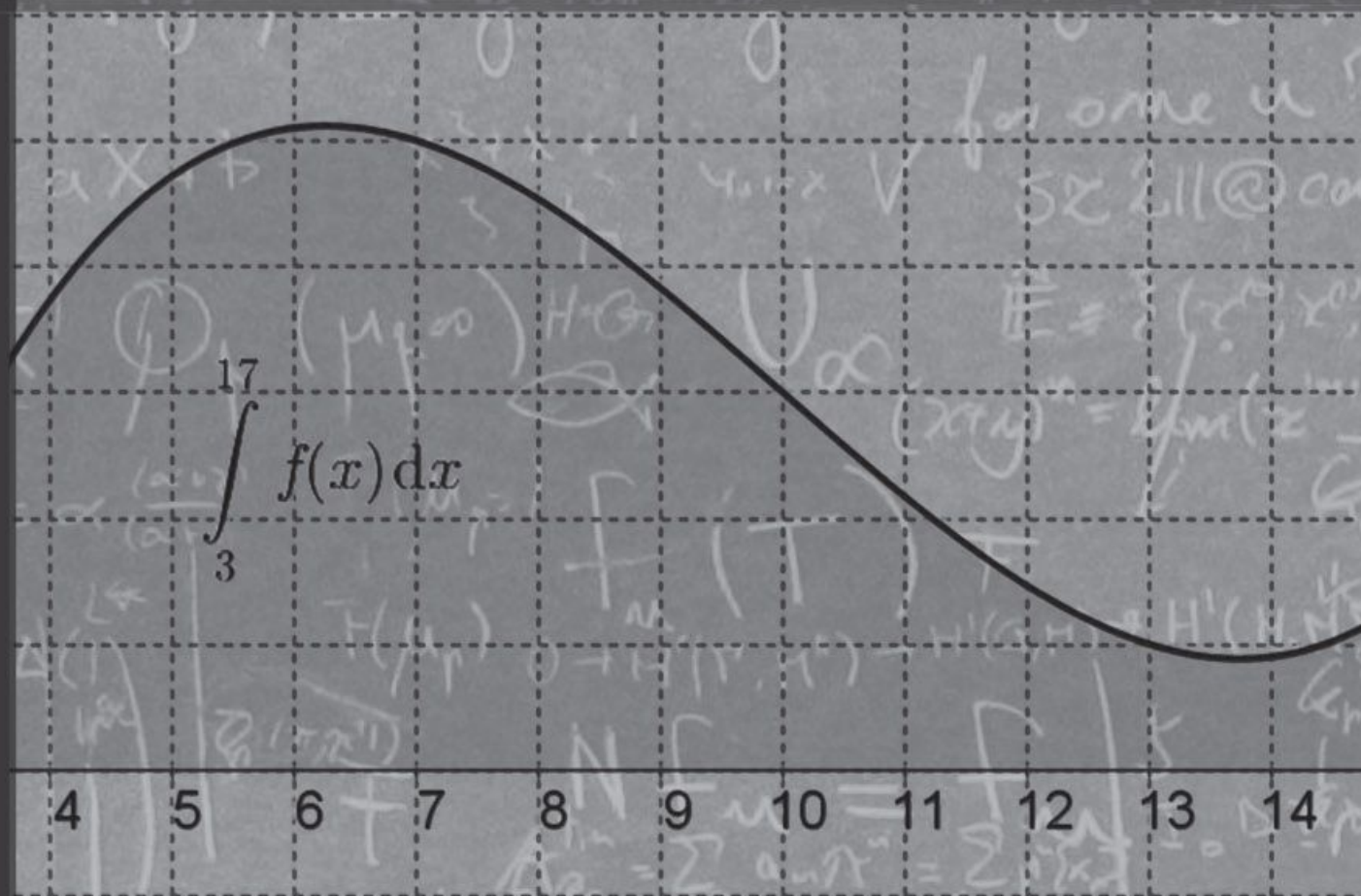


Dr. Kézi Csaba Gábor

# Primitív függvény keresési módszerek és alkalmazásai



Debreceni Egyetem Műszaki Kar  
Műszaki Alaptárgyi Tanszék

DEBRECENI EGYETEM  
MŰSZAKI KAR  
MŰSZAKI ALAPTÁRGYI TANSZÉK

Dr. Kézi Csaba Gábor

PRIMITÍV FÜGGVÉNY  
KERESÉSI MÓDSZEREK  
ÉS ALKALMAZÁSAIK



Debreceni Egyetemi Kiadó  
Debreceen University Press  
2019

## 1. A Riemann-integrál definíciója

1.1. **Megjegyzés.** Megállapodunk abban, hogy ebben a jegyzetben, ha más nem mondunk, akkor  $c$  tetszőleges valós számot jelöl.

1.2. **Definíció.** Legyenek  $a$  és  $b$  olyan valós számok, melyekre  $a < b$  teljesül és tekintsük az  $[a; b]$  intervallumot. Legyen

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b.$$

Ekkor a

$$d = \{[x_0; x_1]; [x_1; x_2]; \dots; [x_{n-1}; x_n]\}$$

halmazt az  $[a; b]$  intervallum egy *bosztásának* vagy *felosztásának* nevezzük.

A beosztás *finomsága* az osztópontok által keletkezett részintervallumok hosszának maximuma.

Azt mondjuk, hogy a  $d$  beosztás *ekvidisztáns*, ha

$$x_1 - x_0 = x_2 - x_1 = \dots = x_n - x_{n-1},$$

azaz a  $d$  halmazban szereplő intervallumok egyenlő hosszúságúak.

Az  $x_0; x_1; \dots; x_n$  valós számokat a beosztás *osztópontjainak* mondjuk.

Az  $[a; b]$  intervallum összes beosztásainak halmazát  $\mathcal{D}[a; b]$  módon jelöljük.

Azt mondjuk, hogy a beosztások egy sorozata *minden határon túl finomodó* vagy más szóval *normális beosztássorozat*, ha az osztópontok számával végtelenhez tartva, a leghosszabb részintervallum hossza is nullához tart.

1.3. **Példa.** Az  $[1; 4]$  intervallumnak a

$$d = \{[1; 2]; [2; 3]; [3; 4]\}$$

halmaz egy ekvidisztáns beosztása.

A beosztás osztópontjainak halmaza

$$\{1; 2; 3; 4\}.$$

A beosztás finomsága 1 egység.

1.4. **Definíció.** Legyen  $f: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$  korlátos függvény és

$$d = \{[x_{i-1}; x_i] \mid i = 1, 2, \dots, n\}$$

az  $[a; b]$  intervallum egy beosztása.

Vezessük be az

$$m_i = \inf_{x \in [x_{i-1}; x_i]} f(x) \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

és az

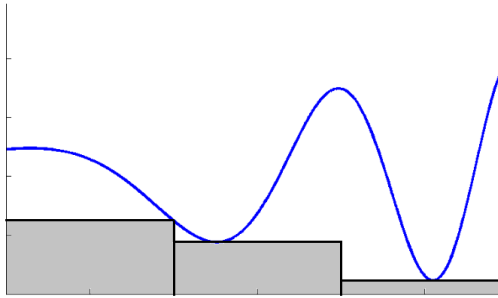
$$M_i = \sup_{x \in [x_{i-1}; x_i]} f(x) \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

jelöléseket.

Az

$$s(f; d) = \sum_{i=1}^n m_i \cdot (x_i - x_{i-1})$$

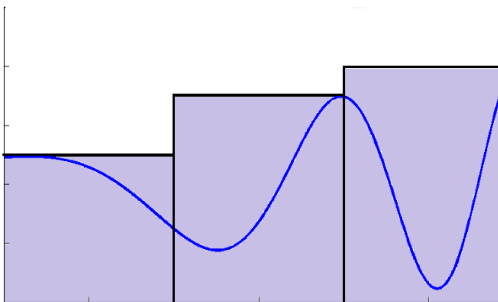
összeget az  $f$  függvény  $d$  beosztásához tartozó *alsó integrálközelítő összegének* nevezzük.



Az

$$S(f; d) = \sum_{i=1}^n M_i \cdot (x_i - x_{i-1}),$$

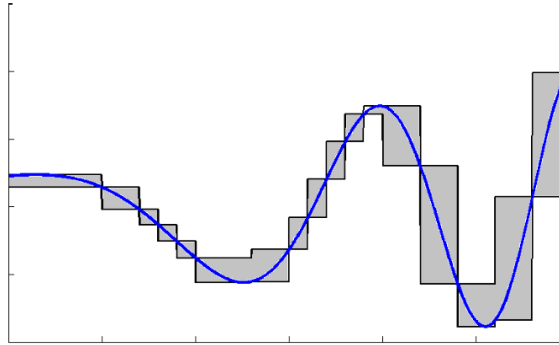
összeget az  $f$  függvény  $d$  beosztásához tartozó *felső integrálközelítő összegének* mondjuk.



Az

$$\mathcal{O}(f; d) = S(f; d) - s(f; d)$$

értéket az  $f$  függvény  $d$  beosztásához tartozó *oszillációs összegének* hívjuk. Ezt a fogalmat az alábbi ábra szemlélteti:



**1.5. Példa.** Tekintsük az  $f: [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^2$  függvényt! A  $[0; 1]$  intervallumot osszuk fel 5 egyenlő részre.

Ekkor minden keletkezett részintervallum hossza  $\frac{1}{5} = 0,2$ , így a beosztás finomsága is  $0,2$ .

A beosztás által keletkezett osztópontok halmaza:

$$D = \{0; 0,2; 0,4; 0,6; 0,8; 1\},$$

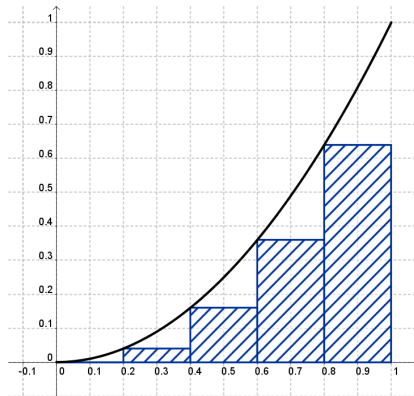
A beosztásnak megfelelő részintervallumok halmaza:

$$d = \{[0; 0,2]; [0,2; 0,4]; [0,4; 0,6]; [0,6; 0,8]; [0,8; 1]\}.$$

Az alsó integrálközelítő összeg:

$$\begin{aligned} s(f; d) &= 0 \cdot 0,2 + 0,2^2 \cdot 0,2 + 0,4^2 \cdot 0,2 + 0,6^2 \cdot 0,2 + 0,8^2 \cdot 0,2 = \\ &= 0,2 \cdot (0,04 + 0,16 + 0,36 + 0,64) = 0,2 \cdot 1,2 = 0,24. \end{aligned}$$

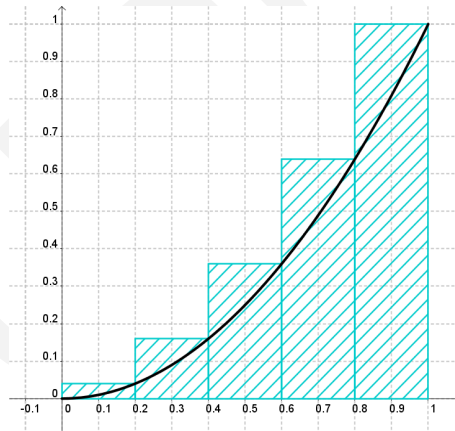
A függvény grafikonját, valamint az alsó integrálközelítő összeget az alábbi ábra szemlélteti:



A felső integrálközelítő összeg:

$$\begin{aligned} S(f; d) &= 0,2^2 \cdot 0,2 + 0,4^2 \cdot 0,2 + 0,6^2 \cdot 0,2 + 0,8^2 \cdot 0,2 + 1^2 \cdot 0,2 = \\ &= 0,2 \cdot (0,04 + 0,16 + 0,36 + 0,64 + 1) = 0,2 \cdot 2,2 = 0,44. \end{aligned}$$

A függvény grafikonját, valamint a felső integrálközelítő összeget az alábbi ábra szemlélteti:



Az oszcillációs összeg:

$$\mathcal{O}(f; d) = S(f; d) - s(f; d) = 0,44 - 0,24 = 0,2.$$

**1.6. Megjegyzés.** Ha az  $f: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$  függvény folytonos, akkor

$$m_i = \min_{x \in [x_{i-1}; x_i]} f(x) \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

és

$$M_i = \max_{x \in [x_{i-1}; x_i]} f(x) \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

**1.7. Definíció.** Legyen  $f: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$  korlátos függvény. Azt mondjuk, hogy a  $d_2$  beosztás *finomítása* a  $d_1$  beosztásnak, ha  $d_1 \subset d_2$ .

Ilyenkor azt is mondjuk, hogy a  $d_2$  beosztás *finomabb*, mint a  $d_1$ .

**1.8. Megjegyzés.** Legyen  $f: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$  korlátos függvény és  $d_2$  a  $d_1$  beosztás finomítása. Ekkor

$$s(f; d_1) \leq s(f; d_2),$$

azaz a beosztás finomításával az alsó integrálközelítő összegek csak nőhetnek (nem csökkenhetnek).

**1.9. Megjegyzés.** Legyen  $f: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$  korlátos függvény és  $d_2$  a  $d_1$  beosztás finomítása. Ekkor

$$S(f; d_1) \geq S(f; d_2),$$

azaz a beosztás finomításával a felső integrálközelítő összegek csak csökkenhetnek (nem nőhetnek).

**1.10. Tétel.** Ha  $f: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$  korlátos függvény, továbbá  $d_1$  és  $d_2$  az  $[a; b]$  intervallum beosztásai, akkor

$$s(f; d_1) \leq S(f; d_2),$$

tehát bármely alsó integrálközelítő összeg nem nagyobb, mint az ugyanazon beosztáshoz tartozó bármely felső integrálközelítő összeg.

*Bizonyítás:* Mivel  $d_1 \cup d_2$  a  $d_1$  beosztásnak és a  $d_2$  beosztásnak is finomítása, ezért az előző megjegyzéseket felhasználva azt kapjuk, hogy

$$s(f; d_1) \leq s(f; d_1 \cup d_2) \leq S(f; d_1 \cup d_2) \leq S(f; d_2),$$

ami éppen a bizonyítandó állítás. ■

**1.11. Következmény.** Az alsó integrálközelítő összegek halmaza felülről korlátos és a felső integrálközelítő összegek halmaza alulról korlátos.

**1.12. Definíció.** Az  $f: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$  korlátos függvény alsó integrálközelítő összegei halmazának pontos felső korlátját az  $f$  függvény *alsó integráljának* nevezzük:

$$\int_a^b f(x) dx = \sup_{d \in \mathcal{D}[a; b]} s(f; d).$$

Az  $f: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$  korlátos függvény felső integrálközelítő összegei halmazának pontos alsó korlátját az  $f$  függvény *felső integráljának* nevezzük:

$$\int_a^b f(x) \, dx = \inf_{d \in \mathcal{D}[a; b]} S(f; d).$$

1.13. **Megjegyzés.** Ha  $f: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$  korlátos függvény, akkor

$$\int_{\bar{a}}^b f(x) \, dx \leq \int_a^b f(x) \, dx.$$

1.14. **Definíció.** Azt mondjuk, hogy az  $f: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$  függvény Riemann-integrálható, ha

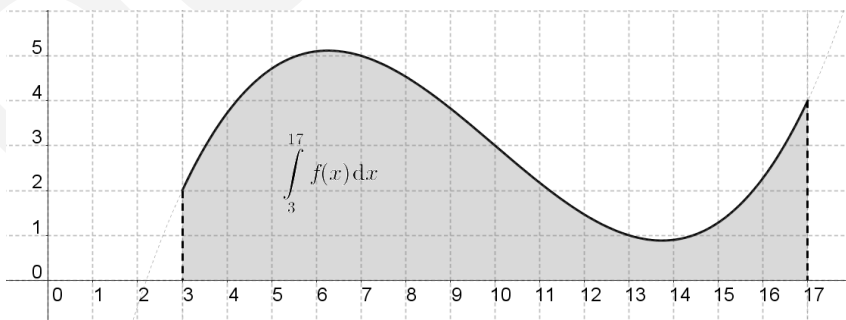
$$\int_{\bar{a}}^b f(x) \, dx = \int_a^b f(x) \, dx.$$

Közös értéküket az  $f$  függvény *Riemann-integráljának* nevezzük. Jele:

$$\int_a^b f(x) \, dx.$$

1.15. **Megjegyzés.** Nem-negatív értékű, Riemann-integrálható függvény Riemann-integráljának geometriai jelentése a függvény grafikonjának az  $x$ -tengellyel bezárt területe.

Az alábbi ábra az  $f(x)$  függvény Riemann-integrálját szemlélteti a  $[3; 17]$  intervallumon.



1.16. **Megjegyzés.** Negatív értékű, Riemann-integrálható függvény Riemann-integráljának abszolút értékének geometriai jelentése a függvény grafikonjának az  $x$ -tengellyel bezárt területe.

1.17. **Megjegyzés.** Riemann-integrálható függvény Riemann-integráljának geometriai jelentése a függvény grafikonjának az  $x$ -tengellyel bezárt előjeles területe.

DUPress

## 2. A Riemann integrálhatóság kritériumai és elegendő feltételei

**2.1. Megjegyzés.** Ebben a szakaszban az alsó integrálközelítő összegre, illetve felső integrálközelítő összegre, valamint az oszcillációs összegre az  $s_n(f; d)$ , illetve  $S_n(f; d)$ , valamint a  $\mathcal{O}_n(f; d)$  jelöléseket is használjuk ott, ahol fontos hangsúlyozni, hogy  $n$  részre osztjuk fel az  $[a; b]$  intervallumot.

**2.2. Tétel.** Legyen  $f: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$  korlátos függvény és

$$d = \{[x_{i-1}; x_i] \mid i = 1, 2, \dots, n\}$$

az  $[a; b]$  intervallum egy beosztása.

Legyen  $\xi_i \in [x_{i-1}; x_i]$ , ahol  $i = 1, \dots, n$ . Ha az  $f$  függvény Riemann-integrálható az  $[a; b]$  intervallumon, akkor

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \cdot (x_i - x_{i-1}).$$

*Bizonyítás:* Az állítás a Riemann-integrál definíciójának közvetlen következménye. ■

**2.3. Tétel.** Az  $f: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$  korlátos függvény pontosan akkor Riemann-integrálható az  $[a; b]$  intervallumon és az integrál értéke  $I$ , ha az  $[a; b]$  intervallumnak van olyan beosztássorozata, amelyhez tartozó integrálközelítő összeg és a felső integrálközelítő összeg konvergens és mindkettő határértéke  $I$ , azaz

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n(f; d) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(f; d) = I.$$

*Bizonyítás:* Tegyük fel, hogy az  $f$  függvény Riemann-integrálható az  $[a; b]$  intervallumon és

$$\int_a^b f(x) dx = I.$$

Ekkor a Riemann-integrál definíciója szerint

$$\int_{\bar{a}}^b f(x) dx = \int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(x) dx.$$

Ezt felhasználva minden  $n \in \mathbb{N}$  esetén van olyan  $d$  beosztássorozata az  $[a; b]$  zárt intervallumnak, melyre

$$I - \frac{1}{n} \leq s_n(f; d) \leq \int_{\bar{a}}^b f(x) dx = \int_a^{\bar{b}} f(x) dx \leq S_n(f; d) \leq I + \frac{1}{n}.$$

Az előbbi egyenlőtlenség sorban vegyük az  $n \rightarrow \infty$  határátmenetet. Ekkor

$$\lim_{n \rightarrow \infty} I - \frac{1}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} I + \frac{1}{n} = I,$$

ezért  $n \rightarrow \infty$  határátmenet esetén a fenti egyenlőtlenség eleje és vége egyenlő, így mindenhol egyenlőség kell, hogy szerepeljen. Ez azt jelenti, hogy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n(f; d) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(f; d) = I.$$

Az állítás megfordításának igazolásához tegyük fel, hogy az  $[a; b]$  intervallumnak van olyan  $d$  beosztássorozata, amelyre

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n(f; d) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(f; d) = I.$$

Ekkor az

$$I = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n(f; d) \leq \int_{\bar{a}}^b f(x) dx = \int_a^{\bar{b}} f(x) dx \leq \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(f; d) = I$$

egyenlőtlenség sorból következik, hogy

$$\int_{\bar{a}}^b f(x) dx = \int_a^{\bar{b}} f(x) dx = I,$$

így a Riemann-integrál definíciója szerint  $f$  Riemann-integrálható az  $[a; b]$  intervallumon és

$$\int_a^b f(x) dx = I.$$

Ezzel az állítást igazoltuk. ■

**2.4. Példa.** Az előbbi tételt felhasználva bebizonyítjuk, hogy az  $f(x) = x^2$  függvény Riemann-integrálható a  $[0; 1]$  intervallumon, továbbá kiszámoljuk az

$$\int_0^1 x^2 dx \text{ Riemann-integrál értékét!}$$

Első lépésben a  $[0; 1]$  intervallumot  $n$  egyenlő részre osztjuk. A keletkezett osztópontok halmaza

$$\mathcal{D} = \left\{ 0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{n-1}{n}, 1 \right\}.$$

Az osztópontok által keletkezett részintervallumok

$$d = \left\{ \left[ 0; \frac{1}{n} \right]; \left[ \frac{1}{n}; \frac{2}{n} \right]; \dots; \left[ \frac{n-1}{n}; 1 \right] \right\}.$$

A beosztáshoz tartozó alsó integrálközelítő összeg

$$s_n(f; d) = \frac{1}{n} \cdot \left( 0^2 + \left( \frac{1}{n} \right)^2 + \dots + \left( \frac{n-1}{n} \right)^2 \right).$$

Felhasználva, hogy az első  $n$  természetes szám négyzetének összege

$$1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{6}$$

azt kapjuk, hogy az alsó integrálközelítő összeg

$$s_n(f; d) = \frac{1}{n^3} \cdot (0^2 + 1^2 + \dots + (n-1)^2) = \frac{1}{n^3} \cdot \left( \frac{(n-1) \cdot n \cdot (2n-1)}{6} \right).$$

Ebből az alsó integrálközelítő összeg határértéke

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} s_n(f; d) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{(n-1) \cdot n \cdot (2n-1)}{6n^3} \right) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{(n^2 - n) \cdot (2n-1)}{6n^3} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{2n^3 - 3n^2 + n}{6n^3} \right) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{2 - \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}}{6} \right) = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

A beosztáshoz tartozó felső integrálközelítő összeg

$$S_n(f; d) = \frac{1}{n} \cdot \left( \left( \frac{1}{n} \right)^2 + \left( \frac{2}{n} \right)^2 + \dots + \left( \frac{n-1}{n} \right)^2 + \left( \frac{n}{n} \right)^2 \right).$$

Felhasználva, hogy az első  $n$  természetes szám négyzetének összege

$$1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{6}$$

azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} S_n(f; d) &= \frac{1}{n^3} \cdot (1^2 + 2^2 \dots + (n-1)^2 + n^2) = \\ &= \frac{1}{n^3} \cdot \left( \frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{6} \right). \end{aligned}$$

Ebből a felső integrálközelítő összeg határértéke

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(f; d) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{6n^3} \right) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{(n^2 + n) \cdot (2n+1)}{6n^3} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6n^3} \right) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{2 + \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}}{6} \right) = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Mivel az alsó és felső integrálközelítő összeg határértéke megegyezik, ezért a függvény Riemann-integrálható, és a Riemann-integrál értéke

$$\int_0^1 x^2 dx = 1.$$

**2.5. Következmény.** Az  $f: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$  korlátos függvény pontosan akkor Riemann-integrálható, ha a felső integrálközelítő összeg és alsó integrálközelítő összeg különbsége nullához tart:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (S_n - s_n) = 0,$$

azaz ha az oszcillációs összeg határértéke zérus:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{O}_n(f; d) = 0.$$

*Bizonyítás:* Ha az  $f$  függvény Riemann-integrálható az  $[a; b]$  intervallumon, akkor a 2.3 tétel szerint minden  $n \in \mathbb{N}$  esetén van olyan  $d$  beosztása az  $[a; b]$  intervallumnak, amelyre

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n(f; d) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(f; d).$$

Ezt átrendezve

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(f; d) - \lim_{n \rightarrow \infty} s_n(f; d) = 0$$

adódik, így

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (S_n(f; d) - s_n(f; d)) = 0.$$

Az oszcillációs összeg definícióját felhasználva azt kapjuk, hogy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{O}_n(f; d) = 0.$$

Megfordítva, ha az  $[a; b]$  intervallumnak van olyan  $d$  beosztása, amelyhez tartozó oszcillációs összeg zérus, azaz

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{O}_n(f; d) = 0,$$

akkor az oszcillációs összeg definíciója szerint

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(f; d) - \lim_{n \rightarrow \infty} s_n(f; d) = 0,$$

így

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(f; d) = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n(f; d),$$

amivel igazoltuk az állítást. ■

**2.6. Következmény.** Az  $f: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$  korlátos függvény pontosan akkor Riemann-integrálható az  $[a; b]$  intervallumon, ha bármely  $\varepsilon > 0$  esetén létezik olyan  $d$  beosztása az  $[a; b]$  intervallumnak, amelyhez tartozó  $\mathcal{O}(f; d)$  oszcillációs összeg  $\varepsilon$ -nál kisebb, azaz a függvény grafikonja lefedhető  $\varepsilon$ -nál kisebb összterületű téglalapokkal.

*Bizonyítás:* A következmény közvetlenül adódik a 2.5 következményből. (Lényegében annak egy átfogalmazása.) ■

**2.7. Megjegyzés.** A 2.5, illetve a 2.6 következményeket Riemann-kritériumként is szokás említeni.

**2.8. Tétel.** Ha az  $f: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$  korlátos függvény monoton, akkor Riemann-integrálható.

*Bizonyítás:* Tegyük fel, hogy  $f$  monoton növekvő és legyen

$$d = \{[x_{i-1}; x_i] \mid i = 1, 2, \dots, n\}$$

egy ekvidisztáns beosztása.

Mivel az  $[a; b]$  intervallumot  $n$  egyenlő részre osztjuk, ezért a keletkező részintervallumok hossza  $\frac{b-a}{n}$ .

Az  $f$  függvény monoton növekvő, ezért az beosztás által keletkezett részintervallumokon a függvényértékek infimuma az intervallum kezdőpontjában, a függvényértékek szupremuma az intervallum végpontjában van.

Az  $f$  függvény  $d$  beosztáshoz tartozó alsó integrálközelítő összege

$$\begin{aligned} s_n(f; d) &= \sum_{i=1}^n m_i \cdot (x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^n f(x_{i-1}) \cdot \frac{b-a}{n} = \\ &= \frac{b-a}{n} \cdot \sum_{i=1}^n f(x_{i-1}). \end{aligned}$$

Az  $f$  függvény  $d$  beosztáshoz tartozó felső integrálközelítő összege

$$\begin{aligned} S_n(f; d) &= \sum_{i=1}^n M_i \cdot (x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^n f(x_i) \cdot \frac{b-a}{n} = \\ &= \frac{b-a}{n} \cdot \sum_{i=1}^n f(x_i). \end{aligned}$$

Az  $f$  függvény  $d$  beosztáshoz tartozó oszcillációs összege

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_n(f; d) &= S_n(f; d) - s_n(f; d) = \\ &= \frac{b-a}{n} \cdot \left( (f(x_0) + f(x_1) + \dots + f(x_{n-1})) - \right. \\ &\quad \left. - (f(x_1) - f(x_2) - \dots - f(x_n)) \right) = \\ &= \frac{b-a}{n} \cdot (f(x_n) - f(x_0)) = \frac{b-a}{n} \cdot (f(b) - f(a)), \end{aligned}$$

így

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{O}_n(f; d) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b-a}{n} \cdot (f(b) - f(a)) = 0,$$

tehát  $f$  Riemann-integrálható. ■

**2.9. Tétel.** Ha az  $f: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$  függvény folytonos, akkor Riemann-integrálható.

*Bizonyítás:* Zárt intervallumon értelmezett folytonos függvény egyenletesen folytonos, azaz  $\varepsilon > 0$  esetén létezik olyan  $\delta > 0$ , hogy ha  $x, y \in [a; b]$  és  $|x - y| < \delta$ , akkor  $|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{b-a}$ .

Legyen

$$d = \{[x_{i-1}; x_i] \mid i = 1, 2, \dots, n\}$$

olyan beosztása az  $[a; b]$  intervallumnak, melyre  $\max_{1 \leq i \leq n} (x_i - x_{i-1}) < \delta$ .

Mivel  $f$  zárt intervallumon értelmezett folytonos függvény, ezért felveszi a minimumát és a maximumát, azaz léteznek olyan  $u_i$  és  $v_i$  valós számok, hogy  $u_i, v_i \in [x_{i-1}; x_i]$  és

$$\begin{aligned} f(u_i) &= M_i \\ f(v_i) &= m_i. \end{aligned}$$

Mivel  $x_i - x_{i-1} < \delta$ , ezért  $|u_i - v_i| < \delta$ , így

$$|f(u_i) - f(v_i)| < \frac{\varepsilon}{b-a}.$$

Az oszcillációs összeg

$$\begin{aligned} \mathcal{O}(f; d) &= S(f; d) - s(f; d) = \\ &= \sum_{i=1}^n M_i \cdot (x_i - x_{i-1}) - \sum_{i=1}^n m_i \cdot (x_i - x_{i-1}) = \\ &= \sum_{i=1}^n f(u_i) \cdot (x_i - x_{i-1}) - \sum_{i=1}^n f(v_i) \cdot (x_i - x_{i-1}) = \\ &= \sum_{i=1}^n (f(u_i) - f(v_i)) \cdot (x_i - x_{i-1}) < \frac{\varepsilon}{b-a} \cdot \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) = \\ &= \frac{\varepsilon}{b-a} \cdot (x_n - x_0) = \frac{\varepsilon}{b-a} \cdot (b-a) = \varepsilon, \end{aligned}$$

így az  $f$  függvény Riemann-integrálható. ■

**2.10. Tétel.** Ha az  $f: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$  korlátos függvény szakadási helyeinek halmaza megszámlálható számosságú, akkor  $f$  Riemann-integrálható.

**2.11. Következmény.** Ha az  $f: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$  korlátos függvénynek véges sok helyen van szakadása, akkor  $f$  Riemann-integrálható.

### 3. A Riemann-integrál tulajdonságai, Newton-Leibniz tétel

3.1. **Megállapodás.** Ebben a szakszban, ha mást nem mondunk, akkor  $I$  a valós számok halmazának egy pozitív hosszúságú részintervallumát jelöli.

3.2. **Definíció.** Ha  $f: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$  Riemann-integrálható függvény, akkor

$$\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx,$$

azaz az integrálás határainak felcserélésével a Riemann-integrál értéke előjelet vált.

3.3. **Tétel.** Ha  $f, g: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$  Riemann-integrálható függvények, akkor

$$\int_a^b f(x) + g(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx,$$

azaz a Riemann-integrál additív tulajdonságú, ami azt jelenti, hogy összeget tagonként integrálhatunk.

3.4. **Tétel.** Ha  $f: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$  Riemann-integrálható függvény és  $\lambda \in \mathbb{R}$ , akkor

$$\int_a^b \lambda \cdot f(x) dx = \lambda \cdot \int_a^b f(x) dx,$$

azaz a Riemann-integrál homogén tulajdonságú, ami azt jelenti, hogy konstans szorzó kiemelhető az integrál elé.

3.5. **Tétel.** Ha  $f: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$  Riemann-integrálható függvény, akkor  $|f|$  is Riemann-integrálható és

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx.$$

3.6. **Tétel.** Ha  $f: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$  Riemann-integrálható függvény és  $c \in [a; b]$ , akkor

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx,$$

azaz a Riemann-integrál intervallum additív tulajdonságú.

**3.7. Következmény.** Ha  $f: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$  Riemann-integrálható függvény, akkor

$$\int_a^a f(x) dx = 0,$$

azaz, ha az integrál kezdő- és végpontja megegyezik, akkor az integrál értéke zérus.

*Bizonyítás:* A 3.2 tétel szerint

$$\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx.$$

Az egyenletet átrendezve

$$\int_a^b f(x) dx + \int_b^a f(x) dx = 0$$

adódik.

A 3.6 tételt felhasználva azt kapjuk, hogy

$$\int_a^b f(x) dx + \int_b^a f(x) dx = \int_a^a f(x) dx.$$

Tehát

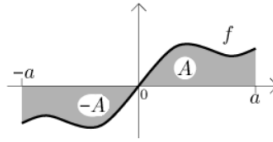
$$\int_a^a f(x) dx = 0,$$

amivel igazoltuk az állítást. ■

**3.8. Tétel.** Ha  $f: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$  Riemann-integrálható függvény és  $[c; d] \subset [a; b]$ , akkor az  $f$  függvény  $[c; d]$  intervallumra való leszűkítése is Riemann-integrálható.

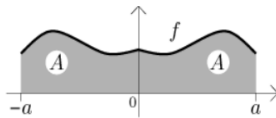
**3.9. Tétel.** Ha  $f: [-a; a] \rightarrow \mathbb{R}$  Riemann-integrálható páratlan függvény, akkor

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 0.$$



3.10. **Tétel.** Ha  $f: [-a; a] \rightarrow \mathbb{R}$  Riemann-integrálható páros függvény, akkor

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \cdot \int_0^a f(x) dx.$$



3.11. **Tétel.** Ha  $f, g: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$  olyan Riemann-integrálható függvények, melyekre  $g(x) \leq f(x)$  teljesül, akkor

$$\int_a^b g(x) dx \leq \int_a^b f(x) dx,$$

azaz a Riemann-integrál monoton tulajdonságú.

3.12. **Következmény.** Ha  $f: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$  Riemann-integrálható függvény és  $f(x) \geq 0$  minden  $x \in [a; b]$  esetén, akkor

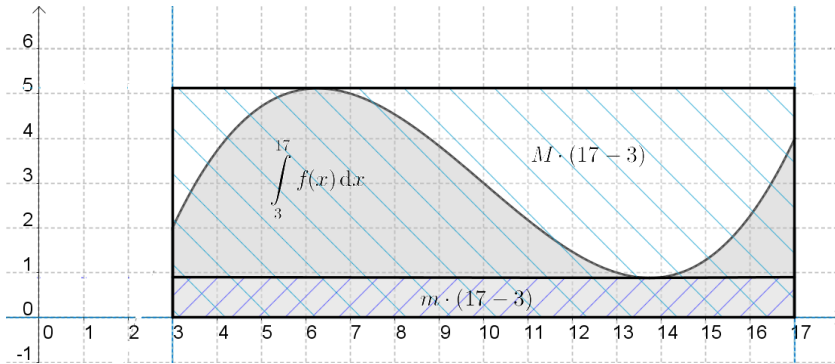
$$\int_a^b f(x) dx \geq 0.$$

*Bizonyítás:* A következmény azonnal adódik az előző tételből  $g(x) = 0$  választással. ■

3.13. **Tétel.** (Az integrálszámítás első középértéktétele.)

Ha  $f: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$  Riemann-integrálható függvény, akkor léteznek olyan  $m$  és  $M$  valós számok, hogy

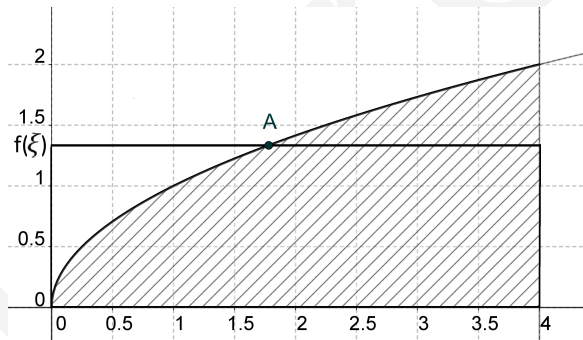
$$m \cdot (b - a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M \cdot (b - a).$$



3.14. **Tétel.** (Az integrálszámítás második középértéktétele.)

Ha  $f: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$  folytonos függvény, akkor létezik olyan  $\xi$  valós szám, hogy

$$\int_a^b f(x) dx = f(\xi) \cdot (b - a).$$



3.15. **Definíció.** Azt mondjuk, hogy az  $F: I \rightarrow \mathbb{R}$  függvény az  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  függvény *primitív függvénye* az  $I$  intervallumon, ha  $F$  differenciálható az  $I$  intervallumon és  $F'(x) = f(x)$  minden  $x \in I$  esetén.

3.16. **Példa.** Az  $f(x) = 2x$  függvénynek az  $F(x) = x^2$  függvény egy primitív függvénye, mert  $F'(x) = f(x)$ .

3.17. **Tétel.** (Newton-Leibniz tétel.)

Legyen  $f: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$  folytonos függvény az  $[a; b]$  intervallumon és differenciálható az  $]a; b[$  intervallumon. Legyen továbbá  $F$  az  $f$  egy primitív függvénye.

Ekkor

$$\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a).$$

*Bizonyítás:* Legyen

$$d = \{[x_0; x_1]; [x_1; x_2]; \dots; [x_{n-1}; x_n]; \} = \{[x_{i-1}; x_i] \mid i = 1, \dots, n\}$$

az  $[a; b]$  intervallum egy bosztása.

A Lagrange-féle középértéktétel szerint létezik olyan  $\xi_i \in ]x_{i-1}; x_i[$ , hogy

$$F(x_i) - F(x_{i-1}) = F'(\xi_i) \cdot (x_i - x_{i-1}).$$

Mivel feltétel szerint az  $F$  függvény az  $f$  függvény egy primitív függvénye, ezért  $F'(x) = f(x)$  teljesül minden  $x \in ]a; b[$  esetén, így

$$F(x_i) - F(x_{i-1}) = f(\xi_i) \cdot (x_i - x_{i-1}) \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Mivel

$$\begin{aligned} F(b) - F(a) &= F(x_n) - F(x_{n-1}) + F(x_{n-1}) - F(x_{n-2}) + \dots + \\ &+ F(x_1) - F(x_0) = \sum_{i=1}^n F(x_i) - F(x_{i-1}) = \\ &= \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \cdot (x_i - x_{i-1}). \end{aligned}$$

Mivel

$$m_i \leq f(\xi_i) \leq M_i \quad (i = 1, \dots, n),$$

ezért

$$\sum_{i=1}^n m_i \cdot (x_i - x_{i-1}) \leq \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \cdot (x_i - x_{i-1}) \leq \sum_{i=1}^n M_i \cdot (x_i - x_{i-1}).$$

Tehát

$$s(f; d) \leq F(b) - F(a) \leq S(f; d).$$

Mivel a kapott egyenlőtlenség az  $[a; b]$  intervallum minden  $d$  beosztására igaz, ezért vehetjük az alsó integrálközelítő összegek szuprémumát és a felső integrálközelítő összegek infimumát, így

$$\int_a^b f(x) dx \leq F(b) - F(a) \leq \int_a^b f(x) dx$$

adódik.

Mivel  $f$  Riemann-integrálható, ezért

$$\int_{\bar{a}}^b f(x) dx = \int_a^{\bar{b}} f(x) dx,$$

így azt kapjuk, hogy

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(x) dx,$$

amivel igazoltuk az állítást. ■

**3.18. Példa.** Kiszámoljuk az  $f(x) = x$  függvény Riemann-integrálját a  $[0; 1]$  intervallumon a Newton-Leibniz tétel alkalmazásával:

$$\int_0^1 x dx = \left[ \frac{x^2}{2} \right]_0^1 = \frac{1^2}{2} - \frac{0^2}{2} = \frac{1}{2}.$$

**3.19. Definíció.** Ha  $f: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$  Riemann-integrálható függvény, akkor az

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt$$

függvényt az  $f(x)$  függvény *felső határ függvényének* vagy *területmérő függvényének* nevezzük.

**3.20. Tétel.** Ha  $f: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$  Riemann-integrálható függvény, akkor a területmérő függvénye folytonos.

*Bizonyítás:* Legyen  $x_0 \neq x$  tetszőleges pontja az  $[a; b]$  intervallumnak. Ismert, hogy zárt intervallumon folytonos függvény korlátos, ezért létezik olyan  $K$  valós szám, hogy  $|f(t)| \leq K$  minden  $t \in [x_0; x]$  vagy  $t \in [x; x_0]$  esetén. Felhasználva a Newton-Leibniz tételt, valamint a 3.5 tételt azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} |F(x) - F(x_0)| &= \left| \int_{x_0}^x f(t) dt \right| \leq \int_{x_0}^x |f(t)| dt \leq \\ &\leq \int_{x_0}^x K dt = K \cdot |x - x_0|, \end{aligned}$$

így azt kaptuk, hogy  $F$  folytonos az  $x_0$  helyen. Mivel  $x_0$  tetszőleges volt, ezért  $F$  folytonos az  $[a; b]$  intervallumon. ■

**3.21. Tétel.** Ha  $f: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$  Riemann-integrálható függvény és folytonos az  $x_0 \in ]a; b[$  helyen, továbbá  $F$  az  $f$  területmérő függvénye, akkor a  $F(x)$  differenciálható az  $x_0$  helyen és  $F'(x_0) = f(x_0)$ .

*Bizonyítás:* Legyen  $x_0 \in ]a; b[$  tetszőleges. Az  $f$  függvény folytonos az  $[a; b]$  intervallumon, így az  $x_0$  helyen is folytonos, így minden  $\varepsilon > 0$  esetén létezik olyan  $\delta > 0$ , hogy ha  $|t - x_0| < \delta$ , akkor  $|f(t) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2}$ . Felhasználva ezt a tényt, valamint a Newton-Leibniz tételt és a 3.5 tételt azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \left| \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} - f(x_0) \right| &= \left| \frac{1}{x - x_0} \cdot (F(x) - F(x_0)) - f(x_0) \right| = \\ &= \left| \frac{1}{x - x_0} \cdot (F(x) - F(x_0) - f(x_0) \cdot (x - x_0)) \right| = \\ &= \left| \frac{1}{x - x_0} \cdot \left( \int_{x_0}^x f(t) dt - \int_{x_0}^x f(x_0) dt \right) \right| = \\ &= \left| \frac{1}{x - x_0} \cdot \int_{x_0}^x f(t) - f(x_0) dt \right| \leq \frac{1}{|x - x_0|} \cdot \int_{x_0}^x |f(t) - f(x_0)| dt \leq \\ &\leq \frac{1}{|x - x_0|} \cdot \int_{x_0}^x \frac{\varepsilon}{2} dt = \frac{1}{|x - x_0|} \cdot \frac{\varepsilon}{2} \cdot |x - x_0| < \varepsilon. \end{aligned}$$

Tehát

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} - f(x_0) = 0,$$

így

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = f(x_0),$$

ami azt jelenti, hogy  $F$  differenciálható az  $x_0$  helyen és  $F'(x_0) = f(x_0)$ , amivel igazoltuk az állítást. ■

**3.22. Tétel.** Minden folytonos függvénynek van primitív függvénye.

*Bizonyítás:* A tétel közvetlenül következik a 3.20 tételből. ■

3.23. **Megjegyzés.** Nem minden primitív függvény írható fel véges sok tag összegeként, azaz zárt alakban.

Például az  $f(x) = e^{-x^2}$  függvény folytonos, ezért Riemann-integrálható, azonban nem létezik zárt alakban felírható primitív függvénye.

DUPress

#### 4. A primitív függvény tulajdonságai, alapintegrálok

4.1. **Megállapodás.** Ebben a szakaszban, ha mást nem mondunk, akkor  $I$  a valós számok halmazának egy pozitív hosszúságú részintervallumát jelöli.

4.2. **Definíció.** Ha az  $F: I \rightarrow \mathbb{R}$  függvény differenciálható és  $F'(x) = f(x)$  minden  $x \in I$  esetén, akkor azt mondjuk, hogy  $F$  az  $f$  függvény *primitív függvénye*.

4.3. **Megjegyzés.** Ha  $F$  primitív függvénye az  $f$  függvénynek, akkor minden  $c \in \mathbb{R}$  esetén  $F + c$  is primitív függvénye az  $f$  függvénynek. Tehát, ha egy függvénynek van primitív függvénye, akkor végtelen sok van, melyek csak egy (additív) konstansban térnek el egymástól.

4.4. **Példa.** Az  $f(x) = 2x$  függvénynek  $F_1(x) = x^2$  és  $F_2(x) = x^2 + 2$  is primitív függvénye, mert  $(x^2)' = 2x$  és  $(x^2 + 2)' = 2x$ .

4.5. **Definíció.** Az  $f$  függvény összes primitív függvényének halmazát az  $f$  függvény *határozatlan integráljának* nevezzük. Jele:  $\int f(x) dx$ .

4.6. **Példa.** Az  $f(x) = 2x$  függvény határozatlan integrálja

$$\int 2x dx = x^2 + c.$$

4.7. **Tétel.** Ha  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  és  $g: I \rightarrow \mathbb{R}$  olyan függvények, amelyeknek létezik primitív függvénye, akkor az  $f + g$  függvénynek is létezik primitív függvénye és

$$\int (f(x) + g(x)) dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx.$$

*Bizonyítás:* Mivel

$$\left( \int (f(x) + g(x)) dx \right)' = f(x) + g(x)$$

és

$$\begin{aligned} \left( \int f(x) dx + \int g(x) dx \right)' &= \left( \int f(x) dx \right)' + \left( \int g(x) dx \right)' = \\ &= f(x) + g(x), \end{aligned}$$

amivel igazoltuk az állítást. ■

4.8. **Példa.** Az  $f(x) = 3x^2 + 2x$  függvény primitív függvényei

$$\int 3x^2 + 2x dx = \int 3x^2 dx + \int 2x dx = x^3 + x^2 + c.$$

**4.9. Tétel.** Ha  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  olyan függvény, amelynek létezik primitív függvénye és  $\lambda \in \mathbb{R}$ , akkor a  $\lambda \cdot f$  függvénynek is létezik primitív függvénye és

$$\int \lambda \cdot f(x) dx = \lambda \cdot \int f(x) dx.$$

*Bizonyítás:* Mivel

$$\left( \int \lambda \cdot f(x) dx \right)' = \lambda \cdot f(x)$$

és

$$\left( \lambda \cdot \int f(x) dx \right)' = \lambda \cdot \left( \int f(x) dx \right)' = \lambda \cdot f(x),$$

amivel igazoltuk az állítást. ■

**4.10. Példa.** Az  $f(x) = 6 \cos x$  függvény primitív függvényei

$$\int 6 \cos x dx = 6 \sin x + c.$$

**4.11. Tétel.** Az  $f(x) = x^n$  függvény határozatlan integrálja  $n \neq -1$  esetén

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c.$$

*Bizonyítás:* A hatványfüggvény deriválási szabályát felhasználva azt kapjuk, hogy

$$\left( \frac{x^{n+1}}{n+1} + c \right)' = \frac{1}{n+1} \cdot (n+1) \cdot x^n = x^n,$$

amivel igazoltuk az állítást. ■

**4.12. Példa.** Az  $f(x) = x^3$  függvény határozatlan integrálja

$$\int x^3 dx = \frac{x^4}{4} + c.$$

**4.13. Példa.** Az  $f(x) = \sqrt{x}$  függvény határozatlan integrálja

$$\int \sqrt{x} dx = \int x^{\frac{1}{2}} dx = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3} \cdot \sqrt{x^3} + c.$$

**4.14. Példa.** Az  $f(x) = \frac{1}{x^2}$  függvény határozatlan integrálja

$$\int \frac{1}{x^2} dx = \int x^{-2} dx = \frac{x^{-1}}{-1} = -\frac{1}{x} + c.$$

**4.15. Tétel.** Legyen  $\lambda \in \mathbb{R}$  és  $a > 0$ . Ekkor

$$\begin{array}{ll}
 \text{a) } \int \lambda dx = \lambda \cdot x + c; & \text{f) } \int \frac{1}{x} dx = \ln |x| + c; \\
 \text{b) } \int \cos x dx = \sin x + c; & \text{g) } \int \frac{1}{x \cdot \ln a} dx = \log_a |x| + c; \\
 \text{c) } \int \sin x dx = -\cos x + c; & \text{h) } \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + c; \\
 \text{d) } \int e^x dx = e^x + c; & \text{i) } \int -\frac{1}{\sin^2 x} dx = \operatorname{ctg} x + c, \\
 \text{e) } \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c; &
 \end{array}$$

ahol  $c \in \mathbb{R}$  tetszőleges.

*Bizonyítás:* A bizonyításokat a megfelelő deriválási szabályok segítségével végezzük el:

$$\begin{array}{l}
 \text{a) } (\lambda \cdot x + c)' = \lambda; \\
 \text{b) } (\sin x + c)' = \cos x; \\
 \text{c) } (-\cos x + c)' = \sin x; \\
 \text{d) } (e^x + c)' = e^x; \\
 \text{e) }
 \end{array}$$

$$\left( \frac{a^x}{\ln a} + c \right)' = \frac{1}{\ln a} \cdot a^x \cdot \ln a = a^x;$$

f) ha  $x > 0$ , akkor az  $(\ln x + c)' = \frac{1}{x}$  deriválással adódik az állítás; hasonlóan adódik az állítás  $x < 0$  esetén;

$$\text{g) } (\log_a x + c)' = \frac{1}{x \cdot \ln a};$$

$$\text{h) } (\operatorname{tg} x + c)' = \frac{1}{\cos^2 x};$$

$$\text{i) } -(\operatorname{ctg} x + c)' = \frac{1}{\sin^2 x}.$$

Minden állítást igazoltunk. ■

4.16. **Példa.** Az  $f(x) = \frac{1}{\cos^2 x} + 3^x$  függvény határozatlan integrálja

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} + 3^x dx = \operatorname{tg} x + \frac{3^x}{\ln 3} + c.$$

4.17. **Példa.** Az  $f(x) = \frac{1}{x \cdot \ln 5} + \frac{1}{\sin^2 x}$  függvény határozatlan integrálja

$$\int \frac{1}{x \cdot \ln 5} + \frac{1}{\sin^2 x} dx = \log_5 x - \operatorname{ctg} x + c.$$

DUPress

## 5. Az $f(ax + b)$ alakú függvény integrálása

**5.1. Tétel.** Legyenek  $I$  és  $J$  nyílt intervallumok és legyen az  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  függvénynek  $F$  egy primitív függvénye és  $g: J \rightarrow \mathbb{R}$  elsőfokú függvény, azaz  $g(x) = a \cdot x + b$ , ahol  $a, b \in \mathbb{R}$  és  $a \neq 0$ . Tegyük fel, hogy  $R_g \subset I$ , azaz a  $g$  függvény értékkészlete részhalmaza az  $I$  intervallumnak. Ekkor az  $f \circ g$  függvénynek a  $J$  intervallumon egy primitív függvénye

$$\frac{1}{a} \cdot F \circ g(x),$$

azaz

$$\int f(ax + b) dx = \frac{1}{a} \cdot F(ax + b) + c,$$

ahol  $c \in \mathbb{R}$  tetszőleges.

*Bizonyítás:* Mivel

$$\left( \frac{F(ax + b)}{a} + c \right)' = \frac{F'(ax + b)}{a} \cdot a = f(ax + b),$$

ezért

$$\frac{F(ax + b)}{a} = \frac{1}{a} \cdot F \circ g(x)$$

egy primitív függvénye az  $f(ax + b)$  függvénynek. Ezzel igazoltuk a tétel állítását. ■

**5.2. Példa.** Tekintsük az  $f \circ g(x) = \cos(3x + 4)$  függvényt. Ekkor  $f(x) = \cos x$  és  $g(x) = 3x + 4$ . Az  $f(x)$  függvény egy primitív függvénye  $F(x) = \sin x$ . Ekkor  $F \circ g(x) = \sin(3x + 4)$ . Ezt felhasználva

$$\int \cos(3x + 4) dx = \frac{\sin(3x + 4)}{3} + c.$$

## 6. Az $f^n(x) \cdot f'(x)$ alakú függvény integrálása

**6.1. Tétel.** Legyen  $n \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$  és legyen  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  olyan függvény, hogy az  $f^n(x) \cdot f'(x)$  függvénynek létezik primitív függvénye. Ekkor

$$\int f^n(x) \cdot f'(x) dx = \frac{f^{n+1}}{n+1} + c,$$

ahol  $c \in \mathbb{R}$  tetszőleges.

*Bizonyítás:* Az  $\frac{f^{n+1}}{n+1} + c$  függvény deriváltja

$$\left( \frac{f^{n+1}}{n+1} + c \right)' = (n+1) \cdot \frac{f^n}{n+1} \cdot f'(x) = f^n(x) \cdot f'(x),$$

amivel igazoltuk az állítást. ■

**6.2. Példa.** A  $\sin^3(x) \cdot \cos x$  függvény  $f(x) = \sin x$  és  $n = 3$  választással  $f^n(x) \cdot f'(x)$  alakú. Ezért alkalmazható az előbbi tétel, így azt kapjuk, hogy

$$\int \sin^3 x \cdot \cos x dx = \frac{\sin^4 x}{4} + c,$$

ahol  $c \in \mathbb{R}$  tetszőleges.

**6.3. Tétel.** Ha  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  olyan függvény, amelyre az  $\frac{f'(x)}{f(x)}$  függvénynek létezik primitív függvénye, akkor

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln |f(x)| + c,$$

ahol  $c \in \mathbb{R}$  tetszőleges.

*Bizonyítás:* Az  $\ln(f(x))$  függvény deriváltja

$$(\ln(f(x)) + c)' = \frac{1}{f(x)} \cdot f'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)},$$

amivel igazoltuk az állítást. ■

**6.4. Példa.** A  $\frac{4x}{2x^2+5}$  függvény integrálja

$$\int \frac{4x}{2x^2+5} dx = \ln(2x^2+5) + c,$$

ahol  $c \in \mathbb{R}$ .

6.5. **Megjegyzés.** Az 6.1 tétel és az 6.3 tétel kapcsolata:

$$f^{-1}(x) \cdot f'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)},$$

így ha  $n = -1$ , akkor a 6.1 tétel helyett a 6.3 tétel érvényes.

## 7. A $k \circ b(x) \cdot b'(x)$ alakú függvény integrálása

**7.1. Tétel.** Ha  $I$  és  $J$  intervallumok és  $b: I \rightarrow J$  differenciálható függvény,  $K, k: J \rightarrow \mathbb{R}$  olyan függvények, hogy  $K$  primitív függvénye  $k$ -nak (azaz  $K'(x) = k(x)$  minden  $x \in J$  esetén). Ekkor

$$\int k \circ b(x) \cdot b'(x) dx = K \circ b(x) + c$$

ahol  $c \in \mathbb{R}$  tetszőleges.

*Bizonyítás:* Az összetett függvény deriválási szabályát és a tétel feltételeit alkalmazva azt kapjuk, hogy

$$(K \circ b(x))' = K'(b(x)) \cdot b'(x) = k(b(x)) \cdot b'(x) = k \circ b(x) \cdot b'(x),$$

amivel igazoltuk az állítást. ■

**7.2. Példa.** Meghatározzuk az

$$f(x) = \frac{e^{\operatorname{tg} x}}{\cos^2 x}$$

függvény határozatlan integrálját.

Az előző tétel jelöléseivel  $k(x) = e^x$  és  $b(x) = \operatorname{tg} x$ . Ekkor  $K(x) = e^x$ , így

$$\int \frac{e^{\operatorname{tg} x}}{\cos^2 x} dx = \int e^{\operatorname{tg} x} \cdot \frac{1}{\cos^2 x} dx = e^{\operatorname{tg} x} + c,$$

ahol  $c \in \mathbb{R}$ .

**7.3. Példa.** Meghatározzuk az

$$f(x) = \frac{x^2}{x^6 + 1}$$

függvény határozatlan integrálját.

A tétel jelöléseivel  $k(x) = \frac{1}{1+x^2}$  és  $b(x) = x^3$ . Ekkor  $K(x) = \operatorname{arctg} x$ , így

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2}{x^6 + 1} dx &= \frac{1}{3} \cdot \int 3 \cdot \frac{x^2}{(x^3)^2 + 1} dx = \frac{1}{3} \cdot \int \frac{1}{(x^3)^2 + 1} \cdot 3x^2 dx = \\ &= \frac{1}{3} \cdot \frac{\operatorname{arctg} x^3}{3} + c, \end{aligned}$$

ahol  $c \in \mathbb{R}$ .

7.4. **Példa.** Meghatározzuk az

$$f(x) = e^{e^x} \cdot e^x$$

függvény határozatlan integrálját.

A tétel jelöléseivel  $k(x) = e^x$  és  $b(x) = e^x$ . Ekkor  $K(x) = e^x$ , így

$$\int e^{e^x} \cdot e^x dx = e^{e^x} + c,$$

ahol  $c \in \mathbb{R}$ .

## 8. Parciális integrálás

8.1. **Megállapodás.** Ebben a fejezetben, ha mást nem mondunk, akkor  $I$  és  $J$  a valós számok halmazának pozitív hosszúságú részintervallumait jelölik.

8.2. **Tétel.** (Parciális integrálás.)

Ha az  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  és  $g: I \rightarrow \mathbb{R}$  függvények differenciálhatóak, továbbá létezik az

$$\int f(x) \cdot g'(x) \, dx$$

integrál, akkor létezik az

$$\int f'(x) \cdot g(x) \, dx$$

is és

$$\int f'(x) \cdot g(x) \, dx = f(x) \cdot g(x) - \int f(x) \cdot g'(x) \, dx$$

*Bizonyítás:* A szorzat függvény deriválási szabálya szerint

$$(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x).$$

Mindkét oldalt integrálva azt kapjuk, hogy

$$\int (f(x) \cdot g(x))' \, dx = \int f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x) \, dx,$$

amiből

$$f(x) \cdot g(x) = \int f'(x) \cdot g(x) \, dx + \int f(x) \cdot g'(x) \, dx.$$

adódik.

A kapott egyenletet átrendzve azt kapjuk, hogy

$$\int f'(x) \cdot g(x) \, dx = f(x) \cdot g(x) - \int f(x) \cdot g'(x) \, dx,$$

amivel igazoltuk az állítást. ■

8.3. **Következmény.** Ha az  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  és  $g: I \rightarrow \mathbb{R}$  függvények differenciálhatóak, továbbá létezik az

$$\int f'(x) \cdot g(x) \, dx$$

integrál, akkor létezik az

$$\int f(x) \cdot g'(x) \, dx$$

is és

$$\int f(x) \cdot g'(x) dx = f(x) \cdot g(x) - \int f'(x) \cdot g(x) dx$$

*Bizonyítás:* A 8.2 tételben szereplő képlet átrendezésével adódik az állítás. ■

**8.4. Megjegyzés.** Legyenek  $\alpha \neq 0$  és  $\beta$  valós számok,  $P(x)$  egy polinom.

Parciális integrálással elvégezhetőek az alábbi integrálások:

a)  $\int P(x) \cdot \sin(\alpha x + \beta) dx;$

b)  $\int P(x) \cdot \cos(\alpha x + \beta) dx;$

c)  $\int P(x) \cdot e^{\alpha x + \beta} dx;$

d)  $\int P(x) \cdot a^{\alpha x + \beta} dx.$

Ezekben az esetekben a parciális integrálás képletében a  $g(x) = P(x)$  és rendre az

$$f'(x) = \sin(\alpha x + \beta) \text{ vagy}$$

$$f'(x) = \cos(\alpha x + \beta) \text{ vagy}$$

$$f'(x) = e^{\alpha x + \beta} \text{ vagy}$$

$$f'(x) = a^{\alpha x + \beta}$$

választással kell élnünk.

**8.5. Példa.** Meghatározzuk az

$$\int x \cdot \cos x dx$$

határozatlan integrált!

A parciális integrálás képletében az  $f'(x) = \cos x$  és  $g(x) = x$  jelöléssel élünk. Ekkor az  $f'(x)$  függvény egy primitív függvénye

$$f(x) = \int \cos x dx = \sin x.$$

Másrészt

$$g(x) = x \quad \Rightarrow \quad g'(x) = 1.$$

A parciális integrálás tételét alkalmazva azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \int x \cdot \cos x dx &= x \cdot \sin x - \int \sin x dx = \\ &= x \cdot \sin x + \cos x + c. \end{aligned}$$

**8.6. Megjegyzés.** Legyen  $a > 0$ ,  $a \neq 1$  valós szám,  $P(x)$  egy polinom. Parciális integrálással elvégezhetőek az alábbi integrálások:

$$\int P(x) \cdot \log_a x \, dx.$$

Ezekben az esetekben a parciális integrálás képletében az  $f'(x) = P(x)$  és  $g(x) = \log_a x$  választással kell élnünk.

**8.7. Példa.** Meghatározzuk az

$$\int x \cdot \ln x \, dx$$

határozatlan integrált!

A parciális integrálás képletében az  $f'(x) = x$  és  $g(x) = \ln x$  jelöléssel élünk. Ekkor az  $f'(x)$  függvény egy primitív függvénye:

$$f(x) = \int x \, dx = \frac{x^2}{2}.$$

Továbbá

$$g(x) = \ln x \quad \Rightarrow \quad g'(x) = \frac{1}{x}.$$

A parciális integrálás tételét alkalmazva azt kapjuk, hogy

$$\int x \cdot \ln x \, dx = \frac{x^2}{2} \cdot \ln x - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x} \, dx.$$

Elvégezve az egyszerűsítést, majd felhasználva, hogy

$$\int x \, dx = \frac{x^2}{2} + c,$$

azt kapjuk, hogy

$$\frac{x^2}{2} \cdot \ln x - \int \frac{x}{2} \, dx = \frac{x^2}{2} \cdot \ln x - \frac{x^2}{4} + c.$$

## 9. Parciális törtekre bontás módszere

9.1. **Tétel.** Minden racionális törtfüggvény felbontható egy polinom és egy olyan racionális törtfüggvény összegére, amelyben a számláló fokszáma kisebb, mint a nevező fokszáma.

9.2. **Példa.** Tekintsük az

$$\frac{x-5}{x+3}$$

törtet. Ekkor

$$\frac{x-5}{x+3} = \frac{x+3-8}{x+3} = 1 - \frac{8}{x+3}.$$

9.3. **Megjegyzés.** A tételben szereplő felbontást általánosan polinomosztás segítségével lehet elvégezni. Elvégezve a  $P(x) : Q(x)$  polinomosztást legyen  $M(x)$  a maradék,  $H(x)$  az osztás hányadosa. Ekkor

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = H(x) + \frac{M(x)}{Q(x)}.$$

9.4. **Példa.** Tekintsük az

$$\frac{x^4 + 7x^2 + 5x + 1}{x^2 - 4}$$

törtet. A polinomosztást alkalmazva azt kapjuk, hogy

$$\begin{array}{r} (x^4 + 7x^2 + 5x + 1) : (x^2 - 4) = x^2 + 11, \\ -(x^4 - 4x^2) \\ \hline 11x^2 + 5x + 1 \\ -(11x^2 - 44x) \\ \hline 49x + 1 \end{array}$$

Ezt felhasználva

$$\frac{x^4 + 7x^2 + 5x + 1}{x^2 - 4} = x^2 + 11 + \frac{49x + 1}{x^2 - 4}$$

adódik.

9.5. **Definíció.** Legyenek  $A \neq 0$ , valamint  $B$  és  $C$  olyan valós számok, hogy  $B \cdot C \neq 0$  és legyen  $n \in \mathbb{N}$ , továbbá  $x_0 \in \mathbb{R}$ . Az

$$\frac{A}{(x - x_0)^n}$$

és a

$$\frac{Bx + C}{(x^2 + px + q)^n}$$

alakú törtet, ahol  $p^2 - 4q < 0$  (azaz az  $x^2 + px + q$  másodfokú polinomnak nincs valós gyöke) *parciális tört*eknek nevezzük.

**9.6. Példa.** Az

$$\frac{5}{(x - 3)^4}$$

tört parciális tört.

Az

$$\frac{x + 3}{(x + x + 2)^3}$$

tört parciális tört.

**9.7. Tétel.** Minden olyan racionális törtfüggvény, amelyben a számláló fokszáma kisebb, mint a nevező fokszáma, felbontható parciális törtök összegére.

**9.8. Példa.** Felbontjuk parciális törtök összegére az

$$\frac{x - 5}{x^2 + 5x + 4},$$

algebrai törtet, majd kiszámoljuk az

$$\int \frac{x - 5}{x^2 + 5x + 4} dx$$

integrált.

Első lépésben szorzattá alakítjuk a nevezőt. Ehhez megkeressük az

$$x^2 + 5x + 4 = 0$$

egyenlet megoldását:

$$x_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 16}}{2} = \frac{-5 \pm 3}{2},$$

azaz  $x_1 = -4$ , illetve  $x_2 = -1$ . Ezt felhasználva a gyöktényezős alak:

$$x^2 + 5x + 6 = (x + 4) \cdot (x + 1).$$

A keresett kifejezést

$$\frac{x - 5}{x^2 + 5x + 4} = \frac{A}{x + 4} + \frac{B}{x + 1}$$

alakban keressük. Az előbbi egyenlet mindkét oldalát szorozzuk a közös nevezővel:

$$x - 5 = A \cdot (x + 1) + B \cdot (x + 4).$$

Felbontva a zárójeleket

$$x - 5 = Ax + A + Bx + 4B$$

adódik. A tagokat csoportosítsuk fokszám szerint csökkenő sorrendbe:

$$x - 5 = (A + B) \cdot x + A + 4B.$$

A megfelelő fokszámú tagok együtthatóit összehasonlítva az

$$A + B = 1$$

$$A + 4B = -5$$

egyenletrendszerhez jutunk. Az egyenletrendszert megoldásárára azt kapjuk, hogy  $A = 3$  és  $B = -2$ . Tehát a keresett felbontás:

$$\frac{x - 5}{x^2 + 5x + 4} = \frac{3}{x + 4} - \frac{2}{x + 1}.$$

Ezt felhasználva

$$\begin{aligned} \int \frac{x - 5}{x^2 + 5x + 4} dx &= \int \frac{3}{x + 4} dx - \int \frac{2}{x + 1} dx = \\ &= 3 \cdot \ln|x + 4| - 2 \cdot \ln|x + 1| + c. \end{aligned}$$

## 10. Integrálás helyettesítéssel

10.1. **Megállapodás.** Ebben a szakaszban, ha mást nem mondunk, akkor  $I$  és  $J$  a valós számok halmazának pozitív hosszúságú részintervallumai.

10.2. **Tétel.** Ha a  $g: I \rightarrow J$  függvény differenciálható és létezik az  $f: J \rightarrow \mathbb{R}$  függvény határozatlan integrálja, akkor létezik az  $f \circ g \cdot g'$  függvény határozatlan integrálja és

$$\int (f \circ g(x)) \cdot g'(x) dx = \left( \int f(x) dx \right) \circ g(x).$$

*Bizonyítás:* A tétel közvetlenül adódik az összetett függvény deriválási szabályából. ■

10.3. **Következmény.** Ha a  $g: I \rightarrow J$  függvény differenciálható és invertálható, továbbá létezik az  $f: J \rightarrow \mathbb{R}$  függvény határozatlan integrálja, akkor létezik az  $f \circ g \cdot g'$  függvény határozatlan integrálja és

$$\left( \int (f \circ g(t)) \cdot g'(t) dt \right) \cdot g^{-1}(x) = \int f(x) dx.$$

*Bizonyítás:* A következmény közvetlenül adódik a 10.2 tételből. ■

10.4. **Megjegyzés.** Az előző következményben szereplő formula lényege, hogy az  $f(x)$  függvény integráljának kiszámításához az  $f \circ g(t) \cdot g'(t)$  függvény integrálját számoljuk ki, majd annak a  $g$  inverzével való kompozícióját vesszük. Ezt a módszert nevezzük a helyettesítéses integrálás módszerének.

A helyettesítés szó arra utal, hogy az  $x$  változót helyettesítjük egy  $x = g(t)$  függvénnyel annak reményében hogy az  $f(x)$  integrálja helyett az  $f \circ g(t) \cdot g'(t)$  függvény integrálját egyszerűbben ki lehet számolni.

10.5. **Példa.** Kiszámoljuk az

$$\int \frac{\cos \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx \quad (x > 0)$$

integrált.

Vezessük be a  $\sqrt{x} = t$  helyettesítést. Ekkor  $x = g(t) = t^2$ , ahol  $t \geq 0$ . A  $g$  függvény deriváltja  $\frac{dx}{dt} = g'(t) = 2t$ . A 10.3 következményben szereplő jelöléseket megtartva

$$f \circ g(t) \cdot g'(t) = \frac{\cos t}{t} \cdot 2t,$$

így

$$\int \frac{\cos \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx = \int \frac{\cos t}{t} \cdot 2t dt = \int 2 \cos t dt = 2 \sin t + c.$$

Alkalmazva a  $g$  inverzével való kompozíciót, ami azt jelenti, hogy „visszahelyettesítjük” a  $t$  helyére a  $\sqrt{x}$ -et azt kapjuk, hogy

$$\int \frac{\cos \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx = 2 \cdot \sin \sqrt{x} + c.$$

DUPress

## 11. Trigonometrikus függvények racionális törtfüggvényeinek integrálása

11.1. **Megjegyzés.** A trigonometrikus függvények racionális törtfüggvényeinek integrálját úgy számolhatjuk ki, hogy bevezetjük a  $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$  helyettesítést. Ekkor a trigonometrikus kifejezéseket tartalmazó racionális törtfüggvények integrálja racionális törtfüggvény integráljára vezethető vissza. Ezt az integrálást a korábban tanult módszerekkel elvégezhetjük.

11.2. **Tétel.** Ha  $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$ , akkor

$$\sin x = \frac{2t}{t^2 + 1}.$$

*Bizonyítás:* Felhasználva, hogy

$$\sin 2x = 2 \cdot \sin x \cdot \cos x,$$

továbbá az 1-et trigonometrikus alakban felírva, majd a tört számlálóját és nevezőjét is  $\cos^2 \frac{x}{2}$ -vel elosztva, és felhasználva, hogy  $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$  azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \sin x &= 2 \cdot \sin \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{x}{2} = \frac{2 \cdot \sin \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{x}{2}}{1} = \frac{2 \cdot \sin \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{x}{2}}{\sin^2 \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2}} = \\ &= \frac{2 \cdot \frac{\sin \frac{x}{2}}{\cos \frac{x}{2}}}{\frac{\sin^2 \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2}} + 1} = \frac{2 \cdot \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} + 1} = \frac{2t}{t^2 + 1}. \end{aligned}$$

Ezzel igazoltuk az állítást. ■

11.3. **Tétel.** Ha  $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$ , akkor

$$\cos x = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}.$$

*Bizonyítás:* Felhasználva, hogy

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x,$$

továbbá az 1-et trigonometrikus alakban felírva, majd a tört számlálóját és nevezőjét is  $\cos^2 \frac{x}{2}$ -vel elosztva, és felhasználva, hogy  $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$  azt kapjuk,

hogy

$$\begin{aligned}\cos x &= \cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2} = \frac{\cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}}{1} = \frac{\cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}}{\sin^2 \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2}} = \\ &= \frac{1 - \frac{\sin^2 \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2}}}{\frac{\sin^2 \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2}} + 1} = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} + 1} = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}.\end{aligned}$$

Ezzel igazoltuk az állítást. ■

11.4. **Tétel.** Ha  $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$ , akkor

$$\frac{dx}{dt} = (2 \cdot \operatorname{arctg} t)' = 2 \cdot \frac{1}{1+t^2} = \frac{2}{1+t^2}.$$

*Bizonyítás:* Ha  $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$ , akkor

$$\operatorname{arctg} t = \frac{x}{2},$$

így

$$x = 2 \cdot \operatorname{arctg} t,$$

amiből

$$\frac{dx}{dt} = (2 \cdot \operatorname{arctg} t)' = 2 \cdot \frac{1}{1+t^2} = \frac{2}{1+t^2}.$$

Ezzel igazoltuk az állítást. ■

11.5. **Példa.** Határozzuk meg az

$$\int \frac{\cos x}{1 + \sin x + \cos x} dx$$

integrált!

Vezessük be a  $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$  helyettesítést! Felhasználva a tételekben szereplő

eredményeket és elvégezve a helyettesítést, majd az összevonásokat és egyszerűsítéseket azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
 \int \frac{\cos x}{1 + \sin x + \cos x} dx &= \int \frac{\frac{1-t^2}{1+t^2}}{1 + \frac{2t}{1+t^2} + \frac{1-t^2}{1+t^2}} \cdot \frac{2}{1+t^2} dt = \\
 &= \int \frac{\frac{1-t^2}{1+t^2}}{\frac{1+t^2+2t+1-t^2}{1+t^2}} \cdot \frac{2}{1+t^2} dt = \int \frac{1-t^2}{1+t^2} \cdot \frac{1+t^2}{2t+2} \cdot \frac{2}{1+t^2} dt = \\
 &= \int \frac{1-t^2}{2t+2} \cdot \frac{2}{1+t^2} dt = \int \frac{(1-t) \cdot (1+t)}{2 \cdot (t+1)} \cdot \frac{2}{1+t^2} dt = \\
 &= \int \frac{1-t}{1+t^2} dt = \int \frac{1}{1+t^2} - \frac{t}{1+t^2} dt = \operatorname{arctg} t - \frac{1}{2} \int \frac{2t}{1+t^2} dt = \\
 &= \operatorname{arctg} t - \frac{1}{2} \ln(1+t^2) + c.
 \end{aligned}$$

Visszahelyettesítve a  $t$  helyére az  $\operatorname{tg} \frac{x}{2}$  kifejezést

$$\operatorname{arctg} \left( \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right) - \frac{1}{2} \cdot \ln \left( 1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} \right) + c = \frac{x}{2} - \frac{1}{2} \ln \left( 1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} \right) + c$$

adódik.

## 12. Primitív függvények a közgazdaságban

12.1. **Megjegyzés.** Egy vállalat termelési költségei több tényezőtől függenek. Például a technológiától, a felhasznált alapanyagok árától, a bérek kifizetésétől, az üzemeltetéstől, az adótól, a termelés mennyiségétől.

12.2. **Definíció.** *Fix költségnek* nevezzük azokat a költségeket, amelyek a termelés mennyiségétől függetlenek. Például ilyenek a bérleti díjak, a hitelkamatok, vagy az olyan egyszeri beruházások, mint például egy gyártósor és az alapanyagok megvásárlása ahhoz, hogy a gyártási folyamatot el tudjuk kezdeni. A fix költséget szokás  $FC$ -vel jelölni (fix cost).

*Változó költségnek* hívjuk azokat a költségeket, amelyek függenek a gyártott mennyiségtől. Például ilyen lehet a dolgozók bére, az anyagköltség, energiaköltség. A változó költséget szokás  $VC(q)$ -vel jelölni (variable cost).

*Költségfüggvénynek* mondjuk azt a függvényt, amely megadja, hogy a termelt mennyiség függvényében mennyi lesz a teljes költségünk, azaz a termelt mennyiséghez hozzárendeli a termelés teljes költségét. A költségfüggvényt szokás  $C(q)$ -val vagy  $TC(q)$ -val jelölni (total cost).

12.3. **Megjegyzés.** A korábbi jelöléseket megtartva:

$$C(q) = FC + VC(q).$$

12.4. **Definíció.** *Átlagos fixköltségnek* nevezzük egy termék egy egységére jutó fix költségét. Jele:  $AFC$ .

12.5. **Megjegyzés.** Ha egy termékből  $q$  mennyiséget gyártunk, akkor az átlagos költség:

$$AC(q) = \frac{C(q)}{q}.$$

12.6. **Megjegyzés.** Ha egy termékből  $q$  mennyiséget gyártunk, akkor az átlagos változó költség:

$$AVC(q) = \frac{VC(q)}{q}.$$

12.7. **Definíció.** A termelésből származó összes *bevétel* az eladott mennyiség és a termék egységárának a szorzata. A termék árát  $p$ -vel, az eladott mennyiséget  $q$ -val jelölve, a fent leírtak a  $p \cdot q$  összefüggéssel írhatóak le. A teljes bevételt  $R$ -el vagy  $TR$ -el szokás jelölni (revenue).

A *keresleti függvény* egy termék minden lehetséges árához hozzárendeli a hozzá tartozó keresett mennyiséget. A függvényt  $D(p)$ -vel (demand) vagy  $f(p)$ -vel szokás jelölni.

**12.8. Megjegyzés.** Ha  $f(p)$  egy keresleti függvény, vagyis az  $f(p)$  függvény megadja, hogy a  $p$  ár mellett mennyi az adott termék iránti kereslet, akkor a termék eladásából származó teljes bevétel:

$$R(p) = p \cdot f(p).$$

**12.9. Definíció.** A keresleti függvény inverzét *inverz keresleti függvénynek* nevezzük. Az inverz keresleti függvény minden egyes mennyiségegységhez hozzárendeli azt az árat, amely mellett a vizsgált személy vagy csoport még éppen hajlandó az adott terméket megvásárolni. Az említett árat *rezervációs ár*nak nevezzük.

**12.10. Definíció.** Ha egy termékből  $q$  mennyiséget gyártunk, akkor az *átlagbevétel* ( $i$  függvény):

$$AR(q) = \frac{R(q)}{q}.$$

**12.11. Definíció.** *Profitnak* vagy *nyereségnek* nevezzük a bevétel és költség különbségét:

$$\Pi(q) = R(q) - C(q).$$

**12.12. Definíció.** *Fedezeti pontnak* nevezzük azt a termelési szintet, amelyhez tartozó profit értéke zérus.

**12.13. Megjegyzés.** Azon termelési mennyiség esetén, amikor a profit zérus, a bevételi függvény és költségfüggvény értéke azonos.

Az átlagköltség függvény minimuma a fedezeti pont.

**12.14. Definíció.** *Üzembezárási pontnak* nevezzük az átlagos változó költség függvény minimumát.

**12.15. Definíció.** A *kínálat* egy vagy több termék azon mennyisége, amivel az általunk vizsgált személy vagy vállalat rendelkezik, és azt adott ár mellett eladni is hajlandó. Kézenfekvőnek tűnik, hogy minden lehetséges árszinthez az emellett érvényes kínálatot rendeljük hozzá, létrehozva így a *kínálati függvényt*. Ezt  $S(p)$ -vel jelölhetjük (supply), ahol  $p$  az adott termék ára.

**12.16. Megjegyzés.** A vállalatok kínálati függvényei monoton növekvőek, vagyis az ár emelkedésével a kínált mennyiség is nő.

**12.17. Definíció.** A keresleti és kínálati függvény metszéspontját *egyensúlyi pontnak* hívjuk.

Az egyensúlyi ponthoz tartozó mennyiséget *egyensúlyi mennyiségnek*, az egyensúlyi ponthoz tartozó árat *egyensúlyi ár*nak nevezzük.

Amikor a kereslet nagyobb, mint a kínálat, *túlkeresletről* vagy más szóval *hiányról* beszélünk. Ha a kínálat nagyobb, mint a kereslet, akkor *túlkínálatról* beszélünk, ilyenkor *felesleg* keletkezik.

**12.18. Definíció.** Legyen  $C(q)$  egy vállalat adott termékére vonatkozó költségfüggvénye és  $q_0$  olyan valós szám, amely eleme a  $C(q)$  értelmezési tartományának. Ekkor a *határköltség* az

$$MC(q_0) = C'(q_0)$$

differenciálhányados. A határköltség megmutatja, hogyan változik az összköltség, ha a termelést egy egységgel növeljük.

Amennyiben  $R(q)$  egy vállalat adott termékére vonatkozó bevételi függvénye és  $q_0$  olyan valós szám, amely eleme az  $R(q)$  értelmezési tartományának, akkor a *határbevétel* az

$$MR(q_0) = R'(q_0)$$

differenciálhányados. A határbevétel megmutatja, hogyan változik az összbevétel, ha a termelést egy egységgel növeljük.

Amennyiben  $\Pi(q)$  egy vállalat adott termékére vonatkozó profit függvénye és  $q_0$  olyan valós szám, hogy  $q_0$  eleme a  $\Pi(q)$  értelmezési tartományának, akkor a *határprofit (határnyereség)* az

$$M\Pi(q_0) = \Pi'(q_0)$$

differenciálhányados. A határprofit megmutatja, hogyan változik az össznyereség, ha a termelést egy egységgel növeljük.

**12.19. Megjegyzés.** A profit függvény és a határprofit definíciója alapján:

$$M\Pi(q) = \Pi'(q) = (R(q) - C(q))' = R'(q) - C'(q).$$

**12.20. Tétel.** Amennyiben adott az  $MC(q)$  határköltség függvény, és az  $FC$  fixköltség, akkor a  $C(q)$  költségfüggvény az  $MC(q)$  azon primitív függvénye, amelyre  $C(0) = FC$  teljesül.

**12.21. Tétel.** Amennyiben adott az  $MR(q)$  határbevételi függvény, akkor az  $R(q)$  bevételi függvény az  $MR(q)$  azon primitív függvénye, amelyre  $R(0) = 0$  teljesül, hiszen természetes feltételezés az, hogy ha  $q = 0$ , azaz nem termelünk, akkor  $R(0) = 0$ , tehát a bevétel is 0.

### 13. Parciális és helyettesítéses integrálás tétele Riemann-integrálokra, Riemann integrálok kiszámítása Newton-Leibniz formulával

13.1. **Tétel.** Ha  $f, g: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$  folytonos függvények, továbbá  $f$  és  $g$  folytonosan differenciálhatóak az  $]a; b[$  intervallumon, akkor

$$\int_a^b f'(x) \cdot g(x) \, dx = f(b) \cdot g(b) - f(a) \cdot g(a) - \int_a^b f(x) \cdot g'(x) \, dx.$$

*Bizonyítás:* Mivel  $f(x)$  és  $g(x)$  differenciálhatóak, ezért

$$(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x).$$

A Newton-Leibniz tétel szerint

$$\int_a^b f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x) \, dx = [f(x) \cdot g(x)]_a^b,$$

így

$$\int_a^b f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x) \, dx = f(b) \cdot g(b) - f(a) \cdot g(a).$$

A kapott egyenletet átrendezve azt kapjuk, hogy

$$\int_a^b f'(x) \cdot g(x) \, dx = f(b) \cdot g(b) - f(a) \cdot g(a) - \int_a^b f(x) \cdot g'(x) \, dx,$$

amivel igazoltuk az állítást. ■

13.2. **Példa.** Kiszámoljuk az

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cdot \cos x \, dx$$

integrál értékét!

Az előbbi tételt felhasználva azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cdot \cos x \, dx &= [x \cdot \sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \, dx = \\ &= [x \cdot \sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} + [\cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} - 1. \end{aligned}$$

A számolást úgy is elvégezhetjük volna, hogy az  $x \cdot \cos x$  függvény egy primitív függvényét határozzuk meg, majd azt követően alkalmazzuk a Newton-Leibniz tételt.

**13.3. Következmény.** Ha  $f, g: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$  folytonos függvények, továbbá  $f$  és  $g$  differenciálhatóak a  $]a; b[$  intervallumon, akkor

$$\int_a^b f(x) \cdot g'(x) dx = f(b) \cdot g(b) - f(a) \cdot g(a) - \int_a^b f'(x) \cdot g(x) dx.$$

*Bizonyítás:* Az állítás a 13.1 tételből közvetlenül következik. ■

**13.4. Tétel.** Ha  $g: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$  szigorúan monoton, folytonosan differenciálható függvény és  $f: ]g(a); g(b)[ \rightarrow \mathbb{R}$  korlátos és folytonos, akkor

$$\int_a^b f \circ g(t) \cdot g'(t) dt = \int_{g(a)}^{g(b)} f(x) dx.$$

*Bizonyítás:* Legyen  $\alpha = g(a)$  és  $\beta = g(b)$ , továbbá

$$F(x) = \int_{\alpha}^x f(t) dt.$$

Ekkor  $F(x)$  primitív függvénye  $f(x)$ -nek az  $]a; b[$  intervallumon és  $F(x)$  folytonos az  $[a; b]$  intervallumon. Ekkor a Newton-Leibniz tétel szerint

$$\int_{g(a)}^{g(b)} f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = F(\beta) - F(\alpha).$$

Másrészt az  $F \circ g(t)$  függvény primitív függvénye az  $f \circ g(t) \cdot g'(t)$  függvénynek a  $]a; b[$  intervallumon. A  $g(t)$  függvény folytonos az  $[a; b]$  intervallumon és az  $F(x)$  függvény folytonos az  $[\alpha; \beta]$  intervallumon, így az  $F \circ g(t)$  függvény folytonos az  $[a; b]$  intervallumon. Ekkor

$$\int_a^b f \circ g(t) \cdot g'(t) dt = F(g(b)) - F(g(a)) = F(\beta) - F(\alpha).$$

Tehát azt kaptuk, hogy

$$\int_a^b f \circ g(t) \cdot g'(t) dt = \int_{g(a)}^{g(b)} f(x) dx,$$

amivel igazoltuk az állítást. ■

13.5. **Példa.** Kiszámoljuk az

$$\int_0^4 \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$$

integrál értékét!

Végezzük el a  $t = \sqrt{x}$  helyettesítést. Ekkor  $t^2 = x$ , így  $\frac{dx}{dt} = 2t$ . Tehát

$$\begin{aligned} \int_0^4 \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx &= \int_{\sqrt{0}}^{\sqrt{4}} \frac{e^t}{t} \cdot 2t dt = \int_0^2 2 \cdot e^t dt = \\ &= [2 \cdot e^t]_0^2 = 2 \cdot e^2 - 2. \end{aligned}$$

13.6. **Tétel.** Ha  $f: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$  folytonosan differenciálható, invertálható függvény és  $g$  az  $f$  függvény inverze, akkor

$$\int_a^b f(x) dx = b \cdot f(b) - a \cdot f(a) - \int_{f(a)}^{f(b)} g(x) dx$$

*Bizonyítás:* A parciális integrálás képletéből azt kapjuk, hogy

$$\int_a^b f(x) dx = b \cdot f(b) - a \cdot f(a) - \int_a^b x \cdot f'(x) dx.$$

Ezt követően az  $x = g(y)$  helyettesítéssel a 13.4 tétel alkalmazásával adódik az állítás. ■

13.7. **Példa.** Kiszámoljuk az előző tétel alkalmazásával az

$$\int_1^e \ln x dx$$

integrál értékét.

Az előbbi tételt felhasználva azt kapjuk, hogy

$$\int_1^e \ln x dx = e \cdot \ln e - 1 \cdot \ln 1 - \int_{\ln 1}^{\ln e} e^x dx = e - [e^x]_0^1 = 1.$$

## 14. Folytonos függvények átlagértéke

14.1. **Motiváció.** Ha  $c_1, c_2, \dots, c_n$  valós számok, akkor ezek számtani átlaga

$$\frac{c_1 + c_2 + \dots + c_n}{n}.$$

Ha  $f: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$  folytonos függvény és az  $[a; b]$  intervallumot  $n$  darab egyenlő részre osztjuk az  $x_0, x_1, \dots, x_n$  osztópontok segítségével, akkor az  $f(x)$  „függvényértékek átlaga”

$$\frac{f(x_0) + f(x_1) + \dots + f(x_n)}{n} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=0}^n f(x_k) = \frac{b-a}{n} \cdot \frac{1}{b-a} \cdot \sum_{k=0}^n f(x_k).$$

Ha az osztópontok számát minden határon túl növeljük, azaz ha vesszük az  $n \rightarrow \infty$  határátmenetet, akkor azt kapjuk, hogy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{b-a} \cdot \frac{b-a}{n} \cdot \sum_{k=0}^n f(x_k) = \frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b f(x) dx.$$

14.2. **Definíció.** Az  $f: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$  folytonos függvény átlagértéke

$$\bar{f} = \frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b f(x) dx.$$

14.3. **Példa.** Az  $f(x) = 3x^2$  függvény átlagértéke a  $[0; 2]$  intervallumon

$$\frac{1}{2-0} \cdot \int_0^2 3x^2 dx = \frac{1}{2} \cdot [x^3]_0^2 = 4.$$

14.4. **Tétel.** Ha  $f: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$  folytonos függvény, akkor van olyan  $\xi$  valós szám, hogy

$$\frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b f(x) dx = f(\xi),$$

tehát az átlagérték előáll függvényértékként.

*Bizonyítás:* Mivel  $f$  zárt intervallumon értelmezett folytonos függvény, ezért felveszi a minimumát és a maximumát, azaz léteznek  $m$  és  $M$  valós számok

úgy, hogy  $m = \min f(x)$  és  $M = \max f(x)$ , tovább az integrálszámítás középtértéktétele szerint

$$m \cdot (b - a) \leq \int_a^b f(x) \, dx \leq M \cdot (b - a).$$

Az egyenlőtlenség sort átrendezve azt kapjuk, hogy

$$m \leq \frac{1}{b - a} \cdot \int_a^b f(x) \, dx \leq M.$$

Mivel  $m$  és  $M$  is függvényérték és az  $f$  függvény folytonos, ezért a Darboux-tétel szerint (folytonos függvény bármely két érték közötti közbeeső értéket is felvesz) létezik olyan  $c$  valós szám, hogy

$$\frac{1}{b - a} \cdot \int_a^b f(x) \, dx = f(\xi),$$

amivel igazoltuk az állítást. ■

**14.5. Példa.** Az  $f: [0; 2] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = 3x^2$  függvény esetén kiszámoljuk azt a  $\xi$  értéket, melyre  $f(\xi) = \bar{f}$ .

A 14.3 példában láttuk, hogy  $\bar{f} = 4$ , így a  $3\xi^2 = 4$  egyenletnek a  $[0; 2]$  intervallumba eső megoldását keressük, amire azt kapjuk, hogy  $\xi = \frac{2}{\sqrt{3}}$ .

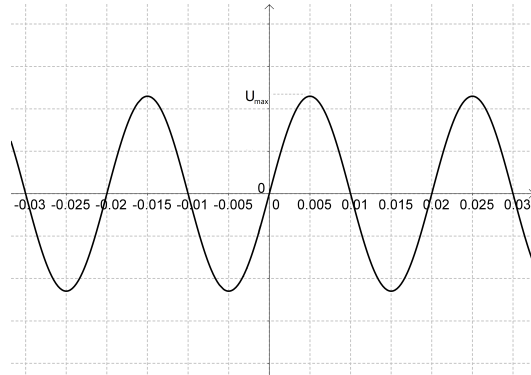
**14.6. Megjegyzés.** Ha  $v(t)$  egy vízszintes pályán mozgó test sebesség-idő függvénye, akkor a  $[t_1; t_2]$  időintervallumban az átlagsebesség

$$\begin{aligned} \bar{v} &= \frac{1}{t_2 - t_1} \cdot \int_{t_1}^{t_2} v(t) \, dt = \frac{1}{t_2 - t_1} \cdot [s(t)]_{t_1}^{t_2} = \\ &= \frac{1}{t_2 - t_1} \cdot (s(t_2) - s(t_1)) = \frac{s(t_2) - s(t_1)}{t_2 - t_1}. \end{aligned}$$

**14.7. Példa.** A lakásokban a hálózati feszültség időfüggvénye

$$U(t) = U_{\max} \cdot \sin(100\pi \cdot t),$$

ahol a feszültséget voltban, az időt másodpercben mérjük. A függvény másodpercenként 50 perióduson fut végig, azaz a frekvenciája 50 [Hz]. Az  $U_{\max}$  pozitív állandó az úgynevezett *csúcshőfeszültség*.



Például a 0 és  $\frac{1}{100}$  másodperc közötti fél ciklusban a feszültség átlagos értéke

$$\begin{aligned}\bar{U} &= \frac{1}{\frac{1}{100}} \cdot \int_0^{\frac{1}{100}} U_{\max} \cdot \sin(100\pi \cdot t) dt = \\ &= 100 \cdot \left[ -U_{\max} \cdot \frac{\cos(100\pi \cdot t)}{100\pi} \right]_0^{\frac{1}{100}} \\ &= \frac{U_{\max}}{\pi} \cdot (-\cos \pi + \cos 0) = \frac{2U_{\max}}{\pi}.\end{aligned}$$

Egy teljes periódusban a feszültség átlagos értéke zérus. Ha a feszültség effektív értékét akarjuk megkapni, akkor olyan műszerrel kell mérni, ami a feszültségnégyzet átlagértékét méri.

Mivel a feszültség-idő függvény négyzete

$$U^2(t) = U_{\max}^2 \cdot \sin^2(100\pi \cdot t),$$

ezért az  $U^2(t)$  függvény átlagértéke egy teljes periódus alatt

$$\bar{U}^2 = \frac{1}{\frac{1}{50}} \cdot \int_0^{\frac{1}{50}} U_{\max}^2 \cdot \sin^2(100\pi \cdot t) dt.$$

Mivel a

$$\cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x$$

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

azonosságokból azt kapjuk, hogy

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2},$$

ezért

$$\begin{aligned} \overline{U^2} &= \int_0^{\frac{1}{50}} U_{\max}^2 \cdot \left( \frac{1 - \cos(200\pi \cdot t)}{2} \right) dt = \\ &= U_{\max}^2 \cdot \left[ \frac{1}{2}t - \frac{\sin(200\pi \cdot t)}{400\pi} \right]_0^{\frac{1}{50}} = U_{\max}^2 \cdot 50 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{50} = \frac{U_{\max}^2}{2}. \end{aligned}$$

Tehát az effektív feszültség

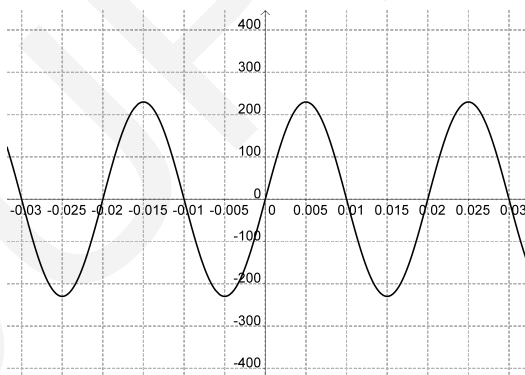
$$U_{\text{eff}} = \frac{U_{\max}}{\sqrt{2}}.$$

Hálózati feszültségként az effektív feszültséget szokás megadni, ami Magyarországon 230 [V].

A csúcsfeszültség

$$U_{\max} = \sqrt{2} \cdot U_{\text{eff}} = \sqrt{2} \cdot 230 \approx 325 \text{ [V]}.$$

Ez azt jelenti, hogy a 230 [V]-os váltakozó áram esetén van olyan időpillanat, amikor a hálózati feszültség értéke 325 [V].



## 15. Területszámítás integrálással

**15.1. Tétel.** Az  $f: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$  folytonos függvény grafikonja, az  $x$  tengely, az  $x = a$  és az  $x = b$  egyenesek által közrezárt (korlátos) síkidom területét úgy határozzuk meg, hogy

- 1) kiszámoljuk az  $f(x)$  függvény zérushelyeit;
- 2) az  $f(x)$  zérushelyei segítségével az  $[a; b]$  intervallumot részekre osztjuk;
- 3) meghatározzuk az egyes intervallumokon az  $f(x)$  függvény Riemann-integrálját;
- 4) a kapott integrálok abszolútértékét összeadjuk.

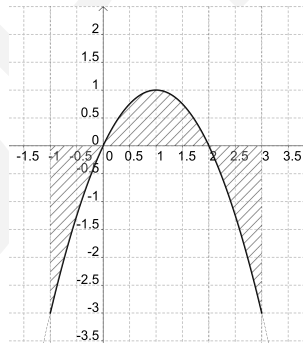
**15.2. Példa.** Kiszámoljuk ki az  $f(x) = -x^2 + 2x$  függvénynek az  $x$  tengellyel bezárt területét a  $[-1; 3]$  intervallumon!

Az  $f(x)$  függvény zérushelyei

$$-x^2 + 2x = 0 \quad \Rightarrow \quad x \cdot (-x + 2) = 0,$$

így  $x = 0$ , illetve  $x = 2$ .

A függvény grafikonját és a keresett területet mutatja az alábbi ábra:



Tehát a  $[-1; 0]$ , a  $[0; 2]$  és a  $[2; 3]$  intervallumokon kell kiszámolnunk az  $f(x)$  függvény Riemann-integrálját.

Egyrészt

$$\int_{-1}^0 -x^2 + 2x \, dx = \left[ -\frac{x^3}{3} + x^2 \right]_{-1}^0 = 0 - \left( \frac{1}{3} + 1 \right) = -\frac{4}{3}.$$

Másrészt

$$\int_0^2 -x^2 + 2x \, dx = \left[ -\frac{x^3}{3} + x^2 \right]_0^2 = -\left( \frac{8}{3} - 4 \right) = \frac{4}{3}.$$

Valamint

$$\int_2^3 -x^2 + 2x \, dx = \left[ -\frac{x^3}{3} + x^2 \right]_2^3 = (-9 + 9) - \left( -\frac{8}{3} + 4 \right) = \frac{4}{3}.$$

Tehát a keresett terület

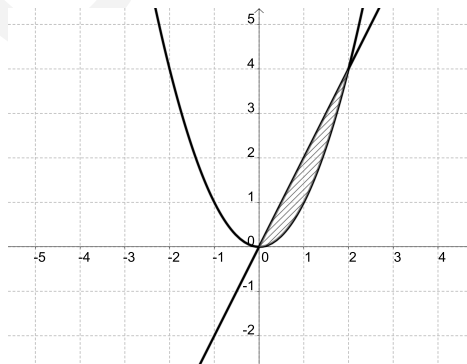
$$T = 3 \cdot \frac{4}{3} = 4.$$

**15.3. Tétel.** Az  $f, g: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$  folytonos függvények grafikonjai, az  $x$  tengely, az  $x = a$  és az  $x = b$  egyenesek által közrezárt (korlátos) síkidom területét úgy határozzuk meg, hogy

- 1) megoldjuk az  $f(x) = g(x)$  egyenletet;
- 2) a kapott megoldások segítségével az  $[a; b]$  intervallumot részekre osztjuk;
- 3) meghatározzuk az egyes intervallumokon az  $f(x) - g(x)$  függvény Riemann-integrálját;
- 4) a kapott integrálok abszolútértékét összeadjuk.

**15.4. Példa.** Számoljuk ki az  $f(x) = 2 - x^2$  és  $g(x) = 2x$  függvények által közrezárt területet!

Először vázoljuk fel a függvények grafikonjait:



A függvények grafikonjainak metszéspontjait (vagyis az integrálás határait) az

$$x^2 = 2x$$

$$x^2 - 2x = 0$$

$$x \cdot (x - 2) = 0$$

egyenlet megoldásai adják. Mivel egy szorzat csak úgy lehet zérus, ha valamelyik tényezője zérus, ezért  $x = 0$ , illetve  $x = 2$ .

A két függvény grafikonja által közrezárt terület:

$$\begin{aligned} T &= \int_0^2 2x - x^2 \, dx = \left[ x^2 - \frac{x^3}{3} \right]_0^2 = \\ &= 4 - \frac{8}{3} = \frac{12 - 8}{3} = \frac{4}{3}. \end{aligned}$$

## 16. Forgástest térfogata

**16.1. Tétel.** Legyen az  $f: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$  függvény folytonos, nem-negatív értékű. Ekkor az  $f(x)$  függvény  $x$ -tengely körüli megforgatásával keletkezett forgástest térfogata

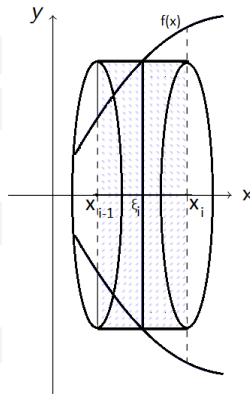
$$V = \pi \cdot \int_a^b f(x) dx.$$

*Bizonyítás:* Tekintsük az  $[a; b]$  intervallumnak az  $n$  részre való

$$d = \{[x_{i-1}; x_i] \mid i = 1, 2, \dots, n\}$$

beosztását.

Legyen  $\xi_i \in [x_{i-1}; x_i]$  minden  $i \in 1; 2; \dots; n$  esetén. Minden  $[x_{i-1}; x_i]$  intervallumon a forgástest megfelelő szeletének térfogatát közelítjük annak a hengernek a térfogatával, amelynek magassága  $x_i - x_{i-1}$ , alapkörének sugara  $f(\xi_i)$ .



Tehát az  $i$ -edik henger térfogata

$$V_i = (f(\xi_i))^2 \cdot \pi \cdot (x_i - x_{i-1}),$$

így a teljes test térfogata jól közelíthető az

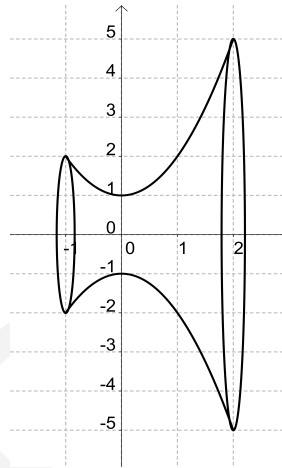
$$V \approx \sum_{i=1}^n (f(\xi_i))^2 \cdot \pi \cdot (x_i - x_{i-1})$$

összegeggel. Ha az osztópontok számát minden határon túl növeljük, akkor

$$V = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n (f(\xi_i))^2 \cdot \pi \cdot (x_i - x_{i-1}) = \pi \cdot \int_a^b (f(x))^2 dx,$$

amivel igazoltuk az állítást. ■

**16.2. Példa.** Az  $f: [-1; 2] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^2 + 1$  függvény grafikonját megforgatjuk  $x$ -tengely körül. Ekkor az alábbi forgástest keletkezik:



Mivel

$$(f(x))^2 = (x^2 + 1)^2 = x^4 + 2x^2 + 1,$$

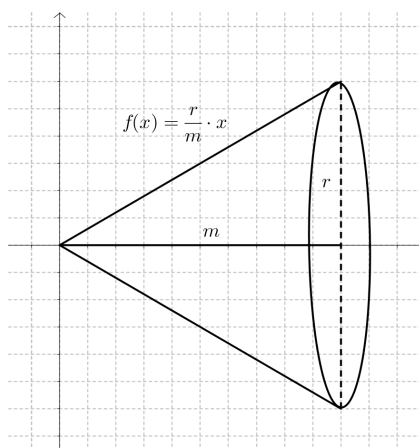
ezért

$$\begin{aligned} \int_{-1}^2 (x^2 + 1)^2 dx &= \int_{-1}^2 x^4 + 2x^2 + 1 dx = \\ &= \left[ \frac{x^5}{5} + 2 \cdot \frac{x^3}{3} + x \right]_{-1}^2 = \\ &= \left( \frac{2^5}{5} + 2 \cdot \frac{2^3}{3} + 2 \right) - \left( \frac{(-1)^5}{5} + 2 \cdot \frac{(-1)^3}{3} + (-1) \right) = \\ &= \left( \frac{32}{5} + \frac{16}{3} + 2 \right) - \left( -\frac{1}{5} - \frac{2}{3} - 1 \right) = \\ &= \frac{33}{5} + \frac{18}{3} + 3 = \frac{78}{5}. \end{aligned}$$

Tehát a keresett térfogat

$$V = \frac{78}{5} \cdot \pi \approx 49.$$

**16.3. Megjegyzés.** Legyenek  $m$  és  $r$  pozitív valós számok! Tekintsük ekkor az  $f: [0; m] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{r}{m} \cdot x$  függvényt! Forgassuk meg a függvény grafikonját az  $x$ -tengely körül!



A keletkezett forgástest térfogata

$$V = \pi \cdot \int_0^m \frac{r^2}{m^2} \cdot x^2 \, dx = \pi \cdot \frac{r^2}{m^2} \cdot \int_0^m \left[ \frac{x^3}{3} \right]_0^m = \pi \cdot \frac{r^2}{m^2} \cdot \frac{m^3}{3} = \frac{r^2 \cdot \pi \cdot m}{3}.$$

Tehát azt kaptuk, hogy az  $r$  sugarú,  $m$  magasságú egyenes körkúp térfogata

$$V = \frac{r^2 \cdot \pi \cdot m}{3}.$$

## 17. Függvény grafikonjának ívhossza

17.1. **Tétel.** Legyen  $f: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$  folytonosan differenciálható függvény. Ekkor az  $f(x)$  függvény grafikonjának ívhossza

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx.$$

*Bizonyítás:* Tekintsük az  $[a; b]$  intervallumnak az  $n$  egyenlő részre való

$$d = \{[x_{i-1}; x_i] \mid i = 1, 2, \dots, n\}$$

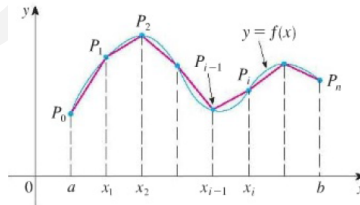
beosztását.

Ekkor az egyes részintervallumok hossza  $\frac{b-a}{n}$ , így

$$x_0 = a; x_1 = a + \frac{b-a}{n}; x_2 = a + \frac{2 \cdot (b-a)}{n}; \dots; x_n = b.$$

Legyen  $P_i = (x_i; f(x_i))$ , ahol  $i = 0, 1, 2, \dots, n$  és kössük össze a  $P_0$  pontot a  $P_1$  ponttal, a  $P_1$  pontot a  $P_2$  ponttal, és így tovább, végül a  $P_{n-1}$  pontot a  $P_n$  ponttal.

A függvény grafikonjának ívhosszát a kapott töröttvonalakkal (szakaszokkal) közelítjük. Ha az osztópontok számát minden határon túl növeljük, azaz ha az osztópontok számával végtelenhez tartunk, akkor éppen az  $f(x)$  függvény grafikonjának ívhosszát kapjuk.



Mivel a  $\overline{P_{i-1}P_i}$  szakasz hossza, azaz a  $P_{i-1}$  és  $P_i$  pontok távolsága

$$\sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (f(x_i) - f(x_{i-1}))^2},$$

ezért felhasználva, hogy  $(x_i - x_{i-1}) = \frac{b-a}{n}$  azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} L &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (f(x_i) - f(x_{i-1}))^2} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 \cdot \left(1 + \left(\frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}\right)^2\right)} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) \cdot \sqrt{\left(1 + \left(\frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}\right)^2\right)} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b-a}{n} \cdot \sum_{i=1}^n \sqrt{\left(1 + \left(\frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}\right)^2\right)}. \end{aligned}$$

A differenciálszámítás Lagrange-féle középérték tétele szerint létezik olyan  $\xi_i \in ]x_{i-1}; x_i[$  valós szám, melyre

$$\frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} = f'(\xi_i),$$

így

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b-a}{n} \cdot \sum_{i=1}^n \sqrt{1 + (f'(\xi_i))^2}$$

Ezt felhasználva a 2.2 tétel alapján azt kaptuk, hogy az  $f(x)$  függvény grafikonjának ívhossza

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx,$$

amivel igazoltuk az állítást. ■

**17.2. Példa.** Kiszámoljuk az  $f(x) = \operatorname{ch} x$  függvény grafikonjának ívhosszát a  $[-1; 1]$  intervallumon.

Mivel  $f'(x) = \operatorname{sh} x$ , ezért az ívhossz

$$L = \int_{-1}^1 \sqrt{1 + \operatorname{sh}^2 x} dx.$$

Mivel  $\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$ , ezért  $\operatorname{ch}^2 x = 1 + \operatorname{sh}^2 x$ , így

$$L = \int_{-1}^1 \sqrt{\operatorname{ch}^2 x} \, dx = \int_{-1}^1 |\operatorname{ch} x| \, dx.$$

Mivel a  $\operatorname{ch} x$  függvény páros, ezért

$$L = 2 \cdot \int_0^1 \operatorname{ch} x \, dx = 2 \cdot [\operatorname{sh} x]_0^1 = 2 \cdot \operatorname{sh} 1 \approx 2,35.$$

## 18. Forgástest palástjának területe

18.1. **Tétel.** Legyen az  $f: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$  függvény folytonos, nem-negatív értékű. Ekkor az  $f(x)$  függvény  $x$ -tengely körüli megforgatásával keletkezett forgástest palástjának területe

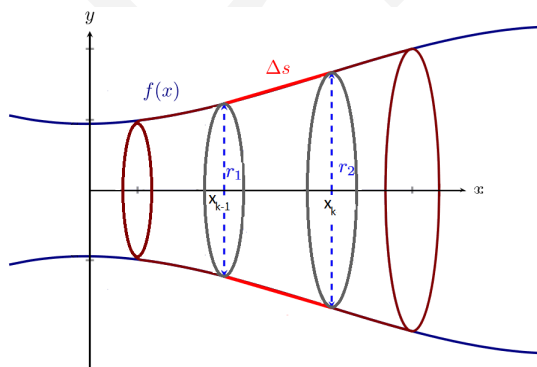
$$A = 2\pi \cdot \int_a^b f(x) \cdot \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx.$$

*Bizonyítás:* Tekintsük az  $[a; b]$  intervallumnak az  $n$  részre való

$$d = \{[x_{i-1}; x_i] \mid i = 1, 2, \dots, n\}$$

beosztását.

Legyen  $\xi_i \in [x_{i-1}; x_i]$  minden  $i \in 1; 2; \dots; n$  esetén. Minden  $[x_{i-1}; x_i]$  intervallumon a forgástest megfelelő szelete palástjának területét közelítsük annak a csonkakúpnak a palástjának területével, amelynek magassága  $x_i - x_{i-1}$ , alapkörének alapkörének ívhossza  $2\pi \cdot f(x_{k-1})$ , fedőkörének sugara  $2\pi \cdot f(x_k)$  és alkotójának hossza a  $\sqrt{1 + (f'(\xi_i))^2}$  ívhossz.



Tehát az  $i$ -edik csonkakúp palástjának területe

$$\begin{aligned} A_i &= \frac{f(x_{i-1}) + f(x_i)}{2} \cdot 2 \cdot \sqrt{1 + (f'(\xi_i))^2} \pi \cdot (x_i - x_{i-1}) = \\ &= f(\xi_i) \cdot 2 \cdot \sqrt{1 + (f'(\xi_i))^2} \pi \cdot (x_i - x_{i-1}), \end{aligned}$$

ahol  $\xi \in [x_{i-1}; x_i]$ . A teljes test palástjának területe jól közelíthető az

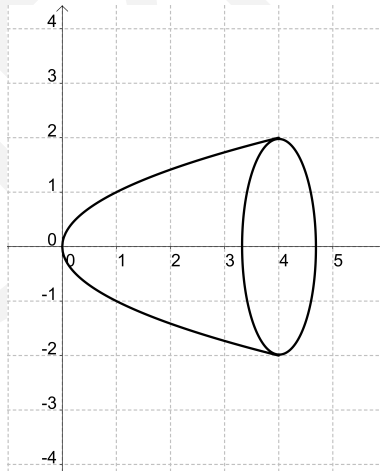
$$A \approx \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \cdot 2 \cdot \sqrt{1 + (f'(\xi_i))^2} \pi \cdot (x_i - x_{i-1})$$

összeggel. Ha az osztópontok számát minden határon túl növeljük, akkor

$$\begin{aligned} A &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \cdot 2 \cdot \sqrt{1 + (f'(\xi_i))^2} \cdot \pi \cdot (x_i - x_{i-1}) = \\ &= 2\pi \cdot \int_a^b f(x) \cdot \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx, \end{aligned}$$

amivel igazoltuk az állítást. ■

**18.2. Példa.** Kiszámoljuk az  $f: [0; 4] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \sqrt{x}$  függvény grafikonjának az  $x$ -tengely körüli megforgatásával keletkező forgástest palástjának területét. A keletkezett testet az alábbi ábra szemlélteti:



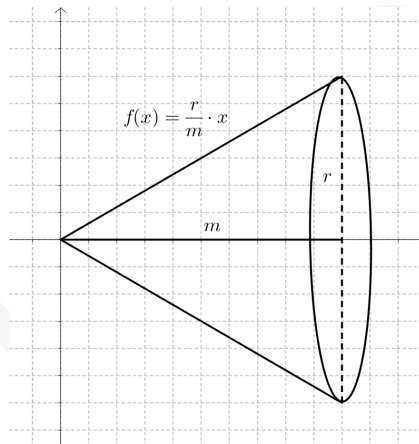
Az  $f(x)$  függvény deriváltja

$$f'(x) = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{x}}.$$

A palást területe

$$\begin{aligned}
 A &= 2\pi \cdot \int_0^4 \sqrt{x} \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{4x}} dx = 2\pi \cdot \int_0^4 \sqrt{x + \frac{1}{4}} dx = \\
 &= \left[ \left(x + \frac{1}{4}\right)^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{2}{3} \right]_0^4 = \left(\frac{17}{4}\right)^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{2}{3} - \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{2}{3} = \\
 &= \frac{17 \cdot \sqrt{17}}{8} \cdot \frac{2}{3} - \frac{1}{8} \cdot \frac{2}{3} = \frac{17 \cdot \sqrt{17} - 1}{6} \cdot \pi \approx 36,18.
 \end{aligned}$$

**18.3. Megjegyzés.** Legyenek  $m$  és  $r$  pozitív valós számok! Tekintsük ekkor az  $f: [0; m] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{r}{m} \cdot x$  függvényt! Forgassuk meg a függvény grafikonját az  $x$ -tengely körül!



Ekkor

$$f'(x) = \frac{r}{m} \quad \Rightarrow \quad (f'(x))^2 = \frac{r^2}{m^2},$$

így

$$\begin{aligned}
 f(x) \cdot \sqrt{1 + (f'(x))^2} &= \frac{r}{m} \cdot x \cdot \sqrt{1 + \frac{r^2}{m^2}} = \\
 &= \frac{r}{m} \cdot x \cdot \sqrt{\frac{r^2 + m^2}{m^2}} = \frac{r}{m} \cdot x \cdot \frac{a}{m} = \frac{r \cdot a \cdot x}{m^2},
 \end{aligned}$$

ahol  $a$  a kúp alkotója.

Tehát a keletkezett palást területe

$$\begin{aligned} A &= 2\pi \cdot \int_0^m f(x) \cdot \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx = 2\pi \cdot \int_0^m \frac{r \cdot a \cdot x}{m^2} dx = \\ &= 2\pi \cdot \frac{r \cdot a}{m^2} \cdot \left[ \frac{x^2}{2} \right]_0^m = r \cdot \pi \cdot a. \end{aligned}$$

Tehát azt kaptuk, hogy az  $r$  sugarú,  $m$  magasságú egyenes körkúp palástjának területe

$$A = r \cdot \pi \cdot a.$$

## 19. Vékony huzal, rúd és síklemez tömege

**19.1. Tétel.** Legyen  $\rho: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$  olyan folytonos függvény, amelyre  $\rho(x) > 0$  minden  $x \in [a; b]$  esetén. Az  $x$ -tengely mentén elhelyezkedő,  $\rho(x)$  sűrűségű vékony huzal, pálca vagy rúd tömege

$$m = \int_a^b \rho(x) dx.$$

**19.2. Példa.** Egy 10 [m] hosszúságú rúd az  $x$ -tengely pozitív irányába vastagszik és sűrűségét a  $\rho(x) = 1 + \frac{x}{10} \left[ \frac{\text{kg}}{\text{m}} \right]$  függvény írja le. Ekkor a tömege

$$m = \int_0^{10} 1 + \frac{x}{10} dx = \left[ x + \frac{x^2}{20} \right]_0^{10} = 15 \text{ [kg]}.$$

**19.3. Tétel.** Legyenek  $a$  és  $b$  valós számok úgy, hogy  $a < b$ . Legyen továbbá  $f: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$  folytonos függvény. Egy vékony lemezt az  $x = a$ , az  $x = b$  és  $y = 0$  egyenesek, valamint az  $f(x)$  függvény grafikonja határol. A lemez sűrűsége az  $(x; y)$  koordinátájú pontban  $\rho(x)$ . Ekkor a lemez tömege

$$m = \int_a^b \rho(x) \cdot f(x) dx.$$

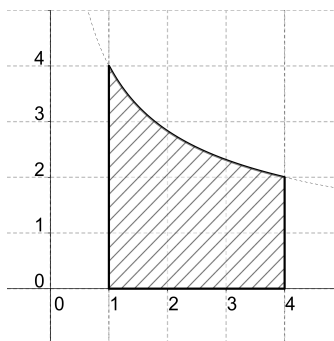
**19.4. Példa.** Egy vékony lemezt az  $x = 1$ , az  $x = 4$  és  $y = 0$  egyenesek, valamint az  $f(x) = \frac{4}{\sqrt{x}}$  függvény grafikonja határol. A lemez sűrűsége az  $(x; y)$  koordinátájú pontban  $\rho(x) = \frac{1}{x} \left[ \frac{\text{g}}{\text{cm}^2} \right]$ .

A síklemezt a

$$D = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x \leq 4, 0 \leq y \leq f(x)\}$$

halmaz adja meg.

A lemez ábrázolása:



A lemez tömege

$$\begin{aligned} m &= \int_1^4 \rho(x) \cdot f(x) \, dx = \int_1^4 \frac{1}{x} \cdot \frac{4}{\sqrt{x}} \, dx = \int_1^4 \frac{4}{x^{\frac{3}{2}}} \, dx = \\ &= \left[ 4 \cdot \frac{x^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}} \right]_1^4 = \left[ -\frac{8}{\sqrt{x}} \right]_1^4 = -\frac{8}{2} + \frac{8}{1} = 4 \text{ [g]}. \end{aligned}$$

## 20. Vékony huzal, rúd és síklemez tömegközéppontja és súlypontja

**20.1. Tétel.** Legyen  $\rho: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$  olyan folytonos függvény, amelyre  $\rho(x) > 0$  minden  $x \in [a; b]$  esetén. Az  $x$ -tengelyen fekvő  $\rho$  sűrűségű vékony huzal, pálcza vagy rúd tömegközéppontja

$$\bar{x} = \frac{\int_a^b x \cdot \rho(x) dx}{\int_a^b \rho(x) dx}.$$

**20.2. Példa.** Egy 10 [m] hosszúságú rúd balról jobbra vastagszik, sűrűségét a  $\rho(x) = 1 + \frac{x}{10} \left[ \frac{\text{kg}}{\text{m}} \right]$  függvény írja le. Ekkor egyrészt

$$\int_0^{10} 1 + \frac{x}{10} dx = \left[ x + \frac{x^2}{20} \right]_0^{10} = 15,$$

másrészt

$$\begin{aligned} \int_0^{10} x \cdot \left( 1 + \frac{x}{10} \right) dx &= \int_0^{10} x + \frac{x^2}{10} dx = \left[ \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{30} \right]_0^{10} = \\ &= 50 + \frac{100}{3} = \frac{250}{3}, \end{aligned}$$

így a tömegközéppont

$$\bar{x} = \frac{250}{3} \cdot \frac{1}{15} \approx 5,56 \text{ [m]}.$$

**20.3. Tétel.** Egy állandó sűrűségű vékony rúd tömegközéppontja a rúd felezőpontjában van.

*Bizonyítás:* Legyen a rúd sűrűsége  $\rho$ , a rúd hosszúsága  $b - a$ . Ekkor a tömegközéppontja

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{\int_a^b x \cdot \rho dx}{\int_a^b \rho dx} = \frac{\left[ \frac{x^2}{2} \right]_a^b}{\left[ x \right]_a^b} = \\ &= \frac{\frac{b^2 - a^2}{2}}{b - a} = \frac{b^2 - a^2}{2 \cdot (a + b)} = \frac{a + b}{2}, \end{aligned}$$

amivel igazoltuk az állítást. ■

**20.4. Következmény.** Legyenek  $\rho: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$  és  $f: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$  folytonos függvények. Ha egy  $\rho(x)$  sűrűségű síklemezt az  $x = a$ ,  $x = b$ ,  $y = 0$  egyenesek és az  $f(x)$  függvény grafikonja határol, akkor a síklemez tömegközéppontja  $S = (x_s; y_s)$ , ahol

$$x_s = \frac{\int_a^b x \cdot \rho(x) \cdot f(x) dx}{\int_a^b f(x) dx}; \quad y_s = \frac{\frac{1}{2} \cdot \int_a^b (\rho(x) \cdot f(x))^2 dx}{\int_a^b f(x) dx}.$$

**20.5. Megjegyzés.** Ha a sűrűség állandó, akkor a tömegközéppont nem függ a tárgy anyagi minőségétől. Ezekben az esetekben a tömegközéppont helyett a súlypont elnevezést használjuk.

**20.6. Következmény.** Ha egy homogén tömegeloszlású síklemezt az  $x = a$ ,  $x = b$ ,  $y = 0$  egyenesek és az  $f(x)$  függvény grafikonja határol, akkor a síklemez súlypontja  $S = (x_s; y_s)$ , ahol

$$x_s = \frac{\int_a^b x \cdot f(x) dx}{\int_a^b f(x) dx}; \quad y_s = \frac{\frac{1}{2} \cdot \int_a^b (f(x))^2 dx}{\int_a^b f(x) dx}.$$

**20.7. Példa.** Kiszámoljuk az  $f(x) = \sqrt{x}$  függvénynek a  $[0; 4]$  intervallumon az  $x$ -tengely által határolt homogén síklemez súlypontját!

Mivel

$$\begin{aligned} \int_0^4 \sqrt{x} dx &= \int_0^4 x^{\frac{1}{2}} dx = \\ &= \left[ \frac{2}{3} \cdot x^{\frac{3}{2}} \right]_0^4 = \left[ \frac{2}{3} \cdot \sqrt{x^3} \right]_0^4 = \left( \frac{2}{3} \cdot 8 \right) = \frac{16}{3} \end{aligned}$$

és

$$\begin{aligned} \int_0^4 x \cdot \sqrt{x} dx &= \int_0^4 x \cdot x^{\frac{1}{2}} dx = \\ &= \int_0^4 x^{\frac{3}{2}} dx = \left[ \frac{2}{5} \cdot x^{\frac{5}{2}} \right]_0^4 = \left[ \frac{2}{5} \cdot \sqrt{x^5} \right]_0^4 = \\ &= \frac{2}{5} \cdot 32 = \frac{64}{5}, \end{aligned}$$

ezért

$$x_s = \frac{\frac{16}{3}}{\frac{64}{5}} = \frac{16}{3} \cdot \frac{5}{64} = \frac{12}{5}.$$

Másrészt mivel

$$\int_0^4 x \, dx = \left[ \frac{x^2}{2} \right]_0^4 = 8,$$

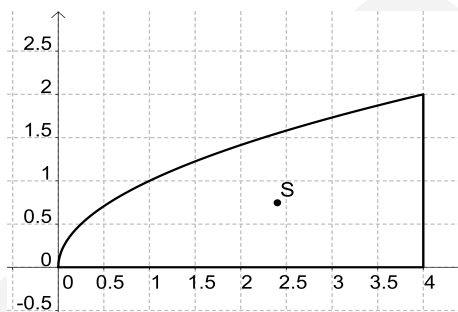
ezért

$$y_s = \frac{4}{\frac{16}{3}} = \frac{3}{4}.$$

Tehát a súlypont

$$S = \left( \frac{12}{5}; \frac{3}{4} \right).$$

A homogén síklemezet és a súlypontot az alábbi ábra szemlélteti:



## 21. Vonal mentén megoszló párhuzamos erőrendszer

21.1. **Tétel.** Legyen  $f: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$  folytonos függvény. Az  $[a; b]$  intervallumon megoszló erőrendszer  $O$  pontra vonatkozó forgatónyomatéka

$$M_O = - \int_a^b x \cdot f(x) dx.$$

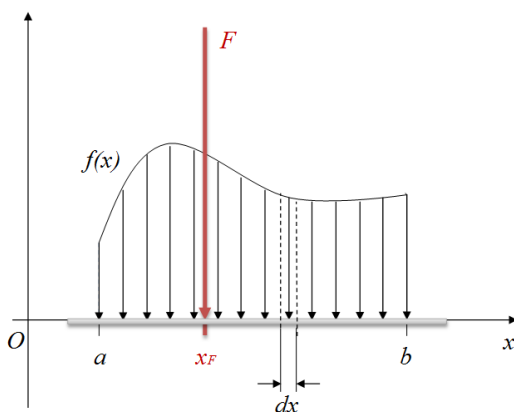
*Bizonyítás:* Terheljük egy rúd alakú testet a hossz tengelyére merőleges megoszló erővel. A megoszló erő, a koncentrált erőtől eltérően, nem a rúd egy adott pontjában támad, hanem annak egy  $[a; b]$  szakaszán megoszlik. A megoszló erőt a rúd egy adott  $x$  koordinátájú pontjában az  $f(x)$  intenzitással jellemezzük.

Ha az  $f(x)$  intenzitást megszorozzuk a rúd egy kis darabjának  $dx$  hosszúságával, akkor megkapjuk a szakaszra ható erő nagyságát:

$$dF = f(x) dx.$$

Ebből adódóan a teljes  $[a; b]$  intervallumra ható erő nagysága:

$$F = \int_a^b f(x) dx.$$



A megoszló erőrendszernek a sík bármely pontjára kiszámítható a forgatónyomatéka. Az  $x$  koordinátájú kicsi  $dx$  hosszúságú darabra ható erő  $O$  pontra vonatkozó skaláris forgatónyomatéka:

$$dM_O = -dF \cdot x = -x \cdot f(x) dx.$$

Tehát az  $[a; b]$  szakaszon megoszló erőrendszer  $O$  pontra vonatkozó forgatónyomatéka:

$$M_O = - \int_a^b x \cdot f(x) dx,$$

amivel igazoltuk az állítást.

Megjegyezzük, hogy az óramutató járásával ellentétes „forgásértelmet” tekintjük pozitívnak. ■

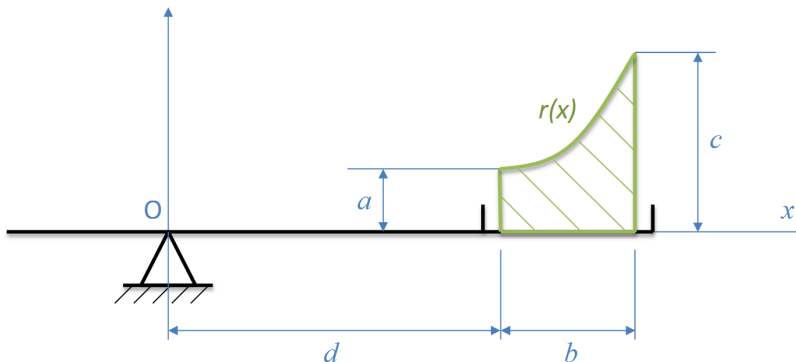
**21.2. Definíció.** Az előbbi tételben szereplő  $F$  erőt a *megoszló erőrendszer koncentrált eredőjének* nevezzük, ha a sík bármely pontjára (így speciálisan az  $O$  pontra) ugyanaz a forgatónyomatéka, mint a megoszló erőrendszernek. Azaz:

$$-F \cdot x_F = M_O = - \int_a^b x \cdot f(x) dx.$$

**21.3. Tétel.** Ebből az eredő támadáspontjának  $x_F$  koordinátája:

$$x_F = \frac{- \int_a^b x \cdot f(x) dx}{-F} = \frac{\int_a^b x \cdot f(x) dx}{\int_a^b f(x) dx}.$$

**21.4. Példa.** Az ábra egy egyensúlyban lévő kétkarú mérleget mutat, amelynek egyik serpenyőjében egy hasáb található.



A hasáb hossz tengelye merőleges az ábra síkjára, így az ábrán a hasáb alaplapja látható. Az ábrán jelzett geometriai adatokon kívül ismert a hasáb hossz tengely irányú  $l$  mérete,  $\rho$  sűrűsége, valamint a gravitációs gyorsulás  $g$  értéke. Továbbá

tudjuk, hogy a hasáb által a serpenyőre kifejtett nyomóerő  $f(x)$  intenzitása, és a hasáb keresztmetszetét jellemző  $r(x)$  függvénygörbe közötti összefüggés az alábbi:

$$f(x) = -l \cdot \rho \cdot g \cdot r(x).$$

Az alábbi adatokat ismerjük:

$$a = 0,5 \text{ [m]}; \quad b = 1 \text{ [m]}; \quad c = 1,5 \text{ [m]}; \quad l = 0,5 \text{ [m]};$$

$$d = 2 \text{ [m]}; \quad \rho = 5\,000 \left[ \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \right]; \quad g = 9,81 \left[ \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right].$$

- Határozzuk meg  $r(x) = \alpha \cdot 2^x + \beta$  függvény ismeretlen paramétereit!
- Adjuk meg a hasáb által a serpenyőre kifejtett nyomóerő eredőjének nagyságát!
- Számoljuk ki a hasáb által a serpenyőre kifejtett nyomóerő  $O$  pontra vonatkozó skaláris forgatónyomatékát!
- Határozzuk meg az eredő támadáspontjának  $O$  ponttól mért távolságát!

### Megoldás:

- Mivel az  $r(x)$  függvény grafikonjára illeszkedik a  $(d; a) = (2; 0,5)$  és a  $(d + b; c) = (3; 1,5)$  pont, ezért teljesül az alábbi egyenletrendszer:

$$0,5 = \alpha \cdot 2^2 + \beta$$

$$1,5 = \alpha \cdot 2^3 + \beta.$$

A második egyenletből kivonva az első azt kapjuk, hogy  $\alpha = \frac{1}{4}$ , amit ha behelyettesítünk például az első egyenletbe  $\beta = -\frac{1}{2}$  adódik. Így tehát azt kapjuk, hogy

$$r(x) = \frac{1}{4} \cdot 2^x - \frac{1}{2}.$$

- A feladat feltételei szerint a serpenyőre kifejtett nyomóerő  $f(x)$  intenzitása, és a hasáb keresztmetszetét jellemző  $r(x)$  függvénygörbe közötti összefüggés:

$$\begin{aligned} f(x) &= -l \cdot \rho \cdot g \cdot r(x) = -0,5 \cdot 5\,000 \cdot 9,81 \cdot (0,25 \cdot 2^x - 0,5) = \\ &= -(6\,131,25 \cdot 2^x - 12\,262,5). \end{aligned}$$

A nyomóerő

$$\begin{aligned} F &= \int_2^3 f(x) dx = \int_2^3 6\,131,25 \cdot 2^x - 12\,262,5 dx = \\ &= \left[ \frac{6\,131,25}{\ln 2} \cdot 2^x - 12\,262,5x \right]_2^3 = -23\,120 \text{ [N]}. \end{aligned}$$

c) A skaláris forgatónyomaték:

$$\begin{aligned} M_O &= - \int_2^3 x \cdot f(x) dx = - \int_2^3 6\,131,25 \cdot x \cdot 2^x - 12\,262,5x dx = \\ &= - \int_2^3 6\,131,25 \cdot (x \cdot 2^x - 2x) dx. \end{aligned}$$

Az  $x \cdot 2^x$  függvény egy primitív függvényét a parciális integrálás képletének felhasználásával tudjuk meghatározni:

$$\int x \cdot 2^x dx = x \cdot \frac{2^x}{\ln 2} - \int \frac{2^x}{\ln 2} dx = x \cdot \frac{2^x}{\ln 2} - \frac{2^x}{(\ln 2)^2}.$$

Ezt felhasználva

$$M_O = 6\,131,25 \cdot \left[ x \cdot \frac{2^x}{\ln 2} - \frac{2^x}{(\ln 2)^2} - x^2 \right]_2^3 \approx 59\,827 \text{ [J]}.$$

d) Az eredő támadáspontjának  $x_F$  koordinátája:

$$x_F = \frac{\int_2^3 x \cdot f(x) dx}{\int_2^3 f(x) dx} \approx \frac{59\,827}{23\,120} \approx 2,59.$$

## 22. Mozgástani feladatok

22.1. **Tétel.** Ha  $v: [0; b] \rightarrow \mathbb{R}$  folytonos függvény egy test mozgását leíró sebesség-idő függvény és ismert a test helye a  $t_0$  időpillanatban, akkor a hely-idő függvény

$$s(t) = s(t_0) + \int_{t_0}^t v(\tau) \, d\tau.$$

*Bizonyítás:* Mivel  $\dot{s}(t) = v(t)$ , azaz  $s$  primitív függvénye a  $v$  függvénynek, ezért

$$\int_{t_0}^t v(\tau) \, d\tau = [s(\tau)]_{t_0}^t = s(t) - s(t_0).$$

A kapott egyenletet átrendezve azt kapjuk, hogy

$$s(t) = s(t_0) + \int_{t_0}^t v(\tau) \, d\tau,$$

amivel igazoltuk az állítást. ■

22.2. **Tétel.** Ha  $a: [0; b] \rightarrow \mathbb{R}$  folytonos függvény egy test mozgását leíró gyorsulás-idő függvény és ismert a test sebessége a  $t_0$  időpillanatban, akkor a sebesség-idő függvény

$$v(t) = v(t_0) + \int_{t_0}^t a(\tau) \, d\tau.$$

*Bizonyítás:* Mivel  $\dot{v}(t) = a(t)$ , azaz  $v$  primitív függvénye az  $a$  függvénynek, ezért

$$\int_{t_0}^t a(\tau) \, d\tau = [v(\tau)]_{t_0}^t = v(t) - v(t_0).$$

A kapott egyenletet átrendezve azt kapjuk, hogy

$$v(t) = v(t_0) + \int_{t_0}^t a(\tau) \, d\tau,$$

amivel igazoltuk az állítást. ■

22.3. **Példa.** Egy hajó a tenger fenekéről a

$$v(t) = A \cdot (1 - e^{-Bt})$$

sebesség-idő függvény szerint emelkedik. A magasságot a tenger fenekétől mérjük és feltételezzük, hogy  $s(0) = 0$  [m]. Ekkor a hely-idő függvény

$$\begin{aligned} s(t) &= s(t_0) + \int_0^t v(\tau) \, d\tau = s(t_0) + \int_0^t A \cdot (1 - e^{-B\tau}) \, d\tau = \\ &= \int_0^t A \cdot (1 - e^{-B\tau}) \, d\tau = A \cdot \left[ \tau + \frac{e^{-B\tau}}{B} \right]_0^t = \\ &= A \cdot \left( t + \frac{e^{-Bt}}{B} - \frac{1}{B} \right). \end{aligned}$$

A megfelelő adatok behelyettesítése után azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} s(t) &= 6,412 \cdot \left( t + \frac{e^{-0,459t}}{0,459} - \frac{1}{0,459} \right) = \\ &= 6,412t - 13,97e^{-0,459t} - 13,97 \text{ [m]}. \end{aligned}$$

## 23. Munkavégzés

23.1. **Megjegyzés.** Ha egy test  $s$  utat tesz meg valamely állandó nagyságú, a mozgás irányában ható  $F$  erő hatására akkor az erő által a testen végzett  $W$  munkát a

$$W = F \cdot s$$

képlet definiálja.

23.2. **Tétel.** Legyen  $F: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$  folytonos függvény. Az  $x$  irányú, változó nagyságú  $F(x)$  erő által az  $x = a$  és  $x = b$  között végzett munka

$$W = \int_a^b F(x) dx.$$

*Bizonyítás:* Tegyük fel, hogy a munkát végző erő egy egyenes mentén hat, ami legyen az  $x$ -tengely. Legyen az  $[a; b]$  intervallum egy beosztása

$$d = \{[x_0; x_1]; [x_1; x_2]; \dots; [x_{n-1}; x_n]\}$$

és legyen  $\xi_i \in [x_{i-1}; x_i]$  minden  $i = 1, 2, \dots, n$  esetén. Mivel  $F(x)$  folytonos függvény, ezért ha  $x_{i-1}$  és  $x_i$  közel van egymáshoz, akkor az  $F(x_{i-1})$  és  $F(x_i)$  is közel vannak egymáshoz, azaz a függvényérték nem változik sokat. Tehát a részintervallumokon végzett munka az  $F(\xi_i) \cdot (x_i - x_{i-1})$  szorzattal közelíthető. Ezt minden részintervallumra elvégezve azt kapjuk, hogy

$$W \approx \sum_{i=1}^n F(\xi_i) \cdot (x_i - x_{i-1}).$$

Ha az osztópontok számával végtelenhez tartunk, akkor

$$W \approx \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n F(\xi_i) \cdot (x_i - x_{i-1})$$

adódik, így

$$W = \int_a^b F(x) dx,$$

amivel igazoltuk az állítást. ■

23.3. **Példa.** Az  $F(x) = \frac{1}{x^2}$  [N] erő által az  $x = 1$  [m] és  $x = 2$  [m] koordinátájú pontok között végzett munka

$$W = \int_1^2 \frac{1}{x^2} dx = \left[ -\frac{1}{x} \right]_1^2 = -\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2} \text{ [J]}.$$

23.4. **Tétel.** Ha egy ideális rugót természetes (nyújtatlan) állapotához képest  $x$  hosszúsággal összenyomjuk vagy megnyújtjuk, akkor a rugóerő arányos lesz  $-x$ -szel, azaz

$$F(x) = -D \cdot x.$$

A  $D$  konstans *rugóállandó*nak nevezzük.

23.5. **Példa.** Egy rugó hossza megfeszítetlen állapotban 20 [cm]. Ahhoz, hogy 30 [cm] hosszúságúra megnyújtsuk 40 [N] erőre van szükség. Kiszámoljuk, hogy mennyi munka szükséges ahhoz, hogy 35 [cm]-ről 38 [cm]-re nyújtsuk a rugót?

A rugóállandót az

$$|F(x)| = D \cdot x$$

összefüggésből határozhatjuk meg. Jelen esetben a rugó megnyúlása 0, 1 méter, így a

$$40 = D \cdot 0,1$$

egyenlethez jutunk, amiből  $D = 400 \left[ \frac{\text{N}}{\text{m}} \right]$  adódik. Tehát  $F(x) = -400x$ , így a végzett munka

$$W = - \int_{0,15}^{0,18} 400x dx = - \left[ 200x^2 \right]_{0,15}^{0,18} = -1,98 \text{ [J]}.$$

## 24. Riemann-integrál megjelenése a közgazdaságtanban

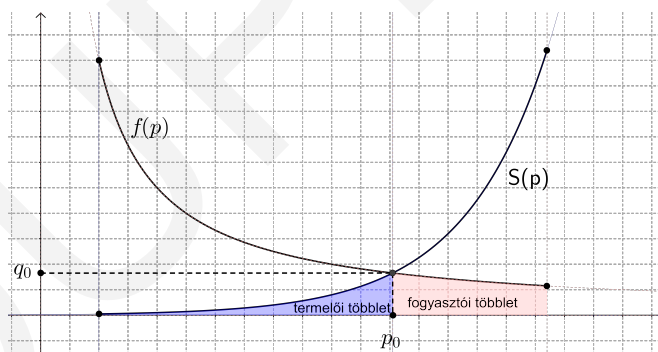
**24.1. Definíció.** A *fogyasztói többlet* a mikroökonómiában fontos fogalom. Egy jószág megvásárlásakor fellépő többlet annak a maximális pénzösszegnek, amit a vásárló (fogyasztó) a termékért még éppen hajlandó megfizetni, valamint a termék tényleges vételárának a különbsége. A fogyasztói többlet tehát pénzben fejezi ki azt a „többletet”, „hasznot”, amit a fogyasztó nyer a jószág megvásárlásával. Az előző fogalomhoz hasonlóan definiálható a *termelői többlet* is.

**24.2. Tétel.** Amennyiben  $f$  egy vállalat adott termékéhez tartozó keresleti függvény és  $S$  a kínálati függvény. Továbbá  $p_0$  az egyensúlyi ár és  $q_0$  az egyensúlyi mennyiség, akkor a termelői többlet:

$$\int_{p_{min}}^{p_0} f(p) dp,$$

a fogyasztói többlet:

$$\int_{p_0}^{p_{max}} S(p) dp.$$

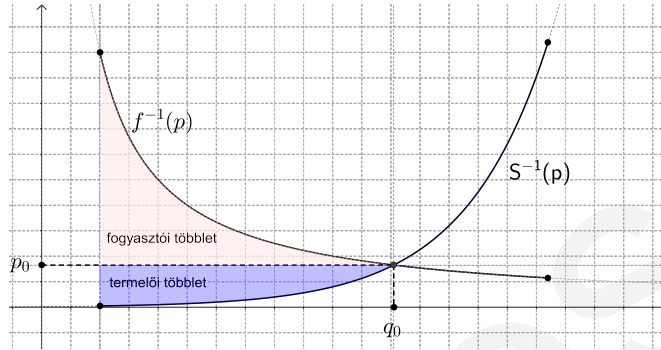


**24.3. Tétel.** Amennyiben  $f^{-1}$  egy vállalat adott termékéhez tartozó inverz keresleti függvény és  $S^{-1}$  az inverz kínálati függvény. Továbbá  $p_0$  az egyensúlyi ár és  $q_0$  az egyensúlyi mennyiség, akkor a termelői többlet:

$$p_0 \cdot q_0 - \int_{q_{min}}^{q_0} f^{-1}(q) dq,$$

a fogyasztói többlet:

$$\int_{q_{min}}^{q_0} S^{-1}(q) \, dq - p_0 \cdot q_0.$$



**24.4. Megjegyzés.** Amennyiben  $MC(q)$  egy határköltség függvény és  $q_1 < q_2$  olyan valós számok, hogy  $q_1$  és  $q_2$  eleme az  $MC(q)$  értelmezési tartományának, úgy az

$$\int_{q_1}^{q_2} MC(q) \, dq$$

érték azt adja meg, hogy mennyivel nő a költség, ha a  $q_1$  mennyiség helyett  $q_2$  mennyiséget állítunk elő.

**24.5. Példa.** Egy vállalat adott termékéhez tartozó keresleti függvénye:

$$f(p) = \frac{90}{p} - 2 \quad (1 \leq p \leq 45),$$

kínálati függvénye

$$S(p) = p - 1 \quad (1 \leq p \leq 45).$$

Az árakat dollárban értjük, a mennyiséget darabban.

- Számoljuk ki az egyensúlyi árat és az egyensúlyi mennyiséget!
- Határozzuk meg a termelői többletet!
- Számoljuk ki a fogyasztói többletet!

**Megoldás:**

a) Az egyensúlyi árat az

$$f(p) = S(p)$$

egyenlet megoldása adja, azaz

$$\frac{90}{p} - 2 = p - 1.$$

Mindkét oldalt szorozva a közös nevezővel, majd összevonva és nullára rendezve az egyenletet azt kapjuk, hogy

$$p^2 + p - 90 = 0.$$

A másodfokú egyenlet megoldóképletét alkalmazva

$$p_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 360}}{2} = \frac{-1 \pm 19}{2}$$

adódik, amiből  $p > 0$  miatt azt kapjuk, hogy  $p = 9$ . Ezt felhasználva az egyensúlyi mennyiség

$$f(9) = \frac{90}{9} - 2 = 8 \text{ darab.}$$

b) Mivel

$$\begin{aligned} \int_1^9 p - 1 \, dp &= \left[ \frac{1}{2} \cdot p^2 - p \right]_1^9 = \\ &= \frac{81}{2} - 9 - \left( \frac{1}{2} - 1 \right) = 32, \end{aligned}$$

ezért a termelői többlet 32 dollár.

c) Mivel

$$\begin{aligned} \int_9^{45} \frac{90}{p} - 2 \, dp &= [90 \ln p - 2p]_9^{45} = \\ &= 90 \ln 45 - 90 - (90 \ln 9 - 18) \approx 72,85, \end{aligned}$$

ezért a fogyasztói többlet 72,85 dollár.

## 25. Lorenz-függvény

**25.1. Definíció.** Legyen  $L: [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$  folytonos függvény, amely teljesíti az alábbi tulajdonságokat

- az  $L(x)$  függvény értelmezési tartománya a  $[0; 1]$  intervallum, ugyanis ez feleltethető meg a  $0 \rightarrow 100\%$ -nak;
- $L(0) = 0$ , mert nincs olyan háztartás, amely nem kap pénzt;
- $L(1) = 1$ , mert az egész jövedelmet a teljes lakosság kapja meg;
- $L(x) \leq x$  minden  $x \in [0; 1]$  esetén;
- az  $L(x)$  függvény értékkészlete a  $[0; 1]$  intervallum;
- az  $L(x)$  függvény szigorúan monoton növekvő.

**25.2. Megjegyzés.** A Lorenz függvény grafikonja az első síknegyedbeli egységnégyzetben helyezkedik el.

**25.3. Megjegyzés.** A Lorenz függvényt közgazdászok a társadalmi egyenlőtlenség egyik mércéjeként tartják számon. Max O. Lorenz a társadalmi vagyoneelosztás egyenlőtlenségének bemutatására vezette be a függvényt.

**25.4. Megjegyzés.** Az  $L(x)$  Lorenz függvény megadja, hogy a háztartások legszegényebb  $x \cdot 100\%$ -a a jövedelem  $L(x) \cdot 100\%$ -ával rendelkezik.

**25.5. Példa.** Például, ha  $L(x)$  egy Lorenz függvény és  $L(0, 25) = 0,10$ , akkor ez azt jelenti, hogy a háztartások legszegényebb 25% a teljes jövedelem 10%-ával rendelkezik.

Ha  $L(0, 90) = 0,55$ , akkor ez azt jelenti, hogy a legszegényebb 90% a teljes jövedelem 55%-ával rendelkezik. Ekvivalens módon ez azt is jelenti, hogy a leggazdagabb 10% a teljes jövedelem 45%-ával rendelkezik.

**25.6. Megjegyzés.** A Lorenz függvény vizsgálatánál két szélsőséges eset van:

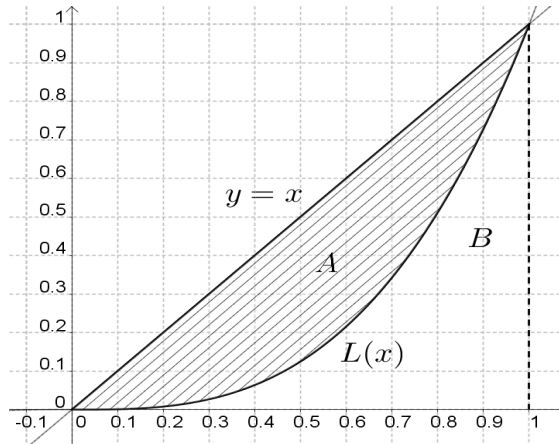
- a) *A bevétel abszolút egyenlő elosztása vagy más szóval tökéletesen egyenlő jövedelem elosztás.* Mindenki azonosan részesül a teljes jövedelemből. Ezt a szituációt az  $L(x) = x$  függvény írja le, azaz, a háztartások  $x\%$ -a a jövedelem  $x\%$ -ával rendelkezik.
- b) *A bevétel abszolút egyenlőtlen elosztása.* Ebben az esetben csak egyetlen személynek van jövedelme, aki a teljes bevételt megkapja. Ebben az esetben

a Lorenz függvény

$$L(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } 0 \leq x < 1 \\ 1, & \text{ha } x = 1. \end{cases}$$

25.7. **Definíció.** *Gini-index*nek nevezzük a Lorenz-görbe és az egységnégyzet átlója által bezárt terület és a fél négyzet területének arányát

25.8. **Megjegyzés.** Legyen  $A$  az  $y = x$  egyenes és az  $L(x)$  Lorenz függvény által bezárt terület:



Legyen  $B$  a Lorenz függvény grafikonjának az  $x$ -tengellyel bezárt területe. Ekkor a Gini-index

$$G = \frac{A}{A + B}.$$

Since  $A + B = \frac{1}{2}$ , ezért

$$G = \frac{A}{\frac{1}{2}} = 2A.$$

25.9. **Megjegyzés.** A Gini-index értéke 0 és 1 között van.

25.10. **Tétel.** A Gini-index az  $L(x)$  Lorenz függvényből kiszámolható az alábbi módon:

$$G = 1 - 2 \cdot \int_0^1 L(x) dx.$$

*Bizonyítás:* Az előző megjegyzés eredményét ábráját és jelöléseit használva azt kapjuk, hogy

$$G = 2A = 2 \cdot \int_0^1 x - L(x) dx.$$

A Riemann-integrál tulajdonságai alapján

$$\begin{aligned} G &= 2 \cdot \int_0^1 x dx - 2 \cdot \int_0^1 L(x) dx = \\ &= 2 \cdot \left[ \frac{x^2}{2} \right]_0^1 - 2 \cdot \int_0^1 L(x) dx = \\ &= 1 - 2 \cdot \int_0^1 L(x) dx \end{aligned}$$

adódik, amivel igazoltuk az állítást. ■

**25.11. Megjegyzés.** Tökéletes jövedelemeloszlás esetén, azaz ha  $L(x) = x$ , azt kapjuk, hogy  $A = 0$ , így a Gini-index  $G = 2A = 0$ .

A másik szélsőséges esetben, tehát amikor abszolút egyenlőtlen jövedelemelosztás van, akkor  $B = 0$  és  $A = \frac{1}{2}$ , így a Gini-index értéke  $G = 1$ .

**25.12. Példa.** Az

$$L(x) = x^2$$

függvény Lorenz függvény, mert

- $L(0) = 0^2 = 0$ ;
- $L(1) = 1^2 = 1$ ;
- $L(x) = x^2 \leq x$  minden  $x \in [0; 1]$ ,
- $L(x)$  értékészlete  $[0; 1]$ ;
- ha  $x_1 < x_2$ , akkor  $x_1^2 < x_2^2$ , így  $L(x)$  szigorúan monoton növekvő.

Mivel

$$\int_0^1 x^2 dx = \left[ \frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{1}{3},$$

ezért a Gini-index

$$G = 1 - 2 \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3}.$$

DUPress

## 26. Folyamatos jövedelemáramlás diszkontált jelenértéke és jövőértéke

**26.1. Definíció.** A *diszkontált jelenérték* (*present discounted value*, rövidítve PDV) a pénz időértékét kifejező fogalom. Megmutatja, hogy a jövőben egy egységnyi pénz ma hány egységnyit ér.

Fordított logikával hasonló fogalomhoz, a pénz *diszkontált jövőértékéhez* (*future discounted value*, rövidítve FDV) juthatunk: ma egy egységnyi pénz adott idő elteltével mennyit fog érni.

**26.2. Tétel.** Legyen  $T$  pozitív valós szám és  $f: [0; T] \rightarrow \mathbb{R}$  folytonos függvény. Az  $f(t)$  dollár per éves sebességű,  $[0; T]$  időintervallumban eszközölt folyamatos jövedelemáram diszkontált jelenértéke a 0 időpillanatban rögzített  $r$  kamatláb melletti folyamatos tőkésítéssel

$$PDV = \int_0^T f(t) \cdot e^{-r \cdot t} dt.$$

*Bizonyítás:* Tegyük fel, hogy a  $t = 0$  időpillanattól kezdődően a  $t = T$  időpillanatig folyamatosan jutunk jövedelemhez úgy, hogy a  $t$  időpillanatban  $f(t)$  dollár per éves sebességgel „áramlik” a jövedelem.

Tegyük fel továbbá, hogy a kamatot  $r$  kamatláb mellett folyamatosan tőkésítjük. Jelölje  $P(t)$  a  $[0; t]$  időintervallumban történő kifizetések összejelenértékét. Ez azt jelenti, hogy  $P(t)$  pénzmennyiséget kell befektetnünk a  $t$  időpillanatban ahhoz, hogy fedezze az  $f(t)$  jövedelemáram folyamatos befektetését a  $[0; T]$  intervallumon.

Ha  $\Delta t$  tetszőleges szám, akkor a  $[t; t + \Delta t]$  intervallumban kapott pénz jelenértéke  $P(t + \Delta t) - P(t)$ . Ha  $\Delta t$  elég kicsi, akkor az ebben az időintervallumban kapott jövedelem  $f(t) \cdot \Delta t$ , diszkontált jelenértéke pedig  $f(t) \cdot e^{-r \cdot t} \cdot \Delta t$ -vel közelíthető. Tehát

$$P(t + \Delta t) - P(t) \approx f(t) \cdot e^{-r \cdot t} \cdot \Delta t,$$

így

$$\frac{P(t + \Delta t) - P(t)}{\Delta t} \approx f(t) \cdot e^{-r \cdot t}.$$

A közelítés annál jobb, minél kisebb a  $\Delta t$ . Ha  $\Delta t \rightarrow 0$ , akkor azt kapjuk, hogy

$$P'(t) = f(t) \cdot e^{-r \cdot t},$$

így a Newton-Leibniz tétel szerint

$$P(t) - P(0) = \int_0^t f(t) \cdot e^{-r \cdot t} dt.$$

Mivel  $P(0) = 0$ , ezért

$$PDV = \int_0^T f(t) \cdot e^{-r \cdot t} dt,$$

amivel igazoltuk az állítást. ■

**26.3. Következmény.** Legyen  $T$  pozitív valós szám és  $f: [0; T] \rightarrow \mathbb{R}$  folytonos függvény. Az  $f(t)$  dollár per éves sebességű,  $[0; T]$  időintervallumban eszközölt folyamatos jövedelemáram diszkontált jövőértéke a  $T$  időpillanatban rögzített  $r$  kamatláb melletti folyamatos tőkésítéssel

$$FDV = \int_0^T f(t) \cdot e^{r \cdot (T-t)} dt.$$

*Bizonyítás:* A 26.2 tétel eredménye szerint

$$PDV = \int_0^T f(t) \cdot e^{-r \cdot t} dt.$$

Ha  $r$  kamatláb mellett folyamatosan tőkésítünk, akkor a  $T$  időpillanatban a diszkontált jövőérték

$$FDV = e^{r \cdot T} \cdot \int_0^T f(t) \cdot e^{-r \cdot t} dt.$$

Mivel  $e^{r \cdot T}$  konstans, ezért

$$FDV = \int_0^T e^{r \cdot T} \cdot f(t) \cdot e^{-r \cdot t} dt.$$

A hatványozás azonosságait alkalmazva azt kapjuk, hogy

$$FDV = \int_0^T f(t) \cdot e^{r \cdot (T-t)} dt,$$

amivel igazoltuk az állítást. ■

**26.4. Példa.** Ha 10 éven keresztül, évi 1 000 dollár jövedelemmel rendelkezünk és a kamat évente 8%.

A diszkontált jelenérték

$$\begin{aligned} PDV &= \int_0^{10} 1\,000 \cdot e^{-0,08t} dt = \left[ \frac{1\,000 \cdot e^{-0,08t}}{-0,08} \right]_0^{10} = \\ &= \frac{1\,000}{0,08} \cdot (1 - e^{-0,8}) \approx 3\,935 \text{ [dollár]}. \end{aligned}$$

A diszkontált jövőérték

$$\begin{aligned} FDV &= \int_0^{10} 1\,000 \cdot e^{0,08 \cdot (10-t)} dt = \left[ \frac{1\,000 \cdot e^{0,08 \cdot (10-t)}}{0,08} \right]_0^{10} = \\ &= \frac{1\,000}{-0,08} \cdot (1 - e^{0,8}) \approx 15\,319 \text{ [dollár]}. \end{aligned}$$

## 27. Numerikus integrálási módszerek

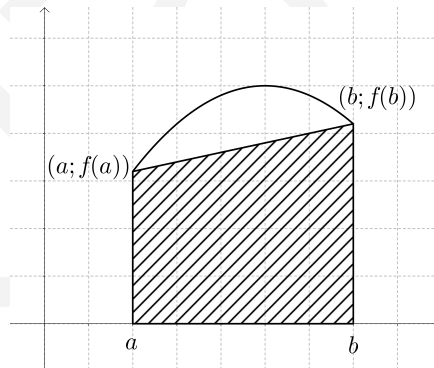
27.1. **Megjegyzés.** Az  $\int_a^b f(x) dx$  integrál kiszámolása a Newton-Leibniz tétel alkalmazásával sem mindig egyszerű feladat. Sok esetben például az  $f$  függvény primitív függvényét nem is tudjuk zárt alakban felírni.

Amikor a primitív függvény megkeresése nehéz vagy akár lehetetlen feladat, akkor az integrál közelítő értékének meghatározása a cél. Ebben a fejezetben két olyan módszerre ismerkedünk meg, amely segítségével egy folytonos függvény Riemann-integráljának közelítő értékét számolhatjuk ki. Az egyik módszer a trapéz formula, a másik módszer a Simson formula.

27.2. **Trapéz formula.** Legyen  $f: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$  folytonos függvény. Ekkor

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{f(a) + f(b)}{2} \cdot (b - a).$$

Tekintsük azt a trapézt, amelyet az  $(a; f(a))$ ,  $(b; f(b))$ ,  $(a; 0)$  és  $(b; 0)$  csúcsok által meghatározott trapézt.



Ennek a trapéznek a területe elemi úton is kiszámolható:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{f(a) + f(b)}{2} \cdot (b - a),$$

amivel igazoltuk az állítást.

**27.3. Tétel.** Ha  $f: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$  kétszer folytonosan differenciálható függvény, akkor

$$\left| \int_a^b f(x) dx - \frac{f(a) + f(b)}{2} \cdot (b - a) \right| \leq \frac{(b - a)^3}{12} \cdot \max_{a \leq x \leq b} |f''(x)|.$$

Tehát a trapéz formulával való közelítés esetén a közelítés maximális hibája

$$\frac{(b - a)^3}{12} \cdot \max_{a \leq x \leq b} |f''(x)|.$$

**27.4. Példa.** Tekintsük az  $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$  függvényt a  $[0; 1]$  intervallumon! Kiszámoljuk az

$$\int_0^1 \sqrt{x^2 + 1} dx$$

Riemann-integrál közelítő értékét trapéz formulával:

$$\int_0^1 \sqrt{x^2 + 1} dx \approx \frac{f(0) + f(1)}{2} \cdot (1 - 0) = \frac{1 + \sqrt{2}}{2}.$$

Mivel

$$f'(x) = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{x^2 + 1}} \cdot 2x = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}.$$

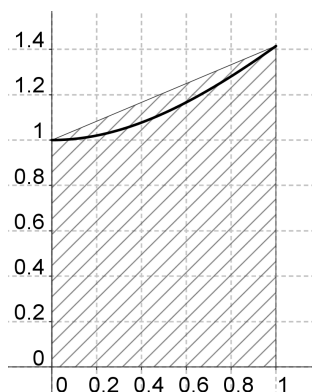
és így

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{1 \cdot \sqrt{x^2 + 1} - x \cdot \frac{1}{2 \cdot \sqrt{x^2 + 1}} \cdot 2x}{x^2 + 1} = \frac{\sqrt{x^2 + 1} - \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + 1}}}{x^2 + 1} = \\ &= \frac{x^2 + 1 - x^2}{(x^2 + 1) \cdot \sqrt{x^2 + 1}} = \frac{1}{(x^2 + 1) \cdot \sqrt{x^2 + 1}}, \end{aligned}$$

ezért

$$\max_{0 \leq x \leq 1} \frac{1}{(x^2 + 1) \cdot \sqrt{x^2 + 1}} = 1,$$

így a közelítés maximális hibája 1.



27.5. **Tétel.** Ha  $f: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$  folytonos függvény és az

$$\int_a^b f(x) dx$$

Riemann-integrál közelítő értéknek trapéz formulával való kiszámolását úgy végezzük el, hogy az intervallumot  $n$  darab egyenlő részre osztjuk fel és az egyes részintervallumokra alkalmazzuk a trapéz formulát, akkor

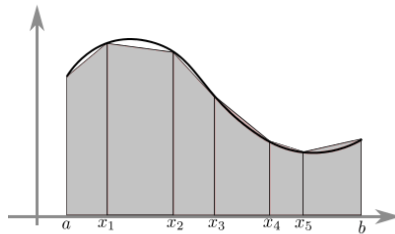
$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{2n} \cdot (f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + \dots + f(x_n)).$$

*Bizonyítás:* Tekintsük az  $[a; b]$  intervallumnak az

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$$

ekvidisztáns beosztását. Ekkor az egyes intervallumok hossza

$$\frac{b-a}{n}.$$



Minden részintervallumon elvégezve a megfelelő integrál trapéz formulával való közelítését azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &\approx \frac{b-a}{n} \cdot \frac{f(x_0) + f(x_1)}{2} + \frac{b-a}{n} \cdot \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} + \\ &+ \frac{b-a}{n} \cdot \frac{f(x_{n-1}) + f(x_n)}{2} = \\ &= \frac{b-a}{2n} \cdot (f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + \dots + f(x_n)), \end{aligned}$$

amivel igazoltuk az állítást. ■

**27.6. Tétel.** Ha  $f: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$  kétszer folytonosan differenciálható függvény, és az

$$\int_a^b f(x) dx$$

Riemann-integrál közelítő értékének trapéz formulával való kiszámolását úgy végezzük el, hogy az intervallumot  $n$  darab egyenlő részre osztjuk fel és az egyes részintervallumokra alkalmazzuk a trapéz formulát, akkor a közelítés maximális hibája

$$\frac{(b-a)^3}{12n^2} \cdot \max_{a \leq x \leq b} |f''(x)|.$$

**27.7. Megjegyzés.** Az előző tétel eredményében

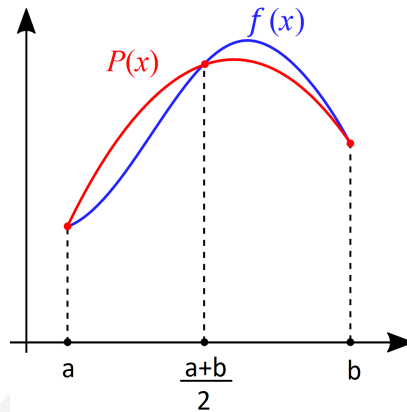
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(b-a)^3}{12n^2} \cdot \max_{a \leq x \leq b} |f''(x)| = 0,$$

így az osztópontok számának növelésével a közelítés javul, azaz minél több részre osztjuk az alap intervallumot, annál jobb lesz a közelítés.

27.8. **Simpson formula.** Legyen  $f: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$  folytonos függvény. Ekkor

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{6} \cdot \left( f(a) + 4 \cdot f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right).$$

A bizonyítás lényege az, hogy felírjuk az  $(a; f(a))$ ,  $(\frac{a+b}{2}; f(\frac{a+b}{2}))$  és  $(b; f(b))$  pontokra illeszkedő Lagrange-interpolációs polinomot, majd a kapott másodfokú függvényt integráljuk.



A kapott integrállal közelítjük az eredeti függvény Riemann-integrálját.

27.9. **Példa.** Tekintsük az  $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$  függvényt a  $[0; 1]$  intervallumon! Kiszámoljuk az

$$\int_0^1 \sqrt{x^2 + 1} dx$$

Riemann-integrál közelítő értékét Simpson formulával:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \sqrt{x^2 + 1} dx &\approx \frac{1-0}{6} \cdot (f(0) + 4 \cdot f(0,5) + f(1)) = \\ &= \frac{1}{6} \cdot (1 + 4 \cdot \sqrt{1,25} + \sqrt{2}) \approx 1,148. \end{aligned}$$

27.10. **Megjegyzés.** A Simpson formula pontosabb értéket ad, mint a trapéz formula.

27.11. **Tétel.** Ha  $f: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$  négyszer folytonosan differenciálható függvény, akkor

$$\left| \int_a^b f(x) dx - \frac{b-a}{6} \cdot \left( f(a) + 4 \cdot f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right) \right| \leq \frac{(b-a)^5}{2880} \cdot \max_{a \leq x \leq b} |f^{(4)}(x)|.$$

Tehát a Simpson formulával való közelítés esetén a közelítés maximális hibája

$$\frac{(b-a)^5}{2880} \cdot \max_{a \leq x \leq b} |f^{(4)}(x)|.$$

27.12. **Tétel.** Ha  $f: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$  folytonos függvény és az

$$\int_a^b f(x) dx$$

Riemann-integrál közelítő értéknek Simpson formulával való kiszámolását úgy végezzük el, hogy az intervallumot  $n$  darab egyenlő részre osztjuk fel és az egyes részintervallumokra alkalmazzuk a Simpson formulát, akkor

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{6n} \cdot (f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + 2f(x_4) + \dots + f(x_{2n})).$$

27.13. **Tétel.** Ha  $f: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$  négyszer folytonosan differenciálható függvény és az

$$\int_a^b f(x) dx$$

Riemann-integrál közelítő értékének Simpson formulával való kiszámolását úgy végezzük el, hogy az  $[a; b]$  intervallumot  $n$  darab egyenlő részre osztjuk fel és az egyes részintervallumokra alkalmazzuk a Simpson formulát, akkor a közelítés maximális hibája

$$\frac{(b-a)^5}{2880n^4} \cdot \max_{a \leq x \leq b} |f^{(4)}(x)|.$$

27.14. **Példa.** Tekintsük

$$\int_1^4 \frac{e^x}{x} dx$$

integrált! Közelítsük az integrál értékét Simpson formulával úgy, hogy az  $[1; 4]$  intervallumot  $2n = 6$  részintervallumra osztjuk!

Az keletkező alappontok

$$\begin{aligned} x_0 &= 1; & x_3 &= 2,5; \\ x_1 &= 1,5; & x_4 &= 3; \\ x_2 &= 2; & x_5 &= 3,5. \end{aligned}$$

A Simpson formula általános képlete szerint

$$\int_1^4 f(x) dx \approx \frac{4-1}{6 \cdot 3} \cdot (f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + 2f(x_4) + 4f(x_5) + f(x_6)).$$

Az alábbi táblázat mutatja a függvényértékeket az  $x_i$  helyeken:

$x_i$	$f(x_i)$
1	$\frac{e}{1} = 2,72$
1,5	$\frac{e^{1,5}}{1,5} = 2,99$
2	$\frac{e^2}{2} = 3,69$
2,5	$\frac{e^{2,5}}{2,5} = 4,87$
3	$\frac{e^3}{3} = 6,7$
3,5	$\frac{e^{3,5}}{3,5} = 9,46$
4	$\frac{e^4}{4} = 13,65$

A Simpson formula képletébe behelyettesítve az adatokat azt kapjuk, hogy

$$\int_1^4 \frac{e^x}{x} dx \approx \frac{1}{6} \cdot (2,72 + 4 \cdot 2,99 + 2 \cdot 3,69 + 4 \cdot 4,87 + 2 \cdot 6,7 + 4 \cdot 9,46 + 13,65) \approx 17,74.$$

## 28. Improprius integrálok

**28.1. Definíció.** Legyen  $a \in \mathbb{R}$  és  $f: [a; \infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  folytonos függvény. Ekkor definíció szerint

$$\int_a^{\infty} f(x) dx = \lim_{c \rightarrow \infty} \int_a^c f(x) dx.$$

**28.2. Példa.** Az

$$\int_5^{\infty} \frac{6}{x^2} dx$$

integrál esetén az előbbi definícióját felhasználva azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \int_5^{\infty} \frac{6}{x^2} dx &= \lim_{c \rightarrow \infty} \int_5^c \frac{6}{x^2} dx = \lim_{c \rightarrow \infty} \int_5^c 6 \cdot x^{-2} dx = \\ &= \lim_{c \rightarrow \infty} \left[ -\frac{6}{x} \right]_5^c = \lim_{c \rightarrow \infty} \left( -\frac{6}{c} + \frac{6}{5} \right) = \frac{6}{5}, \end{aligned}$$

így az improprius integrál értéke 1.

**28.3. Definíció.** Legyen  $b \in \mathbb{R}$  és  $f: ]-\infty; b] \rightarrow \mathbb{R}$  folytonos függvény. Ekkor definíció szerint

$$\int_{-\infty}^b f(x) dx = \lim_{c \rightarrow -\infty} \int_c^b f(x) dx.$$

**28.4. Példa.** Az

$$\int_{-\infty}^0 e^x dx$$

integrál értéke

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^0 e^x dx &= \lim_{c \rightarrow -\infty} \int_c^0 e^x dx = \lim_{c \rightarrow -\infty} [e^x]_c^0 = \\ &= \lim_{c \rightarrow -\infty} (1 - e^c) = 1. \end{aligned}$$

**28.5. Definíció.** Legyen  $f: ]-\infty; \infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  folytonos függvény. Ekkor definíció szerint

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \lim_{\substack{c \rightarrow -\infty \\ d \rightarrow \infty}} \int_c^d f(x) dx.$$

**28.6. Példa.** Az

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx$$

integrál értéke az előbbi definíció szerint

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx &= \lim_{\substack{c \rightarrow -\infty \\ d \rightarrow \infty}} \int_c^d \frac{1}{1+x^2} dx = \lim_{\substack{c \rightarrow -\infty \\ d \rightarrow \infty}} [\arctg x]_c^d = \\ &= \lim_{\substack{c \rightarrow -\infty \\ d \rightarrow \infty}} (\arctg d - \arctg c) = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi. \end{aligned}$$

**28.7. Definíció.** Legyen  $f: [a; b[ \rightarrow \mathbb{R}$  folytonos függvény és  $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = \infty$  vagy  $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = -\infty$ . Ekkor definíció szerint

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{c \rightarrow b^-} \int_a^c f(x) dx.$$

**28.8. Példa.** Az

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt[3]{x}} dx$$

integrál értéke az előbbi definíciót felhasználva

$$\begin{aligned} \int_{-1}^0 \frac{1}{\sqrt[3]{x}} dx &= \int_{-1}^0 x^{-\frac{1}{3}} dx = \lim_{c \rightarrow 0} \int_{-1}^c x^{-\frac{1}{3}} dx = \\ &= \lim_{c \rightarrow 0} \left[ \frac{3}{2} \sqrt[3]{x^2} \right]_{-1}^c = \lim_{c \rightarrow 0} \left( \frac{3}{2} \sqrt[3]{c^2} - \frac{3}{2} \sqrt[3]{1} \right) = -\frac{3}{2}, \end{aligned}$$

így az improprius integrál értéke  $-\frac{3}{2}$ .

**28.9. Definíció.** Legyen  $f: ]a; b] \rightarrow \mathbb{R}$  folytonos függvény és  $\lim_{x \rightarrow a+} f(x) = \infty$  vagy  $\lim_{x \rightarrow a+} f(x) = -\infty$ . Ekkor definíció szerint

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{c \rightarrow a+} \int_c^b f(x) dx.$$

**28.10. Példa.** Az

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$$

improprius integrál értéke az előbbi definíciót alkalmazva

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx &= \int_0^1 x^{-\frac{1}{2}} dx = \lim_{c \rightarrow 0} \int_c^1 x^{-\frac{1}{2}} dx = \lim_{c \rightarrow 0} [2\sqrt{x}]_c^1 = \\ &= \lim_{c \rightarrow 0} (2\sqrt{1} - 2\sqrt{c}) = 2, \end{aligned}$$

így az improprius integrál értéke 2.

**28.11. Definíció.** Legyen  $f: [a; s[ \cup ]s; b] \rightarrow \mathbb{R}$  folytonos függvény. Tegyük fel, hogy  $\lim_{x \rightarrow s-} f(x) = \infty$  vagy  $\lim_{x \rightarrow s-} f(x) = -\infty$  vagy  $\lim_{x \rightarrow s+} f(x) = \infty$  vagy  $\lim_{x \rightarrow s+} f(x) = -\infty$ . Ekkor definíció szerint

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^s f(x) dx + \int_s^b f(x) dx.$$

**28.12. Példa.** Kiszámoljuk az

$$\int_{-2}^2 \frac{1}{x^2} dx$$

integrált. Mivel az előbbi definíció szerint

$$\int_{-2}^0 \frac{1}{x^2} dx + \int_0^2 \frac{1}{x^2} dx = \lim_{c \rightarrow 0-} \int_{-2}^c \frac{1}{x^2} dx + \lim_{c \rightarrow 0+} \int_c^2 \frac{1}{x^2} dx,$$

ezért

$$\begin{aligned}\int_{-2}^2 \frac{1}{x^2} dx &= \lim_{c \rightarrow 0^-} \left[ -\frac{1}{x} \right]_{-2}^c + \lim_{c \rightarrow 0^+} \left[ -\frac{1}{x} \right]_c^2 = \\ &= \lim_{c \rightarrow 0^-} \left( -\frac{1}{c} + \frac{1}{2} \right) + \lim_{c \rightarrow 0^+} \left( -\frac{1}{2} + \frac{1}{c} \right) = \infty.\end{aligned}$$

28.13. **Definíció.** Az előző definíciókban szereplő integrálokat összefoglaló néven *improprius integráloknak* nevezzük. Azt mondjuk, hogy egy improprius integrál *konvergens*, ha a definíciójukban szereplő határérték véges.

28.14. **Megjegyzés.** Improprius integrálról akkor beszélünk, ha vagy az intervallum nem korlátos, amin integrálunk, vagy a függvény nem korlátos azon az intervallumon, amin integrálunk.

## 29. Gázok idő szerinti sebességeloszlása

**29.1. Megjegyzés.** Bármely gáz körülbelül  $10^{-10}$  [m] átmérőjű részecskék (atomok, molekulák) halmaza.

A részecskék száma  $22,41$  [dm<sup>3</sup>] normálállapotú ( $P = 1,013 \cdot 10^5$  [Pa],  $T = 273,15$  [K]) ideális gázban  $6 \cdot 10^{23}$  [db].

A nagyszámú részecske ellenére az ideális gázok igen ritkák.

**29.2. Tétel.** A gáz sebességnagyság szerinti eloszlásának sűrűségfüggvénye, amely az alábbi alakban írható fel:

$$n(v) = A \cdot v^2 \cdot e^{-B \cdot v^2},$$

ahol

$$A = N \cdot \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \left(\frac{m_0}{k \cdot T}\right)^3; \quad B = \frac{m_0}{2 \cdot k \cdot T}.$$

Az előbbi összefüggésekben  $m_0$ ,  $v$  és  $N$  a gázz részecskék tömege, sebesség-nagysága és száma,  $T$  a gáz hőmérséklete,

$$k = 1,38 \cdot 10^{-23} \left[ \frac{\text{J}}{\text{K}} \right].$$

pedig a Boltzmann állandó.

**29.3. Tétel.** Az előbbi jelöléseket megtartva a  $[v_1; v_2]$  sebességtartományba eső részecskék átlagos száma

$$N[v_1; v_2] = \int_{v_1}^{v_2} n(v) dv.$$

A részecskék átlagos sebességnagysága

$$v_{\text{átlag}} = \frac{\int_0^{\infty} v \cdot n(v) dv}{\int_0^{\infty} n(v) dv} = \int_0^{\infty} v \cdot n(v) dv,$$

valamint átlagos mozgási energiája

$$\varepsilon_{\text{átlag}} = \frac{\int_0^{\infty} \varepsilon \cdot n(v) dv}{\int_0^{\infty} n(v) dv} = \int_0^{\infty} \varepsilon \cdot n(v) dv.$$

A fenti összefüggésben  $\varepsilon$  az  $m_0$  tömegű,  $v$  nagyságú sebességgel haladó mozgási energiája, amit az

$$\varepsilon = \frac{1}{2} \cdot m_0 \cdot v^2$$

összefüggés definiál.

29.4. **Példa.** Egy tartályban  $N = 10^{12}$  darab nitrogénmolekula található. A tartályban lévő gázmolekulák tömege  $m_0 = 4,652 \cdot 10^{-25}$  [kg], a tartályban a hőmérséklet  $T = 273,15$  [K].

- Írjuk fel a gáz esetén a sebességnagyság eloszlásának  $n(v)$  sűrűségfüggvényét!
- Határozzuk meg a sűrűségfüggvény deriváltját!
- Számoljuk ki a sűrűségfüggvény második deriváltját!
- Határozzuk meg a  $v \mapsto n(v)$  függvény maximumát!
- Vizsgáljuk meg a  $v \mapsto n(v)$  függvényt konvexitás szerint, határozzuk meg a függvény inflexió helyeit!
- Vázzoljuk fel az  $n(v)$  függvény grafikonját!
- Hány darab részecske tartózkodik átlagosan a  $[100; 200]$   $\left[\frac{\text{m}}{\text{s}}\right]$  sebességtartományban?
- Adjuk meg a részecskék átlagos sebességnagyságát!
- Határozzuk meg a részecskék átlagos mozgási energiáját!

**Megoldás:**

- a) A gáz sebességnagyság szerinti sűrűségfüggvénye

$$n(v) = A \cdot v^2 \cdot e^{-B \cdot v^2},$$

ahol

$$A = N \cdot \sqrt{\frac{2}{\pi} \cdot \left(\frac{m_0}{k \cdot T}\right)^3}$$

és

$$B = \frac{m_0}{2k \cdot T}.$$

Mivel

$$\begin{aligned} A &= N \cdot \sqrt{\frac{2}{\pi} \cdot \left(\frac{m_0}{k \cdot T}\right)^3} = 10^{12} \cdot \sqrt{\frac{2}{\pi} \cdot \left(\frac{4,652 \cdot 10^{-26}}{1,38 \cdot 10^{-23} \cdot 273,15}\right)^3} \approx \\ &\approx 34\,592 \left[\frac{\text{s}^3}{\text{m}^3}\right], \end{aligned}$$

és

$$B = \frac{m_0}{2k \cdot T} = \frac{4,652 \cdot 10^{-26}}{2 \cdot 1,38 \cdot 10^{-23} \cdot 273,15} \approx 6,17 \cdot 10^{-5} \left[ \frac{\text{s}^2}{\text{m}^2} \right],$$

ezért a kapott eredményeket felhasználva azt kapjuk, hogy a gáz sebesség-nagyság szerinti sűrűségfüggvénye

$$n(v) = A \cdot v^2 \cdot e^{-B \cdot v^2} = 34\,592 \cdot v^2 \cdot e^{-6,17 \cdot 10^{-5} \cdot v^2} \left[ \frac{\text{s}}{\text{m}} \right].$$

b) Az  $n(v)$  függvény deriváltja

$$\begin{aligned} n'(v) &= 2Av \cdot e^{-B \cdot v^2} - A \cdot v^2 \cdot e^{-B \cdot v^2} \cdot 2Bv = \\ &= e^{-B \cdot v^2} \cdot (2Av - 2ABv^3). \end{aligned}$$

c) Az  $n(v)$  függvény második deriváltja

$$\begin{aligned} n''(v) &= -2Bv \cdot e^{-B \cdot v^2} \cdot (2Av - 2ABv^3) + \\ &+ e^{-B \cdot v^2} \cdot (2A - 6ABv^2) = \\ &= e^{-B \cdot v^2} \cdot (4AB^2v^4 - 10ABv^2 + 2A). \end{aligned}$$

d) Az  $n(v)$  függvény maximum helyének meghatározásához először megoldjuk az  $n'(v) = 0$  egyenletet. A megoldandó egyenlet

$$e^{-B \cdot v^2} \cdot (2Av - 2ABv^3) = 0.$$

Mivel az  $x \mapsto e^x$  függvény sehol sem zérus, ezért  $A \neq 0$ ,  $v > 0$  miatt az egyenlet megoldására  $v = \frac{1}{\sqrt{B}}$  adódik. Mivel

$$\begin{aligned} n''\left(\frac{1}{\sqrt{B}}\right) &= e^{-1} \cdot \left(4AB^2 \cdot \frac{1}{B^2} - 10AB \cdot \frac{1}{B} + 2A\right) \\ &= e^{-1} \cdot (-4A) = -\frac{4A}{e} < 0, \end{aligned}$$

ezért a függvények lokális maximum helye van a  $v = \frac{1}{\sqrt{B}}$  helyen. Mivel ez az egyetlen lokális maximum hely, ezért ez egyben globális maximum hely is. Azt kaptuk tehát, hogy az  $n(v)$  függvény maximum helye

$$v^* = \frac{1}{\sqrt{B}} = 127,3 \left[ \frac{\text{m}}{\text{s}} \right].$$

e) Az előbbieken megkaptuk, hogy a  $v^* = \frac{1}{\sqrt{B}}$  helyen globális maximum helye van az  $n(v)$  függvénynek. A második derivált zérushelyeit  $e^{-B \cdot v^2} \neq 0$  miatt a

$$4AB^2v^4 - 10ABv^2 + 2A = 0$$

egyenlet megoldásával kapjuk. Vezessük be a  $v^2 = u$  jelölést. Ekkor a

$$4AB^2u^2 - 10ABu + 2A = 0$$

egyenlethez jutunk. Mivel  $A \neq 0$ , ezért az egyenlet mindkét oldalát oszthatjuk  $A$ -val. Ekkor a

$$4B^2u^2 - 10Bu + 2 = 0$$

egyenletet kapjuk. A másodfokú egyenlet megoldóképletének alkalmazásával azt kapjuk, hogy

$$u_{1,2} = \frac{10B \pm \sqrt{100b^2 - 32B^2}}{8B^2} = \frac{10B \pm \sqrt{68B}}{8B^2} = \frac{5B \pm \sqrt{17}B}{4B^2},$$

azaz

$$u_1 = \frac{5 + \sqrt{17}}{4B} \approx \frac{2,28}{B}; \quad u_2 = \frac{5 - \sqrt{17}}{4B} \approx \frac{0,47}{\sqrt{B}}.$$

Mivel  $v > 0$ , ezért

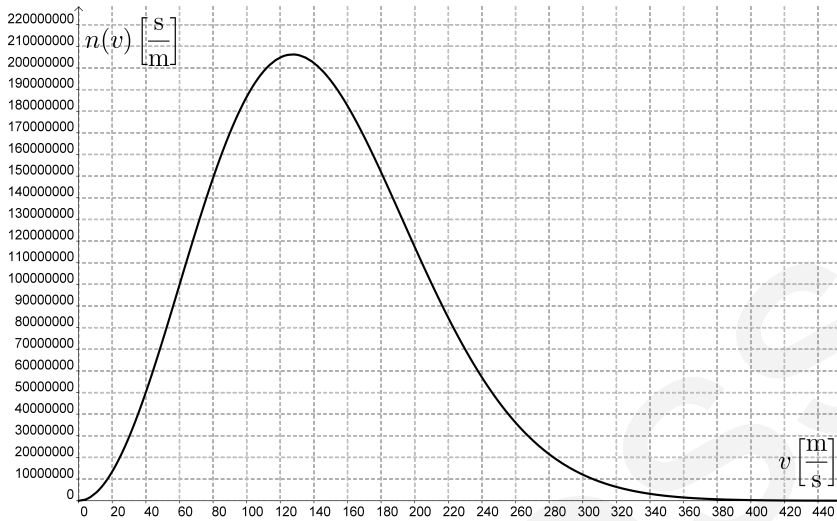
$$v_1 = \frac{1,51}{\sqrt{B}}; \quad v_2 = \frac{0,47}{\sqrt{B}}.$$

Az  $n(v)$  függvény második deriváltjának előjeleit az alábbi táblázatban foglaljuk össze:

	$v < \frac{0,47}{\sqrt{B}}$	$v = \frac{0,47}{\sqrt{B}}$	$\frac{0,47}{\sqrt{B}} < v < \frac{2,28}{\sqrt{B}}$	$v = \frac{2,28}{\sqrt{B}}$	$v > \frac{2,28}{\sqrt{B}}$
$n''(v)$	+	0	-	0	+
$n(v)$	konvex	ip	konkáv	ip	konvex

A fenti táblázatban az „ip” az inflexiós pont rövidítése.

f) A  $v \mapsto n(v)$  függvény grafikonja:



g) A  $[100; 200]$  sebességtartományba eső részecskék átlagos száma:

$$N_{[100;200]} = \int_{100}^{200} n(v) \, dv = \int_{100}^{200} A \cdot v^2 \cdot e^{-B \cdot v^2} \, dv.$$

A fenti integrált nem tudjuk analitikusan kiszámolni, nem alkalmazható a Newton-Leibniz tétel, ugyanis az integrálandó függvénynek nem létezik zárt alakban felírható primitív függvénye. Az integrál értékét numerikus matematikai módszerekkel vagy valamilyen matematikai szoftver alkalmazásával számolhatjuk ki. Mi most az előbbit választjuk és trapéz formula segítségével adjuk meg az integrál közelítő értékét. Bontsuk fel a  $[100; 200]$  intervallumot 5 egyenlő részre. Ekkor a megfelelő trapézok területének összege, ami a keresett integrál közelítő értéke:

$$\begin{aligned} \int_{100}^{200} A \cdot v^2 \cdot e^{-B \cdot v^2} \, dv &\approx \frac{n(100) + n(120)}{2} \cdot 20 + \frac{n(120) + n(140)}{2} \cdot 20 + \\ &+ \frac{n(140) + n(160)}{2} \cdot 20 + \frac{n(160) + n(180)}{2} \cdot 20 + \\ &+ \frac{n(180) + n(200)}{2} \cdot 20 = 10 \cdot (n(100) + 2 \cdot n(120) + \\ &+ 2 \cdot n(140) + 2 \cdot n(160) + 2 \cdot n(180) + n(200)). \end{aligned}$$

A megfelelő adatok behelyettesítése után azt kapjuk, hogy a  $[100; 200]$  sebességtartományba eső részecskék átlagos száma közelítőleg  $4,73 \cdot 10^{11}$ .

h) A részecskék átlagos sebességnagysága

$$v_{\text{átlag}} = \frac{\int_0^{\infty} v \cdot n(v) dv}{\int_0^{\infty} n(v) dv} \approx 143,65 \left[ \frac{\text{m}}{\text{s}} \right].$$

A számolást matematikai szoftver segítségével végeztük el.

i) A részecskék átlagos mozgási energiája:

$$\varepsilon_{\text{átlag}} = \frac{\int_0^{\infty} \varepsilon \cdot n(v) dv}{\int_0^{\infty} n(v) dv} \approx 5,66 \cdot 10^{-21} [\text{J}].$$

A számolást matematikai szoftver segítségével végeztük el.

## References

- [1] Árki Tamás – Konfárné Nagy Klára – Kovács István – Trembeczki Csaba – Urbán János, *Sokszínű matematika feladatgyűjtemény 11-12*, Mozaik Kiadó, Szeged, 2010.
- [2] Babcsányi István – Gyurmánczi János – Szabó Lajos – Wettl Ferenc, *Matematika feladatgyűjtemény I.*, Műegyetemi Kiadó, 2009.
- [3] Bartha Gábor – Bogdán Zoltán – , Duró Lajosné dr. – Gyapjas Ferencné – Hack Frigyes – dr. Kántor Sándorné – dr. Korányi Erzsébet, *Matematika feladatgyűjtemény II.*, Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 2000.
- [4] Benkő Pálné – Diószegi Ferencné – Serény György, *Matematika feladattár II.*, Műegyetemi Kiadó, 2002.
- [5] Császár Ákosné, *Matematika I/1*, Műegyetemi Kiadó, 2003.
- [6] Csikós Pajor Gizella – Péics Hajnalka, *Analízis elméleti összefoglaló és példatár*, Bolyai Farkas Alapítvány, Zenta, 2010.
- [7] Ernest F. Haeussler, *Introductory Mathematical Analysis for Business, Economics, the Life and Social Sciences*, Prentice Hall, 2011.
- [8] Dr. Geröcs László–Juhász István–Orosz Gyula– Paróczay József–Számadó László–Szászné Dr. Simon Judit, *Matematika emelt szintű tananyag*, Nemzedékek Tudása Tankönyvkiadó, 2013.
- [9] J. Harcet – L. Heinrichs – P. M. Seiler – M. T. Skoumal, *Mathematics Higher Level*, Oxford University Press, 2012.
- [10] Horváth Eszter – Inges János – Nagyné Pálmai Piroška – Róka Sándor – Tassy Gergely, *Tehetség gondozás a matematikában*, <http://users.itk.ppke.hu/adorjan/matematika/list.html>, 2011.
- [11] Jakus G. – Kis M. – Magyar T. – Zombori N., *Analízis példatár*, Budapest, 2014.
- [12] Király Balázs, *Analízis (gyakorlat támogató jegyzet)*, elektronikus oktatási segédanyag, <http://tamop412a.ttk.pte.hu/files/analizis.pdf>, 2011.
- [13] Nagyné Kondor Rita – Sziki Gusztáv Áron, *Matematika eszközök mérnöki alkalmazásokban*, Egyetemi jegyzet, Debreceni Egyetem, 2011.
- [14] Kovács József – Takács Gábor – Takács Miklós, *Analízis*, Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 1986.
- [15] Kovács István – Trembeczki Csaba, *Sokszínű matematika feladatgyűjtemény, az analízis elemei 11–12 emelt szint*, Mozaik Kiadó, Szeged, 2011.
- [16] Lial M. L. – Greenwell R. N. – Ritchey N. P., *Calculus with applications*, Pearson, 2012.
- [17] Mendelson E., *3000 solved problems in calculus*, McGraw-Hill Companies, 1988.
- [18] Pintér Lajos, *Analízis I.*, Typotex, 1998.
- [19] Rosser Mike, *Basic mathematics for economists*, Routledge, 2003.
- [20] Sikolya Eszter, *Analízis jegyzet Matematikatanári Szakosok részére*, elektronikus jegyzet, [tankonyvtar.ttk.bme.hu](http://tankonyvtar.ttk.bme.hu), 2013.
- [21] Simon Anita, *Az analízis néhány közgazdaságtani alkalmazása*, szakdolgozat, Eötvös Loránd Tudományegyetem, Természettudományi Kar, 2009.
- [22] Knut Sydsaeter, Peter Hammond, *Matematika közgazdászoknak*, Aula, 2006.
- [23] Szentelekiné Dr. Páles Ilona, *Analízis példatár*, Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 2011.
- [24] Stewart J., *Calculus*, Brooks/Cole, 2012.
- [25] Tan S. T., *Applied Calculus for the Managerial*, Life and Social Sciences, Brooks/Cole, 1999.

- [26] Thomas G. B. – Weir M. D. – Hass J. – Giordano F. R., *Thomas féle kalkulus I. kötet*, Typotex, Budapest, 2008.

DUPress

**Tartalomjegyzék**

1. A Riemann-integrál definíciója	2
2. A Riemann integrálhatóság kritériumai és elegendő feltételei	9
3. A Riemann-integrál tulajdonságai, Newton-Leibniz tétel	16
4. A primitív függvény tulajdonságai, alapintegrálok	24
5. Az $f(ax + b)$ alakú függvény integrálása	28
6. Az $f^n(x) \cdot f'(x)$ alakú függvény integrálása	29
7. A $k \circ b(x) \cdot b'(x)$ alakú függvény integrálása	31
8. Parciális integrálás	33
9. Parciális törtekre bontás módszere	36
10. Integrálás helyettesítéssel	39
11. Trigonometrikus függvények racionális törtfüggvényeinek integrálása	41
12. Primitív függvények a közgazdaságban	44
13. Parciális és helyettesítéssel integrálás tétele Riemann-integrálokra, Riemann integrálok kiszámítása Newton-Leibniz formulával	47
14. Folytonos függvények átlagértéke	50
15. Területszámítás integrálással	54
16. Forgástest térfogata	57
17. Függvény grafikonjának ívhossza	60
18. Forgástest palástjának területe	63
19. Vékony huzal, rúd és síklemez tömege	67
20. Vékony huzal, rúd és síklemez tömegközéppontja és súlypontja	69
21. Vonal mentén megoszló párhuzamos erőrendszer	72
22. Mozgástani feladatok	76
23. Munkavégzés	78
24. Riemann-integrál megjelenése a közgazdaságban	80
25. Lorenz-függvény	83
26. Folyamatos jövedelemáramlás diszkontált jelenértéke és jövőértéke	87
27. Numerikus integrálási módszerek	90
28. Improprius integrálok	97
29. Gázok idő szerinti sebességeloszlása	101

Lektor:  
Dr. habil. Kocsis Imre  
tanszékvezető főiskolai tanár  
Debreceni Egyetem Műszaki Kar Műszaki Alaptárgyi Tanszék

© Debreceni Egyetemi Kiadó Debrecen University Press,  
beleértve az egyetemi hálózaton belüli elektronikus terjesztés jogát is

ISBN 978-963-318-778-4

Kiadta: a Debreceni Egyetemi Kiadó Debrecen University Press  
Felelős kiadó: Karácsony Gyöngyi  
Nyomdai munkálatokat  
a Debreceni Egyetem sokszorosítóüzeme végezte 2019-ben  
[www.dupress.hu](http://www.dupress.hu)