

Doktori (PhD) értekezés tézisei

**Az algebrai gondolkodásmód
fejlesztésének kérdései**

Lócska Orsolya Dóra

Témavezető: Dr. Kovács Zoltán



DEBRECENI EGYETEM
Matematika- és Számítástudományok Doktori Iskola

Debrecen, 2026

Bevezetés

Általános iskolai matematikatanárként gyakran tapasztaltam, hogy a tanulók megrettennek, amikor betűk is megjelennek a tanórákon, hiszen annyira különböznek a korábban megszokott aritmetikai feladatok kinézetétől. A Nemzeti Alaptanterv (Magyar Közlöny, 2020) a matematika tanulásának legfontosabb céljai között megfogalmazza, hogy a tantárgy fejlessze a tanulók „szövegértését, szövegalkotó és absztrakciós képességét a matematika nyelvének és szimbólumainak szóbeli és írásbeli alkalmazása során” (p. 328). Az algebra témaköre kiemelt jelentőséggel bír, mivel elsajátításához elengedhetetlen az absztrakciós képesség, valamint a matematikai nyelv és szimbólumrendszer pontos alkalmazása.

Az algebra bevezetése hetedik évfolyamon történik, ekkor ismerkednek meg a tanulók a változókkal, algebrai tevékenységekkel, egyenletekkel és már a szöveges feladatok egyenlettel való megoldásába is bepillantást nyernek. Nyolcadik évfolyamon leginkább már a szöveges feladatok kapnak kiemelt szerepet az algebratanulás során. A dolgozatban az aritmetikai-algebrai átmenet megkönnyítése áll a középpontban.

Hetedik és nyolcadik évfolyamon végeztünk ennek érdekében dizájn kutatást (A. L. Brown, 1992; Burkhardt & Schoenfeld, 2003; Fowler és mtsai., 2023), melynek sajátossága, hogy a pedagógiai gyakorlat és a kutatás közötti folyamatos kölcsönhatásokra épít, így ideális olyan kutatásokra, amelyek nemcsak a tanítási-tanulási folyamatok megértésére, hanem azok fejlesztésére is törekszenek. A kísérleti órákat az *értelemalkotó matematikatanulás* elvei alapján építettük fel.

A dolgozat felépítése

A bevezetés után, a dolgozat 1. fejezetében elméleti áttekintést adunk az algebratanítás magyar vonatkozásáról a Nemzeti alaptanterven és a hozzá tartozó kerettanterveken keresztül. Szakirodalmi áttekintést nyújtunk az algebrai gondolkodásról, illetve az értelemalkotásról a matematikában, és az algebra tanításában-tanulásában. A 2. fejezetben a dolgozat kutatási kérdéseit fejtjük ki, míg a 3. fejezet a kutatás módszertanáról szól. A 4-7. fejezetekben a kutatás eredményei szerepelnek, az egyes fejezetekhez szorosan kapcsolódó irodalmi leírások a fejezetek elejére kerültek.

A 4. és 5. fejezetben a hetedik évfolyamon végzett kutatás eredményeiről számolunk be, az algebrai gondolkodásmód kezdeteinek jellemzőin és az algebrai gondolkodásmód sajátosságain keresztül. Hetedik évfolyamon az egyenletek bevezetése előtti tanórákra összpontosítottunk, amelyeken a tanulók megismerkednek a változókkal, helyettesítési értékkel, algebrai tevékenységekkel. Problémaalapú kísérleti órákat terveztünk, melyek közös jellemzője a problémák átélhető kontextusba helyezése és az általánosítás. Az eredményeket részben a (Lócska & Kovács, 2022) közleményben publikáltuk.

A 6. fejezetben a nyolcadikos kutatás eredményei szerepelnek, a grafikus reprezentációk szerepére és a tanulók szimbólum használatára koncentrálnak. A beavatkozás során az egyenletek felírásának támogatása volt a cél, amelyhez többféle reprezentációs lehetőséget tártunk a tanulók elé. Egyes esetekben a reprezentáció ki is tudta váltani az egyenlet felírását, de általában annak segítésére szolgált. A fejezet a (Lócska és mtsai., 2023) munka alapján készült.

A 7. fejezetben a tanulói problémaalkotással foglalkozunk nyolcadikos tanulók esetében. A kutatás során a problémaalkotás és megoldás sikeressége, illetve a tanulók matematika érdemjeggyel jellemzett matematikai teljesítménye közötti kapcsolatot is vizsgáltuk. A problémaalkotások és megoldások tipikus hibáinak vizsgálatával a tanulók szerkezeti és szemantikai megértésbe is bepillantást nyerhettünk. A fejezet alapjául a (Lócska, 2025) tanulmány szolgált.

A dolgozatot a kutatás következtetéseinek összegzésével és a további kutatási lehetőségek felvázolásával zárjuk.

Kutatás elméleti háttere

Mi az algebra? Freudenthal (1977) kísérletet tett az iskolai algebra fogalmának tisztázására. Úgy fogalmazott, hogy az összefüggések leírásának és az eljárások általános megoldásának képessége az algebra lényege. Ebben az újszerű perspektívában az algebrát emberi kognitív tevékenységnek tekintik. Kieran (2004) szerint az algebra többdimenziós tevékenység, amely számos gondolkodásmódot foglal magába: a mennyiségek közötti kapcsolatok elemzését, a strukturális kapcsolatok észrevételét, a változások leírását, előrejelzést és az általánosítást. Kieran

az algebrai tevékenységet a problémamegoldás, modellezés és indoklás-bizonyítási tevékenység általánosabb keretében jeleníti meg. Szerinte a szimbólumhasználat “letter-symbolic algebra” (p. 142) az általánosítás és a függvényyszerű gondolkodás segédeszköze. Ezzel a felfogással pedig áthidalhatóvá válik az a szakadék, amely sok esetben az algebra korai évfolyamokon való bevezetése és a későbbi évfolyamokon elvárt algebrai gondolkodás között keletkezik.

Az algebrahoz köthető kettősséget Kaput (2018) már a munkájának címében is megjeleníti: Mi az algebra? Mi az algebrai gondolkodás? Ha az első kérdést nézzük, ott az algebra önálló tudásanyagként, kulturális örökségként jelenik meg, amelyet az iskolarendszer közvetít. Ezt az örökséget elsősorban a 9. század környéki arab matematikából, Al-Khowarizmi munkásságából vezetik le, főleg az egyenletmegoldás tudományaként. A második kérdésnél, az algebrai gondolkodás kifejezés már emberi tevékenységet feltételez, amelynek létezése az emberektől függ. Az algebra nem csupán egy statikus tudásanyag, hanem aktívan végzett tevékenység, amely lehetővé teszi a matematikai ismeretszerzést. Kaput szerint mindkét megközelítés hasznos.

Jelen dolgozatban az algebrai gondolkodáson az általánosítási tevékenységet, az értelmes szimbólumhasználatot és a szimbólumokkal végzett algebrai tevékenység készségének egységét értjük. Az általánosítás különböző reprezentációkkal is történhet, azaz történhet szövegesen a tanulók természetes nyelvén, grafikusán, vagy szimbólumok segítségével.

Az értelemalkotás folyamatát a matematikában hosszú ideje vizsgálják a kutatók (Kieran, 2007; Martin, 2009), de a kapcsolódó matematikatanítási szakirodalom nem tér ki részletesen arra, hogy az értelemalkotás folyamata pontosan milyen komponensekből áll, illetve hogyan valósul meg konkrétan a gyakorlatban (Palatnik & Koichu, 2017). A fogalom értelmezéséhez a (Martin, 2009) munkát vesszük alapul, amely a matematikai értelemalkotást úgy említi, mint „egy szituáció, kontextus vagy fogalom megértésének fejlesztését azáltal, hogy összekapcsolja azt a meglévő tudással” (p. 4). Ebben a megközelítésben a matematikai értelemalkotás azt a folyamatot jelenti,

amelynek során a tanulók a matematikai fogalmak koherens megértését alakítják ki azáltal, hogy az új ismereteket összekapcsolják a meglévő kognitív kereteikkel.

Dolgozatunkban a matematikai értelemalkotást az aritmetikai-algebrai átmenet és az algebra korai tanításának kontextusában alkalmazzuk és vizsgáljuk. Az értelemalkotás az algebra tanulásának és tanításának olyan megközelítése, amely a konceptuális megértésre helyezi a hangsúlyt, nem pedig a bemagolásra vagy az eljárások végrehajtására. Ez a megközelítés több kulcsfontosságú elemet foglal magába, melyek tükrözik a matematikai értelemalkotás főbb elemeit. Palatnik & Koichu (2017) megállapítják, hogy az értelemalkotás folyamata algebrai kontextusban generatív és transzformatív algebrai tevékenységek sorozatából áll. Ebben az értelemalkotási folyamatban a tanulók: (1) állításokat fogalmaznak meg és igazolnak, (2) általánosítanak, (3) megtalálják az algebrai objektumok mögött álló mechanizmusokat, azaz mélyebb megértést nyernek arról, hogy milyen alapvető matematikai elvek és logikai összefüggések állnak a képletek mögött, és (4) képesek összekapcsolni és egységes keretbe foglalni az általuk vizsgált matematikai reprezentációkat, például képleteket, diagramokat, vagy numerikus sorozatokat. Összességében az értelemalkotó algebratanulás célja, hogy a tanulók az algebra tanulását aktív, hasznos és hatékony emberi tevékenységként éljék meg.

Kutatási módszer: dizájn kutatás

Burkhardt & Schoenfeld (2003) retrospektív elemzésükben azt állítják, hogy a pedagógiai kutatások hatása kicsiny, gyakran nem hasznosíthatók az eredmények, ráadásul ezek a kutatások nem túlságosan jól finanszírozottak. A pedagógiai kutatás és gyakorlat közötti szakadék áthidalására Burkhardt & Schoenfeld több lehetséges modellt is bemutatnak. Az általuk vizsgált megközelítések közül a dizájn kutatás (design research) egyszerre célozza a pedagógiai elméletek fejlesztését és az oktatási gyakorlat innovációját. A kutatás és a gyakorlat kölcsönhatásának kiemelésével a dizájn kutatások elősegíthetik a folyamatos fejlesztés kultúráját, és végső soron nagyobb bizalmat építhet a pedagógusok körében a kutatási eredmények iránt.

A dizájn kutatás három fő fázisa (Elemzés és feltárás, Tervezés és kivitelezés, Értékelés és reflexió) ciklikus jelleggel ismétlődik, a fejlesztés nem lineáris módon történik, hanem iteratív jellege van. Például, egy ciklus értékelése és reflexiója hatással van a következő tervezési fázisra.

A dolgozatban bemutatott kutatások két ciklusban történtek, hetedik és nyolcadik évfolyamon is. A dizájn kutatás elveinek megfelelően az első ciklus megvalósítására nagyobb kutatói kontroll mellett a saját iskolámban került sor, míg a második ciklusban a kísérleti órákat külső iskolákban, és a saját iskolámban más tanár bevonásával is megvalósítottuk. Hetedik évfolyamon összesen 157 diák (73 tanuló az első, 84 tanuló a második ciklusban) vett részt a kutatásban, öt matematikatanár irányításával. Nyolcadik évfolyamon 146 tanuló (51 tanuló az első, 95 tanuló a második ciklusban), hat matematikatanár vezetésével.

A kutatás során összegyűjtött órafelvételek, tanulói munkák, tanári reflexiók, hospitálási naplók képezik a kutatási anyagot. A kutatás első ciklusában órafelvételre nem volt lehetőség, így azon órák esetében a tanulói munkák, tanári reflexiók, illetve pedagógus által készített hospitálási feljegyzések biztosítják a triangulációt. Az órafelvételekről transzkriptek készültek, a tanulói munkák (füzet vagy feladatlap) és a kézzel írt hospitálási feljegyzések digitalizálva lettek.

Kutatási kérdések, eredmények bemutatása

Hetedik évfolyamon az egyenletek bevezetése előtti algebra tananyaghoz készítettünk kísérleti órákat, ahol leginkább a problémák átélhető kontextusba helyezése és az általánosítás dominált. A dizájn kutatás hetedik óráihoz az RQ1 és RQ2 kutatási kérdéseket fogalmaztuk meg.

RQ1 *Az értelemalkotó algebra beavatkozás során milyen hatása van a hetedik osztályos tanulókra a kontextusba helyezésnek, milyen sajátosságai vannak az általánosítás folyamatának, és milyen kihívások figyelhetők meg a folyamat során?*

A problémaalapú tanítási stratégia, amelyben a tanulók megélhető kontextusba helyezett problémákkal foglalkoztak, pozitív visszajelzéseket váltott ki a tanárok és a tanulók részéről egyaránt. A tanulók aktívan részt vettek az órákon, szívesen és helyesen végeztek általánosítást és érvelést, gyakran a csoportos megbeszéléseknek köszönhetően. A tanárok minden órán támogatták a tanulási folyamatot, igazodtak a tanulók képességeihez, és segítettek a hiányosságok kompenzálásában. Az értelemalkotás az algebrában természetes módon segítheti az általánosítás elsajátítását, de a szakszerű tanári irányítás elengedhetetlen.

RQ2 *Hogyan jellemezhető a hetedikes tanulók szimbólumhasználata, milyen lehetőségei vannak a tanárnak a tanulói szimbólumhasználat támogatásában?*

A számok és változók közötti kapcsolatok felírása kihívást jelentett a tanulóknak. A megfigyelt osztályokban a legfontosabb lépés az összefüggés természetes nyelven történő megfogalmazása volt, amit követően tanáraik könnyebben át tudták vezetni a tanulókat a szimbólumok használatára. Az algebrában alkalmazott új jelölések eltérnek a korábbi aritmetikai tapasztalatoktól, ez nehézséget okozhat a megértésben. Bár a tanulók képesek algebrai tevékenységeket végezni mire az egyenletekre kerül a sor, az értő alkalmazásukhoz még több gyakorlásra van szükség. A hetedikesek számára a megoldás értelmezése nehéz lehet, ha algebrai kifejezés szerepel benne, de a behelyettesítés segíthet a megértésben.

Nyolcadik évfolyamon az egyenlettel megoldható szöveges feladatok témaköréhez készítettünk kísérleti órákat, ahol leginkább a különböző reprezentációk alkalmazása volt hangsúlyos. A dizájn kutatás nyolcadikos óráihoz az RQ3 és RQ4 kutatási kérdéseket foglalmaztuk meg. Az RQ4 eredményeiben beszámolunk egy hatodik évfolyamon végzett kutatás eredményeiről is, amely kapcsolódik a tanulói problémaalkotáshoz.

RQ3 *Milyen a nyolcadikos tanulók hozzáállása a grafikus reprezentációhoz, milyen grafikus ábrázolási készségekkel rendelkeznek, és mely tényezők befolyásolják az autonóm reprezentációválasztást?*

A kísérleti órákon többször előfordult, hogy a tanulók az új grafikus reprezentáció helyett az ismert egyenletekkel próbálták megoldani a feladatokat, amivel sokszor nem boldogultak. A legtöbb tanuló, a maga által alkotott probléma megoldásánál is egyenletekre támaszkodott. Voltak olyan tanulók, akik a grafikus megoldást választották egy probléma megoldására, de hibás ábrát készítettek, vagy nem fejezték be a megoldást, ezért helytelen eredményt kaptak. Azon tanulók, akik mindkét módszert alkalmazták (grafikus és szimbolikus megoldás), helyes eredményt értek el, de ők mind erős matematikai alapokkal rendelkező tanulók voltak. A vizsgált csoportban a tanulók 27%-a rendelkezett fejlett grafikus készséggel, a konkrétan ilyen típusú letöltési sávós ábrákra vonatkozóan. A kutatás eredményei azonban azt mutatják, hogy a grafikus készségek nem befolyásolták az önálló stratégia választását, amelyet más tényezők, például az önszabályozás és a tanári kontroll is alakíthatnak.

RQ4 *Milyen kapcsolat figyelhető meg a tanulók által alkotott problémák szerkezeti és szemantikai helyessége, a saját problémák megoldásának eredményessége, valamint a tanulók matematikai teljesítménye között?*

A hatodik évfolyamos kísérletben három tényező befolyásolta a problémafelvetés minőségét: a tanulók matematika érdemjeggyel jellemzett matematikai teljesítménye, a probléma matematikai háttere és a kitűzés módja. A problémamegoldás sikerességét három tényező határozta meg: a tanuló saját vagy osztálytársa problémáját oldotta meg, szöveges feladatot kellett megoldaniuk vagy számfeladatot (előbbiben sikeresebbek voltak a tanulók), és a problémaalkotás minősége (a jobb problémaalkotók sikeresebbek voltak a megoldásban is). A nyolcadikos tanulók által alkotott problémák elemzése megerősítette, hogy a tanár és a kutató jobban megértheti a tanulók tudását a tanulói problémaalkotásokon keresztül. Bár sok tanuló minden szempontból

helyes problémát alkotott, voltak olyanok is, akik szerkezetileg helyes, de szemantikailag hibás problémát fogalmaztak meg. A szemantikai helyesség nem mutatott összefüggést sem a tanulók matematika érdemjeggyel jellemzett matematikai teljesítményével, sem a problémaalkotást megelőző gyakorlófeladatokban elért eredményeikkel. A saját problémák megoldásának sikeressége viszont összefüggött a tanulók matematika érdemjeggyel jellemzett matematikai teljesítményével.

Összességében elmondható, hogy az aritmetikai-algebrai átmenetet a megélhető kontextusba helyezett problémák tanórán való tárgyalása támogathatja. Problémamegoldás során a tanulók sokszor a korábban megismert egyenletekre támaszkodnak a grafikus reprezentációval szemben, hiába van fejlett vagy közepes grafikus reprezentációs készségük. Ezen stratégiaválasztást az önszabályozás és a tanári kontroll is befolyásolhatja. A tanulói problémaalkotásokon keresztül betekintést nyerhetünk a tanulók megértésének finom szerkezetébe.

A saját eredmények összefoglalása

- Az a tanítási stratégia, amely során a szimbólumhasználat előtt általánosítási tevékenységet végeztek a tanulók, támogatta az algebrai gondolkodás fejlődését. Az általánosítás magyarázata során természetes módon adódott az értelmes szimbólumhasználat.
- Az irodalom által már megfigyelt, szimbólumhasználattal kapcsolatos problémák (Friedlander & Hershkowitz, 2020; Bastable & Schifter, 2017), a dolgozatban bemutatott kutatásban is megjelentek.
- A többszörös reprezentáció használata önmagában még nem segítség a tanulók számára. Azonban a korosztálynak megfelelő tanári irányítással, illetve a tanulók önszabályozásával kiegészítve (főleg nagyobb tanulók esetében, nyolcadik évfolyamon) hatékony lehet.
- A tanulói problémaalkotások vizsgálata sikeres stratégia a tanulói gondolkodás megértésében.

További kutatási lehetőségek

A jövőben a nyolcadikos kísérleti órák, jelen dolgozatban be nem mutatott óráinak tapasztalatait szeretnénk elemezni a tanulók reprezentációhoz való viszonya és a reprezentációválasztás szempontjából. Ezen tanórák szintén az egyenlettel megoldható szöveges feladatok köré épülnek, melynek témái a geometriai feladatok, a fizikai, vagyis mozgásos feladatok, illetve a kémiai vagy más néven keveréses feladatok. A kísérleti órák közös jellemzője, hogy a szimbólumoktól eltérő reprezentációval támogattuk a tanulói megértést. További lehetőség, hogy a hetedik és nyolcadik évfolyamon végzett tervezésalapú kutatást további kutatási ciklusokkal egészítsük ki.

Irodalomjegyzék

- Bastable, V., & Schifter, D. (2017). Classroom stories: Examples of elementary students engaged in early algebra. In J. J. Kaput, D. W. Carraher, & Maria L. Blanton (Eds.), *Algebra in the Early Grades* (o. 165–184). Lawrence Erlbaum Associates.
<https://doi.org/10.4324/9781315097435-8>
- Brown, A. L. (1992). Design experiments: Theoretical and methodological challenges in creating complex interventions in classroom settings. *The Journal of the Learning Sciences*, 2(2), 141–178. https://doi.org/10.1207/s15327809jls0202_2
- Burkhardt, H., & Schoenfeld, A. H. (2003). Improving Educational Research: Toward a More Useful, More Influential, and Better-Funded Enterprise. *Educational Researcher*, 32(9), 3–14.
<https://doi.org/10.3102/0013189X032009003>
- Fowler, S., Cutting, C., Fiedler, S. H. D., & Leonard, S. N. (2023). Design-based research in mathematics education: trends, challenges and potential. *Mathematics Education Research Journal*, 35(3), 635–658. <https://doi.org/10.1007/s13394-021-00407-5>
- Freudenthal, H. (1977). What is algebra and what has it been in history? *Archive for History of Exact Sciences*, 16(3), 189–200.
<https://doi.org/10.1007/BF00328154>

- Friedlander, A., & Hershkowitz, R. (2020). Reasoning with Algebra. *The Mathematics Teacher*, 90(6), 442–447.
<https://doi.org/10.5951/mt.90.6.0442>
- Kaput, J. J. (2018). 1 What Is Algebra? What Is Algebraic Reasoning? *Algebra In The Early Grades*, 5–18.
<https://doi.org/10.4324/9781315097435-2>
- Kieran, C. (2004). Algebraic Thinking in the Early Grades : What Is It? *The Mathematics Educator*, 8(1), 139–151.
- Kieran, C. (2007). Learning and teaching algebra at the middle school through college levels. In F. K. Lester (Szerk.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (Köt. 6179, Szám 619, o. 707–762). Information Age Publishing.
- Lócska, O. D., Kondé, Z., & Kovács Zoltán. (2023). Rethinking the bridging function of graphical model method in the arithmetic-algebra transition: The issue of strategy choice. *Thirteenth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME13)*.
- Lócska, O. D., & Kovács, Z. (2022). The „Sense-Making-Algebra” project for Hungarian seventh graders. In *Twelfth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME12)* (Köt. TWG03). <https://hal.science/hal-03745145>
- Lócska, O. D. (2025). What Teachers Learn From Students’ Problem Posing in Algebra: A Self-Study With Eighth Graders. *Annales Universitatis Paedagogicae Cracoviensis Studia ad Didacticam Mathematicae Pertinentia*, 17, 25-43.
- Magyar Közlöny. (2020). *A Kormány 5/2020. (I. 31.) Korm. rendelete a Nemzeti alaptanterv kiadásáról, bevezetéséről és alkalmazásáról szóló 110/2012. (VI. 4.) Korm. rendelet módosításáról.*
- Martin, W. G. (2009). Focus in high school mathematics : reasoning and sense making. In *The National Council of Teachers of Mathematics, Inc. The National Council of Teachers of Mathematics*.
- Palatnik, A., & Koichu, B. (2017). Sense making in the context of

algebraic activities. *Educational Studies in Mathematics*, 95(3), 245–262. <https://doi.org/10.1007/s10649-016-9744-1>



Nyilvántartási szám: DEENK/377/2026.PL
Tárgy: PhD Publikációs Lista

Jelölt: Lócska Orsolya

Doktori Iskola: Matematika- és Számítástudományok Doktori Iskola

MTMT azonosító: 10078250

A PhD értekezés alapjául szolgáló közlemények

Idégen nyelvű, hazai könyvrészletek (1)

1. **Lócska, O.**, Kondé, Z., Kovács, Z.: Rethinking the bridging function of graphical model method in the arithmetic-algebra transition: The issue of strategy choice.
In: Proceedings of the Thirteenth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME13) / Drijvers, P.; Csapodi, C.; Palmér, H.; Gosztonyi, K.; Kónya, E. (szerk.), Alfréd Rényi Institute of Mathematics : Hungarian Academy of Sciences, Budapest, 592-599, 2023. ISBN: 9789637031045

Idégen nyelvű tudományos közlemények külföldi folyóiratban (2)

2. **Lócska, O.**: What teachers learn from students' problem posing in algebra: A self-study with eighth graders.
Ann. Univ. Paed. Cracov. Stud. Didact. Math. Pertinentia. 17, 25-43, 2025. ISSN: 2080-9751.
DOI: <http://dx.doi.org/10.24917/20809751.17.2>
3. Kovács, Z., Báró, E., **Lócska, O.**, Herendiné Kónya, E.: Incorporating Problem-Posing into Sixth-Grade Mathematics Classes.
Educ. Sci. 13 (2), 1-22, 2023. EISSN: 2227-7102.
DOI: <http://dx.doi.org/10.3390/educsci13020151>
IF: 2.5

Idégen nyelvű konferencia közlemények (1)

4. **Lócska, O.**, Kovács, Z.: The "Sense-Making-Algebra" project for Hungarian seventh graders.
In: Proceedings of the Twelfth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education / Jeremy Hodgen, Eirini Geraniou, Giorgio Bolondi, **Federica Ferretti** (szerk.), Free University of Bozen-Bolzano, Italy and ERME (European Society for Research in Mathematics Education), Bozen-Bolzano, Italy, 548-555, 2022. ISBN: 9791221025378





További közlemények

Idegen nyelvű, hazai könyvek (2)

5. Szerk. **Lócska, O.**, Herendiné Kónya, E.: 2025 MIDK Matematika és Informatika Didaktikai Kutatások: absztraktkötet. Debreceni Egyetem Matematika- és Számítástudományok Doktori Iskola, Debrecen, 74 p., 2025. ISBN: 9789634907039
6. Szerk. **Lócska, O.**, Herendiné Kónya, E.: Matematika és Informatika Didaktikai Kutatások 2024: absztraktkötet. Debreceni Egyetem Matematika- és Számítástudományok Doktori Iskola, Debrecen, 68 p., 2024. ISBN: 9789634905721

Idegen nyelvű tudományos közlemények hazai folyóiratban (1)

7. **Lócska, O.**, Kovács, Z.: 14 to 18-year-old Hungarian high-school students' view of mathematicians appearing in the media: a case study.
Teach. math. comput. sci. 16 (2), 183-194, 2018. ISSN: 1589-7389.
DOI: <http://dx.doi.org/10.5485/TMCS.2018.0446>

A közlő folyóiratok összesített impakt faktora: 2,5

A közlő folyóiratok összesített impakt faktora (az értekezés alapján szolgáló közleményekre): 2,5

A DEENK a Jelölt által a Tudóstérbe feltöltött adatok bibliográfiai és tudományometriai ellenőrzését a tudományos adatbázisok és a Journal Citation Reports Impact Factor lista alapján elvégezte.

Debrecen, 2026.05.29.



Short thesis for the degree of doctor of philosophy (PhD)

**Issues in the Development
of Algebraic Thinking**

by Lócska Orsolya Dóra

Supervisor: Dr. Kovács Zoltán



UNIVERSITY OF DEBRECEN

Doctoral School of Mathematical and Computational Science

Debrecen, 2026

Introduction

As a primary school mathematics teacher, I have often observed that students become intimidated when letters appear in class, as they look so different from the arithmetic problems they are used to. The National Core Curriculum (Magyar Közlöny, 2020) states among the most important goals of mathematics education that the subject should develop students' "reading comprehension, text-composition, and abstraction skills through the oral and written application of the language and symbols of mathematics" (p. 328). The topic of algebra is of particular importance, as mastering it requires the ability to think abstractly, as well as the precise application of mathematical language and symbols.

Algebra is introduced in seventh grade, when students are introduced to variables, algebraic operations, and equations, and begin to gain insight into solving word problems using equations. In eighth grade, word problems take centre stage in the study of algebra. This paper focuses on facilitating the transition from arithmetic to algebra.

To this end, we conducted design research in seventh and eighth grades (A. L. Brown, 1992; Burkhardt & Schoenfeld, 2003; Fowler et al., 2023), which is characterised by its reliance on continuous interactions between pedagogical practice and research, making it ideal for studies that aim not only to understand teaching and learning processes but also to improve them. The experimental lessons were structured based on the principles of sense-making mathematics learning.

Structure of the Thesis

Following the introduction, Chapter 1 of the thesis provides a theoretical overview of the teaching of algebra in Hungary, based on the National Core Curriculum and the associated framework curricula. We present a review of the literature on algebraic thinking and sense-making in mathematics, as well as in the teaching and learning of algebra. In Chapter 2, we outline the research questions of the thesis, while Chapter 3 discusses the research methodology. Chapters 4–7 present the research results, with literature reviews closely related to each chapter placed at the beginning of the respective chapters.

In Chapters 4 and 5, we report on the results of research conducted in

seventh grade, focusing on the characteristics of the early stages of algebraic thinking and the specific features of algebraic thinking. In seventh grade, we focused on lessons prior to the introduction of equations, during which students became familiar with variables, substitution, and algebraic manipulations. We designed problem-based experimental lessons, a common feature of which is placing problems in relatable contexts and generalising. We published some of the results in the paper by Lócska & Kovács (2022).

Chapter 6 presents the results of the eighth-grade study, focusing on the role of graphical representations and students' use of symbols. The goal of the intervention was to support the writing of equations, for which we presented students with various representation options. In some cases, the representation could even replace the writing of the equation, but generally it served to assist in that process. This chapter is based on the work by Lócska et al. (2023).

In Chapter 7, we examine student problem-posing among eighth-grade students. During the research, we also investigated the relationship between the success of problem-posing and problem-solving and students' mathematical performance, operationalised by mathematics grades. By analysing typical errors in problem formulations and solutions, we were able to gain insight into students' structural and semantic understanding. This chapter is based on the study by (Lócska, 2025).

We conclude this paper by summarising the findings of the research and outlining opportunities for further research.

Theoretical Background of the Research

What is algebra? Freudenthal (1977) attempted to clarify the concept of algebra in schools. He argued that the essence of algebra lies in the ability to describe relationships and find general solutions to problems. In this novel perspective, algebra is viewed as a human cognitive activity. According to Kieran (2004), algebra is a multidimensional activity that encompasses numerous ways of thinking: the analysis of relationships between quantities, the observation of structural relationships, the description of changes, prediction, and generalisation. Kieran presents

algebraic activity within the broader framework of problem-solving, modelling, and justification-proof activities. In his view, the use of symbols, “letter-symbolic algebra” (p. 142), serves as a tool for generalisation and functional thinking. With this approach, the gap that often arises between the introduction of algebra in early grades and the algebraic thinking expected in later grades can be bridged.

Kaput (2018) highlights the duality associated with algebra right in the title of his work: What is algebra? What is algebraic thinking? If we consider the first question, algebra appears as a distinct body of knowledge and a cultural heritage transmitted through the school system. This heritage is primarily derived from 9th-century Arabic mathematics, specifically the work of Al-Khowarizmi, particularly as the science of solving equations. In the second question, the term “algebraic thinking” already presupposes human activity, the existence of which depends on people. Algebra is not merely a static body of knowledge, but an actively performed activity that enables the acquisition of mathematical knowledge. According to Kaput, both approaches are useful.

In this paper, we understand algebraic thinking as the unity of generalisation, the meaningful use of symbols, and the skill of manipulating symbols. Generalisation can occur through various representations, that is, it can take place verbally in students’ natural language, graphically, or with the help of symbols.

Researchers have long studied the process of conceptualisation in mathematics (Kieran, 2007; Martin, 2009), but the related literature on mathematics education does not elaborate in detail on exactly what components the process of conceptualisation consists of or how it is concretely realised in practice (Palatnik & Koichu, 2017). To interpret the concept, we draw on the work of Martin (2009), who defines mathematical sense-making as “the development of understanding of a situation, context, or concept by connecting it to existing knowledge” (p. 4). In this approach, mathematical sense-making refers to the process through which students develop a coherent understanding of mathematical concepts by connecting new knowledge to their existing cognitive frameworks.

In this paper, we apply and examine mathematical sense-making in the

context of the transition from arithmetic to algebra and the early teaching of algebra. Sense-making is an approach to learning and teaching algebra that emphasises conceptual understanding rather than rote memorisation or the execution of procedures. This approach encompasses several key elements that reflect the main components of mathematical sense-making. Palatnik & Koichu (2017) note that the process of sense-making in an algebraic context consists of a series of generative and transformative algebraic activities. In this process of understanding, students: (1) formulate and justify statements, (2) generalize, (3) discover the mechanisms underlying algebraic objects, that is, gain a deeper understanding of the fundamental mathematical principles and logical relationships behind the formulas, and (4) are able to connect and integrate the mathematical representations they examine—such as formulas, diagrams, or numerical sequences—into a unified framework. Overall, the goal of meaning-making algebra learning is for students to experience learning algebra as an active, useful, and effective human activity.

Research method: design research

In their retrospective analysis, Burkhardt & Schoenfeld (2003) argue that the impact of educational research is limited, its findings are often not put to practical use, and, moreover, such research is not particularly well-funded. To bridge the gap between educational research and practice, Burkhardt & Schoenfeld present several possible models. Among the approaches they examined, design research aims simultaneously at the development of educational theories and the innovation of educational practice. By emphasising the interaction between research and practice, design research can foster a culture of continuous improvement and, ultimately, build greater trust among educators in research findings.

The three main phases of design research (Analysis and Exploration, Design and Implementation, Evaluation and Reflection) repeat in a cyclical manner; development does not occur in a linear fashion but is iterative in nature. For example, the evaluation and reflection of one cycle influence the next design phase.

The research presented in this paper was conducted in two cycles, in both

seventh and eighth grades. In accordance with the principles of design-based research, the first cycle was carried out at my own school under close researcher supervision, while in the second cycle, the experimental lessons were conducted at external schools and at my own school with the involvement of another teacher. In seventh grade, a total of 157 students (73 students in the first cycle, 84 students in the second cycle) participated in the research under the guidance of five mathematics teachers. In eighth grade, 146 students (51 students in the first cycle, 95 students in the second cycle) participated, led by six mathematics teachers.

The research material consists of classroom recordings, student work, teacher reflections, and classroom observation logs collected during the study. In the first cycle of the research, it was not possible to record classes; therefore, for those classes, student work, teacher reflections, and classroom observation notes prepared by the teachers provide triangulation. Transcripts were prepared from the classroom recordings, and student work (notebooks or worksheets) and handwritten classroom observation notes were digitised.

Research Questions and Presentation of Results

For seventh-grade students, we developed pilot lessons for the algebra curriculum prior to the introduction of equations, with a focus on placing problems in relatable contexts and on generalisation. We formulated research questions RQ1 and RQ2 for the seventh-grade lessons in this design study.

RQ1 *During the meaning-making algebra intervention, what effect does contextualization have on seventh-grade students? What are the characteristics of the generalisation process, and what challenges can be observed during the process?*

The problem-based teaching strategy, in which students addressed problems set within relatable contexts, elicited positive feedback from both teachers and students. Students actively participated in class, willingly and accurately engaged in generalisation and reasoning, often as a result of group discussions. Teachers supported the learning process

in every lesson, adapted to students' abilities, and helped compensate for gaps in their knowledge. Meaning-making in algebra can naturally facilitate the acquisition of generalisation skills, but professional teacher guidance is essential.

RQ2 *How can seventh-grade students' use of symbols be characterised, and what opportunities does the teacher have to support students' use of symbols?*

Writing down the relationships between numbers and variables posed a challenge for the students. In the observed classes, the most important step was formulating the relationship in natural language, after which their teachers were better able to guide students toward using symbols. The new notations used in algebra differ from previous arithmetic experiences, which can cause difficulties in understanding. Although students are able to perform algebraic manipulations by the time they get to equations, more practice is needed for their meaningful application. For seventh graders, interpreting a solution can be difficult if it involves an algebraic expression, but substitution can aid in understanding.

In eighth grade, we developed pilot lessons on the topic of word problems solvable using equations, with a particular emphasis on the use of different representations. We formulated research questions RQ3 and RQ4 for the eighth-grade design research lessons. In the results of RQ4, we also report on the findings of a study conducted in sixth grade, which relates to student problem formulation.

RQ3 *What is the attitude of eighth-grade students toward graphical representation, what graphical representation skills do they possess, and what factors influence their autonomous choice of representation?*

During the pilot lessons, students frequently attempted to solve problems using familiar equations rather than the new graphical representation, and often struggled to do so. Most students relied on equations even when solving problems they had created themselves. There were students who chose the graphical approach to solve a problem but drew an incorrect diagram or did not complete the solution, resulting in an incorrect answer.

The students who used both methods (graphical and symbolic solutions) arrived at the correct answer, but they were all students with strong mathematical foundations. In the study group, 27% of the students possessed advanced graphical skills specifically related to this type of bar graph. However, the research results indicate that graphical skills did not influence the choice of independent strategy, which can also be shaped by other factors, such as self-regulation and teacher control.

RQ4 *What relationship can be observed between the structural and semantic correctness of the problems posed by the students, the success of solving their own problems, and the students' mathematical performance?*

In the sixth-grade experiment, three factors influenced the quality of problem formulation: students' mathematical abilities, the mathematical background of the problem, and the way the problem was presented. The success of problem-solving was determined by three factors: whether the student solved their own problem or a classmate's, whether they had to solve a word problem or a numerical problem (students were more successful with the former), and the quality of problem creation (better problem creators were also more successful in solving the problems). An analysis of the problems created by eighth-grade students confirmed that teachers and researchers can better understand students' knowledge through their problem-posing products. Although many students created problems that were correct in every respect, there were also those who formulated problems that were structurally correct but semantically flawed. Semantic correctness did not depend on students' general mathematical knowledge or their performance on practice tasks prior to problem-posing activity. The success of problem-solving was not influenced by the effectiveness of activities preceding problem-creation, but it did depend on the student's mathematical knowledge.

Overall, it can be said that the transition from arithmetic to algebra can be supported by discussing problems in class that are set within a relatable context. When solving problems, students often rely on

previously learned equations rather than graphical representations, even if they have advanced or moderate skills in graphical representation. This choice of strategy can be influenced by both self-regulation and teacher control. Through students' problem formulations, we can gain insight into the subtle structure of their understanding.

Our findings

- The teaching strategy in which students engaged in generalisation activities before using symbols supported the development of algebraic thinking. Meaningful use of symbols arose naturally during the explanation of generalisation.
- The issues related to the use of symbols that have already been observed in the literature (Friedlander & Hershkowitz, 2020; Bastable & Schifter, 2017) also emerged in the research presented in this paper.
- The use of multiple representations alone does not necessarily help students. However, when supplemented with age-appropriate teacher guidance and student self-regulation (especially for older students in eighth grade), it can be effective.
- Examining students' problem formulations is a successful strategy for understanding student thinking.

Further Research Opportunities

In the future, we would like to analyse the experiences from the eighth-grade experimental lessons not presented in this paper, focusing on students' attitudes toward representation and their choice of representation. These lessons are also structured around word problems solvable using equations, with topics including geometric problems, physics (i.e., motion) problems, and chemistry (or mixing) problems. A common feature of the experimental lessons is that we supported student understanding with representations other than symbols. Another possibility is to supplement the design-based research conducted in seventh and eighth grades with additional research cycles.

References

- Bastable, V., & Schifter, D. (2017). Classroom stories: Examples of elementary students engaged in early algebra. In J. J. Kaput, D. W. Carreher, & maria L. Blanton (Szerk.), *Algebra in the Early Grades* (o. 165–184). Lawrence Erlbaum Associates.
<https://doi.org/10.4324/9781315097435-8>
- Brown, A. L. (1992). Design experiments: Theoretical and methodological challenges in creating complex interventions in classroom settings. *The Journal of the Learning Sciences*, 2(2), 141–178. https://doi.org/10.1207/s15327809jls0202_2
- Burkhardt, H., & Schoenfeld, A. H. (2003). Improving Educational Research: Toward a More Useful, More Influential, and Better-Funded Enterprise. *Educational Researcher*, 32(9), 3–14.
<https://doi.org/10.3102/0013189X032009003>
- Freudenthal, H. (1977). What is algebra and what has it been in history? *Archive for History of Exact Sciences*, 16(3), 189–200.
<https://doi.org/10.1007/BF00328154>
- Fowler, S., Cutting, C., Fiedler, S. H. D., & Leonard, S. N. (2023). Design-based research in mathematics education: trends, challenges and potential. *Mathematics Education Research Journal*, 35(3), 635–658. <https://doi.org/10.1007/s13394-021-00407-5>
- Friedlander, A., & Hershkowitz, R. (2020). Reasoning with Algebra. *The Mathematics Teacher*, 90(6), 442–447.
<https://doi.org/10.5951/mt.90.6.0442>
- Kaput, J. J. (2018). 1 What Is Algebra? What Is Algebraic Reasoning? *Algebra In The Early Grades*, 5–18.
<https://doi.org/10.4324/9781315097435-2>
- Kieran, C. (2004). Algebraic Thinking in the Early Grades : What Is It? *The Mathematics Educator*, 8(1), 139–151.
- Kieran, C. (2007). Learning and teaching algebra at the middle school through college levels. In F. K. Lester (Szerk.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (Köt. 6179, Szám 619, o. 707–762). Information Age Publishing.
- Lócska, O. D., Kondé, Z., & Kovács Zoltán. (2023). Rethinking the bridging function of graphical model method in the arithmetic-

algebra transition: The issue of strategy choice. *Thirteenth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME13)*.

Lócska, O. D., & Kovács, Z. (2022). The „Sense-Making-Algebra” project for Hungarian seventh graders. In *Twelfth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME12)* (Köt. TWG03). <https://hal.science/hal-03745145>

Lócska, O. D. (2025). What Teachers Learn From Students’ Problem Posing in Algebra: A Self-Study With Eighth Graders. *Annales Universitatis Paedagogicae Cracoviensis Studia ad Didacticam Mathematicae Pertinentia*, 17, 25-43.

Magyaror Közlöny. (2020). *A Kormány 5/2020. (I. 31.) Korm. rendelete a Nemzeti alaptanterv kiadásáról, bevezetéséről és alkalmazásáról szóló 110/2012. (VI. 4.) Korm. rendelet módosításáról*.

Martin, W. G. (2009). Focus in high school mathematics: reasoning and sense making. In *The National Council of Teachers of Mathematics, Inc.* The National Council of Teachers of Mathematics.

Palatnik, A., & Koichu, B. (2017). Sense making in the context of algebraic activities. *Educational Studies in Mathematics*, 95(3), 245–262. <https://doi.org/10.1007/s10649-016-9744-1>



Registry number: DEENK/377/2026.PL
Subject: PhD Publication List

Candidate: Orsolya Lócska

Doctoral School: Doctoral School of Mathematical and Computational Sciences

MTMT ID: 10078250

List of publications related to the dissertation

Foreign language Hungarian book chapters (1)

1. **Lócska, O.**, Kondé, Z., Kovács, Z.: Rethinking the bridging function of graphical model method in the arithmetic-algebra transition: The issue of strategy choice.
In: Proceedings of the Thirteenth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME13) / Drijvers, P.; Csapodi, C.; Palmér, H.; Gosztonyi, K.; Kónya, E. (szerk.), Alfréd Rényi Institute of Mathematics : Hungarian Academy of Sciences, Budapest, 592-599, 2023. ISBN: 9789637031045

Foreign language scientific articles in international journals (2)

2. **Lócska, O.**: What teachers learn from students' problem posing in algebra: A self-study with eighth graders.
Ann. Univ. Paed. Cracov. Stud. Didact. Math. Pertinentia. 17, 25-43, 2025. ISSN: 2080-9751.
DOI: <http://dx.doi.org/10.24917/20809751.17.2>
3. Kovács, Z., Báró, E., **Lócska, O.**, Herendiné Kónya, E.: Incorporating Problem-Posing into Sixth-Grade Mathematics Classes.
Educ. Sci. 13 (2), 1-22, 2023. EISSN: 2227-7102.
DOI: <http://dx.doi.org/10.3390/educsci13020151>
IF: 2.5

Foreign language conference proceedings (1)

4. **Lócska, O.**, Kovács, Z.: The "Sense-Making-Algebra" project for Hungarian seventh graders.
In: Proceedings of the Twelfth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education / Jeremy Hodgen, Eirini Geraniou, Giorgio Bolondi, Federica Ferretti (szerk.), Free University of Bozen-Bolzano, Italy and ERME (European Society for Research in Mathematics Education), Bozen-Bolzano, Italy, 548-555, 2022. ISBN: 9791221025378.





List of other publications

Foreign language Hungarian books (2)

5. Szerk. **Lócska, O.**, Herendiné Kónya, E.: 2025 MIDK Matematika és Informatika Didaktikai Kutatások: absztraktkötet. Debreceni Egyetem Matematika- és Számítástudományok Doktori Iskola, Debrecen, 74 p., 2025. ISBN: 9789634907039
6. Szerk. **Lócska, O.**, Herendiné Kónya, E.: Matematika és Informatika Didaktikai Kutatások 2024: absztraktkötet. Debreceni Egyetem Matematika- és Számítástudományok Doktori Iskola, Debrecen, 68 p., 2024. ISBN: 9789634905721

Foreign language scientific articles in Hungarian journals (1)

7. **Lócska, O.**, Kovács, Z.: 14 to 18-year-old Hungarian high-school students' view of mathematicians appearing in the media: a case study.
Teach. math. comput. sci. 16 (2), 183-194, 2018. ISSN: 1589-7389.
DOI: <http://dx.doi.org/10.5485/TMCS.2018.0446>

Total IF of journals (all publications): 2,5

Total IF of journals (publications related to the dissertation): 2,5

The Candidate's publication data submitted to the Tudóstér have been validated by DEENK on the basis of the Journal Citation Report (Impact Factor) database.

29 May, 2026

