



Walsh- és Vilenkin-rendszerek mátrix transzformációs közepi

Egyetemi doktori (PhD) értekezés

Nagy Dóra

Témavezető: Dr. habil. Blahota István

DEBRECENI EGYETEM

Természettudományi és Műszaki Doktori Tanács

Matematika- és Számítástudományok Doktori Iskola

Debrecen, 2025.

Ezen értekezést a Debreceni Egyetem Természettudományi és Műszaki Doktori Tanács, Matematika- és Számítástudományok Doktori Iskola Funkcionálanalízis programja keretében készítettem a Debreceni Egyetem természettudományi doktori (PhD) fokozatának elnyerése céljából.

Nyilatkozom arról, hogy a tézisekben leírt eredmények nem képezik más PhD disszertáció részét.

Debrecen, 2025. március 21.

.....
a jelölt aláírása

Tanúsítom, hogy Nagy Dóra doktorjelölt 2025. évben a fent megnevezett Doktori Iskola Funkcionálanalízis programjának keretében irányítással végezte munkáját. Az értekezésben foglalt eredményekhez a jelölt önálló alkotó tevékenységével meghatározóan hozzájárult. Nyilatkozom továbbá arról, hogy a tézisekben leírt eredmények nem képezik más PhD disszertáció részét.

Az értekezés elfogadását javasolom.

Debrecen, 2025. március 21.

.....
a témavezető aláírása

**WALSH- ÉS VILENKIN-RENDSZEREK MÁTRIX
TRANSZFORMÁCIÓS KÖZEPEI**

Értekezés a doktori (Ph.D.) fokozat megszerzése érdekében
a matematika tudományágban

Írta: Nagy Dóra okleveles matematika szakos tanár

Készült a Debreceni Egyetem Matematika- és Számítástudományok Doktori
Iskolája (Funkcionálanalízis programja) keretében

Témavezető: Dr. habil. Blahota István

Az értekezés bírálói:

Dr.

Dr.

A bírálóbizottság:

elnök: Dr.

tagok: Dr.

Dr.

Dr.

Dr.

Az értekezés védésének időpontja: 2025.

Köszönetnyilvánítás

Nagy köszönettel tartozom témavezetőmnek, kollégámnak és kutatótársamnak, Dr. habil. Blahota Istvánnak, aki nélkül ez a disszertáció nem születhetett volna meg. Nagyon hálás vagyok neki felkarolásáért, iránymutatásaiért, szakmai támogatásáért, konstruktív kritikáiért.

Köszönöm valamennyi munkatársamnak (Nyíregyházi Egyetem Matematika és Informatika Intézetének), akik maximális támogatásukkal segítettek, végig mellettem voltak a disszertáció elkészítése során.

Végül, de nem utolsó sorban a családomnak szeretném megköszönni, hogy állandó támogatásukkal, bátorításukkal és szeretetükkel hozzájárultak a disszertáció létrejöttéhez, amiért végig bíztak bennem.

Tartalomjegyzék

Bevezetés	1
1. Történeti áttekintés	3
2. Walsh–Paley- és Walsh–Kaczmarz-rendszer	11
2.1. Jelölések és definíciók	11
2.2. Felhasznált eredmények	16
2.3. Normabecslések	22
2.4. Normakonvergencia	36
3. Vilenkin-rendszer	41
3.1. Jelölések és definíciók	41
3.2. Felhasznált eredmények	45
3.3. Majdnem mindenütti konvergencia	49
3.4. Normabecslések	58
3.5. Normakonvergencia	65
4. Melléklet, összegzési módszerek	71
5. Összefoglaló	75
5.1. Történeti áttekintés	75
5.2. Walsh–Paley- és Walsh–Kaczmarz-rendszer	80
5.3. Vilenkin-rendszer	89
6. Angol nyelvű összefoglaló – Summary	99
6.1 Historical review	99
6.2 Walsh-Paley and Walsh-Kaczmarz systems	104
6.3 Vilenkin systems	113
Bibliográfia	123

Bevezetés

A disszertáció megírásakor az elsődleges cél a szerző által elért tudományos eredmények bemutatása, de lényeges szempont volt egy olyan összefüggő anyag összeállítása is, amely az eredményeket egységes keretbe foglalja.

A harmonikus analízis elmélete számos matematikai eszközt és módszert kínál, amiben fontos szerepet kapnak az ortogonális rendszerek. Az ortogonális függvényrendszerek (és azon belül a Fourier-sorok) elmélete megjelenésük óta jelentős fejlődésen mentek keresztül.

Jelen munka Fourier-sorokkal foglalkozik, azon belül is a Walsh és a Vilenkin ortonormált rendszerekkel. A disszertáció a történeti áttekintés (1. fejezet) után két fő fejezetre különül el. Az első részben (2. fejezet) Walsh–Paley- és Walsh–Kaczmarz-rendszerre, míg a második részben (3. fejezet) Vilenkin-rendszerekre vonatkozó eredmények kerülnek bemutatásra.

A Walsh- és Vilenkin-rendszerekhez kapcsolódó szakirodalom meglehetősen gazdag, ami nemcsak az elméleti, hanem a gyakorlati területekre is elmondható. A fogalmak, a klasszikus eredmények közismertek, a jelölésrendszer is általában egységes. Jelen munkában a napjainkban talán legelterjedtebb Schipp, Wade, Simon és Pál „Walsh Series. An Introduction to Dyadic Harmonic Analysis” [62] című könyvének jelölésrendszerét használjuk.

A szakirodalomban a „Walsh-függvény” kifejezést három ortonormált rendszer elemeire is használják. Nevezetesen, az eredeti Walsh-, a Walsh–Paley- és a Walsh–Kaczmarz-rendszerre. Ezek a rendszerek ugyanazokat a függvényeket tartalmazzák, más-más sorrendben. Közülük ebben a dol-

gozatban a Walsh–Paley- és Walsh–Kaczmarz-rendszerrel foglalkozunk.

A 2. fejezetben bevezetjük a Walsh–Paley- és Walsh–Kaczmarz-rendszerek vizsgálatához szükséges fogalmakat, valamint korábbról ismeretes tételeket is bemutatunk. Walsh–Paley esetben részletesebben foglalkozunk a Fejér-féle magfüggvény néhány approximációs kérdésével, valamint normakonvergenciát látunk be. A továbbiakban a Walsh–Kaczmarz–Fourier-sorozat mátrix transzformációs közepei és a megfelelő függvény közötti normában való különbséget becsüljük meg. A becsléshez a folytonossági modulust használjuk. Norma- és majdnem mindenütti konvergenciára is mondunk ki tételeket hasonló feltételek mellett. Areshidze és Tephnadze néhány állítását (Nörlundról mátrix transzformációs közepekre) általánosítjuk, valamint az általánosítás mellett javítjuk és kiegészítjük Móricz és Siddiqi eredményeit.

A 3. fejezetben bevezetjük a Vilenkin-rendszer tárgyalásához szükséges fogalmakat, tételeket. Norma- és majdnem mindenütt való konvergenciatételeket igazolunk, valamint integrálható függvények Vilenkin–Fourier-sorozathoz tartozó mátrix transzformációs közepeinek konvergenciáját tárgyaljuk Vilenkin–Lebesgue-pontokban.

Az azt követő fejezet mellékletként ismerteti néhány összegzési eljárást, melyeknek a mátrix transzformációs közepek közös általánosításai.

Ezután a disszertáció további fejezetei a magyar és az angol nyelvű összefoglalókat, valamint az irodalomjegyzéket tartalmazzák.

1. fejezet

Történeti áttekintés

Haar Alfréd 1910-ben egy olyan ortonormált rendszert publikált, amelynek minden folytonos függvényhez tartozó Fourier-sora egyenletesen konvergál az eredeti függvényhez és a diadikus intervallumokon állandó értékeket vesz fel. Ezt a rendszert hívjuk ma Haar-rendszernek, amely több más ortogonális rendszer alapjául szolgált.

A Walsh-rendszerek előzményének tekinthető Rademacher-rendszert Hans Adolph Rademacher definiálta, de az általa létrehozott ortogonális rendszer még nem volt teljes. Joseph Leonard Walsh nevéhez fűződik annak egy lehetséges teljessé tétele. Gyakorlati szempontok által vezérelve Walsh 1923-ban [74] a Haar-rendszert vette kiindulási alapként, annak számos jó tulajdonsága miatt. Egy olyan ortonormált függvényrendszert vezetett be, amelyben a függvények a diadikus intervallumokon a $+1$ és a -1 állandó értékeket veszik fel. Ezt a rendszert nevezzük az eredeti Walsh-rendszernek, melynek n -edik tagja a trigonometrikus rendszer n -edik tagjához hasonlóan éppen n -szer vált előjelet, valamint a Haar-rendszerrel szemben egyenletesen korlátos. Walsh azt is megmutatta, hogy a Walsh- és Haar-rendszerek egymás Hadamard transzformációi, aminek köszönhetően belátta, hogy minden folytonos függvény esetén a 2^n -edik indexű Walsh–Fourier-részletösszegekből álló sorozat egyenletesen konvergál az eredeti függvényhez.

A Walsh által konstruált rendszert (mint függvények rendezett hal-

mazát) szokás eredeti Walsh-rendszernek nevezni. Az eredeti Walsh-rendszer elemei felírhatók véges sok Rademacher-függvény szorzataként, ezáltal Raymond Edward Alan Christopher Paley (1932-ben) [59] egy könnyebben kezelhető előállítását adta meg a Walsh-függvényeknek. Ezt Walsh–Paley-rendszer néven ismerjük.

Stefan Kaczmarz vette észre 1929-ben [47], hogy a Walsh-függvények bizonyos egyszerű kombinációkként kifejezhetők a Haar-rendszerben. A. A. Šneider vezette be a Walsh–Kaczmarz-rendszert 1948-ban [68]. Megmutatta azt is, hogy az ily módon létrehozott rendszer egy átrendezése a Walsh–Paley-rendszernek.

A három rendszer sok esetben hasonlóan viselkedik, de számos olyan eredmény ismert, melyben eltérő tulajdonságokat mutatnak. Általánosságban elmondható, hogy az elmúlt 100 évben a Walsh–Paley-rendszer a vizsgálatok szempontjából nagyobb figyelmet kapott (egyszerűségénél fogva), mint az eredeti Walsh-, vagy a Walsh–Kaczmarz-rendszer.

A digitális technológia fejlődésével egyre több gyakorlati területen (digitális jelfeldolgozás, írásfelismerés) alkalmazzák ezeket a rendszereket.

A Walsh-rendszernek létezik egy csoportelméleten alapuló bevezetése is. Jelen munkában is ezt az utat fogjuk követni. Az absztrakt harmonikus analízis egyik fontos modellje a Walsh-rendszer, mivel egy speciális lokálisan kompakt topologikus csoportnak (az úgynevezett diadikus csoportnak) a karakterrendszere. Ezt Nathan Jacob Fine mutatta meg 1949-ben [29].

A Walsh-függvények ilyenféle diadikus reprezentációjának általánosításai a Vilenkin-rendszerek (1947, Naum Yakovlevich Vilenkin [72]). Ha a generáló sorozat korlátos, akkor a Vilenkin-rendszerekkel kapcsolatos állítások gyakran analógak a Walsh–Paley esetekkel, nemkorlátos esetben viszont komoly eltérések mutatkoznak mind az állítások tartalmában, mind a bizonyítási eljárások részleteiben. Az 1990-es évek környékén Gát György a Vilenkin-rendszer (nemkorlátos esetben Rodolfo Toledo Rodolfoval közösen) háromféle általánosítását is bevezette (lásd [31–33]).

A mátrix transzformációs közepek számos jól ismert összegzési mód-

szer általánosításai. Egyszerű megfontolásból következik, hogy a Riesz-, a Nörlund-, a T (súlyozott), a Fejér- (vagy a $(C, 1)$), a Cesàro- (C, α) és a változó paraméterekkel rendelkező Cesàro- (C, α_n) közepek mind a bemutatott mátrix transzformációs összegzési módszer speciális esetei (lásd 4. fejezet).

A trigonometrikus rendszerre vonatkozó mátrix transzformációs közepekre lásd pl. Chandra [26] és Leindler [48] eredményeit, valamint Nantanson és Zsuk könyvét [58], Vilenkin-rendszerekre Blyumin [25] cikkét. Ez a Blyumin [25] cikk becslést ad a Vilenkin–Fourier-sorozat általános lineáris közepével való közelítésére a legjobb közelítések és néhány, a Lebesgue állandókhoz hasonló integrálok tekintetében.

F. Schipp, W. R. Wade, P. Simon és J. Pál [62] klasszikus könyvében (a 191. oldalon) olvashatjuk az

$$\|\sigma_{2^n}^w(f) - f\|_X \leq \omega_X(f, 2^{-n}) + \sum_{k=0}^{n-1} 2^{k-n} \omega_X(f, 2^{-k})$$

egyenlőtlenséget, ahol X egy homogén Banach-tér (például tetszőleges L_p tér, ahol $1 \leq p < \infty$ vagy a folytonos függvények tere) és ω_X a függvények folytonossági modulusa X -ben.

Ezzel kapcsolatos munkánkat Móricz és Siddiqi [53], Areshidze és Tephnadze [4] a Walsh–Nörlund összegzési módszerről, Móricz és Rhoades [52] eredményei a Walsh súlyozott közepek módszeréről és Anakidze, Areshidze, Persson és Tephnadze [3] a T (súlyozott) összegzési módszerről szóló eredményei motiválták. Móricz és Siddiqi Walsh–Cesàro-közepekre vonatkozó eredménye Yano [78], Jastrebova [45] és Skvortsov [66] korábbi eredményein alapul.

A negatív rendű Walsh–Cesàro-közepek közelítő tulajdonságait Goginava [40] vizsgálta.

Fridli, Manchanda és Siddiqi általánosították Móricz és Siddiqi eredményét homogén Banach-terekre és diadikus Hardy-terekre [30]. Az utóbbi években L. Baramidze, D. Baramidze, Memić, Persson, Tephnadze és Wall bizonyítottak eredményeket ezzel a témával kapcsolatban [8, 9, 49, 50]. Lásd még [28, 77]-et. A kétdimenziós eredményekért lásd [22, 24, 56]-et.

Móricz és Siddiqi [53]-ben a következőket igazolták.

1.1. Tétel (Móricz és Siddiqi [53], Theorem 1). *Legyen $f \in L_p(G)$, ahol $1 \leq p \leq \infty$ és legyen $(q_k : k \in \mathbb{N})$ nemnegatív számok sorozata úgy, hogy*

$$\frac{n^{\gamma-1}}{Q_n^\gamma} \sum_{k=0}^{n-1} q_k^\gamma = O(1), \text{ ahol } 1 < \gamma \leq 2. \quad (1.1)$$

Ha $(q_k : k \in \mathbb{N})$ növekvő, akkor

$$\|t_n^w(f) - f\|_p \leq \frac{5}{2Q_n} \sum_{j=0}^{|n|-1} 2^j q_{n-2^j} \omega_p \left(f, \frac{1}{2^j} \right) + c\omega_p \left(f, \frac{1}{2^{|n|}} \right),$$

míg ha $(q_k : k \in \mathbb{N})$ csökkenő, akkor

$$\|t_n^w(f) - f\|_p \leq \frac{5}{2Q_n} \sum_{j=0}^{|n|-1} (Q_{n-2^j-1} - Q_{n-2^{j+1}-1}) \omega_p \left(f, \frac{1}{2^j} \right) + c\omega_p \left(f, \frac{1}{2^{|n|}} \right).$$

1.2. Megjegyzés. A (1.1) feltétel magába foglalja az (4.1)-et és (4.2)-t.

Blahota és Nagy K. [20] hasonló egyenlőtlenségeket igazoltak a mátrix transzformációs közepek esetén. Ez egyben Móricz és Siddiqi [53] valamint Móricz és Rhoades [52] két eredményének közös általánosítása. A mi jelöléseinkkel mondjuk ki a következő tételt.

1.3. Tétel (Blahota és Nagy K. [20], Theorem 1). *Legyen $f \in L_p(G)$, ahol $1 \leq p \leq \infty$. Minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen $(t_{k,n} : 1 \leq k \leq n)$ nemnegatív számok véges sorozata úgy, hogy*

$$\sum_{k=1}^n t_{k,n} = 1$$

teljesül.

a) Ha a $(t_{k,n} : 1 \leq k \leq n)$ véges sorozat rögzített n esetén növekvő, és a

$$t_{n,n} = O\left(\frac{1}{n}\right)$$

feltétel teljesül, akkor

$$\|\sigma_n^{wT}(f) - f\|_p \leq 5 \sum_{j=0}^{|n|-1} 2^j t_{2^{j+1}-1,n} \omega_p\left(f, \frac{1}{2^j}\right) + c\omega_p\left(f, \frac{1}{2^{|n|}}\right).$$

b) Ha a $(t_{k,n} : 1 \leq k \leq n)$ véges sorozat rögzített n esetén csökkenő, akkor

$$\|\sigma_n^{wT}(f) - f\|_p \leq 5 \sum_{j=0}^{|n|-1} 2^j t_{2^j,n} \omega_p\left(f, \frac{1}{2^j}\right) + c\omega_p\left(f, \frac{1}{2^{|n|}}\right).$$

Goginava és Nagy K. [42] cikkükben javították ezeket az eredményeket (a Walsh–Paley-rendszeren), bevezetve az úgynevezett mátrix transzformációs variáció definícióját. Iofina és Volosivets [44] az 1.3. Tételhez hasonló eredményeket publikáltak Vilenkin-rendszereken, hasonló feltételekkel, különböző módszerekkel (függetlenül Móricz, Rhoades, Siddiqi, Fridli és mások technikájától) mátrix transzformációs közepekre.

Areshidze és Tephnadze [4] bizonyították az 1.4. Tételt. Belátták továbbá (növekvő esetre) az 1.1. Tételt is, konkrét együtthatóval és az (1.1) feltétel nélkül. Szintén növekvő sorozattal generált Nörlund-közepekre bizonyított hasonló, (1.1) feltétel nélküli tételt Fridli, Manchanda és Siddiqi [30].

1.4. Tétel (Areshidze és Tephnadze [4], Theorem 1). *Legyen $f \in L_p(G)$, $1 \leq p < \infty$ és legyen t_n^w egy reguláris Nörlund-közép, amelyet $(q_k : k \in \mathbb{N})$ növekvő sorozattal generálunk. Akkor*

$$\|t_n^w(f) - f\|_p \leq 18 \sum_{k=0}^{|n|-1} 2^k \frac{q_{n-2^k}}{Q_n} \omega_p\left(f, \frac{1}{2^k}\right) + 12\omega_p\left(f, \frac{1}{2^{|n|}}\right).$$

A T (súlyozott) közepekre (lásd 4. fejezet, 4. pont) vonatkozó hasonló eredményekért lásd Anakidze, Areshidze, Persson és Tephnadze [3] cikkét.

A 2.3.1. Tétel (más módszerrel való bizonyítással) javítja és általánosítja az 1.1. és 1.4. Tétel növekvő esetét, valamint javítja az 1.3. Tétel csökkenő esetét. (A növekvő (q_k) sorozat megfelel a csökkenő $(t_{k,n})$ sorozatnak a (2.3) kapcsolattal.)

A Kaczmarz-féle felsorolásban szereplő Walsh-rendszert több szerző is tanulmányozta (lásd pl. [34, 37, 39, 55, 57, 61, 65, 67–69, 79]-et). Köztudott, hogy a Walsh–Kaczmarz-rendszer Dirichlet-féle magfüggvényének viselkedése bizonyos értelemben rosszabb, mint a Walsh–Paley magfüggvényé. Ugyanis Šneider [68]-ben bebizonyította, hogy a

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{D_n^\kappa(x)}{\log n} > 0$$

egyenlőtlenség majdnem minden $x \in G$ -re teljesül.

Schipp [61] és Young [79] belátták, hogy a Walsh–Kaczmarz-rendszer konvergencia-rendszer. Skvortsov [67]-ben megmutatta, hogy a Walsh–Kaczmarz-rendszer Fejér-közepei egyenletesen konvergálnak f -hez bármilyen f folytonos függvény esetén. Gát [34]-ben bizonyította be minden integrálható függvényre, hogy a Walsh–Kaczmarz-rendszerre vonatkozó Fejér-közepek majdnem mindenütt konvergálnak a függvényhez. Továbbá, (analóg módon a Walsh–Paley esethez) $S_n^\kappa(f) \rightarrow f$ az $L_p(G)$ normában, amint $n \rightarrow \infty$ minden $1 < p < \infty$ esetén.

Az utóbbi években többek között Baramidze, Blahota, Gát, Goginava, Nagy K., Memić, Persson, Salim, Tephnadze és Wall publikáltak eredményeket a Nörlund és a mátrix transzformációs közepekre (lásd [8, 14, 23, 42, 50]-ot). Lásd még [28, 76, 77]-et. A Vilenkin verzióhoz lásd [2]-t és [21]-et. A negatív rendű Walsh–Cesàro-közepek közelítő tulajdonságait Goginava [40], a Vilenkin eseteket Shavardenidze [63] és Tephnadze [70] vizsgálták.

A Walsh–Paley-rendszerrel kapcsolatos további eredményekért lásd [23, 24]-et, korlátos Vilenkin rendszerekhez [21, 22]-t.

Ezen módszerek Walsh–Fourier-sorral kapcsolatos további vonatkozásait a [28, 77] cikkek tartalmazzák, Vilenkin-rendszerre lásd még Av-

diszpaniá és Pepić [5] cikkét. A Nörlund-közepek konvergencia eredményeihez és a Vilenkin-rendszer súlyozott átlagához lásd [6, 7]-et.

Goginava és Gogoladze vezették be [41] a Vilenkin–Lebesgue-pont fogalmát, általánosítva a Weisz által definiált [75] Walsh–Lebesgue-pontot. Nevezetesen, egy $x \in G_m$ pont az $f \in L_1(G_m)$ Vilenkin–Lebesgue-pontja, ha

$$\lim_{A \rightarrow \infty} \sum_{s=0}^{A-1} M_s \sum_{r_s=1}^{m_s-1} \int_{I_A(x-r_s e_s)} |f(t) - f(x)| d\mu(t) = 0,$$

ahol $e_s := (0, \dots, 0, 1, 0, \dots) \in G_m$ (csak az s -edik koordináta 1, a többi 0).

A Vilenkin–Fourier-analízis fontos eredménye, hogy ha $f \in L_1(G_m)$, akkor $S_{M_n}(f) \rightarrow f$ és $\sigma_n(f) \rightarrow f$, amint $n \rightarrow \infty$, majdnem mindeütt. Ezen túlmenően minden $L_1(G_m)$ -beli f függvényről ismert, hogy G_m majdnem minden pontja a függvény Vilenkin–Lebesgue-pontja, és minden ilyen x pontra

$$S_{M_n}(f; x) \rightarrow f(x),$$

amint $n \rightarrow \infty$.

Szintén Vilenkin-rendszerekre D. Baramidze, Dvalashvili és Tutberidze [6], valamint a D. Baramidze, Gogolashvili és Nadirashvili [7] bizonyított Lebesgue-pontokhoz kapcsolódó tételeket. Előbbiek Nörlund-közepekkel, míg utóbbiak súlyozott átlagokkal foglalkoztak.

A Lebesgue-pontokkal kapcsolatban fő célunk, hogy általánosítsuk D. Baramidze, Dvalashvili, Tutberidze és D. Baramidze, Gogolashvili, Nadirashvili eredményeit mátrix transzformációs közepekre.

Megemlítjük, hogy Iofina és Volosivets [44] hasonló eredményeket értek el Vilenkin-rendszereken, hasonló feltételekkel, különböző módszerekkel (függetlenül Móricz, Rhoades, Siddiqi, Fridli, Goginava, Gát, Tephnadze, Nagy K., illetve mások módszerétől).

A de La Vallée Poussin-típusú mátrix transzformációs közepeket a Walsh-rendszerhez Blahota és Gát vezették be a [14]-ben. Lásd még [11]-et, Vilenkin-rendszerekre [73]-et.

2. fejezet

Walsh–Paley- és Walsh–Kaczmarz-rendszer

Ez a fejezet Blahota és Nagy D. [17] és [19] cikkeiben megjelent eredményein alapul.

2.1. Jelölések és definíciók

Ebben a fejezetben vezetjük be a Walsh–Paley- és Walsh–Kaczmarz-rendszerrel kapcsolatos jelöléseket, fogalmakat.

Legyen \mathbb{P} a pozitív egész számok halmaza és $\mathbb{N} := \mathbb{P} \cup \{0\}$. Jelölje a másodrendű diszkrét ciklikus csoportot \mathbb{Z}_2 . A csoportművelet az összeadás moduló 2. Legyen minden részhalmaz nyitott. A μ_k Haar mérték legyen úgy megadva a k -adik \mathbb{Z}_2 -n ($k \in \mathbb{N}$), hogy $\mu_k(\{0\}) := \mu_k(\{1\}) := 1/2$. Legyen $G := \prod_{k=0}^{\infty} \mathbb{Z}_2$ a diadikus csoport (diszkrét ciklikus csoportok direkt szorzata). A G elemei az $x := (x_0, x_1, \dots, x_k, \dots)$ sorozatokkal reprezentálhatóak, ahol $x_k \in \{0, 1\}$ ($k \in \mathbb{N}$). A G -n végzett csoportművelet a koordinátánkénti összeadás (+ jelöléssel) moduló 2, valamint legyen a μ normalizált Haar-mérték a μ_k mértékek szorzatmértéke és a topológia a szorzattopológia.

A diadikus intervallumok definiálása az alábbi módon történik

$$I_0(x) := G, \quad I_n(x) := \{y \in G : y = (x_0, \dots, x_{n-1}, y_n, y_{n+1}, \dots)\},$$

ahol $x \in G, n \in \mathbb{P}$ és jelölje $I_n := I_n(0)$. Az intervallumok a G topológiájának egy környezetbázisát alkotják.

Jelölje $L_p(G)$ a szokásos Lebesgue-teret G -n (a megfelelő $\|\cdot\|_p$ normákkal).

A jelölések rövidsége érdekében megállapodunk abban, hogy $L_\infty(G)$ -t írunk $C(G)$ helyett és $\|f\|_\infty := \sup\{|f(x)| : x \in G\}$. Nyilvánvaló, hogy L_∞ nem azonos a folytonos függvények terével, hanem annak egy megfelelő altere. Mivel a folytonos függvények esetében a szuprémum norma és a L_∞ norma megegyezik, a kényelem kedvéért reméljük, hogy az olvasó el tudja fogadni ezt a jelölési egyszerűsítést.

Bevezetjük a Walsh–Fourier-analízis néhány fogalmát.

Az n -edik Rademacher-függvény az x helyen legyen

$$r_n(x) := (-1)^{x_n} \quad (x \in G, n \in \mathbb{N}).$$

Minden természetes szám egyértelműen előállítható kettes számrendszerben, és ez a felírás véges (csak véges számú n_k különbözik nullától)

$$n = \sum_{k=0}^{\infty} n_k 2^k, \quad n_k \in \{0, 1\} \quad (k \in \mathbb{N}).$$

Szükségünk lesz még az alábbi jelölésre is. Ha $n \in \mathbb{P}$, akkor $|n| := \max\{j \in \mathbb{N} : n_j \neq 0\}$. Ez azt jelenti, hogy $2^{|n|} \leq n < 2^{|n|+1}$.

A Walsh–Paley-függvényeket az alábbi módon definiáljuk. Legyen $w_0(x) := 1$ és ha $n \in \mathbb{P}$, akkor legyen

$$w_n(x) := \prod_{k=0}^{\infty} r_k^{n_k}(x) = (-1)^{\sum_{k=0}^{|n|} n_k x_k}.$$

Ismert [43], hogy a Walsh–Paley-rendszer $(w_n, n \in \mathbb{N})$ a $(G, +)$ karakterrendszere.

Legyen az $L_p(G)$ folytonossági modulus

$$\omega_p(f, \delta) := \sup_{|t| < \delta} \|f(\cdot + t) - f(\cdot)\|_p,$$

ahol $f \in L_p(G)$ és $\delta > 0$, valamint

$$|x| := \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x_i}{2^{i+1}} \quad \text{minden } x \in G$$

esetén. Az $f \in C(G)$ esetben a p helyére ∞ -t írunk.

A Walsh–Kaczmarz-rendszert a következő módon vezetjük be. Legyen $\kappa_0 := 1$ és $n \in \mathbb{P}$ esetén legyen

$$\kappa_n(x) := r_{|n|}(x) \prod_{k=0}^{|n|-1} r_{|n|-1-k}^{n_k}(x) = r_{|n|}(x) (-1)^{\sum_{k=0}^{|n|-1} n_k x_{|n|-1-k}}.$$

Könnyen belátható, hogy

$$r_n = w_{2^n} = \kappa_{2^n}$$

minden $n \in \mathbb{N}$ -re.

A Walsh–Kaczmarz- és Walsh–Paley-függvények halmaza diadikus blokkonként megegyezik. Vagyis

$$\{\kappa_n : 2^k \leq n < 2^{k+1}\} = \{w_n : 2^k \leq n < 2^{k+1}\} \quad (2.1)$$

minden $k \in \mathbb{N}$ esetén és $\kappa_0 = w_0$.

A Walsh–Paley- és Walsh–Kaczmarz-rendszerek ortonormáltak és teljesek $L_1(G)$ -ben.

Skvortsov (lásd [67]) a $\tau_n : G \rightarrow G$ transzformáció

$$\tau_n(x) := (x_{n-1}, x_{n-2}, \dots, x_1, x_0, x_n, x_{n-1}, \dots)$$

segítségével összefüggést adott meg a Walsh–Kaczmarz- és Walsh–Paley-függvények között. Nevezetesen, minden $n \in \mathbb{N}$ és $x \in G$ esetén

$$\kappa_n(x) = r_{|n|}(x) w_{n-2|n|}(\tau_{|n|}(x)).$$

Fontos megjegyezni, hogy a $\tau_n(\cdot)$ függvény megőrzi a mértéket.

Legyen \mathcal{P}_n^ξ az n -nél kisebb rendű Walsh–Paley- vagy Walsh–Kaczmarz-polinomok együttese, vagyis a függvény alakja

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n-1} c_k \xi_k(x),$$

ahol $x \in G$, (c_k) komplex számok sorozata és $\xi_n = w_n$ vagy $\xi_n = \kappa_n$ minden $n \in \mathbb{N}$ esetén. A (2.1) egyenlőség azt eredményezi, hogy bevezethetjük a következő jelölést

$$\mathcal{P}_{2^n} := \mathcal{P}_{2^n}^w = \mathcal{P}_{2^n}^\kappa.$$

Világos, hogy a Walsh–Paley- és a Walsh–Kaczmarz-polinomok halmazai – amelyeket \mathcal{P} jelöl – megegyeznek.

A Lipschitz osztályok $L_p(G)$ -ben a következők. Minden $\alpha > 0$ esetén legyen

$$\text{Lip}(\alpha, p, G) := \{f \in L_p(G) : \omega_p(f, \delta) = O(\delta^\alpha), \text{ amint } \delta \rightarrow 0\}.$$

Továbbá

$$\text{Lip}(\alpha, C(G)) := \{f \in C(G) : |f(x+y) - f(x)| \leq c|y|^\alpha, x, y \in G\}.$$

Később az egyszerűség kedvéért (lásd a 2.4.4. Tételt) $\text{Lip}(\alpha, C(G))$ helyett $\text{Lip}(\alpha, \infty, G)$ -t írunk.

Definiáljuk az n -edik Fourier-együtthatót, a Fourier-sor n -edik részletösszegét, az n -edik Fejér-közepet és az n -edik Dirichlet-féle magfüggvényt (Walsh–Paley- vagy Walsh–Kaczmarz-rendszerekre) az alábbi módokon.

$$\hat{f}^\xi(n) := \int_G f \xi_n d\mu, \text{ ha } n \in \mathbb{N},$$

$$S_n^\xi(f) := \sum_{k=0}^{n-1} \hat{f}^\xi(k) \xi_k, \quad \sigma_n^\xi(f) := \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n S_k^\xi(f), \quad D_n^\xi := \sum_{k=0}^{n-1} \xi_k,$$

ahol $n \in \mathbb{P}$. Ismert, hogy

$$S_n^\xi(f; x) = \int_G f(u) D_n^\xi(x+u) d\mu(u). \quad (2.2)$$

A Fejér-féle magfüggvények a Dirichlet-féle magfüggvények számtani közepei, azaz

$$K_n^\xi := \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n D_k^\xi.$$

Legyen $T := (t_{i,j})_{i,j=1}^\infty$ egy duplán végtelen számmátrix. Mindig feltételezzük, hogy a T -mátrix felső háromszög alakú, azaz $t_{i,j} := 0$, ha $i > j$. Legyen a T -mátrix által meghatározott n -edik mátrix transzformációs közép

$$\sigma_n^{\xi T}(f; x) := \sum_{k=1}^n t_{k,n} S_k^\xi(f; x).$$

Mivel a T -mátrix n -edik oszlopa határozza meg a $\sigma_n^{\xi T}$ mátrix transzformációs közepet és definíciója csak véges számú tagot tartalmaz, ezért az egyszerűség kedvéért azt mondjuk, hogy $(t_{k,n} : 1 \leq k \leq n, k \in \mathbb{P})$ véges számsorozat minden $n \in \mathbb{P}$ -re.

Használni fogjuk még a következő jelölést.

$$\Delta t_{k,n} := t_{k,n} - t_{k+1,n},$$

ahol $k \in \{1, \dots, n\}$, $n \in \mathbb{P}$ és $t_{n+1,n} := 0$.

A $\sum_{k=1}^n t_{k,n} = 1$ feltétellel a Nörlund-közepék (lásd 4. fejezet, 3. pont) speciális mátrix transzformációs közepek, nevezetesen

$$t_{k,n} := \frac{q_{n-k}}{Q_n}. \quad (2.3)$$

A továbbiakban legyen $(t_{k,n} : 1 \leq k \leq n, k \in \mathbb{P})$ nemnegatív számok véges sorozata minden $n \in \mathbb{P}$ esetén. Az n -edik mátrix transzformációs magfüggvény definíciója

$$K_n^{\xi T}(x) := \sum_{k=1}^n t_{k,n} D_k^\xi(x).$$

(2.2) alapján könnyen belátható, hogy $x, u \in G$ esetén

$$\sigma_n^{\xi T}(f; x) = \int_G f(u) K_n^{\xi T}(x + u) d\mu(u),$$

ami jól mutatja a magfüggvények vizsgálatának fontosságát.

Megjegyezzük továbbá, hogy ebben a fejezetben a c egy pozitív abszolút konstans jelöl.

2.2. Felhasznált eredmények

2.2.1. Lemma (Paley's Lemma [62], 7. o.). *Legyen $n \in \mathbb{N}$. Ekkor*

$$D_{2^n}(x) := D_{2^n}^w(x) = D_{2^n}^k(x) = \begin{cases} 2^n, & \text{ha } x \in I_n, \\ 0, & \text{ha } x \notin I_n. \end{cases}$$

A következő lemma 2.2.1. Lemma és a Dirichlet-féle magfüggvények definíciójának egyszerű következménye. A szakirodalomban számos cikkben megtalálható. Lásd például [46].

2.2.2. Lemma. *Legyen $k, n \in \mathbb{N}$ és $k < 2^n$. Akkor*

$$D_{2^n-k}^w = D_{2^n} - w_{2^n-1} D_k^w.$$

2.2.3. Lemma (Gát [34], Corollary 6.). *Legyen $n, t \in \mathbb{N}$ és $t < n$. Ekkor*

$$K_{2^n}^w(x) = \begin{cases} 2^{t-1}, & \text{ha } x \in I_t \setminus I_{t+1}, x - e_t \in I_n, \\ \frac{2^n+1}{2}, & \text{ha } x \in I_n, \\ 0, & \text{egyébként.} \end{cases}$$

2.2.4. Lemma (Fine [29], Lemma 2). *Legyen $n = 2^k + m$, ahol $k, m \in \mathbb{N}$ és $m \leq 2^k$. Ekkor*

$$nK_n^w = 2^k K_{2^k}^w + mD_{2^k} + r_k m K_m^w.$$

A következő lemma a 2.2.1., a 2.2.3. és a 2.2.4. Lemma ismert következménye.

2.2.5. Lemma. *Legyen $n \in \mathbb{P}$. Akkor*

$$n|K_n^w| \leq 3 \sum_{l=0}^{|n|} 2^l K_{2^l}^w.$$

2.2.6. Lemma (Blahota [12], Lemma 9). *Legyen $k, n \in \mathbb{P}$ és $(t_{k,n} : 1 \leq k \leq n)$ valós számok véges sorozata. Ekkor*

$$\begin{aligned} K_n^{wT} = & D_{2^{|n|}} \sum_{k=1}^n t_{k,n} - w_{2^{|n|-1}} t_{1,n} (2^{|n|} - 1) K_{2^{|n|-1}}^w \\ & + w_{2^{|n|-1}} \sum_{k=1}^{2^{|n|-2}} \Delta t_{2^{|n|-k-1},n} k K_k^w + r_{|n|} \sum_{k=1}^{n-2^{|n|}} t_{2^{|n|+k},n} D_k^w. \end{aligned}$$

2.2.7. Következmény (Blahota és Nagy D. [19]). *Legyen $k \in \mathbb{P}$, $n \in \mathbb{N}$ és $(t_{k,2^n} : 1 \leq k \leq 2^n)$ valós számok véges sorozata. Ekkor az alábbi egyenlőség áll fenn*

$$\begin{aligned} K_{2^n}^{wT} = & D_{2^n} \sum_{k=1}^{2^n} t_{k,2^n} - w_{2^n-1} t_{1,2^n} (2^n - 1) K_{2^n-1}^w \\ & + w_{2^n-1} \sum_{k=1}^{2^n-2} \Delta t_{2^n-k-1,2^n} k K_k^w. \end{aligned}$$

2.2.8. Lemma (Persson, Tephnadze és Weisz [60] 137-138. o.). *Legyen $n \in \mathbb{N}$ és $f \in L_p(G)$ tetszőleges, $1 \leq p < \infty$ esetén. Ekkor a következő egyenlőtlenség teljesül*

$$\|\sigma_n^w(f) - f\|_p \leq 3 \sum_{s=0}^{|n|} \frac{2^s}{2^{|n|}} \omega_p \left(f, \frac{1}{2^s} \right).$$

2.2.9. Lemma (Skvortsov [67]). *Ha $j, k \in \mathbb{N}$ és $k \in \{0, 1, \dots, 2^j - 1\}$, akkor minden $x \in G$ esetén*

$$D_{2^j+k}^k(x) = D_{2^j}(x) + r_j(x) D_k^w(\tau_j(x)).$$

2.2.10. Lemma (Toledo [71]).

$$\sup_{n \in \mathbb{P}} \|K_n^w\|_1 = \frac{17}{15}.$$

2.2.11. Lemma (Blahota [10]). *Legyen $n \in \mathbb{P}$. Ekkor*

$$\|K_{2^n-1}^w\|_1 = 1.$$

2.2.12. Lemma (Skvortsov [67]). *Írjuk fel $n \in \mathbb{P}$ -t $n = 2^{|n|} + k$ alakban, ahol $k \in \{0, \dots, 2^{|n|} - 1\}$. Ekkor*

$$\begin{aligned} nK_n^\kappa(x) = & 1 + \sum_{i=0}^{|n|-1} 2^i D_{2^i}(x) + \sum_{i=0}^{|n|-1} 2^i r_i(x) K_{2^i}^w(\tau_i(x)) + kD_{2^{|n|}}(x) \\ & + kr_{|n|}(x) K_k^w(\tau_{|n|}(x)). \end{aligned}$$

2.2.13. Lemma (Blahota és Nagy D. [17]).

$$\sup_{n \in \mathbb{P}} \|K_n^\kappa\|_1 \leq \frac{32}{15}.$$

Bizonyítás. A 2.2.1., a 2.2.10. és a 2.2.12. Lemmák felhasználásával kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} n \|K_n^\kappa\|_1 & \leq 1 + \sum_{i=0}^{|n|-1} 2^i + \sum_{i=0}^{|n|-1} 2^i \frac{17}{15} + k + k \frac{17}{15} \\ & = 1 + (2^{|n|} - 1 + k) \frac{32}{15} \\ & = n \frac{32}{15} - \frac{17}{15}, \end{aligned}$$

ahol $n = 2^{|n|} + k$. □

2.2.14. Lemma (Móricz és Siddiqi [53]). *Legyen $f \in L_p(G)$, $1 \leq p \leq \infty$ és $g \in \mathcal{P}_{2^n}$, ahol $n \in \mathbb{N}$. Ekkor*

$$\left\| \int_G g(t) r_n(t) (f(\cdot + t) - f(\cdot)) d\mu(t) \right\|_p \leq \frac{1}{2} \|g\|_1 \omega_p \left(f, \frac{1}{2^n} \right).$$

2.2.15. Lemma (Blahota és Nagy D. [17]). *Legyen $n \in \mathbb{P}$. Ekkor minden $x \in G$ -re kapjuk, hogy*

$$\begin{aligned}
K_n^{\kappa T}(x) &= \sum_{j=0}^{|n|-1} \sum_{k=0}^{2^j-1} t_{2^j+k,n} D_{2^j}(x) + \sum_{j=0}^{|n|-1} r_j(x) \sum_{k=1}^{2^j-2} \Delta t_{2^j+k,n} k K_k^w(\tau_j(x)) \\
&\quad + \sum_{j=0}^{|n|-1} r_j(x) t_{2^{j+1}-1,n} (2^j - 1) K_{2^j-1}^w(\tau_j(x)) \\
&\quad + \sum_{k=0}^{n-2^{|n|}} t_{2^{|n|+k,n}} D_{2^{|n|}}(x) \\
&\quad + r_{|n|}(x) \sum_{k=1}^{n-2^{|n|}} \Delta t_{2^{|n|+k,n}} k K_k^w(\tau_{|n|}(x)) \\
&:= \sum_{j=1}^5 K_{j,n}(x).
\end{aligned}$$

Bizonyítás. Felírjuk, hogy

$$\begin{aligned}
K_n^{\kappa T}(x) &= \sum_{k=1}^{2^{|n|}-1} t_{k,n} D_k^{\kappa}(x) + \sum_{k=2^{|n|}}^n t_{k,n} D_k^{\kappa}(x) \\
&= \sum_{j=0}^{|n|-1} \sum_{k=2^j}^{2^{j+1}-1} t_{k,n} D_k^{\kappa}(x) + \sum_{k=2^{|n|}}^n t_{k,n} D_k^{\kappa}(x) \\
&=: K_n^{\kappa A}(x) + K_n^{\kappa B}(x).
\end{aligned}$$

A 2.2.9. Lemmát alkalmazva $K_n^{\kappa A}(x)$ -re kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
K_n^{\kappa A}(x) &= \sum_{j=0}^{|n|-1} \sum_{k=0}^{2^j-1} t_{2^j+k,n} D_{2^j+k}^{\kappa}(x) \\
&= \sum_{j=0}^{|n|-1} \sum_{k=0}^{2^j-1} t_{2^j+k,n} D_{2^j}(x) + \sum_{j=0}^{|n|-1} r_j(x) \sum_{k=1}^{2^j-1} t_{2^j+k,n} D_k^w(\tau_j(x)).
\end{aligned}$$

Az Abel-transzformáció segítségével adódik a

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{2^j-1} t_{2^j+k,n} D_k^w(\tau_j(x)) &= \sum_{k=1}^{2^j-2} \Delta t_{2^j+k,n} k K_k^w(\tau_j(x)) \\ &\quad + t_{2^{j+1}-1,n} (2^j - 1) K_{2^j-1}^w(\tau_j(x)) \end{aligned}$$

egyenlőség, amiből

$$\begin{aligned} K_n^{\kappa A}(x) &= \sum_{j=0}^{|n|-1} \sum_{k=0}^{2^j-1} t_{2^j+k,n} D_{2^j}(x) \\ &\quad + \sum_{j=0}^{|n|-1} r_j(x) \left(\sum_{k=1}^{2^j-2} \Delta t_{2^j+k,n} k K_k^w(\tau_j(x)) \right. \\ &\quad \left. + t_{2^{j+1}-1,n} (2^j - 1) K_{2^j-1}^w(\tau_j(x)) \right) \end{aligned}$$

következik. Hasonlóan,

$$\begin{aligned} K_n^{\kappa B}(x) &= \sum_{k=0}^{n-2^{|n|}} t_{2^{|n|}+k,n} D_{2^{|n|}+k}^{\kappa}(x) \\ &= \sum_{k=0}^{n-2^{|n|}} t_{2^{|n|}+k,n} D_{2^{|n|}}(x) + r_{|n|}(x) \sum_{k=1}^{n-2^{|n|}} t_{2^{|n|}+k,n} D_k^w(\tau_{|n|}(x)), \end{aligned}$$

majd

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n-2^{|n|}} t_{2^{|n|}+k,n} D_k^w(\tau_{|n|}(x)) &= \sum_{k=1}^{n-2^{|n|}-1} \Delta t_{2^{|n|}+k,n} k K_k^w(\tau_{|n|}(x)) \\ &\quad + t_{n,n} (n - 2^{|n|}) K_{n-2^{|n|}}^w(\tau_{|n|}(x)) \\ &= \sum_{k=1}^{n-2^{|n|}} \Delta t_{2^{|n|}+k,n} k K_k^w(\tau_{|n|}(x)), \end{aligned}$$

és ezért

$$K_n^{\kappa B}(x) = \sum_{k=0}^{n-2^{|n|}} t_{2^{|n|+k},n} D_{2^{|n|}}(x) + r_{|n|}(x) \sum_{k=1}^{n-2^{|n|}} \Delta t_{2^{|n|+k},n} k K_k^w(\tau_{|n|}(x)).$$

□

2.2.16. Lemma (Blahota és Nagy D. [19]). *Legyen $n \in \mathbb{P}$ és $(t_{k,n} : 1 \leq k \leq n)$ nemnegatív számok véges sorozata úgy, hogy*

$$\sum_{k=1}^n t_{k,n} = 1. \quad (2.4)$$

Tegyük fel, hogy az alábbiak közül valamelyik teljesül.

a) *A $(t_{k,n} : 1 \leq k \leq n)$ véges sorozat rögzített n esetén növekvő. Ekkor tegyük fel, hogy*

$$t_{n,n} = O\left(\frac{1}{n}\right). \quad (2.5)$$

b) *A $(t_{k,n} : 1 \leq k \leq n)$ véges sorozat rögzített n esetén csökkenő. Ekkor mindkét esetben fennáll a*

$$\|K_n^{\kappa T}\|_1 \leq c$$

egyenlőtlenség.

Bizonyítás. Az Abel-transzformációt alkalmazva kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} K_n^{\kappa T} &= \sum_{k=1}^n t_{k,n} D_k^{\kappa} \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} (t_{k,n} - t_{k+1,n}) k K_k^{\kappa} + t_{n,n} n K_n^{\kappa}, \end{aligned}$$

ebből a 2.2.13 Lemmát használva

$$\begin{aligned} \|K_n^{\kappa T}\|_1 &\leq \sum_{k=1}^{n-1} |\Delta t_{k,n}| k \|K_k^{\kappa}\|_1 + t_{n,n} n \|K_n^{\kappa}\|_1 \\ &\leq \frac{32}{15} \left(\sum_{k=1}^{n-1} |\Delta t_{k,n}| k + t_{n,n} n \right) \end{aligned}$$

adódik.

Az a) esetben (ami azt jelenti, hogy $\Delta t_{k,n} \leq 0$) a (2.4) és a (2.5) feltételekkel kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n-1} |\Delta t_{k,n}| k + t_{n,n} n &= 2nt_{n,n} - \sum_{k=1}^n t_{k,n} \\ &= 2nt_{n,n} - 1 \leq 2c - 1 \leq c. \end{aligned}$$

A b) esetben (ami azt jelenti, hogy $\Delta t_{k,n} \geq 0$) a (2.4) egyenlőség adja, hogy

$$\sum_{k=1}^{n-1} |\Delta t_{k,n}| k + t_{n,n} n = \sum_{k=1}^n t_{k,n} = 1.$$

□

2.2.17. Megjegyzés. A b) esetben a következő becslést kapjuk

$$\|K_n^{\kappa T}\|_1 \leq \frac{32}{15}.$$

2.3. Normabecslések

Az alábbi tétel a [4]-beli Theorem 1 és az [20]-beli Theorem 1 közös javítása illetve az első esetben általánosítása. (A fenti tételekben szereplő konstansokat nevesítettük, illetve javítottuk.)

2.3.1. Tétel (Blahota és Nagy D. [19]). *Legyen $f \in L_p(G)$ és $1 \leq p \leq \infty$. Minden $n \in \mathbb{N}$ -re legyen $(t_{k,n} : 1 \leq k \leq n)$ nemnegatív számok véges sorozata úgy, hogy*

$$\sum_{k=1}^n t_{k,n} = 1.$$

Ha a $(t_{k,n} : 1 \leq k \leq n)$ véges sorozat rögzített n esetén csökkenő, akkor

$$\|\sigma_n^{wT}(f) - f\|_p \leq \frac{31}{15} \sum_{k=0}^{|n|-1} 2^k t_{2^k, n} \omega_p \left(f, \frac{1}{2^k} \right) + \frac{47}{30} \omega_p \left(f, \frac{1}{2^{|n|}} \right)$$

teljesül.

Bizonyítás. A 2.3.4 Tétel b) része hasonló állítást fogalmaz meg Walsh–Kaczmarz-rendszerre, melynek bizonyítása alapján ugyanazzal a módszerrel könnyen megkapjuk ezt az eredményt is. \square

A 2.3.2. Tétel az [4]-beli Theorem 2 (Nörlundból és T -mátrix transzformációs összegzésből) általánosított és továbbfejlesztett változata.

2.3.2. Tétel (Blahota és Nagy D. [19]). *Legyen a $(t_{k,2^n} : 1 \leq k \leq 2^n)$ nemnegatív számok véges sorozata minden rögzített $n \in \mathbb{N}$ esetén növekvő és legyen*

$$\sum_{k=1}^{2^n} t_{k,2^n} = 1. \quad (2.6)$$

Ekkor tetszőleges $f \in L_p(G)$, $1 \leq p < \infty$ esetén a következő egyenlőtlenséget kapjuk

$$\begin{aligned} \|\sigma_{2^n}^{wT}(f) - f\|_p &\leq \sum_{s=0}^{n-1} \frac{2^s}{2^n} \omega_p \left(f, \frac{1}{2^s} \right) \\ &\quad + 3 \sum_{s=0}^{n-1} (n-s) 2^s t_{2^{n-2^s+1}, 2^n} \omega_p \left(f, \frac{1}{2^s} \right) \\ &\quad + \left(2 + \frac{1}{2^n} \right) \omega_p \left(f, \frac{1}{2^n} \right). \end{aligned}$$

Bizonyítás. A 2.2.7. következményt, a (2.6) feltételt és a

$$(2^n - 1) K_{2^n-1}^w = 2^n K_{2^n}^w - D_{2^n}$$

egyenlőséget használva kapjuk az alábbi felbontást

$$\begin{aligned} & \sigma_{2^n}^{wT}(f; x) - f(x) \\ &= \int_G D_{2^n}(u)(f(x+u) - f(x))d\mu(u) \\ & \quad - \int_G w_{2^n-1}(u)t_{1,2^n}2^n K_{2^n}^w(u)(f(x+u) - f(x))d\mu(u) \\ & \quad + \int_G w_{2^n-1}(u)t_{1,2^n}D_{2^n}(u)(f(x+u) - f(x))d\mu(u) \\ & \quad + \int_G w_{2^n-1}(u) \sum_{k=1}^{2^n-2} \Delta t_{2^n-k-1,2^n} k K_k^w(u)(f(x+u) \\ & \quad - f(x))d\mu(u) =: I + II + III + IV. \end{aligned}$$

Az általánosított Minkowski-egyenlőtlenség (más néven Minkowski-féle integrál-egyenlőtlenség), a 2.2.1. Lemma, a (2.6) feltétel és a $(t_{k,2^n} : 1 \leq k \leq 2^n)$ sorozat monotonitása alapján a következő egyenlőtlenségeket kapjuk

$$\begin{aligned} \|I\|_p &\leq \int_{I_n} D_{2^n}(u) \|f(\cdot + u) - f(\cdot)\|_p d\mu(u) \\ &\leq \omega_p \left(f, \frac{1}{2^n} \right) \end{aligned} \quad (2.7)$$

és

$$\begin{aligned} \|III\|_p &\leq t_{1,2^n} \int_{I_n} D_{2^n}(u) \|f(\cdot + u) - f(\cdot)\|_p d\mu(u) \\ &\leq \frac{1}{2^n} \omega_p \left(f, \frac{1}{2^n} \right). \end{aligned} \quad (2.8)$$

Az általánosított Minkowski-egyenlőtlenség, valamint a 2.2.3. Lemma alapján

$$\begin{aligned}
\|II\|_p &\leq \int_G \|f(\cdot + u) - f(\cdot)\|_p K_{2^n}^w(u) d\mu(u) & (2.9) \\
&= \int_{I_n} \|f(\cdot + u) - f(\cdot)\|_p K_{2^n}^w(u) d\mu(u) \\
&\quad + \sum_{s=0}^{n-1} \int_{I_n(e_s)} \|f(\cdot + u) - f(\cdot)\|_p K_{2^s}^w(u) d\mu(u) \\
&\leq \frac{2^n + 1}{2} \int_{I_n} \|f(\cdot + u) - f(\cdot)\|_p d\mu(u) \\
&\quad + \sum_{s=0}^{n-1} 2^{s-1} \int_{I_n(e_s)} \|f(\cdot + u) - f(\cdot)\|_p d\mu(u) \\
&\leq \frac{2^n + 1}{2} \frac{1}{2^n} \omega_p \left(f, \frac{1}{2^n} \right) + \sum_{s=0}^{n-1} \frac{2^{s-1}}{2^n} \omega_p \left(f, \frac{1}{2^s} \right) \\
&\leq \omega_p \left(f, \frac{1}{2^n} \right) + \sum_{s=0}^{n-1} \frac{2^s}{2^n} \omega_p \left(f, \frac{1}{2^s} \right). & (2.10)
\end{aligned}$$

Másrészt ez a következő egyenlőtlenséget jelenti

$$2^n \int_G \|f(\cdot + u) - f(\cdot)\|_p K_{2^n}^w(u) d\mu(u) \leq \sum_{s=0}^n 2^s \omega_p \left(f, \frac{1}{2^s} \right). \quad (2.11)$$

Az általánosított Minkowski-egyenlőtlenségből, a 2.2.5. Lemmából és a (2.11) egyenlőtlenségből azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
\|IV\|_p &\leq \sum_{k=0}^{2^n-2} |\Delta t_{2^n-k-1, 2^n}| \int_G \|f(\cdot + u) - f(\cdot)\|_p k |K_k^w(u)| d\mu(u) \\
&\leq 3 \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{k=2^j-1}^{2^{j+1}-2} |\Delta t_{2^n-k-1, 2^n}| \sum_{l=0}^j 2^l \\
&\quad \times \int_G \|f(\cdot + u) - f(\cdot)\|_p K_{2^l}^w(u) d\mu(u)
\end{aligned}$$

$$\leq 3 \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{k=2^j-1}^{2^{j+1}-2} |\Delta t_{2^n-k-1,2^n}| \sum_{l=0}^j \sum_{s=0}^l 2^s \omega_p \left(f, \frac{1}{2^s} \right) \quad (2.12)$$

$$\begin{aligned} &= 3 \sum_{j=0}^{n-1} (t_{2^n-2^j+1,2^n} - t_{2^n-2^{j+1}+1,2^n}) \sum_{l=0}^j \sum_{s=0}^l 2^s \omega_p \left(f, \frac{1}{2^s} \right) \\ &= 3 \sum_{l=0}^{n-1} \sum_{j=l}^{n-1} (t_{2^n-2^j+1,2^n} - t_{2^n-2^{j+1}+1,2^n}) \sum_{s=0}^l 2^s \omega_p \left(f, \frac{1}{2^s} \right) \\ &\leq 3 \sum_{l=0}^{n-1} t_{2^n-2^l+1,2^n} \sum_{s=0}^l 2^s \omega_p \left(f, \frac{1}{2^s} \right) \\ &= 3 \sum_{s=0}^{n-1} 2^s \omega_p \left(f, \frac{1}{2^s} \right) \sum_{l=s}^{n-1} t_{2^n-2^l+1,2^n} \\ &\leq 3 \sum_{s=0}^{n-1} (n-s) 2^s t_{2^n-2^s+1,2^n} \omega_p \left(f, \frac{1}{2^s} \right). \end{aligned} \quad (2.13)$$

A tétel állítása a (2.7), (2.8), (2.9) és a (2.12) egyenlőtlenségek alapján rögtön adódik. \square

A 2.3.3. Tétel szintén általánosítás, ennek az alapja a [4]-ben szereplő Theorem 3.

2.3.3. Tétel (Blahota és Nagy D. [19]). *Legyen minden rögzített $n \in \mathbb{P}$ esetén a $(t_{k,n} : 1 \leq k \leq n)$ nemnegatív számok véges sorozata növekvő és feltételezzük, hogy*

$$\sum_{k=1}^n t_{k,n} = 1 \quad (2.14)$$

és

$$t_{n,n} = O \left(\frac{1}{n} \right). \quad (2.15)$$

Ekkor tetszőleges $f \in L_p(G)$, $1 \leq p < \infty$ esetén a következő egyenlőt-

lenséget kapjuk

$$\|\sigma_n^{wT}(f) - f\|_p \leq c \sum_{k=0}^{|n|} \frac{2^k}{2^{|n|}} \omega_p \left(\frac{1}{2^k}, f \right).$$

Bizonyítás. Az Abel-transzformáció segítségével könnyen adódik az alábbi egyenlőség

$$\sum_{k=1}^n t_{k,n} = \sum_{k=1}^{n-1} \Delta t_{k,n} k + t_{n,n} n. \quad (2.16)$$

A T és Fejér-közepék közötti kapcsolat miatt

$$\sigma_n^{wT}(f) = \sum_{k=1}^{n-1} \Delta t_{k,n} k \sigma_k^w(f) + t_{n,n} n \sigma_n^w(f). \quad (2.17)$$

A (2.14), (2.16) és a (2.17) egyenlőségek használatával a

$$\sigma_n^{wT}(f) - f = \sum_{k=1}^{n-1} \Delta t_{k,n} k (\sigma_k^w(f) - f) + t_{n,n} n (\sigma_n^w(f) - f)$$

egyenlőséghez jutunk és

$$\begin{aligned} \|\sigma_n^{wT}(f) - f\|_p &\leq \sum_{k=1}^{n-1} |\Delta t_{k,n}| k \|\sigma_k^w(f) - f\|_p + t_{n,n} n \|\sigma_n^w(f) - f\|_p \\ &=: I + II. \end{aligned}$$

Ekkor

$$\begin{aligned} I &= \sum_{k=1}^{2^{|n|}-1} |\Delta t_{k,n}| k \|\sigma_k^w(f) - f\|_p + \sum_{k=2^{|n|}}^{n-1} |\Delta t_{k,n}| k \|\sigma_k^w(f) - f\|_p \\ &=: I_1 + I_2. \end{aligned}$$

A 2.2.8. Lemma, a (2.15) feltétel és $|\Delta t_{k,n}| = -\Delta t_{k,n} = t_{k+1,n} - t_{k,n}$ maga után vonja, hogy

$$\begin{aligned}
I_1 &= \sum_{l=0}^{|n|-1} \sum_{k=2^l}^{2^{l+1}-1} |\Delta t_{k,n}| k \|\sigma_k^w(f) - f\|_p \\
&\leq \sum_{l=0}^{|n|-1} \sum_{k=2^l}^{2^{l+1}-1} |\Delta t_{k,n}| k 3 \sum_{s=0}^l \frac{2^s}{2^l} \omega_p \left(f, \frac{1}{2^s} \right) \\
&\leq 3 \sum_{l=0}^{|n|-1} \frac{2^{l+1}}{2^l} \sum_{k=2^l}^{2^{l+1}-1} |\Delta t_{k,n}| \sum_{s=0}^l 2^s \omega_p \left(f, \frac{1}{2^s} \right) \\
&= 6 \sum_{l=0}^{|n|-1} (t_{2^{l+1},n} - t_{2^l,n}) \sum_{s=0}^l 2^s \omega_p \left(f, \frac{1}{2^s} \right) \\
&= 6 \sum_{s=0}^{|n|-1} 2^s \omega_p \left(f, \frac{1}{2^s} \right) \sum_{l=s}^{|n|-1} (t_{2^{l+1},n} - t_{2^l,n}) \\
&= 6 \sum_{s=0}^{|n|-1} 2^s \omega_p \left(f, \frac{1}{2^s} \right) (t_{2^{|n|},n} - t_{2^s,n}) \\
&\leq 6 t_{n,n} \sum_{s=0}^{|n|-1} 2^s \omega_p \left(f, \frac{1}{2^s} \right) \\
&\leq c \sum_{s=0}^{|n|-1} \frac{2^s}{2^{|n|}} \omega_p \left(f, \frac{1}{2^s} \right).
\end{aligned}$$

Mivel ha $2^{|n|} \leq k < n$, akkor $|k| = |n|$ így a 2.2.8. Lemma, a (2.15) feltétel és a (2.16) egyenlőség azt eredményezi, hogy

$$\begin{aligned}
I_2 &\leq \sum_{k=2^{|n|}}^{n-1} |\Delta t_{k,n}| k 3 \sum_{s=0}^{|k|} \frac{2^s}{2^{|k|}} \omega_p \left(f, \frac{1}{2^s} \right) \\
&\leq 3 \left(n t_{n,n} - \sum_{k=1}^n t_{k,n} \right) \sum_{s=0}^{|n|} \frac{2^s}{2^{|n|}} \omega_p \left(f, \frac{1}{2^s} \right)
\end{aligned}$$

$$\leq c \sum_{s=0}^{|n|} \frac{2^s}{2^{|n|}} \omega_p \left(f, \frac{1}{2^s} \right).$$

Hasonlóan

$$\begin{aligned} II &\leq t_{n,n} n^3 \sum_{s=0}^{|n|} \frac{2^s}{2^{|n|}} \omega_p \left(f, \frac{1}{2^s} \right) \\ &\leq c \sum_{s=0}^{|n|} \frac{2^s}{2^{|n|}} \omega_p \left(f, \frac{1}{2^s} \right). \end{aligned}$$

Ezzel a tétel bizonyítása befejeződött. \square

Megjegyezzük, hogy a 2.3.2. és a 2.3.3. Tételeket a Goginava és Nagy K. [42] cikkében szereplő Theorem 3. következményeként is megkaphattuk volna.

A következő tétel Nagy K. [57]-beli eredményének általánosítása, aki (részben eltérő módszerekkel) bizonyította be az analóg állítást Nörlund-közepre Walsh–Kaczmarz-rendszerre vonatkozóan. Szintén Nagy K. becsülte a súlyozott közepék konvergencia sebességét Walsh–Kaczmarz-rendszer esetén [55]-ben.

2.3.4. Tétel (Blahota és Nagy D. [17]). *Legyen $f \in L_p(G)$, $1 \leq p \leq \infty$ és legyen minden $n \in \mathbb{P}$ -re $(t_{k,n} : 1 \leq k \leq n)$ nemnegatív számok véges sorozata úgy, hogy*

$$\sum_{k=1}^n t_{k,n} = 1 \tag{2.18}$$

teljesül.

a) *Legyen $(t_{k,n} : 1 \leq k \leq n)$ véges sorozat minden n -re növekvő és teljesüljön a*

$$t_{n,n} = O \left(\frac{1}{n} \right) \tag{2.19}$$

feltétel. Ekkor

$$\|\sigma_n^{\kappa T}(f) - f\|_p \leq \frac{31}{15} \sum_{j=0}^{|n|-1} 2^j t_{2^{j+1}-1, n} \omega_p \left(f, \frac{1}{2^j} \right) + c \omega_p \left(f, \frac{1}{2^{|n|}} \right).$$

b) Legyen $(t_{k,n} : 1 \leq k \leq n)$ véges sorozat minden n -re csökkenő, ekkor

$$\|\sigma_n^{\kappa T}(f) - f\|_p \leq \frac{31}{15} \sum_{j=0}^{|n|-1} 2^j t_{2^j, n} \omega_p \left(f, \frac{1}{2^j} \right) + \frac{47}{30} \omega_p \left(f, \frac{1}{2^{|n|}} \right).$$

Bizonyítás. A bizonyítás során többször fel fogjuk használni a 2.2.14 Lemmát. Ennek alkalmazhatósága miatt meg kell mutatni, hogy a $K_k^w(\tau_j)$ kifejezés minden $k < 2^j$ -re egy 2^j -nél nem nagyobb fokszámú Walsh–Paley-polinom.

Legyen $l \leq k < 2^j$. Ekkor $|l| < j$, így egyszerű számítás mutatja, hogy

$$\begin{aligned} w_l(\tau_j(x)) &= (-1)^{\sum_{i=0}^{|l|} l_i(\tau_j(x))_i} \\ &= (-1)^{l_0 x_{j-1} + l_1 x_{j-2} + \dots + l_{j-2} x_1 + l_{j-1} x_0} \\ &= w_{2^{j-1} l_0 + 2^{j-2} l_1 + \dots + 2^1 l_{j-2} + 2^0 l_{j-1}}(x). \end{aligned}$$

Ez azt jelenti, hogy $w_l(\tau_j(x)) = w_s(x)$, ahol $s < 2^j$. Mivel $K_k^w(\tau_j)(x)$ ilyen $w_l(\tau_j(x))$ függvények lineáris kombinációja, ezért maga is egy 2^j -nél nem nagyobb fokszámú Walsh–Paley-polinom.

A tételt az $1 \leq p < \infty$ esetben bizonyítjuk. A folytonos függvények esete hasonlóan látható be. A (2.18) feltételt, a Minkowski-egyen-

lőtlenséget, valamint a 2.2.15. Lemmát használva a

$$\begin{aligned}
& \left\| \sigma_n^{\kappa T}(f) - f \right\|_p \\
&= \left(\int_G \left| \sigma_n^{\kappa T}(f; x) - f(x) \right|^p d\mu(x) \right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \left(\int_G \left| \int_G K_n^{\kappa T}(u)(f(x+u) - f(x))d\mu(u) \right|^p d\mu(x) \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \sum_{j=1}^5 \left(\int_G \left| \int_G K_{j,n}(u)(f(x+u) - f(x))d\mu(u) \right|^p d\mu(x) \right)^{\frac{1}{p}} \\
&=: \sum_{j=1}^5 I_{j,n}
\end{aligned}$$

felbontást kapjuk.

Az $I_{1,n}$ kifejezésre az általánosított Minkowski-egyenlőtlenséget és a 2.2.1. Lemmát felhasználva kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
I_{1,n} &= \left(\int_G \left| \int_G \sum_{j=0}^{|n|-1} \sum_{k=0}^{2^j-1} t_{2^j+k,n} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \times D_{2^j}(u)(f(x+u) - f(x))d\mu(u) \right|^p d\mu(x) \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \sum_{j=0}^{|n|-1} \sum_{k=0}^{2^j-1} t_{2^j+k,n} \int_G D_{2^j}(u) \\
&\quad \times \left(\int_G |f(x+u) - f(x)|^p d\mu(x) \right)^{\frac{1}{p}} d\mu(u) \\
&\leq \sum_{j=0}^{|n|-1} \sum_{k=0}^{2^j-1} t_{2^j+k,n} \omega_p \left(f, \frac{1}{2^j} \right).
\end{aligned}$$

Az a) esetben a monotonitásból adódik

$$I_{1,n} \leq \sum_{j=0}^{|n|-1} 2^j t_{2^{j+1}-1,n} \omega_p \left(f, \frac{1}{2^j} \right).$$

Hasonlóan, a b) esetben

$$I_{1,n} \leq \sum_{j=0}^{|n|-1} 2^j t_{2^j,n} \omega_p \left(f, \frac{1}{2^j} \right).$$

A 2.2.14. Lemma és majd a 2.2.10. Lemma segítségével kapjuk a következőt

$$\begin{aligned} I_{2,n} &= \left(\int_G \left| \int_G \sum_{j=0}^{|n|-1} r_j(u) \sum_{k=1}^{2^j-2} \Delta t_{2^j+k,n} k K_k^w(\tau_j(u)) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \times (f(x+u) - f(x)) d\mu(u) \right|^p d\mu(x) \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \sum_{j=0}^{|n|-1} \sum_{k=1}^{2^j-2} |\Delta t_{2^j+k,n}| k \left(\int_G \left| \int_G r_j(u) K_k^w(\tau_j(u)) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \times (f(x+u) - f(x)) d\mu(u) \right|^p d\mu(x) \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{|n|-1} \sum_{k=1}^{2^j-2} |\Delta t_{2^j+k,n}| k \omega_p \left(f, \frac{1}{2^j} \right) \|K_k^w(\tau_j(\cdot))\|_1 \\ &\leq \frac{17}{30} \sum_{j=0}^{|n|-1} \sum_{k=1}^{2^j-2} |\Delta t_{2^j+k,n}| k \omega_p \left(f, \frac{1}{2^j} \right). \end{aligned}$$

Az utolsó egyenlőtlenségénél felhasználtuk, hogy $\|K_k^w(\tau_j(\cdot))\|_1 = \|K_k^w\|_1$, ami a τ_j leképezés mértéktartó voltából következik. Hasonlóképpen járunk el $I_{3,n}$ és $I_{5,n}$ becslése esetén is.

Az a) esetben

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{2^j-2} |\Delta t_{2^j+k,n}| k &= \sum_{k=1}^{2^j-2} (t_{2^j+k+1,n} - t_{2^j+k,n}) k \\ &= (2^j - 1)t_{2^j+1-1,n} - \sum_{k=1}^{2^j-1} t_{2^j+k,n} \\ &\leq 2^j t_{2^j+1-1,n}, \end{aligned}$$

így

$$I_{2,n} \leq \frac{17}{30} \sum_{j=0}^{|n|-1} 2^j t_{2^j+1-1,n} \omega_p \left(f, \frac{1}{2^j} \right).$$

A b) esetben

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{2^j-2} |\Delta t_{2^j+k,n}| k &= \sum_{k=1}^{2^j-2} (t_{2^j+k,n} - t_{2^j+k+1,n}) k \\ &= \sum_{k=1}^{2^j-1} t_{2^j+k,n} - (2^j - 1)t_{2^j+1-1,n} \\ &\leq \sum_{k=1}^{2^j-1} t_{2^j+k,n} \leq 2^j t_{2^j,n}, \end{aligned}$$

így

$$I_{2,n} \leq \frac{17}{30} \sum_{j=0}^{|n|-1} 2^j t_{2^j,n} \omega_p \left(f, \frac{1}{2^j} \right).$$

Most adjunk felső becslést az $I_{3,n}$ kifejezésre. Az $I_{2,n}$ esethez hasonlóan

a 2.2.14. Lemma és a 2.2.11. Lemma eredményeként kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} I_{3,n} &= \left(\int_G \left| \int_G \sum_{j=0}^{|n|-1} r_j(u) t_{2^{j+1}-1,n} (2^j - 1) K_{2^j-1}^w(\tau_j(u)) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \times (f(x+u) - f(x)) d\mu(u) \right|^p d\mu(x) \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{|n|-1} 2^j t_{2^{j+1}-1,n} \omega_p \left(f, \frac{1}{2^j} \right). \end{aligned}$$

Ezzel beláttuk az a) esetet. A b) esetben pedig

$$I_{3,n} \leq \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{|n|-1} 2^j t_{2^j,n} \omega_p \left(f, \frac{1}{2^j} \right).$$

Az $I_{4,n}$ -es eset hasonló az $I_{1,n}$ -eshez. A (2.18) feltételt, az általánosított Minkowski-egyenlőtlenséget és a 2.2.1. Lemmát használva kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} I_{4,n} &= \left(\int_G \left| \int_G \sum_{k=0}^{n-2|n|} t_{2^{|n|+k},n} D_{2^{|n|}}(u) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \times (f(x+u) - f(x)) d\mu(u) \right|^p d\mu(x) \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \omega_p \left(f, \frac{1}{2^{|n|}} \right). \end{aligned}$$

Vizsgáljuk meg az $I_{5,n}$ kifejezést. Újra a 2.2.14. Lemma és a 2.2.10.

Lemma adja meg a becslést

$$\begin{aligned}
I_{5,n} &= \left(\int_G \left| \int_G r_{|n|}(x) \sum_{k=1}^{n-2^{|n|}} \Delta t_{2^{|n|+k,n}} k K_k^w(\tau_{|n|}(u)) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \times (f(x+u) - f(x)) d\mu(u) \right|^p d\mu(x) \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \sum_{k=1}^{n-2^{|n|}} |\Delta t_{2^{|n|+k,n}}| k \left(\int_G \left| \int_G r_{|n|}(u) K_k^w(\tau_{|n|}(u)) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \times (f(x+u) - f(x)) d\mu(u) \right|^p d\mu(x) \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n-2^{|n|}} |\Delta t_{2^{|n|+k,n}}| k \omega_p \left(f, \frac{1}{2^{|n|}} \right) \|K_k^w(\tau_{|n|}(\cdot))\|_1 \\
&\leq \frac{17}{30} \sum_{k=1}^{n-2^{|n|}} |\Delta t_{2^{|n|+k,n}}| k \omega_p \left(f, \frac{1}{2^{|n|}} \right).
\end{aligned}$$

Az a) esetben a

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{n-2^{|n|}} |\Delta t_{2^{|n|+k,n}}| k \\
&= \sum_{k=1}^{n-2^{|n|}} (t_{2^{|n|+k+1,n}} - t_{2^{|n|+k,n}}) k \\
&= \sum_{k=1}^{n-2^{|n|}-1} (t_{2^{|n|+k+1,n}} - t_{2^{|n|+k,n}}) k + t_{n,n}(n - 2^{|n|}) \\
&= (n - 2^{|n|} - 1)t_{n,n} - \sum_{k=1}^{n-2^{|n|}-1} t_{2^{|n|+k,n}} + t_{n,n}(n - 2^{|n|}) \\
&\leq 2nt_{n,n}
\end{aligned}$$

egyenlőtlenség és a (2.19) feltétel miatt

$$I_{5,n} \leq \frac{17}{15} n t_{n,n} \omega_p \left(f, \frac{1}{2^{|n|}} \right) \leq c \omega_p \left(f, \frac{1}{2^{|n|}} \right).$$

A b) esetben a

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n-2^{|n|}} |\Delta t_{2^{|n|+k},n}| k &= \sum_{k=1}^{n-2^{|n|}} (t_{2^{|n|+k},n} - t_{2^{|n|+k+1},n}) k \\ &= \sum_{k=1}^{n-2^{|n|}} t_{2^{|n|+k},n} = \sum_{k=2^{|n|+1}}^n t_{k,n} \end{aligned}$$

egyenlőség és a (2.18) feltétel miatt

$$I_{5,n} \leq \frac{17}{30} \sum_{k=2^{|n|+1}}^n t_{k,n} \omega_p \left(f, \frac{1}{2^{|n|}} \right) \leq \frac{17}{30} \omega_p \left(f, \frac{1}{2^{|n|}} \right).$$

Ezzel befejeződött a tétel bizonyítása. □

2.4. Normakonvergenca

2.4.1. Tétel (Blahota és Nagy D. [17]). *Legyen $f \in L_1(G)$. Minden $n \in \mathbb{P}$ -re legyen $(t_{k,n} : 1 \leq k \leq n)$ nemnegatív számok véges sorozata, melyre*

$$\sum_{k=1}^n t_{k,n} = 1 \tag{2.20}$$

és

$$\lim_{n \rightarrow \infty} t_{k,n} = 0 \tag{2.21}$$

bármely rögzített k esetén.

Ha létezik egy c abszolút állandó, amelyre

$$\|K_n^{\kappa T}\|_1 \leq c, \quad (2.22)$$

akkor teljesül az L_1 -beli normakonvergencia

$$\sigma_n^{\kappa T}(f) \rightarrow f,$$

amint $n \rightarrow \infty$.

Bizonyítás. Legyen $P \in \mathcal{P}_n^\kappa$ Walsh–Kaczmarz-polinom. Akkor

$$\begin{aligned} \|\sigma_n^{\kappa T}(f) - f\|_1 &\leq \|\sigma_n^{\kappa T}(f) - \sigma_n^{\kappa T}(P)\|_1 + \|\sigma_n^{\kappa T}(P) - P\|_1 \\ &\quad + \|P - f\|_1. \end{aligned}$$

Bármely P -re kellően nagy n esetén $S_n^\kappa(P) = P$. Legyen mondjuk $n \geq k_0$. Ebből a (2.20) és a (2.21) feltételek használatával megkapjuk, hogy

$$\sigma_n^{\kappa T}(P) = \sum_{k=1}^{k_0-1} t_{k,n} S_k^\kappa(P) + \sum_{k=k_0}^n t_{k,n} P \rightarrow P$$

normában. Ez azt jelenti, hogy $\|\sigma_n^{\kappa T}(P) - P\|_1 \rightarrow 0$, amint $n \rightarrow \infty$. Ha $1 \leq p < \infty$, a polinomok sűrűsége miatt a $\|P - f\|_p$ kifejezés tetszőleges kis pozitív szám lehet. Másrészt a Young-féle konvolúciós egyenlőtlenség alapján kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \|\sigma_n^{\kappa T}(f) - \sigma_n^{\kappa T}(P)\|_1 &= \|\sigma_n^{\kappa T}(f - P)\|_1 \\ &\leq \|K_n^{\kappa T}\|_1 \|P - f\|_1. \end{aligned}$$

Összefoglalva ezeket a tényeket, a (2.22) feltételből következik, hogy

$$\|\sigma_n^{\kappa T}(f) - f\|_1 \rightarrow 0,$$

amint $n \rightarrow \infty$. □

A következő állítás a 2.2.16. Lemma és a 2.4.1. Tétel egyszerű következménye.

2.4.2. Következmény (Blahota és Nagy D. [17]). *Legyen $n \in \mathbb{P}$ és legyen $(t_{k,n} : 1 \leq k \leq n)$ nemnegatív számok véges sorozata úgy, hogy*

$$\sum_{k=1}^n t_{k,n} = 1.$$

Tegyük fel, hogy az alábbiak közül valamelyik teljesül.

a) Ha a $(t_{k,n} : 1 \leq k \leq n)$ véges sorozat rögzített n esetén növekvő, akkor feltételezzük, hogy

$$t_{n,n} = O\left(\frac{1}{n}\right). \quad (2.23)$$

b) Ha a $(t_{k,n} : 1 \leq k \leq n)$ véges sorozat rögzített n esetén csökkenő, akkor feltételezzük, hogy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} t_{1,n} = 0.$$

Ekkor mindkét esetben teljesül az L_1 -beli normakonvergencia

$$\sigma_n^{\kappa T}(f) \rightarrow f,$$

amint $n \rightarrow \infty$.

2.4.3. Megjegyzés (Blahota és Nagy D. [17]). *Megemlítjük, hogy ha $f \in L_p(G)$, $1 < p < \infty$, $\sum_{k=1}^n t_{k,n} = 1$ és ha $\lim_{n \rightarrow \infty} t_{k,n} = 0$ bármely rögzített k esetén, akkor az $\sigma_n^{\kappa T}(f) \rightarrow f$ L_p -beli normakonvergencia triviális következménye az $S_n^{\kappa}(f) \rightarrow f$ L_p -beli normakonvergenciának a (2.23) feltétel nélkül. Valóban,*

$$\left\| \sigma_n^{\kappa T}(f) - f \right\|_p \leq \sum_{k=1}^n t_{k,n} \|S_k^{\kappa}(f) - f\|_p,$$

és ha $1 < p < \infty$, akkor $\|S_n^{\kappa}(f) - f\|_p \rightarrow 0$, amint $n \rightarrow \infty$. Tehát ebből az egyenlőtlenségből, a $\sum_{k=1}^n t_{k,n} = 1$ egyenlőségből, a $\lim_{n \rightarrow \infty} t_{k,n} = 0$ bármely rögzített k esetén feltétel mellett elemi megfontolás alapján kapjuk, hogy $\left\| \sigma_n^{\kappa T}(f) - f \right\|_p \rightarrow 0$, amint $n \rightarrow \infty$.

2.4.4. Tétel. Legyen $f \in \text{Lip}(\alpha, p, G)$ valamely $\alpha > 0$ esetén és legyen $1 \leq p \leq \infty$. Legyen minden $n \in \mathbb{P}$ -re $(t_{k,n} : 1 \leq k \leq n)$ nemnegatív számok véges sorozata úgy, hogy

$$\sum_{k=1}^n t_{k,n} = 1$$

teljesül. Legyen továbbá a $(t_{k,n} : 1 \leq k \leq n)$ nemnegatív számok véges sorozata minden $n \in \mathbb{P}$ esetén növekvő a

$$t_{n,n} = O\left(\frac{1}{n}\right)$$

feltétellel. Ekkor a következő becslés teljesül

$$\|\sigma_n^{\kappa T}(f) - f\|_p = \begin{cases} O(n^{-\alpha}), & \text{ha } 0 < \alpha < 1, \\ O(\log n/n), & \text{ha } \alpha = 1, \\ O(1/n), & \text{ha } \alpha > 1. \end{cases}$$

Bizonyítás. A 2.3.4. Tétel a Lipschitz-függvényekre azt eredményezi, hogy

$$\begin{aligned} \|\sigma_n^{\kappa T}(f) - f\|_p &= O\left(\sum_{j=0}^{|n|-1} 2^j t_{2^{j+1}-1,n} 2^{-j\alpha} + 2^{-|n|\alpha}\right) \\ &= O\left(\frac{1}{n} \sum_{j=0}^{|n|-1} 2^{j(1-\alpha)}\right) + O(n^{-\alpha}). \end{aligned}$$

Ebből az összefüggésből könnyen megkapjuk az állításunkat. □

3. fejezet

Vilenkin-rendszer

Ez a fejezet Blahota és Nagy D. [16] és [18] cikkeiben megjelent eredményein alapul.

3.1. Jelölések és definíciók

Ebben a fejezetben vezetjük be a Vilenkin-analízissel kapcsolatos jelöléseket, fogalmakat. Röviden bemutatjuk a Vilenkin–Fourier-analízis elméletét (további részletekért lásd [1, 62]-ot). Ahogy látni fogjuk, a bevezetett fogalmak analógiát mutatnak az előző fejezetben lévő fogalmakkal (aminek az az alapja, hogy a Vilenkin-rendszer a Walsh-rendszer egy általánosítása).

Legyen $m := (m_0, m_1, \dots)$ 2-nél nem kisebb pozitív egész számok sorozata. Jelölje $\mathbb{Z}_{m_n} := \{0, 1, \dots, m_n - 1\}$ a természetes számok additív csoportját moduló m_n , ahol $n \in \mathbb{N}$. Ezen \mathbb{Z}_{m_n} diszkrét ciklikus csoportok direkt szorzataként definiáljuk a G_m Vilenkin-csoportot. A G_m -en végzett csoportművelet a koordinátánkénti összeadás moduló m_n .

A direkt szorzaton bevezetett μ mértéket a

$$\mu_n(\{j\}) := 1/m_n \quad (j \in \mathbb{Z}_{m_n})$$

mértékek direkt szorzataként definiáljuk, ami Haar-mérték és valószínűségi mérték G_m -en, azaz $\mu(G_m) = 1$.

Ha az m sorozat korlátos, akkor G_m -et korlátos, egyébként nem korlátos Vilenkin-csoportnak nevezzük. A fejezetben feldolgozott cikkekben és így az egész disszertációban csak a korlátos esettel foglalkozunk. Nem korlátos Vilenkin-csoportokra vonatkozó eredményekért lásd pl. [13, 35, 36]-at. Megemlítjük, hogy $m = (2, 2, \dots)$ esetén G -t, a diadikus csoportot kapjuk. G_m elemei az

$$x := (x_0, x_1, \dots, x_n, \dots) \quad (x_n \in \mathbb{Z}_{m_n})$$

számsorozatokkal reprezentálhatóak. A diadikus intervallumok definiálása a következő módon történik

$$I_0(x) := G_m,$$

$$I_n(x) := \{y \in G_m \mid y_0 = x_0, \dots, y_{n-1} = x_{n-1}\} \quad (x \in G_m, n \in \mathbb{P}).$$

Az m sorozaton alapuló ún. általánosított, m -adikus számrendszert az alábbi módon definiáljuk

$$M_0 := 1, \quad M_{n+1} := m_n M_n \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Ekkor minden $n \in \mathbb{N}$ egyértelműen előállítható $n = \sum_{k=0}^{\infty} n_k M_k$ alakban, ahol $n_k \in \mathbb{Z}_{m_k}$ ($k \in \mathbb{N}$) és csak véges sok n_k különbözik nullától. Jelölje $|n|$ azt a természetes számot (n rendje), amelyre $M_{|n|} \leq n < M_{|n|+1}$.

Jelölje $L_p(G_m)$ a Lebesgue-teret G_m -en (a megfelelő $\|\cdot\|_p$ normákkal) és $C(G_m)$ jelölje a folytonos függvények terét G_m -en az $\|f\|_{\infty} := \sup\{|f(x)| : x \in G_m\}$ normával.

Legyen

$$\omega_p(f, \delta) := \sup_{|x| < \delta} \|f(\cdot - x) - f(\cdot)\|_p$$

a folytonossági modulus $L_p(G_m)$ -en, ahol $1 \leq p < \infty$, $f \in L_p(G_m)$ és $\delta > 0$, valamint

$$|x| := \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x_i}{M_{i+1}} \quad \text{minden } x \in G_m \text{ esetén.}$$

Ennek analógiájára definiáljuk a folytonossági modulust $C(G_m)$ -en, ezt $\omega_\infty(f, \delta)$ jelölje.

A 2. fejezet fogalmaihoz hasonlóan bevezetjük a $\text{Lip}(\alpha, p, G_m)$ és $\text{Lip}(\alpha, C(G_m))$ osztályokat (amennyiben $1 \leq p < \infty$) és a

$$\text{Lip}(\alpha, \infty, G_m) := \text{Lip}(\alpha, C(G_m))$$

jelölést.

Bevezetünk G_m -en egy ortonormált rendszert, amelyet Vilenkin-rendszernek nevezünk. Ehhez definiáljuk az $r_k(x) : G_m \rightarrow \mathbb{C}$, komplex értékű függvényeket, azaz az úgynevezett általánosított Rademacher-függvényeket úgy, hogy

$$r_k(x) := \exp(2\pi i x_k / m_k) \quad (i^2 = -1, x \in G_m, k \in \mathbb{N}).$$

A $\psi := (\psi_n : n \in \mathbb{N})$ függvénysorozatot G_m -en, ahol

$$\psi_n(x) := \prod_{k=0}^{\infty} r_k^{n_k}(x) \quad (n \in \mathbb{N})$$

Vilenkin-rendszernek nevezzük.

Amennyiben $m = (2, 2, \dots)$, speciálisan a Walsh–Paley-rendszert kapjuk. A Vilenkin-rendszer ortonormált és teljes $L_1(G_m)$ -ben (lásd pl. [72]). A Vilenkin-rendszer elemei pontosan azok az $f : G_m \rightarrow \mathbb{C}$ folytonos függvények, melyekre

$$f(x+y) = f(x)f(y)$$

és $|f(x)| = 1$ minden $x, y \in G_m$ esetén. Sőt, ez akkor és csak akkor teljesül, ha $f(x) = \psi_n(x)$ valamely $n \in \mathbb{N}$ esetén (lásd [62]-ot).

Legyen \mathcal{P}_n az n -nél kisebb rendű Vilenkin-polinomok halmaza, vagyis azon függvényeké, melyek felírhatók

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k \psi_k(x)$$

alakban, ahol $n \in \mathbb{P}$ és (a_k) komplex számok sorozata. \mathcal{P} jelölje a Vilenkin-polinomok halmazát.

A továbbiakban bevezetjük a Vilenkin–Fourier-analízissel kapcsolatos klasszikus fogalmakat. Definiáljuk az f függvény n -edik Vilenkin–Fourier-együtthatóját, Vilenkin–Fourier-sorának n -edik részletösszegét, az n -dik Vilenkin–Fejér-közeget és az n -edik Vilenkin–Dirichlet magfüggvényt:

$$\hat{f}(n) := \int_{G_m} f \bar{\psi}_n d\mu, \text{ ha } n \in \mathbb{N},$$

$$S_n(f) := \sum_{k=0}^{n-1} \hat{f}(k) \psi_k, \quad \sigma_n(f) := \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n S_k(f), \quad D_n := \sum_{k=0}^{n-1} \psi_k,$$

ahol $n \in \mathbb{P}$. Ismert, hogy

$$S_n(f; x) = \int_{G_m} f(u) D_n(x - u) d\mu(u). \quad (3.1)$$

A Fejér-féle magfüggvényt a Dirichlet-féle magfüggvények számtani közepeként definiáljuk, azaz

$$K_n := \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n D_k.$$

A 4. fejezetben leírt összegzési eljárások itt is alkalmazhatóak, viszont ebben a fejezetben csak a Nörlund-közeget és a súlyozott közeget tárgyaljuk.

A Walsh-rendszernél bevezetett T -mátrix és a hozzá kapcsolódó definíciók és jelölések a Vilenkin-rendszerre is használhatók.

A (3.1) alapján könnyen belátható, hogy

$$\sigma_n^T(f; x) = \int_{G_m} f(u) K_n^T(x - u) d\mu(u).$$

Definiáljuk az (\tilde{n}, n) -edik de La Vallée Poussin-típusú mátrix transzformációs közeget a következő módon

$$\sigma_{\tilde{n}, n}^T(f; x) := \sum_{k=\tilde{n}}^n t_{k, n} S_k(f; x),$$

ahol $\tilde{n}, n \in \mathbb{P}$ és $\tilde{n} \leq n$. Az (\tilde{n}, n) -edik de La Vallée Poussin-típusú mátrix transzformációs mag legyen

$$K_{\tilde{n},n}^T(x) := \sum_{k=\tilde{n}}^n t_{k,n} D_k(x).$$

Könnyen ellenőrizhető, hogy

$$\sigma_{\tilde{n},n}^T(f; x) = \int_{G_m} f(u) K_{\tilde{n},n}^T(x - u) d\mu(u). \quad (3.2)$$

Megjegyezzük továbbá, hogy ebben a fejezetben a c (rögzített m sorozat esetén) egy pozitív abszolút konstans jelöl.

3.2. Felhasznált eredmények

Ismert [1], hogy ha G_m egy korlátos Vilenkin-csoport, akkor a Fejér-féle magfüggvény $L_1(G_m)$ -beli normája egyenletesen korlátos. Létezik ugyanis olyan pozitív c állandó, ami csak $\sup_{n \in \mathbb{N}} m_n$ -től függ úgy, hogy

$$\|K_n\|_1 \leq c \quad (3.3)$$

minden $n \in \mathbb{P}$ esetén.

Szintén nevezetes eredmény [72], hogy az M_n -edik Dirichlet magfüggvény a következő zárt formában adható meg

$$D_{M_n}(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \notin I_n(0), \\ M_n, & \text{ha } x \in I_n(0). \end{cases} \quad (3.4)$$

Bizonyításainkhoz a következő eredményekre is szükségünk lesz.

3.2.1. Tétel (Goginava és Gogoladze [41], lásd még Nadirashvili, Persson, Tephnadze és Weisz [54]). *Ha $f \in L_1(G_m)$, akkor*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n(f; x) = f(x)$$

az f függvény minden Vilenkin–Lebesgue-pontjában.

A következő lemma Walsh–Paley változatát (a (3.5) helyett egy általánosabb, $\sum_{k=1}^n t_{k,n} = O(1)$ feltétellel) lásd [14]-ben. Lásd továbbá [42]-et.

3.2.2. Lemma (Blahota és Nagy D. [18]). *Minden $n \in \mathbb{P}$ -re $(t_{k,n} : 1 \leq k \leq n)$ nemnegatív számok véges sorozata esetén tegyük fel, hogy*

$$\sum_{k=1}^n t_{k,n} = 1. \quad (3.5)$$

a) Legyen $(t_{k,n} : 1 \leq k \leq n)$ nemnegatív számok véges sorozata minden n esetén csökkenő, vagy

b) legyen $(t_{k,n} : 1 \leq k \leq n)$ nemnegatív számok véges sorozata minden n esetén növekvő és feltételezzük, hogy

$$t_{n,n} = O\left(\frac{1}{n}\right) \quad (3.6)$$

teljesül.

Ekkor mindkét esetben létezik c abszolút állandó, amelyre

$$\|K_n^T\|_1 < c$$

minden $n \in \mathbb{P}$ esetén.

Bizonyítás. Az Abel-transzformációból kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} K_n^T &= \sum_{k=1}^n t_{k,n} D_k \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} (t_{k,n} - t_{k+1,n}) k K_k + t_{n,n} n K_n, \end{aligned}$$

tehát a (3.3) alkalmazásával

$$\begin{aligned} \|K_n^T\|_1 &\leq \sum_{k=1}^{n-1} |\Delta t_{k,n}| k \|K_k\|_1 + t_{n,n} n \|K_n\|_1 \\ &\leq c \left(\sum_{k=1}^{n-1} |\Delta t_{k,n}| k + t_{n,n} n \right). \end{aligned}$$

Könnyű belátni, hogy

$$\sum_{k=1}^{n-1} \Delta t_{k,n} k = \sum_{k=1}^n t_{k,n} - n t_{n,n}. \quad (3.7)$$

Az a) esetben a (3.5) és a (3.7) miatt

$$\sum_{k=1}^n |\Delta t_{k,n}| k + t_{n,n} n = \sum_{k=1}^n t_{k,n} = 1.$$

A b) esetben a (3.5) és a (3.6) feltételekkel

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n |\Delta t_{k,n}| k + t_{n,n} n &= 2n t_{n,n} - \sum_{k=1}^n t_{k,n} \\ &= 2n t_{n,n} - 1 \leq 2c - 1 \leq c. \end{aligned}$$

□

3.2.3. Lemma (Blahota, Nagy K. [21]). *Legyen $n, q \in \mathbb{P}, 1 \leq q < m_n, g \in \mathcal{P}_{M_n}$ és $f \in L_p(G_m)$, ahol $1 \leq p < \infty$ vagy $f \in C(G_m)$. Ekkor*

$$\left\| \int_{G_m} r_n^q(u) g(u) (f(\cdot - u) - f(\cdot)) d\mu(u) \right\|_p \leq m_n \|g\|_1 \omega_p \left(f; \frac{1}{M_n} \right).$$

A következő lemma egy egyszerű egyenlőség, lásd pl. [21]-et.

3.2.4. Lemma. *Legyen $0 \leq k < M_j$ és $0 \leq l < m_j$, ahol $j, k, l \in \mathbb{N}$. Akkor*

$$D_{lM_j+k} = \sum_{s=0}^{l-1} r_j^s D_{M_j} + r_j^l D_k.$$

Ezt felhasználva kapjuk a $K_{M_n, M_{n+1}-1}^T$ magfüggvények felbontását.

3.2.5. Lemma (Blahota és Nagy D. [16]). *Legyen $n \in \mathbb{P}$. Akkor*

$$\begin{aligned}
K_{M_n, M_{n+1}-1}^T &= \sum_{l=1}^{m_n-1} \sum_{s=1}^{l-1} \sum_{k=0}^{M_n-1} t_{lM_n+k, M_{n+1}-1} r_n^s D_{M_n} \\
&\quad + \sum_{s=M_n}^{M_{n+1}-1} t_{s, M_{n+1}-1} D_{M_n} \\
&\quad + \sum_{l=1}^{m_n-1} \sum_{k=1}^{M_n-2} \Delta t_{lM_n+k, M_{n+1}-1} k r_n^l K_k \\
&\quad + \sum_{l=1}^{m_n-1} t_{(l+1)M_n-1, M_{n+1}-1} (M_n - 1) r_n^l K_{M_n-1} \\
&= : \sum_{j=1}^4 K_{j,n}.
\end{aligned}$$

Bizonyítás. Felírjuk, hogy

$$\begin{aligned}
K_{M_n, M_{n+1}-1}^T &= \sum_{l=M_n}^{M_{n+1}-1} t_{l, M_{n+1}-1} D_l \\
&= \sum_{l=1}^{m_n-1} \sum_{k=0}^{M_n-1} t_{lM_n+k, M_{n+1}-1} D_{lM_n+k} =: (*).
\end{aligned}$$

A 3.2.4. Lemmát alkalmazva

$$\begin{aligned}
(*) &= \sum_{l=1}^{m_n-1} \sum_{k=0}^{M_n-1} t_{lM_n+k, M_{n+1}-1} \sum_{s=0}^{l-1} r_n^s D_{M_n} \\
&\quad + \sum_{l=1}^{m_n-1} \sum_{k=0}^{M_n-1} t_{lM_n+k, M_{n+1}-1} r_n^l D_k
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{l=1}^{m_n-1} \sum_{s=1}^{l-1} \sum_{k=0}^{M_n-1} t_{lM_n+k, M_{n+1}-1} r_n^s D_{M_n} + \sum_{s=M_n}^{M_{n+1}-1} t_{s, M_{n+1}-1} D_{M_n} \\
&\quad + \sum_{l=1}^{m_n-1} r_n^l \sum_{k=0}^{M_n-1} t_{lM_n+k, M_{n+1}-1} D_k,
\end{aligned}$$

az Abel-transzformációt használva

$$\begin{aligned}
&\sum_{l=1}^{m_n-1} r_n^l \sum_{k=0}^{M_n-1} t_{lM_n+k, M_{n+1}-1} D_k \\
&= \sum_{l=1}^{m_n-1} r_n^l \left(\sum_{k=1}^{M_n-2} \Delta t_{lM_n+k, M_{n+1}-1} k K_k \right. \\
&\quad \left. + t_{(l+1)M_n-1, M_{n+1}-1} (M_n - 1) K_{M_n-1} \right) \\
&= \sum_{l=1}^{m_n-1} r_n^l \sum_{k=1}^{M_n-2} \Delta t_{lM_n+k, M_{n+1}-1} k K_k \\
&\quad + \sum_{l=1}^{m_n-1} r_n^l t_{(l+1)M_n-1, M_{n+1}-1} (M_n - 1) K_{M_n-1}.
\end{aligned}$$

Ezeket összefoglalva készen is vagyunk a 3.2.5. Lemma bizonyításával. \square

3.3. Majdnem mindenütti konvergencia

Az ebben az alfejezetben lévő és a Vilenkin–Lebesgue-pontokkal kapcsolatos tételek a [6] és a [7] cikkekben szereplő, Nörlund-, illetve súlyozott közepekre vonatkozó állítások általánosításai.

3.3.1. Tétel (Blahota és Nagy D. [18]). *Minden $n \in \mathbb{P}$ -re $(t_{k,n} : 1 \leq k \leq n)$ nemnegatív számok véges sorozata esetén legyen*

$$\sum_{k=1}^n t_{k,n} = 1. \tag{3.8}$$

Tegyük fel, hogy $f \in L_1(G_m)$ és az $x \in G_m$ pontban

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n(f; x) = f(x).$$

a) Legyen $(t_{k,n} : 1 \leq k \leq n)$ nemnegatív számok véges sorozata minden n esetén csökkenő és teljesüljön

$$\lim_{n \rightarrow \infty} t_{1,n} = 0, \quad (3.9)$$

vagy

b) legyen $(t_{k,n} : 1 \leq k \leq n)$ nemnegatív számok véges sorozata minden n esetén növekvő. Ez esetben azt feltételezzük, hogy

$$t_{n,n} = O\left(\frac{1}{n}\right). \quad (3.10)$$

Ekkor mindkét esetben

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n^T(f; x) = f(x).$$

Bizonyítás. Az Abel-transzformációból kapjuk a

$$\sum_{k=1}^l t_{k,n} = \sum_{k=1}^{l-1} \Delta t_{k,n} k + t_{l,n} l \quad (3.11)$$

egyenlőséget. A T és Fejér-közeppek közötti kapcsolat miatt

$$\sigma_n^T(f; x) = \sum_{k=1}^{n-1} \Delta t_{k,n} k \sigma_k(f; x) + t_{n,n} n \sigma_n(f; x). \quad (3.12)$$

A (3.8), (3.11) és a (3.12) egyenlőségekből kapjuk, hogy

$$\sigma_n^T(f; x) - f(x) = \sum_{k=1}^{n-1} \Delta t_{k,n} k (\sigma_k(f; x) - f(x)) + t_{n,n} n (\sigma_n(f; x) - f(x)).$$

Rögzítsük $f \in L_1(G_m)$ -et és $x \in G_m$ -t, melyekre $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n(f; x) = f(x)$ teljesül.

Vegyük az a) esetet. Ekkor $|\Delta t_{k,n}| = \Delta t_{k,n}$ és

$$\begin{aligned} |\sigma_n^T(f; x) - f(x)| &\leq \sum_{k=1}^{n-1} \Delta t_{k,n} k |\sigma_k(f; x) - f(x)| \\ &\quad + t_{n,n} n |\sigma_n(f; x) - f(x)| =: I_n + II_n. \end{aligned}$$

Mivel $\lim_{n \rightarrow \infty} |\sigma_n(f; x) - f(x)| = 0$, minden $\varepsilon > 0$ esetén létezik $n_{a,1} \in \mathbb{P}$ úgy, hogy

$$|\sigma_n(f; x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad (3.13)$$

ahol $n > n_{a,1}$ és létezik $A > 0$ konstans, melyre

$$|\sigma_n(f; x) - f(x)| \leq A \quad (3.14)$$

minden n -re. Ekkor

$$\begin{aligned} I_n &= \sum_{k=1}^{n-1} \Delta t_{k,n} k |\sigma_k(f; x) - f(x)| \\ &= \sum_{k=1}^{n_{a,1}-1} \Delta t_{k,n} k |\sigma_k(f; x) - f(x)| + \sum_{k=n_{a,1}}^{n-1} \Delta t_{k,n} k |\sigma_k(f; x) - f(x)| \\ &=: I_{n,1} + I_{n,2}. \end{aligned}$$

Az első taghoz a (3.11)-et, (3.14)-et és a sorozat monoton csökkenő voltát használva

$$\begin{aligned} I_{n,1} &\leq A \left(\sum_{k=1}^{n_{a,1}} t_{k,n} - t_{n_{a,1},n} n_{a,1} \right) \\ &\leq A n_{a,1} t_{1,n}. \end{aligned}$$

A (3.9) feltételből következik, hogy bármely $\varepsilon > 0$ esetén létezik olyan $n_{a,2} \in \mathbb{P}$ úgy, hogy $t_{1,n} < \varepsilon / (2A n_{a,1})$ és $n_{a,2} < n$, azaz, ha $n_a := \max(n_{a,1}, n_{a,2}) < n$, akkor $I_{n,1} \leq \varepsilon / 2$.

Felhasználva a (3.8), (3.11) és a (3.13) feltételeket

$$\begin{aligned}
 I_{n,2} &= \sum_{k=n_{a,1}}^{n-1} \Delta t_{k,n} k |\sigma_k(f; x) - f(x)| \\
 &\leq \frac{\varepsilon}{2} \sum_{k=n_{a,1}}^{n-1} \Delta t_{k,n} k \\
 &\leq \frac{\varepsilon}{2} \sum_{k=1}^{n-1} \Delta t_{k,n} k \\
 &= \frac{\varepsilon}{2} (1 - t_{n,n} n) \leq \frac{\varepsilon}{2}.
 \end{aligned}$$

Eredményünket összegezve $0 \leq I_n \leq \varepsilon$, ha $n_a < n$, tehát $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n = 0$.

A második tagnál, mivel a sorozat csökkenő, a (3.8) feltételből kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
 0 \leq II_n &\leq \sum_{k=1}^n t_{k,n} |\sigma_n(f; x) - f(x)| \\
 &= |\sigma_n(f; x) - f(x)| \rightarrow 0,
 \end{aligned}$$

amint $n \rightarrow \infty$, ezért $\lim_{n \rightarrow \infty} II_n = 0$.

Azt kapjuk, hogy $I_n + II_n = |\sigma_n^T(f; x) - f(x)|$ is nullához tart minden olyan $x \in G_m$ pontban, melyre a $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n(f; x) = f(x)$ fennáll.

Vizsgáljuk meg a b) esetet. Ekkor $|\Delta t_{k,n}| = -\Delta t_{k,n}$. A (3.10) feltétel alapján létezik c abszolút állandó, amelyre $nt_{n,n} \leq c$. Mivel $\lim_{n \rightarrow \infty} |\sigma_n(f; x) - f(x)| = 0$, bármely $\varepsilon > 0$ esetén létezik $n_{b,1} \in \mathbb{P}$ úgy, hogy

$$|\sigma_n(f; x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2c}, \quad (3.15)$$

amikor $n > n_{b,1}$. Könnyű látni, hogy

$$\begin{aligned} |\sigma_n^T(f; x) - f(x)| &\leq - \sum_{k=1}^{n-1} \Delta t_{k,n} k |\sigma_k(f; x) - f(x)| \\ &\quad + t_{n,n} n |\sigma_n(f; x) - f(x)| \\ &=: III_n + IV_n. \end{aligned}$$

Ekkor

$$\begin{aligned} III_n &= - \sum_{k=1}^{n-1} \Delta t_{k,n} k |\sigma_k(f; x) - f(x)| \\ &= - \sum_{k=1}^{n_{b,1}-1} \Delta t_{k,n} k |\sigma_k(f; x) - f(x)| \\ &\quad + \left(- \sum_{k=n_{b,1}}^{n-1} \Delta t_{k,n} k |\sigma_k(f; x) - f(x)| \right) \\ &=: III_{n,1} + III_{n,2}. \end{aligned}$$

Az első tagnál a (3.10), (3.11), (3.14) és a $t_{k,n}$ sorozat monoton növekedése miatt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} III_{n,1} &\leq A \left(t_{n_{b,1},n} n_{b,1} - \sum_{k=1}^{n_{b,1}} t_{k,n} \right) \\ &\leq A n_{b,1} t_{n_{b,1},n} \leq A n_{b,1} t_{n,n} \leq \frac{c}{n} A n_{b,1}. \end{aligned}$$

Ez azt jelenti, hogy ha bármely $\varepsilon > 0$ esetén $n_b = \max(n_{b,1}, n_{b,2})$, ahol $n_{b,2} := [2cAn_{b,1}/\varepsilon] + 1$ (itt $[y]$ az y valós szám egész részét jelöli), akkor $III_{n,1} \leq \varepsilon/2$ teljesül minden $n_b < n$ esetén.

A (3.10), (3.11) és a (3.15) használata adja, hogy

$$\begin{aligned}
 III_{n,2} &= - \sum_{k=n_b,1}^{n-1} \Delta t_{k,n} k |\sigma_k(f; x) - f(x)| \\
 &\leq - \frac{\varepsilon}{2c} \sum_{k=n_b,1}^{n-1} \Delta t_{k,n} k \\
 &\leq - \frac{\varepsilon}{2c} \sum_{k=1}^{n-1} \Delta t_{k,n} k \\
 &= \frac{\varepsilon}{2c} (t_{n,n} n - 1) \leq \frac{\varepsilon}{2c} \frac{c}{n} = \frac{\varepsilon}{2}.
 \end{aligned}$$

Eredményeinket összegezve kapjuk, hogy $0 \leq III_n \leq \varepsilon$, ha $n_b < n$, így $\lim_{n \rightarrow \infty} III_n = 0$. Másrészt, mivel a sorozat növekvő a (3.10) feltétel mellett kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
 0 \leq IV_n &= t_{n,n} n |\sigma_n(f; x) - f(x)| \\
 &\leq c |\sigma_n(f; x) - f(x)| \rightarrow 0
 \end{aligned}$$

amint $n \rightarrow \infty$, így $\lim_{n \rightarrow \infty} IV_n = 0$.

Következésképpen $III_n + IV_n = |\sigma_n^T(f; x) - f(x)|$ is nullához tart minden megfelelő x pontban. \square

3.3.2. Következmény (Blahota és Nagy D. [18]). *Legyen $f \in L_1(G_m)$. Minden $n \in \mathbb{P}$ -re $(t_{k,n} : 1 \leq k \leq n)$ nemnegatív számok véges sorozata esetén legyen*

$$\sum_{k=1}^n t_{k,n} = 1.$$

a) *Legyen $(t_{k,n} : 1 \leq k \leq n)$ nemnegatív számok véges sorozata minden n esetén csökkenő és teljesüljön*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} t_{1,n} = 0,$$

vagy

b) legyen $(t_{k,n} : 1 \leq k \leq n)$ nemnegatív számok véges sorozata minden n esetén növekvő. Ez esetben azt feltételezzük, hogy

$$t_{n,n} = O\left(\frac{1}{n}\right).$$

Ekkor mindkét esetben

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n^T(f; x) = f(x)$$

minden x folytonossági vagy Vilenkin–Lebesgue-pontban.

Bizonyítás. Ez az állítás a 3.2.1. Tétel és a 3.3.1. Tétel egyszerű következménye. \square

3.3.3. Megjegyzés. Azonnal megkapjuk, hogy a 3.3.2. Következmény feltételeivel

$$\sigma_n^T(f) \rightarrow f$$

majdnem mindenütt.

3.3.4. Tétel (Blahota és Nagy D. [16]). Legyen $f \in L_1(G_m)$. Minden $n \in \mathbb{P}$ -re legyen $(t_{k, M_{n+1}-1} : M_n \leq k \leq M_{n+1} - 1)$ nemnegatív számok véges sorozata úgy, hogy

$$\sum_{k=M_n}^{M_{n+1}-1} t_{k, M_{n+1}-1} = 1. \quad (3.16)$$

Ha a $(t_{k, M_{n+1}-1} : M_n \leq k \leq M_{n+1} - 1)$ sorozat minden rögzített n esetén növekvő vagy csökkenő (különböző n -ekre nem feltétlenül ugyanabban az értelemben), továbbá feltesszük, hogy

$$t_{M_n, M_{n+1}-1} = O\left(\frac{1}{M_n}\right) \quad (3.17)$$

és

$$t_{M_{n+1}-1, M_{n+1}-1} = O\left(\frac{1}{M_n}\right), \quad (3.18)$$

akkor

$$\sigma_{M_n, M_{n+1}-1}^T(f) \rightarrow f$$

majdnem mindenütt.

Bizonyítás. Az Abel-transzformációt használva kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} & \sum_{k=M_n}^{M_{n+1}-1} t_{k, M_{n+1}-1} S_k(f) \\ &= \sum_{k=M_n}^{M_{n+1}-2} \Delta t_{k, M_{n+1}-1} k \sigma_k(f) \\ & \quad + t_{M_{n+1}-1, M_{n+1}-1} (M_{n+1} - 1) \sigma_{M_{n+1}-1}(f) \\ & \quad - t_{M_n, M_{n+1}-1} (M_n - 1) \sigma_{M_n-1}(f). \end{aligned}$$

Mivel

$$\begin{aligned} & \sum_{k=M_n}^{M_{n+1}-2} \Delta t_{k, M_{n+1}-1} k \\ &= \sum_{k=M_n}^{M_{n+1}-1} t_{k, M_{n+1}-1} - (M_{n+1} - 1) t_{M_{n+1}-1, M_{n+1}-1} \\ & \quad + (M_n - 1) t_{M_n, M_{n+1}-1}, \end{aligned}$$

növekvő esetben, a (3.18) feltétel használatával kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} & \sum_{k=M_n}^{M_{n+1}-2} |\Delta t_{k, M_{n+1}-1}| k \\ &= - \sum_{k=M_n}^{M_{n+1}-1} t_{k, M_{n+1}-1} + (M_{n+1} - 1) t_{M_{n+1}-1, M_{n+1}-1} \\ & \quad - (M_n - 1) t_{M_n, M_{n+1}-1} \leq (M_{n+1} - 1) t_{M_{n+1}-1, M_{n+1}-1} \leq c, \end{aligned}$$

míg csökkenő esetben, a (3.16) és a (3.17) feltételeket használva kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=M_n}^{M_{n+1}-2} |\Delta t_{k, M_{n+1}-1}| k \\
&= \sum_{k=M_n}^{M_{n+1}-1} t_{k, M_{n+1}-1} - (M_{n+1} - 1) t_{M_{n+1}-1, M_{n+1}-1} \\
&\quad + (M_n - 1) t_{M_n, M_{n+1}-1} \leq \sum_{k=M_n}^{M_{n+1}-1} t_{k, M_{n+1}-1} + (M_n - 1) t_{M_n, M_{n+1}-1} \\
&\leq 1 + (M_n - 1) t_{M_n, M_{n+1}-1} \leq c.
\end{aligned}$$

A (3.17) és a (3.18) feltételek segítségével

$$\begin{aligned}
\left| \sum_{k=M_n}^{M_{n+1}-1} t_{k, M_{n+1}-1} S_k(f) \right| &\leq \sum_{k=M_n}^{M_{n+1}-2} |\Delta t_{k, M_{n+1}-1}| k \sup_{k \in \{M_n, \dots, M_{n+1}-2\}} |\sigma_k(f)| \\
&\quad + (M_{n+1} - 1) t_{M_{n+1}-1, M_{n+1}-1} |\sigma_{M_{n+1}-1}(f)| \\
&\quad + (M_n - 1) t_{M_n, M_{n+1}-1} |\sigma_{M_n-1}(f)| \\
&\leq c \sup_{k \in \{M_n, \dots, M_{n+1}-2\}} |\sigma_k(f)| \\
&\quad + c |\sigma_{M_{n+1}-1}(f)| + c |\sigma_{M_n-1}(f)| \\
&\leq c \sup_{k \in \mathbb{P}} |\sigma_k(f)| = c \sigma^*(f),
\end{aligned}$$

ahol $\sigma^*(f) = \sup_{k \in \mathbb{P}} |\sigma_k(f)|$.

Ez az egyenlőtlenség azt jelenti, hogy

$$\sup_{n \in \mathbb{P}} \left| \sum_{k=M_n}^{M_{n+1}-1} t_{k, M_{n+1}-1} S_k(f) \right| \leq c \sigma^*(f). \quad (3.19)$$

Ismert, hogy az $f \rightarrow \sigma^*(f)$ operátor gyengén $(1, 1)$ típusú, ezért a (3.19) egyenlőtlenség azt eredményezi, hogy az

$$f \rightarrow \sup_{n \in \mathbb{P}} |\sigma_{M_n, M_{n+1}-1}^T(f)|$$

operátor szintén gyengén $(1, 1)$ típusú.

Ebből a szokásos módon kapjuk, hogy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_{M_n, M_{n+1}-1}^T(f) = f,$$

ahol a konvergencia majdnem mindenütt teljesül. \square

3.3.5. Megjegyzés. Mivel ha $f \in L_p(G_m)$, ahol $1 < p \leq \infty$, akkor $S_n(f) \rightarrow f$ majdnem mindenütt, amint $n \rightarrow \infty$, ezért hasonló eredményt mondhatunk, mint a 3.5.5 megjegyzésben.

3.4. Normabecslések

Az alábbi tétel Walsh változata [11]-ben található.

3.4.1. Tétel (Blahota és Nagy D. [16]). Legyen $f \in L_1(G_m)$. Minden $n \in \mathbb{P}$ -re legyen $(t_{k, M_{n+1}-1} : M_n \leq k \leq M_{n+1} - 1)$ nemnegatív számok véges sorozata úgy, hogy

$$\sum_{k=M_n}^{M_{n+1}-1} t_{k, M_{n+1}-1} = 1. \quad (3.20)$$

Ezenkívül tegyük fel, hogy a $(t_{k, M_{n+1}-1} : M_n \leq k \leq M_{n+1} - 1)$ rögzített n -re monoton, és megfelel a következő feltételek egyikének.

a) Vagy $(t_{k, M_{n+1}-1} : M_n \leq k \leq M_{n+1} - 1)$ növekvő és

$$t_{M_{n+1}-1, M_{n+1}-1} = O\left(\frac{1}{M_n}\right), \quad (3.21)$$

b) vagy $(t_{k, M_{n+1}-1} : M_n \leq k \leq M_{n+1} - 1)$ csökkenő.
Ekkor mindkét esetben

$$\|\sigma_{M_n, M_{n+1}-1}^T(f) - f\|_1 \leq c\omega_1\left(f, \frac{1}{M_n}\right)$$

teljesül.

Bizonyítás. Használva a (3.2)-t, a (3.20) feltételt, a Minkowski-egyenlőtlenséget és a 3.2.5. Lemmát, a következő felbontást kapjuk

$$\begin{aligned}
& \left\| \sigma_{M_n, M_{n+1}-1}^T(f) - f \right\|_1 \\
&= \int_{G_m} \left| \sigma_{M_n, M_{n+1}-1}^T(f; x) - f(x) \right| d\mu(x) \\
&= \int_{G_m} \left| \int_{G_m} K_{M_n, M_{n+1}-1}^T(u) F(x, u) d\mu(u) \right| d\mu(x) \\
&\leq \sum_{j=1}^4 \int_{G_m} \left| \int_{G_m} K_{j,n}(u) F(x, u) d\mu(u) \right| d\mu(x) \\
&=: \sum_{j=1}^4 I_{j,n}
\end{aligned}$$

az $F(x, u) := f(x - u) - f(x)$ jelöléssel.

Alkalmazzuk a (3.4) egyenlőséget, a 3.2.3. Lemmát és a (3.20) feltételt az $I_{1,n}$ kifejezésre. Így kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
I_{1,n} &= \int_{G_m} \left| \int_{G_m} \sum_{l=1}^{m_n-1} \sum_{s=1}^{l-1} \sum_{k=0}^{M_n-1} t_{lM_n+k, M_{n+1}-1} \right. \\
&\quad \left. \times r_n^s(u) D_{M_n}(u) F(x, u) d\mu(u) \right| d\mu(x) \\
&\leq \sum_{l=1}^{m_n-1} \sum_{k=0}^{M_n-1} t_{lM_n+k, M_{n+1}-1} \\
&\quad \times \sum_{s=1}^{l-1} \int_{G_m} \left| \int_{G_m} r_n^s(u) D_{M_n}(u) F(x, u) d\mu(u) \right| d\mu(x) \\
&\leq c\omega_1 \left(f, \frac{1}{M_n} \right).
\end{aligned}$$

Az általánosított Minkowski-egyenlőtlenség használatával

$$\begin{aligned}
 I_{2,n} &= \int_{G_m} \left| \int_{G_m} \sum_{s=M_n}^{M_{n+1}-1} t_{s,M_{n+1}-1} D_{M_n}(u) F(x, u) d\mu(u) \right| d\mu(x) \\
 &\leq \sum_{s=M_n}^{M_{n+1}-1} t_{s,M_{n+1}-1} \int_{G_m} D_{M_n}(u) \int_{G_m} |F(x, u)| d\mu(x) d\mu(u) \\
 &\leq \omega_1 \left(f, \frac{1}{M_n} \right).
 \end{aligned}$$

Most a (3.3) egyenlőtlenség és a 3.2.3. Lemma alkalmazásával kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
 I_{3,n} &= \int_{G_m} \left| \int_{G_m} \sum_{l=1}^{m_n-1} \sum_{k=1}^{M_n-2} \Delta t_{lM_n+k, M_{n+1}-1} k \right. \\
 &\quad \left. \times r_n^l(u) K_k(u) F(x, u) d\mu(u) \right| d\mu(x) \\
 &\leq \sum_{l=1}^{m_n-1} \sum_{k=1}^{M_n-2} |\Delta t_{lM_n+k, M_{n+1}-1}| k \\
 &\quad \times \int_{G_m} \left| \int_{G_m} r_n^l(u) K_k(u) F(x, u) d\mu(u) \right| d\mu(x) \\
 &\leq c \sum_{l=1}^{m_n-1} \sum_{k=1}^{M_n-2} |\Delta t_{lM_n+k, M_{n+1}-1}| k \omega_1 \left(f, \frac{1}{M_n} \right).
 \end{aligned}$$

Az a) esetben

$$\begin{aligned}
 &\sum_{k=1}^{M_n-2} |\Delta t_{lM_n+k, M_{n+1}-1}| k \\
 &= \sum_{k=1}^{M_n-2} (t_{lM_n+k+1, M_{n+1}-1} - t_{lM_n+k, M_{n+1}-1}) k
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (M_n - 2)t_{(l+1)M_n-1, M_{n+1}-1} - \sum_{k=1}^{M_n-2} t_{lM_n+k, M_{n+1}-1} \\
&\leq M_n t_{(l+1)M_n-1, M_{n+1}-1}.
\end{aligned}$$

A következő becsléshez a monotonitást, a (3.20) és a (3.21) feltételeket is felhasználjuk.

$$\begin{aligned}
&M_n \sum_{l=1}^{m_n-1} t_{(l+1)M_n-1, M_{n+1}-1} \\
&= (M_n t_{2M_n-1, M_{n+1}-1} + \cdots + M_n t_{(m_n-1)M_n-1, M_{n+1}-1}) \\
&\quad + M_n t_{M_{n+1}-1, M_{n+1}-1} \\
&\leq \left(t_{2M_n-1, M_{n+1}-1} + t_{2M_n, M_{n+1}-1} + \cdots + t_{3M_n-2, M_{n+1}-1} \right) \\
&\quad + \\
&\quad \vdots \\
&\quad + \left(t_{(m_n-1)M_n-1, M_{n+1}-1} + t_{(m_n-1)M_n, M_{n+1}-1} \right. \\
&\quad \quad \left. + \cdots + t_{m_n M_n-2, M_{n+1}-1} \right) \\
&\quad + M_n t_{M_{n+1}-1, M_{n+1}-1} \\
&= \left(\sum_{k=2M_n-1}^{3M_n-2} t_{k, M_{n+1}-1} + \cdots + \sum_{k=(m_n-1)M_n-1}^{M_{n+1}-2} t_{k, M_{n+1}-1} \right) \\
&\quad + M_n t_{M_{n+1}-1, M_{n+1}-1} \\
&= \sum_{k=2M_n-1}^{M_{n+1}-2} t_{k, M_{n+1}-1} + M_n t_{M_{n+1}-1, M_{n+1}-1} \leq 1 + c = c.
\end{aligned}$$

Ebből az egyenlőtlenségből megkapjuk, hogy

$$I_{3,n} \leq c M_n \sum_{l=1}^{m_n-1} t_{(l+1)M_n-1, M_{n+1}-1} \omega_1 \left(f, \frac{1}{M_n} \right) \leq c \omega_1 \left(f, \frac{1}{M_n} \right). \quad (3.22)$$

Becsüljük felül az $I_{4,n}$ kifejezést az a) esetben. A (3.3) egyenlőtlenség, a 3.2.3. Lemma és a (3.22) egyenlőtlenség adja, hogy

$$\begin{aligned}
I_{4,n} &= \int_{G_m} \left| \int_{G_m} \sum_{l=1}^{m_n-1} t_{(l+1)M_n-1, M_{n+1}-1} (M_n - 1) \right. \\
&\quad \left. \times r_n^l(u) K_{M_n-1}(u) F(x, u) d\mu(u) \right| d\mu(x) \\
&\leq M_n \sum_{l=1}^{m_n-1} t_{(l+1)M_n-1, M_{n+1}-1} \\
&\quad \times \int_{G_m} \left| \int_{G_m} r_n^l(u) K_{M_n-1}(u) F(x, u) d\mu(u) \right| d\mu(x) \\
&\leq c M_n \sum_{l=1}^{m_n-1} t_{(l+1)M_n-1, M_{n+1}-1} \omega_1 \left(f, \frac{1}{M_n} \right) \leq c \omega_1 \left(f, \frac{1}{M_n} \right).
\end{aligned}$$

A b) esetben $I_{3,n} + I_{4,n}$ -et becsüljük. Ebben az esetben

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{M_n-2} \left| \Delta t_{lM_n+k, M_{n+1}-1} \right| k \\
&= \sum_{k=1}^{M_n-2} (t_{lM_n+k, M_{n+1}-1} - t_{lM_n+k+1, M_{n+1}-1}) k \\
&= \sum_{k=1}^{M_n-2} t_{lM_n+k, M_{n+1}-1} - (M_n - 2) t_{(l+1)M_n-1, M_{n+1}-1},
\end{aligned}$$

így a (3.3) egyenlőtlenség, a 3.2.3. Lemma és a (3.20) feltétel adja, hogy

$$\begin{aligned}
I_{3,n} + I_{4,n} &\leq \sum_{l=1}^{m_n-1} \sum_{k=1}^{M_n-2} \left| \Delta t_{lM_n+k, M_{n+1}-1} \right| k \\
&\quad \times \int_{G_m} \left| \int_{G_m} r_n^l(u) K_k(u) F(x, u) d\mu(u) \right| d\mu(x)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + (M_n - 1) \sum_{l=1}^{m_n-1} t_{(l+1)M_n-1, M_{n+1}-1} \\
& \times \int_{G_m} \left| \int_{G_m} r_n^l(u) K_{M_n-1}(u) F(x, u) d\mu(u) \right| d\mu(x) \\
\leq & \sum_{l=1}^{m_n-1} \left(\sum_{k=1}^{M_n-2} t_{lM_n+k, M_{n+1}-1} - (M_n - 2)t_{(l+1)M_n-1, M_{n+1}-1} \right. \\
& \left. + (M_n - 1)t_{(l+1)M_n-1, M_{n+1}-1} \right) c\omega_1 \left(f, \frac{1}{M_n} \right) \\
= & \sum_{l=1}^{m_n-1} \left(\sum_{k=1}^{M_n-2} t_{lM_n+k, M_{n+1}-1} + t_{(l+1)M_n-1, M_{n+1}-1} \right) \\
& \times c\omega_1 \left(f, \frac{1}{M_n} \right) \\
= & \sum_{l=1}^{m_n-1} \sum_{k=1}^{M_n-1} t_{lM_n+k, M_{n+1}-1} c\omega_1 \left(f, \frac{1}{M_n} \right) \leq c\omega_1 \left(f, \frac{1}{M_n} \right).
\end{aligned}$$

Ezzel befejeződött tételünk bizonyítása. \square

3.4.2. Megjegyzés. Megemlítjük, hogy a (3.20) feltétel természetes, hiszen számos ismert összegzési eljárás teljesíti, és ez az egyenlőség a regularitási feltételek része.

3.4.3. Tétel (Blahota és Nagy D. [16]). *Legyen $f \in L_p(G_m)$, $1 < p < \infty$ és $n \in \mathbb{P}$. Legyen $(t_{k, M_{n+1}-1} : M_n \leq k \leq M_{n+1} - 1)$ nemnegatív számok véges sorozata. Feltételezzük, hogy*

$$\sum_{k=M_n}^{M_{n+1}-1} t_{k, M_{n+1}-1} = 1 \tag{3.23}$$

teljesül. Ekkor

$$\left\| \sigma_{M_n, M_{n+1}-1}^T(f) - f \right\|_p \leq c_p \omega_p \left(f, \frac{1}{M_n} \right),$$

ahol c_p csak p -től függ.

Bizonyítás. Mivel $M_{|k|} \leq k$, a részletösszeg elemi tulajdonságaiból kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \|S_k(f) - f\|_p &\leq \|S_{M_{|k|}}(f) - f\|_p + \|S_k(f) - S_{M_{|k|}}(f)\|_p \\ &= \|S_{M_{|k|}}(f) - f\|_p + \|S_k(f - S_{M_{|k|}}(f))\|_p. \end{aligned}$$

Tudjuk, hogy ha $1 < p < \infty$, akkor $\|S_k(f)\|_p \leq c_p \|f\|_p$, tehát

$$\|S_k(f) - f\|_p \leq c_p \|S_{M_{|k|}}(f) - f\|_p.$$

Az előző egyenlőtlenség alapján, Efimov [27]-beli nevezetes eredményének segítségével következik, hogy

$$\|S_k(f) - f\|_p \leq c_p \omega_p \left(f, \frac{1}{M_{|k|}} \right),$$

tehát a (3.23) feltétel használatával

$$\begin{aligned} \|\sigma_{M_n, M_{n+1}-1}^T(f) - f\|_p &\leq \sum_{k=M_n}^{M_{n+1}-1} t_{k, M_{n+1}-1} \|S_k(f) - f\|_p \\ &\leq c_p \sum_{k=M_n}^{M_{n+1}-1} t_{k, M_{n+1}-1} \omega_p \left(f, \frac{1}{M_{|k|}} \right) \\ &\leq c_p \omega_p \left(f, \frac{1}{M_n} \right). \end{aligned}$$

□

3.4.4. Következmény. Tegyük fel, hogy a $p = 1$ esetén a 3.4.1. Tétel feltételei, $1 < p < \infty$ esetén a 3.4.3. Tétel feltételei teljesülnek. Ha $f \in \text{Lip}(\alpha, p, G_m)$, akkor

$$\|\sigma_{M_n, M_{n+1}-1}^T(f) - f\|_p = O \left(\frac{1}{M_n^\alpha} \right).$$

3.5. Normakonvergencia

A következő tétel Walsh változata [15]-ben található.

3.5.1. Tétel (Blahota és Nagy D. [18]). *Legyen $f \in L_1(G_m)$ és minden $n \in \mathbb{N}$ esetén, $(t_{k,n} : 1 \leq k \leq n)$ nemnegatív számok véges sorozata úgy, hogy*

$$\sum_{k=1}^n t_{k,n} = 1$$

teljesül.

a) Ha $(t_{k,n} : 1 \leq k \leq n)$ nemnegatív számok véges sorozata minden n esetén csökkenő és

$$\lim_{n \rightarrow \infty} t_{1,n} = 0,$$

vagy

b) ha $(t_{k,n} : 1 \leq k \leq n)$ nemnegatív számok véges sorozata minden n esetén növekvő és

$$t_{n,n} = O\left(\frac{1}{n}\right),$$

akkor teljesül az L_1 -beli normakonvergencia $\sigma_n^T(f) \rightarrow f$.

Bizonyítás. A bizonyítás egyszerű következménye a 3.2.2. Lemmának és a polinomok sűrűségén alapuló szokásos eljárásnak, hiszen a \mathcal{P} Vilenkin-polinomok halmaza sűrű $L_p(G_m)$ -ben minden $1 \leq p < \infty$ esetén.

Bármely $P \in \mathcal{P}$ Vilenkin-polinom és megfelelően nagy n esetén $S_n(P) = P$ teljesül. Legyen mondjuk $n \geq k_0$.

Mind a), mind b) esetben

$$\lim_{n \rightarrow \infty} t_{k,n} = 0$$

bármilyen rögzített k -ra, így $t_{k,n} \rightarrow 0$, ha $k < k_0$ és

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=k_0}^n t_{k,n} = 1.$$

Ebből következik

$$\begin{aligned}\sigma_n^T(P) &= \sum_{k=1}^{k_0-1} t_{k,n} S_k(P) + \sum_{k=k_0}^n t_{k,n} P \\ &\rightarrow 0 + P = P\end{aligned}$$

norma- és mindenütti konvergencia, amint $n \rightarrow \infty$. \square

3.5.2. Tétel (Blahota és Nagy D. [16]). *Legyen $n \in \mathbb{P}$ és $(t_{k, M_{n+1}-1} : M_n \leq k \leq M_{n+1} - 1)$ nemnegatív számok véges sorozata úgy, hogy*

$$\sum_{k=M_n}^{M_{n+1}-1} t_{k, M_{n+1}-1} = 1. \quad (3.24)$$

Ezenkívül tegyük fel, hogy a $(t_{k, M_{n+1}-1} : M_n \leq k \leq M_{n+1} - 1)$ minden rögzített n -re monoton és megfelel a következő feltételek egyikének.

a) Vagy $(t_{k, M_{n+1}-1} : M_n \leq k \leq M_{n+1} - 1)$ növekvő és

$$t_{M_{n+1}-1, M_{n+1}-1} = O\left(\frac{1}{M_n}\right), \quad (3.25)$$

b) vagy $(t_{k, M_{n+1}-1} : M_n \leq k \leq M_{n+1} - 1)$ csökkenő és

$$t_{M_n, M_{n+1}-1} = O\left(\frac{1}{M_n}\right). \quad (3.26)$$

Ekkor mindkét esetben létezik c abszolút állandó, melyre teljesül a

$$\|K_{M_n, M_{n+1}-1}^T\|_1 \leq c$$

egyenlőtlenség.

Bizonyítás. Az Abel-transzformációt használva kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
 K_{M_n, M_{n+1}-1}^T &= \sum_{k=M_n}^{M_{n+1}-1} t_{k, M_{n+1}-1} D_k \\
 &= \sum_{k=M_n}^{M_{n+1}-2} \Delta t_{k, M_{n+1}-1} k K_k \\
 &\quad + t_{M_{n+1}-1, M_{n+1}-1} (M_{n+1} - 1) K_{M_{n+1}-1} \\
 &\quad - t_{M_n, M_{n+1}-1} (M_n - 1) K_{M_n-1}.
 \end{aligned}$$

Ezen egyenlőség, valamint (3.3) alapján

$$\begin{aligned}
 &\|K_{M_n, M_{n+1}-1}^T\|_1 \\
 &\leq \sum_{k=M_n}^{M_{n+1}-2} |\Delta t_{k, M_{n+1}-1}| k \|K_k\|_1 \\
 &\quad + t_{M_{n+1}-1, M_{n+1}-1} (M_{n+1} - 1) \|K_{M_{n+1}-1}\|_1 \\
 &\quad + t_{M_n, M_{n+1}-1} (M_n - 1) \|K_{M_n-1}\|_1 \\
 &\leq c \left(\sum_{k=M_n}^{M_{n+1}-2} |\Delta t_{k, M_{n+1}-1}| k + t_{M_{n+1}-1, M_{n+1}-1} (M_{n+1} - 1) \right. \\
 &\quad \left. + t_{M_n, M_{n+1}-1} (M_n - 1) \right).
 \end{aligned}$$

Az a) esetben a (3.24) és a (3.25) feltételek eredményeként

$$\begin{aligned}
 &\sum_{k=M_n}^{M_{n+1}-2} |\Delta t_{k, M_{n+1}-1}| k + t_{M_{n+1}-1, M_{n+1}-1} (M_{n+1} - 1) \\
 &\quad + t_{M_n, M_{n+1}-1} (M_n - 1)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= - \sum_{k=M_n}^{M_{n+1}-1} t_{k, M_{n+1}-1} - t_{M_n, M_{n+1}-1} (M_n - 1) \\
&\quad + t_{M_{n+1}-1, M_{n+1}-1} (M_{n+1} - 1) + t_{M_{n+1}-1, M_{n+1}-1} (M_{n+1} - 1) \\
&\quad + t_{M_n, M_{n+1}-1} (M_n - 1) \\
&= -1 + 2t_{M_{n+1}-1, M_{n+1}-1} (M_{n+1} - 1) \\
&\leq 2t_{M_{n+1}-1, M_{n+1}-1} c M_n \leq c.
\end{aligned}$$

A b) esetben a (3.26) feltétel azt jelenti, hogy

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=M_n}^{M_{n+1}-2} |\Delta t_{k, M_{n+1}-1}| k + t_{M_{n+1}-1, M_{n+1}-1} (M_{n+1} - 1) \\
&\quad + t_{M_n, M_{n+1}-1} (M_n - 1) \\
&= \sum_{k=M_n}^{M_{n+1}-1} t_{k, M_{n+1}-1} + t_{M_n, M_{n+1}-1} (M_n - 1) \\
&\quad - t_{M_{n+1}-1, M_{n+1}-1} (M_{n+1} - 1) \\
&\quad + t_{M_{n+1}-1, M_{n+1}-1} (M_{n+1} - 1) + t_{M_n, M_{n+1}-1} (M_n - 1) \\
&= 1 + 2(M_n - 1)t_{M_n, M_{n+1}-1} \leq c.
\end{aligned}$$

□

3.5.3. Tétel (Blahota és Nagy D. [16]). *Legyen $f \in L_1(G_m)$. Minden $n \in \mathbb{P}$ -re legyen $(t_{k, M_{n+1}-1} : M_n \leq k \leq M_{n+1} - 1)$ nemnegatív számok véges sorozata úgy, hogy*

$$\sum_{k=M_n}^{M_{n+1}-1} t_{k, M_{n+1}-1} = 1. \quad (3.27)$$

Ha létezik c abszolút állandó, melyre

$$\|K_{M_n, M_{n+1}-1}^T\|_1 \leq c, \quad (3.28)$$

akkor teljesül az L_1 -beli normakonvergencia

$$\sigma_{M_n, M_{n+1}-1}^T(f) \rightarrow f.$$

Bizonyítás. Legyen $P \in \mathcal{P}_{M_n}$ egy Vilenkin-polinom. Akkor

$$\begin{aligned} \|\sigma_{M_n, M_{n+1}-1}^T(f) - f\|_1 &\leq \|\sigma_{M_n, M_{n+1}-1}^T(f) - \sigma_{M_n, M_{n+1}-1}^T(P)\|_1 \\ &\quad + \|\sigma_{M_n, M_{n+1}-1}^T(P) - P\|_1 + \|P - f\|_1. \end{aligned}$$

Kellően nagy n -re bármely P Vilenkin-polinom esetén $S_n(P) = P$. Ezután a (3.27) feltétel használatával kapjuk, hogy

$$\sigma_{M_n, M_{n+1}-1}^T(P) = P.$$

Ebben az esetben $\|\sigma_{M_n, M_{n+1}-1}^T(P) - P\|_1 \rightarrow 0$. A Vilenkin-polinomok sűrűsége miatt megfelelő P választásával $\|P - f\|_p$ tetszőleges kis pozitív szám lehet, ha $1 \leq p < \infty$. Végül a Young-féle konvolúciós egyenlőtlenségből kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \|\sigma_{M_n, M_{n+1}-1}^T(f) - \sigma_{M_n, M_{n+1}-1}^T(P)\|_1 &= \|\sigma_{M_n, M_{n+1}-1}^T(f - P)\|_1 \\ &\leq \|K_{M_n, M_{n+1}-1}^T\|_1 \|P - f\|_1. \end{aligned}$$

Ezeket összefoglalva és a (3.28) feltétel alapján

$$\|\sigma_{M_n, M_{n+1}-1}^T(f) - f\|_1 \rightarrow 0$$

teljesül. □

A következő állítás a 3.5.2. és a 3.5.3. Tétel egyszerű következménye.

3.5.4. Következmény (Blahota és Nagy D. [16]). *Legyen $n \in \mathbb{P}$ és $(t_{k, M_{n+1}-1} : M_n \leq k \leq M_{n+1} - 1)$ nemnegatív számok véges sorozata úgy, hogy*

$$\sum_{k=M_n}^{M_{n+1}-1} t_{k, M_{n+1}-1} = 1.$$

Ezenkívül tegyük fel, hogy a $(t_{k, M_{n+1}-1} : M_n \leq k \leq M_{n+1} - 1)$ rögzített n -re monoton és megfelel a következő feltételek egyikének.

a) Vagy $(t_{k, M_{n+1}-1} : M_n \leq k \leq M_{n+1} - 1)$ növekvő és

$$t_{M_{n+1}-1, M_{n+1}-1} = O\left(\frac{1}{M_n}\right), \quad (3.29)$$

b) vagy $(t_{k,M_{n+1}-1} : M_n \leq k \leq M_{n+1} - 1)$ csökkenő és

$$t_{M_n, M_{n+1}-1} = O\left(\frac{1}{M_n}\right). \quad (3.30)$$

Ekkor mindkét esetben teljesül az

$$\sigma_{M_n, M_{n+1}-1}^T(f) \rightarrow f$$

L_1 -beli normakonvergencia.

3.5.5. Megjegyzés (Blahota és Nagy D. [16]). *Megemlítjük, hogy ha $f \in L_p(G_m)$, ahol $1 < p < \infty$, akkor az $\sigma_{M_n, M_{n+1}-1}^T(f) \rightarrow f$ L_p -beli normakonvergencia triviális következménye az $S_n(f) \rightarrow f$ L_p -beli normakonvergenciának, méghozzá a monotonitás, a (3.29) és a (3.30) feltevése nélkül. Valóban,*

$$\begin{aligned} \|\sigma_{M_n, M_{n+1}-1}^T(f) - f\|_p &= \left\| \sum_{k=M_n}^{M_{n+1}-1} t_{k, M_{n+1}-1} S_k(f) - f \right\|_p \\ &\leq \sum_{k=M_n}^{M_{n+1}-1} t_{k, M_{n+1}-1} \|S_k(f) - f\|_p \end{aligned}$$

és ha $p > 1$, akkor $\|S_n(f) - f\|_p \rightarrow 0$, amint $n \rightarrow \infty$. Ebből az egyenlőtlenségből elemi megfontolás után $\|\sigma_{M_n, M_{n+1}-1}^T(f) - f\|_p \rightarrow 0$ adódik, amint $n \rightarrow \infty$.

4. fejezet

Melléklet, összegzési módszerek

Példákat mutatunk olyan ismert összegzési módszerekre, amelyek a disszertációban tárgyalt mátrix transzformációs összegzés speciális esetei.

A ζ jelölés arra utal, hogy a felhasznált fogalmak származhatnak a Walsh–Paley-, a Walsh–Kaczmarz- és a Vilenkin-rendszerek elméletéből is.

1. A Fejér-összegzés. Az n -edik Fejér-közép definíciója

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n S_k^\zeta(f).$$

Azaz, legyen $t_{k,n} := \frac{1}{n}$.

2. A Cesàro- (vagy (C, α)) összegzés. Legyen $0 < \alpha$ és $A_n^\alpha := \frac{(1+\alpha)\dots(n+\alpha)}{n!}$. Az n -edik Cesàro-közép definíciója

$$\frac{1}{A_{n-1}^\alpha} \sum_{k=1}^n A_{n-k}^{\alpha-1} S_k^\zeta(f).$$

Azaz, legyen $t_{k,n} := \frac{A_{n-k}^{\alpha-1}}{A_{n-1}^\alpha}$.

3. A Cesàro (vagy (C, α_n)) összeg változó paraméterekkel (lásd pl. [38]). Legyen $0 < \alpha_n < 1$. Az n -edik változó paraméterű Cesàro-közép definíciója

$$\frac{1}{A_{n-1}^{\alpha_n}} \sum_{k=1}^n A_{n-k}^{\alpha_n-1} S_k^\zeta(f).$$

Azaz, legyen $t_{k,n} := \frac{A_{n-k}^{\alpha_n-1}}{A_{n-1}^{\alpha_n}}$.

4. Legyen $(q_n : n \in \mathbb{N})$ nemnegatív számok sorozata. Az n -edik Nörlund-közép definíciója

$$t_n^\zeta(f) := \frac{1}{Q_n} \sum_{k=1}^n q_{n-k} S_k^\zeta(f),$$

ahol $Q_n := \sum_{k=0}^{n-1} q_k$ és $n \in \mathbb{P}$. Mindig feltételezzük, hogy $q_0 > 0$ és

$$\lim_{n \rightarrow \infty} Q_n = \infty. \quad (4.1)$$

Ebben az esetben a $(q_k : k \in \mathbb{P})$ által generált összegzési eljárás akkor és csak akkor reguláris (lásd [80]-at), ha

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{q_{n-1}}{Q_n} = 0. \quad (4.2)$$

Ami ezt a fogalmat és eredményt illeti, a [51] 37-38. oldalára hivatkozunk.

Ez esetben legyen $t_{k,n} := q_{n-k}/Q_n$. Ha $q_k = 1/k$, akkor megkapjuk az f függvény úgynevezett Nörlund logaritmikus közepét.

5. Legyen $(p_n : n \in \mathbb{P})$ nemnegatív számok sorozata. Az n -edik súlyozott közép

$$\frac{1}{P_n} \sum_{k=1}^n p_k S_k^\zeta(f),$$

ahol $P_n := \sum_{k=1}^n p_k$ és $n \in \mathbb{P}$. (Egyes cikkekben ezt hívják T középpnek.) Mindig feltételezzük, hogy $p_1 > 0$ és

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_n = \infty,$$

ami a regularitás feltétele.

Ebben az esetben legyen $t_{k,n} := p_k/P_n$.

6. A Weierstrass-összegzés $\gamma > 1/2$ paraméterrel. Az n -edik Weierstrass-közép definíciója

$$\sum_{k=0}^n e^{-\left(\frac{k}{n+1}\right)^\gamma} \hat{f}^\zeta(k) \zeta_k.$$

Vagyis, legyen $t_{k,n} := \Delta e^{-\left(\frac{k}{n+1}\right)^\gamma} = -\frac{1}{n+1} e^{-u^\gamma} (-1) \gamma u^{\gamma-1}$, ahol $u = k/(n+1)$ és $(k+1)/(n+1)$ közé esik.

7. A Picard- és Bessel-összegzés $\alpha\gamma > 1, \gamma > 1/2$ paraméterekkel. Az n -edik Picard- és Bessel-közép definíciója

$$\sum_{k=0}^n \frac{1}{\left(1 + \left(\frac{k}{n+1}\right)^\gamma\right)^\alpha} \hat{f}^\zeta(k) \zeta_k.$$

(Speciális esetek: $\alpha = 1$ -re kapjuk a Picard- és $\gamma = 2$ -re a Bessel-összegést.)

Legyen

$$t_{k,n} := \Delta \frac{1}{\left(1 + \left(\frac{k}{n+1}\right)^\gamma\right)^\alpha} = \frac{-1}{n+1} (-\alpha) \frac{1}{\left(1 + (u)^\gamma\right)^{\alpha+1}} \gamma u^{\gamma-1},$$

ahol $u = k/(n+1)$ és $(k+1)/(n+1)$ között van.

8. A Riesz-összegzés $\alpha \geq 1, \gamma > 1/2$ paraméterekkel. Az n -edik Riesz-közép definíciója

$$\sum_{k=0}^n \left(1 - \left(\frac{k}{n+1}\right)^\gamma\right)^\alpha \hat{f}^\zeta(k) \zeta_k.$$

Legyen

$$t_{k,n} := \Delta \left(1 - \left(\frac{k}{n+1} \right)^\gamma \right)^\alpha = \frac{-1}{n+1} \alpha (1 - u^\gamma)^{\alpha-1} (-1)^\gamma u^{\gamma-1},$$

ahol u $k/(n+1)$ és $(k+1)/(n+1)$ közé esik.

5. fejezet

Összefoglaló

5.1. Történeti áttekintés

A harmonikus analízis elmélete számos matematikai eszközt és módszert kínál, amiben fontos szerepet kapnak az ortogonális rendszerek. Az ortogonális függvényrendszerek (és azon belül a Fourier-sorok) elmélete megjelenésük óta jelentős fejlődésen mentek keresztül.

A szakirodalomban a „Walsh-függvény” kifejezést három ortonormált rendszer elemeire is használják. Nevezetesen, az eredeti Walsh-, a Walsh–Paley- és a Walsh–Kaczmarz-rendszerre. Ezek a rendszerek ugyanazokat a függvényeket tartalmazzák, más-más sorrendben. Közülük ebben a dolgozatban a Walsh–Paley- és Walsh–Kaczmarz-rendszerrel foglalkozunk.

A Walsh-rendszerek előzményének tekinthető Rademacher-rendszert Hans Adolph Rademacher definiálta, de az általa létrehozott ortogonális rendszer még nem volt teljes. Joseph Leonard Walsh nevéhez fűződik annak egy lehetséges teljessé tétele. Gyakorlati szempontok által vezérelve Walsh 1923-ban [74] a Haar-rendszert vette kiindulási alapként, annak számos jó tulajdonsága miatt. Egy olyan ortonormált függvényrendszert vezetett be, amelyben a függvények a diadikus intervallumokon a $+1$ és a -1 állandó értékeket veszik fel. A Walsh által konstruált rendszert (mint függvények rendezett halmazát) szokás eredeti Walsh-rendszernek nevezni. Az eredeti Walsh-rendszer elemei felírhatók véges sok Rademacher-

függvény szorzataként, ezáltal Raymond Edward Alan Christopher Paley (1932-ben) [59] egy könnyebben kezelhető előállítását adta meg a Walsh-függvényeknek. Ezt Walsh–Paley-rendszer néven ismerjük.

Stefan Kaczmarz vette észre 1929-ben [47], hogy a Walsh-függvények bizonyos egyszerű kombinációkként kifejezhetők a Haar-rendszerben. A. A. Šneider vezette be a Walsh–Kaczmarz-rendszert 1948-ban [68]. Megmutatta azt is, hogy az ily módon létrehozott rendszer egy átrendezése a Walsh–Paley-rendszernek.

A Walsh-függvények egy csoportelméleten alapuló diadikus reprezentációjának általánosításai a Vilenkin-rendszerek (1947, Naum Yakovlevich Vilenkin [72]). Ha a generáló sorozat korlátos, akkor a Vilenkin-rendszerekkel kapcsolatos állítások gyakran analógak a Walsh–Paley esetekkel, nemkorlátos esetben viszont komoly eltérések mutatkoznak mind az állítások tartalmában, mind a bizonyítási eljárások részleteiben. Az 1990-es évek környékén Gát György a Vilenkin-rendszer (nemkorlátos esetben Rodolfo Toledoval közösen) háromféle általánosítását is bevezette (lásd [31–33]).

A mátrix transzformációs közepek számos jól ismert összegzési módszer általánosításai. Egyszerű megfontolásból következik, hogy a Riesz-, a Nörlund-, a T (súlyozott), a Fejér- (vagy a $(C, 1)$), a Cesàro- (C, α) és a változó paraméterekkel rendelkező Cesàro- (C, α_n) közepek mind a bemutatott mátrix transzformációs összegzési módszer speciális esetei.

F. Schipp, W. R. Wade, P. Simon és J. Pál [62] klasszikus könyvében (a 191. oldalon) olvashatjuk az

$$\|\sigma_{2^n}^w(f) - f\|_X \leq \omega_X(f, 2^{-n}) + \sum_{k=0}^{n-1} 2^{k-n} \omega_X(f, 2^{-k})$$

egyenlőtlenséget, ahol X egy homogén Banach-tér (például tetszőleges L_p tér, ahol $1 \leq p < \infty$ vagy a folytonos függvények tere) és ω_X a függvények folytonossági modulusa X -ben.

Ezzel kapcsolatos munkánkat Móricz és Siddiqi [53], Areshidze és Tephnadze [4] a Walsh–Nörlund összegzési módszerről, Móricz és Rhoades [52] eredményei a Walsh súlyozott közepek módszeréről és Anakidze, Areshidze, Persson és Tephnadze [3] a T (súlyozott) összegzési mód-

szerről szóló eredményei motiválták. Móricz és Siddiqi Walsh–Cesàro-közepekre vonatkozó eredménye Yano [78], Jastrebova [45] és Skvortsov [66] korábbi eredményein alapul.

Móricz és Siddiqi [53]-ben a következőket igazolták.

5.1.1. Tétel (Móricz és Siddiqi [53], Theorem 1). *Legyen $f \in L_p(G)$, ahol $1 \leq p \leq \infty$ és legyen $(q_k : k \in \mathbb{N})$ nemnegatív számok sorozata úgy, hogy*

$$\frac{n^{\gamma-1}}{Q_n^\gamma} \sum_{k=0}^{n-1} q_k^\gamma = O(1), \text{ ahol } 1 < \gamma \leq 2. \quad (5.1)$$

Ha $(q_k : k \in \mathbb{N})$ növekvő, akkor

$$\|t_n^w(f) - f\|_p \leq \frac{5}{2Q_n} \sum_{j=0}^{|n|-1} 2^j q_{n-2^j} \omega_p \left(f, \frac{1}{2^j} \right) + c\omega_p \left(f, \frac{1}{2^{|n|}} \right),$$

míg ha $(q_k : k \in \mathbb{N})$ csökkenő, akkor

$$\|t_n^w(f) - f\|_p \leq \frac{5}{2Q_n} \sum_{j=0}^{|n|-1} (Q_{n-2^j-1} - Q_{n-2^{j+1}-1}) \omega_p \left(f, \frac{1}{2^j} \right) + c\omega_p \left(f, \frac{1}{2^{|n|}} \right).$$

Blahota és Nagy K. [20] hasonló egyenlőtlenségeket igazoltak a mátrix transzformációs közepek esetén. Ez egyben Móricz és Siddiqi [53] valamint Móricz és Rhoades [52] két eredményének közös általánosítása. A mi jelöléseinkkel mondjuk ki a következő tételt.

5.1.2. Tétel (Blahota és Nagy K. [20], Theorem 1). *Legyen $f \in L_p(G)$, ahol $1 \leq p \leq \infty$. Minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen $(t_{k,n} : 1 \leq k \leq n)$ nemnegatív számok véges sorozata úgy, hogy*

$$\sum_{k=1}^n t_{k,n} = 1$$

teljesül.

a) Ha a $(t_{k,n} : 1 \leq k \leq n)$ véges sorozat rögzített n esetén növekvő, és a

$$t_{n,n} = O\left(\frac{1}{n}\right)$$

feltétel teljesül, akkor

$$\|\sigma_n^{wT}(f) - f\|_p \leq 5 \sum_{j=0}^{|n|-1} 2^j t_{2^{j+1}-1,n} \omega_p\left(f, \frac{1}{2^j}\right) + c\omega_p\left(f, \frac{1}{2^{|n|}}\right).$$

b) Ha a $(t_{k,n} : 1 \leq k \leq n)$ véges sorozat rögzített n esetén csökkenő, akkor

$$\|\sigma_n^{wT}(f) - f\|_p \leq 5 \sum_{j=0}^{|n|-1} 2^j t_{2^j,n} \omega_p\left(f, \frac{1}{2^j}\right) + c\omega_p\left(f, \frac{1}{2^{|n|}}\right).$$

Goginava és Nagy K. [42] cikkükben javították ezeket az eredményeket (a Walsh–Paley-rendszeren), bevezetve az úgynevezett mátrix transzformációs variáció definícióját. Iofina és Volosivets [44] az 5.1.2. Tételhez hasonló eredményeket publikáltak Vilenkin-rendszereken, hasonló feltételekkel, különböző módszerekkel (függetlenül Móricz, Rhoades, Siddiqi, Fridli és mások technikájától) mátrix transzformációs közepekre.

Areshidze és Tephnadze [4] bizonyították az 5.1.3. Tételt. Belátták továbbá (növekvő esetre) az 5.1.1. Tételt is, konkrét együtthatóval és az (5.1) feltétel nélkül. Szintén növekvő sorozattal generált Nörlund-közepekre bizonyított hasonló, (5.1) feltétel nélküli tételt Fridli, Manchanda és Siddiqi [30].

5.1.3. Tétel (Areshidze és Tephnadze [4], Theorem 1). *Legyen $f \in L_p(G)$, $1 \leq p < \infty$ és legyen t_n^w egy reguláris Nörlund-közép, amelyet $(q_k : k \in \mathbb{N})$ növekvő sorozattal generálunk. Akkor*

$$\|t_n^w(f) - f\|_p \leq 18 \sum_{k=0}^{|n|-1} 2^k \frac{q_{n-2^k}}{Q_n} \omega_p\left(f, \frac{1}{2^k}\right) + 12\omega_p\left(f, \frac{1}{2^{|n|}}\right).$$

A T (súlyozott) közepekre vonatkozó hasonló eredményekért lásd Anakidze, Areshidze, Persson és Tephnadze [3] cikkét.

Köztudott, hogy a Walsh–Kaczmarz-rendszer Dirichlet-féle magfüggvényének viselkedése bizonyos értelemben rosszabb, mint a Walsh–Paley magfüggvényé. Ugyanis Šneider [68]-ben bebizonyította, hogy a

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{D_n^\kappa(x)}{\log n} > 0$$

egyenlőtlenség majdnem minden $x \in G$ -re teljesül.

Schipp [61] és Young [79] belátták, hogy a Walsh–Kaczmarz-rendszer konvergencia-rendszer. Skvortsov [67]-ben megmutatta, hogy a Walsh–Kaczmarz-rendszer Fejér-közepei egyenletesen konvergálnak f -hez bármilyen f folytonos függvény esetén. Gát [34]-ben bizonyította be minden integrálható függvényre, hogy a Walsh–Kaczmarz-rendszerre vonatkozó Fejér-közepek majdnem mindenütt konvergálnak a függvényhez. Továbbá, (analóg módon a Walsh–Paley esethez) $S_n^\kappa(f) \rightarrow f$ az $L_p(G)$ normában, amint $n \rightarrow \infty$ minden $1 < p < \infty$ esetén.

Goginava és Gogoladze vezették be [41] a Vilenkin–Lebesgue-pont fogalmát, általánosítva a Weisz által definiált [75] Walsh–Lebesgue-pontot. Nevezetesen, egy $x \in G_m$ pont az $f \in L_1(G_m)$ Vilenkin–Lebesgue-pontja, ha

$$\lim_{A \rightarrow \infty} \sum_{s=0}^{A-1} M_s \sum_{r_s=1}^{m_s-1} \int_{I_A(x-r_s e_s)} |f(t) - f(x)| d\mu(t) = 0,$$

ahol $e_s := (0, \dots, 0, 1, 0, \dots) \in G_m$ (csak az s -edik koordináta 1, a többi 0).

A Vilenkin–Fourier-analízis fontos eredményei, hogy ha $f \in L_1(G_m)$, akkor $S_{M_n}(f) \rightarrow f$ és $\sigma_n(f) \rightarrow f$, amint $n \rightarrow \infty$, majdnem mindenütt. Ezen túlmenően minden $L_1(G_m)$ -beli f függvényről ismert, hogy G_m majdnem minden pontja a függvény Vilenkin–Lebesgue-pontja, és minden ilyen x pontra

$$S_{M_n}(f; x) \rightarrow f(x),$$

amint $n \rightarrow \infty$.

Szintén Vilenkin-rendszerekre D. Baramidze, Dvalashvili és Tutberidze [6], valamint a D. Baramidze, Gogolashvili és Nadirashvili [7] bizonyított Lebesgue-pontokhoz kapcsolódó tételeket. Előbbiek Nörlund-közepekkel, míg utóbbiak súlyozott átlagokkal foglalkoztak.

A Lebesgue-pontokkal kapcsolatban fő célunk, hogy általánosítsuk D. Baramidze, Dvalashvili, Tutberidze és D. Baramidze, Gogolashvili, Nadirashvili eredményeit mátrix transzformációs közepekre.

Megemlítjük, hogy Iofina és Volosivets [44] hasonló eredményeket értek el Vilenkin-rendszereken, hasonló feltételekkel, különböző módszerekkel (függetlenül Móricz, Rhoades, Siddiqi, Fridli, Goginava, Gát, Tephnadze, Nagy K., illetve mások módszerétől).

A de La Vallée Poussin-típusú mátrix transzformációs közepeket a Walsh-rendszerhez Blahota és Gát vezették be a [14]-ben.

5.2. Walsh–Paley- és Walsh–Kaczmarz-rendszer

Jelölések és definíciók

Legyen \mathbb{P} a pozitív egész számok halmaza és $\mathbb{N} := \mathbb{P} \cup \{0\}$. Jelölje a másodrendű diszkrét ciklikus csoportot \mathbb{Z}_2 . A csoportművelet az összeadás moduló 2. Legyen minden részhalmaz nyitott. A μ_k Haar mérték legyen úgy megadva a k -adik \mathbb{Z}_2 -n ($k \in \mathbb{N}$), hogy $\mu_k(\{0\}) := \mu_k(\{1\}) := 1/2$. Legyen $G := \prod_{k=0}^{\infty} \mathbb{Z}_2$ a diadikus csoport (diszkrét ciklikus csoportok direkt szorzata). A G elemei az $x := (x_0, x_1, \dots, x_k, \dots)$ sorozatokkal reprezentálhatóak, ahol $x_k \in \{0, 1\}$ ($k \in \mathbb{N}$). A G -n végzett csoportművelet a koordinátánkénti összeadás (+ jelöléssel) moduló 2, valamint legyen a μ normalizált Haar-mérték a μ_k mértékek szorzatmértéke és a topológia a szorzattopológia.

A diadikus intervallumok definiálása az alábbi módon történik

$$I_0(x) := G, \quad I_n(x) := \{y \in G : y = (x_0, \dots, x_{n-1}, y_n, y_{n+1}, \dots)\},$$

ahol $x \in G$, $n \in \mathbb{P}$ és jelölje $I_n := I_n(0)$. Az intervallumok a G topológiájának egy környezetbázisát alkotják.

Jelölje $L_p(G)$ a szokásos Lebesgue-teret G -n (a megfelelő $\|\cdot\|_p$ normákkal).

A jelölések rövideje érdekében megállapodunk abban, hogy $L_\infty(G)$ -t írunk $C(G)$ helyett és $\|f\|_\infty := \sup\{|f(x)| : x \in G\}$. Nyilvánvaló, hogy L_∞ nem azonos a folytonos függvények terével, hanem annak egy megfelelő altere. Mivel a folytonos függvények esetében a szuprémum norma és a L_∞ norma megegyezik, a kényelem kedvéért reméljük, hogy az olvasó el tudja fogadni ezt a jelölési egyszerűsítést.

Bevezetjük a Walsh–Fourier-analízis néhány fogalmát.

Az n -edik Rademacher-függvény az x helyen legyen

$$r_n(x) := (-1)^{x_n} \quad (x \in G, n \in \mathbb{N}).$$

Minden természetes szám egyértelműen előállítható kettes számrendszerben, és ez a felírás véges (csak véges számú n_k különbözik nullától)

$$n = \sum_{k=0}^{\infty} n_k 2^k, \quad n_k \in \{0, 1\} \quad (k \in \mathbb{N}).$$

Szükségünk lesz még az alábbi jelölésre is. Ha $n \in \mathbb{P}$, akkor $|n| := \max\{j \in \mathbb{N} : n_j \neq 0\}$. Ez azt jelenti, hogy $2^{|n|} \leq n < 2^{|n|+1}$.

A Walsh–Paley-függvényeket az alábbi módon definiáljuk. Legyen $w_0(x) := 1$ és ha $n \in \mathbb{P}$, akkor legyen

$$w_n(x) := \prod_{k=0}^{\infty} r_k^{n_k}(x) = (-1)^{\sum_{k=0}^{|n|} n_k x_k}.$$

Ismert [43], hogy a Walsh–Paley-rendszer $(w_n, n \in \mathbb{N})$ a $(G, +)$ karakterrendszere.

Legyen az $L_p(G)$ folytonossági modulus

$$\omega_p(f, \delta) := \sup_{|t| < \delta} \|f(\cdot + t) - f(\cdot)\|_p,$$

ahol $f \in L_p(G)$ és $\delta > 0$, valamint

$$|x| := \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x_i}{2^{i+1}} \quad \text{minden } x \in G$$

esetén. Az $f \in C(G)$ esetben a p helyére ∞ -t írunk.

A Walsh–Kaczmarz-rendszert a következő módon vezetjük be. Legyen $\kappa_0 := 1$ és $n \in \mathbb{P}$ esetén legyen

$$\kappa_n(x) := r_{|n|}(x) \prod_{k=0}^{|n|-1} r_{|n|-1-k}^{n_k}(x) = r_{|n|}(x) (-1)^{\sum_{k=0}^{|n|-1} n_k x_{|n|-1-k}}.$$

Könnyen belátható, hogy

$$r_n = w_{2^n} = \kappa_{2^n}$$

minden $n \in \mathbb{N}$ -re.

A Walsh–Kaczmarz- és Walsh–Paley-függvények halmaza diadikus blokkonként megegyezik. Vagyis

$$\{\kappa_n : 2^k \leq n < 2^{k+1}\} = \{w_n : 2^k \leq n < 2^{k+1}\} \quad (5.2)$$

minden $k \in \mathbb{N}$ esetén és $\kappa_0 = w_0$.

A Walsh–Paley- és Walsh–Kaczmarz-rendszerek ortonormáltak és teljesek $L_1(G)$ -ben.

Skvortsov (lásd [67]) a $\tau_n : G \rightarrow G$ transzformáció

$$\tau_n(x) := (x_{n-1}, x_{n-2}, \dots, x_1, x_0, x_n, x_{n-1}, \dots)$$

segítségével összefüggést adott meg a Walsh–Kaczmarz- és Walsh–Paley-függvények között. Nevezetesen, minden $n \in \mathbb{N}$ és $x \in G$ esetén

$$\kappa_n(x) = r_{|n|}(x) w_{n-2|n|}(\tau_{|n|}(x)).$$

Fontos megjegyezni, hogy a $\tau_n(\cdot)$ függvény megőrzi a mértéket.

Legyen \mathcal{P}_n^ξ az n -nél kisebb rendű Walsh–Paley- vagy Walsh–Kaczmarz-polinomok együttese, vagyis a függvény alakja

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n-1} c_k \xi_k(x),$$

ahol $x \in G$, (c_k) komplex számok sorozata és $\xi_n = w_n$ vagy $\xi_n = \kappa_n$ minden $n \in \mathbb{N}$ esetén. A (5.2) egyenlőség azt eredményezi, hogy bevezethetjük a következő jelölést

$$\mathcal{P}_{2^n} := \mathcal{P}_{2^n}^w = \mathcal{P}_{2^n}^\kappa.$$

Világos, hogy a Walsh–Paley- és a Walsh–Kaczmarz-polinomok halmazai – amelyeket \mathcal{P} jelöl – megegyeznek.

A Lipschitz osztályok $L_p(G)$ -ben a következők. Minden $\alpha > 0$ esetén legyen

$$\text{Lip}(\alpha, p, G) := \{f \in L_p(G) : \omega_p(f, \delta) = O(\delta^\alpha), \text{ amint } \delta \rightarrow 0\}.$$

Továbbá

$$\text{Lip}(\alpha, C(G)) := \{f \in C(G) : |f(x+y) - f(x)| \leq c|y|^\alpha, x, y \in G\}.$$

Később az egyszerűség kedvéért (lásd az 5.2.7. Tételt) $\text{Lip}(\alpha, C(G))$ helyett $\text{Lip}(\alpha, \infty, G)$ -t írunk.

Definiáljuk az n -edik Fourier-együtthatót, a Fourier-sor n -edik részletösszegét, az n -edik Fejér-közepet és az n -edik Dirichlet-féle magfüggvényt (Walsh–Paley- vagy Walsh–Kaczmarz-rendszerekre) az alábbi módokon.

$$\hat{f}^\xi(n) := \int_G f \xi_n d\mu, \text{ ha } n \in \mathbb{N},$$

$$S_n^\xi(f) := \sum_{k=0}^{n-1} \hat{f}^\xi(k) \xi_k, \quad \sigma_n^\xi(f) := \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n S_k^\xi(f), \quad D_n^\xi := \sum_{k=0}^{n-1} \xi_k,$$

ahol $n \in \mathbb{P}$. Ismert, hogy

$$S_n^\xi(f; x) = \int_G f(u) D_n^\xi(x+u) d\mu(u). \quad (5.3)$$

A Fejér-féle magfüggvények a Dirichlet-féle magfüggvények számtani közepei, azaz

$$K_n^\xi := \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n D_k^\xi.$$

Legyen $T := (t_{i,j})_{i,j=1}^{\infty}$ egy duplán végtelen számmátrix. Mindig feltételezzük, hogy a T -mátrix felső háromszög alakú, azaz $t_{i,j} := 0$, ha $i > j$. Legyen a T -mátrix által meghatározott n -edik mátrix transzformációs közép

$$\sigma_n^{\xi T}(f; x) := \sum_{k=1}^n t_{k,n} S_k^{\xi}(f; x).$$

Mivel a T -mátrix n -edik oszlopa határozza meg a $\sigma_n^{\xi T}$ mátrix transzformációs közepet és definíciója csak véges számú tagot tartalmaz, ezért az egyszerűség kedvéért azt mondjuk, hogy $(t_{k,n} : 1 \leq k \leq n, k \in \mathbb{P})$ véges számsorozat minden $n \in \mathbb{P}$ -re.

Használni fogjuk még a következő jelölést.

$$\Delta t_{k,n} := t_{k,n} - t_{k+1,n},$$

ahol $k \in \{1, \dots, n\}$, $n \in \mathbb{P}$ és $t_{n+1,n} := 0$.

A $\sum_{k=1}^n t_{k,n} = 1$ feltétellel a Nörlund-közeppek speciális mátrix transzformációs közeppek, nevezetesen

$$t_{k,n} := \frac{q_{n-k}}{Q_n}.$$

A továbbiakban legyen $(t_{k,n} : 1 \leq k \leq n, k \in \mathbb{P})$ nemnegatív számok véges sorozata minden $n \in \mathbb{P}$ esetén. Az n -edik mátrix transzformációs magfüggvény definíciója

$$K_n^{\xi T}(x) := \sum_{k=1}^n t_{k,n} D_k^{\xi}(x).$$

(5.3) alapján könnyen belátható, hogy $x, u \in G$ esetén

$$\sigma_n^{\xi T}(f; x) = \int_G f(u) K_n^{\xi T}(x+u) d\mu(u),$$

ami jól mutatja a magfüggvények vizsgálatának fontosságát.

Megjegyezzük továbbá, hogy ebben a fejezetben a c egy pozitív abszolút konstans jelöl.

A disszertációban a Walsh–Paley- és Walsh–Kaczmarz-rendszer 2. fejezetében a következő állításokat igazoltuk.

Normbecslések

Az alábbi tétel a [4]-beli Theorem 1 és az [20]-beli Theorem 1 közös javítása illetve a második esetben általánosítása. (A fenti tételekben szereplő konstansokat nevesítettük, illetve javítottuk.)

5.2.1. Tétel. *Legyen $f \in L_p(G)$ és $1 \leq p \leq \infty$. Minden $n \in \mathbb{N}$ -re legyen $(t_{k,n} : 1 \leq k \leq n)$ nemnegatív számok véges sorozata úgy, hogy*

$$\sum_{k=1}^n t_{k,n} = 1.$$

Ha a $(t_{k,n} : 1 \leq k \leq n)$ véges sorozat rögzített n esetén csökkenő, akkor

$$\|\sigma_n^{wT}(f) - f\|_p \leq \frac{31}{15} \sum_{k=0}^{|n|-1} 2^k t_{2^k, n} \omega_p \left(f, \frac{1}{2^k} \right) + \frac{47}{30} \omega_p \left(f, \frac{1}{2^{|n|}} \right)$$

teljesül.

A következő tétel az [4]-beli Theorem 2 (Nörlundból és T -mátrix transzformációs összegzésből) általánosított és továbbfejlesztett változata.

5.2.2. Tétel. *Legyen a $(t_{k,2^n} : 1 \leq k \leq 2^n)$ nemnegatív számok véges sorozata minden rögzített $n \in \mathbb{N}$ esetén növekvő és legyen*

$$\sum_{k=1}^{2^n} t_{k,2^n} = 1.$$

Ekkor tetszőleges $f \in L_p(G)$, $1 \leq p < \infty$ esetén a következő egyenlőtlenséget kapjuk

$$\begin{aligned} \|\sigma_{2^n}^{wT}(f) - f\|_p &\leq \sum_{s=0}^{n-1} \frac{2^s}{2^n} \omega_p \left(f, \frac{1}{2^s} \right) \\ &\quad + 3 \sum_{s=0}^{n-1} (n-s) 2^s t_{2^n-2^s+1, n} \omega_p \left(f, \frac{1}{2^s} \right) \\ &\quad + \left(2 + \frac{1}{2^n} \right) \omega_p \left(f, \frac{1}{2^n} \right). \end{aligned}$$

Az 5.2.3. Tétel szintén általánosítás, ennek az alapja a [4]-ben szereplő Theorem 3.

5.2.3. Tétel. *Legyen minden rögzített $n \in \mathbb{P}$ esetén a $(t_{k,n} : 1 \leq k \leq n)$ nemnegatív számok véges sorozata növekvő és feltételezzük, hogy*

$$\sum_{k=1}^n t_{k,n} = 1$$

és

$$t_{n,n} = O\left(\frac{1}{n}\right).$$

Ekkor tetszőleges $f \in L_p(G)$, $1 \leq p < \infty$ esetén a következő egyenlőtlenséget kapjuk

$$\|\sigma_n^{wT}(f) - f\|_p \leq c \sum_{k=0}^{|n|} \frac{2^k}{2^{|n|}} \omega_p\left(\frac{1}{2^k}, f\right).$$

A következő tétel Nagy K. [57]-beli eredményének általánosítása, aki (részben eltérő módszerekkel) bizonyította be az analóg állítást Nörlund-közepre Walsh–Kaczmarz-rendszerre vonatkozóan. Szintén Nagy K. becsülte a súlyozott közepek konvergencia sebességét Walsh–Kaczmarz-rendszer esetén [55]-ben.

5.2.4. Tétel. *Legyen $f \in L_p(G)$, $1 \leq p \leq \infty$ és legyen minden $n \in \mathbb{P}$ -re $(t_{k,n} : 1 \leq k \leq n)$ nemnegatív számok véges sorozata úgy, hogy*

$$\sum_{k=1}^n t_{k,n} = 1$$

teljesül.

a) Legyen $(t_{k,n} : 1 \leq k \leq n)$ véges sorozat minden n -re növekvő és teljesüljön a

$$t_{n,n} = O\left(\frac{1}{n}\right)$$

feltétel. Ekkor

$$\|\sigma_n^{\kappa T}(f) - f\|_p \leq \frac{31}{15} \sum_{j=0}^{|n|-1} 2^j t_{2^{j+1}-1, n} \omega_p \left(f, \frac{1}{2^j} \right) + c \omega_p \left(f, \frac{1}{2^{|n|}} \right).$$

b) Legyen $(t_{k,n} : 1 \leq k \leq n)$ véges sorozat minden n -re csökkenő, ekkor

$$\|\sigma_n^{\kappa T}(f) - f\|_p \leq \frac{31}{15} \sum_{j=0}^{|n|-1} 2^j t_{2^j, n} \omega_p \left(f, \frac{1}{2^j} \right) + \frac{47}{30} \omega_p \left(f, \frac{1}{2^{|n|}} \right).$$

Normakonvergencia

5.2.5. Tétel. *Legyen $f \in L_1(G)$. Minden $n \in \mathbb{P}$ -re legyen $(t_{k,n} : 1 \leq k \leq n)$ nemnegatív számok véges sorozata, melyre*

$$\sum_{k=1}^n t_{k,n} = 1$$

és

$$\lim_{n \rightarrow \infty} t_{k,n} = 0$$

bármely rögzített k esetén.

Ha létezik egy c abszolút állandó, amelyre

$$\|K_n^{\kappa T}\|_1 \leq c,$$

akkor teljesül az L_1 -beli normakonvergencia

$$\sigma_n^{\kappa T}(f) \rightarrow f,$$

amint $n \rightarrow \infty$.

5.2.6. Következmény. *Legyen $n \in \mathbb{P}$ és legyen $(t_{k,n} : 1 \leq k \leq n)$ nemnegatív számok véges sorozata úgy, hogy*

$$\sum_{k=1}^n t_{k,n} = 1.$$

Tegyük fel, hogy az alábbiak közül valamelyik teljesül.

a) Ha a $(t_{k,n} : 1 \leq k \leq n)$ véges sorozat rögzített n esetén növekvő, akkor feltételezzük, hogy

$$t_{n,n} = O\left(\frac{1}{n}\right).$$

b) Ha a $(t_{k,n} : 1 \leq k \leq n)$ véges sorozat rögzített n esetén csökkenő, akkor feltételezzük, hogy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} t_{1,n} = 0.$$

Ekkor mindkét esetben teljesül az L_1 -beli normakonvergencia

$$\sigma_n^{\kappa T}(f) \rightarrow f,$$

amint $n \rightarrow \infty$.

5.2.7. Tétel. Legyen $f \in \text{Lip}(\alpha, p, G)$ valamely $\alpha > 0$ esetén és legyen $1 \leq p \leq \infty$. Legyen minden $n \in \mathbb{P}$ -re $(t_{k,n} : 1 \leq k \leq n)$ nemnegatív számok véges sorozata úgy, hogy

$$\sum_{k=1}^n t_{k,n} = 1$$

teljesül. Legyen továbbá a $(t_{k,n} : 1 \leq k \leq n)$ nemnegatív számok véges sorozata minden $n \in \mathbb{P}$ esetén növekvő a

$$t_{n,n} = O\left(\frac{1}{n}\right)$$

feltétellel. Ekkor a következő becslés teljesül

$$\|\sigma_n^{\kappa T}(f) - f\|_p = \begin{cases} O(n^{-\alpha}), & \text{ha } 0 < \alpha < 1, \\ O(\log n/n), & \text{ha } \alpha = 1, \\ O(1/n), & \text{ha } \alpha > 1. \end{cases}$$

5.3. Vilenkin-rendszer

Jelölések és definíciók

Látni fogjuk, a bevezetett fogalmak analógiát mutatnak az előző fejezetben lévő fogalmakkal (aminek az az alapja, hogy a Vilenkin-rendszer a Walsh-rendszer egy általánosítása).

Legyen $m := (m_0, m_1, \dots)$ 2-nél nem kisebb pozitív egész számok sorozata. Jelölje $\mathbb{Z}_{m_n} := \{0, 1, \dots, m_n - 1\}$ a természetes számok additív csoportját moduló m_n , ahol $n \in \mathbb{N}$. Ezen \mathbb{Z}_{m_n} diszkrét ciklikus csoportok direkt szorzataként definiáljuk a G_m Vilenkin-csoportot. A G_m -en végzett csoportművelet a koordinátánkénti összeadás moduló m_n .

A direkt szorzaton bevezetett μ mértéket a

$$\mu_n(\{j\}) := 1/m_n \quad (j \in \mathbb{Z}_{m_n})$$

mértékek direkt szorzataként definiáljuk, ami Haar-mérték és valószínűségi mérték G_m -en, azaz $\mu(G_m) = 1$.

Ha az m sorozat korlátos, akkor G_m -et korlátos, egyébként nem korlátos Vilenkin-csoportnak nevezzük. A fejezetben feldolgozott cikkekben és így az egész disszertációban csak a korlátos esettel foglalkozunk. Nem korlátos Vilenkin-csoportokra vonatkozó eredményekért lásd pl. [13, 35, 36]-at. Megemlítjük, hogy $m = (2, 2, \dots)$ esetén G -t, a diadikus csoportot kapjuk. G_m elemei az

$$x := (x_0, x_1, \dots, x_n, \dots) \quad (x_n \in \mathbb{Z}_{m_n})$$

számsorozatokkal reprezentálhatóak. A diadikus intervallumok definiálása a következő módon történik

$$I_0(x) := G_m,$$

$$I_n(x) := \{y \in G_m \mid y_0 = x_0, \dots, y_{n-1} = x_{n-1}\} \quad (x \in G_m, n \in \mathbb{P}).$$

Az m sorozaton alapuló ún. általánosított, m -adikus számrendszert az alábbi módon definiáljuk

$$M_0 := 1, \quad M_{n+1} := m_n M_n \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Ekkor minden $n \in \mathbb{N}$ egyértelműen előállítható $n = \sum_{k=0}^{\infty} n_k M_k$ alakban, ahol $n_k \in \mathbb{Z}_{m_k}$ ($k \in \mathbb{N}$) és csak véges sok n_k különbözik nullától. Jelölje $|n|$ azt a természetes számot (n rendje), amelyre $M_{|n|} \leq n < M_{|n|+1}$.

Jelölje $L_p(G_m)$ a Lebesgue-teret G_m -en (a megfelelő $\|\cdot\|_p$ normákkal) és $C(G_m)$ jelölje a folytonos függvények terét G_m -en az $\|f\|_{\infty} := \sup\{|f(x)| : x \in G_m\}$ normával.

Legyen

$$\omega_p(f, \delta) := \sup_{|x| < \delta} \|f(\cdot - x) - f(\cdot)\|_p$$

a folytonossági modulus $L_p(G_m)$ -en, ahol $1 \leq p < \infty$, $f \in L_p(G_m)$ és $\delta > 0$, valamint

$$|x| := \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x_i}{M_{i+1}} \quad \text{minden } x \in G_m \text{ esetén.}$$

Ennek analógiájára definiáljuk a folytonossági modulus $C(G_m)$ -en, ezt $\omega_{\infty}(f, \delta)$ jelölje.

Az előző fejezet fogalmaihoz hasonlóan bevezetjük a $\text{Lip}(\alpha, p, G_m)$ és $\text{Lip}(\alpha, C(G_m))$ osztályokat (amennyiben $1 \leq p < \infty$) és a

$$\text{Lip}(\alpha, \infty, G_m) := \text{Lip}(\alpha, C(G_m))$$

jelölést.

Bevezetünk G_m -en egy ortonormált rendszert, amelyet Vilenkin-rendszernek nevezünk. Ehhez definiáljuk az $r_k(x) : G_m \rightarrow \mathbb{C}$, komplex értékű függvényeket, azaz az úgynevezett általánosított Rademacher-függvényeket úgy, hogy

$$r_k(x) := \exp(2\pi i x_k / m_k) \quad (i^2 = -1, x \in G_m, k \in \mathbb{N}).$$

A $\psi := (\psi_n : n \in \mathbb{N})$ függvénysorozatot G_m -en, ahol

$$\psi_n(x) := \prod_{k=0}^{\infty} r_k^{n_k}(x) \quad (n \in \mathbb{N})$$

Vilenkin-rendszernek nevezzük.

Amennyiben $m = (2, 2, \dots)$, speciálisan a Walsh–Paley-rendszert kapjuk. A Vilenkin-rendszer ortonormált és teljes $L_1(G_m)$ -ben (lásd pl. [72]). A Vilenkin-rendszer elemei pontosan azok az $f: G_m \rightarrow \mathbb{C}$ folytonos függvények, melyekre

$$f(x + y) = f(x)f(y)$$

és $|f(x)| = 1$ minden $x, y \in G_m$ esetén. Sőt, ez akkor és csak akkor teljesül, ha $f(x) = \psi_n(x)$ valamely $n \in \mathbb{N}$ esetén (lásd [62]-ot).

Legyen \mathcal{P}_n az n -nél kisebb rendű Vilenkin-polinomok halmaza, vagyis azon függvényeké, melyek felírhatók

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k \psi_k(x)$$

alakban, ahol $n \in \mathbb{P}$ és (a_k) komplex számok sorozata. \mathcal{P} jelölje a Vilenkin-polinomok halmazát.

A továbbiakban a Vilenkin–Fourier-analízissel kapcsolatos klasszikus fogalmakat vezetjük be. Definiáljuk az f függvény n -edik Vilenkin–Fourier-együtthatóját, Vilenkin–Fourier-sorának n -edik részletösszegét, az n -dik Vilenkin–Fejér-közepet és az n -edik Vilenkin–Dirichlet-féle magfüggvényt:

$$\hat{f}(n) := \int_{G_m} f \bar{\psi}_n d\mu, \text{ ha } n \in \mathbb{N},$$

$$S_n(f) := \sum_{k=0}^{n-1} \hat{f}(k) \psi_k, \quad \sigma_n(f) := \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n S_k(f), \quad D_n := \sum_{k=0}^{n-1} \psi_k,$$

ahol $n \in \mathbb{P}$. Ismert, hogy

$$S_n(f; x) = \int_{G_m} f(u) D_n(x - u) d\mu(u). \quad (5.4)$$

A Fejér-féle magfüggvényt a Dirichlet-féle magfüggvények számtani közepéként definiáljuk, azaz

$$K_n := \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n D_k.$$

A Walsh-rendszernél bevezetett T -mátrix és a hozzá kapcsolódó definíciók és jelölések a Vilenkin-rendszerre is használhatók.

A (5.4) alapján könnyen belátható, hogy

$$\sigma_n^T(f; x) = \int_{G_m} f(u) K_n^T(x - u) d\mu(u).$$

Definiáljuk az (\tilde{n}, n) -edik de La Vallée Poussin-típusú mátrix transzformációs közepet a következő módon

$$\sigma_{\tilde{n}, n}^T(f; x) := \sum_{k=\tilde{n}}^n t_{k, n} S_k(f; x),$$

ahol $\tilde{n}, n \in \mathbb{P}$ és $\tilde{n} \leq n$. Az (\tilde{n}, n) -edik de La Vallée Poussin-típusú mátrix transzformációs mag legyen

$$K_{\tilde{n}, n}^T(x) := \sum_{k=\tilde{n}}^n t_{k, n} D_k(x).$$

Könnyen ellenőrizhető, hogy

$$\sigma_{\tilde{n}, n}^T(f; x) = \int_{G_m} f(u) K_{\tilde{n}, n}^T(x - u) d\mu(u).$$

Megjegyezzük továbbá, hogy ebben a fejezetben a c (rögzített m sorozat esetén) egy pozitív abszolút konstans jelöl.

A korlátos Vilenkin-rendszerekre vonatkozó 3. fejezetben az alábbi tételeket bizonyítottuk.

Majdnem mindenütti konvergencia

Az ebben a részben lévő és a Vilenkin–Lebesgue-pontokkal kapcsolatos tételek a [6] és a [7] cikkekben szereplő, Nörlund-, illetve súlyozott közepekre vonatkozó állítások általánosításai.

5.3.1. Tétel. Minden $n \in \mathbb{P}$ -re $(t_{k,n} : 1 \leq k \leq n)$ nemnegatív számok véges sorozata esetén legyen

$$\sum_{k=1}^n t_{k,n} = 1.$$

Tegyük fel, hogy $f \in L_1(G_m)$ és az $x \in G_m$ pontban

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n(f; x) = f(x).$$

a) Legyen $(t_{k,n} : 1 \leq k \leq n)$ nemnegatív számok véges sorozata minden n esetén csökkenő és teljesüljön

$$\lim_{n \rightarrow \infty} t_{1,n} = 0,$$

vagy

b) legyen $(t_{k,n} : 1 \leq k \leq n)$ nemnegatív számok véges sorozata minden n esetén növekvő. Ez esetben azt feltételezzük, hogy

$$t_{n,n} = O\left(\frac{1}{n}\right).$$

Ekkor mindkét esetben

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n^T(f; x) = f(x).$$

5.3.2. Következmény. Legyen $f \in L_1(G_m)$. Minden $n \in \mathbb{P}$ -re $(t_{k,n} : 1 \leq k \leq n)$ nemnegatív számok véges sorozata esetén legyen

$$\sum_{k=1}^n t_{k,n} = 1.$$

a) Legyen $(t_{k,n} : 1 \leq k \leq n)$ nemnegatív számok véges sorozata minden n esetén csökkenő és teljesüljön

$$\lim_{n \rightarrow \infty} t_{1,n} = 0,$$

vagy

b) legyen $(t_{k,n} : 1 \leq k \leq n)$ nemnegatív számok véges sorozata minden n esetén növekvő. Ez esetben azt feltételezzük, hogy

$$t_{n,n} = O\left(\frac{1}{n}\right).$$

Ekkor mindkét esetben

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n^T(f; x) = f(x)$$

minden x folytonossági vagy Vilenkin–Lebesgue-pontban.

5.3.3. Tétel. Legyen $f \in L_1(G_m)$. Minden $n \in \mathbb{P}$ -re legyen $(t_{k, M_{n+1}-1} : M_n \leq k \leq M_{n+1} - 1)$ nemnegatív számok véges sorozata úgy, hogy

$$\sum_{k=M_n}^{M_{n+1}-1} t_{k, M_{n+1}-1} = 1.$$

Ha a $(t_{k, M_{n+1}-1} : M_n \leq k \leq M_{n+1} - 1)$ sorozat minden rögzített n esetén növekvő vagy csökkenő (különböző n -ekre nem feltétlenül ugyanabban az értelemben), továbbá feltesszük, hogy

$$t_{M_n, M_{n+1}-1} = O\left(\frac{1}{M_n}\right)$$

és

$$t_{M_{n+1}-1, M_{n+1}-1} = O\left(\frac{1}{M_n}\right).$$

Ekkor

$$\sigma_{M_n, M_{n+1}-1}^T(f) \rightarrow f$$

majdnem mindenütt.

Normabecslések

Az alábbi tétel Walsh változata [11]-ben található.

5.3.4. Tétel. Legyen $f \in L_1(G_m)$. Minden $n \in \mathbb{P}$ -re legyen $(t_{k, M_{n+1}-1} : M_n \leq k \leq M_{n+1} - 1)$ nemnegatív számok véges sorozata úgy, hogy

$$\sum_{k=M_n}^{M_{n+1}-1} t_{k, M_{n+1}-1} = 1.$$

Ezenkívül tegyük fel, hogy a $(t_{k, M_{n+1}-1} : M_n \leq k \leq M_{n+1} - 1)$ rögzített n -re monoton, és megfelel a következő feltételek egyikének.

a) Vagy $(t_{k, M_{n+1}-1} : M_n \leq k \leq M_{n+1} - 1)$ növekvő és

$$t_{M_{n+1}-1, M_{n+1}-1} = O\left(\frac{1}{M_n}\right),$$

b) vagy $(t_{k, M_{n+1}-1} : M_n \leq k \leq M_{n+1} - 1)$ csökkenő.

Ekkor mindkét esetben

$$\|\sigma_{M_n, M_{n+1}-1}^T(f) - f\|_1 \leq c\omega_1\left(f, \frac{1}{M_n}\right)$$

teljesül.

5.3.5. Tétel. Legyen $f \in L_p(G_m)$, $1 < p < \infty$ és $n \in \mathbb{P}$. Legyen $(t_{k, M_{n+1}-1} : M_n \leq k \leq M_{n+1} - 1)$ nemnegatív számok véges sorozata. Feltételezzük, hogy

$$\sum_{k=M_n}^{M_{n+1}-1} t_{k, M_{n+1}-1} = 1$$

teljesül. Ekkor

$$\|\sigma_{M_n, M_{n+1}-1}^T(f) - f\|_p \leq c_p \omega_p\left(f, \frac{1}{M_n}\right),$$

ahol c_p csak p -től függ.

5.3.6. Következmény. *Tegyük fel, hogy a $p = 1$ esetén az 5.3.4. Tétel feltételei, $1 < p < \infty$ esetén az 5.3.5. Tétel feltételei teljesülnek. Ha $f \in \text{Lip}(\alpha, p, G_m)$, akkor*

$$\|\sigma_{M_n, M_{n+1}-1}^T(f) - f\|_p = O\left(\frac{1}{M_n^\alpha}\right).$$

Normakonvergencia

A következő tétel Walsh változata [15]-ben található.

5.3.7. Tétel. *Legyen $f \in L_1(G_m)$ és minden $n \in \mathbb{N}$ esetén, $(t_{k,n} : 1 \leq k \leq n)$ nemnegatív számok véges sorozata úgy, hogy*

$$\sum_{k=1}^n t_{k,n} = 1$$

teljesül.

a) Ha $(t_{k,n} : 1 \leq k \leq n)$ nemnegatív számok véges sorozata minden n esetén csökkenő és

$$\lim_{n \rightarrow \infty} t_{1,n} = 0,$$

vagy

b) ha $(t_{k,n} : 1 \leq k \leq n)$ nemnegatív számok véges sorozata minden n esetén növekvő és

$$t_{n,n} = O\left(\frac{1}{n}\right),$$

akkor teljesül az L_1 -beli normakonvergencia $\sigma_n^T(f) \rightarrow f$.

5.3.8. Tétel. *Legyen $n \in \mathbb{P}$ és $(t_{k, M_{n+1}-1} : M_n \leq k \leq M_{n+1} - 1)$ nemnegatív számok véges sorozata úgy, hogy*

$$\sum_{k=M_n}^{M_{n+1}-1} t_{k, M_{n+1}-1} = 1.$$

Ezenkívül tegyük fel, hogy a $(t_{k, M_{n+1}-1} : M_n \leq k \leq M_{n+1} - 1)$ minden rögzített n -re monoton és megfelel a következő feltételek egyikének.

a) Vagy $(t_{k, M_{n+1}-1} : M_n \leq k \leq M_{n+1} - 1)$ növekvő és

$$t_{M_{n+1}-1, M_{n+1}-1} = O\left(\frac{1}{M_n}\right),$$

b) vagy $(t_{k, M_{n+1}-1} : M_n \leq k \leq M_{n+1} - 1)$ csökkenő és

$$t_{M_n, M_{n+1}-1} = O\left(\frac{1}{M_n}\right).$$

Ekkor mindkét esetben létezik c abszolút állandó, melyre teljesül a

$$\|K_{M_n, M_{n+1}-1}^T\|_1 \leq c$$

egyenlőtlenség.

5.3.9. Tétel. Legyen $f \in L_1(G_m)$. Minden $n \in \mathbb{P}$ -re legyen $(t_{k, M_{n+1}-1} : M_n \leq k \leq M_{n+1} - 1)$ nemnegatív számok véges sorozata úgy, hogy

$$\sum_{k=M_n}^{M_{n+1}-1} t_{k, M_{n+1}-1} = 1.$$

Ha létezik c abszolút állandó, melyre

$$\|K_{M_n, M_{n+1}-1}^T\|_1 \leq c,$$

akkor teljesül az L_1 -beli normakonvergencia

$$\sigma_{M_n, M_{n+1}-1}^T(f) \rightarrow f.$$

A következő állítás az előző két tétel következménye.

5.3.10. Következmény. Legyen $n \in \mathbb{P}$ és $(t_{k, M_{n+1}-1} : M_n \leq k \leq M_{n+1} - 1)$ nemnegatív számok véges sorozata úgy, hogy

$$\sum_{k=M_n}^{M_{n+1}-1} t_{k, M_{n+1}-1} = 1.$$

Ezenkívül tegyük fel, hogy a $(t_{k, M_{n+1}-1} : M_n \leq k \leq M_{n+1} - 1)$ rögzített n -re monoton és megfelel a következő feltételek egyikének.

a) Vagy $(t_{k, M_{n+1}-1} : M_n \leq k \leq M_{n+1} - 1)$ növekvő és

$$t_{M_{n+1}-1, M_{n+1}-1} = O\left(\frac{1}{M_n}\right),$$

b) vagy $(t_{k, M_{n+1}-1} : M_n \leq k \leq M_{n+1} - 1)$ csökkenő és

$$t_{M_n, M_{n+1}-1} = O\left(\frac{1}{M_n}\right).$$

Ekkor mindkét esetben teljesül az

$$\sigma_{M_n, M_{n+1}-1}^T(f) \rightarrow f$$

L_1 -beli normakonvergenca.

6. fejezet

Angol nyelvű összefoglaló – Summary

6.1 Historical review

The theory of harmonic analysis offers a number of mathematical tools and methods, in which orthogonal systems play an important role. The theory of orthogonal function systems (and within them Fourier series) has undergone significant development since their appearance.

In the literature, the term "Walsh function" is also used for elements of three orthonormal systems. Namely, the original Walsh, the Walsh-Paley, and the Walsh-Kaczmarz systems. These systems contain the same functions, but in different orders. Among them, in this dissertation we deal with the Walsh-Paley and Walsh-Kaczmarz systems.

The Rademacher system, which can be considered as a predecessor of Walsh systems, was defined by Hans Adolph Rademacher, but the orthogonal system he created was not yet complete. Joseph Leonard Walsh is credited with a possible completion of it. Guided by practical considerations, Walsh in 1923 [74] took the Haar system as a starting point, due to its many good properties. He introduced an orthonormal function system in which the functions take on the constant values $+1$ and -1 on the dyadic intervals. The system constructed by Walsh (as an ordered set

of functions) is usually called the original Walsh system. The elements of the original Walsh system can be written as products of finitely many Rademacher functions, and Raymond Edward Alan Christopher Paley (in 1932) [59] gave a more accessible construction of the Walsh functions which is known as the Walsh-Paley system.

Stefan Kaczmarz observed in 1929 that the Walsh system can be derived from the Haar system through certain elementary combinations. A. A. Sneder introduced the Walsh-Kaczmarz system in 1948. He also showed that the system thus created is a rearrangement of the Walsh-Paley system.

Generalizations of a dyadic representation of Walsh functions based on group theory are Vilenkin systems (1947, Naum Yakovlevich Vilenkin [72]). If the generating sequence is bounded, then the statements related to Vilenkin systems are often analogous to the Walsh-Paley cases, but in the unbounded case there are serious differences in both the content of the statements and the details of the proof procedures. Around the 1990s, György Gát (in the unbounded case together with Toledo Rodolfo) introduced three generalizations of the Vilenkin system (see [31–33]).

Matrix transform means are common generalizations of several well-known summation methods. It follows from simple considerations that the Riesz means, the Nörlund means, the T (weighted) means, the Fejér (or the $(C, 1)$) and the (C, α) means are special cases of the matrix transform summation method introduced above.

In a classic book of F. Schipp, W. R. Wade, P. Simon and J. Pál [62] (on page 191) we can read the inequality

$$\|\sigma_{2^n}^w(f) - f\|_X \leq \omega_X(f, 2^{-n}) + \sum_{k=0}^{n-1} 2^{k-n} \omega_X(f, 2^{-k}),$$

where X is a homogeneous Banach space (for example any L_p space, where $1 \leq p < \infty$ or the space of continuous functions C) and ω_X is the modulus of continuity for functions in X .

Our work is motivated by the work of Móricz and Siddiqi [53], Arshidze and Tephnadze [4] on the Walsh-Nörlund summation, the result of Móricz and Rhoades [52] on the Walsh weighted mean and Anakidze,

Areshidze, Persson and Tephnadze [3] on the T (weighted) summation method. Móricz and Siddiqi's results on Walsh-Cesàro means are based on previous results by Yano [78], Jastrebova [45] and Skvortsov [66].

Móricz and Siddiqi in [53] proved for Nörlund means the following.

Theorem 6.1.1 (Móricz and Siddiqi [53], Theorem 1). *Let $f \in L_p(G)$, $1 \leq p \leq \infty$ and let $\{q_k : k \in \mathbb{N}\}$ be a sequence of nonnegative numbers such that*

$$\frac{n^{\gamma-1}}{Q_n^\gamma} \sum_{k=0}^{n-1} q_k^\gamma = O(1) \text{ for some } 1 < \gamma \leq 2. \quad (6.1)$$

If q_k is non-decreasing, then

$$\|t_n^w(f) - f\|_p \leq \frac{5}{2Q_n} \sum_{j=0}^{|n|-1} 2^j q_{n-2^j} \omega_p \left(f, \frac{1}{2^j} \right) + c\omega_p \left(f, \frac{1}{2^{|n|}} \right),$$

while if q_k is non-increasing, then

$$\|t_n^w(f) - f\|_p \leq \frac{5}{2Q_n} \sum_{j=0}^{|n|-1} (Q_{n-2^j-1} - Q_{n-2^{j+1}-1}) \omega_p \left(f, \frac{1}{2^j} \right) + c\omega_p \left(f, \frac{1}{2^{|n|}} \right).$$

Blahota and K. Nagy [20] proved similar inequalities for matrix transform means. This is also a common generalization of the two results of Móricz and Siddiqi [53] and Móricz and Rhoades [52]. With our notations:

Theorem 6.1.2 (Blahota and K. Nagy [20], Theorem 1). *Let $f \in L_p(G)$, $1 \leq p \leq \infty$. For every $n \in \mathbb{N}$, $\{t_{k,n} : 1 \leq k \leq n\}$ be a finite sequence of non-negative numbers such that*

$$\sum_{k=1}^n t_{k,n} = 1$$

is satisfied.

a) If the finite sequence $\{t_{k,n} : 1 \leq k \leq n\}$ is non-decreasing for a fixed n and the condition

$$t_{n,n} = O\left(\frac{1}{n}\right)$$

is satisfied, then

$$\|\sigma_n^{wT}(f) - f\|_p \leq 5 \sum_{j=0}^{|n|-1} 2^j t_{2^{j+1}-1,n} \omega_p\left(f, \frac{1}{2^j}\right) + c\omega_p\left(f, \frac{1}{2^{|n|}}\right)$$

holds.

b) If the finite sequence $\{t_{k,n} : 1 \leq k \leq n\}$ is non-increasing for a fixed n , then

$$\|\sigma_n^{wT}(f) - f\|_p \leq 5 \sum_{j=0}^{|n|-1} 2^j t_{2^j,n} \omega_p\left(f, \frac{1}{2^j}\right) + c\omega_p\left(f, \frac{1}{2^{|n|}}\right)$$

holds.

Goginava and K. Nagy [42] improved these results in their article (for Walsh-Paley system), presenting the definition of the transform variation of the system matrix. Iofina and Volosivets published similar results on Vilenkin systems with similar assumptions using different methods (independently from technics of Móricz, Rhoades, Siddiqi, Fridli and others) with respect to matrix transform means in [44].

Areshidze and Tephnadze [4] proved the Theorem 6.1.3.. They also proved (for the increasing case) the Theorem 6.1.1., with a specific coefficient and without the (6.1) condition. A similar theorem was proved for Nörlund means generated by increasing sequences without assumption (6.1) by Fridli, Manchanda, and Siddiqi [30].

Theorem 6.1.3 (Areshidze and Tephnadze [4], Theorem 1). *Let $f \in L_p(G)$, $1 \leq p < \infty$ and let t_n be a regular Nörlund mean generated*

by non-decreasing sequence $\{q_k : k \in \mathbb{N}\}$. Then

$$\|t_n^w(f) - f\|_p \leq 18 \sum_{k=0}^{|n|-1} 2^k \frac{q_{n-2^k}}{Q_n} \omega_p \left(f, \frac{1}{2^k} \right) + 12 \omega_p \left(f, \frac{1}{2^{|n|}} \right).$$

For similar results on T (weighted) means see paper of Anakidze, Areshidze, Persson and Tephnadze [3].

It is known, that the behaviour of the Dirichlet kernel of the Walsh-Kaczmarz system is worse in a certain sense than that of the kernel of the Walsh-Paley one. Namely, Šneřder (who introduced this system in 1948) proved in [68] that the inequality

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{D_n^\kappa(x)}{\log n} > 0$$

holds for almost every $x \in G$.

On the other side a lot of convergence theorems were proved for this system, and Schipp [61] and W. S. Young [79] pointed out that the Walsh-Kaczmarz system is a convergence one. Skvortsov showed in [67] that the Fejér means with respect to the Walsh-Kaczmarz system converge uniformly to f for any continuous functions f . Gát in [34] proved for any integrable functions, that the Fejér means with respect to the Walsh-Kaczmarz system converges almost everywhere to the function. Furthermore, (analogously to the Walsh-Paley case) $S_n^\kappa(f) \rightarrow f$ as $n \rightarrow \infty$ in $L_p(G)$ norm, if $1 < p < \infty$.

In their paper [41] Goginava and Gogoladze introduced the concept of Vilenkin-Lebesgue point generalized the definition of Walsh-Lebesgue point was introduced by Weisz [75]. A point $x \in G_m$ is a Vilenkin-Lebesgue point of $f \in L_1(G_m)$, if

$$\lim_{A \rightarrow \infty} \sum_{s=0}^{A-1} M_s \sum_{r_s=1}^{m_s-1} \int_{I_A(x-r_s e_s)} |f(t) - f(x)| d\mu(t) = 0,$$

where $e_s := (0, \dots, 0, 1, 0, \dots) \in G_m$ (only the s th coordinate is 1, the others are 0).

Important results of the Vilenkin-Fourier analysis, that if $f \in L_1(G_m)$, then $S_{M_n}(f) \rightarrow f$ and $\sigma_n(f) \rightarrow f$, as $n \rightarrow \infty$ almost everywhere on G_m . Moreover, it is known for any integrable function that almost every point of G_m is a Vilenkin-Lebesgue point and for any such point x

$$S_{M_n}(f; x) \rightarrow f(x) \quad (6.2)$$

as $n \rightarrow \infty$ for any $f \in L_1(G_m)$.

Also with respect to Vilenkin systems D. Baramidze, Dvalashvili and Tutberidze [6] for Nörlund means, D. Baramidze, Gogolashvili and Nadirashvili [7] for weighted means proved theorems connected to Lebesgue points. The former dealt with Nörlund means, while the latter dealt with weighted means.

About Lebesgue points our main aim is to generalize statements of papers of D. Baramidze, Dvalashvili, Tutberidze and of D. Baramidze, Gogolashvili, Nadirashvili, to matrix transform means.

We mention, that Iofina and Volosivets [44] obtained similar results on Vilenkin systems with similar assumptions using different methods (independently from techniques of Móricz, Rhoades, Siddiqi, Fridli, Goginava, Gát, Tephnadze, K. Nagy and others) with respect to matrix transform means.

The de La Vallée Poussin-type matrix transformation means for the Walsh system were introduced by Blahota and Gát in [14].

6.2 Walsh-Paley and Walsh-Kaczmarz systems

Notation and definitions

Let \mathbb{P} denote the set of positive integers and $\mathbb{N} := \mathbb{P} \cup \{0\}$. Let \mathbb{Z}_2 denote the discrete cyclic group of group order 2. The group operation is addition modulo 2. Let every subset be open. The Haar measure μ_k is defined on the k -th \mathbb{Z}_2 ($k \in \mathbb{N}$) such that $\mu_k(0) := \mu_k(1) := 1/2$. Let $G := \prod_{k=0}^{\infty} \mathbb{Z}_2$ be the dyadic group (the direct product of discrete cyclic groups). The elements of G can be represented as sequences

$x := (x_0, x_1, \dots, x_k, \dots)$, where $x_k \in \{0, 1\}$ for $k \in \mathbb{N}$. The group operation on G is coordinate-wise addition modulo 2 (denoted by $+$), and let μ be the normalized Haar measure, i.e., the product measure of the μ_k , and the topology is the product topology.

Dyadic intervals are defined as follows:

$$I_0(x) := G, \quad I_n(x) := \{y \in G : y = (x_0, \dots, x_{n-1}, y_n, y_{n+1}, \dots)\},$$

where $x \in G, n \in \mathbb{P}$, and let $I_n := I_n(0)$. These intervals form a neighbourhood basis for the topology of G .

Let $L_p(G)$ denote the usual Lebesgue space on G (with the corresponding $\|\cdot\|_p$ norms).

For the sake of notation, we agree to write $L_\infty(G)$ instead of $C(G)$, and $\|f\|_\infty := \sup\{|f(x)| : x \in G\}$. Clearly, L_∞ is not the same as the space of continuous functions but rather an appropriate subspace of it. Since the supremum norm and the L_∞ norm coincide for continuous functions, we hope that the reader will accept this notational simplification for convenience.

We introduce some concepts from Walsh-Fourier analysis.

The n -th Rademacher function at the point x is defined by

$$r_n(x) := (-1)^{x_n} \quad (x \in G, n \in \mathbb{N}).$$

Every natural number has a unique binary representation, and this representation is finite (only finitely many n_k are non-zero):

$$n = \sum_{k=0}^{\infty} n_k 2^k, \quad n_k \in \{0, 1\} \quad (k \in \mathbb{N}).$$

We will also need the following notation. If $n \in \mathbb{P}$, then $|n| := \max\{j \in \mathbb{N} : n_j \neq 0\}$. This means that $2^{|n|} \leq n < 2^{|n|+1}$.

The Walsh-Paley functions are defined as follows. Let $w_0(x) := 1$, and if $n \in \mathbb{P}$, then define

$$w_n(x) := \prod_{k=0}^{\infty} r_k^{n_k}(x) = (-1)^{\sum_{k=0}^{|n|} n_k x_k}.$$

It is known that the Walsh-Paley system $(w_n, n \in \mathbb{N})$ forms the character system of $(G, +)$.

Let the modulus of continuity in $L_p(G)$ be

$$\omega_p(f, \delta) := \sup_{|t| < \delta} \|f(\cdot + t) - f(\cdot)\|_p,$$

where $f \in L_p(G)$ and $\delta > 0$, and define

$$|x| := \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x_i}{2^{i+1}} \quad \text{for every } x \in G.$$

In the case where $f \in C(G)$, we replace p with ∞ .

The Walsh-Kaczmarz system is introduced as follows. Let $\kappa_0 := 1$ and for $n \in \mathbb{P}$ define

$$\kappa_n(x) := r_{|n|}(x) \prod_{k=0}^{|n|-1} r_{|n|-1-k}^{n_k}(x) = r_{|n|}(x) (-1)^{\sum_{k=0}^{|n|-1} n_k x_{|n|-1-k}}.$$

It is easy to see that

$$r_n = w_{2^n} = \kappa_{2^n}$$

for all $n \in \mathbb{N}$.

The sets of Walsh-Kaczmarz and Walsh-Paley functions coincide on dyadic blocks. That is,

$$\{\kappa_n : 2^k \leq n < 2^{k+1}\} = \{w_n : 2^k \leq n < 2^{k+1}\}$$

for every $k \in \mathbb{N}$ and $\kappa_0 = w_0$.

The Walsh-Paley and Walsh-Kaczmarz systems are orthonormal and complete in $L_1(G)$.

Skvortsov established a relationship between the Walsh-Kaczmarz and Walsh-Paley functions using the transformation $\tau_n : G \rightarrow G$:

$$\tau_n(x) := (x_{n-1}, x_{n-2}, \dots, x_1, x_0, x_n, x_{n-1}, \dots).$$

Specifically, for every $n \in \mathbb{N}$ and $x \in G$:

$$\kappa_n(x) = r_{|n|}(x) w_{n-2|n|}(\tau_{|n|}(x)).$$

It is important to note that the function $\tau_n(\cdot)$ is measure-preserving.

Let \mathcal{P}_n^ξ be the collection of Walsh-Paley or Walsh-Kaczmarz polynomials of order less than n , that is, functions of the form

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n-1} c_k \xi_k(x),$$

where $x \in G$, $\{c_k\}$ is a sequence of complex numbers and $\xi_n = w_n$ or $\xi_n = \kappa_n$ for all $n \in \mathbb{N}$. Equality (2.1) yields that the next notation works

$$\mathcal{P}_{2^n} := \mathcal{P}_{2^n}^w = \mathcal{P}_{2^n}^\kappa.$$

It is easy to see that sets of all Walsh-Paley and the Walsh-Kaczmarz polynomials – denoted by \mathcal{P} – are the same.

The Lipschitz classes in $L_p(G)$ are as follows. For every $\alpha > 0$, let

$$\text{Lip}(\alpha, p, G) := \{f \in L_p(G) : \omega_p(f, \delta) = O(\delta^\alpha) \text{ as } \delta \rightarrow 0\}.$$

Furthermore,

$$\text{Lip}(\alpha, C(G)) := \{f \in C(G) : |f(x+y) - f(x)| \leq c|y|^\alpha, x, y \in G\}.$$

Later, for simplicity, we will write $\text{Lip}(\alpha, \infty, G)$ instead of $\text{Lip}(\alpha, C(G))$.

We define the n -th Fourier coefficient, the n -th partial sum of the Fourier series, the n -th Fejér mean, and the n -th Dirichlet kernel (for either Walsh-Paley or Walsh-Kaczmarz systems) as follows:

$$\hat{f}^\xi(n) := \int_G f \xi_n d\mu \text{ if } n \in \mathbb{N},$$

$$S_n^\xi(f) := \sum_{k=0}^{n-1} \hat{f}^\xi(k) \xi_k, \quad \sigma_n^\xi(f) := \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n S_k^\xi(f), \quad D_n^\xi := \sum_{k=0}^{n-1} \xi_k,$$

where $n \in \mathbb{P}$. Known to

$$S_n^\xi(f; x) = \int_G f(u) D_n^\xi(x+u) d\mu(u). \tag{6.3}$$

The Fejér kernels are the arithmetic means of the Dirichlet kernels, that is,

$$K_n^\xi := \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n D_k^\xi.$$

Let $T := (t_{i,j})_{i,j=1}^\infty$ be a doubly infinite matrix of real numbers. We always assume that the T matrix is upper triangular, i.e., $t_{i,j} := 0$ if $i > j$. The n -th matrix transformation mean defined by T is

$$\sigma_n^{\xi T}(f; x) := \sum_{k=1}^n t_{k,n} S_k^\xi(f; x).$$

Since the n -th column of the T matrix determines the $\sigma_n^{\xi T}$ matrix transformation mean, and the definition involves only finitely many terms, we refer to $(t_{k,n} : 1 \leq k \leq n, k \in \mathbb{P})$ as a finite sequence of numbers for every $n \in \mathbb{P}$.

If $\sum_{k=1}^n t_{k,n} = 1$, then the Nörlund means are special cases of matrix transformation means, namely

$$t_{k,n} := \frac{q_{n-k}}{Q_n}.$$

From now on, let $(t_{k,n} : 1 \leq k \leq n, k \in \mathbb{P})$ be a finite sequence of non-negative numbers for every $n \in \mathbb{P}$. The n -th matrix transformation kernel function is defined as

$$K_n^{\xi T}(x) := \sum_{k=1}^n t_{k,n} D_k^\xi(x).$$

Based on (6.3), it is easy to see that for $x, u \in G$

$$\sigma_n^{\xi T}(f; x) = \int_G f(u) K_n^{\xi T}(x+u) d\mu(u),$$

which clearly demonstrates the importance of examining the kernel functions.

We also note that throughout this chapter, the symbol c denotes a positive absolute constant, which may vary from one occurrence to another.

In the dissertation, in chapter 2. of the Walsh-Paley and Walsh-Kaczmarz system, we proved the following statements.

Norm estimates

The following theorem is a joint improvement of Theorem 1 in [4] and Theorem 1 in [20], and in the second case, a generalization. (The constants in the above theorems have been named and improved.)

Theorem 6.2.1. *Let $f \in L_p(G)$ and $1 \leq p \leq \infty$. For every $n \in \mathbb{N}$, $(t_{k,n} : 1 \leq k \leq n)$ be a finite sequence of non-negative numbers such that*

$$\sum_{k=1}^n t_{k,n} = 1.$$

is satisfied. If the finite sequence $(t_{k,n} : 1 \leq k \leq n)$ is non-increasing for a fixed n , then

$$\|\sigma_n^{wT}(f) - f\|_p \leq \frac{31}{15} \sum_{k=0}^{|n|-1} 2^k t_{2^k,n} \omega_p \left(f, \frac{1}{2^k} \right) + \frac{47}{30} \omega_p \left(f, \frac{1}{2^{|n|}} \right)$$

holds.

The next theorem is a generalized and improved version of Theorem 2 in [4] (from Nörlund and T -matrix transformation summation).

Theorem 6.2.2. *Let the finite sequence $(t_{k,2^n} : 1 \leq k \leq 2^n)$ of non-negative numbers be non-decreasing for all $n \in \mathbb{N}$ and*

$$\sum_{k=1}^{2^n} t_{k,2^n} = 1.$$

Then for any $f \in L_p(G)$ for some $1 \leq p < \infty$, we have the following inequality

$$\begin{aligned} \|\sigma_{2^n}^{wT}(f) - f\|_p &\leq \sum_{s=0}^{n-1} \frac{2^s}{2^n} \omega_p \left(f, \frac{1}{2^s} \right) \\ &\quad + 3 \sum_{s=0}^{n-1} (n-s) 2^s t_{2^{n-2^s+1},n} \omega_p \left(f, \frac{1}{2^s} \right) \\ &\quad + \left(2 + \frac{1}{2^n} \right) \omega_p \left(f, \frac{1}{2^n} \right). \end{aligned}$$

Theorem 6.2.3. is also a generalization, based on Theorem 3 in [4].

Theorem 6.2.3. *For every $n \in \mathbb{P}$, let the finite sequence $(t_{k,n} : 1 \leq k \leq n)$ of non-negative numbers be non-decreasing for all n and we suppose that*

$$\sum_{k=1}^n t_{k,n} = 1$$

and

$$t_{n,n} = O\left(\frac{1}{n}\right).$$

Then for any $f \in L_p(G)$ for some $1 \leq p < \infty$, we have the following inequality

$$\|\sigma_n^{wT}(f) - f\|_p \leq c \sum_{k=0}^{|n|} \frac{2^k}{2^{|n|}} \omega_p\left(\frac{1}{2^k}, f\right).$$

The next theorem is a generalization of the result of K. Nagy in [57], who proved (with slightly different methods) the analogous statement for Nörlund means with respect to the Walsh-Kaczmarz system. K. Nagy also estimated the rate of approximation of weighted means for the Walsh-Kaczmarz system in [55].

Theorem 6.2.4. *Let $f \in L_p(G)$, $1 \leq p \leq \infty$ and let for every $n \in \mathbb{P}$, $(t_{k,n} : 1 \leq k \leq n)$ be a finite sequence of non-negative numbers such that*

$$\sum_{k=1}^n t_{k,n} = 1$$

is satisfied.

a) *Let the finite sequence $(t_{k,n} : 1 \leq k \leq n)$ be non-decreasing for all n and let condition*

$$t_{n,n} = O\left(\frac{1}{n}\right)$$

be satisfied. Then

$$\|\sigma_n^{\kappa T}(f) - f\|_p \leq \frac{31}{15} \sum_{j=0}^{|n|-1} 2^j t_{2^{j+1}-1, n} \omega_p \left(f, \frac{1}{2^j} \right) + c \omega_p \left(f, \frac{1}{2^{|n|}} \right).$$

b) Let the finite sequence $(t_{k,n} : 1 \leq k \leq n)$ be non-increasing for all n , then

$$\|\sigma_n^{\kappa T}(f) - f\|_p \leq \frac{31}{15} \sum_{j=0}^{|n|-1} 2^j t_{2^j, n} \omega_p \left(f, \frac{1}{2^j} \right) + \frac{47}{30} \omega_p \left(f, \frac{1}{2^{|n|}} \right).$$

Norm convergence

Theorem 6.2.5. Let $f \in L_1(G)$. For every $n \in \mathbb{P}$, let $(t_{k,n} : 1 \leq k \leq n)$ be a finite sequence of non-negative numbers such that

$$\sum_{k=1}^n t_{k,n} = 1$$

and

$$\lim_{n \rightarrow \infty} t_{k,n} = 0$$

for any fixed k .

If there exists an absolute constant c , for which

$$\|K_n^{\kappa T}\|_1 \leq c,$$

then we have the L_1 -norm convergence

$$\sigma_n^{\kappa T}(f) \rightarrow f,$$

as $n \rightarrow \infty$.

Corollary 6.2.6. *Let $n \in \mathbb{P}$ and let $(t_{k,n} : 1 \leq k \leq n)$ be a finite sequence of non-negative numbers such that*

$$\sum_{k=1}^n t_{k,n} = 1.$$

Suppose that one of the following holds.

a) If the finite sequence $(t_{k,n} : 1 \leq k \leq n)$ is non-decreasing for a fixed n , then we suppose

$$t_{n,n} = O\left(\frac{1}{n}\right).$$

b) If the finite sequence $(t_{k,n} : 1 \leq k \leq n)$ is non-increasing for a fixed n , then we suppose

$$\lim_{n \rightarrow \infty} t_{1,n} = 0.$$

Then in both cases we have the L_1 -norm convergence

$$\sigma_n^{\kappa T}(f) \rightarrow f,$$

as $n \rightarrow \infty$.

Theorem 6.2.7. *Let $f \in \text{Lip}(\alpha, p, G)$ for some $\alpha > 0$ and $1 \leq p \leq \infty$. Let for every $n \in \mathbb{P}$, $(t_{k,n} : 1 \leq k \leq n)$ be a finite sequence of non-negative numbers such that*

$$\sum_{k=1}^n t_{k,n} = 1$$

is satisfied. Let the finite sequence $(t_{k,n} : 1 \leq k \leq n)$ of non-negative numbers be non-decreasing for all $n \in \mathbb{P}$ and condition

$$t_{n,n} = O\left(\frac{1}{n}\right)$$

is satisfied. Then the next estimate holds

$$\|\sigma_n^{\kappa T}(f) - f\|_p = \begin{cases} O(n^{-\alpha}), & \text{if } 0 < \alpha < 1, \\ O(\log n/n), & \text{if } \alpha = 1, \\ O(1/n), & \text{if } \alpha > 1. \end{cases}$$

6.3 Vilenkin systems

Notation and definitions

As we shall see, the introduced concepts are analogous to those in the previous chapter (this analogy is based on the fact that the Vilenkin system is a generalization of the Walsh system).

Let $m := (m_0, m_1, \dots)$ be a sequence of positive integers not less than 2. Let $\mathbb{Z}_{m_n} := \{0, 1, \dots, m_n - 1\}$ denote the additive group of natural numbers modulo m_n , where $n \in \mathbb{N}$. The Vilenkin group G_m is defined as the direct product of these discrete cyclic groups \mathbb{Z}_{m_n} . The group operation on G_m is the coordinate-wise addition modulo m_n .

The measure μ introduced on the direct product is defined as the direct product of the measures

$$\mu_n(\{j\}) := 1/m_n \quad (j \in \mathbb{Z}_{m_n})$$

which is the Haar measure and a probability measure on G_m , that is, $\mu(G_m) = 1$.

If the sequence m is bounded, then G_m is called a bounded Vilenkin group; otherwise, it is called unbounded. In the papers covered in this chapter, and thus in the entire dissertation, we only deal with the bounded case. We mention that for $m = (2, 2, \dots)$ we obtain G , the dyadic group. The elements of G_m can be represented by the number sequences

$$x := (x_0, x_1, \dots, x_n, \dots) \quad (x_n \in \mathbb{Z}_{m_n}).$$

The dyadic intervals are defined as follows:

$$I_0(x) := G_m,$$

$$I_n(x) := \{y \in G_m \mid y_0 = x_0, \dots, y_{n-1} = x_{n-1}\} \quad (x \in G_m, n \in \mathbb{P}).$$

The so-called generalized, m -adic number system based on the sequence m is defined as

$$M_0 := 1, \quad M_{n+1} := m_n M_n \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Then every $n \in \mathbb{N}$ can be uniquely represented as $n = \sum_{k=0}^{\infty} n_k M_k$, where $n_k \in \mathbb{Z}_{m_k}$ ($k \in \mathbb{N}$), and only finitely many n_k differ from zero. Let $|n|$ denote the natural number (called the order of n) for which $M_{|n|} \leq n < M_{|n|+1}$.

Let $L_p(G_m)$ denote the Lebesgue space on G_m (with the corresponding $\|\cdot\|_p$ norms), and let $C(G_m)$ denote the space of continuous functions on G_m with the norm $\|f\|_{\infty} := \sup\{|f(x)| : x \in G_m\}$.

Define the modulus of continuity on $L_p(G_m)$ for $1 \leq p < \infty$, $f \in L_p(G_m)$, and $\delta > 0$ by

$$\omega_p(f, \delta) := \sup_{|x| < \delta} \|f(\cdot - x) - f(\cdot)\|_p$$

where

$$|x| := \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x_i}{M_{i+1}} \quad \text{for all } x \in G_m.$$

Analogously, we define the modulus of continuity on a function f of $C(G_m)$, denoted by $\omega_{\infty}(f, \delta)$.

Similarly to the previous chapter, we introduce classes $\text{Lip}(\alpha, p, G_m)$ and $\text{Lip}(\alpha, C(G_m))$ (provided $1 \leq p < \infty$), and use the notation

$$\text{Lip}(\alpha, \infty, G_m) := \text{Lip}(\alpha, C(G_m)).$$

We introduce an orthonormal system on G_m , called the Vilenkin system. To this end, we define the complex-valued functions $r_k(x) : G_m \rightarrow \mathbb{C}$, known as generalized Rademacher functions, as follows:

$$r_k(x) := \exp(2\pi i x_k / m_k) \quad (i^2 = -1, x \in G_m, k \in \mathbb{N}).$$

The function sequence $\psi := (\psi_n : n \in \mathbb{N})$ on G_m , where

$$\psi_n(x) := \prod_{k=0}^{\infty} r_k^{n_k}(x) \quad (n \in \mathbb{N})$$

is called the Vilenkin system.

If $m = (2, 2, \dots)$, we obtain the Walsh-Paley system as a special case. The Vilenkin system is orthonormal and complete in $L_1(G_m)$. The elements of the Vilenkin system are exactly those continuous functions $f: G_m \rightarrow \mathbb{C}$ for which

$$f(x + y) = f(x)f(y)$$

and $|f(x)| = 1$ for all $x, y \in G_m$. Moreover, this holds if and only if $f(x) = \psi_n(x)$ for some $n \in \mathbb{N}$.

Let \mathcal{P}_n be the collection of Vilenkin polynomials of order less than n , that is, functions of the form

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k \psi_k(x),$$

where $n \in \mathbb{P}$ and $\{a_k\}$ is a sequence of complex numbers. Let \mathcal{P} denote the set of Vilenkin polynomials.

In the following, we introduce the classical concepts related to Vilenkin-Fourier analysis. We define the n th Vilenkin-Fourier coefficient of a function f , the n th partial sum of its Vilenkin-Fourier series, the n th Vilenkin-Fejér mean, and the n th Vilenkin-Dirichlet kernel as follows:

$$\hat{f}(n) := \int_{G_m} f \bar{\psi}_n d\mu, \text{ if } n \in \mathbb{N},$$

$$S_n(f) := \sum_{k=0}^{n-1} \hat{f}(k) \psi_k, \quad \sigma_n(f) := \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n S_k(f), \quad D_n := \sum_{k=0}^{n-1} \psi_k,$$

where $n \in \mathbb{P}$. It is known that

$$S_n(f; x) = \int_{G_m} f(u) D_n(x - u) d\mu(u). \tag{6.4}$$

The Fejér kernel is defined as the arithmetic mean of the Dirichlet kernels:

$$K_n := \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n D_k.$$

The T -matrix introduced for the Walsh system, along with the associated definitions and notations, can also be used for the Vilenkin system.

Based on (6.4) it is easy to see that

$$\sigma_n^T(f; x) = \int_{G_m} f(u) K_n^T(x - u) d\mu(u).$$

We define the (\tilde{n}, n) th de La Vallée Poussin-type matrix transformation mean as follows:

$$\sigma_{\tilde{n}, n}^T(f; x) := \sum_{k=\tilde{n}}^n t_{k, n} S_k(f; x),$$

where $\tilde{n}, n \in \mathbb{P}$ and $\tilde{n} \leq n$. The corresponding (\tilde{n}, n) th de La Vallée Poussin-type matrix transformation kernel is

$$K_{\tilde{n}, n}^T(x) := \sum_{k=\tilde{n}}^n t_{k, n} D_k(x).$$

It is easy to check that

$$\sigma_{\tilde{n}, n}^T(f; x) = \int_{G_m} f(u) K_{\tilde{n}, n}^T(x - u) d\mu(u).$$

We also note that in this chapter, c (for a fixed sequence m) denotes a positive absolute constant, which may vary in different occurrences.

In the dissertation, in chapter 3, we proved the following theorems for bounded Vilenkin systems.

Almost everywhere convergence

In this subsection, the theorems related to Vilenkin-Lebesgue points are generalizations of the theorems on Nörlund means and weighted means in the articles [6] and [7].

Theorem 6.3.1. *For every $n \in \mathbb{P}$, $(t_{k,n} : 1 \leq k \leq n)$ be a finite sequence of non-negative numbers such that*

$$\sum_{k=1}^n t_{k,n} = 1$$

is satisfied.

Suppose that $f \in L_1(G_m)$ and for some $x \in G_m$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n(f; x) = f(x).$$

a) Let the finite sequence $(t_{k,n} : 1 \leq k \leq n)$ of nonnegative numbers be non-increasing for all n and condition

$$\lim_{n \rightarrow \infty} t_{1,n} = 0$$

is satisfied, or

b) let the finite sequence $(t_{k,n} : 1 \leq k \leq n)$ of nonnegative numbers be non-decreasing for all n . We also suppose that

$$t_{n,n} = O\left(\frac{1}{n}\right)$$

holds.

Then in both cases

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n^T(f; x) = f(x).$$

Corollary 6.3.2. *Let $f \in L_1(G_m)$. For every $n \in \mathbb{P}$ -re $(t_{k,n} : 1 \leq k \leq n)$ be a finite sequence of non-negative numbers such that*

$$\sum_{k=1}^n t_{k,n} = 1$$

is satisfied.

a) Let the finite sequence $(t_{k,n} : 1 \leq k \leq n)$ of nonnegative numbers be non-increasing for all n and condition

$$\lim_{n \rightarrow \infty} t_{1,n} = 0$$

is satisfied, or

b) let the finite sequence $(t_{k,n} : 1 \leq k \leq n)$ nonnegative numbers be non-decreasing for all n . We also suppose that

$$t_{n,n} = O\left(\frac{1}{n}\right)$$

holds.

Then in both cases

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n^T(f; x) = f(x)$$

for all continuity or Vilenkin-Lebesgue points x .

Theorem 6.3.3. Let $f \in L_1(G_m)$. For every $n \in \mathbb{P}$, let $(t_{k, M_{n+1}-1} : M_n \leq k \leq M_{n+1}-1)$ be a finite sequence of non-negative numbers such that

$$\sum_{k=M_n}^{M_{n+1}-1} t_{k, M_{n+1}-1} = 1.$$

If the finite sequence $(t_{k, M_{n+1}-1} : M_n \leq k \leq M_{n+1}-1)$ is non-decreasing or non-increasing for every fixed n (not necessarily in the same sense for different n 's) and conditions

$$t_{M_n, M_{n+1}-1} = O\left(\frac{1}{M_n}\right)$$

and

$$t_{M_{n+1}-1, M_{n+1}-1} = O\left(\frac{1}{M_n}\right)$$

holds.

Then

$$\sigma_{M_n, M_{n+1}-1}^T(f) \rightarrow f$$

almost everywhere.

Norm estimates

Walsh's version of the following theorem can be found in [11].

Theorem 6.3.4. *Let $f \in L_1(G_m)$. For every $n \in \mathbb{P}$, let $(t_{k, M_{n+1}-1} : M_n \leq k \leq M_{n+1} - 1)$ be a finite sequence of non-negative numbers such that*

$$\sum_{k=M_n}^{M_{n+1}-1} t_{k, M_{n+1}-1} = 1.$$

Moreover, assume that $(t_{k, M_{n+1}-1} : M_n \leq k \leq M_{n+1} - 1)$ is monotonous and satisfies one of the following conditions.

a) Either $(t_{k, M_{n+1}-1} : M_n \leq k \leq M_{n+1} - 1)$ is non-decreasing and

$$t_{M_{n+1}-1, M_{n+1}-1} = O\left(\frac{1}{M_n}\right),$$

b) or $(t_{k, M_{n+1}-1} : M_n \leq k \leq M_{n+1} - 1)$ non-increasing.

Then in both cases

$$\|\sigma_{M_n, M_{n+1}-1}^T(f) - f\|_1 \leq c\omega_1\left(f, \frac{1}{M_n}\right)$$

holds.

Theorem 6.3.5. *Let $f \in L_p(G_m)$ where $1 < p < \infty$ and $n \in \mathbb{P}$. Let the finite sequence $(t_{k, M_{n+1}-1} : M_n \leq k \leq M_{n+1} - 1)$ of non-negative numbers. We suppose that*

$$\sum_{k=M_n}^{M_{n+1}-1} t_{k, M_{n+1}-1} = 1$$

holds. Then

$$\|\sigma_{M_n, M_{n+1}-1}^T(f) - f\|_p \leq c_p \omega_p\left(f, \frac{1}{M_n}\right),$$

where c_p depends only on p .

Corollary 6.3.6. *Let us suppose that in case of $p = 1$ conditions of Theorem 6.3.4., in case of $1 < p < \infty$ conditions of Theorem 6.3.5. are satisfied. If $f \in \text{Lip}(\alpha, p, G_m)$, then*

$$\|\sigma_{M_n, M_{n+1}-1}^T(f) - f\|_p = O\left(\frac{1}{M_n^\alpha}\right).$$

Norm convergence

The Walsh's version of the following theorem can be found in [15].

Theorem 6.3.7. *Suppose that $f \in L_1(G_m)$ and for every $n \in \mathbb{N}$, $(t_{k,n} : 1 \leq k \leq n)$ be a finite sequence of non-negative numbers such that*

$$\sum_{k=1}^n t_{k,n} = 1$$

is satisfied.

a) *If the finite sequence $(t_{k,n} : 1 \leq k \leq n)$ of nonnegative numbers is non-increasing for all n and*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} t_{1,n} = 0,$$

is satisfied, or

b) *if the finite sequence $(t_{k,n} : 1 \leq k \leq n)$ of nonnegative numbers is non-decreasing for all n and*

$$t_{n,n} = O\left(\frac{1}{n}\right),$$

then we have the L_1 -norm convergence $\sigma_n^T(f) \rightarrow f$.

Theorem 6.3.8. For every $n \in \mathbb{P}$, let $(t_{k, M_{n+1}-1} : M_n \leq k \leq M_{n+1} - 1)$ be a finite sequence of non-negative numbers such that

$$\sum_{k=M_n}^{M_{n+1}-1} t_{k, M_{n+1}-1} = 1.$$

Furthermore, assume that $(t_{k, M_{n+1}-1} : M_n \leq k \leq M_{n+1}-1)$ is monotonous and satisfies one of the following conditions.

a) Either $(t_{k, M_{n+1}-1} : M_n \leq k \leq M_{n+1} - 1)$ is non-decreasing and

$$t_{M_{n+1}-1, M_{n+1}-1} = O\left(\frac{1}{M_n}\right),$$

b) or $(t_{k, M_{n+1}-1} : M_n \leq k \leq M_{n+1} - 1)$ non-increasing and

$$t_{M_n, M_{n+1}-1} = O\left(\frac{1}{M_n}\right).$$

Then in both cases there exists an absolute constant c , for which the inequality

$$\|K_{M_n, M_{n+1}-1}^T\|_1 \leq c$$

is satisfied.

Theorem 6.3.9. Let $f \in L_1(G_m)$. For every $n \in \mathbb{P}$, let $(t_{k, M_{n+1}-1} : M_n \leq k \leq M_{n+1} - 1)$ be a finite sequence of non-negative numbers such that

$$\sum_{k=M_n}^{M_{n+1}-1} t_{k, M_{n+1}-1} = 1.$$

If there exists an absolute constant c , for which

$$\|K_{M_n, M_{n+1}-1}^T\|_1 \leq c,$$

then we have the L_1 -norm convergence

$$\sigma_{M_n, M_{n+1}-1}^T(f) \rightarrow f.$$

The following statement is a consequence of the previous two theorems.

Corollary 6.3.10. *For every $n \in \mathbb{P}$, let $(t_{k, M_{n+1}-1} : M_n \leq k \leq M_{n+1}-1)$ be a finite sequence of non-negative numbers such that*

$$\sum_{k=M_n}^{M_{n+1}-1} t_{k, M_{n+1}-1} = 1.$$

Moreover, assume that $(t_{k, M_{n+1}-1} : M_n \leq k \leq M_{n+1}-1)$ is monotonous and satisfies one of the following conditions.

a) *Either $(t_{k, M_{n+1}-1} : M_n \leq k \leq M_{n+1}-1)$ is non-decreasing and*

$$t_{M_{n+1}-1, M_{n+1}-1} = O\left(\frac{1}{M_n}\right),$$

b) *or $(t_{k, M_{n+1}-1} : M_n \leq k \leq M_{n+1}-1)$ is non-increasing and*

$$t_{M_n, M_{n+1}-1} = O\left(\frac{1}{M_n}\right).$$

Then in both cases we have the L_1 -norm convergence

$$\sigma_{M_n, M_{n+1}-1}^T(f) \rightarrow f.$$

Bibliográfia

- [1] G. H. Agaev, N. J. Vilenkin, G. M. Dzhafarli, and A. I. Rubinstein, Multiplicative systems of functions and harmonic analysis on 0-dimensional groups. (Russian), Izd. ("ELM"), Baku, 1981
- [2] N. Anakidze, N. Areshidze, and L. Baramidze, *Approximation by Nörlund means with respect to Vilenkin system in Lebesgue spaces*, Acta Math. Hungar. **172** (2), (2024) 529–542.
- [3] N. Anakidze, N. Areshidze, L-E. Persson, and G. Tephnadze, *Approximation by T means of Walsh–Fourier series in Lebesgue spaces and Lipschitz classes*, Annales Univ. Sci. Budapest., Sect. Comp. **56**, (2024) 53–68.
- [4] N. Areshidze and G. Tephnadze, *Approximation by Nörlund means with respect to Walsh system in Lebesgue spaces*, Math. Inequal. Appl. **27** (1), (2024) 137–147.
- [5] M. Avdispahić and M. Pepić, *Summability and integrability of Vilenkin series*, Collect. Math. **51** (3), (2000) 237–254.
- [6] D. Baramidze, Z. Dvalashvili, and G. Tutberidze, *Convergence of Nörlund means with respect to Vilenkin systems of integrable functions*, Mem. Differential Equations Math. Phys. **86**, (2022) 1–14.
- [7] D. Baramidze, N. Gogolashvili, and N. Nadirashvili, *Convergence of T means with respect to Vilenkin systems of integrable functions*, Georgian Math. J. **29** (4), (2022) 481–491.

- [8] L. Baramidze, L-E. Persson, G. Tephnadze, and P. Wall, *Sharp $H_p - L_p$ type inequalities of weighted maximal operators of Vilenkin–Nörlund means and its applications*, J. Inequal. Appl. **242**, (2016)
- [9] D. Baramidze, L-E. Persson, H. Singh, and G. Tephnadze, *Some new results and inequalities for subsequences of Nörlund logarithmic means of Walsh–Fourier series*, J. Inequal. Appl. **30**, (2022)
- [10] I. Blahota, *Approximation by subsequences of matrix transform mean of Walsh–Fourier series*, Real Anal. Exchange **48** (1), (2023) 107–118.
- [11] I. Blahota, *Approximation by a special de la Vallée Poussin type matrix transform mean of Walsh–Fourier series*, Miskolc Math. Notes **24** (3), (2023) 1213–1221.
- [12] I. Blahota, *Norm convergence of subsequences of matrix transform means of Walsh–Fourier series*, Period. Math. Hung. **89**, (2024) 72–85
- [13] I. Blahota and G. Gát, *Norm summability of Nörlund logarithmic means on unbounded Vilenkin groups*, Anal. Theory Appl., Mathematica **24** (1), (2008) 1–17.
- [14] I. Blahota and G. Gát, *On the rate of approximation by generalized de la Vallée Poussin type matrix transform means of Walsh–Fourier series*, P-Adic Numbers, Ultrametric Anal. App. **14** (1), (2022) S59–S73.
- [15] I. Blahota and G. Gát, *Norm and almost everywhere convergence of matrix transform means of Walsh–Fourier series*, Acta Univ. Sapientiae, Mathematica **15** (2), (2023) 244–258.
- [16] I. Blahota and D. Nagy, *Approximation by a special de la Vallée Poussin type matrix transform mean of Vilenkin–Fourier series*, Anal. Math. **50** (3), (2024) 939–957.

- [17] I. Blahota and D. Nagy, *Convergence of matrix transform means with respect to the Walsh–Kaczmarz system*, J. Appl. Anal. **31** (1), (2024) 1–13.
- [18] I. Blahota and D. Nagy, *Convergence of matrix transform means with respect to Vilenkin systems*, Miskolc Math. Notes, elfogadva
- [19] I. Blahota and D. Nagy, *Approximation by matrix transform means with respect to the Walsh system in Lebesgue spaces*, Publi. Math. Debrecen, elfogadva
- [20] I. Blahota and K. Nagy, *Approximation by Θ -means of Walsh–Fourier series*, Anal. Math. **44** (1), (2018) 57–71.
- [21] I. Blahota and K. Nagy, *Approximation by matrix transform of Vilenkin–Fourier series*, Publi. Math. Debrecen **99** (1-2), (2021) 223–242.
- [22] I. Blahota and K. Nagy, *Approximation by Marcinkiewicz type matrix transform of Vilenkin–Fourier series*, Mediterr. J. Math. **19** (4), 165, (2022)
- [23] I. Blahota, K. Nagy, and M. Salim, *Approximation by Θ -means of Walsh–Fourier series in dyadic Hardy spaces and dyadic homogeneous Banach spaces*, Anal. Math. **47**, (2021) 285–309.
- [24] I. Blahota, K. Nagy, and G. Tepnadze, *Approximation by Marcinkiewicz Θ -means of double Walsh–Fourier series*, Math. Ineq. and Appl. **22** (3), (2019) 837–853.
- [25] S. L. Blyumin, *Linear summability methods for Fourier series in multiplicative systems*, Sibirsk. Mat. Zh. **9** (2), (1968) 449–455.
- [26] P. Chandra, *On the degree of approximation of a class of functions by means of Fourier series*, Acta Math. Hungar. **52**, (3-4) (1988) 199–205.

- [27] A. V. Efimov, *On some approximation properties of periodic multiplicative orthonormal systems*, Mat. Sb. **69**, (1966) 354–370. (in Russian)
- [28] T. Eisner, *The Θ -summation on local fields*, Ann. Univ. Sci. Budapest. Sect. Comput. **33**, (2011) 137–160.
- [29] N. J. Fine, *On the Walsh functions*, Trans. Amer. Math. Soc. **65** (3), (1949) 372–414.
- [30] S. Fridli, P. Manchanda, and A. H. Siddiqi, *Approximation by Walsh–Nörlund means*, Acta Sci. Math. **74**, (2008) 593–608.
- [31] G. Gát, *On almost even arithmetical functions via orthonormal systems on Vilenkin groups*, Acta Arith. **49** (2), (1991) 105–123.
- [32] G. Gát and R. Toledo, *L_p -norm convergence of series in compact totally disconnected groups*, Analysis Math. **22**, (1996) 13–24.
- [33] G. Gát, *On $(C, 1)$ summability of integrable functions on compact totally disconnected spaces*, Studia Math. **144**, (2) (2001), 101–120.
- [34] G. Gát, *On $(C, 1)$ summability of integrable functions with respect to the Walsh–Kaczmarz system*, Studia Math. **130** (2), (1998) 135–148.
- [35] G. Gát, *Pointwise convergence of the Fejér means of functions on unbounded Vilenkin groups*, J. Approx. Theory **101** (1), (1999) 1–36.
- [36] G. Gát, *Cesàro means of integrable functions with respect to unbounded Vilenkin systems*, J. Approx. Theory **124** (1), (2003) 24–43.
- [37] G. Gát and U. Goginava, *A weak type inequality for the maximal operator of (C, α) -means of Fourier series with respect to the Walsh–Kaczmarz system*, Acta Math. Hungar. **125** (1-2), (2009) 65–83.
- [38] G. Gát and U. Goginava, *Maximal operators of Cesàro means with varying parameters of Walsh–Fourier series*, Acta Math. Hungar. **159** (2), (2019) 653–668.

- [39] G. Gát, U. Goginava, and K. Nagy, *On the Marcinkiewicz-Fejér means of double Fourier series with respect to the Walsh-Kaczmarz system*, *Studia Sci. Math. Hungar.* **46** (3), (2009) 399–421.
- [40] U. Goginava, *On the approximation properties of Cesàro means of negative order of Walsh-Fourier series*, *J. Approx. Theory* **115**, (2002) 9–20.
- [41] U. Goginava and L. Gogoladze, *Pointwise summability of Vilenkin-Fourier series*, *Publ. Math. Debrecen* **79** (1-2), (2011) 89–108.
- [42] U. Goginava and K. Nagy, *Matrix summability of Walsh-Fourier series*, *Mathematics* **10** (14), (2022) 2458.
- [43] E. Hewitt and K. Ross, *Abstract Harmonic Analysis*, Springer-Verlag I, II, Heidelberg, 1963
- [44] T. V. Iofina and S. S. Volosivets, *On the degree of approximation by means of Fourier-Vilenkin series in Hölder and L_p norm*, *East J. Approx.* **15** (2), (2009) 143–158.
- [45] M. A. Jastrebova, *On approximation of functions satisfying the Lipschitz condition by arithmetic means of their Walsh-Fourier series*, *Mat. Sb.* **71**, (1966) 214–226. (in Russian)
- [46] A. Joudeh and G. Gát, *Almost everywhere convergence of Cesàro means with varying parameters of Walsh-Fourier series*, *Miskolc Math. Notices* **19** (1), (2018) 303–317.
- [47] S. Kaczmarz, *Sur la convergence et la sommabilité des développements orthogonaux*, *Studia Math.* **1** (1), (1929) 87–121.
- [48] L. Leindler, *On the degree of approximation of continuous functions*, *Acta Math. Hungar.* **104** (1-2), (2004) 105–113.
- [49] N. Memić, *Almost everywhere convergence of some subsequences of the Nörlund logarithmic means of Walsh-Fourier series*, *Analysis Mathematica* **41** (1), (2015) 45–54.

- [50] N. Memić, L-E. Persson, and G. Tephnadze, *A note on the maximal operators of Vilenkin–Nörlund means with non-increasing coefficients*, *Studia Sci. Math. Hungar.* **53** (4), (2016) 545–556.
- [51] C. N. Moore, *Summable Series and Convergence Factors*, American Mathematical Society Colloquium Publications **22**, Providence, RI, 1938
- [52] F. Móricz, B. E. Rhoades, *Approximation by weighted means of Walsh–Fourier series*, *Int. J. Math. Sci.* **19** (1), (1996) 1–8.
- [53] F. Móricz and A. Siddiqi, *Approximation by Nörlund means of Walsh–Fourier series*, *J. Approx. Theory* **70**, (1992) 375–389.
- [54] N. Nadirashvili, L-E. Persson, G. Tephnadze, and F. Weisz, *Vilenkin–Lebesgue points and almost everywhere convergence for some classical summability methods*, *Mediterr. J. Math.* **19**, (2022) 239.
- [55] K. Nagy, *Approximation by weighted means of Walsh–Kaczmarz–Fourier series*, *Rend. Circ. Mat. Palermo* (2), **82**, (2010) 387–406.
- [56] K. Nagy, *Approximation by Nörlund means of quadratical partial sums of double Walsh–Fourier series*, *Anal. Math.* **36** (4), (2010) 299–319.
- [57] K. Nagy, *Approximation by Nörlund means of Walsh–Kaczmarz–Fourier series*, *Georgian Math. J.* **18** (1), (2011) 147–162.
- [58] G. I. Natanson and V. V. Zuk, *Trigonometric Fourier Series and Approximation Theory*, Izdat. Leningrad Unta, Leningrad, 1983 (in Russian)
- [59] R. E. A. C. Paley, *A remarkable series of orthogonal functions*, *Proc. Lond. Math. Soc.* **34** (2), (1932) 241–279.

- [60] L-E. Persson, G. Tephnadze, and F. Weisz, *Martingale Hardy spaces and summability of one-dimensional Vilenkin–Fourier series*, Springer, Berlin, 2022
- [61] F. Schipp, *Pointwise convergence of expansions with respect to certain product systems*, *Anal. Math.* **2** (1), (1976) 65–76.
- [62] F. Schipp, W. R. Wade, P. Simon, and J. Pál, *Walsh Series. An Introduction to Dyadic Harmonic Analysis*, Adam Hilger, Bristol-New York, 1990
- [63] G. Shavardenidze, *On the convergence of Cesàro means of negative order of Vilenkin–Fourier series*, *Studia Sci. Math. Hungar.* **56** (1), (2019) 22–44.
- [64] G. Shavardenidze and M. Totladze, *On the convergence of Cesàro means of negative order of Walsh–Fourier series*, *Acta Math. Acad. Paedag. Nyíregyh.* **34**, (2023) 1–8.
- [65] P. Simon, *(C, α) summability of Walsh–Kaczmarz–Fourier series*, *J. Approx. Theory* **127** (1), (2004) 39–60.
- [66] V. A. Skvortsov, *Certain estimates of approximation of functions by Cesàro means of Walsh–Fourier series*, *Mat. Zametki* **29**, (1981) 539–547. (in Russian)
- [67] V. A. Skvortsov, *On Fourier series with respect to the Walsh–Kaczmarz system*, *Anal. Math.* **7** (1), (1981) 141–150.
- [68] A. A. Šneĭder, *On series of Walsh functions with monotonic coefficients*, *Izvestiya Akad. Nauk SSSR. Ser. Mat.* **12**, (1948) 179–192. (in Russian)
- [69] G. Tephnadze, *On the maximal operators of Walsh–Kaczmarz–Nörlund means*, *Acta Math. Acad. Paedag. Nyíregyh.* **31** (2), (2015) 259–271.

- [70] T. Tepnadze, *On the approximation properties of Cesàro means of negative order of Vilenkin–Fourier series*, *Studia Sci. Math. Hungar.* **53** (4), (2016) 532–544.
- [71] R. Toledo, *On the boundedness of the L^1 -norm of Walsh–Fejér kernels*, *Journal of Math. Anal. and Appl.* **457** (1), (2018) 153–178.
- [72] N. Ya. Vilenkin, *On a class of complete orthonormal systems*, *Izv. Ross. Akad. Nauk Ser. Mat.* **11**, (1947) 363–400. (Russian)
- [73] S. S. Volosivets, *Approximation by Vallée-Poussin type means of Vilenkin–Fourier series*, *P-Adic Numbers, Ultrametric Anal. App.* **16** (3), (2024) 295–301.
- [74] J. Walsh, *A closed set of normal orthogonal functions*, *Amer. J. Math.*, **45** (1) (1923), 5–24.
- [75] F. Weisz, *Convergence of singular integrals*, *Ann. Univ. Sci. Budapest Sect. Math.* **32**, (1989) 243–256.
- [76] F. Weisz, *Θ -summation and Hardy spaces*, *J. Approx. Theory* **107**, (2000) 121–142.
- [77] F. Weisz, *Θ -summability of Fourier series*, *Acta Math. Hungar.* **103** (1-2), (2004) 139–175.
- [78] Sh. Yano, *On approximation by Walsh functions*, *Proc. Amer. Math. Soc.* **2**, (1951) 962–967.
- [79] W. S. Young, *On the a.e. convergence of Walsh–Kaczmarz–Fourier series*, *Proc. Amer. Math. Soc.* **44**, (1974) 353–358.
- [80] A. Zygmund, *Trigonometric Series*, With a foreword by Robert Fefferman. 3rd ed., Cambridge University Press I and II, Cambridge, 2002 364.