text{ [J]}$$

Az $m \cdot \vec{g}$ gravitációs erő által végzett munka:

$$\begin{aligned} W_{m \cdot g}^{A \rightarrow B} &= m \cdot \vec{g} \cdot \Delta \vec{r}_{AB} = \begin{pmatrix} -m \cdot g \cdot \sin \alpha \\ -m \cdot g \cdot \cos \alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{h}{\sin \alpha} \\ 0 \end{pmatrix} = -m \cdot g \cdot \sin \alpha \cdot \frac{h}{\sin \alpha} = -m \cdot g \cdot h = \\ &= -100 \cdot 9,81 \cdot 10 = -9810 \text{ [J]} \end{aligned}$$

Az $\bar{F}_K$ kényszererő által végzett munka:

$$W_{F_k}^{A \rightarrow B} = \bar{F}_K \cdot \Delta \bar{r}_{AB} = \begin{pmatrix} -F_s \\ F_n \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} h \\ \sin \alpha \end{pmatrix} = -F_s \cdot \frac{h}{\sin \alpha}$$

$$F_s = -\mu \cdot F_n = -\mu \cdot (m \cdot g \cdot \cos \alpha)$$

$$W_{F_k}^{A \rightarrow B} = -\mu \cdot (m \cdot g \cdot \cos \alpha) \cdot \frac{h}{\sin \alpha} = \frac{-\mu \cdot m \cdot g \cdot h}{\tan \alpha} = \frac{-0,12 \cdot 100 \cdot 9,81 \cdot 10}{\tan 35^\circ} = -1681,2 \text{ [J]}$$

b) Munkatételből:

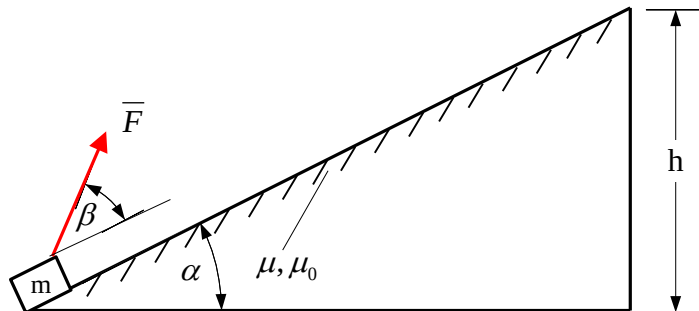
$$\sum W_{F_i}^{A \rightarrow B} = W_F^{A \rightarrow B} + W_{m \cdot g}^{A \rightarrow B} + W_{F_k}^{A \rightarrow B} = \frac{1}{2} m \cdot v_B^2 - \frac{1}{2} m \cdot v_A^2$$

$$34868,9 - 9810 - 1681,2 = \frac{1}{2} \cdot 100 \cdot v_B^2 - \frac{1}{2} \cdot 100 \cdot 0^2$$

$$v_B = \sqrt{\frac{23195,7 \cdot 2}{100}} = 21,54 \left[\frac{\text{m}}{\text{s}} \right]$$

4. feladat

Az m tömegű pontszerű testre állandó $\bar{F}$ erővel hatunk az ábra szerint.



Adatok: $m = 500 \text{ [kg]}$, $\mu_{0AB} = 0,15$, $\mu_{AB} = 0,1$, $\alpha = 30^\circ$, $\beta = 10^\circ$, $h = 10 \text{ [m]}$, $g = 9,81 \left[\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right]$

a) Számítsuk ki, hogy milyen $F_{\min}$ és $F_{\max}$ értékek között változhat az $\bar{F}$ erő előjeles nagysága, hogy az anyagi pont egyensúlyban maradjon az érdes felületű lejtőn!

b) Számítsuk ki az anyagi pont pályamenti gyorsulását, ha $F = 1,636 \cdot F_{\max}$!

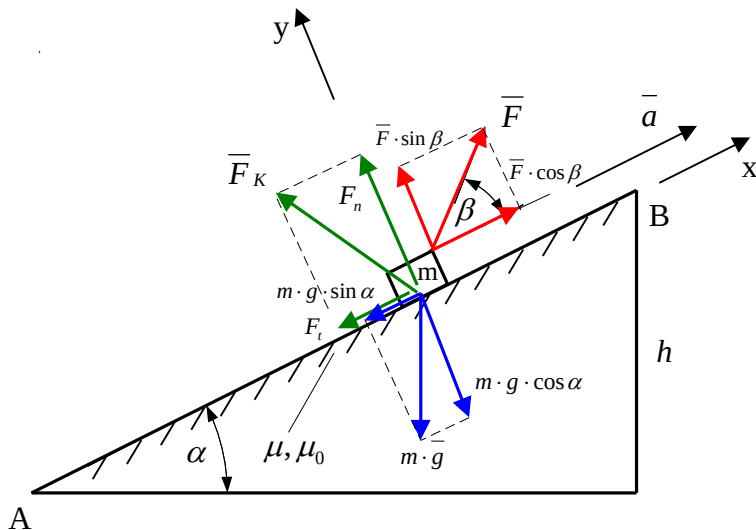
c) Számítsuk ki a lejtő által a mozgó anyagi pontra kifejtett kényszererő nagyságát a fenti gyorsulás mellett!

d) Számítsuk ki a gyorsulás ismeretében az A és B pontok közötti mozgás időtartamát (Δt_{AB}), és az anyagi pont pályamenti sebességét a B pontban. (Az anyagi pont az A pontból nyugalomból indul.)

e) Ellenőrizzük a d) pontban kapott sebesség értékét alkalmazva a munkatételt!

Megoldás:

Vegyük fel a koordinátarendszert célszerűen, és rajzoljuk be az erőket:



a) Feltételezzük az anyagi pont egyensúlyát, és meghatározzuk azon F értékeket amelyek esetén az fennáll.

$$\Delta s_{AB} = \frac{h}{\sin \alpha} = 20 \text{ [m]}$$

Egyensúlyi egyenletek:

$$\sum_i \vec{F}_i = \vec{F} + m \cdot \vec{g} + \vec{F}_K = \vec{0}$$

$$\begin{pmatrix} F \cdot \cos \beta \\ F \cdot \sin \beta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -m \cdot g \cdot \sin \alpha \\ -m \cdot g \cdot \cos \alpha \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -F_t \\ F_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{I. } F \cdot \cos \beta - m \cdot g \cdot \sin \alpha - F_t = 0 \Rightarrow F_t = F \cdot \cos \beta - m \cdot g \cdot \sin \alpha$$

$$\text{II. } F \cdot \sin \beta - m \cdot g \cdot \cos \alpha + F_n = 0 \Rightarrow F_n = m \cdot g \cdot \cos \alpha - F \cdot \sin \beta$$

Az anyagi pont egyensúlyban van akkor, és csak akkor, ha:

$$|F_t| \leq \mu_{0AB} \cdot F_n$$

Innen:

$$-\mu_{0AB} \cdot F_n \leq F_t \leq \mu_{0AB} \cdot F_n$$

1. eset:

$$-\mu_{0AB} \cdot F_n \leq F_t$$

$$-\mu_{0AB} \cdot (m \cdot g \cdot \cos \alpha - F \cdot \sin \beta) \leq F \cdot \cos \beta - m \cdot g \cdot \sin \alpha$$

$$-\mu_{0AB} \cdot m \cdot g \cdot \cos \alpha + \mu_{0AB} \cdot F \cdot \sin \beta \leq F \cdot \cos \beta - m \cdot g \cdot \sin \alpha$$

$$m \cdot g \cdot \sin \alpha - \mu_{0AB} \cdot m \cdot g \cdot \cos \alpha \leq F \cdot \cos \beta - \mu_{0AB} \cdot F \cdot \sin \beta$$

$$m \cdot g \cdot (\sin \alpha - \mu_{0AB} \cdot \cos \alpha) \leq F \cdot (\cos \beta - \mu_{0AB} \cdot \sin \beta)$$

$$1994,8 \text{ [N]} \leq F$$

$$F_{\min} = 1994,8 \text{ [N]}$$

2. eset:

$$F_t \leq \mu_{0AB} \cdot F_n$$

$$\begin{aligned}
F \cdot \cos\beta - m \cdot g \cdot \sin\alpha &\leq \mu_{0AB} \cdot (m \cdot g \cdot \cos\alpha - F \cdot \sin\beta) \\
F \cdot \cos\beta - m \cdot g \cdot \sin\alpha &\leq \mu_{0AB} \cdot m \cdot g \cdot \cos\alpha - \mu_{0AB} \cdot F \cdot \sin\beta \\
F \cdot \cos\beta + \mu_{0AB} \cdot F \cdot \sin\beta &\leq \mu_{0AB} \cdot m \cdot g \cdot \cos\alpha + m \cdot g \cdot \sin\alpha \\
F \cdot (\cos\beta + \mu_{0AB} \cdot \sin\beta) &\leq m \cdot g \cdot (\mu_{0AB} \cdot \cos\alpha + \sin\alpha) \\
F &\leq 3056,1 \text{ [N]}
\end{aligned}$$

$$F_{max} = 3056,1 \text{ [N]}$$

b)

$$F = F_{max} \cdot 1,636 = 5000 \text{ [N]}$$

$$\sum_i \vec{F}_i = \vec{F} + m \cdot \vec{g} + \vec{F}_K = m \cdot \vec{a}$$

$$\begin{pmatrix} F \cdot \cos\beta \\ F \cdot \sin\beta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -m \cdot g \cdot \sin\alpha \\ -m \cdot g \cdot \cos\alpha \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -F_s \\ F_n \end{pmatrix} = m \cdot \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{I. } F \cdot \cos\beta - m \cdot g \cdot \sin\alpha - F_s = m \cdot a$$

$$\text{II. } F \cdot \sin\beta - m \cdot g \cdot \cos\alpha + F_n = 0 \rightarrow F_n = m \cdot g \cdot \cos\alpha - F \cdot \sin\beta = 3379,6 \text{ [N]}$$

$$\text{III. } F_s = \mu_{AB} \cdot F_n = 337,96 \text{ [N]}$$

$$\text{I. } 500 \cdot \cos 10^\circ - 2452,5 - 337,96 = 500 \cdot a$$

$$a = 4,267 \left[\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right]$$

c)

$$|\vec{F}_K| = F_K = \sqrt{F_s^2 + F_n^2} = \sqrt{337,96^2 + 3379,6^2} = 3396,4 \text{ [N]}$$

d)

$$s_B = s_A + v_A \cdot \Delta t_{AB} + \frac{a}{2} \cdot \Delta t_{AB}^2$$

$$\Delta s_{AB} = s_B - s_A = \underbrace{v_A \cdot \Delta t_{AB}}_0 + \frac{a}{2} \cdot \Delta t_{AB}^2$$

$$20 = \frac{4,267}{2} \cdot \Delta t_{AB}^2 \Rightarrow \Delta t_{AB} = \sqrt{\frac{40}{4,267}} = 3,062 \text{ [s]}$$

$$v_B = \underbrace{v_A}_0 + a \cdot \Delta t_{AB} = 4,267 \cdot 3,062 = 13,06 \left[\frac{\text{m}}{\text{s}} \right]$$

e)

$$W_F^{A \rightarrow B} = F \cdot \cos\beta \cdot \Delta s_{AB} = 98480,7 \text{ [J]}$$

$$W_{m \cdot g}^{A \rightarrow B} = -m \cdot g \cdot \overbrace{\sin\alpha \cdot \Delta s_{AB}}^h = -m \cdot g \cdot h = -49050 \text{ [J]}$$

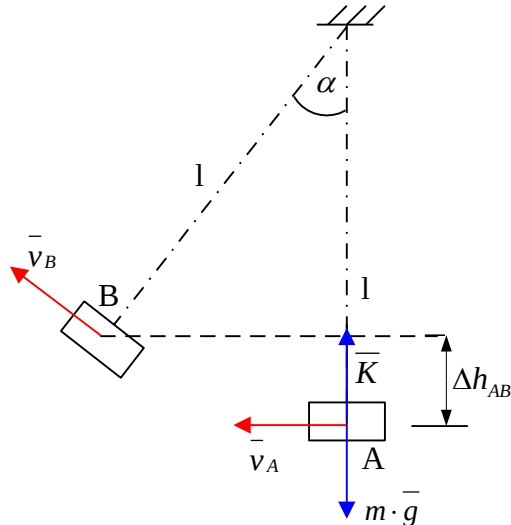
$$W_{F_K}^{A \rightarrow B} = -F_s \cdot \Delta s_{AB} = -6759,2 \text{ [J]}$$

Munkatétel:

$$\sum_i W_{F_i}^{A \rightarrow B} = W_{m \cdot g}^{A \rightarrow B} + W_F^{A \rightarrow B} + W_{F_K}^{A \rightarrow B} = 42671,5 = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_B^2 - \overbrace{\frac{1}{2} \cdot m \cdot v_A^2}^0 \Rightarrow v_B = 13,06 \left[\frac{\text{m}}{\text{s}} \right]$$

5. feladat

Egy l hosszúságú ideális kötél egyik vége rögzített, másik végéhez pedig egy m tömegű pontszerű testet erősítünk. Ezt követően 10 [m/s] nagyságú kezdősebességgel az ábra szerint mozgásba hozzuk a testet. Mekkora lesz a test sebessége a B pontban?



Adatok: $m = 25 \text{ [kg]}$, $\alpha = 35^\circ$, $l = 6 \text{ [m]}$, $v_A = 15 \left[\frac{\text{m}}{\text{s}} \right]$

Megoldás:

$$\Delta h_{AB} = l - l \cdot \cos \alpha = l \cdot (1 - \cos \alpha)$$

A kötélerő a mozgás során mindvégig merőleges a körpálya érintőjére, ezáltal a pillanatnyi elmozdulásra, ebből adódóan az általa végzett munka nulla:

$$W_K^{A \rightarrow B} = 0 \text{ [J]}$$

A gravitációs erő által végzett munka:

$$W_{m \cdot g}^{A \rightarrow B} = -m \cdot g \cdot \Delta h_{AB} = -m \cdot g \cdot l \cdot (1 - \cos \alpha)$$

Munkatétel:

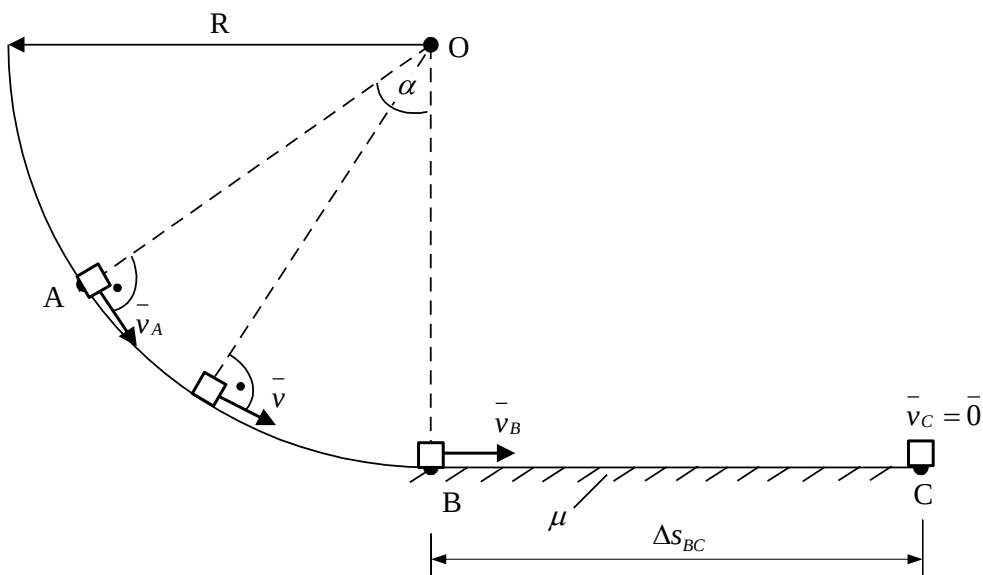
$$\sum W_{Fi}^{A \rightarrow B} = W_{m \cdot g}^{A \rightarrow B} = \frac{1}{2} m \cdot v_B^2 - \frac{1}{2} m \cdot v_A^2$$

$$-m \cdot g \cdot l \cdot (1 - \cos \alpha) = \frac{1}{2} m \cdot v_B^2 - \frac{1}{2} m \cdot v_A^2$$

$$v_B = \sqrt{-2 \cdot g \cdot l \cdot (1 - \cos \alpha) + v_A^2} = \sqrt{-2 \cdot 9,81 \cdot 6 \cdot (1 - \cos 35^\circ) + 15^2} = 14,27 \left[\frac{\text{m}}{\text{s}} \right]$$

6. feladat

Az anyagi pont a függőleges síkú kényszerpálya A pontjából v_A nagyságú kezdősebességgel indul az ábra szerint. A pálya AB szakasza körív alakú és súrlódásmentes, míg BC szakasza egyenes és érdes.

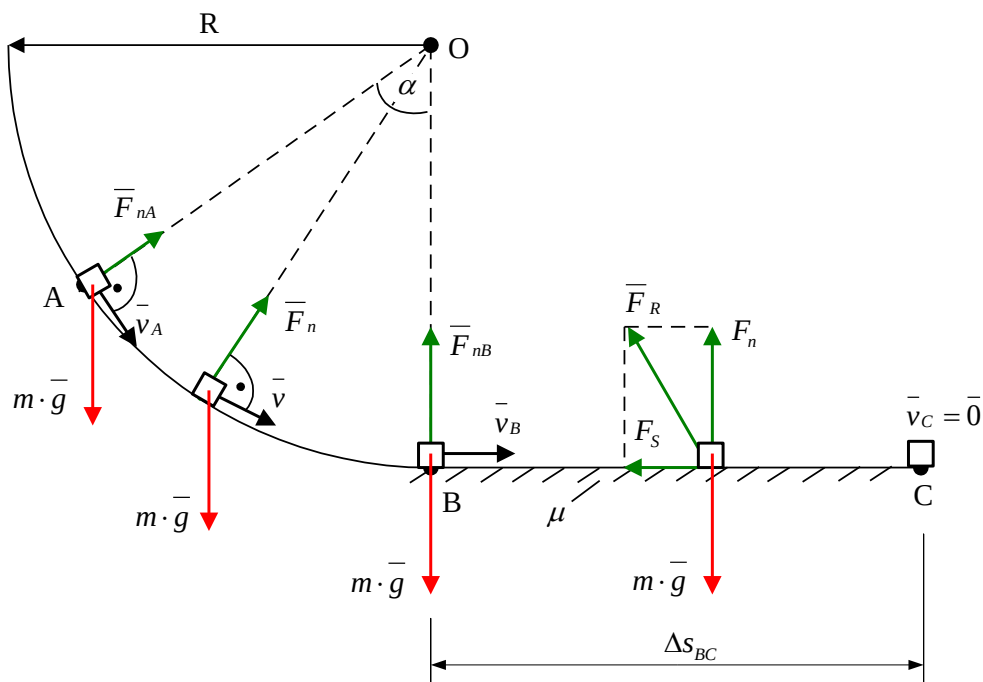


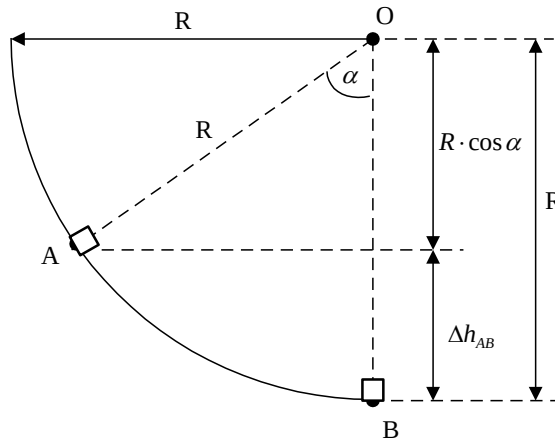
Adatok: $g = 9,81 \left[\frac{m}{s^2} \right]$, $v_A = 15 \left[\frac{m}{s} \right]$, $R = 30 [m]$, $\mu_{AB} = 0$, $\mu_{BC} = 0,1$, $\alpha = 60^\circ$

- Számítsuk ki az anyagi pont pályamenti sebességét a B pontban!
- Ha az anyagi pont a C pontban áll meg, akkor számítsuk ki a Δs_{BC} távolságot!

Megoldás:

a)





$$\Delta h_{AB} = R - R \cdot \cos \alpha = R \cdot (1 - \cos \alpha)$$

Mivel az AB pályaszakasz tökéletesen sima, így a pálya által kifejtett kényszererő minden pontban merőleges a pálya érintőjére, ezáltal a pillanatnyi elmozdulás irányára, tehát munkavégzése nulla:

$$W_{F_n}^{A \rightarrow B} = 0$$

A gravitációs erő munkavégzése:

$$W_{m \cdot g}^{A \rightarrow B} = m \cdot g \cdot \Delta h_{AB} = m \cdot g \cdot R \cdot (1 - \cos \alpha)$$

$$\sum_i W_{F_i}^{A \rightarrow B} = \overbrace{W_{F_n}^{A \rightarrow B}}^0 + W_{m \cdot g}^{A \rightarrow B} = m \cdot g \cdot R \cdot (1 - \cos \alpha) = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_B^2 - \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_A^2$$

$$2 \cdot g \cdot R \cdot (1 - \cos \alpha) = v_B^2 - v_A^2$$

$$v_B = \sqrt{v_A^2 + 2 \cdot g \cdot R \cdot (1 - \cos \alpha)} = 22,78 \left[\frac{m}{s} \right]$$

b) A gravitációs erő a BC szakasz minden pontján merőleges a pályára, azaz az elmozdulás irányára, tehát munkavégzése nulla:

$$W_{m \cdot g}^{B \rightarrow C} = 0$$

A kényszererő munkavégzése:

$$W_{F_K}^{B \rightarrow C} = -F_s \cdot \Delta s_{BC} = -\mu_{BC} \cdot F_n \cdot \Delta s_{BC} = -\mu_{BC} \cdot m \cdot g \cdot \Delta s_{BC}$$

Munkatétel:

$$\sum_i W_{F_i}^{B \rightarrow C} = \overbrace{W_{m \cdot g}^{B \rightarrow C}}^0 + W_{F_K}^{B \rightarrow C} = -\mu_{BC} \cdot m \cdot g \cdot \Delta s_{BC} = \underbrace{\frac{1}{2} \cdot m \cdot v_C^2}_0 - \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_B^2$$

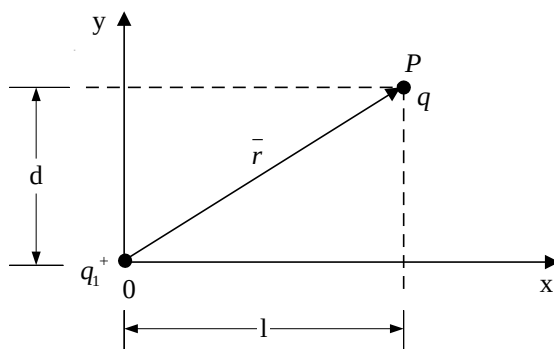
$$-2 \cdot \mu_{BC} \cdot g \cdot \Delta s_{BC} = -v_B^2$$

$$\Delta s_{BC} = \frac{v_B^2}{2 \cdot \mu_{BC} \cdot g} = 264,5 [m]$$

4. Elektrosztatika

1. feladat

Határozzuk meg a q_1 pontszerű töltés által a P pontban keltett térerősséget, valamint a P pontba helyezett q töltésre ható erőt és nagyságát!



Adatok: $q_1 = 2 \cdot 10^{-6} \text{ [C]}$, $q = -1 \cdot 10^{-6} \text{ [C]}$, $l = 0,03 \text{ [m]}$, $d = 0,02 \text{ [m]}$

Megoldás:

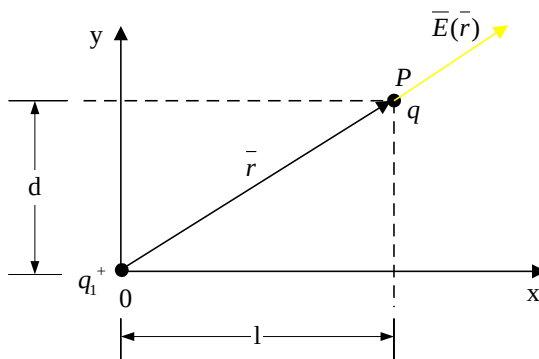
$$\vec{r} = \begin{pmatrix} l \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,03 \\ 0,02 \end{pmatrix} \text{ [m]}$$

$$r = |\vec{r}| = \sqrt{0,03^2 + 0,02^2} = 0,036 \text{ [m]}$$

$$r^3 = 0,036^3 = 4,67 \cdot 10^{-5} \text{ [m}^3\text{]}$$

A P pontban keltett térerősség:

$$\vec{E}(\vec{r}) = k \cdot \frac{q_1}{r^3} \cdot \vec{r} = 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{2 \cdot 10^{-6}}{4,67 \cdot 10^{-5}} \cdot \begin{pmatrix} 0,03 \\ 0,02 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11,6 \cdot 10^6 \\ 7,7 \cdot 10^6 \end{pmatrix} \frac{\text{[N]}}{\text{[C]}}$$



A P pontba helyezett q töltésre ható erő:

$$\vec{F}(\vec{r}) = q \cdot \vec{E}(\vec{r}) = -1 \cdot 10^{-6} \cdot \begin{pmatrix} 11,6 \cdot 10^6 \\ 7,7 \cdot 10^6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -11,6 \\ -7,7 \end{pmatrix} \text{ [N]}$$

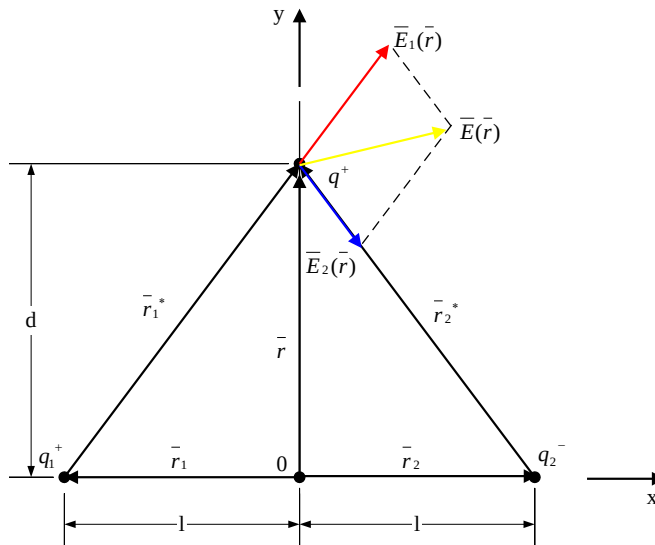
A P pontba helyezett q töltésre ható erő nagysága:

$$|\vec{F}(\vec{r})| = \sqrt{(-11,6)^2 + (-7,7)^2} = 13,9 \text{ [N]}$$

2. feladat

- a) Számítsuk ki az ábrán látható q_1 és q_2 ponttöltések által a P pontban együttesen keltett elektromos térerősséget!
- b) Számítsuk ki a mező által a P pontba helyezett q próbatöltésre kifejtett erő nagyságát!

Adatok: $q_1 = 10^{-6} [C]$, $q_2 = -2 \cdot 10^{-6} [C]$, $q = 10^{-6} [C]$, $l = 0,01 [m]$, $d = 0,0173 [m]$,
 $k = 8,988 \cdot 10^9 \left[\frac{N \cdot m^2}{C^2} \right]$



Megoldás:

a)

$$\vec{r}_1 = \begin{pmatrix} -0,01 \\ 0 \end{pmatrix} [m], \quad \vec{r}_2 = \begin{pmatrix} 0,01 \\ 0 \end{pmatrix} [m], \quad \vec{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0,0173 \end{pmatrix} [m]$$

$$\vec{r}_1^* = \vec{r} - \vec{r}_1 = \begin{pmatrix} 0,01 \\ 0,0173 \end{pmatrix} [m] \quad \Rightarrow \quad r_1^* = \sqrt{0,01^2 + 0,0173^2} = 0,02 = 2 \cdot 10^{-2} [m]$$

$$\vec{r}_2^* = \vec{r} - \vec{r}_2 = \begin{pmatrix} -0,01 \\ 0,0173 \end{pmatrix} [m] \quad \Rightarrow \quad r_2^* = \sqrt{(-0,01)^2 + 0,0173^2} = 0,02 = 2 \cdot 10^{-2} [m]$$

$$r_1^{*3} = 8 \cdot 10^{-6} [m^3], \quad r_2^{*3} = 8 \cdot 10^{-6} [m^3]$$

Először kiszámoljuk külön a q_1 és q_2 ponttöltések által a P pontban keltett elektromos térerősséget, majd ezeket összeadva megkapjuk az eredő térerősséget:

$$\vec{E}_1(\vec{r}) = k \cdot \frac{q_1}{r_1^{*3}} \cdot \vec{r}_1^* = 8,988 \cdot 10^9 \cdot \frac{10^{-6}}{8 \cdot 10^{-6}} \cdot \begin{pmatrix} 0,01 \\ 0,0173 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,125 \\ 1,946 \end{pmatrix} \cdot 10^7 \left[\frac{N}{C} \right]$$

$$\vec{E}_2(\vec{r}) = k \cdot \frac{q_2}{r_2^{*3}} \cdot \vec{r}_2^* = 8,988 \cdot 10^9 \cdot \frac{-2 \cdot 10^{-6}}{8 \cdot 10^{-6}} \cdot \begin{pmatrix} -0,01 \\ 0,0173 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2,25 \\ -3,892 \end{pmatrix} \cdot 10^7 \left[\frac{N}{C} \right]$$

$$\vec{E}(\vec{r}) = \vec{E}_1(\vec{r}) + \vec{E}_2(\vec{r}) = \begin{pmatrix} 3,375 \\ -1,946 \end{pmatrix} \cdot 10^7 \left[\frac{N}{C} \right]$$

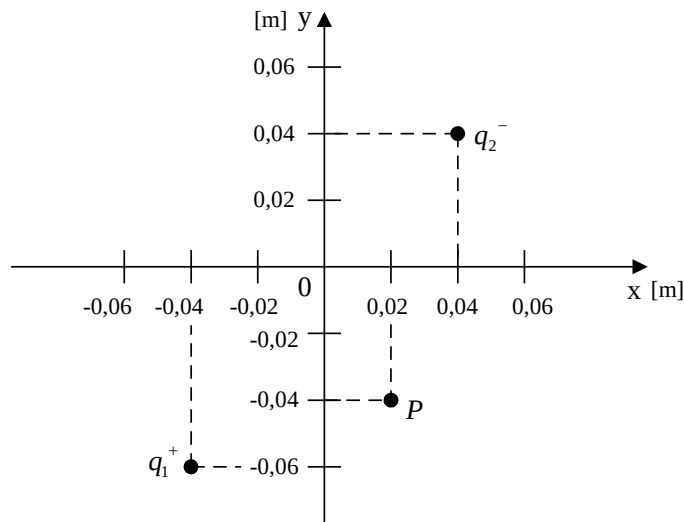
b)

$$\vec{F}(\vec{r}) = \vec{E}(\vec{r}) \cdot q = \begin{pmatrix} 3,375 \\ -1,946 \end{pmatrix} \cdot 10^7 \cdot 10^{-6} = \begin{pmatrix} 33,75 \\ -19,46 \end{pmatrix} [N]$$

$$|\vec{F}(\vec{r})| = \sqrt{33,75^2 + (-19,46^2)} = 38,96 [N]$$

3. feladat

Az ábrán jelölt helyeken rögzítünk egy $q_1 = 3 \cdot 10^{-6} [C]$ és egy $q_2 = -2 \cdot 10^{-6} [C]$ ponttöltést.



Mekkora a térerősség a P pontban?

Megoldás:

A ponttöltésektől a P pontba mutató helyvektorok, és azok nagysága:

$$\vec{r}_1^* = \begin{pmatrix} 0,06 \\ 0,02 \end{pmatrix} [m] \Rightarrow r_1^* = \sqrt{0,06^2 + 0,02^2} = 0,063 = 6,3 \cdot 10^{-2} [m]$$

$$\vec{r}_2^* = \begin{pmatrix} -0,02 \\ -0,08 \end{pmatrix} [m] \Rightarrow r_2^* = \sqrt{(-0,02)^2 + (-0,08)^2} = 0,082 = 8,2 \cdot 10^{-2} [m]$$

$$r_1^{*3} = 2,5 \cdot 10^{-4} [m^3], \quad r_2^{*3} = 5,5 \cdot 10^{-4} [m^3]$$

Először kiszámoljuk külön a q_1 és q_2 ponttöltések által a P pontban keltett elektromos térerősséget, majd ezeket összeadva megkapjuk az eredő térerősséget:

$$\vec{E}_1(\vec{r}) = k \cdot \frac{q_1}{r_1^{*3}} \cdot \vec{r}_1^* = 8,988 \cdot 10^9 \cdot \frac{3 \cdot 10^{-6}}{2,5 \cdot 10^{-4}} \cdot \begin{pmatrix} 0,06 \\ 0,02 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6,47 \\ 2,16 \end{pmatrix} \cdot 10^6 \left[\frac{N}{C} \right]$$

$$\vec{E}_2(\vec{r}) = k \cdot \frac{q_2}{r_2^{*3}} \cdot \vec{r}_2^* = 8,988 \cdot 10^9 \cdot \frac{-2 \cdot 10^{-6}}{5,5 \cdot 10^{-4}} \cdot \begin{pmatrix} -0,02 \\ -0,08 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,654 \\ 2,61 \end{pmatrix} \cdot 10^6 \left[\frac{N}{C} \right]$$

$$\vec{E}(\vec{r}) = \vec{E}_1(\vec{r}) + \vec{E}_2(\vec{r}) = \begin{pmatrix} 7,12 \\ 4,77 \end{pmatrix} \cdot 10^6 \left[\frac{N}{C} \right]$$

4. feladat

Egy $l=1$ [m] hosszú, vízszintes üvegcső két végére egy $q_1 = 10^{-6}$ [C] és egy $q_2 = 4 \cdot 10^{-6}$ [C] nagyságú pozitív ponttöltést rögzítünk. Hol fog elhelyezkedni az üvegcső belsejében a szabadon mozgó, $q = 2 \cdot 10^{-6}$ [C] nagyságú pozitív ponttöltés?

Megoldás:

A q és q_1 valamint a q és q_2 ponttöltések között fel fog lépni egy F_{C1} és egy F_{C2} nagyságú Coulomb erő.

Jelöljük a q_1 és q ponttöltések közötti távolságot x -szel, a q_2 és q ponttöltések közötti távolságot pedig $(l - x)$ -szel. Így felírva a két Coulomb erő:

$$|\bar{F}_{C1}| = k \cdot \frac{q_1 \cdot q}{x^2} \text{ [N]}$$

$$|\bar{F}_{C2}| = k \cdot \frac{q_2 \cdot q}{(l - x)^2} \text{ [N]}$$

A q ponttöltés egyensúlyban van, azaz a rá hatók erők eredője zérus, tehát nagyságuk azonos:

$$|\bar{F}_{C1}| = |\bar{F}_{C2}|$$

Behelyettesítve:

$$k \cdot \frac{q_1 \cdot q}{x^2} = k \cdot \frac{q_2 \cdot q}{(l - x)^2}$$

Elvégezve az egyszerűsítést:

$$\frac{q_1}{x^2} = \frac{q_2}{(l - x)^2}$$

Behelyettesítve a megadott értékeket, kiszámolhatjuk az x távolságot:

$$\frac{10^{-6}}{x^2} = \frac{4 \cdot 10^{-6}}{(1 - x)^2}$$

$$(1 - x)^2 = 4x^2$$

$$1 - 2x + x^2 = 4x^2$$

$$0 = 3x^2 + 2x - 1$$

$$x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 + 4 \cdot 3 \cdot 1}}{2 \cdot 3}$$

$$x_1 = -1 \text{ és } x_2 = \frac{1}{3}$$

Mivel a q töltésnek a csőben kell lennie q_1 és q_2 töltések között, ezért x -re csak a 0-nál nagyobb és 1-nél kisebb szám a helyes megoldás, tehát a q töltés a q_1 töltéstől $\frac{1}{3}$ [m] távolságra lesz a cső belsejében.

5. Elektromos ellenállás számítása

1. feladat

Mekkora áram folyik át egy $5 \text{ [mm}^2\text{]}$ keresztmetszetű, 10 [m] hosszú rézhuzalon, ha a vezeték végei között $0,2 \text{ [V]}$ feszültségkülönbség mérhető? A réz vezetőképessége $5,6 \cdot 10^7 \left[\frac{1}{\Omega \text{m}} \right]$.

Megoldás:

$$A = 5 \cdot 10^{-6} \text{ [m}^2\text{]}$$

$$R = \frac{l}{\sigma \cdot A} = \frac{10}{5,6 \cdot 10^7 \cdot 5 \cdot 10^{-6}} = 0,0357 \text{ [}\Omega\text{]}$$

Ohm törvényéből:

$$I = \frac{U}{R} = \frac{0,2}{0,0357} = 5,6 \text{ [A]}$$

2. feladat

Mekkora feszültségkülönbség mérhető egy $5 \text{ [mm}^2\text{]}$ keresztmetszetű, 6 [m] hosszú alumínium vezeték végei között, ha a vezetéken 15 [A] áram folyik keresztül? Az alumínium fajlagos ellenállása $2,7 \cdot 10^{-8} \text{ [}\Omega \text{m}\text{]}$.

Megoldás:

$$A = 5 \cdot 10^{-6} \text{ [m}^2\text{]}$$

$$R = \frac{\rho_F \cdot l}{A} = \frac{2,7 \cdot 10^{-8} \cdot 6}{5 \cdot 10^{-6}} = 0,0324 \text{ [}\Omega\text{]}$$

Ohm törvényéből:

$$U = R \cdot I = 0,0324 \cdot 15 = 0,486 \text{ [V]}$$

3. feladat

Mekkora az előző feladatokban lévő két vezeték eredő ellenállása, ha sorba, illetve ha párhuzamosan kötjük őket össze?

$$R_1 = 0,0357 \text{ [}\Omega\text{]}, R_2 = 0,0324 \text{ [}\Omega\text{]}$$

Sorba kötve:

$$R_e = R_1 + R_2 = 0,0357 + 0,0324 = 0,0681 \text{ [}\Omega\text{]}$$

Párhuzamosan kötve:

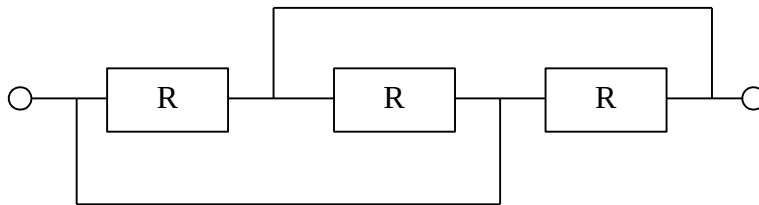
$$\frac{1}{R_e} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{1}{0,0357} + \frac{1}{0,0324} = 58,88$$

$$R_e = \frac{1}{58,88} = 0,017 \text{ [}\Omega\text{]}$$

4. feladat

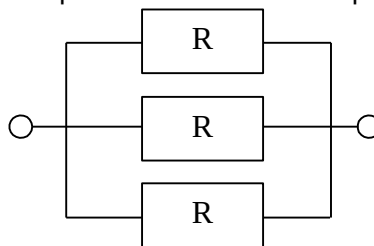
Számítsuk ki az alábbi kapcsolások eredő ellenállását! Minden ellenállás értéke legyen $R = 1\ [\Omega]$.

a)



Megoldás:

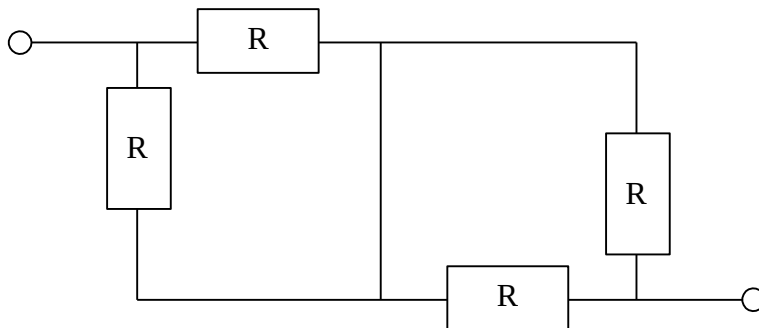
A három ellenállás egymással párhuzamosan van kapcsolva, egyszerűsítés után:



Így az eredő ellenállás:

$$R_e = \frac{1}{\frac{1}{R} + \frac{1}{R} + \frac{1}{R}} = \frac{1}{\frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{1}} = 0,33\ [\Omega]$$

b)

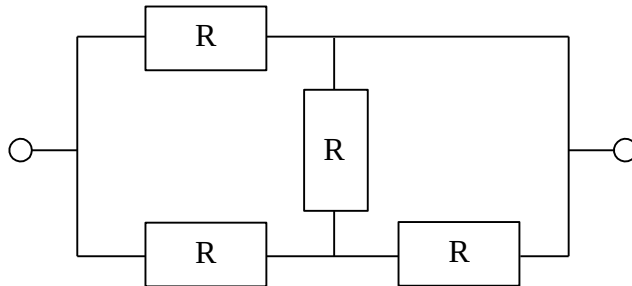


Megoldás:

A jobb és bal oldali 2-2 ellenállás párhuzamosan van egymással, a két oldal pedig sorba, így az eredő:

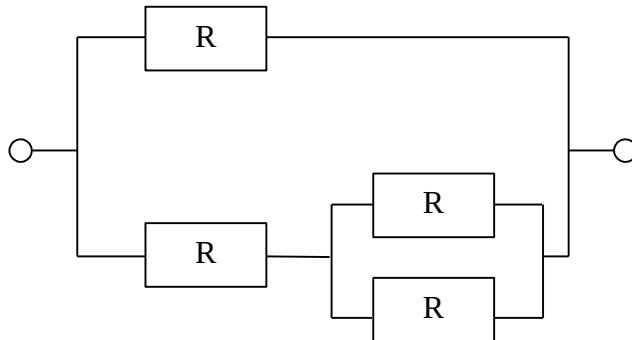
$$R_e = \frac{1}{\frac{1}{R} + \frac{1}{R}} + \frac{1}{\frac{1}{R} + \frac{1}{R}} = \frac{1}{\frac{1}{1} + \frac{1}{1}} + \frac{1}{\frac{1}{1} + \frac{1}{1}} = 1\ [\Omega]$$

c)



Megoldás:

Egyszerűsítés után:



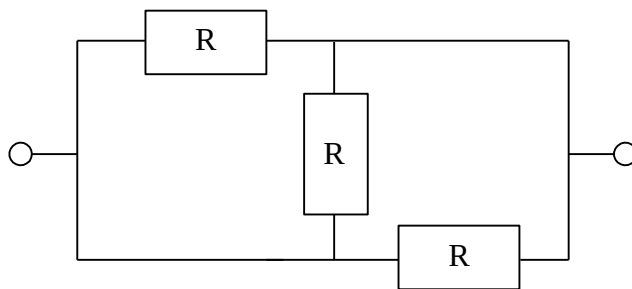
Az alsó ellenállások eredője:

$$R_{e1} = \frac{1}{\frac{1}{R} + \frac{1}{R}} + R = \frac{1}{\frac{1}{1} + \frac{1}{1}} + 1 = 1,5 \text{ } [\Omega]$$

Ezekkel párhuzamosan van kapcsolva a felső ellenállás, így a teljes eredő:

$$R_e = \frac{1}{\frac{1}{R} + \frac{1}{R_{e1}}} = \frac{1}{\frac{1}{1} + \frac{1}{1,5}} = 0,6 \text{ } [\Omega]$$

d)

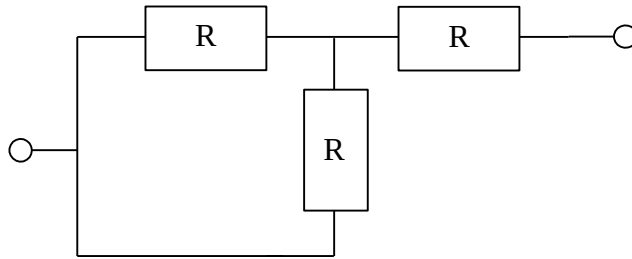


Megoldás:

A három ellenállás egymással párhuzamosan van kapcsolva, így az eredő:

$$R_e = \frac{1}{\frac{1}{R} + \frac{1}{R} + \frac{1}{R}} = \frac{1}{\frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{1}} = 0,33 \text{ } [\Omega]$$

e)

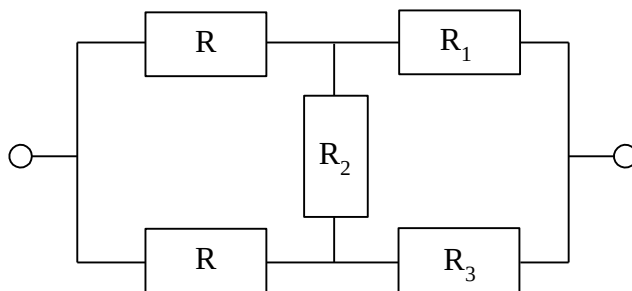


Megoldás:

A középső a bal oldali ellenállással párhuzamosan van kapcsolva, ezek pedig sorba a jobb oldalival. Így az eredő:

$$R_e = \frac{1}{\frac{1}{R} + \frac{1}{R}} + R = \frac{1}{\frac{1}{1} + \frac{1}{1}} + 1 = 1,5 \text{ } [\Omega]$$

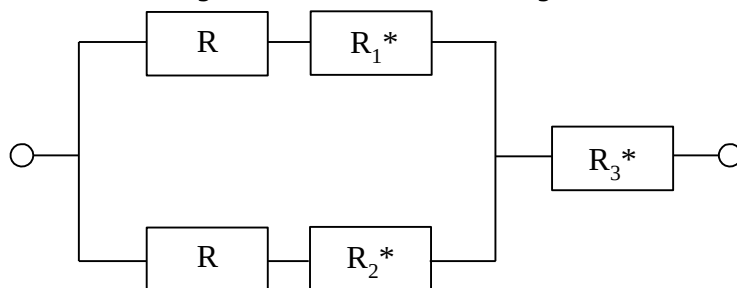
f)



Adatok: $R = 5 \text{ } [\Omega]$, $R_1 = 1 \text{ } [\Omega]$, $R_2 = 2 \text{ } [\Omega]$, $R_3 = 3 \text{ } [\Omega]$

Megoldás:

A megoldáshoz delta-csillag átalakításra van szükség:



$$R_1^* = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2 + R_3} = \frac{1}{3} \text{ } [\Omega]$$

$$R_2^* = \frac{R_2 \cdot R_3}{R_1 + R_2 + R_3} = 1 \text{ } [\Omega]$$

$$R_3^* = \frac{R_1 \cdot R_3}{R_1 + R_2 + R_3} = \frac{1}{2} \text{ } [\Omega]$$

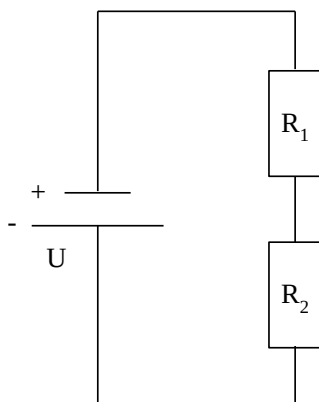
Így az eredő ellenállás:

$$R_e = \frac{1}{\frac{1}{R+R_1^*} + \frac{1}{R+R_2^*}} + R_3^* = 3,323 \text{ } [\Omega]$$

6. Egyenáramú hálózatok megoldása

1. feladat

Számítsuk ki az ellenállásokon átfolyó áram erősségét és az egyes ellenállásokon eső feszültségeket!



Adatok: $U = 48 \text{ [V]}$, $R_1 = 2 \text{ [\Omega]}$, $R_2 = 10 \text{ [\Omega]}$

Megoldás:

A két sorba kötött ellenállás helyettesíthető az R_e eredő ellenállással:

$$R_e = R_1 + R_2 = 2 + 10 = 12 \text{ [\Omega]}$$

Az áramforráson átfolyó áram erősségét Ohm törvényével számoljuk ki:

$$I = \frac{U}{R_e} = \frac{48}{12} = 4 \text{ [A]}$$

Mivel az ellenállások sorban vannak kötve, így a rajtuk átfolyó áram erőssége megegyezik az áramforráson átfolyó áram erősségével:

$$I_1 = I_2 = I = 4 \text{ [A]}$$

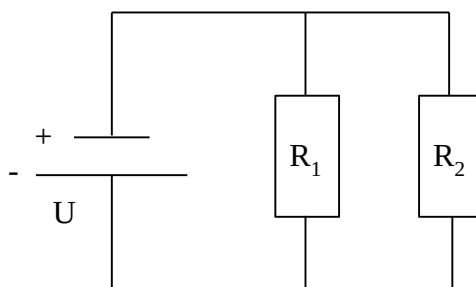
Az ellenállásokon mérhető feszültségeket szintén Ohm törvényével számíthatjuk ki:

$$U_1 = I_1 \cdot R_1 = 4 \cdot 2 = 8 \text{ [V]}$$

$$U_2 = I_2 \cdot R_2 = 4 \cdot 10 = 40 \text{ [V]}$$

2. feladat

Számítsuk ki az ellenállásokon átfolyó áramok erősségét és az egyes ellenállásokon eső feszültségeket!



Adatok: $U = 48 \text{ [V]}$, $R_1 = 2 \text{ [\Omega]}$, $R_2 = 10 \text{ [\Omega]}$

Megoldás:

A két párhuzamosan kötött ellenállás helyettesíthető az R_e eredő ellenállással:

$$R_e = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}} = \frac{1}{\frac{1}{2} + \frac{1}{10}} = 1,666 \text{ [\Omega]}$$

Az áramforráson átfolyó áram erősségét Ohm törvényével számoljuk ki:

$$I = \frac{U}{R_e} = \frac{48}{1,666} = 28,8 \text{ [A]}$$

Az egyes ellenállásokon eső feszültség megegyezik az áramforráson mérhető feszültséggel:

$$U_1 = U_2 = U = 48 \text{ [V]}$$

Az ellenállásokon átfolyó áram erősségeket Ohm törvényével számoljuk:

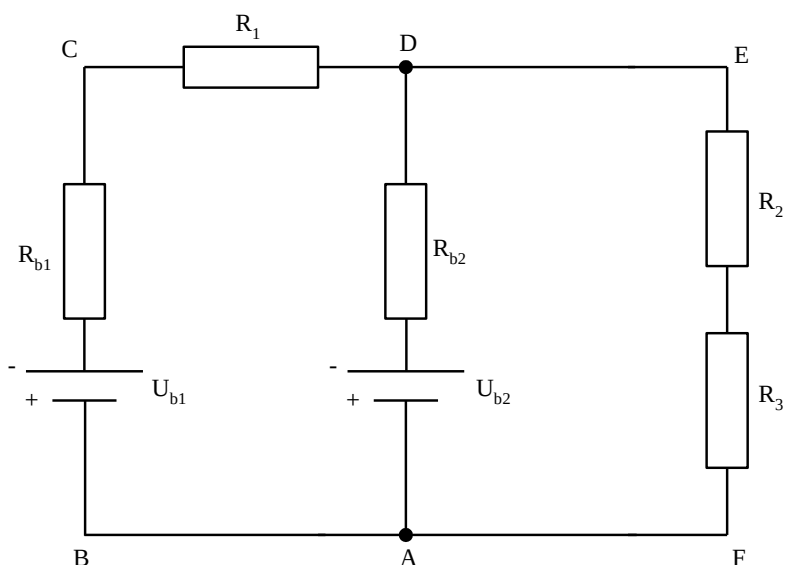
$$I_1 = \frac{U_1}{R_1} = \frac{48}{2} = 24 \text{ [A]}$$

$$I_2 = \frac{U_2}{R_2} = \frac{48}{10} = 4,8 \text{ [A]}$$

Megjegyzés: Az egyes ellenállásokon átfolyó áramok erősségének összege egyenlő az áramforráson átfolyó áram erősségével.

3. feladat

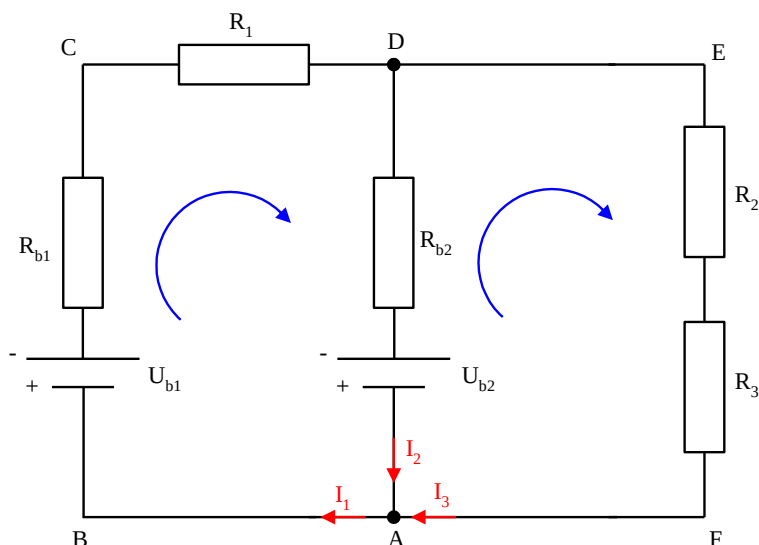
Számítsuk ki az alábbi egyenáramú hálózat egyes ágaiban folyó áramok erősségét, valamint határozzuk meg a hozzájuk tartozó technikai áramirányokat!



Adatok: $U_{b1} = 12 \text{ [V]}$, $U_{b2} = 24 \text{ [V]}$, $R_{b1} = 10 \text{ [\Omega]}$, $R_{b2} = 10 \text{ [\Omega]}$, $R_1 = 5 \text{ [\Omega]}$, $R_2 = 5 \text{ [\Omega]}$, $R_3 = 15 \text{ [\Omega]}$

Megoldás:

Először jelöljük ki önkényesen az egyes ágakban az áramirányokat, és a hurokokban a körüljárási irányokat.



A 3 ismeretlen áramerősség, és a hozzájuk tartozó technikai áramirányok meghatározásához 3 független egyenletre van szükség. Ehhez először írjuk fel az A-B-C-D-A hurokra Kirchhoff II. törvényét:

$$\text{I. } U_{b1} + R_{b1} \cdot I_1 + R_1 \cdot I_1 + R_{b2} \cdot I_2 - U_{b2} = 0$$

Ezt követően az A-D-E-F-A hurokra Kirchhoff II. törvényét:

$$\text{II. } U_{b2} - R_{b2} \cdot I_2 + R_2 \cdot I_3 + R_3 \cdot I_3 = 0$$

Végül írjuk fel a D csomópontra Kirchhoff I. törvényét:

$$\text{III. } I_1 - I_2 - I_3 = 0$$

Így egy három ismeretlenes lineáris egyenletrendszert kaptunk. Oldjuk meg az egyenletrendszert a Cramer-szabály alkalmazásával:

$$\text{I. } (R_{b1} + R_1) \cdot I_1 + R_{b2} \cdot I_2 = -U_{b1} + U_{b2}$$

$$\text{II. } -R_{b2} \cdot I_2 + (R_2 + R_3) \cdot I_3 = -U_{b2}$$

$$\text{III. } I_1 - I_2 - I_3 = 0$$

$$\text{I. } 15 \cdot I_1 + 10 \cdot I_2 + 0 \cdot I_3 = 12$$

$$\text{II. } 0 \cdot I_1 - 10 \cdot I_2 + 20 \cdot I_3 = -24$$

$$\text{III. } 1 \cdot I_1 - 1 \cdot I_2 - 1 \cdot I_3 = 0$$

Tehát az egyenletrendszer mátrixos alakban:

$$A \cdot I = b$$

Részletesebben kiírva:

$$\begin{bmatrix} 15 & 10 & 0 \\ 0 & -10 & 20 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ -24 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Számítsuk ki az A mátrix determinánsát a 3. sor szerinti kifejtéssel:

$$\det A = (1 \cdot (10 \cdot 20)) - (-1 \cdot (15 \cdot 20)) + (-1 \cdot (15 \cdot -10)) = 200 + 300 + 150 = 650$$

I_1 értékének kiszámításához az A mátrix első oszlopát cseréljük ki a b vektorra:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 12 & 10 & 0 \\ -24 & -10 & 20 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

Számítsuk ki az így kapott A_1 mátrix determinánsát:

$$\det A_1 = 0 - (-1 \cdot (12 \cdot 20)) - ((12 \cdot -10) - (-24 \cdot 10)) = 0 + 240 - 120 = 120$$

A keresett I_1 érték a két determináns hányadosa:

$$I_1 = \frac{\det A_1}{\det A} = \frac{120}{650} = 0,185 \text{ [A]}$$

Tehát az 1-es ágba folyó áram erőssége 0,185 [A], iránya pedig megegyezik a feltételezettel.

I_2 értékének kiszámításához az A mátrix második oszlopát cseréljük ki a b vektorra:

$$A_2 = \begin{bmatrix} 15 & 12 & 0 \\ 0 & -24 & 20 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Az A_2 mátrix determinánsa:

$$\det A_2 = (1 \cdot (6 \cdot 30)) + (-1 \cdot (10 \cdot -12)) = 240 - 0 + 360 = 600$$

A 2-es ágba folyó áram erőssége:

$$I_2 = \frac{\det A_2}{\det A} = \frac{600}{650} = 0,923 \text{ [A]}$$

Tehát a 2-es ágban folyó áram erőssége 0,923 [A], iránya pedig megegyezik a feltételezettel.

I_3 értékének kiszámításához az A mátrix harmadik oszlopát cseréljük ki a b vektorra:

$$A_3 = \begin{bmatrix} 15 & 10 & 12 \\ 0 & -10 & -24 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\det A_3 = (1 \cdot ((10 \cdot -24) - (-10 \cdot 12)) - (-1 \cdot (15 \cdot -24)) + 0 = -120 - 360 + 0 = -480$$

$$I_3 = \frac{\det A_3}{\det A} = \frac{-480}{650} = -0,738 \text{ [A]}$$

Tehát a 3-as ágban folyó áram erőssége 0,26 [A], iránya pedig a feltételezettel ellentétes.

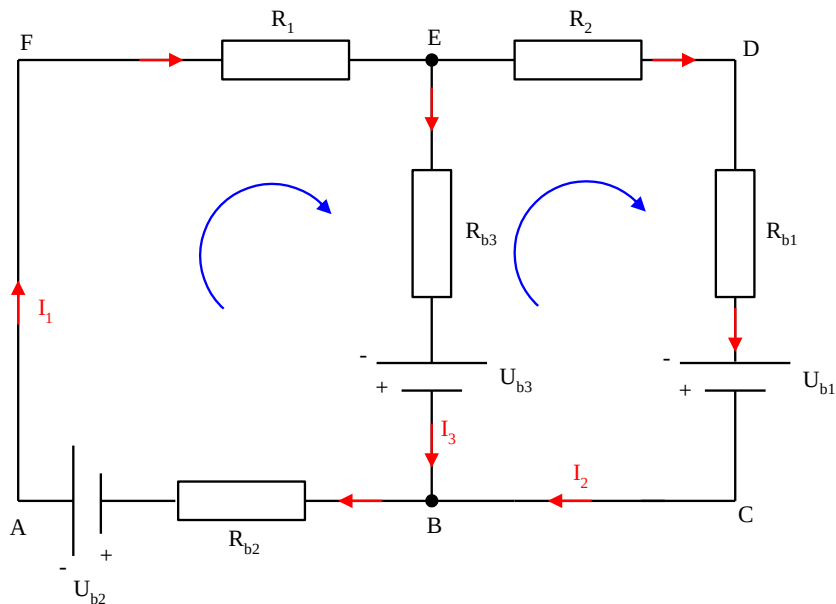
A kapott megoldásokat leellenőrizhetjük visszahelyettesítve az eredeti három egyenletbe. Gyors (de nem teljes) ellenőrzésként most csak a III. egyenletbe helyettesítünk:

$$I_1 - I_2 - I_3 = 0,185 - 0,923 - (-0,738) = 0$$

4. Feladat

Számítsuk ki az alábbi egyenáramú hálózat egyes ágaiban folyó áramok erősségét, valamint határozzuk meg a hozzájuk tartozó technikai áramirányokat! (Az ábrán önkényesen kijelöltük a hurkokhoz tartozó körüljárási irányokat, valamint az egyes ágakban feltételezett technikai áramirányokat.)

Adatok: $U_{b1} = 20 \text{ [V]}$, $U_{b2} = 10 \text{ [V]}$, $U_{b3} = 5 \text{ [V]}$, $R_1 = 2 \text{ [}\Omega\text{]}$, $R_{b1} = 7 \text{ [}\Omega\text{]}$, $R_2 = 4 \text{ [}\Omega\text{]}$, $R_{b2} = 6 \text{ [}\Omega\text{]}$, $R_{b3} = 4 \text{ [}\Omega\text{]}$



Megoldás:

Kirchhoff II. törvénye az A-F-E-B-A hurokra:

$$\text{I. } \sum_i U_i = R_1 \cdot I_1 + R_{b3} \cdot I_3 - U_{b3} + R_{b2} \cdot I_1 + U_{b2} = 0$$

Kirchhoff II. törvénye a B-E-D-C-B hurokra:

$$\text{II. } \sum_i U_i = U_{b3} - R_{b3} \cdot I_3 + R_2 \cdot I_2 + R_{b1} \cdot I_2 - U_{b1} = 0$$

Kirchhoff I. törvénye a B csomópontokra:

$$\text{III. } \sum_i I_i = -I_1 + I_2 + I_3 = 0$$

$$\text{I. } (R_1 + R_{b2}) \cdot I_1 + R_{b3} \cdot I_3 = U_{b3} - U_{b2}$$

$$\text{II. } (R_2 + R_{b1}) \cdot I_2 - R_{b3} \cdot I_3 = U_{b1} - U_{b3}$$

$$\text{III. } -I_1 + I_2 + I_3 = 0$$

$$\text{I. } 8 \cdot I_1 + 0 \cdot I_2 + 4 \cdot I_3 = -5$$

$$\text{II. } 0 \cdot I_1 + 11 \cdot I_2 - 4 \cdot I_3 = 15 \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} 8 & 0 & 4 \\ 0 & 11 & -4 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ 15 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{III. } -1 \cdot I_1 + 1 \cdot I_2 + 1 \cdot I_3 = 0$$

Oldjuk meg az egyenletrendszert a Cramer-szabályt alkalmazva:

$$A = \begin{bmatrix} 8 & 0 & 4 \\ 0 & 11 & -4 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_1 = \begin{bmatrix} -5 & 0 & 4 \\ 15 & 11 & -4 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 8 & -5 & 4 \\ 0 & 15 & -4 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} 8 & 0 & -5 \\ 0 & 11 & 15 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\det A = \begin{vmatrix} 8 & 0 & 4 \\ 0 & 11 & -4 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 164 \quad \det A_1 = \begin{vmatrix} -5 & 0 & 4 \\ 15 & 11 & -4 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -15$$

$$\det A_2 = \begin{vmatrix} 8 & -5 & 4 \\ 0 & 15 & -4 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 160 \quad \det A_3 = \begin{vmatrix} 8 & 0 & -5 \\ 0 & 11 & 15 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -175$$

$$I_1 = \frac{\det A_1}{\det A} = \frac{-15}{164} = -0,09 \text{ [A]}$$

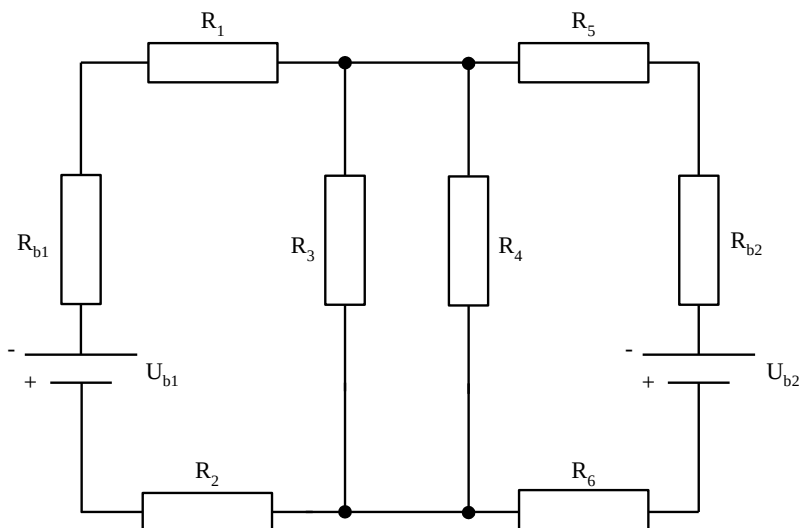
$$I_2 = \frac{\det A_2}{\det A} = \frac{160}{164} = 0,98 \text{ [A]}$$

$$I_3 = \frac{\det A_3}{\det A} = \frac{-175}{164} = -1,07 \text{ [A]}$$

Megjegyzés: A negatív előjel azt jelenti, hogy a valós áramirány ellentétes a feltételezettel.

5. feladat

Határozzuk meg az R_3 ellenálláson átfolyó áram erősségét és a hozzá tartozó technikai áramirányt!



Adatok: $U_{b1} = 24 \text{ [V]}$, $U_{b2} = 48 \text{ [V]}$, $R_{b1} = 10 \text{ [\Omega]}$, $R_{b2} = 20 \text{ [\Omega]}$, $R_1 = 10 \text{ [\Omega]}$, $R_2 = 10 \text{ [\Omega]}$, $R_3 = 20 \text{ [\Omega]}$, $R_4 = 20 \text{ [\Omega]}$, $R_5 = 10 \text{ [\Omega]}$, $R_6 = 10 \text{ [\Omega]}$

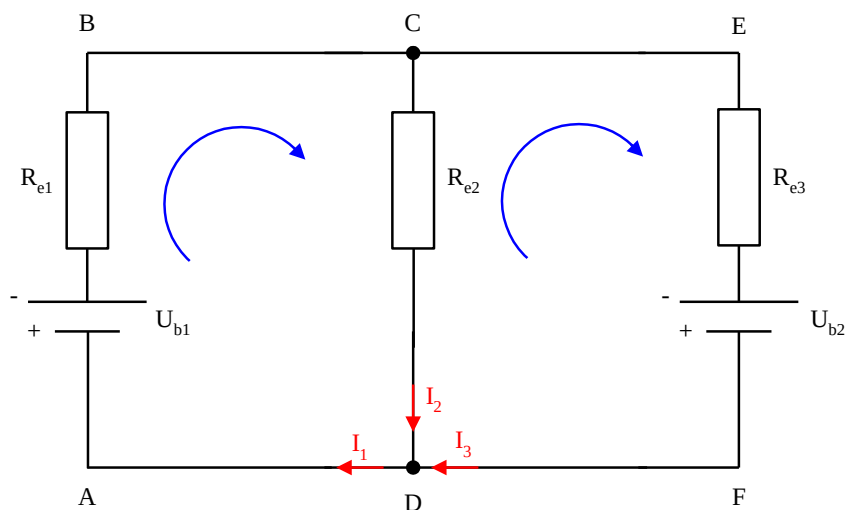
Megoldás:

Eredő ellenállások számításával a hálózat az alábbi egyszerű hálózattá redukálható, ahol:

$$R_{e1} = R_{b1} + R_1 + R_2 = 10 + 10 + 10 = 30 \text{ [\Omega]}$$

$$R_{e2} = \frac{1}{\frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4}} = \frac{1}{\frac{1}{20} + \frac{1}{20}} = \frac{1}{\frac{2}{20}} = \frac{20}{2} = 10 \text{ [\Omega]}$$

$$R_{e3} = R_{b2} + R_5 + R_6 = 20 + 10 + 10 = 40 \text{ [\Omega]}$$



Írjuk fel a bal oldali (D-A-B-C-D) hurokra Kirchhoff II. törvényét:

$$\text{I. } U_{b1} + R_{e1} \cdot I_1 + R_{e2} \cdot I_2 = 0$$

Ezután írjuk fel a jobb oldali (D-C-E-F-D) hurokra Kirchhoff II. törvényét:

$$\text{II. } R_{e3} \cdot I_3 - U_{b2} - R_{e2} \cdot I_2 = 0$$

Végül írjuk fel a D csomóponttra Kirchhoff I. törvényét:

$$\text{III. } I_1 - I_2 - I_3 = 0$$

Az egyenletrendszer mátrixos alakban:

$$\begin{bmatrix} 30 & 10 & 0 \\ 0 & -10 & 40 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -24 \\ 48 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Oldjuk meg az egyenletrendszert a Cramer-szabályt alkalmazva!

Számítsuk ki az A mátrix determinánsát:

$$\det A = (1 \cdot (10 \cdot 40)) - (-1 \cdot (30 \cdot 40)) + (-1 \cdot (30 \cdot -10)) = 400 + 1200 + 300 = 1900$$

Mivel a kérdés az R_3 ellenálláson átfolyó áram erőssége és a hozzátartozó technikai áramirány, ezért elég az I_2 áramerősséget kiszámolni:

$$A_2 = \begin{bmatrix} 30 & -24 & 0 \\ 0 & 48 & 40 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\det A_2 = 1 \cdot (-24 \cdot 40) - 0 + (-1 \cdot (30 \cdot 48)) = -960 - 1440 = -2400$$

$$I_2 = \frac{\det A_2}{\det A} = \frac{-2400}{1900} = -1,26 \text{ [A]}$$

Tehát az R_{e2} ellenálláson átfolyó áram erőssége 1,26 [A], a technikai áramirány pedig a feltételezettel ellentétes.

Ohm törvénye alapján az R_{e2} eredő ellenálláson eső feszültség:

$$U_e = I_{e2} \cdot R_{e2} = 1,26 \cdot 10 = 12,6 \text{ [V]}$$

A párhuzamos kapcsolás miatt az R_3 ellenálláson ugyanekkora feszültség esik, így Ohm törvénye alapján az R_3 ellenálláson átfolyó áram erőssége:

$$I_3 = \frac{U_e}{R_3} = \frac{12,6}{20} = 0,63 \text{ [A]}$$

Tehát az R_3 ellenálláson átfolyó áram erőssége 0,63 [A], iránya pedig megegyezik az R_{e2} ellenállásnál feltételezett áram irányával.

7. Hőtranszport állandósult állapotban

7.1 Hővezetés

1. feladat

Mekkora annak a falnak a hővezetési ellenállása, amelyen keresztül 100 [W] erősségű hőáram halad keresztül, ha a fal két oldala között a hőmérsékletkülönbség 5 [°C]?

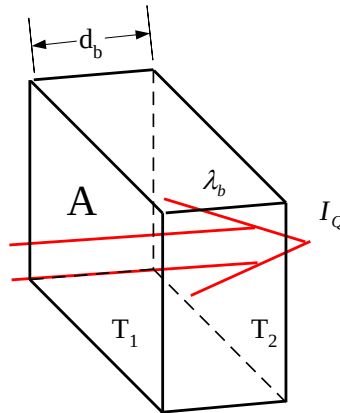
Megoldás:

$$I_Q \cdot R_\lambda = \Delta T \Rightarrow R_\lambda = \frac{\Delta T}{I_Q} = \frac{5}{100} = 0,05 \left[\frac{\text{K}}{\text{W}} \right]$$

A megoldás során a hőmérsékleteket Celsius fokban is megadhatjuk, mivel a Celsius és Kelvin fokban vett hőmérsékletkülönbség egymással egyenlő.

2. feladat

Az ábrán egy épület betonból készült fala látható. A fal belső és külső felületének hőmérsékletét T_1 és T_2 jelöli.



Adatok: $d_b = 0,2 \text{ [m]}$, $A = 1 \text{ [m}^2\text{]}$, $\lambda_b = 1,1 \left[\frac{\text{W}}{\text{m}\cdot\text{K}} \right]$, $T_1 = 20 \text{ [}^\circ\text{C]}$, $T_2 = 0 \text{ [}^\circ\text{C]}$

Számítsuk ki állandósult állapotban az A felületű, d vastagságú falon áthaladó hőáram erősségét! Számítsuk ki a falon keresztül 1 óra alatt átjutó hőmennyiséget!

Megoldás:

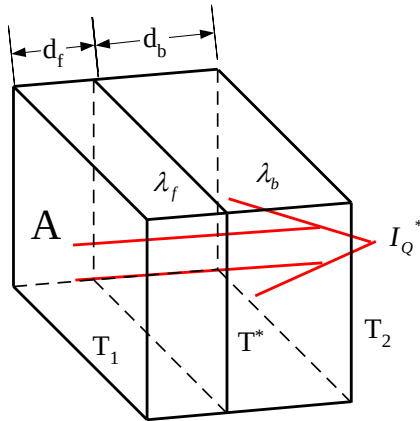
$$R_{\lambda b} = \frac{d_b}{\lambda_b \cdot A} = 0,182 \left[\frac{\text{K}}{\text{W}} \right]$$

$$I_Q \cdot R_{\lambda b} = -(T_2 - T_1) \Rightarrow I_Q = \frac{-(T_2 - T_1)}{R_{\lambda b}} = \frac{20}{0,182} = 110 \text{ [W]}$$

$$\Delta Q = I_Q \cdot \Delta t = 110 \cdot 3600 = 396000 \text{ [J]} = 396 \text{ [kJ]}$$

3. feladat

A 2. feladatban szereplő betonfal belső oldalára egy d_f vastagságú fenyőfa réteget (lambériát) erősítünk.



Adatok: $d_f = 0,01 \text{ [m]}$, $d_b = 0,2 \text{ [m]}$, $A = 1 \text{ [m}^2\text{]}$, $\lambda_b = 1,1 \left[\frac{\text{W}}{\text{m} \cdot \text{K}} \right]$, $\lambda_f = 0,11 \left[\frac{\text{W}}{\text{m} \cdot \text{K}} \right]$, $T_1 = 20 \text{ [}^\circ\text{C]}$, $T_2 = 0 \text{ [}^\circ\text{C]}$

a) Számítsuk ki a fenti, összetett falon keresztül áthaladó hőáram erősségét! A fal belső és külső felületének hőmérséklete ugyanaz, mint az 1. feladatban. Hány százalékkal csökken a hőszigetelés hatására a falon áthaladó hőáram erőssége?

b) Számítsuk ki a rétegek érintkező felületének hőmérsékletét (T^*)!

c) Rajzoljuk fel a hőmérsékleteloszlását a falra merőleges irányban!

Megoldás:

a)

$$R_{\lambda f} = \frac{d_f}{\lambda_f \cdot A} = \frac{0,01}{0,11 \cdot 1} = 0,091 \left[\frac{\text{K}}{\text{W}} \right]$$

$$R_{\lambda e} = R_{\lambda f} + R_{\lambda b} = 0,273 \left[\frac{\text{K}}{\text{W}} \right]$$

$$I_Q^* \cdot R_{\lambda e} = -(T_2 - T_1) \Rightarrow I_Q^* = \frac{-(T_2 - T_1)}{R_{\lambda e}} = 73,26 \text{ [W]}$$

$$\frac{I_Q - I_Q^*}{I_Q} \cdot 100\% = 33,33\%$$

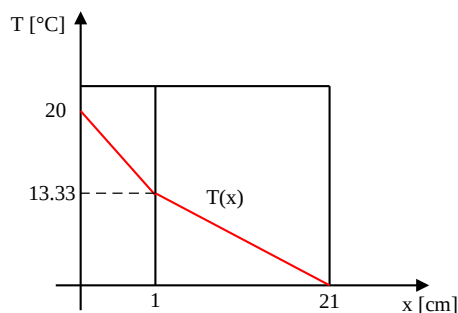
Tehát 1 cm vastag fenýőfa szigetelés alkalmazása 33,33% energia megtakarítást jelent.

b)

$$I_Q^* \cdot R_{\lambda f} = -(T^* - T_1) = T_1 - T^*$$

$$T^* = T_1 - I_Q^* \cdot R_{\lambda f} = 20 - 73,26 \cdot 0,091 = 13,33 \text{ [}^\circ\text{C]}$$

c)



4. feladat

Egy ablakban lévő üveg vastagsága 5 [mm]. Az üveg belső felülete 21 [°C], a külső 14 [°C] hőmérsékletű. Mennyi hő távozik el az ablaküvegen keresztül 1 óra alatt, ha az ablaküveg felülete 80x80 [cm], és az üveg hővezetési tényezője $0,8 \left[\frac{\text{W}}{\text{m}\cdot\text{K}} \right]$?

Megoldás:

Az ablaküveg felülete:

$$A = 0,8 \cdot 0,8 = 0,64 \text{ [m}^2\text{]}$$

Az ablaküveg hőátbocsátási ellenállása:

$$R_\lambda = \frac{d}{\lambda \cdot A} = \frac{0,005}{0,8 \cdot 0,64} = 0,00976 \left[\frac{\text{K}}{\text{W}} \right]$$

A hőáram erőssége:

$$I_Q = \frac{-(T_K - T_B)}{R_e} = \frac{-(14 - 21)}{0,00976} = 717,2 \text{ [W]}$$

A távozó hőmennyiség:

$$\Delta Q = I_Q \cdot \Delta t = 717,2 \cdot 3600 = 2581,92 \text{ [kJ]}$$

Az előbbi egyrétegű ablaküveget kicseréljük egy kétrétegűre, ahol az egyes üvegrétegek vastagsága 4 [mm], és a köztük lévő légréteg 2 [cm]. Mennyi lesz ekkor az 1 óra alatt távozó hő mennyisége? (A légrétegben a hőáramlást elhanyagoljuk, a levegő hővezetési tényezője $0,026 \left[\frac{\text{W}}{\text{m}\cdot\text{K}} \right]$.)

Megoldás:

Az ablaküveg hőátbocsátási ellenállása:

$$R_e = R_{\lambda_{\bar{u}}} + R_{\lambda_l} + R_{\lambda_{\bar{u}}}$$

$$R_e = \frac{d_{\bar{u}}}{\lambda_{\bar{u}} \cdot A} + \frac{d_l}{\lambda_l \cdot A} + \frac{d_{\bar{u}}}{\lambda_{\bar{u}} \cdot A} = \frac{0,004}{0,8 \cdot 0,64} + \frac{0,02}{0,026 \cdot 0,64} + \frac{0,004}{0,8 \cdot 0,64} = 1,22 \left[\frac{\text{K}}{\text{W}} \right]$$

A hőáram erőssége:

$$I_Q = \frac{-(T_K - T_B)}{R_e} = \frac{-(14 - 21)}{1,22} = 5,74 \text{ [W]}$$

A távozó hőmennyiség:

$$\Delta Q = I_Q \cdot \Delta t = 5,74 \cdot 3600 = 20,664 \text{ [kJ]}$$

Mekkora vastagságúnak kellene lennie az egyrétegű üveglaknak, hogy azonos felületi hőmérsékletek mellett, ugyanannyi idő alatt, ugyanekkora hőmennyiség távozzon rajta?

Megoldás:

Az egyrétegű üveglak hővezetési ellenállásának az összetett ablakszerkezet eredő ellenállásával kellene megegyeznie:

$$R_\lambda = 1,22 \left[\frac{\text{K}}{\text{W}} \right]$$

$$R_{\lambda} = \frac{d}{\lambda \cdot A} \Rightarrow d = R_{\lambda} \cdot \lambda \cdot A = 1,22 \cdot 0,8 \cdot 0,64 = 0,625 \text{ [m]}$$

Tehát az egyrétegű üveglapnak 62,5 [cm] vastagnak kellene lennie.

5. feladat

Egy 2 cm átmérőjű, 1 m hosszú, kör keresztmetszetű acélrudat 2 mm vastag króm réteggel vonunk be. Az összetett fémrúd egyik vége 100 °C, a másik pedig 20 °C. Az acél hővezetési tényezője: $46 \left[\frac{\text{W}}{\text{m} \cdot \text{K}} \right]$, a króm hővezetési tényezője: $91 \left[\frac{\text{W}}{\text{m} \cdot \text{K}} \right]$.

Számítsuk ki a kialakuló hőáram erősségét, és a rúdon 10 perc alatt átáramló hő mennyiségét!

Adatok: $T_1 = 100 \text{ [}^\circ\text{C]}$, $T_2 = 20 \text{ [}^\circ\text{C]}$, $l = 1 \text{ [m]}$, $d_{\text{acél}} = 2 \text{ [cm]} = 0,02 \text{ [m]}$,

$d_{\text{össz}} = 2,4 \text{ [cm]} = 0,024 \text{ [m]}$, $\Delta t = 10 \text{ [min]} = 600 \text{ [s]}$, $\lambda_{\text{acél}} = 46 \left[\frac{\text{W}}{\text{m} \cdot \text{K}} \right]$, $\lambda_{\text{króm}} = 91 \left[\frac{\text{W}}{\text{m} \cdot \text{K}} \right]$

Megoldás:

Az összetett fémrúdban a hő párhuzamosan áramlik az acél és a króm rétegben, így az összetett rúd eredő hővezetési ellenállása:

$$R_{\lambda_e} = \frac{1}{\frac{1}{R_{\lambda_{\text{acél}}}} + \frac{1}{R_{\lambda_{\text{króm}}}}} = \frac{1}{\frac{\lambda_{\text{acél}} \cdot A_{\text{acél}}}{l} + \frac{\lambda_{\text{króm}} \cdot A_{\text{króm}}}{l}} = \frac{l}{\lambda_{\text{acél}} \cdot A_{\text{acél}} + \lambda_{\text{króm}} \cdot A_{\text{króm}}}$$

Az acél réteg keresztmetszete:

$$A_{\text{acél}} = \frac{d_{\text{acél}}^2 \cdot \pi}{4} = \frac{0,02^2 \cdot \pi}{4} = 0,000314 \text{ [m}^2\text{]}$$

A króm réteg keresztmetszete:

$$A_{\text{króm}} = A_{\text{össz}} - A_{\text{acél}} = \frac{d_{\text{össz}}^2 \cdot \pi}{4} - \frac{d_{\text{acél}}^2 \cdot \pi}{4} = \frac{0,024^2 \cdot \pi}{4} - \frac{0,02^2 \cdot \pi}{4} = 0,000138 \text{ [m}^2\text{]}$$

Az eredő hővezetési ellenállás:

$$R_{\lambda_e} = \frac{l}{\lambda_{\text{acél}} \cdot A_{\text{acél}} + \lambda_{\text{króm}} \cdot A_{\text{króm}}} = \frac{1}{46 \cdot 0,000314 + 91 \cdot 0,000138} = 37,03 \left[\frac{\text{K}}{\text{W}} \right]$$

A kialakuló hőáram erőssége:

$$I_Q = \frac{-\Delta T}{R_{\lambda_e}} = \frac{-(T_2 - T_1)}{R_{\lambda_e}} = \frac{-(20 - 100)}{37,03} = 2,16 \text{ [W]}$$

A 10 perc alatt átáramló hőmennyiség:

$$\Delta Q = I_Q \cdot \Delta t = 2,16 \cdot 600 = 1296 \text{ [J]}$$

6. feladat

Egy 5 cm átmérőjű, 1 m hosszú, kör keresztmetszetű acélrudat króm réteggel vonunk be. Az acél hővezetési tényezője: $46 \left[\frac{\text{W}}{\text{m}\cdot\text{K}} \right]$, a króm hővezetési tényezője: $91 \left[\frac{\text{W}}{\text{m}\cdot\text{K}} \right]$.

Mekkora a króm bevonat keresztmetszete, ha a rúd két vége közötti $50 \text{ } [^{\circ}\text{C}]$ nagyságú hőmérsékletkülönbség hatására 10 [W] hőáram alakul ki? (A rúdban a hő csak hosszirányban terjed, és nincs hővesztés.)

Adatok: $\Delta T = 50 \text{ } [^{\circ}\text{C}]$, $l = 1 \text{ [m]}$, $d_{\text{acél}} = 5 \text{ [cm]} = 0,05 \text{ [m]}$, $\lambda_{\text{acél}} = 46 \left[\frac{\text{W}}{\text{m}\cdot\text{K}} \right]$, $\lambda_{\text{króm}} = 91 \left[\frac{\text{W}}{\text{m}\cdot\text{K}} \right]$, $I_Q = 10 \text{ [W]}$

Megoldás:

Az összetett fémrúdban a hő párhuzamosan áramlik az acél és a króm rétegben. Először számoljuk ki az összetett rúd eredő hővezetési ellenállását a megadott adatokból:

$$I_Q = \frac{\Delta T}{R_{\lambda_e}} \Rightarrow R_{\lambda_e} = \frac{\Delta T}{I_Q} = \frac{50}{10} = 5 \left[\frac{\text{K}}{\text{W}} \right]$$

Az acélrúd hővezetési ellenállása:

$$R_{\lambda_{\text{acél}}} = \frac{l}{\lambda_{\text{acél}} \cdot A_{\text{acél}}} = \frac{1}{46 \cdot 0,00196} = 11,09 \left[\frac{\text{K}}{\text{W}} \right], \text{ ahol:}$$

$$A_{\text{acél}} = \frac{d_{\text{acél}}^2 \cdot \pi}{4} = \frac{0,05^2 \cdot \pi}{4} = 0,00196 \text{ [m}^2\text{]}$$

Ezt követően kiszámítható a króm bevonat hővezetési ellenállása:

$$\frac{1}{R_{\lambda_{\text{króm}}}} = \frac{1}{R_{\lambda_e}} - \frac{1}{R_{\lambda_{\text{acél}}}} \Rightarrow R_{\lambda_{\text{króm}}} = 0,11 \left[\frac{\text{K}}{\text{W}} \right]$$

Ebből a króm bevonat keresztmetszete:

$$R_{\lambda_{\text{króm}}} = \frac{l}{\lambda_{\text{króm}} \cdot A_{\text{króm}}} \Rightarrow A_{\text{króm}} = \frac{l}{\lambda_{\text{króm}} \cdot R_{\lambda_{\text{króm}}}} = \frac{1}{91 \cdot 0,11} = 0,1 \text{ [m}^2\text{]}$$

7.2 Hőátadás

1. feladat

Az épület falának külső felülete $5 \text{ } [^{\circ}\text{C}]$ hőmérsékletű. A külső levegő hőmérséklete $0 \text{ } [^{\circ}\text{C}]$.

Mekkora lesz a $1 \text{ [m}^2\text{]}$ falfelület hőátadásához tartozó hőáram erőssége, ha a fal és a levegő közötti hőátadási tényező $20 \left[\frac{\text{W}}{\text{m}^2\cdot\text{K}} \right]$? Mekkora lesz az egy óra alatt a falfelület által átadott hőmennyiség?

Adatok: $T_F = 5 \text{ } [^{\circ}\text{C}]$, $T_K = 0 \text{ } [^{\circ}\text{C}]$, $A = 1 \text{ [m}^2\text{]}$, $\Delta t = 1 \text{ [h]} = 3600 \text{ [s]}$, $\alpha = 20 \left[\frac{\text{W}}{\text{m}^2\cdot\text{K}} \right]$

Megoldás:

A kialakuló hőáram erőssége:

$$I_Q = -\alpha \cdot A \cdot (T_K - T_F) = -20 \cdot 1 \cdot (0 - 5) = 100 \text{ [W]}$$

A Δt idő alatt átadott hőmennyiség:

$$\Delta Q = I_Q \cdot \Delta t = 100 \cdot 3600 = 360000 \text{ [J]}$$

Hogyan változik az átadott hőmennyiség, ha kint fúj a szél? A mozgó levegő és a fal közötti hőátadási tényező $35 \left[\frac{\text{W}}{\text{m}^2 \cdot \text{K}} \right]$, a többi adat változatlan marad.

Megoldás:

A kialakuló hőáram erőssége:

$$I_Q = -\alpha \cdot A \cdot (T_K - T_F) = -35 \cdot 1 \cdot (0 - 5) = 175 \text{ [W]}$$

A Δt idő alatt átadott hőmennyiség:

$$\Delta Q = I_Q \cdot \Delta t = 175 \cdot 3600 = 630000 \text{ [J]}$$

2. feladat

Egy 10 [cm] vastag, 4 [m²] felületű fal hőátadási ellenállása $0,017 \left[\frac{\text{K}}{\text{W}} \right]$.

Mekkora a levegő és a fal között a hőátadási tényező?

Megoldás:

$$R_\alpha = \frac{1}{\alpha \cdot A} \Rightarrow \alpha = \frac{1}{R_\alpha \cdot A} = \frac{1}{0,017 \cdot 4} = 14,7 \approx 15 \left[\frac{\text{W}}{\text{m}^2 \cdot \text{K}} \right]$$

3. feladat

Egy 30 [°C] hőmérsékletű környezetben üzemelő villamos fűtőtest 600 [W] teljesítményt ad le négyzetméterenként, mialatt felületének hőmérséklete állandó 150 [°C]. Mekkora lesz felületének hőmérséklete, ha 400 [W] teljesítményt ad le és a környezeti hőmérséklet 25 [°C]-ra változik? (Minden egyéb feltétel változatlan marad. A hősugárzást elhanyagoljuk.)

Adatok: $T_{F1} = 150 \text{ [°C]}$, $T_{K1} = 30 \text{ [°C]}$, $P_1 = 600 \text{ [W]}$, $T_{K2} = 25 \text{ [°C]} = 298,15 \text{ [K]}$, $P_2 = 400 \text{ [W]}$, $A = 1 \text{ [m}^2\text{]}$

Megoldás:

A kialakuló hőáram erőssége a fűtőtest leadott hőteljesítményével egyezik meg. Mivel csak a hőátadást vesszük figyelembe:

$$P_1 = I_Q = -\alpha \cdot A \cdot (T_{K1} - T_{F1})$$

Ebből meghatározható a felület és a környező levegő közötti hőátadási tényező:

$$\alpha = -\frac{P_1}{A \cdot (T_{K1} - T_{F1})} = -\frac{600}{1 \cdot (30 - 150)} = 5 \left[\frac{\text{W}}{\text{m}^2 \cdot \text{K}} \right]$$

Ha megváltozik a teljesítmény és a környezet hőmérséklete, akkor változatlan hőátadási tényező mellett a felület hőmérséklete:

$$T_{F2} = \frac{P_2}{\alpha \cdot A} + T_{K2} = \frac{400}{5 \cdot 1} + 25 = 105 \text{ [°C]}$$

4. feladat

Mekkora a felülete és felületi hőmérséklete annak a tárgynak, melyről $20\text{ [}^\circ\text{C]}$ hőmérsékletű környezetben $10\left[\frac{\text{W}}{\text{m}^2\cdot\text{K}}\right]$ hőátadási tényező mellett 700 [W] hőáram, $25\text{ [}^\circ\text{C]}$ hőmérsékletű környezetben $20\left[\frac{\text{W}}{\text{m}^2\cdot\text{K}}\right]$ hőátadási tényező mellett 550 [W] hőáram alakul ki? (A hősugárzástól eltekintünk.)

Adatok: $T_{K1} = 20\text{ [}^\circ\text{C]}$, $\alpha_1 = 10\left[\frac{\text{W}}{\text{m}^2\cdot\text{K}}\right]$, $I_{Q1} = 700\text{ [W]}$, $T_{K2} = 25\text{ [}^\circ\text{C]}$, $\alpha_2 = 20\left[\frac{\text{W}}{\text{m}^2\cdot\text{K}}\right]$, $I_{Q2} = 550\text{ [W]}$

Megoldás:

A kialakuló hőáramok erőssége:

$$I_{Q1} = -\alpha_1 \cdot A \cdot (T_{K1} - T_F)$$

$$I_{Q2} = -\alpha_2 \cdot A \cdot (T_{K2} - T_F)$$

A két egyenletet egymással leosztva A -val egyszerűsíthetünk:

$$\frac{I_{Q1}}{I_{Q2}} = \frac{-\alpha_1 \cdot A \cdot (T_{K1} - T_F)}{-\alpha_2 \cdot A \cdot (T_{K2} - T_F)} = \frac{\alpha_1 \cdot (T_{K1} - T_F)}{\alpha_2 \cdot (T_{K2} - T_F)}$$

$$I_{Q1} \cdot \alpha_2 \cdot (T_{K2} - T_F) = I_{Q2} \cdot \alpha_1 \cdot (T_{K1} - T_F)$$

Kifejezve a T_F -et:

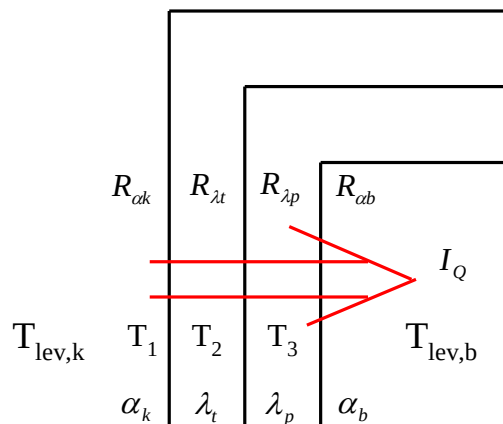
$$T_F = \frac{I_{Q1} \cdot \alpha_2 \cdot T_{K2} - I_{Q2} \cdot \alpha_1 \cdot T_{K1}}{I_{Q1} \cdot \alpha_2 - I_{Q2} \cdot \alpha_1} = \frac{700 \cdot 20 \cdot 25 - 550 \cdot 10 \cdot 20}{700 \cdot 20 - 550 \cdot 10} = 28,23\text{ [}^\circ\text{C]}$$

Így a felület:

$$A = \frac{I_{Q1}}{-\alpha_1 \cdot (T_{K1} - T_F)} = \frac{700}{-10 \cdot (20 - 28,23)} = 8,5\text{ [m}^2\text{]}$$

5. feladat

Az alábbi ábra egy hűtőház kétrétegű falát mutatja. A fal külső rétege vörös téglá, míg a belső parafa.



Adatok: $T_{lev,k} = 25 [^{\circ}C]$, $T_{lev,b} = -2 [^{\circ}C]$, $\alpha_k = 20 \left[\frac{W}{m^2 \cdot K} \right]$, $\alpha_b = 10 \left[\frac{W}{m^2 \cdot K} \right]$, $d_t = 0,25 [m]$,
 $d_p = 0,2 [m]$, $A = 1 [m^2]$, $\lambda_t = 0,042 \left[\frac{W}{m \cdot K} \right]$, $\lambda_p = 0,77 \left[\frac{W}{m \cdot K} \right]$.

- Számítsuk ki a falszerkezet hőátbocsátási ellenállását!
- Számítsuk ki a hőáram erősségét a falon keresztül!
- Számítsuk ki az ábrán látható T_1 , T_2 , T_3 felületi hőmérsékleteket!
- Rajzoljuk fel a hőmérsékleteloszlást a falra merőleges irányban!

Megoldás:

a) A falszerkezet hőátbocsátási ellenállása:

$$R_e = R_{\alpha k} + R_{\lambda t} + R_{\lambda p} + R_{\alpha b} = \frac{1}{\underbrace{\alpha_k \cdot A}_{0,05}} + \frac{d_t}{\underbrace{\lambda_t \cdot A}_{0,325}} + \frac{d_p}{\underbrace{\lambda_p \cdot A}_{4,762}} + \frac{1}{\underbrace{\alpha_b \cdot A}_{0,1}} = 5,237 \left[\frac{K}{W} \right]$$

b) A hőáram erősség:

$$I_Q \cdot R_e = -(T_{lev,b} - T_{lev,k}) \Rightarrow I_Q = -\frac{T_{lev,b} - T_{lev,k}}{R_e} = \frac{27}{5,237} = 5,156 [W]$$

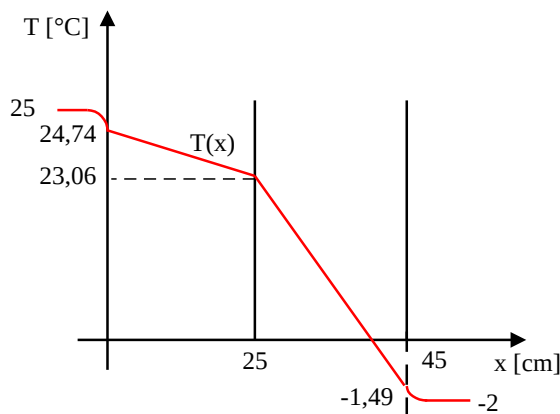
c) A felületi hőmérsékletek:

$$I_Q \cdot R_{\alpha k} = -(T_1 - T_0) = T_0 - T_1 \Rightarrow T_1 = T_0 - I_Q \cdot R_{\alpha k} = 24,74 [^{\circ}C]$$

$$I_Q \cdot R_{\lambda t} = -(T_2 - T_1) = T_1 - T_2 \Rightarrow T_2 = T_1 - I_Q \cdot R_{\lambda t} = 23,06 [^{\circ}C]$$

$$I_Q \cdot R_{\lambda p} = -(T_3 - T_2) = T_2 - T_3 \Rightarrow T_3 = T_2 - I_Q \cdot R_{\lambda p} = -1,49 [^{\circ}C]$$

d) A falszerkezet hőmérsékleteloszlása a falra merőleges irányban:



6. feladat

Adott egy 20 [cm] vastag téglafal, melyet belülről 2 [cm] gipszkarton, kívülről 1 [cm] vakolat borít.

Milyen vastagságú EPS hőszigetelő réteget kell a fal és a vakolat közé elhelyezni, ha azt szeretnénk, hogy a kialakuló hőáram feleakkora legyen, mint az EPS alkalmazása nélkül?

Adatok: $T_K = -10 [^{\circ}\text{C}]$, $T_B = 20 [^{\circ}\text{C}]$, $\lambda_{\text{tégla}} = 0,5 \left[\frac{\text{W}}{\text{m} \cdot \text{K}} \right]$, $\lambda_{\text{gipszkarton}} = 0,24 \left[\frac{\text{W}}{\text{m} \cdot \text{K}} \right]$,
 $\lambda_{\text{vakolat}} = 0,79 \left[\frac{\text{W}}{\text{m} \cdot \text{K}} \right]$, $\lambda_{\text{EPS}} = 0,04 \left[\frac{\text{W}}{\text{m} \cdot \text{K}} \right]$,
 $\alpha_1 = 15 \left[\frac{\text{W}}{\text{m}^2 \cdot \text{K}} \right]$ (a belső falfelület és levegő között),
 $\alpha_2 = 25 \left[\frac{\text{W}}{\text{m}^2 \cdot \text{K}} \right]$ (a külső falfelület és levegő között).

Megoldás:

A falszerkezet eredő hőátbocsátási ellenállása:

$$R_e = R_{\alpha_1} + R_{\lambda_1} + R_{\lambda_2} + R_{\lambda_3} + R_{\alpha_2} = \frac{1}{\alpha_1 \cdot A} + \frac{d_{\text{gipszkarton}}}{\lambda_{\text{gipszkarton}} \cdot A} + \frac{d_{\text{tégla}}}{\lambda_{\text{tégla}} \cdot A} + \frac{d_{\text{vakolat}}}{\lambda_{\text{vakolat}} \cdot A} + \frac{1}{\alpha_2 \cdot A}$$

$$R_e = \frac{1}{15 \cdot 1} + \frac{0,02}{0,24 \cdot 1} + \frac{0,2}{0,5 \cdot 1} + \frac{0,01}{0,79 \cdot 1} + \frac{1}{25 \cdot 1} = 0,6 \left[\frac{\text{K}}{\text{W}} \right]$$

A kialakuló hőáram erőssége a szigetetlen falon keresztül:

$$I_{Q1} = \frac{-\Delta T}{R_e} = \frac{-(T_K - T_B)}{R_e} = \frac{-((-10) - 20)}{0,6} = 50 [\text{W}]$$

Az EPS réteggel szigetelt falon keresztül a fenti hőáram erősség fele alakul ki:

$$I_{Q2} = \frac{I_{Q1}}{2} = \frac{50}{2} = 25 [\text{W}]$$

A szigeteléssel ellátott fal eredő hőátbocsátási ellenállása azonos körülmények között:

$$R_{e2} = \frac{-\Delta T}{I_{Q2}} = \frac{-(T_K - T_B)}{I_{Q2}} = \frac{-((-10) - 20)}{25} = 1,2 \left[\frac{\text{K}}{\text{W}} \right]$$

Ha szigeteléssel látjuk el a falat, az eredő hőátbocsátási ellenálláshoz hozzáadódik a szigetelő (EPS) réteg hővezetési ellenállása, így ez az ellenállás a szigetelt és szigetetlen fal hőátbocsátási ellenállásának különbsége:

$$R_{\lambda_{\text{EPS}}} = R_{e2} - R_e = 1,2 - 0,6 = 0,6 \left[\frac{\text{K}}{\text{W}} \right]$$

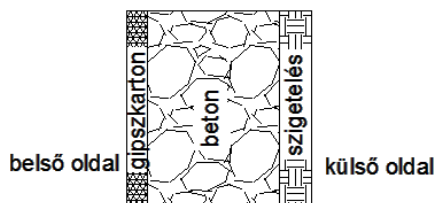
A szigetelőréteg szükséges vastagsága ebből kiszámítható:

$$R_{\lambda_{\text{EPS}}} = \frac{d_{\text{EPS}}}{\lambda_{\text{EPS}} \cdot A} \Rightarrow d_{\text{EPS}} = R_{\lambda_{\text{EPS}}} \cdot \lambda_{\text{EPS}} \cdot A = 0,6 \cdot 0,04 \cdot 1 = 0,024 [\text{m}] = 2,4 [\text{cm}]$$

7. feladat

Adott egy 20 [cm] vastag betonfal, melyet belülről 2 [cm] vastag gipszkarton, kívülről 5 [cm] vastag szigetelés (EPS) borít.

Mekkora a szigetelés és a beton érintkezési felületének hőmérséklete?



Adatok: $T_K = -10 [^{\circ}\text{C}]$, $T_B = 20 [^{\circ}\text{C}]$, $\lambda_{\text{beton}} = 0,63 \left[\frac{\text{W}}{\text{m}\cdot\text{K}} \right]$, $\lambda_{\text{gipszkarton}} = 0,3 \left[\frac{\text{W}}{\text{m}\cdot\text{K}} \right]$,

$\lambda_{\text{szigetelés}} = 0,04 \left[\frac{\text{W}}{\text{m}\cdot\text{K}} \right]$, $A = 1 [\text{m}^2]$.

A hőátadási tényező a levegő és a gipszkarton között (belső oldal): $15 \left[\frac{\text{W}}{\text{m}^2\cdot\text{K}} \right]$.

A hőátadási tényező a levegő és a szigetelés között (külső oldal): $20 \left[\frac{\text{W}}{\text{m}^2\cdot\text{K}} \right]$.

Megoldás:

A falszerkezet hőátbocsátási ellenállása:

$$R_e = R_{\alpha_1} + R_{\lambda_1} + R_{\lambda_2} + R_{\lambda_3} + R_{\alpha_2} = \frac{1}{\alpha_{\text{belső}} \cdot A} + \frac{d_{\text{gipsz}}}{\lambda_{\text{gipsz}} \cdot A} + \frac{d_{\text{beton}}}{\lambda_{\text{beton}} \cdot A} + \frac{d_{\text{szig}}}{\lambda_{\text{szig}} \cdot A} + \frac{1}{\alpha_{\text{külső}} \cdot A}$$

$$R_e = \frac{1}{15 \cdot 1} + \frac{0,02}{0,3 \cdot 1} + \frac{0,2}{0,63 \cdot 1} + \frac{0,05}{0,04 \cdot 1} + \frac{1}{20 \cdot 1} = 1,75 \left[\frac{\text{K}}{\text{W}} \right]$$

A kialakuló hőáram erőssége a szigeteletlen falon keresztül:

$$I_Q = \frac{-\Delta T}{R_e} = \frac{-(T_K - T_B)}{R_e} = \frac{-((-10) - 20)}{1,75} = 17,14 [\text{W}]$$

A külső falfelület hőmérséklete:

$$R_{\alpha_k} = \frac{1}{\alpha_{\text{külső}} \cdot A}$$

$$I_Q \cdot R_{\alpha_k} = -(T_K - T_1) = T_1 - T_K \Rightarrow T_1 = T_K + I_Q \cdot R_{\alpha_k} = -9,15 [^{\circ}\text{C}]$$

A szigetelés és a beton érintkezési felületének hőmérséklete:

$$R_{\lambda_{\text{szig}}} = \frac{d_{\text{szig}}}{\lambda_{\text{szig}} \cdot A}$$

$$I_Q \cdot R_{\lambda_{\text{szig}}} = -(T_1 - T_2) = T_2 - T_1 \Rightarrow T_2 = T_1 + I_Q \cdot R_{\lambda_{\text{szig}}} = 12,28 [^{\circ}\text{C}]$$

7.3 Hőszugárzás

1. feladat

Egy sötét színű lemez reflexiós tényezője $0,32$, hőmérséklete $25 [^{\circ}\text{C}]$. Mekkora teljesítménnyel sugároz négyzetméterenként a lemez?

Megoldás:

$$I_{Qki} = A \cdot E(T) = (1 - R) \cdot A \cdot \sigma \cdot T^4 = (1 - 0,32) \cdot 1 \cdot 5,76 \cdot 10^{-8} \cdot 298,15^4 = 309,5 [\text{W}]$$

2. feladat

Egy villanyrezsó főzőlapjának reflexiós tényezője $0,4$, átmérője $20 [\text{cm}]$.

- a) Mekkora az elektromos teljesítménye, ha bekapcsolva hagyva $557 [^{\circ}\text{C}]$ hőmérsékletre melegszik fel? Feltételezzük, hogy a főzőlap csak sugárzás útján veszít hőt, a környezet hőmérséklete $20 [^{\circ}\text{C}]$.

b) Ha a főzőlap és a levegő közötti hőátadási tényező $5 [W/m^2K]$, akkor mennyi lesz a hőátadáshoz tartozó hőáram? A főzőlap hőmérséklete ugyanannyi, mint az a) részben, a levegő hőmérséklete pedig annyi, mint a környezeté.

Adatok: $R = 0,4$, $d = 20 [cm]$, $T = 557 [^{\circ}C] = 830,15 [K]$,

$T_K = T_{levegő} = 20 [^{\circ}C] = 293,15 [K]$, $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \left[\frac{W}{m^2 \cdot K^4} \right]$

Megoldás:

a)

$$A = \frac{0,2^2 \cdot \pi}{4} = 0,0314 [m^2]$$

$$I_Q^{sug} = (1 - 0,4) \cdot 0,0314 \cdot 5,67 \cdot 10^{-8} \cdot (830,15^4 - 293,15^4) = 499,44 [W]$$

$$P = I_Q^{sug} = 499,69 [W]$$

b)

$$\alpha = 5 \left[\frac{W}{m^2 \cdot K} \right]$$

$$I_Q^{hőát} \cdot R_{\alpha} = -(T_{levegő} - T)$$

$$I_Q^{hőát} \cdot \frac{1}{\alpha \cdot A} = -(T_{levegő} - T)$$

$$I_Q^{hőát} = -\alpha \cdot A \cdot (T_{levegő} - T) = 84,35 [W]$$

3. feladat

Mekkora a felületi hőmérséklete és a reflexiós tényezője annak az $5 [m^2]$ felületű szürke testnek, mely egy óra alatt a $25 [^{\circ}C]$ -os környezetnek $1100 [kJ]$, a $40 [^{\circ}C]$ -os környezetnek pedig $700 [kJ]$ energiát ad át sugárzás útján?

Adatok: $A = 5 [m^2]$, $T_{K1} = 25 [^{\circ}C] = 298,15 [K]$, $Q_1 = 1100 [kJ] = 1100000 [J]$, $T_{K2} = 40 [^{\circ}C] = 313,15 [K]$, $Q_2 = 700 [kJ] = 700000 [J]$, $\Delta t = 1 [h] = 3600 [s]$

Megoldás:

A hőszugárzással leadott hőmennyiség 1 óra alatt:

$$\Delta Q = I_Q^{(sug)} \cdot \Delta t$$

A sugárzás útján kialakuló hőáram:

$$I_Q^{(sug)} = (1 - R) \cdot A \cdot \sigma \cdot (T^4 - T_K^4)$$

A fentiekből felírható két egyenlet a két esetre:

$$I. Q_1 = (1 - R) \cdot A \cdot \sigma \cdot (T^4 - T_{K1}^4) \cdot \Delta t \quad \text{és} \quad II. Q_2 = (1 - R) \cdot A \cdot \sigma \cdot (T^4 - T_{K2}^4) \cdot \Delta t$$

Behelyettesítve:

$$I. 1100000 = (1 - R) \cdot 5 \cdot 5,67 \cdot 10^{-8} \cdot (T^4 - 298,15^4) \cdot 3600$$

$$II. 700000 = (1 - R) \cdot 5 \cdot 5,67 \cdot 10^{-8} \cdot (T^4 - 313,15^4) \cdot 3600$$

Mindkettőből $(1-R)$ -t kifejezve, majd egyenlővé téve a kettőt egymással, a kapott egyenletben már csak a T lesz ismeretlen:

$$\frac{1100000}{T^4 - 298,15^4} = \frac{700000}{T^4 - 313,15^4}$$

Ebből:

$$T = \sqrt[4]{\frac{1100000 \cdot 313,15^4 - 700000 \cdot 298,15^4}{1100000 - 700000}} = 335,15[\text{K}] = 62\text{ }[^\circ\text{C}]$$

A reflexió tényező:

$$R = 1 - \frac{1100000}{5 \cdot 5,67 \cdot 10^{-8} \cdot (335,15^4 - 298,15^4) \cdot 3600} = 0,77$$

4. feladat

Egy $R=0,65$ reflexió tényezőjű $10\text{ }[m^2]$ területű aszfaltjárda hőmérsékletét jelölje T , a hőátadási tényező a járda és a környező levegő között $\alpha = 15\text{ }\left[\frac{W}{mK}\right]$. A járdát körülvevő tárgyak és levegő hőmérséklete egyaránt T_k hőmérsékletűek. Határozza meg a járda által hősugárzás és hőátadás formájában leadott nettó hőáramokat, ha: $T = 30\text{ }[^\circ\text{C}]$, $T_k = 15\text{ }[^\circ\text{C}]$.

Megoldás:

$$I_Q^{h\acute{a}t} \cdot R_\alpha = -(T_k - T)$$

$$I_Q^{h\acute{a}t} \cdot \frac{1}{\alpha \cdot A} = -(T_k - T)$$

$$I_Q^{h\acute{a}t} = -\alpha \cdot A \cdot (T_k - T) = 250\text{ }[W]$$

$$I_Q^{sug} = (1 - R) \cdot A \cdot \sigma \cdot (T^4 - T_k^4) = 307,99\text{ }[W]$$

Irodalomjegyzék

- 1) Dr. Szíki Gusztáv Áron, Szántó Attila: Mérnöki Fizika, 2019. Debreceni Egyetemi Kiadó
- 2) Berta M., Farzan R., Giczi F., Horváth A.: Fizika mérnököknek, 2006.
- 3) Kiss J.: Fizika I., 1991., Tankönyvkiadó, Budapest

Köszönetnyilvánítás

Köszönetünket fejezzük ki Vámosi Attila mesteroktatónak, aki számos saját feladatát rendelkezésünkre bocsátotta, amelyek beépítésre kerültek a példatárba.