Egyetemi doktori (PhD) értekezés tézisei

# MEGŐRZÉSI PROBLÉMÁK ÉS SZEPARÁCIÓS TÉTELEK

Szokol Patrícia Ágnes

Témavezetők: Dr. Molnár Lajos és Dr. Bessenyei Mihály

DEBRECENI EGYETEM
MATEMATIKA- ÉS SZÁMÍTÁSTUDOMÁNYOK DOKTORI ISKOLA

**Debrecen, 2015.**

PhD thesis

# Preserver problems and separation theorems

Patrícia Ágnes Szokol

Supervisors: Dr. Lajos Molnár and Dr. Mihály Bessenyei

University of Debrecen

Doctoral School of Mathematical and Computational Sciences

**Debrecen, 2015.**

# Introduction

The dissertation deals with two different and widely studied kinds of mathematical problems. In Chapters 1–3 preserver results on different structures are presented; and Chapters 4–5 are devoted to the investigations of separation problems. In the mathematical literature the investigations relating to the so-called "preserver" transformations on different kinds of mathematical structures are called preserver problems. The aim of such a problem is to characterize all mappings on a given structure $X$ which preserve operations defining on the elements of $X$, quantities or relations among elements relevant for the structure $X$ or other similar objects. Preserver problems show up in most parts of mathematics. In the territory of algebra, the description of homomorphisms, i.e. transformations that preserve a given operation defined on certain algebraic structure, plays an important role. Concerning the field of geometry the structure of isometries, i.e. transformations that preserve the distance on a given metric space is studied. It is important to emphasize that such kinds of investigations started by linear preserver problems (LPPs). It means that the structure under consideration is linear and so are the corresponding mappings. One of the most active research areas in matrix theory during the last one hundred years is the LPPs, see e.g. the survey papers [**5**], [**6**]. In the last few decades the investigation of preserver problems has been extended to researches in which nonlinear underlying structures are involved. In the present dissertation these kinds of preserver results will be appear.

There are several important and well-known results on preserver problems in the field of quantum mechanics. One of the most fundamental theorems in that field is the famous Wigner theorem on the structure of quantum mechanical symmetry transformations. The main result of Chapter 1, which is close to the result of Wigner, describes the structure of all transformations on the set of density operators which preserve the quantum $f$-divergence for any strictly convex function $f$ defined on the non-negative real line. With particular choices of the function $f$, the definition of quantum $f$-divergence leads to certain well-known and important kinds of relative entropies. Hence by the main result appearing in Chapter 1 we get the form of transformations on the set of density operators that leave different types of entropies invariant.

In Chapter 2 we determine all surjective transformations of the space of positive definite matrices that preserve so-called generalized distance measures which are parameterized by unitarily invariant norms and continuous real functions satisfying certain conditions. These kinds of investigations are motivated by results appearing in [**14**]. In that paper Molnár determined all surjective isometries of the set of positive definite matrices with respect to certain metrics which can be regarded as particular cases of generalized distance measures. Using our new theorem, we also describe the surjective maps of the set of positive definite matrices that preserve the Stein's loss or several other types of divergences.

Our results appeared in Chapter 3 are motivated by a result of Dolinar and Molnár. In [**7**] they described the structure of all surjective isometry of the space of all probability distribution with respect to so-called Kolmogorov-Smirnov metric. Instead of the space of all probability distribution functions we consider a larger space, the sets of so-called (continuous) generalized distribution functions, which plays also an important role in probability theory. More precisely, we describe the structure of all surjective Kolmogorov-Smirnov isometries on these larger spaces.

In the second part of the present dissertation (Chapter 4 and Chapter 5) we focus to separation problems. Separation theorems play a crucial role especially in the field of convex analysis (see e.g. [**8**], [**17**]). In [**16**] Nikodem and Wąsowicz gave a characterization of those pairs of real functions that can be separated by an affine function. In Chapter 4 we generalize the result of Nikodem and Wąsowicz. Namely, we characterize such pairs of real valued functions that can be separated by a member of a given convex Beckenbach family of order $n$.

As a continuation of the previous chapter we recall that similarly to the characterization of those pairs of functions that can be separated by an affine function, there exists a characterization of the existence of a convex separator between two real-valued functions via single inequality. This result, which can be found in [**1**], is proved by Baron, Matkowski and Nikodem. On the other hand, the notion of convexity can be generalized applying regular pairs (in other words, two dimensional Chebyshev systems). The main goal of the present chapter is to extend the result of Baron, Matkowski and Nikodem to this setting.

## 1. Quantum $f$-divergences preserving maps on density operators

In Chapter 1 we study preserver transformations on density operators (i.e. positive operators with unit trace) that play an important role in quantum information theory. To present our results we introduce some notation. Let $H$ be a finite dimensional Hilbert space and $B(H)$ denote the set all bounded linear operators acting on $H$. We denote by $B(H)^+$ the cone of all positive semi-definite operators on $H$. Finally, $S(H)$ stands for the set of all density operators. Relative entropy is a fundamental notion in quantum information theory which has several versions. The most common one is the Umegaki relative entropy which is defined by

$$S(A||B) = \begin{cases} \operatorname{tr} A(\log A - \log B), & \operatorname{supp} A \subset \operatorname{supp} B \\ \infty, & \text{otherwise,} \end{cases}$$

for all $A, B \in S(H)$. Here supp stands for the orthogonal complement of the kernel of density operators. In [**9**] L. Molnár described the structure of all surjective transformations that leave the Umegaki relative entropy invariant. He proved that the corresponding transformations are induced by a unitary or an antiunitary operator. In Chapter 1 we show that his result remains true without assuming that the transformation is surjective.

THEOREM. (Molnár–Szokol, [**10**])
*Let $\phi\colon S(H) \to S(H)$ be a transformation which preserves the Umegaki relative entropy, i.e. which satisfies*

$$S(\phi(A)||\phi(B)) = S(A||B), \quad A, B \in S(H).$$

*Then there exists either a unitary or an antiunitary operator $U$ on $H$ such that $\phi$ is of the form*

$$\phi(A) = UAU^*, \quad A \in S(H).$$

Motivated by the previous theorems in the main theorem of Chapter 1 we describe all transformations on $S(H)$ that preserve the quantum $f$-divergence with respect to an arbitrary strictly convex function $f$ defined on the non-negative real line. It is well-known that with a particular choice of the function $f$ the definition of quantum $f$-divergence leads to the notion of Umegaki relative entropy. Hence, the main result gives a far-reaching generalization of the theorem concerning the structure of all Umegaki relative entropy preserving maps. Let $f\colon [0, \infty[ \to \mathbb{R}$ be a function which is continuous on $]0,\infty[$ and the limit

$$\alpha := \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}$$

exists in $[-\infty,\infty]$. Let $A, B \in B(H)^+$ and for any $\lambda \in \mathbb{R}$ denote by $P_\lambda$, respectively by $Q_\lambda$ the projection on $H$ projecting onto the kernel of $A-\lambda I$, respectively onto the kernel of $B-\lambda I$. The quantum $f$-divergence between $A$ and $B$ can be given by the formula

$$S_f(A||B) = \sum_{a\in\sigma(A)} \left( \sum_{b\in\sigma(B)\setminus\{0\}} bf\left(\frac{a}{b}\right) \operatorname{tr} P_a Q_b + \alpha a \operatorname{tr} P_a Q_0 \right),$$

where $\sigma(.)$ stands for the spectrum of elements in $B(H)$ and the convention $0\cdot(-\infty) = 0\cdot\infty = 0$ is used. Now, we are in a position to present the main result of Chapter 1.

THEOREM. (Molnár–Nagy–Szokol, [**12**])
*Assume that $f\colon [0,\infty[\to \mathbb{R}$ is a strictly convex function and $\phi\colon S(H) \to S(H)$ is a transformation satisfying*

$$S_f(\phi(A)||\phi(B)) = S_f(A||B), \quad A, B \in S(H).$$

*Then there is either a unitary or an antiunitary operator $U$ on $H$ such that $\phi$ is of the form*

$$\phi(A) = UAU^*, \quad A \in S(H).$$

## 2. Maps on positive definite matrices preserving generalized distance measures

In Chapter 2 we substantially extend and unify former results on the structure of surjective isometries of spaces of positive definite matrices obtained in the paper [**14**]. The novelty in our result is that we consider not only true metrics but so-called generalized distance measures which are parameterized by unitarily invariant norms and continuous real functions satisfying certain conditions. By a generalized distance measure we mean a function $d : X \times X \to [0,\infty[$ ($X$ is any set) which has the definiteness property (for arbitrary $x, y \in X$ we have $d(x, y) = 0$ if and only if $x = y$), but neither the symmetry of $d$ nor the triangle inequality for $d$ is assumed. In the following $\mathbb{M}_n$ stands for the set of all $n \times n$ complex matrices and we denote by $\mathbb{P}_n$ the set of all $n \times n$ positive definite matrices. Moreover, let $\mathbb{P}_n^1$, respectively $\mathbb{P}_n^c$ $(c > 0)$ denote the set of all elements in $\mathbb{P}_n$ with unit determinant, respectively with determinant equal to $c$. In the main result we determine all surjective transformations of $\mathbb{P}_n$ that preserve a given generalized distance measure.

THEOREM. (Molnár–Szokol, [**15**])
*Let $N$ be a unitarily invariant norm on $\mathbb{M}_n$. Assume $f\colon ]0,\infty[\to \mathbb{R}$ is a continuous function such that*

(a1) $f(y) = 0$ *holds if and only if* $y = 1$*;*
(a2) *there exists a number* $K > 1$ *such that*

$$|f(y^2)| \geq K|f(y)|, \quad y \in ]0,\infty[.$$

*Define* $d_{N,f}\colon \mathbb{P}_n \times \mathbb{P}_n \to [0,\infty[$ *by*

$$d_{N,f}(A,B) = N(f(A^{-1/2}BA^{-1/2})), \quad A,B \in \mathbb{P}_n. \tag{2.1}$$

*Assume that $n \geq 3$. If $\phi\colon \mathbb{P}_n \to \mathbb{P}_n$ is a surjective map which leaves $d_{N,f}(.,.)$ invariant, i.e., which satisfies*

$$d_{N,f}(\phi(A),\phi(B)) = d_{N,f}(A,B), \quad A,B \in \mathbb{P}_n,$$

*then there exist an invertible matrix $T \in \mathbb{M}_n$ and a real number $c$ such that $\phi$ is of one of the following forms*

$\phi(A) = (\det A)^c TAT^*, \quad A \in \mathbb{P}_n$*;*
$\phi(A) = (\det A)^c TA^{-1}T^*, \quad A \in \mathbb{P}_n$*;*
$\phi(A) = (\det A)^c TA^{\mathrm{tr}}T^*, \quad A \in \mathbb{P}_n$*;*
$\phi(A) = (\det A)^c T(A^{\mathrm{tr}})^{-1}T^*, \quad A \in \mathbb{P}_n$*.*

Apparently, the function $d_{N,f}(.,.)$ appearing in the theorem is a generalized distance measure in the sense we introduced above. Moreover, we note that the metrics appearing in [**14**] can be obtained as particular cases of generalized distance measures and the functions $f$ in (2.1) which correspond to those metrics have the properties (a1), (a2) listed in the theorem. We emphasize that our main result applies for many other generalized distance measures. For any $A, B \in \mathbb{P}_n$ let $Y_{A,B}$ denote the positive definite matrix $A^{-1/2}BA^{-1/2}$. Then these quantities can be obtained as follows.

(i) Stein's loss: $l(A,B) = \|Y_{A,B}^{-1} - \log Y_{A,B}^{-1} - 1\|_1$;
(ii) Jeffrey's Kullback-Leibler divergence:

$$S_{JKL}(A,B) = \left\| \frac{Y_{A,B} + Y_{A,B}^{-1} - 2I}{2} \right\|_1;$$

(iii) log-determinant $\alpha$-divergence (for any parameter $-1 < \alpha < 1$):

$$D_{LD}^{\alpha}(A,B) =$$
$$\frac{4}{1-\alpha^2}\left\|\log\frac{(1-\alpha)I+(1+\alpha)Y_{A,B}}{2} - \frac{1+\alpha}{2}\log Y_{A,B}\right\|_1,$$

where $\|.\|_1$ stands for the trace-norm, which is unitarily invariant. One can check easily that for the previous examples our theorem applies. We must point out that in the particular choices of the unitarily invariant norm $N$ and real function $f$, after the use of our theorem one may need to make further steps in order to determine the precise structure of particular distance measure preservers. In accordance with this we present the complete structural result for the measures we have discussed above.

THEOREM. (Molnár–Szokol, [**15**])
*Let $div(.,.)$ denote any of the functions $l(.,.)$, $D_{LD}^{\alpha}(.,.)$, $-1 \leq \alpha \leq 1$. A surjective map $\phi\colon \mathbb{P}_n \to \mathbb{P}_n$ preserves $div(.,.)$, i.e., satisfies*

$$div(\phi(A),\phi(B)) = div(A,B), \qquad A,B \in \mathbb{P}_n,$$

*if and only if there exists an invertible matrix $T \in \mathbb{M}_n$ such that $\phi$ is of one of the forms*

$$\phi(A) = TAT^*, \quad A \in \mathbb{P}_n;$$
$$\phi(A) = TA^{\mathrm{tr}}T^*, \quad A \in \mathbb{P}_n.$$

*A surjective map $\phi\colon \mathbb{P}_n \to \mathbb{P}_n$ preserves $S_{JKL}(.,.)$, if and only if there exists an invertible matrix $T \in \mathbb{M}_n$ such that $\phi$ is of one of the forms*

$$\phi(A) = TAT^*, \quad A \in \mathbb{P}_n;$$
$$\phi(A) = TA^{-1}T^*, \quad A \in \mathbb{P}_n;$$
$$\phi(A) = TA^{\mathrm{tr}}T^*, \quad A \in \mathbb{P}_n;$$
$$\phi(A) = T(A^{\mathrm{tr}})^{-1}T^*, \quad A \in \mathbb{P}_n.$$

In Chapter 3 we also present the corresponding generalized distance measure preservers also on $\mathbb{P}_n^c$. In fact, following the approach given in [**14**] we first determine the structure of all continuous Jordan triple endomorphisms of $\mathbb{P}_n^1$ (i.e., continuous maps respecting the Jordan triple product $ABA$). Finally, in our last result we shall describe the structure of all surjective transformations on $\mathbb{P}_n^1$ which leave a given generalized distance measure $d_{N,f}$ invariant.

THEOREM. (Molnár–Szokol, [**15**])
*Assume $n \geq 3$. Let $\phi\colon \mathbb{P}_n^1 \to \mathbb{P}_n^1$ be a continuous map which is a Jordan*

*triple endomorphism, i.e., $\phi$ is a continuous map which satisfies*

$$\phi(ABA) = \phi(A)\phi(B)\phi(A), \quad A, B \in \mathbb{P}_n^1.$$

*Then there is a unitary matrix $U \in \mathbb{M}_n$ such that $\phi$ is of one of the following forms*

(g1) $\phi(A) = UAU^*, \quad A \in \mathbb{P}_n^1$;
(g2) $\phi(A) = UA^{-1}U^*, \quad A \in \mathbb{P}_n^1$;
(g3) $\phi(A) = UA^{\mathrm{tr}}U^*, \quad A \in \mathbb{P}_n^1$;
(g4) $\phi(A) = U(A^{\mathrm{tr}})^{-1}U^*, \quad A \in \mathbb{P}_n^1$;
(g5) $\phi(A) = I, \quad A \in \mathbb{P}_n^1$.

The theorem immediately gives us the following structural result on the continuous Jordan triple automorphisms of $\mathbb{P}_n^1$.

COROLLARY. *Assume $n \geq 3$. Let $\phi\colon \mathbb{P}_n^1 \to \mathbb{P}_n^1$ be a continuous Jordan triple automorphism, i.e., a continuous bijective map which satisfies*

$$\phi(ABA) = \phi(A)\phi(B)\phi(A), \quad A, B \in \mathbb{P}_n^1.$$

*Then $\phi$ is of one of the forms (g1)-(g4).*

Our result on the form of surjective transformations of $\mathbb{P}_n^1$ leaving a generalized distance measure $d_{N,f}$ invariant reads as follows.

THEOREM. (Molnár–Szokol, [**15**])
*Let $N$ be a unitarily invariant norm on $\mathbb{M}_n$ and $f\colon ]0,\infty[ \to \mathbb{R}$ be a continuous function which satisfies the conditions (a1), (a2). Assume that $n \geq 3$. Let $\phi\colon \mathbb{P}_n^1 \to \mathbb{P}_n^1$ be a surjective map which preserves $d_{N,f}(.,.)$. Then there exists an invertible matrix $T$ with $|\det T| = 1$ such that $\phi$ is of one of the following forms*

$\phi(A) = TAT^*, \quad A \in \mathbb{P}_n^1$;
$\phi(A) = TA^{-1}T^*, \quad A \in \mathbb{P}_n^1$;
$\phi(A) = TA^{\mathrm{tr}}T^*, \quad A \in \mathbb{P}_n^1$;
$\phi(A) = T(A^{\mathrm{tr}})^{-1}T^*, \quad A \in \mathbb{P}_n^1$.

From this theorem we easily deduce the following corollary.

COROLLARY. *Let $N, f$ be as in the previous theorem and assume $n \geq 3$ and $c$ is a positive real number. If $\phi\colon \mathbb{P}_n^c \to \mathbb{P}_n^c$ is a surjective map which preserves $d_{N,f}(.,.)$, then there exists an invertible matrix $T$ with $|\det T| = 1$ such that $\phi$ is of one of the following forms*

$\phi(A) = TAT^*, \quad A \in \mathbb{P}_n^c$;
$\phi(A) = \lambda^2 TA^{-1}T^*, \quad A \in \mathbb{P}_n^c$;

$$\phi(A) = TA^{\mathrm{tr}}T^*, \quad A \in \mathbb{P}_n^c;$$
$$\phi(A) = \lambda^2 T(A^{\mathrm{tr}})^{-1}T^*, \quad A \in \mathbb{P}_n^c,$$

*where* $\lambda = \sqrt[n]{c}$.

## 3. Surjective isometries of the space of all generalized distribution functions

The study of linear isometries of linear function spaces has also been an extensive research area in functional analysis. However, there are some important metric spaces of functions which are not linear spaces. For example, the set of all probability distribution functions on $\mathbb{R}$ that plays so fundamental role in probability theory and statistics is not a linear space. In [**7**] the general forms of surjective isometries of the space $D(\mathbb{R})$ of all probability distribution function on $\mathbb{R}$ are determined with respect to Kolmogorov-Smirnov metric. For any pair $f, g$ of $D(\mathbb{R})$ the Kolmogorov-Smirnov distance between them is defined by

$$\rho(f, g) = \sup_{t \in \mathbb{R}} |f(t) - g(t)|.$$

In Chapter 3 we extend the mentioned result to a larger space $\Delta(\mathbb{R})$ of all generalized probability distribution functions. By a generalized distribution function we mean a function from $\mathbb{R}$ to $[0, 1]$ which is monotone increasing and continuous from the right without restrictions on its limits at $\pm\infty$.

The first result of Chapter 3 shows that the structure of surjective Kolmogorov-Smirnov isometries of $\Delta(\mathbb{R})$ is formally the same as that of the surjective isometries of $(D(\mathbb{R}), \rho)$.

THEOREM. (Molnár–Szokol, [**13**])
*Let* $\phi\colon \Delta(\mathbb{R}) \to \Delta(\mathbb{R})$ *be a surjective isometry with respect to the Kolmogorov-Smirnov metric, i.e. assume that* $\phi$ *is a bijective map with the property that*

$$\rho(\phi(f), \phi(g)) = \rho(f, g)$$

*holds for all* $f, g \in \Delta(\mathbb{R})$. *Then either there exists a strictly increasing bijection* $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *such that* $\phi$ *is of the form*

$$\phi(f)(t) = f(\varphi(t)), \quad t \in \mathbb{R}, f \in \Delta(\mathbb{R})$$

*or there exists a strictly decreasing bijection* $\psi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *such that* $\phi$ *is of the form*

$$\phi(f)(t) = 1 - f(\psi(t)-), \quad t \in \mathbb{R}, f \in \Delta(\mathbb{R}).$$

Moreover, in [**11**] Molnár studied the surjective Kolmogorov-Smirnov isometries of the space of all continuous elements of $D(\mathbb{R})$. Motivated by this result we also described the structure of all surjective isometries of the set $\Delta_c(\mathbb{R})$ of all continuous generalized distribution functions. The corresponding result reads as follows.

THEOREM. (Molnár–Szokol, [**13**])
*Let $\phi\colon \Delta_c(\mathbb{R}) \to \Delta_c(\mathbb{R})$ be a surjective isometry with respect to the Kolmogorov-Smirnov metric. Then either there exists a strictly increasing bijection $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ such that $\phi$ is of the form*

$$\phi(f)(t) = f(\varphi(t)), \quad t \in \mathbb{R}, f \in \Delta_c(\mathbb{R})$$

*or there exists a strictly decreasing bijection $\psi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ such that $\phi$ is of the form*

$$\phi(f)(t) = 1 - f(\psi(t)), \quad t \in \mathbb{R}, f \in \Delta_c(\mathbb{R}).$$

## 4. Separation by convex interpolation families

Chapter 4 and Chapter 5 are devoted to the investigation of so-called separation problems. It is a well-known separation theorem that if a convex and a concave function are given such that the convex function is "above" the concave one, then there exists an affine function between them. Moreover, those pairs of real functions that can be separated by an affine function was characterized via double inequalities. This result is due to Nikodem and Wąsowicz and it appeared in [**16**]. In Chapter 4 we generalize this result. More precisely, we characterize such pairs of real valued functions that can be separated by a member of a given convex Beckenbach family of order $n$.

Let $I$ be a real interval. A set $\mathcal{B}_n(I)$ of continuous real functions is called an $n$-parameter Beckenbach family over $I$, if its members are defined on $I$ and, for all points $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$ of $I \times \mathbb{R}$ (with pairwise distinct first coordinates) there exists exactly one element $\varphi$ of $\mathcal{B}_n(I)$ such that

$$\varphi(x_1) = y_1, \dots, \varphi(x_n) = y_n.$$

The main result of this chapter gives a characterization of those pairs of real functions that can be separated by an element of a given Beckenbach family which is supposed to be closed under convex combinations.

THEOREM. (Bessenyei–Szokol, [**4**])
*Let $\mathcal{B}_n(I)$ be a Beckenbach family over the real interval $I$ which is closed*

*under convex combinations and $f, g\colon I \to \mathbb{R}$ be given functions. Then the following statements are equivalent:*

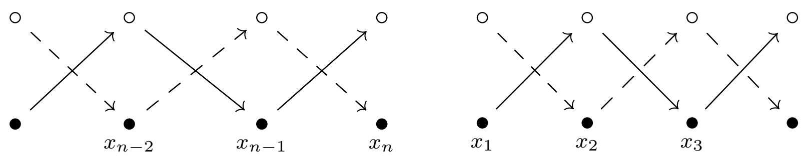
(i) *there exists $h \in \mathcal{B}_n(I)$ such that $f \le h \le g$;*
(ii) *for all $u \le x_1 < \cdots < x_n \le v$ of $I$, we have the inequalities*

$$\varphi_1(v) \ge f(v), \quad \psi_1(v) \le g(v); \quad \textit{and} \quad \varphi_2(u) \ge f(u), \quad \psi_2(u) \le g(u),$$

*where $\varphi_1, \varphi_2, \psi_1, \psi_2 \in \mathcal{B}_n(I)$ are determined by the interpolation properties*

$$\begin{aligned}
&\varphi_1(x_k) = g(x_k),\ \psi_1(x_k) = f(x_k), && n-k \in \{0,\dots,n-1\} \cap 2\mathbb{Z};\\
&\varphi_1(x_k) = f(x_k),\ \psi_1(x_k) = g(x_k), && n-k \in \{0,\dots,n-1\} \cap \big(2\mathbb{Z}+1\big);\\
&\varphi_2(x_k) = g(x_k),\ \psi_2(x_k) = f(x_k), && k \in \{1,\dots,n\} \cap \big(2\mathbb{Z}+1\big);\\
&\varphi_2(x_k) = f(x_k),\ \psi_2(x_k) = g(x_k), && k \in \{1,\dots,n\} \cap 2\mathbb{Z}.
\end{aligned}$$

The meaning of the interpolation properties appearing in the theorem, can be illustrated in the following expressive way. For simplicity, the symbols "$\bullet$" and "$\circ$" stand for the values of $f$ and $g$, respectively. Then, $\varphi_1$ and $\varphi_2$ are obtained by "$\rightarrow$", while $\psi_1$ and $\psi_2$ are obtained by "$\dashrightarrow$".




## 5. Convex separation by regular pairs

In fact, the characterization of those pairs of real functions that can be separated by an affine function was preceded by the characterization of the existence of a convex separator between two real valued functions. The corresponding result is due to Baron, Matkowski and Nikodem [**1**]. In Chapter 5 we give an analogous result in the case when the convexity notion induced by so-called regular pairs.

To present the mentioned result we need to define the notion of Chebyshev systems that can be regarded as particular cases of Beckenbach families. Let $I$ be a real interval and $\omega_1, \dots, \omega_n\colon I \to \mathbb{R}$ be given continuous functions. We say that $\boldsymbol{\omega} := (\omega_1, \dots, \omega_n)$ is a positive Chebyshev system if, for all elements $x_1 < \cdots < x_n$ of $I$, the determinant of the matrix

$\big[\omega_i(x_j)\big]_{i,j=1,\dots,n}$ is positive. A function $f\colon I \to \mathbb{R}$ is said to be $\boldsymbol{\omega}$-convex if, for all elements $x_0 \le \dots \le x_n$ of $I$, we have the inequality

$$\begin{vmatrix} \omega_1(x_0) & \omega_1(x_1) & \dots & \omega_1(x_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \omega_n(x_0) & \omega_n(x_1) & \dots & \omega_n(x_n) \\ f(x_0) & f(x_1) & \dots & f(x_n) \end{vmatrix} \ge 0.$$

A function $f\colon I \to \mathbb{R}$ is said to be $\boldsymbol{\omega}$-concave, respectively $\boldsymbol{\omega}$-affine if, for all elements $x_0 \le \dots \le x_n$ of $I$ the above determinant is nonpositive, respectively zero.

Moreover, by a regular pair we mean a two-parameter positive Chebyshev system. In our main result it turns out that the existence of an $\boldsymbol{\omega}$-convex separator between two given real functions can be characterized via a determinant inequality.

THEOREM. (Bessenyei–Szokol, [**3**])
*If $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \omega_2)$ is a regular pair on a real interval $I$ and $f, g\colon I \to \mathbb{R}$, then there exists an $\boldsymbol{\omega}$-convex function $h\colon I \to \mathbb{R}$ with $f \le h \le g$ if and only if, for all elements $x_0 \le x_1 \le x_2$ of $I$, we have*

$$\begin{vmatrix} \omega_1(x_0) & \omega_1(x_1) & \omega_1(x_2) \\ \omega_2(x_0) & \omega_2(x_1) & \omega_2(x_2) \\ g(x_0) & f(x_1) & g(x_2) \end{vmatrix} \ge 0.$$

We note, that this result appears in [**2**], but as a consequence of the Baron–Matkowski–Nikodem theorem. Hence, in that approach, it cannot be considered as a real generalization.

In Chapter 5 we also consider the so-called approximate $\boldsymbol{\omega}$-convex functions. The notion of approximate $\boldsymbol{\omega}$-convexity, which originates from that of standard approximate convexity, can be defined as follows.

Let $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \omega_2)$ be a regular pair on a real interval $I$ and let $\omega$ be an $\boldsymbol{\omega}$-affine function which is positive on $I^\circ$. We say that $\varphi\colon I \to \mathbb{R}$ is approximately $\boldsymbol{\omega}$-convex with error term $\omega$, if, for all elements $x_0 \le x_1 \le x_2$ of $I$,

$$\begin{vmatrix} \omega_1(x_0) & \omega_1(x_1) & \omega_1(x_2) \\ \omega_2(x_0) & \omega_2(x_1) & \omega_2(x_2) \\ (\varphi+\omega)(x_0) & (\varphi-\omega)(x_1) & (\varphi+\omega)(x_2) \end{vmatrix} \ge 0.$$

It is easy to see that the definition leads to the standard one in the particular case $\boldsymbol{\omega} = (1, \mathrm{id})$ and $\omega \equiv \varepsilon/2$. Furthermore, just as with the standard case it can be shown that every approximate $\boldsymbol{\omega}$-convex function can be decomposed to the sum of a $\boldsymbol{\omega}$-convex function and a "small" part.

THEOREM. (Bessenyei–Szokol, [**3**])
*If $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \omega_2)$ is a regular pair on a real interval $I$ and $\omega$ is an $\boldsymbol{\omega}$-affine function which is positive on $I^\circ$, then $\varphi\colon I \to \mathbb{R}$ is approximately $\boldsymbol{\omega}$-convex with error term $\omega$ if and only if $\varphi = h + \psi$, where $h$ is $\boldsymbol{\omega}$-convex and $|\psi(t)| \le \omega(t)$ for all $t \in I$.*

Finally, we consider some particular cases of regular pairs and we present the separation and stability results in those setting.

COROLLARY. *Let $I$ be a real interval, $\alpha\colon I \to \mathbb{R}$ be a continuous, strictly monotone increasing function and $f, g\colon I \to \mathbb{R}$. Then, there exists a function $h\colon I \to \mathbb{R}$ satisfying $f \le h \le g$ and, for all elements $x_0 \le x_1 \le x_2$ of $I$ the inequality*

$$\begin{aligned} \big(\alpha(x_2) - \alpha(x_0)\big)h(x_1) \le{}& \big(\alpha(x_2) - \alpha(x_1)\big)h(x_0) \\ &+ \big(\alpha(x_1) - \alpha(x_0)\big)h(x_2) \end{aligned} \tag{5.1}$$

*holds, if and only if, for all $x_0 \le x_1 \le x_2$ of $I$, we have*

$$\big(\alpha(x_2) - \alpha(x_0)\big)f(x_1) \le \big(\alpha(x_2) - \alpha(x_1)\big)g(x_0) + \big(\alpha(x_1) - \alpha(x_0)\big)g(x_2).$$

COROLLARY. *Let $I$ be a real interval, $\alpha\colon I \to \mathbb{R}$ be a continuous, strictly monotone increasing function and $\varepsilon > 0$. Then, a function $\varphi\colon I \to \mathbb{R}$ satisfies the inequality*

$$\begin{aligned} \big(\alpha(x_2) - \alpha(x_0)\big)\varphi(x_1) \;\le\;& \big(\alpha(x_2) - \alpha(x_1)\big)\varphi(x_0) \\ &+ \big(\alpha(x_1) - \alpha(x_0)\big)\varphi(x_2) + 2\varepsilon\big(\alpha(x_2) - \alpha(x_0)\big) \end{aligned}$$

*for all elements $x_0 \le x_1 \le x_2$ of $I$ if and only if there exist functions $h, \psi\colon I \to \mathbb{R}$ such that $\varphi = h + \psi$, where $h$ fulfills* (5.1) *and $\|\psi\| \le \varepsilon$. (Here $\|\cdot\|$ stands for the supremum norm.)*

COROLLARY. *If $I \subset ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ is a real interval, $f, g\colon I \to \mathbb{R}$, then there exists a $(\cos, \sin)$-convex function $h\colon I \to \mathbb{R}$ with $f \le h \le g$ if and only if, for all $\lambda \in [0, 1]$ and $x \le y$ of $I$,*

$$\sin(y-x)f\big(\lambda x + (1-\lambda)y\big) \le \sin\big(\lambda(y-x)\big)g(x) + \sin\big((1-\lambda)(y-x)\big)g(y).$$

COROLLARY. *If $I \subset ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ is a real interval, then $\varphi\colon I \to \mathbb{R}$ is approximately $(\cos, \sin)$-convex with error term $\varepsilon \cdot \cos$ if and only if $\varphi = h + \psi$, where $h\colon I \to \mathbb{R}$ is $(\cos, \sin)$-convex, and $\psi\colon I \to \mathbb{R}$ satisfies $|\psi(t)| \le \varepsilon \cdot \cos(t)$ for all $t \in I$.*

Egyetemi doktori (PhD) értekezés tézisei

# MEGŐRZÉSI PROBLÉMÁK ÉS SZEPARÁCIÓS TÉTELEK

Szokol Patrícia Ágnes

Témavezetők: Dr. Molnár Lajos és Dr. Bessenyei Mihály

DEBRECENI EGYETEM
MATEMATIKA- ÉS SZÁMÍTÁSTUDOMÁNYOK DOKTORI ISKOLA

**Debrecen, 2015.**

## Bevezetés

A disszertáció két részből áll, melynek első része megőrzési problémákkal foglalkozik, második része pedig szeparációs tételeket tartalmaz. Mindkét terület régóta vizsgált és széleskörűen kutatott területe a funkcionálanalízisnek, illetve a konvex analízisnek.

Megőrzési problémák során célunk egy adott $X$ struktúrán értelmezett összes olyan transzformáció szerkezetét leírni, amelyek invariánsan hagynak bizonyos, az $X$-en értelmezett műveletet, az $X$ elemeihez rendelt mennyiséget, $X$ elemei között értelmezett relációt... Az ilyen jellegű problémák a matematika számos területén megjelennek. Az algebra területéről a homomorfizmusok, azaz a struktúrán értelmezett műveletet megőrző transzformációk, még a geometriát tekintve, adott metrikus terek elemei közötti távolságot invariánsan hagyó leképezések vizsgálata említendő. A megőrzési problémák úgynevezett lineáris megőrzési problémákkal kezdődtek, amelyek során a vizsgált struktúra és az azon értelmezett meghatározandó leképezés is lineáris. Az ilyen jellegű vizsgálatok képezték az elmúlt évszázadban a mátrixelmélet egyik legaktívabban kutatott területét. Ezzel kapcsolatos tanulmányok olvashatóak a [**5**], [**6**] dolgozatokban. Napjainkban azonban már a kutatások kiterjedtek olyan esetekre is, amikor a vizsgált struktúra nem lineáris. A disszertációban is elsősorban ilyen jellegű problémákat tanulmányozunk.

A kvantummechanika területéről is több jelentős megőrzési probléma ismert. Az egyik legjelentősebb ezek közül Wigner híres tétele a kvantummechanikai szimmetria-transzformációk szerkezetének alakjáról. Az első fejezet fő eredménye, amely szoros kapcsolatban áll Wigner tételével, leírja az összes sűrűségoperátorok terén értelmezett kvantum $f$-divergenciát megőrző transzformációk alakját egy tetszőleges, a nemnegatív számokon definiált szigorúan konvex $f$ függvény esetén. Jól ismert, hogy az $f$ függvény speciális megválasztásával a kvantum $f$-divergencia fogalma fontos relatív entrópia fogalmakhoz vezet. Így az első fejezet fő eredményének következményeként kapunk olyan eredményeket, amelyek a sűrűségoperátorokon értelmezett, bizonyos relatív entrópiát invariánsan hagyó transzformációk szerkezetét írják le.

A második fejezetben a pozitív definit mátrixok terének azon szürjektív leképezéseit vizsgáljuk, amelyek megőriznek egy unitér invariáns normával illetve bizonyos további feltételnek eleget tevő folytonos valós függvénnyel paraméterezett úgynevezett általánosított távolságmértéket. Ezen eredményeket a [**14**] cikkben szereplő tételek motiválták, ahol Molnár a pozitív definit mátrixok halmazán értemezett szürjektív izometriák szerkezetét tanulmányozta olyan metrikákra vonatkozóan, amelyek az általunk vizsgált általánosított távolságmértékek speciális esetei.

A harmadik fejezetben szereplő tételeket Dolinar és Molnár egy korábbi eredménye motiválta. A [**7**] cikkben a szerzők leírták az eloszlásfüggvények tere összes szürjektív izometriáját a Kolmogorov-Smirnov metrikára vonatkozóan. A disszertációban az eloszlásfüggvények tere helyett egy bővebb, az úgynevezett általánosított (folytonos) eloszlásfüggvények terét tekintjük és leírjuk ezen terek összes szürjektív Kolmogorov-Smirnov izometriáinak szerkezetét.

A disszertáció második részében (negyedik és ötödik fejezet) szeparációs tételekkel foglalkozunk. Az ilyen típusú eredmények alapvető szerepet játszanak a konvex analízis területén ([**8**], [**17**]). A [**16**] cikkben Nikodem és Wąsowicz jellemezte azon függvénypárokat, amelyek között létezik affin függvény. A negyedik fejezetben ezt az eredményt terjesztjük ki oly módon, hogy karakterizáljuk azon függvénypárokat, amelyek szeparálhatóak egy, a konvexitásra zárt úgynevezett $n$-paraméteres Beckenbach család valamely elemével.

Az utolsó fejezetben Baron, Matkowski és Nikodem valós függvénypárok konvex függvénnyel való szeparációjáról szóló tételét [**1**] általánosítjuk. Nevezetesen, jellemezzük azon valós függvénypárokat, amelyek egy kétdimenziós Csebisev rendszer valamely elemével szétválaszthatóak.

## 1. Sűrűségoperátorokon értelmezett kvantum $f$-divergenciát megőrző leképezések

Az első fejezetben azon transzformációk szerkezete kerül leírásra, melyek invariánsan hagynak egy, a kvantum-információelméletben fontos szerepet játszó mennyiséget. Eredményeink megfogalmazásához bevezetünk néhány jelölést. Legyen $H$ egy véges dimenziós Hilbert tér és jelölje $B(H)$ a $H$-n értelmezett korlátos lineáris operátorok algebráját. Továbbá jelölje $B(H)^+$ a $H$ Hilbert téren értelmezett, pozitív szemidefinit operátorok kúpját, illetve $S(H)$ a $H$ sűrűségoperátorainak (azaz $B(H)^+$ 1-trace-ű elemeinek) halmazát. A relatív entrópia egy alapvető fogalom a kvantum-információelméletben, melynek több változata is létezik. Ezek közül a legelterjedtebb az Umegaki relatív entrópia, mely tetszőleges $A, B \in S(H)$ pár esetén a következőképpen van definiálva:

$$S(A||B) = \begin{cases} \operatorname{tr} A(\log A - \log B), & \operatorname{supp} A \subset \operatorname{supp} B \\ \infty, & \text{egyébként.} \end{cases}$$

A [**9**] cikkben Molnár leírta azon szürjektív transzformációk szerkezetét, melyek invariánsan hagyják az Umegaki relatív entrópiát. Kiderült, hogy ezen transzformációk alakja igen egyszerű. Az első fejezetben megmutatjuk, hogy az állítás abban az esetben is igaz marad, ha elhagyjuk a szürjektivitás feltételét.

TÉTEL. (Molnár–Szokol, [**10**])
*Legyen $\phi\colon S(H) \to S(H)$ egy olyan transzformáció, amely megőrzi az Umegaki relatív entrópiát, azaz teljesíti a*

$$S(\phi(A)\|\phi(B)) = S(A\|B)$$

*egyenletet minden $A, B \in S(H)$ esetén. Ekkor létezik olyan unitér vagy antiunitér $U$ operátor $H$-n, amellyel $\phi$ az*

$$\phi(A) = UAU^*, \quad A \in S(H)$$

*alakba írható.*

Ezen tétel motiválja az első fejezet fő eredményét, melyben a sűrűségoperátorokon értelmezett azon transzformációk szerkezetét írjuk le, melyek egy adott, szigorúan konvex $f$ függvény esetén invariánsan hagyják az ún. kvantum $f$-divergenciát. Jól ismert tény, hogy speciális $f$ függvény választásával a kvantum $f$-divergencia definíciója az Umegaki relatív entrópia fogalmához vezet. Így a következőkben megfogalmazásra kerülő eredmény jelentős általánosítása az előző, Umegaki relatív entrópiát megőrző leképezések szerkezetére vonatkozó tételnek.

Legyen $f\colon [0,\infty[\to \mathbb{R}$ egy olyan, a $]0,\infty[$ intervallumon folytonos függvény, amely esetén létezik a

$$\alpha := \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}$$

határérték és $\alpha \in [-\infty,\infty]$. Ha $A, B \in B(H)^+$, akkor tetszőleges $\lambda \in \mathbb{R}$ esetén jelölje $P_\lambda$, illetve $Q_\lambda$ a $H$ azon projekcióit, melyek az $A-\lambda I$, illetve $B-\lambda I$ magjára vetítenek. Ekkor a kvantum $f$-divergencia $A$ és $B$ között a következő formulával adható meg:

$$S_f(A||B) = \sum_{a\in\sigma(A)} \left( \sum_{b\in\sigma(B)\setminus\{0\}} bf\left(\frac{a}{b}\right) \operatorname{tr} P_a Q_b + \alpha a \operatorname{tr} P_a Q_0 \right),$$

ahol $\sigma(.)$ jelöli $B(H)$ elemeinek spektrumát és megállapodunk abban, hogy $0\cdot(-\infty) = 0\cdot\infty = 0$. Az első fejezet fő eredménye ezek után a következőképpen fogalmazható meg.

TÉTEL. (Molnár–Nagy–Szokol, [**12**])
*Legyen $f\colon [0,\infty[\to \mathbb{R}$ egy szigorúan konvex függvény és tegyük fel, hogy $\phi\colon S(H)\to S(H)$ olyan transzformáció, amely kielégíti az*

$$S_f(\phi(A)||\phi(B)) = S_f(A||B), \quad A, B \in S(H).$$

*egyenletet minden $A, B \in S(H)$ pár esetén. Ekkor létezik olyan $U$ unitér vagy antiunitér operátor $H$-n, mellyel $\phi$ a*

$$\phi(A) = UAU^*, \quad A \in S(H).$$

*alakba írható.*

## 2. Pozitív definit mátrixokon értelmezett általánosított távolságmértéket megőrző transzformációk

A második fejezetben sikerült közös keretbe foglalni és lényegesen általánosítani a [**14**] cikkben szereplő eredményeket. Nevezetesen, a korábban tárgyalt, valódi metrikákra vonatkozó szürjektív izometriák leírása után sikerült meghatározni azon szürjektív transzformációk szerkezetét, melyek megőriznek egy adott, unitér-invariáns normával illetve bizonyos feltételeknek eleget tevő folytonos valós függvénnyel paraméterezett, úgynevezett általánosított távolságmértéket. Általánosított távolságmérték alatt olyan $d : X \times X \to [0, \infty[$ függvényt értünk ($X$ egy adott halmaz), amelyre teljesül, hogy minden $x, y \in X$ pár esetén, a $d(x, y)$ távolság pontosan akkor 0, ha $x = y$. Azonban $d$-ről nem tesszük fel sem a szimmetrikusságot, sem azt, hogy eleget tesz a háromszög-egyenlőtlenségnek. A következőkben jelölje $\mathbb{M}_n$ az $n \times n$-es komplex mátrixok algebráját és $\mathbb{P}_n$ az $n \times n$-es pozitív definit mátrixok halmazát. Továbbá jelölje $\mathbb{P}_n^1$ és $\mathbb{P}_n^c$ $(c > 0)$ a $\mathbb{P}_n$ azon elemeinek halmazát, melyek determinánsa rendre 1-gyel, illetve $c$-vel egyenlő. A szükséges fogalmak és jelölések bevezetése után megfogalmazható a második fejezet fő eredménye.

TÉTEL. (Molnár–Szokol, [**15**])
*Legyen $N$ egy unitér-invariáns norma $\mathbb{M}_n$-en és $f\colon ]0, \infty[\to \mathbb{R}$ egy olyan folytonos függvény, amelyre teljesülnek az alábbi feltételek:*

(a1) $f(y) = 0$ *akkor és csak akkor, ha* $y = 1$*;*
(a2) *létezik egy* $K > 1$ *konstans úgy, hogy*

$$|f(y^2)| \geq K|f(y)|, \quad y \in ]0, \infty[.$$

*Definiáljuk a* $d_{N,f}\colon \mathbb{P}_n \times \mathbb{P}_n \to [0, \infty[$ *leképezést a következőképpen*

$$d_{N,f}(A, B) = N(f(A^{-1/2}BA^{-1/2})), \quad A, B \in \mathbb{P}_n. \tag{2.1}$$

*Tegyük fel, hogy* $n \geq 3$. *Ha* $\phi\colon \mathbb{P}_n \to \mathbb{P}_n$ *egy olyan szürjektív leképezés, mely megőrzi a* $d_{N,f}(.,.)$ *mennyiséget, azaz minden* $A, B \in \mathbb{P}_n$ *esetén eleget tesz az*

$$d_{N,f}(\phi(A), \phi(B)) = d_{N,f}(A, B)$$

*egyenletnek, akkor létezik olyan invertálható* $T \in \mathbb{M}_n$ *mátrix és egy* $c$ *valós szám, hogy* $\phi$ *az alábbi alakok valamelyikébe írható:*

$$\phi(A) = (\det A)^c TAT^*, \quad A \in \mathbb{P}_n;$$
$$\phi(A) = (\det A)^c TA^{-1}T^*, \quad A \in \mathbb{P}_n;$$
$$\phi(A) = (\det A)^c TA^{\mathrm{tr}}T^*, \quad A \in \mathbb{P}_n;$$
$$\phi(A) = (\det A)^c T(A^{\mathrm{tr}})^{-1}T^*, \quad A \in \mathbb{P}_n.$$

Megjegyezzük, hogy a tételben szereplő $d_{N,f}(.,.)$ leképezés valóban egy általánosított távolságmérték a korábban bevezetett értelemben. Könnyen ellenőrizhető továbbá, hogy a [**14**] cikkben vizsgált metrikák olyan speciális általánosított távolságmértékek, melyeknek (a (2.1) alapján) megfelelő $f$ függvények teljesítik az (a1) és (a2) feltételeket. A fenti tételünk azonban további általánosított távolságmértékek esetén is alkalmazható. Tetszőleges $A, B \in \mathbb{P}_n$ esetén jelölje $Y_{A,B}$ az $A^{-1/2}BA^{-1/2}$ pozitív definit mátrixot. Ekkor az alábbi formulákkal újabb általánosított távolságmértékek definiálhatóak:

(i) Stein's loss: $l(A,B) = \|Y_{A,B}^{-1} - \log Y_{A,B}^{-1} - 1\|_1$;

(ii) Jeffrey's Kullback-Leibler eltérés:

$$S_{JKL}(A,B) = \left\| \frac{Y_{A,B} + Y_{A,B}^{-1} - 2I}{2} \right\|_1;$$

(iii) log-determináns $\alpha$-eltérés (tetszőleges $-1 < \alpha < 1$ paraméterre):

$$D_{LD}^{\alpha}(A,B) =$$

$$\frac{4}{1-\alpha^2} \left\| \log \frac{(1-\alpha)I + (1+\alpha)Y_{A,B}}{2} - \frac{1+\alpha}{2} \log Y_{A,B} \right\|_1,$$

ahol $\|.\|_1$ az unitér-invariáns trace-normát jelöli. Könnyen ellenőrizhető, hogy tételünk alkalmazható a fenti általánosított távolságmértékekre. Továbbá megjegyezzük, hogy az $N$ unitér-invariáns norma és az $f$ valós függvény speciális választása esetén ahhoz, hogy meghatározzuk azon transzformációk szerkezetét, melyek valóban megőrzik a kérdéses általánosított távolságmértéket, a tétel alkalmazása után további vizsgálatok szükségesek. Ezzel kapcsolatos a következő tételünk.

TÉTEL. (Molnár–Szokol, [**15**])
*Jelölje $div(.,.)$ az $l(.,.)$, illetve a $D_{LD}^{\alpha}(.,.)$, $-1 \leq \alpha \leq 1$ függvények valamelyikét. Ekkor egy $\phi\colon \mathbb{P}_n \to \mathbb{P}_n$ transzformáció pontosan akkor őrzi meg a $div(.,.)$ leképezést, azaz tesz eleget az*

$$div(\phi(A),\phi(B)) = div(A,B), \qquad A,B \in \mathbb{P}_n,$$

*egyenletnek, ha létezik olyan invertálható $T \in \mathbb{M}_n$ mátrix, mellyel $\phi$ az alábbi alakok valamelyikébe írható:*

$\phi(A) = TAT^*, \quad A \in \mathbb{P}_n$;
$\phi(A) = TA^{\mathrm{tr}}T^*, \quad A \in \mathbb{P}_n$.

*Egy $\phi\colon \mathbb{P}_n \to \mathbb{P}_n$ szürjektív leképezés pontosan akkor őrzi meg a $S_{JKL}(.,.)$ eltérést, ha létezik olyan invertálható $T \in \mathbb{M}_n$ mátrix, mellyel $\phi$ az alábbi alakok valamelyikébe írható:*

$\phi(A) = TAT^*, \quad A \in \mathbb{P}_n$;
$\phi(A) = TA^{-1}T^*, \quad A \in \mathbb{P}_n$;
$\phi(A) = TA^{\mathrm{tr}}T^*, \quad A \in \mathbb{P}_n$;
$\phi(A) = T(A^{\mathrm{tr}})^{-1}T^*, \quad A \in \mathbb{P}_n$.

A fő eredményhez hasonló eredményt sikerült igazolni abban az esetben is, amikor a $\phi$ transzformáció az egy determinánsú, pozitív definit mátrixok $\mathbb{P}_n^1$ halmazán van definiálva. Ehhez szükségünk volt a $\mathbb{P}_n^1$ összes folytonos automorfizmusának alakjára a Jordan hármas szorzatra ($ABA$) vonatkozóan, (azaz az összes folytonos bijekció szerkezetére, amely megőrzi a Jordan hármas szorzatot). Először a $\mathbb{P}_n^1$ folytonos endomorfizmusainak az alakját határoztuk meg.

TÉTEL. (Molnár–Szokol, [**15**])
*Legyen $n \geq 3$ és tegyük fel, hogy $\phi\colon \mathbb{P}_n^1 \to \mathbb{P}_n^1$ egy folytonos endomorfizmus a Jordan hármas szorzatra vonatkozóan, azaz egy olyan folytonos leképezés, amely teljesíti az*

$$\phi(ABA) = \phi(A)\phi(B)\phi(A), \quad A, B \in \mathbb{P}_n^1.$$

*egyenlőséget minden $A, B \in \mathbb{P}_n^1$ esetén. Ekkor létezik olyan $U \in \mathbb{M}_n$ unitér mátrix, mellyel $\phi$ az alábbi alakok valamelyikébe írható:*

(g1) $\phi(A) = UAU^*, \quad A \in \mathbb{P}_n^1$;
(g2) $\phi(A) = UA^{-1}U^*, \quad A \in \mathbb{P}_n^1$;
(g3) $\phi(A) = UA^{\mathrm{tr}}U^*, \quad A \in \mathbb{P}_n^1$;
(g4) $\phi(A) = U(A^{\mathrm{tr}})^{-1}U^*, \quad A \in \mathbb{P}_n^1$;
(g5) $\phi(A) = I, \quad A \in \mathbb{P}_n^1$.

A fentiekből könnyen adódik a $\mathbb{P}_n^1$ folytonos automorfizmusainak alakjára vonatkozó tétel.

KÖVETKEZMÉNY. (Molnár, Szokol)
*Legyen $n \geq 3$ és tegyük fel, hogy $\phi\colon \mathbb{P}_n^1 \to \mathbb{P}_n^1$ egy folytonos automorfizmus a Jordan hármas szorzatra vonatkozóan, azaz egy olyan folytonos bijekció, amely teljesíti az*

$$\phi(ABA) = \phi(A)\phi(B)\phi(A)$$

*egyenlőséget minden $A, B \in \mathbb{P}_n^1$ esetén. Ekkor $\phi$ a (g1)-(g4) alakok valamelyikébe írható.*

Ezek után már leírható a $\mathbb{P}_n^1$ összes szürjektív, adott $d_{N,f}$ általánosított távolságmértéket megőrző transzformációinak szerkezete.

TÉTEL. (Molnár–Szokol, [**15**])
*Legyen $N$ az $\mathbb{M}_n$ egy unitér-invariáns normája és $f\colon ]0,\infty[ \to \mathbb{R}$ egy olyan folytonos függvény, mely eleget tesz az (a1), (a2) feltételeknek. Tegyük fel, hogy $n \geq 3$. Legyen $\phi\colon \mathbb{P}_n^1 \to \mathbb{P}_n^1$ egy olyan szürjektív leképezés, amely megőrzi a $d_{N,f}(.,.)$ mértéket. Ekkor létezik olyan $T$ invertálható mátrix, melyre $|\det T| = 1$ és amellyel $\phi$ az alábbi alakok valamelyikébe írható:*

$$\phi(A) = TAT^*, \quad A \in \mathbb{P}_n^1;$$
$$\phi(A) = TA^{-1}T^*, \quad A \in \mathbb{P}_n^1;$$
$$\phi(A) = TA^{\mathrm{tr}}T^*, \quad A \in \mathbb{P}_n^1;$$
$$\phi(A) = T(A^{\mathrm{tr}})^{-1}T^*, \quad A \in \mathbb{P}_n^1.$$

Az előző tételből könnyen adódik az alábbi következmény.

KÖVETKEZMÉNY. *Legyen $N$ és $f$ olyan, mint az előző tételben és tegyük fel, hogy $n \geq 3$ és $c$ egy pozitív valós szám. Ha $\phi\colon \mathbb{P}_n^c \to \mathbb{P}_n^c$ egy olyan szürjektív leképezés, mely megőrzi a $d_{N,f}(.,.)$ mértéket, akkor létezik olyan $T$ invertálható mátrix, melyre $|\det T| = 1$ úgy, hogy $\phi$ az alábbi alakok valamelyikébe írható:*

$$\phi(A) = TAT^*, \quad A \in \mathbb{P}_n^c;$$
$$\phi(A) = \lambda^2 TA^{-1}T^*, \quad A \in \mathbb{P}_n^c;$$
$$\phi(A) = TA^{\mathrm{tr}}T^*, \quad A \in \mathbb{P}_n^c;$$
$$\phi(A) = \lambda^2 T(A^{\mathrm{tr}})^{-1}T^*, \quad A \in \mathbb{P}_n^c,$$

*ahol $\lambda = \sqrt[n]{c}$.*

## 3. Szürjektív izometriák az általánosított eloszlásfüggvények terén

Lineáris függvényterek lineáris izometriáinak vizsgálata szintén egy jelentős kutatási terület a funkcionálanalízisben. Azonban van néhány olyan fontos függvénytér, amely nem lineáris, mint például a valószínűségszámításban alapvető szerepet játszó eloszlásfüggvények tere. A [**7**] cikkben Dolinar és Molnár leírták az $\mathbb{R}$-en értelmezett eloszlásfüggvények $D(\mathbb{R})$ tere szürjektív izometriáinak szerkezetét a Kolmogorov-Smirnov metrikára vonatkozóan. Ha $f$ és $g$ két tetszőleges eloszlásfüggvény, akkor Kolmogorov-Smirnov távolságuk a következőképpen van definiálva:

$$\rho(f, g) = \sup_{t \in \mathbb{R}} |f(t) - g(t)|.$$

A harmadik fejezetben a [**7**] cikkben szereplő eredményt terjesztettük ki az úgynevezett általánosított eloszlásfüggvények $\Delta(\mathbb{R})$ terére. Általánosított eloszlásfüggvényen olyan $f\colon \mathbb{R} \to [0, 1]$ függvényt értünk, amely monoton növekvő és jobbról folytonos (a $\pm\infty$-beli határérték feltételek nincsenek megkövetelve).

A harmadik fejezet első eredménye azt állítja, hogy a $\Delta(\mathbb{R})$ tér szürjektív izometriáinak alakja megegyezik a $D(\mathbb{R})$ tér szürjektív izometriáinak alakjával.

TÉTEL. (Molnár–Szokol, [**13**])
*Legyen* $\phi\colon \Delta(\mathbb{R}) \to \Delta(\mathbb{R})$ *egy szürjektív izometria a Kolmogorov-Smirnov metrikára vonatkozóan. Ekkor vagy létezik olyan* $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *szigorúan monoton növekvő bijekció, mellyel* $\phi$ *az*

$$\phi(f)(t) = f(\varphi(t)), \quad t \in \mathbb{R}, f \in \Delta(\mathbb{R})$$

*alakba írható, vagy létezik olyan* $\psi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *szigorúan monoton csökkenő bijekció, mellyel* $\phi$ *az*

$$\phi(f)(t) = 1 - f(\psi(t)-), \quad t \in \mathbb{R}, f \in \Delta(\mathbb{R})$$

*alakba írható.*

A [**11**] cikkben Molnár a folytonos eloszlásfüggvények $D_c(\mathbb{R})$ terének szürjektív Kolmogorov-Smirnov izometriáit is meghatározta. Ez az eredmény motiválta a harmadik fejezet második eredményét, melyben leírtuk a folytonos általánosított eloszlásfüggvények $\Delta_c(\mathbb{R})$ halmaza összes szürjektív izometriájának szerkezetét a Kolmogorov-Smirnov metrikára vonatkozóan.

TÉTEL. (Molnár–Szokol, [**13**])
*Legyen* $\phi\colon \Delta_c(\mathbb{R}) \to \Delta_c(\mathbb{R})$ *egy szürjektív izometria a Kolmogorov-Smirnov metrikára vonatkozóan. Ekkor vagy létezik olyan* $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *szigorúan monoton növekvő bijekció, mellyel* $\phi$ *az*

$$\phi(f)(t) = f(\varphi(t)), \quad t \in \mathbb{R}, f \in \Delta_c(\mathbb{R})$$

*alakba írható, vagy létezik olyan* $\psi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *szigorúan monoton csökkenő bijekció, mellyel* $\phi$ *az*

$$\phi(f)(t) = 1 - f(\psi(t)), \quad t \in \mathbb{R}, f \in \Delta_c(\mathbb{R})$$

*alakba írható.*

## 4. Szeparáció konvex interpolációs családokkal

A negyedik és ötödik fejezetekben szeparációs problémákat vizsgálunk. Egy jól ismert szeparációs tétel szerint, ha egy konvex függvény egy konkáv "felett" helyezkedik el, akkor létezik a kettő között egy affin függvény. Sőt, két tetszőleges függvény esetén adható az affin szeparáció létezésére egy szükséges és elégséges feltétel. Ezen eredményt Nikodem és Wąsowicz bizonyították a [**16**] cikkben. A negyedik fejezetben a fenti tételt általánosítottuk oly módon, hogy jellemeztük azon valós függvény párokat, melyek egy $n$-ed rendű konvex Beckenbach család valamely tagjával szeparálhatóak.

Legyen $I$ egy valós intervallum. Egy folytonos, valós függvényekből álló $\mathcal{B}_n(I)$ halmazt egy $I$ feletti $n$-paraméteres Beckenbach családnak nevezünk, ha a függvények értelmezési tartománya $I$ és minden $I \times \mathbb{R}$-beli páronként különböző első koordinátájú $(x_1, y_1)$, …, $(x_n, y_n)$ pont esetén létezik pontosan egy olyan $\varphi \in \mathcal{B}_n(I)$, melyre

$$\varphi(x_1) = y_1, \dots, \varphi(x_n) = y_n.$$

A negyedik fejezet fő eredménye azon valós függvényeket karakterizálja, melyek szeparálhatóak egy adott, a konvexitásra zárt Beckenbach család valamely elemével.

TÉTEL. (Bessenyei–Szokol, [**4**])
*Legyen $\mathcal{B}_n(I)$ egy valós $I$ intervallum felett értelmezett, konvexitásra zárt Beckenbach család és $f, g\colon I \to \mathbb{R}$ adott függvények. Ekkor a következő állítások ekvivalensek:*

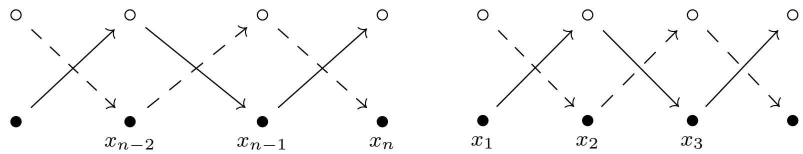
(i) *létezik olyan $h \in \mathcal{B}_n(I)$, melyre $f \leq h \leq g$;*
(ii) *minden $I$-beli $u \leq x_1 < \cdots < x_n \leq v$ elem esetén a következő egyenlőtlenségek teljesülnek*

$$\varphi_1(v) \geq f(v), \quad \psi_1(v) \leq g(v); \quad \textit{és} \quad \varphi_2(u) \geq f(u), \quad \psi_2(u) \leq g(u),$$

*ahol $\varphi_1, \varphi_2, \psi_1, \psi_2 \in \mathcal{B}_n(I)$ az alábbi interpolációs tulajdonságok által meghatározottak:*

$$\begin{aligned}
&\varphi_1(x_k) = g(x_k),\ \psi_1(x_k) = f(x_k), \quad n-k \in \{0,\dots,n-1\} \cap 2\mathbb{Z};\\
&\varphi_1(x_k) = f(x_k),\ \psi_1(x_k) = g(x_k), \quad n-k \in \{0,\dots,n-1\} \cap \big(2\mathbb{Z}+1\big);\\
&\varphi_2(x_k) = g(x_k),\ \psi_2(x_k) = f(x_k), \quad k \in \{1,\dots,n\} \cap \big(2\mathbb{Z}+1\big);\\
&\varphi_2(x_k) = f(x_k),\ \psi_2(x_k) = g(x_k), \quad k \in \{1,\dots,n\} \cap 2\mathbb{Z}.
\end{aligned}$$

A tételben szereplő interpolációs tulajdonságok könnyebb megértéséhez tekintsük az alábbi ábrát, ahol a "•" szimbólumok az $f$, a "∘" pedig a $g$ értékeit jelölik. Ekkor a $\varphi_1$ és $\varphi_2$ függvényeket szimbólikusan a "$\to$", míg a $\psi_1$ és $\psi_2$ függvényeket a "$\dashrightarrow$" nyilak szemléltetik.




## 5. Konvex szeparáció reguláris párokkal

Nikodem és Wąsowicz eredményét valójában Baron, Matkowski és Nikodem azon tétele motiválta [**1**], melyben jellemezve vannak az olyan valós függvénypárok, melyek egy konvex függvénnyel szeparálhatóak. Az ötödik fejezetben az úgynevezett reguláris párok által indukált konvexitási fogalommal kapcsolatban igazoltunk egy, az említett tétellel analóg állítást.

A tétel megfogalmazásához bevezetjük a Csebisev-rendszer fogalmát, mely a Beckenbach családok egy speciális osztályát adja. Legyen $I \subset \mathbb{R}$ egy intervallum és $\omega_1, \ldots, \omega_n \colon I \to \mathbb{R}$ folytonos függvények. Azt mondjuk, hogy az $\boldsymbol{\omega} := (\omega_1, \ldots, \omega_n)$ egy pozitív Csebisev-rendszer, ha minden $I$-beli $x_1 < \cdots < x_n$ elem esetén, a $\big[\omega_i(x_j)\big]_{i,j=1,\ldots,n}$ mátrix determinánsa pozitív. Egy $f \colon I \to \mathbb{R}$ függvényt $\boldsymbol{\omega}$-konvexnek nevezünk, ha minden $I$-beli $x_0 \leq \cdots \leq x_n$ elem esetén teljesül az alábbi egyenlőtlenség:

$$\begin{vmatrix} \omega_1(x_0) & \omega_1(x_1) & \ldots & \omega_1(x_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \omega_n(x_0) & \omega_n(x_1) & \ldots & \omega_n(x_n) \\ f(x_0) & f(x_1) & \ldots & f(x_n) \end{vmatrix} \geq 0.$$

Egy $f \colon I \to \mathbb{R}$ függvény $\boldsymbol{\omega}$-konkáv, illetve $\boldsymbol{\omega}$-affin, ha minden $I$-beli $x_0 \leq \cdots \leq x_n$ elem esetén a fent szereplő determináns rendre nempozitív, illetve eltűnik.

Reguláris pár alatt két-paraméteres pozitív Csebisev-rendszert értünk. A fő eredményünkben kiderül, hogy egy determinánst tartalmazó egyenlőtlenség segítségével szükséges és elégséges feltétel adható meg két tetszőleges valós függvény közötti $\boldsymbol{\omega}$-konvex szeparátor létezésére.

TÉTEL. (Bessenyei–Szokol, [**3**])
*Legyen $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \omega_2)$ egy reguláris pár az $I$ valós intervallum felett és $f, g \colon I \to \mathbb{R}$ adott függvények. Pontosan akkor létezik olyan $h \colon I \to \mathbb{R}$*

$\boldsymbol{\omega}$*-konvex függvény, melyre $f \le h \le g$, ha minden $I$-beli $x_0 \le x_1 \le x_2$ elem esetén*

$$\begin{vmatrix} \omega_1(x_0) & \omega_1(x_1) & \omega_1(x_2) \\ \omega_2(x_0) & \omega_2(x_1) & \omega_2(x_2) \\ g(x_0) & f(x_1) & g(x_2) \end{vmatrix} \ge 0.$$

Megjegyezzük, hogy ezen eredményt már a [**2**] cikkben bebizonyították a szerzők a Baron–Matkowski–Nikodem tétel segítségével. Azonban nekünk sikerült egy független bizonyítást adni erre az eredményre.

A standard esethez analóg módon definiálhatunk közelítőleg $\boldsymbol{\omega}$-konvex függvényeket a következőképpen.

Legyen $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \omega_2)$ egy reguláris pár az $I$ valós intervallum felett és legyen $\omega$ egy $\boldsymbol{\omega}$-affin függvény, amely pozitív $I^\circ$-n. A $\varphi\colon I \to \mathbb{R}$ függvényt közelítőleg $\boldsymbol{\omega}$-konvexnek nevezzük $\omega$ hibával, ha minden $I$-beli $x_0 \le x_1 \le x_2$ elem esetén

$$\begin{vmatrix} \omega_1(x_0) & \omega_1(x_1) & \omega_1(x_2) \\ \omega_2(x_0) & \omega_2(x_1) & \omega_2(x_2) \\ (\varphi+\omega)(x_0) & (\varphi-\omega)(x_1) & (\varphi+\omega)(x_2) \end{vmatrix} \ge 0.$$

Könnyű észrevenni, hogy $\boldsymbol{\omega} = (1, \mathrm{id})$ és $\omega \equiv \varepsilon/2$ választással a standard közelítőleg konvex függvények definíciójához jutunk. Továbbá, a klasszikus esethez hasonlóan megmutatható, hogy minden közelítőleg $\boldsymbol{\omega}$-konvex függvény felbontható egy $\boldsymbol{\omega}$-konvex függvény és egy “kicsi” rész összegére.

TÉTEL. (Bessenyei–Szokol, [**3**])
*Legyen $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \omega_2)$ egy reguláris pár az $I$ valós intervallum felett és legyen $\omega$ egy $\boldsymbol{\omega}$-affin függvény, amely pozitív $I^\circ$-n. Ekkor $\varphi\colon I \to \mathbb{R}$ pontosan akkor közelítőleg $\boldsymbol{\omega}$-konvex $\omega$ hibával, ha felírható $\varphi = h + \psi$ alakban, ahol $h$ egy $\boldsymbol{\omega}$-konvex függvény és $|\psi(t)| \le \omega(t)$ minden $t \in I$ esetén.*

Az ötödik fejezet végén a fő tételek következményeként, speciális reguláris párok esetén fogalmaztuk meg a nekik megfelelő szeparációs, illetve stabilitási tételeket.

KÖVETKEZMÉNY. *Legyen $I$ egy valós intervallum, $\alpha\colon I \to \mathbb{R}$ egy folytonos, szigorúan monoton növekvő függvény. Legyenek továbbá $f, g\colon I \to \mathbb{R}$ tetszőlegesen adott függvények. Pontosan akkor létezik olyan $h\colon I \to \mathbb{R}$ függvény, amelyre $f \le h \le g$ és amely teljesíti az alábbi egyenlőtlenséget*

$$\begin{aligned} \big(\alpha(x_2) - \alpha(x_0)\big)h(x_1) \le \big(\alpha(x_2) - \alpha(x_1)\big)h(x_0) \\ + \big(\alpha(x_1) - \alpha(x_0)\big)h(x_2) \end{aligned} \tag{5.1}$$

*minden $x_0 \le x_1 \le x_2 \in I$ elemre, ha tetszőleges $I$-beli $x_0 \le x_1 \le x_2$ esetén az alábbi egyenlőtlenség fennáll:*

$$\big(\alpha(x_2)-\alpha(x_0)\big)f(x_1) \le \big(\alpha(x_2)-\alpha(x_1)\big)g(x_0)+\big(\alpha(x_1)-\alpha(x_0)\big)g(x_2).$$

KÖVETKEZMÉNY. *Legyen $I$ egy valós intervallum, $\alpha\colon I \to \mathbb{R}$ egy folytonos, szigorúan monoton növekvő függvény és $\varepsilon > 0$. Ekkor egy $\varphi\colon I \to \mathbb{R}$ függvény pontosan akkor teljesíti a*

$$\begin{aligned}\big(\alpha(x_2)-\alpha(x_0)\big)\varphi(x_1) \;&\le\; \big(\alpha(x_2)-\alpha(x_1)\big)\varphi(x_0)\\ &\quad+\; \big(\alpha(x_1)-\alpha(x_0)\big)\varphi(x_2)+2\varepsilon\big(\alpha(x_2)-\alpha(x_0)\big)\end{aligned}$$

*egyenlőtlenséget minden $I$-beli $x_0 \le x_1 \le x_2$ esetén, ha léteznek olyan $h,\psi\colon I \to \mathbb{R}$ függvények, melyekkel $\varphi = h+\psi$, ahol $h$ eleget tesz a* (5.1) *egyenlőtlenségnek és $\|\psi\| \le \varepsilon$. (Itt $\|\cdot\|$ a szuprémum normát jelöli.)*

KÖVETKEZMÉNY. *Legyen $I \subset ]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ egy valós intervallum, $f,g\colon I \to \mathbb{R}$. Pontosan akkor létezik olyan $h\colon I \to \mathbb{R}$ $(\cos,\sin)$-konvex függvény, amelyre $f \le h \le g$, ha minden $\lambda \in [0,1]$ és $I$-beli $x \le y$ esetén*

$$\sin(y-x)f\big(\lambda x+(1-\lambda)y\big) \le \sin\big(\lambda(y-x)\big)g(x)+\sin\big((1-\lambda)(y-x)\big)g(y).$$

KÖVETKEZMÉNY. *Legyen $I \subset ]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ egy valós intervallum. Ekkor egy $\varphi\colon I \to \mathbb{R}$ függvény pontosan akkor közelítőleg $(\cos,\sin)$-konvex $\varepsilon\cdot\cos$ hibával, ha $\varphi$ előáll $\varphi = h+\psi$ alakban, ahol $h\colon I \to \mathbb{R}$ egy $(\cos,\sin)$-konvex függvény és $\psi\colon I \to \mathbb{R}$ minden $t \in I$ esetén teljesíti az $|\psi(t)| \le \varepsilon\cdot\cos(t)$ egyenlőtlenséget.*

# Talks held by the author/ A szerző konferencia-előadásai

(1) *Pozitív szemidefinit operátorokon értelmezett, relatív entrópiát megőrző leképezések*, Debreceni Egyetem TEK Természettudományi és Technológiai Kar 2009. Őszi Tudományos Diákköri Konferencia.

(2) *Maps on positive semidefinite operators preserving relative entropy*, The 6th International Students' Conference on Analysis, Síkfőkút, Hungary, 2010 January 28 – February 1.

(3) *Kolmogorov–Smirnov isometries of the space of generalized distribution functions*, The 11th Katowice–Debrecen Winter Seminar, Wisła-Malinka, Poland, 2011 February 2 – 5.

(4) *Properties of quantum relative entropy*; The 7th International Students' Conference on Analysis, Wisła, Poland, 2011 February 5 – 8.

(5) *Maps on positive semidefinite operators preserving relative entropy*, XXX. Jubileumi Országos Tudományos Diákköri Konferencia, Fizika, Földtudományok és Matematika Szekció, Nyíregyházi Főiskola, Hungary, 2011 April 27 – 29.

(6) *Az általánosított eloszlásfüggvények terén értelmezett Kolmogorov-Szmirnov izometriák*; Analízis Tanszék Szeminárium, Síkfőkút, Hungary, 2011 May 28.

(7) *Convex and affine separation problems I.*, The 12th Debrecen-Katowice Winter Seminar on Functional Equations and Inequalities, Hajdúszoboszló, Hungary, 2012 January 25 – 28.

(8) *Jordan triple automorphisms and inverted Jordan triple automorphisms*, The 8th International Students' Conference on Analysis, Síkfőkút, Hungary, 2012 January 28 – February 1.

(9) *Konvex szeparáció reguláris párokkal*, Analízis Tanszék Szeminárium, Síkfőkút, Hungary, 2012 May 25 – 28.

(10) *Convex separation by regular pairs*, The 50th International Conference on Functional Equations, Hajdúszoboszló, Hungary, 2012 June 17 – 24.

(11) *Maps on density operators preserving f-divergences*, The International Workshop on Functional Analysis, Temesvár, Romania, 2012 October 12 – 14.

(12) *Maps on density operators preserving quantum f-divergences*, The 13th Katowice-Debrecen Winter Seminar on Functional Equations and Inequalities, Zakopane, Poland, 2013 January 30 – February 2.

(13) *Separation by convex interpolation families,* The 9th International Students' Conference on Analysis, Ustron, Poland, 2013 February 2 – 5.

(14) *Kvantum f-divergenciát megőrző leképezések sűrűségoperátorokon*, "Lendület" FIFA'13 Mini-Konferencia, Debrecen, Hungary, 2013 April 26 – 27.

(15) *Szeparáció konvex interpolációs családokkal*, Analízis Tanszék Szeminárium, Síkfőkút, Hungary, 2012 May 25 – 28.

(16) *Separation by convex interpolation families*, The 51th International Symposium on Functional Equations, Rzeszów, Poland, 2013 June 17 – 23.

(17) *Transformations on density operators leaving f-divergences invariant*, Workshop on Functional Analysis and its Applications in Mathematical Physics and Optimal Control, Nemecká, Slovak Republic, 2013 September 9 – 14.

(18) *Transformations on density operators preserving quantum $f$ - divergences*, Kaohsiung, Taiwan, 2013 October 30.

(19) *Transformations on positive definite matrices preserving generalized distance measures*, The 14th Debrecen-Katowice Winter Seminar on Functional Equations and Inequalities, Hajdúszoboszló, Hungary, 2014 January 29 – February 1.

(20) *Transformations on positive definite matrices preserving generalized distance measures*, Young Functional Analysts' Meeting 2014, Debrecen, Hungary, 2014 April 11 – 13.

(21) *Maps preserving geodesics and their connection with relative entropies*, The 52nd International Symposium on Functional Equations, Innsbruck, Austria, 2014 June 22 – 29.

(22) *Maps preserving geodesics and their connection with relative entropy and geometric mean*, CSM - The Third Conference of PhD Students in Mathematics, Szeged, Hungary, 2014 June 30 – July 2.

(23) *Maps preserving numerical quantities of geodesics in space of positive definite matrices*, Conference on Inequalities and Applications '14, Hajdúszoboszló, Hungary, 2014 September 7– 13.

(24) *Maps on positive definite matrices preserving generalized distance measures*, Szemináriumi előadás, National Sun Yat-sen University, Kaohsiung, Taiwan, 2014 November 6.

(25) *Transformations preserving norms of means of positive operators and nonnegative functions*, The 15th Katowice-Debrecen Winter Seminar on Functional Equations and Inequalities, Będlewo, Poland, 2015 January 28 – 31.

(26) *Surjective isometries of the space of generalized distibution functions,* The 11th International Students' Conference on Analysis, Ustron, Poland, 2015 January 31 – February 3.

(27) *Transformations preserving norms of means of positive operators and nonnegative functions*, Szemináriumi előadás, National Sun Yat-sen University, Kaohsiung, Taiwan, 2015 October 22.

# Publications of the author/ A szerző publikációi


1. L. Molnár and P. Szokol, *Maps on states preserving the relative entropy II*, Linear Algebra Appl., **432** (2010), 3343–3350.
2. L. Molnár, G. Nagy and P. Szokol, *Maps on density operators preserving quantum f-divergences*, Quantum Inf. Process., **12** (2013), 2309–2323.
3. M. Bessenyei, P. Szokol, *Convex separation by regular pairs*, J. Geom., **104** (2013), 45–56.
4. M. Bessenyei, P. Szokol, *Separation by convex interpolation families*, J. Convex Anal., **20** (2013), 937–946.
5. L. Molnár, P. Szokol, *Kolmogorov-Smirnov isometries of the space of generalized distribution functions*, Math. Slovaca, **64** (2014), 433–444.
6. L. Molnár, P. Szokol, *Transformations on positive definite matrices preserving generalized distance measures,* Linear Algebra Appl., **466** (2015), 141–159.
7. P. Szokol, M.-C. Tsai, J. Zhang, *Preserving problems of geodesic affine maps and related topics on positive definite matrices,* Linear Algebra Appl., **483** (2015), 293–308.
8. L. Molnár, P. Szokol, *Transformations preserving norms of means of positive operators and nonnegative functions,* Integr. Equ. Oper. Theory., to appear.
9. G. Dolinar, B. Kuzma, G. Nagy and P. Szokol, *Restricted skew-morphisms on matrix algebras,* Linear Algebra Appl., to appear.

# Bibliography


[1] K. Baron, J. Matkowski, K. Nikodem, *A sandwich with convexity,* Math. Pannon., **5** (1994), 139–144.

[2] M. Bessenyei and Zs. Páles, *Separation by linear interpolation families*, J. Nonlinear Conv. Anal., **13** (2012), 49–56.

[3] M. Bessenyei, P. Szokol, *Convex separation by regular pairs*, J. Geom., **104** (2013), 45–56.

[4] M. Bessenyei, P. Szokol, *Separation by convex interpolation families*, J. Convex Anal., **20** (2013), 937–946.

[5] C. K. Li and S. Pierce, *Linear preserver problems,* Amer. Math. Monthly, **108** (2001), 591–605.

[6] C. K. Li and N. K. Tsing, *Linear preserver problems: A brief introduction and some special techniques,* Linear Algebra Appl., **162-164** (1992), 217–235.

[7] G. Dolinar and L. Molnár, *Isometries of the space of distribution functions with respect to the Kolmogorov-Smirnov metric,* J. Math. Anal. Appl., **348** (2008), 494–498.

[8] G. G. Magaril-Il'yaev and V. M. Tikhomirov, *Convex Analysis: Theory and Applications*, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 2003.

[9] L. Molnár, *Maps on states preserving the relative entropy,* J. Math. Phys., **49** (2008), 032114.

[10] L. Molnár and P. Szokol, *Maps on states preserving the relative entropy II*, Linear Algebra Appl., **432** (2010), 3343–3350.

[11] L. Molnár, *Kolmogorov-Smirnov isometries and affine automorphisms of spaces of distribution functions*, Cent. Eur. J. Math., **9** (2011), 789–796.

[12] L. Molnár, G. Nagy and P. Szokol, *Maps on density operators preserving quantum $f$-divergences*, Quantum Inf. Process, **12** (2013), 2309–2323.

[13] L. Molnár and P. Szokol, *Kolmogorov-Smirnov isometries of the space of generalized distribution functions*, Math. Slovaca, **64** (2014), 433–444.

[14] L. Molnár, *Jordan triple endomorpisms and isometries of spaces of positive definite matrices*, Linear and Multilinear Algebra, **63** (2015), 12–33.

[15] L. Molnár and P. Szokol, *Transformations on positive definite matrices preserving generalized distance measures,* Linear Algebra Appl., **466** (2015), 141–159.

[16] K. Nikodem and Sz. Wąsowicz, *A sandwich theorem and Hyers-Ulam stability of affine functions*, Aequationes Math., **49** (1995), no. 1-2, 160–164.
[17] R. T. Rockafellar, *Convex Analysis*, Princeton Mathematical Series, No. 28, Princeton University Press, Princeton, N.J., 1970.

Nyilvántartási szám: DEENK/140/2015.PL
Tárgy: PhD Publikációs Lista

Jelölt: Szokol Patrícia
Neptun kód: O5A2T4
Doktori Iskola: Matematika- és Számítástudományok Doktori Iskola
MTMT azonosító: 10035336

## A PhD értekezés alapjául szolgáló közlemények

Idegen nyelvű tudományos közlemény(ek) külföldi folyóiratban (6)

1. Molnár, L., **Szokol, P.**: Transformations on positive definite matrices preserving generalized distance measures.
   *Linear Alg. Appl. 466*, 141-159, 2015. ISSN: 0024-3795.
   DOI: http://dx.doi.org/10.1016/j.laa.2014.09.045
   IF:0.939 (2014)

2. Molnár, L., **Szokol, P.**: Kolmogorov-Smirnov isometries of the space of generalized distribution functions.
   *Math. Slovaca. 64* (2), 433-444, 2014. EISSN: 1337-2211.
   DOI: http://dx.doi.org/10.2478/s12175-014-0216-8

3. Bessenyei, M., **Szokol, P.**: Separation by convex interpolation families.
   *J. Convex Anal. 20* (4), 937-946, 2013. ISSN: 0944-6532.
   IF:0.592

4. Bessenyei, M., **Szokol, P.**: Convex separation by regular pairs.
   *J. Geom. 104* (1), 45-56, 2013. ISSN: 0047-2468.
   DOI: http://dx.doi.org/10.1007/s00022-013-0151-9

5. Molnár, L., Nagy, G., **Szokol, P.**: Maps on density operators preserving quantum f -divergences.
   *Quantum Inf Process. 12* (7), 2309-2323, 2013. ISSN: 1570-0755.
   DOI: http://dx.doi.org/10.1007/s11128-013-0528-6
   IF:2.96

6. Molnár, L., **Szokol, P.**: Maps on states preserving the relative entropy II.
*Linear Alg. Appl. 432* (12), 3343-3350, 2010. ISSN: 0024-3795.
DOI: http://dx.doi.org/10.1016/j.laa.2010.01.025
IF:1.005

## További Közlemények

Idegen nyelvű közlemény(ek) külföldi folyóiratban (2)

7. **Szokol, P.**, Tsai, M., Zhang, J.: Preserving problems of geodesic-affine maps and related topics on positive definite matrices.
*Linear Alg. Appl. 483*, 293-308, 2015. ISSN: 0024-3795.
DOI: http://dx.doi.org/10.1016/j.laa.2015.06.009
IF:0.939 (2014)

8. Molnár, L., **Szokol, P.**: Transformations Preserving Norms of Means of Positive Operators and Nonnegative Functions.
*Integr. Equ. Oper. Theory. Epub*, 2015. ISSN: 0378-620X.
DOI: http://dx.doi.org/10.1007/s00020-015-2241-6
IF:0.699 (2014)

**A közlő folyóiratok összesített impakt faktora: 7,134**
**A közlő folyóiratok összesített impakt faktora (az értekezés alapjául szolgáló közleményekre): 5,496**

A DEENK a Jelölt által az iDEa Tudóstérbe feltöltött adatok bibliográfiai és tudománymetriai ellenőrzését a tudományos adatbázisok és a Journal Citation Reports Impact Factor lista alapján elvégezte.

Debrecen, 2015.07.01.

Registry number: DEENK/140/2015.PL
Subject: Ph.D. List of Publications

Candidate: Patrícia Szokol
Neptun ID: O5A2T4
Doctoral School: Doctoral School of Mathematical and Computational Sciences
MTMT ID: 10035336

## List of publications related to the dissertation

Foreign language scientific article(s) in international journal(s) (6)

1. Molnár, L., **Szokol, P.**: Transformations on positive definite matrices preserving generalized distance measures.
   *Linear Alg. Appl. 466*, 141-159, 2015. ISSN: 0024-3795.
   DOI: http://dx.doi.org/10.1016/j.laa.2014.09.045
   IF:0.939 (2014)

2. Molnár, L., **Szokol, P.**: Kolmogorov-Smirnov isometries of the space of generalized distribution functions.
   *Math. Slovaca. 64* (2), 433-444, 2014. EISSN: 1337-2211.
   DOI: http://dx.doi.org/10.2478/s12175-014-0216-8

3. Bessenyei, M., **Szokol, P.**: Separation by convex interpolation families.
   *J. Convex Anal. 20* (4), 937-946, 2013. ISSN: 0944-6532.
   IF:0.592

4. Bessenyei, M., **Szokol, P.**: Convex separation by regular pairs.
   *J. Geom. 104* (1), 45-56, 2013. ISSN: 0047-2468.
   DOI: http://dx.doi.org/10.1007/s00022-013-0151-9

5. Molnár, L., Nagy, G., **Szokol, P.**: Maps on density operators preserving quantum f -divergences.
   *Quantum Inf Process. 12* (7), 2309-2323, 2013. ISSN: 1570-0755.
   DOI: http://dx.doi.org/10.1007/s11128-013-0528-6
   IF:2.96

6. Molnár, L., **Szokol, P.**: Maps on states preserving the relative entropy II.
   *Linear Alg. Appl. 432* (12), 3343-3350, 2010. ISSN: 0024-3795.
   DOI: http://dx.doi.org/10.1016/j.laa.2010.01.025
   IF:1.005

## List of other publications

Foreign language scientific article(s) in international journal(s) (2)

7. **Szokol, P.**, Tsai, M., Zhang, J.: Preserving problems of geodesic-affine maps and related topics on positive definite matrices.
   *Linear Alg. Appl. 483*, 293-308, 2015. ISSN: 0024-3795.
   DOI: http://dx.doi.org/10.1016/j.laa.2015.06.009
   IF:0.939 (2014)

8. Molnár, L., **Szokol, P.**: Transformations Preserving Norms of Means of Positive Operators and Nonnegative Functions.
   *Integr. Equ. Oper. Theory. Epub*, 2015. ISSN: 0378-620X.
   DOI: http://dx.doi.org/10.1007/s00020-015-2241-6
   IF:0.699 (2014)

**Total IF of journals (all publications): 7,134**
**Total IF of journals (publications related to the dissertation): 5,496**

The Candidate's publication data submitted to the iDEa Tudóstér have been validated by DEENK on the basis of Web of Science, Scopus and Journal Citation Report (Impact Factor) databases.

01 July, 2015