



1949

Lokálisan konstans ortonormált rendszerekre vonatkozó Fourier sorok szummálhatósági kérdéseinek vizsgálata

Egyetemi doktori (PhD) értekezés

a szerző neve: Lucskai Gábor
témavezető neve: Prof. Dr. Gát György Tamás

DEBRECENI EGYETEM
Természettudományi és Informatikai Doktori Tanács
Matematika- és Számítástudományok Doktori Iskola
Debrecen, 2021.

Ezen értekezést a Debreceni Egyetem Természettudományi és Informatikai Doktori Tanács Matematika- és Számítástudományok Doktori Iskola Funkcionálanalízis programja keretében készítettem a Debreceni Egyetem természettudományi doktori (PhD) fokozatának elnyerése céljából.

Nyilatkozom arról, hogy a tézisekben leírt eredmények nem képezik más PhD disszertáció részét.

Debrecen, 2021. augusztus 23.

a jelölt aláírása

Tanúsítom, hogy Lucskai Gábor doktorjelölt 2017-2021 között a fent megnevezett Doktori Iskola Funkcionálanalízis programjának keretében irányítással végezte munkáját. Az értekezésben foglalt eredményekhez a jelölt önálló alkotó tevékenységével meghatározóan hozzájárult.

Nyilatkozom továbbá arról, hogy a tézisekben leírt eredmények nem képezik más PhD disszertáció részét.

Az értekezés elfogadását javasolom.

Debrecen, 2021. augusztus 23.

a témavezető aláírása

Lokálisan konstans ortonormált rendszerekre vonatkozó Fourier sorok szummálhatósági kérdéseinek vizsgálata

Értekezés a doktori (Ph.D.) fokozat megszerzése érdekében a matematika tudományágban

Írta: Lucskai Gábor okleveles matematikus

Készült a Debreceni Egyetem Matematika- és Számítástudományok doktori iskolája (Funkcionálanalízis programja) keretében

Témavezető: Prof. Dr. Gát György Tamás

Az értekezés bírálói:

Dr.
Dr.

A bírálóbizottság:

elnök: Dr.
tagok: Dr.
Dr.
Dr.
Dr.

Az értekezés védésének időpontja: 2021.

Tartalomjegyzék

Bevezetés	1
1. fejezet. A Walsh–Paley- és a Walsh–Kaczmarz-rendszer	5
1.1. Bevezetés	5
1.2. A Fejér-magfüggvény maximáloperátorának vizsgálata	8
1.3. A fő eredmény bizonyítása	10
1.4. Riesz-logaritmikus magfüggvények vizsgálata	13
1.5. A fő eredmények bizonyítása	15
2. fejezet. A 2-adikus egészek csoportja	33
2.1. Riesz-közepek majdnem mindenütti konvergenciája	33
2.2. A fő eredmény bizonyítása.	37
2.3. A (C, α) -közepek majdnem mindenütti konvergenciája	50
2.4. A fő eredmény bizonyítása	55
3. fejezet. Függelék	77
3.1. Matlab-kódok	77
3.2. Az 1.5 azonosságot szemléltető ábrák	79
Összefoglaló	81
Summary	87
A dolgozatban felhasznált saját publikációk	93
A dolgozatban idézett további közlemények	95

Köszönetnyilvánítás

Először is szeretnék köszönetet mondani témavezetőmnek Prof. Dr. Gát György Tamásnak, aki végig támogatott a képzés során. Az ő ötletei és észrevételei nagyban hozzájárultak a disszertáció létrehozásához és tudományos pályafutásom megkezdéséhez.

Továbbá szeretnék köszönetet mondani a családomnak az áldozatos munkájukért és támogatásukért.

A szerzőt a "2020-4.1.1-TKP2020" azonosítószámú, Tématerületi Kiválósági Program 2020 "intézményi kiválóság" alprogram 3. számú, "Innovációval a fenntartható életért és környezetért" című tématerület pályázat támogatja.

Bevezetés

A disszertációban három lokálisan konstans ortonormált rendszert vizsgálunk. Nevezetesen, a Walsh–Paley, a Walsh–Kaczmarz és a 2-adikus egészek karaktereinek rendszerét.

Az első fejezetben a Walsh–Paley- és a Walsh–Kaczmarz-rendszerbeli vizsgálatokról lesz szó. Először a rendszerekkel kapcsolatos alapfogalmakat tárgyaljuk, majd a Dirichlet-, a Fejér- és a Riesz-logaritmikus magfüggvényről lesz szó. Ezt követően a Fejér-magfüggvények maximáloperátorát vizsgáljuk, amely fontos szerepet játszik a Fejér-közepek majdnem mindenütti konvergenciájának igazolásában egy- illetve több-dimenzióban is. Erre az operátorra több felső becslés is született például Gát ([7]) és Goginava ([15]) által. Az első eredmény az, hogy a Goginava által adott becslés tovább nem javítható.

A második fejezetben a 2-adikus egészek csoportjáról lesz szó egy- illetve két-dimenzióban. Az egydimenziós esetben a Riesz-közepek majdnem mindenütti konvergenciáját bizonyítjuk abban az esetben, amikor $0 \leq \gamma \leq 1 \leq \alpha < \infty$. Ezt az eredményt Walsh-rendszerben Weisz igazolta ([33]).

Ezután a kétdimenziós (C, α) Cesàro -közepek majdnem mindenütti konvergenciáját bizonyítjuk be, ahol $0 < \alpha < 1$.

A bevezetés hátralévő részében a diadikus analízis klasszikus jelöléseiről lesz szó (lásd például: [27]). Jelölje \mathbb{P} a pozitív egész számok halmazát, míg $\mathbb{N} := \mathbb{P} \cup \{0\}$ a természetes számok halmazát. Definiáljuk a *diadikus intervallumok* halmazát a

$$\mathcal{J} := \left\{ \left[\frac{p}{2^n}, \frac{p+1}{2^n} \right) : p, n \in \mathbb{N} \right\}$$

módon ([1], [27], [32], [25]). A diadikus intervallumok egyik fontos tulajdonsága, hogy két diadikus intervallum vagy diszjunkt vagy az egyik tartalmazza a másikat.

Jelölje $I := [0, 1) \subset \mathbb{R}$ az egység intervallumot és legyen B az I intervallum egy részhalmaza. A B halmaz Lebesgue-mértékét jelölje $|B| := \lambda(B)$.

Az $I_n(x) \in \mathcal{J}$ fogja jelölni azt a 2^{-n} mértékű diadikus intervallumot, amely tartalmazza az $x \in I$ elemet. Speciálisan az $I_n := I_n(0)$ jelölést is fogjuk alkalmazni. Jelölje $L^p(I)$ ($1 \leq p \leq \infty$) a Lebesgue-teret, míg a hozzátartozó normát $\|\cdot\|_p$.

Tetszőleges $x \in [0, 1)$ felírható

$$(1) \quad x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x_n}{2^{n+1}}$$

alakban, ahol $x_n \in \{0, 1\}$. Ezt az összeget az x szám diadikus felbontásának nevezzük, míg az x_n számokat az x diadikus együtthatói.

A diadikus racionális számok halmazát jelölje

$$\mathbb{Q}_2 := \left\{ \frac{p}{2^n} : p, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Egy diadikusan racionális számnak két lehetséges bináris alakja létezik, a továbbiakban ezen felírások közül azt választjuk, amely nullákra végződik. Továbbá az ilyen számok esetén az (1) összeg véges sok tagból áll.

Legyen $n \in \mathbb{N}$ egy rögzített természetes szám, amely egyértelműen felírható az

$$(2) \quad n = \sum_{k=0}^{\infty} n_k 2^k$$

alakban, amelyet az n bináris alakjának nevezzük, míg az $n_k \in \{0, 1\}$ számokat az n bináris együtthatóinak nevezzük. Minden $n \in \mathbb{P}$ számhoz létezik olyan $k \in \mathbb{N}$ szám, hogy $2^k \leq n < 2^{k+1}$ teljesül. Ebből következik, hogy elegendően nagy k esetén a fenti összeg véges. A $k := \lfloor \log_2 n \rfloor$ számot az n rendjének nevezzük és a továbbiakban $|n|$ módon jelöljük. Legyen s egy tetszőleges természetes szám, ekkor a továbbiakban a következő jelöléseket fogjuk alkalmazni :

$$n_{(s)} := \sum_{i=0}^s n_i 2^i \quad \text{és} \quad n^{(s)} := \sum_{i=s}^{\infty} n_i 2^i.$$

Világos, hogy $n = n_{(s)} + n^{(s+1)}$.

Az $n, m \in \mathbb{N}$ számok *diadikus összege* az alábbi módon adott:

$$n \oplus m := \sum_{k=0}^{\infty} |n_k - m_k| 2^k,$$

ahol $(n_k : k \in \mathbb{N})$ és $(m_k : k \in \mathbb{N})$ jelöli rendre az n és m számok bináris együtthatóit. A továbbiakban az $n_k + m_k \pmod{2}$ jelölést fogjuk alkalmazni.

A konstansokat c vagy C módon fogjuk jelölni, amely konstansok a különböző szituációkban különböző értékeket jelölnek.

1. FEJEZET

A Walsh–Paley- és a Walsh–Kaczmarz-rendszer

1.1. Bevezetés

Első lépésként definiáljuk az I halmazon két elem *logikai (diadikus) összegét* az alábbi módon:

$$x + y := \sum_{n=0}^{\infty} |x_n - y_n| 2^{-(n+1)} \quad (x, y \in I).$$

Jelölje $(x_k, k \in \mathbb{N})$ az $x \in I$, míg $(n_k, k \in \mathbb{N})$ az $n \in \mathbb{N}$ diadikus együtthatóit. 1922-ben Rademacher vezette be a *Rademacher-függvényt* az

$$r_n(x) = (-1)^{x_n}$$

módon ([21]). Paley 1931-ben ([20]) definiálta a *Walsh(-Paley)-függvények* $\omega := (\omega_n, n \in \mathbb{N})$ rendszerét, mint Rademacher-függvények szorzata, azaz:

$$(1) \quad \omega_n(x) := \prod_{j=0}^{|n|} (r_j(x))^{n_j} = (-1)^{\sum_{j=0}^{|n|} n_j x_j}.$$

A definíció alapján nyilvánvaló, hogy $\omega_0 = 1$ és $\omega_{2^n}(x) = r_n(x)$ ($x \in I$, $n \in \mathbb{N}$). A Walsh-függvények zárt halmazt alkotnak a véges szorzatra nézve, véges sok szakadási pontjuk van a $[0, 1)$ intervallumon és csak $+1$ vagy -1 értéket vehetnek fel. Így nyilvánvaló, hogy $|\omega_n(x)| = 1$.

Továbbá az I intervallumon majdnem mindenütt teljesül, hogy

$$\omega_n(x + y) = \omega_n(x) + \omega_n(y).$$

Valamint minden $x \in I$ és $m, n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\omega_{n \oplus m}(x) = \omega_n(x) \omega_m(x).$$

1948-ban Šneider definiálta a *Walsh–Kaczmarz-rendszert*, mint Rademacher-függvények szorzata, de Paleytől eltérő sorrendezést alkalmazott ([29]). Legyen $x \in I$ és $n \in \mathbb{P}$ számok diadikus alakja rendre az (1) és (2) módon adott. Ekkor az n -edik Walsh–Kaczmarz-függvény

$$\kappa_n(x) := r_{|n|}(x) \prod_{k=0}^{|n|-1} (r_{|n|-1-k}(x))^{n_k} = r_{|n|}(x) (-1)^{\sum_{k=0}^{|n|-1} n_k x_{|n|-1-k}}$$

és $\kappa_0 = 1$. A definíció alapján igazolható, hogy $\kappa_{2^n} = r_n = \omega_{2^n}$ ($n \in \mathbb{N}$). A Walsh–Kaczmarz-rendszert $\kappa := (\kappa_n, n \in \mathbb{N})$ módon fogjuk jelölni.

A Walsh–Paley- és a Walsh–Kaczmarz-rendszerek közötti kapcsolat leírásához tekintsük a $\tau_A : I \rightarrow I$, ($A \in \mathbb{N}$) transzformációt:

$$(x_0, \dots, x_{A-2}, x_{A-1}x_A, x_{A+1}, \dots) \rightarrow (x_{A-1}, x_{A-2}, \dots, x_0, x_A, x_{A+1}, \dots).$$

Ez egy mértéktartó transzformáció, amelyre $\tau_A(\tau_A(x)) = x$ teljesül. Ennek a transzformációnak a segítségével kapjuk a

$$(2) \quad \kappa_n(x) = r_{|n|}(x) \omega_n(\tau_n(x)) \quad (n \in \mathbb{N}).$$

azonosságot, amely a későbbiekben hasznos lesz számunkra.

Jelölje φ az $\omega = (\omega_n, n \in \mathbb{N})$ Walsh–Paley- vagy a $\kappa = (\kappa_n, n \in \mathbb{N})$ Walsh–Kaczmarz-rendszer valamelyikét, míg az említett rendszerek n -edik elemét jelölje φ_n . Definiáljuk a *Dirichlet-magfüggvényt*, illetve *Fejér-magfüggvényt* az alábbi módon:

$$D_n^\varphi := \sum_{k=0}^{n-1} \varphi_k, \quad K_n^\varphi := \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} D_k.$$

Megjegyezzük, hogy $D_0^\varphi = 0$ és $K_0^\varphi = 0$. Továbbá mindkét rendszerben teljesül a *Paley-lemma* ([23, 27]), azaz

$$D_{2^n}^\varphi(x) = \begin{cases} 2^n, & x \in I_n, \\ 0, & x \notin I_n. \end{cases}$$

A továbbiakban, ha nincs felső index, akkor a Walsh–Dirichlet- illetve Walsh–Fejér-magfüggvényekről lesz szó.

A Walsh–Paley-rendszerben teljesül az alábbi azonosság.

1.1. LEMMA ([27]). *Legyen $n \in \mathbb{N}$. Ekkor a Walsh–Paley-rendszerben teljesül a*

$$D_n(x) = \omega_n(x) \sum_{i=0}^{\infty} n_i r_i D_{2^i}(x),$$

azonosság, ahol $r_i(x)$ jelöli az i -edik Rademacher-függvényt.

A következő lemma, amelyet Goginava bizonyított, fontos szerepet fog játszani számos lemma bizonyításában.

1.2. LEMMA ([13]). *Legyen $j, n \in \mathbb{N}$, amelyre $j < 2^n$ teljesül. Ekkor*

$$D_{2^n-j}(x) = D_{2^n}(x) - \omega_{2^n-1}(x) D_j(x).$$

Skvortsov az alábbi állítást igazolta a Walsh–Kaczmarz-rendszerben:

1.3. LEMMA ([28]). *Legyen $n, j \in \mathbb{N}$ és $j < 2^n$. Ekkor*

$$D_{2^n+j}^k(x) = D_{2^n}(x) + r_n(x) D_j(\tau_n x).$$

A Fejér-magfüggvényekkel kapcsolatban az alábbi jelöléseket fogjuk alkalmazni:

$$K_{a,b} := \sum_{l=a}^b D_l \quad (a, b \in \mathbb{N}) \quad \text{és} \quad n^{(s)} := \sum_{l=s}^{\infty} n_l 2^l \quad (n, s \in \mathbb{N}).$$

A következő két lemma alapvető fontosságú a Fejér-közep vizsgálatakor.

1.4. LEMMA ([7]). *Minden $n \in \mathbb{N}$ esetén*

$$nK_n(x) = \sum_{s=0}^{\infty} n_s K_{n^{(s+1)}, 2^s}(x).$$

1.5. LEMMA ([7]). *Legyen $s, t, n \in \mathbb{N}$ és $x \in I_t \setminus I_{t+1}$. Ekkor két esetet különböztetünk meg:*

1. *ha $s \leq t \leq |n|$, akkor*

$$|K_{n^{(s+1)}, 2^s}(x)| \leq c 2^{s+t},$$

2. *ha $t < s \leq |n|$, akkor*

$$K_{n^{(s+1)}, 2^s}(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x - x_t e_t \notin I_s, \\ \omega_{n^{(s+1)}}(x) 2^{s+t-1}, & \text{ha } x - x_t e_t \in I_s. \end{cases}$$

Jelöljön f egy I intervallumon értelmezett, Lebesgue-integrálható függvényt, amely n -edik Fourier-együtthatóját és a Fourier-sorának az n -edik részletösszegét az alábbi módon definiáljuk:

$$\hat{f}(n) := \int_I f \varphi_n d\lambda, \quad S_n^\varphi f(y) = \sum_{k=0}^{n-1} \hat{f}(k) \varphi_k(y),$$

ahol $S_0 f = 0$. Továbbá definiáljuk az f függvény $(C, 1)$ - (Cesàro-) közepét az alábbi módon:

$$\sigma_n^\varphi f(y) := \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n S_k^\varphi f(y),$$

ahol $n \in \mathbb{N}$ és $y \in I$.

Továbbá teljesülnek az alábbi azonosságok:

$$S_n^\varphi f(y) = \int_I f(x) D_n^\varphi(x+y) d\lambda(x) = f * D_n^\varphi(y),$$

$$\sigma_n^\varphi f(y) = \int_I f(x) K_n^\varphi(x+y) d\lambda(x) = f * K_n^\varphi(y).$$

1.2. A Fejér-magfüggvény maximáloperátorának vizsgálata

A majdnem mindenütti konvergencia kérdése nagyon fontos szerepet tölt be a Fourier-sorok elméletében. Először tekintsük át a Fejér-közepék majdnem mindenütti konvergenciának történetét.

Az $(\exp(2\pi i k x), k \in \mathbb{Z})$ trigonometrikus rendszerben a Fejér-közepék majdnem mindenütti konvergenciát 1905-ben Henri Lebesgue igazolta minden integrálható függvényre ([19]).

Walsh–Paley-rendszerben 1955-ben N.J. Fine integrálható függvényekre bizonyította $\sigma_n f \rightarrow f$ majdnem mindenütti konvergenciát ([5]). Korlátos lineáris operátorok segítségével 1975-ben Schipp Ferenc adott egy egyszerűbb bizonyítást ([24]). 1997-ben Gát a Fejér-magfüggvény maximáloperátorára adott becslés segítségével bizonyította a Fejér-közepék majdnem mindenütti konvergenciát a Walsh–Paley-rendszerben ([7]).

A Fejér-közepék majdnem mindenütti konvergenciáját a Walsh–Kaczmarz-rendszerben 1998-ben Gát bizonyította a [8] cikkében.

Ezek után térjünk át a Fejér-magfüggvények maximáloperátorának a vizsgálatára. Az első ezzel kapcsolatos egyenlőtlenség Gát nevéhez fűződik, aki 1997-ben igazolta az alábbi egyenlőtlenséget.

1.1. TÉTEL ([7]). Minden $a \leq A \in \mathbb{N}$ esetén

$$\int_{I \setminus I_a} \sup_{|n| \geq A} |K_n(x)| dx \leq C \sqrt{2^{a-A}}$$

teljesül.

Goginava 2004-ben jobb felső becslést adott az előző eredményhez képest. Az alábbi állítást bizonyította.

1.2. TÉTEL ([15]). Minden $a < A \in \mathbb{N}$

$$\int_{I \setminus I_a} \sup_{|n| \geq A} |K_n(x)| dx \leq C \frac{A-a}{2^{A-a}}$$

teljesül.

Az 1.1 és 1.2 Tételek fontos szerepet játszanak az egy- és kétdimenziós Walsh–Fourier sorok Fejér-közepének vizsgálata során ([13], [6]).

A Fejér-magfüggvények számos eltérő tulajdonsággal rendelkeznek a trigonometrikus rendszerben a Walsh-rendszerhez képest. Az alábbi formula jól ismert a Fejér-magfüggvényekről ([2]):

$$(3) \quad K_n^{trig}(x) = \frac{\sin^2\left(\frac{2n+1}{2}x\right)}{2(n+1)\sin^2\frac{x}{2}}, \quad (0 \neq x \in [-\pi, \pi]).$$

Ennek a formulának a segítségével igazolható a Fejér-magfüggvény maximáloperátorára vonatkozó alábbi becslés:

$$\frac{c_1}{N\delta} \leq \int_{\delta}^1 \sup_{n \geq N} |K_n^{trig}(x)| dx \leq \frac{c_2}{N\delta}, \quad \left(N > \frac{1}{\delta}\right),$$

ahol c_1 és c_2 abszolút konstansok.

Természetesen felvetődik az a kérdés, hogy Gát és Goginava eredménye tovább javítható-e, azaz lehetséges-e jobb alsó becslést találni a $c \frac{\log(N\delta)}{N\delta}$ helyett?

A következő tétel szerint Goginava eredménye tovább nem javítható. Ez egy újabb példát ad a trigonometrikus és Walsh–Paley-rendszer közötti különbségre.

1.3. TÉTEL (Gát–Lucskai, [A]).

$$\int_{\delta}^1 \sup_{n \geq N} |K_n(x)| dx \geq c \frac{\log(N\delta)}{N\delta} \quad \left(N > \frac{1}{\delta} \right).$$

1.3. A fő eredmény bizonyítása

Legyen $a := \left\lfloor \log_2 \left(\frac{1}{\delta} \right) \right\rfloor$ és $A := \lceil \log_2 N \rceil$. Ekkor a tétel az alábbi alakban írható fel:

$$\int_{\bar{I}_a} \sup_{n \geq 2^A} |K_n(x)| dx \geq c \frac{A - a}{2^{A-a}}.$$

A cél ennek az alsó becslésnek a bizonyítása.

Legyen t és l tetszőleges pozitív szám és

$$n = 2^{2B} + 2^{2B-2} + \dots + 2^4 + 2^2 + 2^0,$$

ahol $|n| = 2B \geq A$ és $B = \lceil A/2 \rceil$.

Ha $t, l \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ és $t \neq l$, akkor jelölje J_t^l azt az $I_{t+l+1}(x)$ diadikus intervallumot, melyben az x i -edik koordinátája:

$$(A) \quad x_i = \begin{cases} 1, & \text{ha } i \in \{t, t+l\}, \\ 0, & \text{ha } i \in \{0, 1, \dots, t-1\} \cup \{t+1, t+2, \dots, t+l-1\} \end{cases}$$

teljesül. Továbbá, az \bar{I}_a diadikus intervallumot felírhatjuk az

$$\bar{I}_a = \bigcup_{t=0}^{a-1} I_t \setminus I_{t+1} = \bigcup_{t=0}^{a-1} \bigcup_{l=1}^{2B-t} J_t^l \cup \bigcup_{t=0}^{a-1} I_{2B+1}(e_t)$$

alakban. Ekkor n felírása és 1.4 miatt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
\int_{\bar{I}_a} \sup_{n \geq 2^A} |K_n(x)| dx &\geq \int_{\bigcup_{t=0}^{a-1} \bigcup_{l=1}^{2^{B-t}} J_t^l} |K_n(x)| dx + \int_{\bigcup_{t=0}^{a-1} I_{2^{B+1}}(e_t)} |K_n(x)| dx \\
&\geq \sum_{t=0}^{a-1} \sum_{l=1}^{2^{B-t}} \int_{J_t^l} \frac{c}{2^{2B}} \left| \sum_{s=0}^{2B} n_s K_{n^{(s+1)}, 2^s}(x) \right| dx \\
&\quad + \sum_{t=0}^{a-1} \int_{I_{2^{B+1}}(e_t)} \frac{c}{2^{2B}} \left| \sum_{s=0}^{2B} n_s K_{n^{(s+1)}, 2^s}(x) \right| dx =: (I) + (II).
\end{aligned}$$

Az (I) becsléséhez az s értékétől függően három esetet kell megkülönböztetni. Feltehetjük, hogy s páros, mivel ebben az esetben $n_s = 1$, míg ellenkező esetben pedig $n_s = 0$.

Az *első* esetben legyen $t \leq s \leq t+l$. Ekkor $m := \left\lfloor \frac{t+l}{2} \right\rfloor$ és $s = 2m$.

Az 1.5. Lemma alapján kapjuk, hogy:

$$\begin{aligned}
\int_{J_t^l} |K_{2^{2B+2^{2B-2}+\dots+2^{2m+2}}, 2^{2m}}(x)| dx &= \frac{2^{2m+t-1}}{2^{t+l+1}} = \frac{2^{2\lfloor \frac{t+l}{2} \rfloor + t - 1}}{2^{t+l+1}} \geq \frac{2^{2t+l-2}}{2^{t+l+1}} = \frac{2^t}{8}, \\
\int_{J_t^l} |K_{2^{2B+2^{2B-2}+\dots+2^{2m}}, 2^{2m-2}}(x)| dx &= \frac{2^{2m-2+t-1}}{2^{t+l+1}} \leq \frac{2^{2t+l-3}}{2^{t+l+1}} = \frac{2^t}{4^2}, \\
&\vdots \\
\int_{J_t^l} |K_{2^{2B+2^{2B-2}+\dots+2^{2m-2j+2}}, 2^{2m-2j}}(x)| dx &= \frac{2^{2m-2j+t-1}}{2^{t+l+1}} \leq \frac{2^{2t-2j-1}}{2^{t+1}} = \frac{2^t}{4^{j+1}},
\end{aligned}$$

ahol $j = 1, 2, \dots$. Ebből adódik, hogy

$$\int_{J_t^l} \sup_{n \geq 2B} \frac{c}{2^{2B}} \left| \sum_{s=0}^{2B} n_s K_{n^{(s+1)}, 2^s}(x) \right| dx \geq \frac{c}{2^{2B}} \left| \frac{2^t}{8} - \frac{2^t}{4^2} - \frac{2^t}{4^3} - \dots \right|.$$

Tehát

$$\begin{aligned}
& \int_{\frac{1}{l_a}} \sup_{n \geq 2B} \frac{c}{2^{2B}} \left| \sum_{s=0}^{2B} n_s K_{n^{(s+1)}, 2^s}(x) \right| dx \\
& \geq \sum_{t=0}^{a-1} \sum_{l=1}^{2B-t} \frac{c}{2^{2B}} \left| 2^t - \frac{2^{t+1}}{4} - \frac{2^{t+1}}{4^2} - \dots \right| \\
& \geq \sum_{t=0}^{a-1} \sum_{l=1}^{2B-t} \frac{c}{2^{2B}} \left[2^t \cdot \left(1 - \sum_{i=1}^{\infty} \frac{2}{4^i} \right) \right] \geq \sum_{t=0}^{a-1} \sum_{l=1}^{2B-t} \frac{c}{2^{2B}} \left[2^t \cdot \left(1 - \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{4}} \right) \right] \\
& \geq \sum_{t=0}^{a-1} \sum_{l=1}^{2B-t} \frac{c \cdot 2^t}{2^{2B}} \geq c \cdot \frac{2^a}{2^{2B}} (2B - a).
\end{aligned}$$

A második esetben legyen $t + l \leq s$. Ekkor 1.5 Lemma alapján kapjuk, hogy $K_{n^{(s)}, 2^s}(x) = 0$.

Az utolsó esetben legyen $0 \leq s < t$. Felhasználva újra az 1.5 Lemmát kapjuk, hogy

$$\int_{J_t^l} |K_{2^{2B+2^{2B-2}+\dots+2^{s+2}}, 2^s}(x)| dx \leq c \frac{2^{s+t-1}}{2^{t+l+1}} \leq c \frac{2^s}{2^t}.$$

Ekkor

$$\begin{aligned}
& \sum_{t=0}^{a-1} \sum_{l=1}^{2B-t} \int_{J_t^l} \sup_{|n| \geq 2B} \frac{c}{2^{2B}} \left| \sum_{s=0}^{t-1} n_s K_{n^{(s+1)}, 2^s}(x) \right| dx \\
& \leq \frac{c}{2^{2B}} \sum_{t=0}^{a-1} \sum_{l=1}^{2B-t} \sum_{s=0}^{t-1} \frac{2^{s+t}}{2^{t+l}} \leq \frac{c}{2^{2B}} \sum_{t=0}^{a-1} \frac{2^t}{2} \leq c \frac{2^a}{2^{2B}}.
\end{aligned}$$

A (II) tag becslése nem fontos az alsó becsléshez, mivel (I) alkotja a Fejér-magfüggvény maximáloperátorának a főrészt és mi már megtaláltuk az alsó korlátot. Ennek ellenére megmutatjuk, hogy a (II) részre adott felső becslés nem befolyásolja érdemben a korábban megkapott alsó becslésünket.

A (II) becslése:

$$\begin{aligned}
(II) &= \sum_{t=0}^{a-1} \int_{I_{2B+1}(e_t)} \sup_{|n| \geq 2B} \frac{c}{2^{2B}} \left| \sum_{s=0}^{2B} 2^{s+t-1} \right| dx \\
&= \sum_{t=0}^{a-1} \frac{c}{2^{2B+1}} \cdot \sum_{s=0}^{2B} \frac{2^{s+t-1}}{2^{2B+1}} \leq \sum_{t=0}^{a-1} \frac{c}{2^{2B+1}} \frac{2^{2B+1+t}}{2^{2B+1}} \leq \frac{2^a}{2^{2B}}.
\end{aligned}$$

Összefoglalva azt kapjuk, hogy

$$\int_{\bar{I}_a} \sup_{|n| \geq 2B} |K_n(x)| dx \geq c \cdot \frac{2^a}{2^{2B}} (2B - a).$$

Ezzel teljes a bizonyítás.

1.4. Riesz-logaritmikus magfüggvények vizsgálata

Ebben a fejezetben a

$$\frac{1}{\log n} \sum_{k=1}^n \frac{S_k^\circ(f)}{k}$$

módon definiált logaritmikus középhez tartozó

$$R_n^\circ(x) := \frac{1}{\log n} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{D_k^\circ(x)}{k},$$

Riesz-logaritmikus magfüggvényeket vizsgálunk, ahol $\circ \in \{trig, \omega, \kappa\}$ és $n \in \mathbb{N}$.

A Walsh–Riesz-logaritmikus közepek majdnem mindenütti konvergenciáját például Gát és Goginava bizonyította ([12]).

A trigonometrikus rendszerben a Riesz-logaritmikus közepek tulajdonságát számos szerző vizsgálta például Szász ([30]) és Yabuta ([34]).

A (3) formula alapján látható, hogy a trigonometrikus rendszerben a Fejér-magfüggvények minden x esetén pozitív értéket vesznek fel. Ennek segítségével belátható hogy a Riesz-logaritmikus magfüggvény nemnegatív értékű.

A következő tétel bizonyítását nem találtuk meg a szakirodalomban, de fontos megjegyezni, hogy ez nem a saját bizonyításunk. Ez

a tétel demonstrálja a trigonometrikus, a Walsh–Paley- és a Walsh–Kaczmarz-rendszerek közötti különbséget.

1.4. TÉTEL. *A trigonometrikus rendszerben a logaritmikus magfüggvény nemnegatív értéket fel vesz minden $n \geq 2$ és minden $x \in [-\pi, \pi]$ esetén.*

BIZONYÍTÁS. Alkalmazzuk az Abel-transzformációt

$$\begin{aligned} \log n \cdot R_n^{trig}(x) &= \sum_{k=1}^{n-1} \frac{D_k^{trig}(x)}{k} \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) \sum_{j=1}^k D_j^{trig}(x) + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n-1} D_i(x) \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) K_k^{trig}(x) + \frac{K_{n-1}^{trig}(x)}{n} \geq 0 \end{aligned}$$

teljesül, mivel $K_n^{trig}(x) \geq 0$ minden $n \in \mathbb{N}$ és $x \in [-\pi, \pi]$ esetén. \square

A következő tétel azt mondja ki, hogy a Walsh–Paley-rendszerben is teljesül a Riesz-logaritmikus magfüggvények nemnegativitása, de ennek a bizonyítása sokkal összetettebb és bonyolultabb, mint a trigonometrikus rendszerbeli bizonyítás. Ennek oka, hogy a Fejér-magfüggvények negatív értéket is felvehetnek.

1.5. TÉTEL (Gát–Lucskai, [A]). *Legyen $t, n \in \mathbb{N}$ és $x \in I_t \setminus I_{t+1}$. Ekkor*

$$R_n(x) \geq \frac{2^t}{16 \log n}, \quad \text{ha } n > 2^t \quad \text{és} \quad R_n(x) = \frac{n-1}{\log n}, \quad \text{ha } n \leq 2^t.$$

A tételnek két következménye van.

1.1. KÖVETKEZMÉNY (Gát–Lucskai, [A]). *A Walsh–Paley-rendszerre vonatkozó Riesz-logaritmikus magfüggvény pozitív $n \in \mathbb{N}$ és minden $x \in [0, 1)$ esetén.*

A másik következmény egy komoly eltérést mutat a Walsh–Fejér és a Walsh-logaritmikus magfüggvények között.

1.2. KÖVETKEZMÉNY (Gát-Lucskai, [A]). *Legyen $t, a \in \mathbb{N}$ úgy, hogy $t \geq a$ teljesüljön. Ekkor*

$$\int_{2^{-a}}^1 \sup_{n \geq 2^t} |R_n(x)| dx = \infty.$$

fennáll a Walsh–Paley-rendszer esetén.

BIZONYÍTÁS. Az 1.5 Tétel alkalmazásával azt kapjuk, hogy :

$$\begin{aligned} \int_{2^{-a}}^1 \sup_{n \geq 2^t} |R_n(x)| dx &= \sum_{t=a-1}^{\infty} \int_{2^{-t-1}}^{2^{-t}} \sup_{n \geq 2^t} |R_n(x)| dx = \sum_{t=a-1}^{\infty} \int_{2^{-t-1}}^{2^{-t}} \sup_{n \geq 2^t} R_n(x) dx \\ &\geq \sum_{t=a-1}^{\infty} \int_{2^{-t-1}}^{2^{-t}} \sup_{n \geq 2^t} \frac{2^t}{16 \cdot \log n} dx \\ &= C \sum_{t=a-1}^{\infty} \int_{2^{-t-1}}^{2^{-t}} \frac{2^t}{16 \cdot t} dx = C \cdot \sum_{t=a-1}^{\infty} \frac{1}{t} = \infty. \end{aligned}$$

□

A Riesz-logaritmikus magfüggvények korábban megismert tulajdonsága nem teljesül a Walsh–Kaczmarz-rendszerben. Nevezetesen, létezik a természetes számoknak egy olyan részsorozata, amely indexekhez tartozó Riesz-logaritmikus magfüggvény negatív értéket vesz fel valamely intervallumon. Pontosabban teljesül az alábbi tétel.

1.6. TÉTEL (Gát-Lucskai, [B]). *Legyen $A = 2^n + 2^{n-1}$, $11 \leq n \in \mathbb{N}$ és $x = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2^{n+1}}$. Ekkor*

$$\log(A)R_A^k(x) \leq -0.02 \cdot 2^n.$$

1.5. A fő eredmények bizonyítása

Az 1.5. Tétel bizonyítása. A 1.5 Tétel és az igazolásához szükséges két lemma 2019-ben jelent meg.

1.6. LEMMA (Gát–Lucskai, [A]). *Legyen $A \geq 3$. Ekkor*

$$(4) \quad \sum_{k=2^A}^{2^{A+1}-1} \frac{1}{k} < 0.7254.$$

BIZONYÍTÁS. Az $A \in \{3, 4\}$ eset egyszerű számításokból adódnak. Ha $A \geq 5$, akkor

$$\sum_{k=2^A}^{2^{A+1}-1} \frac{1}{k} < \int_{1-2^{-A}}^{2-2^{-A}} \frac{1}{x} dx = \log\left(\frac{2-2^{-A}}{1-2^{-A}}\right) < 0.7254.$$

□

1.7. LEMMA (Gát–Lucskai, [A]). *Ha $t \in \{0, 1, 2\}$ és $x \in I_t \setminus I_{t+1}$, akkor*

$$\sum_{k=2^A}^{2^{A+1}-1} \frac{|D_k(x)|}{k} \leq 0.3627 \cdot 2^t$$

teljesül $A \geq 6$ esetén.

BIZONYÍTÁS. Legyen $x \in I_t \setminus I_{t+1}$ és alkalmazzuk a 1.1 Lemmabeli azonosságot:

$$|D_k(x)| = \left| \sum_{i=0}^{t-1} k_i 2^i - k_t 2^t \right|.$$

Emlékeztetünk az alábbi jelölésekre:

$$k = \sum_{i=0}^{\infty} k_i 2^i, \quad \text{és} \quad k^{(m)} := \sum_{i=m}^{\infty} k_i 2^i,$$

ahol $k_i \in \{0, 1\}$ és $m \in \mathbb{N}$.

Ha $t = 0$, akkor $A \geq 4$, $|D_k(x)| = k_0$ és a 1.6 Lemma alapján kapjuk, hogy

$$\sum_{k=2^A}^{2^{A+1}-1} \frac{|D_k(x)|}{k} = \sum_{k=2^A}^{2^{A+1}-1} \frac{k_0}{k_0 + k^{(1)}} \leq \sum_{j=2^{A-1}}^{2^A-1} \frac{1}{1+2j} \leq \frac{0.7254}{2} = 0.3627 \cdot 2^t.$$

A $t = 1$ esetben kapjuk, hogy $D_k(x) = |k_0 - 2k_1|$ és

$$\frac{|D_k(x)|}{k} \leq \frac{|k_0 - 2k_1|}{1 + k^{(2)}}.$$

Ekkor

$$\begin{aligned} \sum_{k=2^A}^{2^{A+1}-1} \frac{|D_k(x)|}{k} &\leq \sum_{k_0, k_1 \in \{0,1\}} \sum_{j=2^{A-2}}^{2^{A-1}-1} \frac{|k_0 - 2k_1|}{1 + 4j} \\ &\leq \frac{0.7254}{4} \cdot \sum_{k_0, k_1 \in \{0,1\}} |k_0 - 2k_1| = 0.7254 = 0.3627 \cdot 2^t \end{aligned}$$

Ebben az esetben $A \geq 5$.

A $t = 2$ esetén adódik, hogy $D_k(x) = |k_0 - 2k_1 - 4k_2|$ és

$$\frac{|D_k(x)|}{k} \leq \frac{|k_0 - 2k_1 - 4k_2|}{1 + k^{(3)}}.$$

Ekkor

$$\begin{aligned} \sum_{k=2^A}^{2^{A+1}-1} \frac{|D_k(x)|}{k} &\leq \sum_{k_0, k_1, k_2 \in \{0,1\}} \sum_{j=2^{A-3}}^{2^{A-2}-1} \frac{|k_0 - 2k_1 - 4k_2|}{1 + 8j} \\ &\leq \frac{0.7254}{8} \sum_{k_0, k_1, k_2 \in \{0,1\}} |k_0 - 2k_1 - 4k_2| \\ &= 2 \cdot 0.7254 = 0.3627 \cdot 2^t. \end{aligned}$$

Ebben az esetben $A \geq 6$. □

AZ 1.5. TÉTEL BIZONYÍTÁSA. Először legyen $n \leq 2^t$ és $x \in I_t \setminus I_{t+1}$. Ekkor azt kapjuk, hogy

$$R_n(x) = \frac{1}{\log n} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{D_k(x)}{k} = \frac{n-1}{\log n}.$$

Továbbiakban tegyük fel, hogy $n \geq 2^t$. Feltehető, hogy az $x \in I$ legalább kettő koordinátája különbözik a nullától. Legyen $s \geq 1$ és az $x \in I_t \setminus I_{t+1}$ felírható az alábbi alakban

$$(5) \quad x_i := \begin{cases} 1, & \text{ha } i \in \{t, t+s\}, \\ 0, & \text{ha } i \in \{0, 1, \dots, t-1\} \cup \{t+1, t+2, \dots, t+s-1\}. \end{cases}$$

Továbbá legyen $k = a + k_t 2^t + 2^{t+1} b$, ahol $k_i \in \{0, 1\}$ ($i = 0, 1, 2, \dots$),

$$a = k_{(t-1)} := \sum_{i=0}^{t-1} k_i 2^i, \quad \text{és} \quad 2^{t+1} b = k^{(t+1)} := \sum_{i=t+1}^{\infty} k_i 2^i.$$

Abban az esetben, ha $x = 0$, az állítás nyilván teljesül. Ha nincs ilyen s szám, akkor $x = 2^{-t-1}$, amelyre $s = \infty$ esetként fogunk hivatkozni és a későbbiekben vizsgáljuk. Továbbá, ha $x = 0$, akkor igaz az állítás.

Vezessük be az alábbi jelöléseket: $|n| = A$,

$$L_a(x) = L_{a,a}(x) := \sum_{k=2^a}^{2^{a+1}-1} \frac{D_k(x)}{k} \quad \text{és} \quad L_{a,b}(x) := \sum_{k=2^a}^{2^{b+1}-1} \frac{D_k(x)}{k}.$$

A következő becslések egyszerű számítással adódnak:

$$(6) \quad L_{0,t}(x) = \sum_{k=1}^{2^t-1} \frac{D_k(x)}{k} = 2^t - 1,$$

$$(7) \quad L_t(x) = \sum_{k=2^t}^{2^{t+1}-1} \frac{D_k(x)}{k} = \sum_{k=1}^{2^t-1} \frac{D_{2^t+k}(x)}{2^t+k} \\ = \sum_{k=0}^{2^t-1} \frac{2^t-k}{2^t+k} = \sum_{j=2^t}^{2^{t+1}-1} \frac{2^{t+1}-j}{j} \geq 2^{t+1} \log 2 - 2^t.$$

Tekintsük $j = 1, 2, 3, \dots$ esetén $L_{t+j}(x)$ függvényt. Ekkor

$$L_{t+j}(x) = \sum_{k=2^{t+j}}^{2^{t+j+1}-1} \frac{D_k(x)}{k} = \sum_{b=2^{j-1}}^{2^j-1} \sum_{k_t=0}^1 \sum_{a=0}^{2^t-1} \frac{\omega_{2^{t+1}b}(x) \left[k_t 2^t - \sum_{i=0}^{t-1} k_i 2^i \right]}{a + k_t 2^t + b \cdot 2^{t+1}}.$$

Definiáljuk az $L_{t+j}^1(x)$ függvényt alábbi összegként:

$$L_{t+j}^1(x) := \sum_{b=2^{j-1}}^{2^j-1} \sum_{k_t=0}^1 \sum_{a=0}^{2^t-1} \frac{\omega_b(2^{t+1}x) (k_t 2^t - a)}{k_t 2^t + b \cdot 2^{t+1}},$$

ahol $j \in \mathbb{P}$.

A következő lépésben egy felső becslést adunk az $|L_{t+j}(x) - L_{t+j}^1(x)|$ értékére:

$$|L_{t+j}(x) - L_{t+j}^1(x)| \leq \sum_{b=2^{j-1}}^{2^j-1} \sum_{a=0}^{2^t-1} \left(\frac{a 2^t - a^2}{(2^t + b \cdot 2^{t+1})^2} + \frac{a^2}{(b \cdot 2^{t+1})^2} \right) \\ = \sum_{b=2^{j-1}}^{2^j-1} \left(\frac{2^t(2^t-1)2^t}{2(2^t + b \cdot 2^{t+1})^2} - \frac{2^t(2^t-1)(2^{t+1}-1)}{6(2^t + b \cdot 2^{t+1})^2} + \frac{2^t(2^t-1)(2^{t+1}-1)}{6(b \cdot 2^{t+1})^2} \right)$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{b=2^{j-1}}^{2^j-1} \left(\frac{2^{3t}}{2 \cdot 2^{2t}(1+2b)^2} - \frac{2 \cdot 2^{3t}}{6 \cdot 2^{2t}(1+2b)^2} + \frac{2 \cdot 2^{3t}}{24b^2 \cdot 2^{2t}} \right) + \alpha(2^t) \\
&= 2^t \sum_{b=2^{j-1}}^{2^j-1} \left(\frac{1}{2 \cdot (1+2b)^2} - \frac{1}{3 \cdot (1+2b)^2} + \frac{1}{12b^2} \right) + \alpha(2^t) \\
&\leq \frac{2^t}{8} \sum_{b=2^{j-1}}^{2^j-1} \frac{1}{b^2} + \alpha(2^t),
\end{aligned}$$

ahol $\alpha(2^t)$:

$$\begin{aligned}
\alpha(2^t) &= \sum_{b=2^{j-1}}^{2^j-1} \left(\frac{-2^{2t}}{2 \cdot 2^{2t}(1+2b)^2} + \frac{3 \cdot 2^{2t} - 2^t}{6 \cdot 2^{2t}(1+2b)^2} - \frac{3 \cdot 2^{2t} - 2^t}{24 \cdot 2^{2t}b^2} \right) \\
&= -\frac{1}{8} \sum_{b=2^{j-1}}^{2^j-1} \frac{1}{b^2} + \frac{1}{24 \cdot 2^t} \sum_{b=2^{j-1}}^{2^j-1} \left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{b^2 + b + \frac{1}{4}} \right).
\end{aligned}$$

Tehát

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{\infty} |L_{t+j}(x) - L_{t+j}^1(x)| \\
(8) \quad &\leq \frac{2^t - 1}{8} \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{b=2^{j-1}}^{2^j-1} \frac{1}{b^2} + \frac{1}{24} \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{b=2^{j-1}}^{2^j-1} \frac{b + \frac{1}{4}}{b^2(b^2 + b + \frac{1}{4})} \\
&\leq \frac{2^t - 1}{8} \sum_{b=1}^{\infty} \frac{1}{b^2} + \frac{1}{24} \sum_{b=1}^{\infty} \frac{1}{b^3} = \frac{2^t - 1}{6} \cdot \frac{\pi^2}{6} + \frac{\zeta(3)}{24} \\
&< 0.206 \cdot 2^t - 0.155,
\end{aligned}$$

ahol ζ jelöli a Riemann-féle zéta-függvényt.

A későbbiekben szükségünk lesz az alábbi becslésre

$$\begin{aligned}
 \sum_{j=J+1}^{\infty} |L_{t+j}(x) - L_{t+j}^1(x)| &\leq \frac{2^t - 1}{8} \sum_{j=J+1}^{\infty} \sum_{b=2^{j-1}}^{2^j-1} \frac{1}{b^2} + \frac{1}{24} \sum_{j=J+1}^{\infty} \sum_{b=2^{j-1}}^{2^j-1} \frac{1}{b^3} \\
 (9) \qquad \qquad \qquad &= \frac{2^t - 1}{8} \sum_{b=2^J}^{\infty} \frac{1}{b^2} + \frac{1}{24} \sum_{b=2^J}^{\infty} \frac{1}{b^3} \\
 &\leq \frac{2^t - 1}{8} \cdot \frac{1.645}{2^J} + \frac{1}{24} \cdot \frac{1.202}{2^J}.
 \end{aligned}$$

A bizonyítás során felhasználtuk, hogy minden $J \geq 0$ esetén teljesülnek az alábbi egyenlőtlenségek:

$$2^J \sum_{b=2^J}^{\infty} \frac{1}{b^2} \leq 1.645 \quad \text{és} \quad 2^J \sum_{b=2^J}^{\infty} \frac{1}{b^3} \leq 1.202.$$

Térjünk át az $L_{t+j}^1(x)$ kifejezés becslésére, ahol $j = 1, 2, \dots$ és $x \in I_t \setminus I_{t+1}$:

$$\begin{aligned}
 L_{t+j}^1(x) &= \sum_{b=2^{j-1}}^{2^j-1} \sum_{k_t=0}^1 \sum_{a=0}^{2^t-1} \frac{\omega_b(2^{t+1}x) \cdot (k_t 2^t - a)}{k_t 2^t + 2^{t+1}b} \\
 &= \sum_{b=2^{j-1}}^{2^j-1} \sum_{k_t=0}^1 \left[2^t \cdot \frac{\omega_b(2^{t+1}x) \cdot k_t 2^t}{k_t 2^t + 2^{t+1}b} - \frac{2^t(2^t - 1)}{2} \cdot \frac{\omega_b(2^{t+1}x)}{k_t 2^t + 2^{t+1}b} \right] \\
 &= 2^t \cdot \sum_{b=2^{j-1}}^{2^j-1} \sum_{k_t=0}^1 \frac{\omega_b(2^{t+1}x)}{k_t + 2b} \cdot \left(k_t - \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{2} \sum_{b=2^{j-1}}^{2^j-1} \sum_{k_t=0}^1 \frac{\omega_b(2^{t+1}x)}{k_t + 2b} \\
 &= \frac{2^t}{2} \sum_{b=2^{j-1}}^{2^j-1} \omega_b(2^{t+1}x) \left(\frac{1}{1+2b} - \frac{1}{2b} \right) \\
 &\quad + \frac{1}{2} \sum_{b=2^{j-1}}^{2^j-1} \omega_b(2^{t+1}x) \left(\frac{1}{1+2b} + \frac{1}{2b} \right) := L_{t+j}^{1,1}(x) + L_{t+j}^{1,2}(x).
 \end{aligned}$$

Az $|L_{t+j}^{1,1}(x)|$ becslése az alábbi:

$$|L_{t+j}^{1,1}(x)| \leq \frac{2^t}{2} \sum_{b=2^{j-1}}^{2^j-1} \frac{1}{2b(2b+1)},$$

amelyből következik, hogy

$$(10) \quad \sum_{j=1}^{\infty} |L_{t+j}^{1,1}(x)| \leq \frac{2^t}{2} \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{b=2^{j-1}}^{2^j-1} \frac{1}{2b(2b+1)} \leq \frac{2^t}{2} \sum_{b=1}^{\infty} \frac{1}{2b(2b+1)}$$

$$= 2^t \frac{1 - \log(2)}{2} \leq 0.154 \cdot 2^t.$$

Továbbá

$$(11) \quad \sum_{j=J+1}^{\infty} |L_{t+j}^{1,1}(x)| \leq \frac{2^t}{2} \sum_{b=J+1}^{\infty} \frac{1}{2b(2b+1)} \leq 0.154 \cdot \frac{2^t}{2^J},$$

ahol a J értékét a későbbiekben fogjuk meghatározni.

Vizsgáljuk meg az $L_{t+j}^{1,2}(x)$ kifejezést. Legyen $\beta_b = \frac{1}{1+2b} + \frac{1}{2b}$. Az Abel-transzformáció alkalmazásával kapjuk, hogy

$$(12) \quad \sum_{j=1}^J L_{t+j}^{1,2}(x) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^J \sum_{b=2^{j-1}}^{2^j-1} \beta_b \omega_b(2^{t+1}x)$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{b=1}^{2^J-1} (\beta_b - \beta_{b+1}) \sum_{i=1}^b \omega_i(2^{t+1}x) + \frac{1}{2} \beta_{2^J} (D_{2^J}(2^{t+1}x) - 1).$$

Feltehetjük, hogy $J \leq A - t - 1$. Ha $J \leq s - 1$, akkor tetszőleges $b < 2^J$ esetén $\omega_b(2^{t+1}x) = 1$ teljesül. (emlékeztettünk arra, hogy $\{i : x_i = 1, i \leq t + s\} = \{t, t + s\}$ és ekkor $2^{t+1}x \in I_{s-1} \setminus I_s$).

Ha $A \leq t + s$, akkor ez a helyzet minden $J \leq A - t - 1$ esetén fennáll.

Ha $A \geq t + s$, akkor $\sum_{k=1}^{2^A-1} \frac{D_k}{k}$ összeg miatt megjegyezzük, hogy a $L_{t+j}^{1,2}(x)$ kifejezésben $j = 1, 2, \dots, A - t - 1$. Ekkor

$$(13) \quad \sum_{j=1}^{A-t-1} L_{t+j}^{1,2}(x) = \frac{1}{2} \sum_{b=1}^{2^{s-1}-1} (\beta_b - \beta_{b+1}) b$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{b=2^{s-1}}^{2^{A-t}-1} (\beta_b - \beta_{b+1}) (D_{b+1}(2^{t+1}x) - 1)$$

$$+ \frac{1}{2} \beta_{2^{A-t}} (D_{2^{A-t}}(2^{t+1}x) - 1)$$

$$\begin{aligned}
&\geq \frac{1}{2} \sum_{b=1}^{2^{s-1}-1} (\beta_b - \beta_{b+1})b - \frac{1}{2} \cdot 2^{s-1} \sum_{b=2^{s-1}}^{2^{A-t}-1} (\beta_b - \beta_{b+1}) - \frac{1}{2} \beta_{2^{A-t}} \\
&\geq \frac{1}{2} \sum_{b=1}^{2^{s-1}-1} (\beta_b - \beta_{b+1})b - 2^{s-2} \left(\frac{1}{1+2^s} + \frac{1}{2^s} \right) \\
&\quad - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2^{A-t+1}} + \frac{1}{2^{A-t+1}} \right) \\
&\geq \frac{1}{2} \sum_{b=1}^{2^{s-1}-1} (\beta_b - \beta_{b+1})b - \frac{1}{2} - \frac{2^t}{2^{A+1}}.
\end{aligned}$$

Ha tetszőleges s esetén felhasználjuk azt a tényt, hogy

$$(14) \quad \frac{1}{2} \sum_{b=1}^{2^{s-1}-1} b(\beta_b - \beta_{b+1}) \geq 0,$$

teljesül, akkor az alábbi becslést kapjuk

$$(15) \quad \sum_{j=1}^{A-t-1} L_{t+j}^{1,2}(x) = -\frac{1}{2} - \frac{2^t}{2^{A+1}} \geq -1.$$

Adjunk egy alsó becslést $\sum_{k=1}^{2^A-1} \frac{D_k}{k}$ értékére abban az esetben, ha $A \geq t$. A (6), (7), (8), (10), (15) becslések alapján kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
(16) \quad &\sum_{k=1}^{2^A-1} \frac{D_k}{k} = L_{0,t} + L_t + \sum_{j=1}^{A-t-1} L_{t+j} \\
&\geq 2^t - 1 + 2^{t+1} \log 2 - 2^t - \sum_{j=1}^{\infty} |L_{t+j} - L_{t+j}^1| + \sum_{j=1}^{A-t-1} (L_{t+j}^{1,1} + L_{t+j}^{1,2}) \\
&\geq 2^{t+1} \log(2) - 1 - 0.206 \cdot 2^t + 0.155 - 0.154 \cdot 2^t - 1 \\
&= 1.026 \cdot 2^t - 1.845.
\end{aligned}$$

Ha $A \geq 6$ (azaz $n \geq 64$), akkor a 1.6 Lemma felhasználásával a következő egyenlőtlenséget kapjuk

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{D_k(x)}{k} &= \sum_{k=1}^{2^A-1} \frac{D_k(x)}{k} + \sum_{k=2^A}^{n-1} \frac{D_k(x)}{k} \geq \sum_{k=1}^{2^A-1} \frac{D_k(x)}{k} - 2^t \sum_{k=2^A}^{2^{A+1}-1} \frac{1}{k} \\ &\geq 1.026 \cdot 2^t - 1.845 - 0.7254 \cdot 2^t \\ &\geq 0.3006 \cdot 2^t - 1.845. \end{aligned}$$

Legyen $t \geq 3$. Ekkor az előző egyenlőtlenség az alábbi alakban írható fel:

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{D_k(x)}{k} \geq 2.4 \cdot 2^{t-3} - 1.845 \geq 0.5 \cdot 2^{t-3} \geq \frac{2^t}{16}.$$

Összefoglalva, ha $A \geq 6$, $t \geq 3$ és $t \leq A$, akkor azt kapjuk, hogy

$$R_n(x) = \frac{1}{\log n} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{D_k(x)}{k} \geq \frac{2^t}{16 \cdot \log n}.$$

Az $A \leq 6$, $n \in \{1, \dots, 127\}$ és $t \leq A$ esetet a MATLAB komputer-algebrai programcsomag segítségével vizsgáltuk. A vizsgálat során felhasznált kódokat a Függelék 3.1 részben találhatja meg az Olvasó.

A bizonyításból már csak a $t < 3$ és $A \geq 7$ eset maradt hátra. Tegyük fel, hogy $s \leq 4$ és legyen $J = 7$. Ekkor alkalmazzuk az alábbi egyenlőtlenséget, amelyet a fent említett komputeralgebrai program segítségével állapítottuk meg

$$\sum_{k=1}^{2^7-1} \frac{D_k(x)}{k} \geq 0.58 \cdot 2^t,$$

ahol $t \in \{0, 1, 2\}$ és $x \in [0, 1]$. Ezt az azonosságot a Függelékben 3.2 részében szereplő két ábrán szemléltetjük.

A (9) és (11) azonosságok alapján kapjuk a következő becslést:

$$\begin{aligned}
\sum_{j=J-t-1}^{A-t-1} L_{t+j}^{1,2}(x) &= \frac{1}{2} \sum_{j=J-t-1}^{A-t-1} \sum_{b=2^{j-1}}^{2^j-1} \beta_b \omega_b(2^{t+1}x) = \frac{1}{2} \sum_{b=2^{J-t-2}}^{2^{A-t-1}-1} \beta_b \omega_b(2^{t+1}x) \\
&= \frac{1}{2} \sum_{b=2^{J-t-2}}^{2^{A-t-1}-1} (\beta_b - \beta_{b+1}) \sum_{i=2^{J-t-2}}^b \omega_i(2^{t+1}x) \\
&\quad + \frac{1}{2} \beta_{2^{A-t-1}} (D_{2^{A-t-1}}(2^{t+1}x) - D_{2^{J-t-1}}(2^{t+1}x)).
\end{aligned}$$

Mivel $A - t - 1 \geq J - t - 1 = 6 - t \geq 4$ és $2^{t+1}x \in I_{s-1} \setminus I_s$, ekkor minden k természetes szám esetén $|D_k(2^{t+1}x)| \leq 2^{s-1}$ teljesül és továbbá fennáll az alábbi becslés

$$\left| \sum_{i=2^{J-t-1}}^b \omega_i(2^{t+1}x) \right| \leq 2 \cdot 2^{s-1} = 2^s.$$

Ezenkívül $D_{2^{A-t-1}}(2^{t+1}x), D_{2^{J-t-1}}(2^{t+1}x) = 0$ is teljesül. Így,

$$\begin{aligned}
(17) \quad \sum_{j=J-t-1}^{A-t-1} L_{t+j}^{1,2}(x) &\geq -2^{s-1} \sum_{b=2^{J-t-1}}^{2^{A-t-1}-1} (\beta_b - \beta_{b+1}) \\
&= -2^{s-1} (\beta_{2^{J-t-1}} - \beta_{2^{A-t-1}}) \\
&\geq -2^{s-1} \left(\frac{1}{1 + 2^{J-t}} + \frac{1}{2^{J-t}} \right) \geq -\frac{2^{s+t}}{2^J}.
\end{aligned}$$

A 1.7 Lemmából $J = 7, A \geq 7, t \leq 2, s \leq 4$ választással kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n-1} \frac{D_k}{k} &= \sum_{k=1}^{2^J-1} \frac{D_k}{k} + \sum_{j=J}^{A-1} \sum_{k=2^j}^{2^{j+1}-1} \frac{D_k}{k} + \sum_{k=2^A}^{n-1} \frac{D_k}{k} \\
&= \sum_{k=1}^{2^J-1} \frac{D_k}{k} + \sum_{j=J-t}^{A-t-1} L_{t+j} + \sum_{k=2^A}^{n-1} \frac{D_k}{k} \\
&\geq \sum_{k=1}^{2^7-1} \frac{D_k}{k} - \sum_{j=J-t}^{\infty} |L_{t+j} - L_{t+j}^1| - \sum_{j=J-t}^{\infty} |L_{t+j}^{1,1}| + \sum_{j=J-t}^{A-t-1} L_{t+j}^{1,2} - \sum_{k=2^A}^{2^{A+1}-1} \frac{|D_k|}{k}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\geq 0.58 \cdot 2^t - \frac{2^t - 1}{8} \cdot \frac{1.645}{2^{J-t-1}} - \frac{1}{24} \cdot \frac{1.202}{2^{J-t-1}} \\ &\quad - 0.154 \cdot \frac{2^t}{2^{J-t-1}} - \frac{2^{s+t}}{2^J} - 0.3627 \cdot 2^t. \end{aligned}$$

Tehát $J = 7$, $s \in \{1, 2, 3, 4\}$ és $t \in \{0, 1, 2\}$ esetén, az alábbi becslést kapjuk

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{D_k}{k}(x) - \frac{1}{16} 2^t \geq 0.$$

Az maradt hátra, hogy a fenti 12 esetben is kiszámítsuk a magfüggvény értékét. A kiszámításhoz szükséges komputeralgebrai kódot a Függelék 3.1 része tartalmazza.

A következő lépésben $A \geq 7$, $s \geq 5$ és $t \in \{0, 1, 2\}$ esetet vizsgáljuk.

Mivel $\beta_b = \frac{1}{1+2b} + \frac{1}{b}$, így azt kapjuk, hogy

$$\sum_{b=1}^{2^{s-1}-1} b(\beta_b - \beta_{b+1}) \geq 2.1039.$$

Ekkor a $\sum |L_{t+j} - L_{t+j}^1|$ kifejezésre a (8) becslést, míg a $\sum L_{t+j}^{1,1}$ kifejezés esetén (10) becslést használjuk. Ezenkívül az $A \geq t + s$ esetben a (13) becslést is alkalmazzuk. Továbbá felhasználjuk a 1.7 Lemmát a $\sum 1/k$ becslése érdekében.

A fenti megjegyzéseket figyelembe véve azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{D_k}{k} &= \sum_{k=1}^{2^A-1} \frac{D_k}{k} + \sum_{k=2^A}^{n-1} \frac{D_k}{k} = L_{0,t} + L_t + \sum_{j=1}^{A-t-1} L_{t+j} + \sum_{k=2^A}^{n-1} \frac{D_k}{k} \\ &\geq 2^t - 1 + 2^{t+1} \log 2 - 2^t - \sum_{j=1}^{\infty} |L_{t+j} - L_{t+j}^1| \\ &\quad + \sum_{j=1}^{A-t-1} L_{t+j}^{1,1} + \sum_{j=1}^{A-t-1} L_{t+j}^{1,2} - 2^t \sum_{k=2^A}^{n-1} \frac{1}{k} \\ &\geq 2^{t+1} \log(2) - 1 - (0.206 \cdot 2^t - 0.155) \\ &\quad - 0.154 \cdot 2^t + (2.1039 - 1) - 0.367 \cdot 2^t \\ &\geq 0.659 \cdot 2^t + 0.258 \geq \frac{1}{16} 2^t. \end{aligned}$$

Az $A \leq t + s - 1$ esetben a fenti számítást hajtjuk végre, ahol a (12) becslést alkalmazzuk (13) helyett. A $J = A - t - 1$ összefüggés alapján ebben a szituációban az alábbi becslést kapjuk:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{A-t-1} L_{t+j}^{1,2}(x) &= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{A-t-1} \sum_{b=2^{j-1}}^{2^j-1} \beta_b \omega_b(2^{t+1}x) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{A-t-1} \sum_{b=2^{j-1}}^{2^j-1} \beta_b \\ &= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{A-t-1} 2^{j-1} = 2^{A-t-1} - 1 \geq 2^{7-2-1} - 1 = 15. \end{aligned}$$

Ekkor az $A \geq t + s$ esethez hasonlóan ismételtlen azt kapjuk, hogy

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{D_k}{k} \geq \frac{2^t}{16} \text{ teljesül minden } s \geq 5, t \leq 2 \text{ és } A \geq 7 \text{ esetén.}$$

Végül az $s = \infty$ eset maradt, azaz, amikor $x = \frac{1}{2^{t+1}}$. Ezt az esetet az $A \leq t + s$ esethez hasonlóan kell vizsgálni, amelyet az olvasóra bízunk. \square

Az 1.6 tétel bizonyítása A bizonyítás ismertetése előtt szükségünk lesz az alábbi lemmára és annak következményére.

1.8. LEMMA (Young-egyenlőtlenség, [35]). *Legyen $n \in \mathbb{P}$, akkor*

$$\frac{1}{2(n+1)} < \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \log(n) - \gamma < \frac{1}{2n},$$

$$\text{ahol } \gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \log(n) \right).$$

1.3. KÖVETKEZMÉNY. *Legyen $n, N \in \mathbb{N}$ és $N > n$. Ekkor fennállnak az alábbi egyenlőtlenségek:*

$$0 < \sum_{k=n}^{N-1} \frac{1}{k} - \log\left(\frac{N}{n}\right) < \frac{1}{n}.$$

A 1.6. TÉTEL BIZONYÍTÁSA.

$$\log(A)R_A^\kappa(x) = \sum_{j=1}^{2^n+2^{n-1}-1} \frac{D_j^\kappa(x)}{j} = \sum_{j=1}^{2^n-1} \frac{D_j^\kappa(x)}{j} + \sum_{j=2^n}^{2^n+2^{n-1}-1} \frac{D_j^\kappa(x)}{j}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{l=2^i}^{2^{i+1}-1} \frac{D_l^\kappa(x)}{l} + \sum_{j=2^n}^{2^n+2^{n-1}-1} \frac{D_j^\kappa(x)}{j} \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{t=0}^{2^i-1} \frac{D_{2^i+t}^\kappa(x)}{2^i+t} + \sum_{t=0}^{2^{n-1}-1} \frac{D_{2^n+t}^\kappa(x)}{2^n+t} = (1) + (2).
\end{aligned}$$

A (2) becsléséhez megjegyezzük, hogy $r_n(x) = -1$, $D_{2^n}(x) = 0$

$$\begin{aligned}
\tau_n(x) &= (0, 0, \dots, 0, 1, 1, 1, 0, \dots) \\
&= (y_0, y_1, \dots, y_{n-3}, y_{n-2}, y_{n-1}, y_n, y_{n+1}, \dots).
\end{aligned}$$

Továbbá $l = 0, 1, 2, \dots, 2^{n-2} - 1$. esetén

$$D_l(\tau_n(x)) = l.$$

Legyen $l \in \{2^{n-2}, \dots, 2^{n-1} - 1\}$. Ekkor l felírható $2^{n-2} + b$ alakban, ahol $b \in \{0, 1, \dots, 2^{n-2} - 1\}$. Ez alapján kapjuk, hogy

$$D_l(\tau_n) = D_{2^{n-2}+b}(\tau_n) = D_{2^{n-2}}(\tau_n) + r_{n-2}(\tau_n(x))D_b(\tau_n) = 2^{n-2} + (-1) \cdot b.$$

Ekkor

$$\begin{aligned}
(2) &= \sum_{t=0}^{2^{n-1}-1} \frac{D_{2^n+t}^\kappa(x)}{2^n+t} = \sum_{t=0}^{2^{n-1}-1} \frac{D_{2^n}(x) + r_n(x)D_t(\tau_n(x))}{2^n+t} \\
&= \sum_{t=0}^{2^{n-1}-1} \frac{-D_t(\tau_n(x))}{2^n+t} \\
&= \sum_{t=0}^{2^{n-2}-1} \frac{-D_t(\tau_n(x))}{2^n+t} + \sum_{t=2^{n-2}}^{2^{n-1}-1} \frac{-D_t(\tau_n(x))}{2^n+t} \\
&= \sum_{t=0}^{2^{n-2}-1} \frac{-t}{2^n+t} - \sum_{b=0}^{2^{n-2}-1} \frac{2^{n-2}-b}{2^n+2^{n-2}+b} \\
&= \sum_{t=2^n}^{2^n+2^{n-2}-1} \frac{2^n-t}{t} - \sum_{t=5 \cdot 2^{n-2}}^{6 \cdot 2^{n-2}-1} \frac{2^{n-2}+5 \cdot 2^{n-2}-t}{t} \\
&= 2^n \sum_{t=4 \cdot 2^{n-2}}^{5 \cdot 2^{n-2}-1} \frac{1}{t} - \sum_{t=4 \cdot 2^{n-2}}^{5 \cdot 2^{n-2}-1} 1 - 6 \cdot 2^{n-2} \sum_{t=5 \cdot 2^{n-2}}^{6 \cdot 2^{n-2}-1} \frac{1}{t} + \sum_{t=5 \cdot 2^{n-2}}^{6 \cdot 2^{n-2}-1} 1
\end{aligned}$$

$$< 2^n \left(\log \left(\frac{5}{4} \right) + \frac{1}{4 \cdot 2^{n-2}} - \frac{6}{4} \cdot \log \left(\frac{6}{5} \right) \right).$$

A következő lépésben az (1)-re adunk felső becslést. Az 1.3. Lemma alapján kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{t=0}^{2^i-1} \frac{D_{2^i+t}^\kappa(x)}{2^i+t} &= \frac{D_1^\kappa(x)}{1} + \frac{D_2^\kappa(x)}{2} + \frac{D_3^\kappa(x)}{3} \\ &+ \sum_{i=2}^{n-1} \sum_{t=0}^{2^i-1} \frac{D_{2^i}(x) + r_i(x)D_t(\tau_i(x))}{2^i+t}. \end{aligned}$$

Ha $i = 1, 2, \dots, n$, akkor $D_{2^i}^\kappa(x) = 0$, valamint $2 \leq i < n$ esetén $r_i(x) = 1$ teljesül. Továbbá, $r_0(x) = \kappa_1(x) = \omega_1(x)$ és $\kappa_2(x) = \omega_2(x) = r_1(x)$.

Térjünk át (1) becslésére! Az eddigi észrevételek alapján kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{t=0}^{2^i-1} \frac{D_{2^i+t}^\kappa(x)}{2^i+t} &= 1 + 0 - \frac{1}{3} + \sum_{i=2}^{n-1} \sum_{t=0}^{2^i-1} \frac{D_t(\tau_i(x))}{2^i+t} \\ &= \frac{2}{3} + \sum_{i=2}^{n-1} \left(\sum_{t=0}^{2^{i-2}-1} \frac{D_t(\tau_i(x))}{2^i+t} + \sum_{t=2^{i-2}}^{2^i-1} \frac{D_t(\tau_i(x))}{2^i+t} \right. \\ &\quad \left. + \sum_{t=2^{i-1}}^{2^{i-1}+2^{i-2}-1} \frac{D_t(\tau_i(x))}{2^i+t} + \sum_{t=2^{i-1}+2^{i-2}-1}^{2^i-1} \frac{D_t(\tau_i(x))}{2^i+t} \right) \\ &=: \frac{2}{3} + \sum_{i=2}^{n-1} ((1.1) + (1.2) + (1.3) + (1.4)). \end{aligned}$$

A folytatás előtt emlékeztetünk arra, hogy

$$\tau_i(x) = \frac{1}{2^{i-1}} + \frac{1}{2^i} + \frac{1}{2^{n+1}} =: y_{i-2}^i e_{i-2} + y_{i-1}^i e_{i-1} + y_n^i e_n,$$

ahol $e_k := 1/2^{k+1}$. Azaz, vegyük észre, hogy $y^i = \tau_i(x)$ n -nél nem nagyobb indexű koordinátái közül csak az y_{i-2} , y_{i-1} és y_n különbözik nullától.

Ezután vizsgáljuk az (1.1) kifejezést.

$$\begin{aligned}
 (1.1) &= \sum_{t=0}^{2^{i-2}-1} \frac{D_t(\tau_i(x))}{2^i + t} = \sum_{t=0}^{2^{i-2}-1} \frac{t}{2^i + t} = \sum_{l=2^i}^{2^i+2^{i-2}-1} \frac{l-2^i}{l} \\
 &= \sum_{l=4 \cdot 2^{i-2}}^{5 \cdot 2^{i-2}-1} 1 - 2^i \sum_{l=4 \cdot 2^{i-2}}^{5 \cdot 2^{i-2}-1} \frac{1}{l} < 2^i \left(\frac{1}{4} - \log \left(\frac{5}{4} \right) \right).
 \end{aligned}$$

Továbbá (1.2) esetén azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
 (1.2) &= \sum_{t=2^{i-2}}^{2^{i-1}-1} \frac{D_t(\tau_i(x))}{2^i + t} = \sum_{l=0}^{2^{i-2}-1} \frac{D_{2^{i-2}+l}(\tau_i(x))}{2^i + 2^{i-2} + l} \\
 &= \sum_{l=0}^{2^{i-2}-1} \frac{D_{2^{i-2}}(\tau_i(x)) + r_{i-2}(\tau_i(x))D_l(\tau_i(x))}{2^i + 2^{i-2} + l} \\
 &= \sum_{l=0}^{2^{i-2}-1} \frac{2^{i-2} - l}{2^i + 2^{i-2} + l} = \sum_{t=5 \cdot 2^{i-2}}^{6 \cdot 2^{i-2}-1} \frac{6 \cdot 2^{i-2} - t}{t} \\
 &= 6 \cdot 2^{i-2} \sum_{t=5 \cdot 2^{i-2}}^{6 \cdot 2^{i-2}-1} \frac{1}{t} - \sum_{t=5 \cdot 2^{i-2}}^{6 \cdot 2^{i-2}-1} 1 \\
 &< 2^i \left(\frac{6}{4} \log \left(\frac{6}{5} \right) + \frac{6}{4 \cdot 5 \cdot 2^{i-2}} - \frac{1}{4} \right).
 \end{aligned}$$

Hasonlóan becsülhetjük meg az (1.3) kifejezést az alábbi módon:

$$\begin{aligned}
 (1.3) &= \sum_{t=2^{i-1}}^{2^{i-1}+2^{i-2}-1} \frac{D_t(\tau_i(x))}{2^i + t} = \sum_{l=0}^{2^{i-2}-1} \frac{D_{2^{i-1}+l}(\tau_i(x))}{2^i + 2^{i-1} + l} \\
 &= \sum_{l=0}^{2^{i-2}-1} \frac{D_{2^{i-1}}(\tau_i(x)) + r_{i-1}(\tau_i(x))D_l(\tau_i(x))}{2^i + 2^{i-1} + l} = \sum_{l=0}^{2^{i-2}-1} \frac{-l}{6 \cdot 2^{i-2} + l} \\
 &= \sum_{z=6 \cdot 2^{i-2}}^{7 \cdot 2^{i-2}-1} \frac{6 \cdot 2^{i-2} - z}{z} < 2^i \cdot \left(\frac{6}{4} \cdot \log \left(\frac{7}{6} \right) + \frac{6}{6 \cdot 4 \cdot 2^{i-2}} - \frac{1}{4} \right).
 \end{aligned}$$

Végül, az (1.4) tag becslése:

$$\begin{aligned}
(1.4) &= \sum_{t=2^{i-1}+2^{i-2}}^{2^i-1} \frac{D_t(\tau_i(x))}{2^i+t} = \sum_{l=2^{i-2}}^{2^{i-1}-1} \frac{D_{2^{i-1}+l}(\tau_i(x))}{2^i+2^{i-1}+l} \\
&= \sum_{l=2^{i-2}}^{2^{i-1}-1} \frac{D_{2^{i-1}}(\tau_i(x)) + r_{i-1}(\tau_i(x))D_l(\tau_i(x))}{2^i+2^{i-1}+l} \\
&= \sum_{l=2^{i-2}}^{2^{i-1}-1} \frac{-D_l(\tau_i(x))}{2^i+2^{i-1}+l} = \sum_{j=0}^{2^{i-2}-1} \frac{-D_{2^{i-2}+j}(\tau_i(x))}{2^i+2^{i-1}+2^{i-2}+j} \\
&= \sum_{j=0}^{2^{i-2}-1} \frac{-D_{2^{i-2}}(\tau_i(x)) - r_{i-2}(\tau_i(x))D_j(\tau_i(x))}{2^i+2^{i-1}+2^{i-2}+j} \\
&= \sum_{j=0}^{2^{i-2}-1} \frac{-2^{i-2}+j}{7 \cdot 2^{i-2}+j} = \sum_{j=7 \cdot 2^{i-2}}^{8 \cdot 2^{i-2}-1} \frac{-8 \cdot 2^{i-2}+j}{j} \\
&= -8 \cdot 2^{i-2} \sum_{j=7 \cdot 2^{i-2}}^{8 \cdot 2^{i-2}-1} \frac{1}{j} + \sum_{j=7 \cdot 2^{i-2}}^{8 \cdot 2^{i-2}-1} 1 < 2^i \left(-\frac{8}{4} \log\left(\frac{8}{7}\right) + \frac{1}{4} \right).
\end{aligned}$$

Ezeket a becsléseket felhasználva megkapjuk az (1)-hez szükséges becslést:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{n-1} \sum_{t=0}^{2^i-1} \frac{D_{2^i+t}^\kappa(x)}{2^i+t} &= \frac{2}{3} + \sum_{i=2}^{n-1} ((1.1) + (1.2) + (1.3) + (1.4)) \\
&< \frac{2}{3} + \sum_{i=2}^{n-1} 2^i \left(\frac{1}{4} - \log\left(\frac{5}{4}\right) + \frac{6}{4} \log\left(\frac{6}{5}\right) + \frac{6}{4 \cdot 5 \cdot 2^{i-2}} - \frac{1}{4} \right. \\
&\quad \left. + \frac{6}{4} \cdot \log\left(\frac{7}{6}\right) + \frac{6}{6 \cdot 4 \cdot 2^{i-2}} - \frac{1}{4} - \frac{8}{4} \log\left(\frac{8}{7}\right) + \frac{1}{4} \right) \\
&\leq \frac{2}{3} + \sum_{i=2}^{n-1} \left[2^i \left(-\log\left(\frac{5}{4}\right) + \frac{6}{4} \log\left(\frac{6}{5}\right) + \frac{6}{4} \cdot \log\left(\frac{7}{6}\right) - \frac{8}{4} \log\left(\frac{8}{7}\right) \right) + \frac{11}{5} \right] \\
&= 2^n \cdot \left(-\log\left(\frac{5}{4}\right) + \frac{6}{4} \log\left(\frac{6}{5}\right) + \frac{6}{4} \cdot \log\left(\frac{7}{6}\right) - \frac{8}{4} \log\left(\frac{8}{7}\right) \right)
\end{aligned}$$

$$+ \frac{11}{5}(n-2) + \frac{2}{3}.$$

Végezetül, a korábbi becslések alapján kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \log(A)R_A^\kappa(x) &= (1) + (2) = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{t=0}^{2^i-1} \frac{D_{2^{i+t}}^\kappa(x)}{2^i + t} + \sum_{t=0}^{2^{n-1}-1} \frac{D_{2^{n+t}}^\kappa(x)}{2^n + t} \\ &< 2^n \cdot 0.01451 + \frac{11}{5}(n-2) + \frac{2}{3} - 2^n \cdot 0.050337 + 1 \\ &= -0.035827 \cdot 2^n + 2.2 \cdot (n-2) + \frac{5}{3} \leq -0.02 \cdot 2^n, \end{aligned}$$

ha $n \geq 11$. Ezzel igazoltuk a tételt. □

2. FEJEZET

A 2-adikus egészek csoportja

Ebben a fejezetben igazoljuk az egydimenziós Riesz-közepek és a kétdimenziós (C, α) -közepek majdnem mindenütti konvergenciáját.

2.1. Riesz-közepek majdnem mindenütti konvergenciája

Definiáljuk az $x, y \in I = [0, 1)$ -beli elemek 2-adikus (aritmetikai) összegét az alábbi módon :

$$(1) \quad x + y := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r_n}{2^{n+1}},$$

ahol $q_n, r_n \in \{0, 1\}$ ($n \in \mathbb{N}$) elemeket a következőképpen definiáljuk: $q_{-1} := 0$ és $x_n + y_n + q_{n-1} = 2q_n + r_n$ ahol $n \in \mathbb{N}$. A q_n és r_n számok egyértelműen meghatározottak és az értékük 0 vagy 1 lehet.

Legyen $t \in \mathbb{R}$ és

$$\varepsilon(t) := \exp(2\pi i t),$$

ahol $\iota := \sqrt{-1}$. Továbbá $x \in I$ és $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen

$$v_{2^n}(x) := \varepsilon\left(\frac{x_n}{2} + \dots + \frac{x_0}{2^{n+1}}\right) \quad \text{és} \quad v_n := \prod_{j=0}^{\infty} v_{2^j}^{n_j}.$$

A 2-adikus egészek rendszerét a $(v_n, n \in \mathbb{N})$ módon fogjuk jelölni. A rendszer elemeire fennáll az alábbi összefüggés.

2.1. LEMMA ([10]). Legyen $k, n \in \mathbb{N}$, $k < 2^n$. Ekkor

$$v_{2^n - k - 1}(z) = v_{2^n - 1}(z) \bar{v}_k(z).$$

Tekintsük az I halmazon a nem diadikus racionális számokat. A diadikus racionális számok halmaza megszámlálható számosságú, így nullmértékű halmazt alkotnak. Azaz, a $v_n(x + y) = v_n(x)v_n(y)$ azonosság teljesül, ha x, y és $x + y$ nem diadikusan racionális számok. Ha

valamelyik ezek közül diadikus racionális, akkor az előző azonosság majdnem mindenütt igaz. Tehát minden y nem diadikus racionális szám esetén egyértelműen létezik olyan $-y$ nem diadikus racionális szám, hogy $y + (-y) = 0$.

Definiáljuk a *Dirichlet-* és a *Fejér-magfüggvényeket* az alábbi módon:

$$D_n := \sum_{k=0}^{n-1} v_k, \quad K_n := \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n D_k, \quad D_0, K_0 := 0.$$

A következő lemma a Dirichlet-magfüggvénnyel kapcsolatos azonosságokat foglalja össze.

2.2. LEMMA ([26, 23, 10]). *Legyen $j, n \in \mathbb{N}$, $j < 2^n$ és $x \in I$. Ekkor*

- (a)
$$D_{2^n}(x) = \begin{cases} 2^n, & \text{ha } x \in I_n, \\ 0, & \text{ha } x \notin I_n, \end{cases}$$
- (b)
$$D_n(x) = \omega_n(x) \sum_{i=0}^{\infty} n_i r_i D_{2^i}(x),$$
- (c)
$$D_{2^n-j}(x) = D_{2^n}(x) - v_{2^n-1}(x) \overline{D}_j(x).$$

Megjegyezzük, hogy ez a fenti lemma állításainak analóg verziója teljesül Walsh–Dirichlet magfüggvényekre is.

Következő lépésként a Fejér-magfüggvényekkel kapcsolatos állításokat tekintjük át.

2.3. LEMMA (Gát-Lucskai [D]). *Legyen B és k rögzített természetes szám. Ekkor*

$$\int_{I_s \setminus I_{s+1}} \sup_{|n| \geq B} |K_n(z)| d\lambda(z) \leq \begin{cases} C, & \text{ha } B < s, \\ C \sqrt{\frac{2^s}{2^B}}, & \text{ha } B \geq s. \end{cases}$$

BIZONYÍTÁS. A $B \geq s$ eset igazolása megtalálható a [10] cikkben, ezért csak a $B < s$ esetet igazoljuk,

$$\int_{I_s \setminus I_{s+1}} \sup_{n \geq B} |K_n| \leq \int_{I_s \setminus I_{s+1}} \sup_{|n| \geq s+1} |K_n| + \int_{I_s \setminus I_{s+1}} \sup_{s \geq |n| \geq B} |K_n| \leq C + \frac{1}{2^s} \cdot 2^s \leq C.$$

□

A következő lemma, amely igazolása egy egyszerű következménye az előző lemmának, de a 2.2 Tétel bizonyításában fontos szerepet fog játszani.

2.4. LEMMA. *Legyen B és k rögzített természetes szám. Ekkor*

$$\int_{\bar{I}_k} \sup_{|n| \geq B} |K_n(z)| d\lambda(z) \leq \begin{cases} C(k - B), & \text{ha } B < k, \\ C \sqrt{\frac{2^k}{2^B}}, & \text{ha } B \geq k. \end{cases}$$

2.1. KÖVETKEZMÉNY ([8]). *Minden $n \in \mathbb{N}$ esetén*

$$\|K_n\|_1 \leq C.$$

A 2.2 Tétel igazolása pedig során az alábbi lemmát fogjuk használni.

2.5. LEMMA ([10]). *Legyen B és t rögzített természetes szám. Ekkor*

$$\int_{\bar{I}_t} \sup_{|n| \geq B} |K_n(z)| d\lambda(z) \leq \begin{cases} C(t - B), & \text{ha } B < t, \\ C \frac{(B - t)^2}{2^{B-t}}, & \text{ha } B \geq t. \end{cases}$$

2.6. LEMMA (Gát-Lucskai, [D]). *Legyen $k, l \in \mathbb{N}$, ekkor*

$$\int_{\bar{I}_k} |K_{2^{l+1}}| = \begin{cases} C, & l < k, \\ C \sqrt{\frac{2^k}{2^l}}, & l \geq k. \end{cases}$$

BIZONYÍTÁS. Ha $l \geq k$, akkor a 2.4 Lemma alapján kapjuk, hogy

$$\int_{\bar{I}_k} |K_{2^{l+1}}| \leq \int_{\bar{I}_k} \sup_{n \geq 2^{l+1}} |K_n| \leq C \cdot \sqrt{\frac{2^k}{2^{l+1}}}.$$

A másik eset az 2.1 Következményből adódik,

$$\int_{\bar{I}_k} |K_{2^{l+1}}| \leq \int_I |K_{2^{l+1}}| = \|K_{2^{l+1}}\|_1 \leq C.$$

Ezzel teljes a bizonyítás. \square

Az $f \in L^1(I)$ függvény *Fourier-együtthatóját*, *Fourier-sorának n -edik részletösszegét* és *Fejér- $((C, 1)$ -) közepét* rendre az alábbi módon definiáljuk:

$$\begin{aligned}\hat{f}(n) &:= \int_I f(x) \bar{v}_n(x) d\lambda(x), \\ S_n f(y) &:= \sum_{k=0}^{n-1} \hat{f}(k) v_k(y) = \int_I f(x) D_n(y-x) d\lambda(x), \\ \sigma_n f(y) &:= \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n S_k f(y) = \int_I f(x+y) K_n(y-x) d\lambda(x),\end{aligned}$$

ahol $n \in \mathbb{N}$ és $y \in I$. Továbbá egy y elem inverzét $-y$ módon jelöljük.

Legyen $\alpha \in \mathbb{R}$ olyan, hogy $-\alpha \notin \mathbb{N}$ és

$$A_k^\alpha := \frac{(\alpha+1)(\alpha+2) \cdots (\alpha+k)}{k!}.$$

Ekkor az alábbi tulajdonságok teljesülnek ([38]):

$$A_n^\alpha = \sum_{k=0}^n A_{n-k}^{\alpha-1}, \quad A_n^\alpha - A_{n-1}^\alpha = A_n^{\alpha-1}, \quad A_n^\alpha \sim n^\alpha.$$

Továbbá teljesül az alábbi állítás:

2.7. LEMMA ([10]). *Legyen $a, l, k \in \mathbb{N}$ úgy, hogy $a \leq 2^l \leq 2^k$ teljesüljön. Ekkor*

$$\frac{A_a^\alpha}{A_{2^{k+a}}^\alpha} \leq C_\alpha \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^{\alpha(k-l+1)}$$

teljesül, ahol $a \geq C_\alpha$ és C_α csak az α értékétől függő konstans.

Definiáljuk minden $n \in \mathbb{N}$ esetén a (C, α) vagy *Cesàro magfüggvényt* az alábbi módon:

$$K_n^\alpha := \frac{1}{A_n^\alpha} \sum_{k=0}^n A_{n-k}^{\alpha-1} D_k.$$

Az f integrálható függvény (C, α) *Cesàro-közepé*:

$$\sigma_n^\alpha f(y) := \frac{1}{A_n^\alpha} \sum_{j=0}^n A_{n-j}^{\alpha-1} S_j f(y) = \int_I f(x) K_n^\alpha(y-x) d\lambda(x),$$

ahol $n \in \mathbb{N}$ és $y \in I$. Az $\alpha = 1$ esetben Fejér-közepéről, más néven $(C, 1)$ -közepéről, beszélünk.

Most röviden tekintsük át az egydimenziós (C, α) -közepék konvergenciájával kapcsolatos eredményeket.

Taibleson kérdése az volt, hogy a 2-adikus egészek rendszerében teljesül-e a $\sigma_n f \rightarrow f$ majdnem mindenütti konvergencia minden $f \in L^1$ esetén. Több mint húsz évvel később, 1997-ben Gát a [8] cikkében igazolta Taibleson sejtését, 2007-ben pedig a [10] cikkében általánosította az előző eredményét minden $\alpha > 0$ esetén. Zheng és Gát ezt az eredményt általánosabb ortonormált rendszerekben bizonyította [36, 9].

Definiáljuk a Riesz összegzési eljáráshoz tartozó $K_n^{\alpha, \gamma}$ magfüggvényt az alábbi módon:

$$K_n^{\alpha, \gamma} := \frac{1}{n^{\alpha\gamma}} \sum_{k=0}^{n-1} (n^\gamma - k^\gamma)^\alpha v_k,$$

ahol $n \in \mathbb{N}$. Az f integrálható függvény *Riesz-közepé*:

$$\sigma_n^{\alpha, \gamma} f(y) := \frac{1}{n^{\alpha\gamma}} \sum_{j=0}^{n-1} (n^\gamma - k^\gamma)^\alpha \hat{f}(j).$$

A Riesz-közép $\alpha = \gamma = 1$ esetén visszaadja a Fejér-közepet.

A Riesz-közepék majdnem mindenütti konvergenciáját a trigonometrikus rendszerben Riesz igazolta ([22, 38]). A Walsh–Paley rendszerben a $0 < \gamma \leq 1 \leq \alpha$ esetet Weisz bizonyította ([33]).

A cél Weisz eredményét igazolni a 2-adikus egészek csoportjában. Nevezetesen teljesül az alábbi tétel.

2.1. TÉTEL (Gát-Lucskai [C]). *Legyen $0 < \gamma \leq 1 \leq \alpha$. Ekkor minden $f \in L^1(I)$ esetén $\sigma_n^{\alpha, \gamma} f \rightarrow f$ majdnem mindenütt, ahol I jelöli a 2-adikus egészek csoportját.*

2.2. A fő eredmény bizonyítása.

A bizonyítás során az alábbi jelöléseket fogjuk alkalmazni:

$$a_{n,k} = (n^\gamma - k^\gamma)^\alpha = n^{\alpha\gamma} \Theta\left(\frac{k}{n}\right)$$

ahol $\Theta(x) = (1 - x^\gamma)^\alpha$. Továbbá,

$$\Delta_1 a_{n,k} := a_{n,k} - a_{n,k+1}, \quad \text{és} \quad \Delta_2 a_{n,k} := \Delta_1 a_{n,k} - \Delta_1 a_{n,k+1}.$$

Az első és másodrendű differenciákat a továbbiakban a Lagrange-tétel segítségével fogjuk vizsgálni. Továbbá felhasználjuk a Θ függvény alábbi tulajdonságait, amelyek igazolása egyszerű:

- Θ' monoton növekvő függvény és minden $x \in I$ esetén negatív értékeket vesz fel
- $|\Theta'(x)|$ korlátos. Mivel $\alpha - 1 \geq 0$, ekkor $0 \leq (1 - x^\gamma)^{\alpha-1} \leq 1$. Tehát $|\Theta'(x)| \leq \alpha\gamma x^{\gamma-1}$.
- Θ'' minden $x \in I$ esetén pozitív értéket vesz fel.

Vizsgáljuk a $\Delta_2 \Theta$ függvényt! Alkalmazzuk a Lagrange-tételt. Ekkor

$$\begin{aligned} \Delta_2 \Theta(x) &= \Theta(x) - \Theta(x+h) - (\Theta(x+h) - \Theta(x+2h)) \\ &= \Theta'(\xi) \cdot (-h) - \Theta'(\eta)(-h) \end{aligned}$$

teljesül valamely $x < \xi < x+h$ és $x+h < \eta < x+2h$ esetén. Ismételten alkalmazzuk a Lagrange tételt, így

$$\Theta'(\xi) \cdot (-h) - \Theta'(\eta)(-h) = h(\Theta'(\eta) - \Theta'(\xi)) = h \cdot \bar{h} \cdot \Theta''(\zeta)$$

valamely $0 < \bar{h} < 2h$ és $\xi < \zeta < \eta$ esetén. Mivel Θ'' minden $x \in I$ esetén pozitív, így azt kapjuk, hogy

$$\Delta_2 \Theta(x) \geq 0 \quad (x \in I).$$

A h differencia értéke a legtöbb esetben $1/n$ lesz.

2.8. LEMMA. *Legyen n és t természetes szám. A Riesz-magfüggvényekre a következő felső becslés adható:*

$$|K_n^{\alpha,\gamma}| \leq \sum_{j=1}^7 T_j + |\tilde{K}_n^{\alpha,\gamma}|,$$

ahol

$$T_1 := n^{-\alpha\gamma} \sum_{k=0}^{t-1} n_k \sum_{l=0}^{2^k-1} (l+2) |\Delta_2 a_{n,n^{(k)}-l-1}| |K_l|,$$

$$T_2 := n^{-\alpha\gamma} \sum_{k=t}^{|n|-1} n_k \sum_{l=0}^{2^k-1} (l+2) |\Delta_2 a_{n,n^{(k)}-l-1}| |K_l|,$$

$$T_3 := n^{-\alpha\gamma} \sum_{k=t}^{|n|-1} n_k \sum_{l=2^t}^{2^k-1} (l+2) |\Delta_2 a_{n,n^{(k)}-l-1}| |K_l|,$$

$$T_4 := n^{-\alpha\gamma} \sum_{k=0}^{t-1} n_k (2^k + 1) |\Delta_1 a_{n,n^{(k)}} - 2^k| \cdot |K_{2^k}|,$$

$$T_5 := n^{-\alpha\gamma} \sum_{k=t}^{|n|-1} n_k (2^k + 1) |\Delta_1 a_{n,n^{(k)}-2^k}| \cdot |K_{2^k}|,$$

$$T_6 := n^{-\alpha\gamma} \sum_{k=0}^{t-1} n_k |a_{n,n^{(k)}-2^k}| D_{2^k},$$

$$T_7 := n^{-\alpha\gamma} \sum_{k=t}^{|n|} n_k |a_{n,n^{(k)}-2^k}| D_{2^k},$$

$$\tilde{K}_n^{\alpha,\gamma} := n^{-\alpha\gamma} \sum_{i=0}^{2^{|n|}-1} a_{n,i} v_i.$$

BIZONYÍTÁS. Használjuk fel n (2)-beli felírását és a 2.1 Lemmát.
Ekkor

$$\begin{aligned} K_n^{\alpha,\gamma} &= n^{-\alpha\gamma} \sum_{i=0}^{n-1} a_{n,i} v_i \\ &= n^{-\alpha\gamma} \sum_{k=0}^{|n|-1} n_k \sum_{i=n^{(k+1)}}^{n^{(k+1)}+2^k-1} a_{n,i} v_i + n^{-\alpha\gamma} n_{|n|} \sum_{i=0}^{2^{|n|}-1} a_{n,i} v_i \\ &= n^{-\alpha\gamma} \sum_{k=0}^{|n|-1} n_k \sum_{l=0}^{2^k-1} a_{n,n^{(k)}-l-1} v_{n^{(k)}-l-1} + n^{-\alpha\gamma} \sum_{i=0}^{2^{|n|}-1} a_{n,i} v_i \\ &= n^{-\alpha\gamma} \sum_{k=0}^{|n|-1} n_k v_{n^{(k)}-1} \sum_{l=0}^{2^k-1} a_{n,n^{(k)}-l-1} \bar{v}_l + \tilde{K}_n^{\alpha,\gamma}. \end{aligned}$$

Ezután alkalmazzuk az Abel-transzformációt kétszer. Ebből adódik, hogy

$$\begin{aligned}
\sum_{l=0}^{2^k-1} a_{n,n^{(k)-l-1}} \bar{v}_l &= \sum_{l=0}^{2^k-1} \Delta_1 a_{n,n^{(k)-l-1}} \sum_{j=0}^l \bar{v}_j + a_{n,n^{(k)-2^k}} \sum_{l=0}^{2^k-1} \bar{v}_l \\
&= \sum_{l=0}^{2^k-1} \Delta_1 a_{n,n^{(k)-l-1}} \bar{D}_{l+1} + a_{n,n^{(k)-2^k}} \bar{D}_{2^k} \\
&= \sum_{l=0}^{2^k-1} \Delta_2 a_{n,n^{(k)-l-1}} \sum_{j=0}^l \bar{D}_{j+1} + \Delta_1 a_{n,n^{(k)-2^k}} \sum_{l=0}^{2^k-1} \bar{D}_{l+1} + a_{n,n^{(k)-2^k}} \bar{D}_{2^k} \\
&= \sum_{l=0}^{2^k-1} \Delta_2 a_{n,n^{(k)-l-1}} (l+2) \bar{K}_{l+1} + \Delta_1 a_{n,n^{(k)-2^k}} (2^k+1) \bar{K}_{2^k-1} + a_{n,n^{(k)-2^k}} \bar{D}_{2^k},
\end{aligned}$$

ahol $k < |n|$. Ez utóbbi formulát behelyettesítve az alábbi becslést kapjuk

$$\begin{aligned}
|K_n^{\alpha,\gamma}| &\leq n^{-\alpha\gamma} \sum_{k=0}^{|n|-1} n_k \left[\sum_{l=0}^{2^k-1} |\Delta_2 a_{n,n^{(k)-l-1}}| (l+2) |K_{l+1}| \right. \\
&\quad \left. + (2^k+1) |\Delta_1 a_{n,n^{(k)-2^k}}| \cdot |K_{2^k-1}| \right] + n^{-\alpha\gamma} \sum_{k=0}^{|n|-1} n_k |a_{n,n^{(k)-2^k}}| D_{2^k} + |\tilde{K}_n^{\alpha,\gamma}|.
\end{aligned}$$

A lemma állítása ebből a becslésből adódik. \square

A $\tilde{K}_n^{\alpha,\gamma}$ függvény vizsgálata. Ennek a résznek az a célja, hogy egy felső becslést adjuk a $\tilde{K}_n^{\alpha,\gamma}$ függvényre, ahol $\tilde{K}_n^{\alpha,\gamma}$ függvényt

$$\tilde{K}_n^{\alpha,\gamma} = n^{-\alpha\gamma} \sum_{i=0}^{2^{|n|-1}} a_{n,i} v_i.$$

módon definiáljuk. Az első lemmában a vizsgált függvényünket felül-ről becsljük négy függvénnyel.

2.9. LEMMA. A $\tilde{K}_n^{\alpha,\gamma}$ függvény felül-ről becsülhető az alábbi módon:

$$|\tilde{K}_n^{\alpha,\gamma}| \leq \sum_{i=8}^{11} T_i,$$

ahol

$$T_8 := n^{-\alpha\gamma} \sum_{i=0}^{2^l-1} (i+2) |\Delta_2 a_{n,i}| \cdot |K_{i+1}|,$$

$$T_9 := n^{-\alpha\gamma} \sum_{i=2^l}^{2^{l+1}-1} (i+2) |\Delta_2 a_{n,i}| \cdot |K_{i+1}|,$$

$$T_{10} := n^{-\alpha\gamma} (2^{l+1} + 1) |\Delta_1 a_{n,2^{l+1}}| \cdot |K_{2^{l+1}}|,$$

$$T_{11} := n^{-\alpha\gamma} |a_{n,2^{l+1}}| D_{2^{l+1}}.$$

BIZONYÍTÁS. Az Abel-transzformációt alkalmazva kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} |\tilde{K}_n^{\alpha,\gamma}| &\leq n^{-\alpha\gamma} \left| \sum_{i=0}^{2^{l+1}-1} a_{n,i} v_i \right| = n^{-\alpha\gamma} \left| \sum_{i=0}^{2^{l+1}-1} \Delta_1 a_{n,i} D_{i+1} + a_{n,2^{l+1}} D_{2^{l+1}} \right| \\ &= n^{-\alpha\gamma} \left| \sum_{i=0}^{2^{l+1}-1} \Delta_2 a_{n,i} \sum_{j=0}^i D_{j+1} + \Delta_1 a_{n,2^{l+1}} \sum_{i=0}^{2^{l+1}-1} D_{i+1} + a_{n,2^{l+1}} D_{2^{l+1}} \right| \\ &\leq n^{-\alpha\gamma} \left[\sum_{i=0}^{2^{l+1}-1} (i+2) |\Delta_2 a_{n,i}| \cdot |K_{i+1}| + (2^{l+1} + 1) |\Delta_1 a_{n,2^{l+1}}| \cdot |K_{2^{l+1}}| \right. \\ &\quad \left. + |a_{n,2^{l+1}}| D_{2^{l+1}} \right], \end{aligned}$$

amely igazolja az állítást. \square

A továbbiakban a T_9 és T_{10} függvények maximálfüggvényeire a-dunk felső becslést.

2.10. LEMMA. *Legyen n egy természetes szám. Ekkor*

$$n^{-\alpha\gamma} (2^{l+1} + 1) |\Delta_1 a_{n,2^{l+1}}| \leq C_{\alpha,\gamma}.$$

BIZONYÍTÁS. A Lagrange-tétel alapján kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} n^{-\alpha\gamma} (2^{l+1} + 1) |\Delta_1 a_{n,2^{l+1}}| &= n^{-\alpha\gamma} (2^{l+1} + 1) |a_{n,2^{l+1}} - a_{n,2^{l+1}+1}| \\ &= (2^{l+1} + 1) \left| \left(1 - \left(\frac{2^{l+1}}{n} \right)^\gamma \right)^\alpha - \left(1 - \left(\frac{2^{l+1} + 1}{n} \right)^\gamma \right)^\alpha \right| \\ &= (2^{l+1} + 1) \left| \Theta \left(\frac{2^{l+1}}{n} \right) - \Theta \left(\frac{2^{l+1} + 1}{n} \right) \right| \end{aligned}$$

$$\leq \frac{2^{|n|} + 1}{n} |\Theta'(\xi_1)| =: (A),$$

amely becslés valamely $\frac{2^{|n|}}{n} < \xi_1 < \frac{2^{|n|} + 1}{n}$ esetén teljesül.

Mivel $0 < \gamma \leq 1 \leq \alpha < \infty$, így

$$(A) \leq \frac{2^{|n|} + 1}{n} \left| \Theta' \left(\frac{2^{|n|}}{n} \right) \right| \leq C_{\alpha, \gamma},$$

mivel $\Theta'(x)$ korlátos, ha $1/4 \leq x \leq 1$. \square

2.11. LEMMA. *Tegyük fel, hogy $0 < \gamma \leq 1 \leq \alpha < \infty$ és $|n| \geq B \geq t$, ahol B rögzített. Ekkor*

$$\int_{\bar{I}_t} \sup_{|n| \geq B} T_{10} \leq C_{\alpha, \gamma}.$$

BIZONYÍTÁS. A 2.10 Lemma alapján kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \int_{\bar{I}_t} \sup_{|n| \geq B} T_{10} &= \int_{\bar{I}_t} \sup_{|n| \geq B} n^{-\alpha\gamma} (2^{|n|} + 1) |\Delta_1 a_{n, 2^{|n|}}| \cdot |K_{2^{|n|}}| \\ &= \int_{\bar{I}_t} \sup_{j > t} |K_{2^j}| \cdot \sup_{|n| \geq B} n^{-\alpha\gamma} (2^{|n|} + 1) |\Delta_1 a_{n, 2^{|n|}}| \\ &\leq C_{\alpha, \gamma} \int_{\bar{I}_t} \sup_{j > t} |K_{2^j}| \leq C_{\alpha, \gamma}. \end{aligned}$$

Az utolsó egyenlőtlenség 2.4 Lemmából következik. \square

2.12. LEMMA. *Legyen n egy természetes szám. Ekkor*

$$n^{-\alpha\gamma} \sum_{i=2^t}^{2^{|n|-1}} (i+2) |\Delta_2 a_{n,i}| \leq C_{\alpha, \gamma}.$$

BIZONYÍTÁS. Felhasználjuk azt, hogy $\Delta_2 a_{n,k}$ pozitív értékű. Ekkor

$$n^{-\alpha\gamma} \sum_{i=2^t}^{2^{|n|-1}} (i+2) |\Delta_2 a_{n,i}| = n^{-\alpha\gamma} \sum_{m=t}^{|n|-1} \sum_{i=2^{m-1}}^{2^m-1} (i+2) |\Delta_1 a_{n,i} - \Delta_1 a_{n,i+1}|$$

$$\begin{aligned}
&\leq n^{-\alpha\gamma} \sum_{m=t}^{|n|-1} (2^m + 1) \sum_{i=2^{m-1}}^{2^m-1} |\Delta_1 a_{n,i} - \Delta_1 a_{n,i+1}| \\
&\leq n^{-\alpha\gamma} \sum_{m=t}^{|n|-1} (2^m + 1) \sum_{i=2^{m-1}}^{2^m-1} (\Delta_1 a_{n,i} - \Delta_1 a_{n,i+1}) \\
&= n^{-\alpha\gamma} \sum_{m=t}^{|n|-1} (2^m + 1) (\Delta_1 a_{n,2^{m-1}} - \Delta_1 a_{n,2^m}) \\
&\leq n^{-\alpha\gamma} \sum_{m=t}^{|n|-1} (2^m + 1) |\Delta_1 a_{n,2^{m-1}}| + n^{-\alpha\gamma} \sum_{m=t}^{|n|-1} (2^m + 1) |\Delta_1 a_{n,2^m}| \\
&=: (A) + (B).
\end{aligned}$$

Az (A) függvény becslése az alábbi lépésekből áll:

$$\begin{aligned}
n^{-\alpha\gamma} \sum_{m=t}^{|n|-1} (2^m + 1) |\Delta_1 a_{n,2^{m-1}}| &= n^{-\alpha\gamma} \sum_{m=t}^{|n|-1} (2^m + 1) |a_{n,2^{m-1}} - a_{n,2^{m-1}+1}| \\
&= \sum_{m=t}^{|n|-1} (2^m + 1) \left| \left(1 - \left(\frac{2^{m-1}}{n} \right)^\gamma \right)^\alpha - \left(1 - \left(\frac{2^{m-1} + 1}{n} \right)^\gamma \right)^\alpha \right| \\
&= \sum_{m=t}^{|n|-1} (2^m + 1) \left| \Theta \left(\frac{2^{m-1}}{n} \right) - \Theta \left(\frac{2^{m-1} + 1}{n} \right) \right| \\
&\leq C_{\alpha,\gamma} \sum_{m=t}^{|n|-1} \frac{2^m + 1}{n} |\Theta'(\xi)| \leq C_{\alpha,\gamma} \sum_{m=t}^{|n|-1} \alpha\gamma \cdot \frac{2^m + 1}{n} \left(\frac{2^m}{n} \right)^{\gamma-1} \leq C_{\alpha,\gamma},
\end{aligned}$$

amely becslés során a Lagrange-tételt alkalmaztuk valamely $\frac{2^{m-1}}{n} < \xi < \frac{2^{m-1} + 1}{n}$ esetén. Továbbá felhasználtuk, hogy $|\Theta'(x)|$ korlátos.

A (B) becslése az előző esethez hasonlóan történik. Azaz

$$\begin{aligned}
(B) &= n^{-\alpha\gamma} \sum_{m=t}^{|n|-1} (2^m + 1) |\Delta_1 a_{n,2^m}| = n^{-\alpha\gamma} \sum_{m=t}^{|n|-1} (2^m + 1) |a_{n,2^m} - a_{n,2^m+1}| \\
&= \sum_{m=t}^{|n|-1} (2^m + 1) \left| \left(1 - \left(\frac{2^m}{n} \right)^\gamma \right)^\alpha - \left(1 - \left(\frac{2^m + 1}{n} \right)^\gamma \right)^\alpha \right|
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{m=t}^{|n|-1} (2^m + 1) \left| \Theta\left(\frac{2^m}{n}\right) - \Theta\left(\frac{2^m + 1}{n}\right) \right| \\
&= C_{\alpha,\gamma} \sum_{m=t}^{|n|-1} \frac{2^m + 1}{n} |\Theta'(\xi)| \leq C_{\alpha,\gamma} \sum_{m=t}^{|n|-1} \alpha\gamma \cdot \frac{2^m + 1}{n} \left(\frac{2^{m+1}}{n}\right)^{\gamma-1} \leq C_{\alpha,\gamma},
\end{aligned}$$

ahol becslés során a Lagrange-tételt alkalmaztuk valamely $\frac{2^m}{n} < \xi < \frac{2^m + 1}{n}$. A $|\Theta'(x)|$ korlátosságát ebben a becslésben is felhasználtuk. \square

2.13. LEMMA. *Tegyük fel, hogy $0 < \gamma \leq 1 \leq \alpha < \infty$, $|n| \geq B \geq t$ és B rögzített. Ekkor*

$$\int_{\tilde{I}_t} \sup_{|n| \geq B} T_9 \leq C_{\alpha,\gamma}.$$

BIZONYÍTÁS. A 2.12 Lemma alapján kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
\int_{\tilde{I}_t} \sup_{|n| \geq B} T_9 &= \int_{\tilde{I}_t} \sup_{|n| \geq B} n^{-\alpha\gamma} \sum_{i=2^t}^{2^{|n|-1}} (i+2) |\Delta_2 a_{n,i}| \cdot |K_{i+1}| \\
&\leq \int_{\tilde{I}_t} \sup_{|n| \geq B} \sum_{i=2^t}^{2^{|n|-1}} n^{-\alpha\gamma} (i+2) |\Delta_2 a_{n,i}| \cdot \sup_{|j| \geq 2^t} |K_{j+1}| \\
&\leq C_{\alpha,\gamma} \int_{\tilde{I}_t} \sup_{|j| \geq t} |K_{j+1}| \leq C_{\alpha,\gamma}.
\end{aligned}$$

\square

A T_5 becslése. Ebben a részben a T_5 függvény korlátosságát fogjuk igazolni, amely függvény definíciója az alábbi:

$$T_5 = n^{-\alpha\gamma} \sum_{k=t}^{|n|-1} n_k (2^k + 1) |\Delta_1 a_{n,n^{(k)}-2^k}| |K_{2^k}|.$$

2.14. LEMMA. *Tegyük fel, hogy $0 < \gamma \leq 1 \leq \alpha$. Ekkor*

$$(2) \quad n^{-\alpha\gamma} \sum_{k=t}^{|n|-1} n_k(2^k + 1) |\Delta_1 a_{n,n^{(k)}-2^k}| \leq C_{\alpha,\gamma}.$$

BIZONYÍTÁS. A tétel feltételéből következik, hogy a $(1 - x^\gamma)^\alpha$ ($x \in I$) deriválja egy növekvő függvény. A Lagrange-tétel alapján kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} & n^{-\alpha\gamma} \sum_{k=t}^{|n|-1} n_k(2^k + 1) |\Delta_1 a_{n,n^{(k)}-2^k}| \\ &= n^{-\alpha\gamma} \sum_{k=t}^{|n|-1} n_k(2^k + 1) |a_{n,n^{(k)}-2^k} - a_{n,n^{(k)}-2^{k+1}}| \\ &= n^{-\alpha\gamma} \sum_{k=t}^{|n|-1} n_k(2^k + 1) \left| (n^\gamma - (n^{(k)} - 2^k)^\gamma)^\alpha - n_k (n^\gamma - (n^{(k)} - 2^k + 1)^\gamma)^\alpha \right| \\ &= \sum_{k=t}^{|n|-1} (2^k + 1) \left| \left(1 - \left(\frac{n^{(k)} - 2^k}{n} \right)^\gamma \right)^\alpha - \left(1 - \left(\frac{n^{(k)} - 2^k + 1}{n} \right)^\gamma \right)^\alpha \right| \\ &\leq C_{\alpha,\gamma} \sum_{k=t}^{|n|-1} n_k \frac{(2^k + 1)}{n} \left| \left(1 - \left(\frac{\xi}{n} \right)^\gamma \right)^{\alpha-1} \left(\frac{\xi}{n} \right)^{\gamma-1} \right| \\ &\leq C_{\alpha,\gamma} \sum_{k=t}^{|n|-1} n_k \frac{(2^k + 1)}{n} \left| \left(1 - \left(\frac{2^k}{n} \right)^\gamma \right)^{\alpha-1} \left(\frac{2^k}{n} \right)^{\gamma-1} \right| \\ &\leq C_{\alpha,\gamma} \sum_{k=t}^{|n|-1} n_k \left(\frac{2^k + 1}{n} \right)^\gamma \leq C_{\alpha,\gamma} \end{aligned}$$

valamely

$$2^k + 1 \leq n^{(k)} - 2^k < \xi < n^{(k)} - 2^k + 1,$$

mivel $2^{|n|} \leq n^{(k)} - 2^k$, hiszen $k < |n|$ és feltehető, hogy $n_k = 1$. Ellenkező esetben ez nem fordul elő. \square

2.15. LEMMA. *Tegyük fel, hogy $|n| \geq B \geq t$, ahol B rögzített, és $0 < \gamma \leq 1 \leq \alpha$. Ekkor*

$$\int_{\bar{I}_t} \sup_{|n| \geq B} T_5 \leq C_{\alpha, \gamma}.$$

BIZONYÍTÁS. Ez a becslés az előző Lemma és a 2.4 Lemma használatával adódik,

$$\begin{aligned} \int_{\bar{I}_t} \sup_{|n| \geq B} T_5 &= \int_{\bar{I}_t} \sup_{|n| \geq B} n^{-\alpha\gamma} \sum_{k=t}^{|n|-1} n_k (2^k + 1) |\Delta_1 a_{n, n^{(k)} - 2^k}| |K_{2^k}| \\ &\leq \int_{\bar{I}_t} \sup_{j \geq t} |K_{2^j}| \cdot \sup_{|n| \geq B} n^{-\alpha\gamma} \sum_{k=t}^{|n|-1} (2^k + 1) n_k |\Delta_1 a_{n, n^{(k)} - 2^k}| \\ &\leq C_{\alpha, \gamma} \int_{\bar{I}_t} \sup_{j > t} |K_{2^j}| \leq C_{\alpha, \gamma}. \end{aligned}$$

□

A T_3 függvény vizsgálata Tekintsük a T_3 függvényt, amely definíciója az alábbi:

$$T_3 := n^{-\alpha\gamma} \sum_{k=t}^{|n|-1} n_k \sum_{l=2^t}^{2^k-1} (l+2) |\Delta_2 a_{n, n^{(k)} - l - 1}| |K_l|.$$

2.16. LEMMA. *Tegyük fel, hogy $0 < \gamma \leq 1 \leq \alpha < \infty$. Ekkor teljesül az alábbi becslés:*

$$n^{-\alpha\gamma} \sum_{k=t}^{|n|-1} n_k \sum_{l=2^t}^{2^k-1} (l+2) |\Delta_2 a_{n, n^{(k)} - l - 1}| \leq C_{\alpha, \gamma}.$$

BIZONYÍTÁS. A bizonyítás során felhasználjuk, hogy $\Delta_2 a_{n, n^{(k)} - l}$ pozitív értékű. Ekkor

$$\begin{aligned} &n^{-\alpha\gamma} \sum_{k=t}^{|n|-1} n_k \sum_{l=2^t}^{2^k-1} (l+2) |\Delta_2 a_{n, n^{(k)} - l}| \\ &= n^{-\alpha\gamma} \sum_{k=t}^{|n|-1} n_k \sum_{m=t+1}^k \sum_{l=2^{m-1}}^{2^m-1} (l+2) |\Delta_1 a_{n, n^{(k)} - l - 1} - \Delta_1 a_{n, n^{(k)} - l}| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq n^{-\alpha\gamma} \sum_{k=t}^{|n|-1} n_k \sum_{m=t+1}^k (2^m + 1) \sum_{l=2^{m-1}}^{2^m-1} (\Delta_1 a_{n,n^{(k)}-l-1} - \Delta_1 a_{n,n^{(k)}-l}) \\
&= n^{-\alpha\gamma} \sum_{k=t}^{|n|-1} n_k \sum_{m=t+1}^k (2^m + 1) (\Delta_1 a_{n,n^{(k)}-2^{m-1}-1} - \Delta_1 a_{n,n^{(k)}-2^{m+1}}) \\
&\leq n^{-\alpha\gamma} \sum_{k=t}^{|n|-1} n_k \sum_{m=t+1}^k (2^m + 1) |\Delta_1 a_{n,n^{(k)}-2^{m-1}-1}| \\
&\quad + n^{-\alpha\gamma} \sum_{k=t}^{|n|-1} n_k \sum_{m=t+1}^k (2^m + 1) |\Delta_1 a_{n,n^{(k)}-2^{m+1}}| =: T_{31} + T_{32}.
\end{aligned}$$

Első lépésként T_{32} függvényt vizsgáljuk. A becslés hasonló, mint a T_5 függvény esetén.

$$\begin{aligned}
&n^{-\alpha\gamma} \sum_{k=t}^{|n|-1} n_k \sum_{m=t+1}^k (2^m + 1) |\Delta_1 a_{n,n^{(k)}-2^{m+1}}| \\
&= n^{-\alpha\gamma} \sum_{k=t}^{|n|-1} n_k \sum_{m=t+1}^k (2^m + 1) |a_{n,n^{(k)}-2^{m+1}} - a_{n,n^{(k)}-2^{m+2}}| \\
&= \sum_{k=t}^{|n|-1} n_k \sum_{m=t+1}^k (2^m + 1) \left| \left(1 - \left(\frac{n^{(k)} - 2^m + 1}{n} \right)^\gamma \right)^\alpha \right. \\
&\quad \left. - \left(1 - \left(\frac{n^{(k)} - 2^m + 2}{n} \right)^\gamma \right)^\alpha \right| \\
&\leq C_{\alpha,\gamma} \sum_{k=t}^{|n|-1} n_k \sum_{m=t+1}^k \frac{2^m + 1}{n} \left| \left(1 - \left(\frac{\xi}{n} \right)^\gamma \right)^{\alpha-1} \left(\frac{\xi}{n} \right)^{\gamma-1} \right| \\
&\leq C_{\alpha,\gamma} \sum_{k=t}^{|n|-1} n_k \sum_{m=t+1}^k \frac{2^m + 1}{n} \left| \left(1 - \left(\frac{n^{(k)} - 2^m + 1}{n} \right)^\gamma \right)^{\alpha-1} \left(\frac{n^{(k)} - 2^m + 2}{n} \right)^{\gamma-1} \right| \\
&\leq C_{\alpha,\gamma} \sum_{k=t}^{|n|-1} n_k \sum_{m=t+1}^k \frac{2^m + 1}{n} \left(\frac{n^{(k)} - 2^m + 2}{n} \right)^{\gamma-1}
\end{aligned}$$

$$\leq C_{\alpha,\gamma} \sum_{k=t}^{|n|-1} \sum_{m=t+1}^k \frac{2^m + 1}{n} \leq C_{\alpha,\gamma}$$

ahol a Lagrange tétel alkalmaztuk valamely

$$2^{k+1} \leq n^{(k+1)} = n^{(k)} - 2^k \leq n^{(k)} - 2^m < \xi < n^{(k)} - 2^m + 1$$

esetén. Valamint alkalmaztuk az alábbi becslést

$$\left(\frac{n^{(k)} - 2^m + 2}{n} \right)^{\gamma-1} \leq \left(\frac{2^{|n|} - 2^k + 2}{n} \right)^{\gamma-1} \leq \left(\frac{2^{|n|} - 2^{|n|-1}}{n} \right)^{\gamma-1} \leq C_{\gamma},$$

ahol $k + 1 \leq |n|$. Emlékeztetünk arra, hogy $0 < \gamma \leq 1$. \square

2.17. LEMMA. *Tegyük fel, hogy $|n| \geq B \geq t$ és $0 < \gamma \leq 1 \leq \alpha$. Ekkor*

$$\int_{\bar{I}_t} \sup_{|n| \geq B} T_3 \leq C_{\alpha,\gamma}.$$

BIZONYÍTÁS. Ez a becslés az előző Lemmából adódik. Azaz,

$$\begin{aligned} \int_{\bar{I}_t} \sup_{|n| \geq B} T_3 &= \int_{\bar{I}_t} \sup_{|n| \geq B} n^{-\alpha\gamma} \sum_{k=t}^{|n|-1} n_k \sum_{l=2^t}^{2^k-1} (l+2) |\Delta_2 a_{n,n^{(k)}-l-1}| |K_l| \\ &\leq \int_{\bar{I}_t} \sup_{|j|>t} |K_j| \cdot \sup_{|n| \geq B} n^{-\alpha\gamma} \sum_{k=t}^{|n|-1} n_k \sum_{l=2^t}^{2^k-1} (l+2) |\Delta_2 a_{n,n^{(k)}-l-1}| \leq C_{\alpha,\gamma}. \end{aligned}$$

\square

A 2.1 Tétel bizonyítása.

2.18. LEMMA. *Legyen $f \in L^1(I)$ olyan, hogy $\text{supp } f \subset I_t$ és $\int_{I_t} f = 0$ teljesül. Ekkor*

$$\int_{\bar{I}_t} \sup_{n \geq 2^t} |f * K_n^{\alpha,\gamma}| d\lambda \leq C_{\alpha,\gamma} \|f\|_1.$$

BIZONYÍTÁS. A $|K_n^{\alpha,\gamma}|$ magfüggvény felülről becsülhető 2.8 és 2.9 Lemmák alapján:

$$|K_n^{\alpha,\gamma}| \leq T_1 + T_2 + T_3 + T_4 + T_5 + T_6 + T_7 + T_8 + T_9 + T_{10} + T_{11}.$$

Először, legyen $m \in \{1, 2, 4, 6, 8\}$, ekkor

$$(3) \quad \int_{\bar{I}_t} \sup_{n \geq 2^t} |f * T_m| d\lambda = 0,$$

mivel a T_m függvény \mathcal{A}_t -mérhető és $\int_{I_t} f = 0$.

Másodszor a T_7 és T_{11} függvények értéke 0 a 2.2 Lemma (a) része miatt.

Végül, legyen $j \in \{3, 5, 9, 10\}$. Alkalmazzuk 2.17, 2.15, 2.13 és 2.11 Lemmákat, ekkor

$$\begin{aligned} \int_{\bar{I}_t} \sup_{n \geq 2^t} |f * T_j| d\lambda &= \int_{\bar{I}_t} \sup_{n \geq 2^t} \int_{I_t} |f(x) \cdot T_j(y-x)| dx dy \\ &= \int_{\bar{I}_t} |f(y-x)| \int_{\bar{I}_t} \sup_{n \geq 2^t} |T_j(y)| dy dx \leq C_{\alpha, \gamma} \|f\|_1. \end{aligned}$$

□

2.19. LEMMA. *Legyen $f \in L^1(I)$. Ekkor az $\sup_{n \in \mathbb{N}} |f * K_n^{\alpha, \gamma}|$ operátor (L^∞, L^∞) - és (L^1, L^1) -típusú.*

BIZONYÍTÁS. A 2.1 Lemma alapján kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \sup_{n \in \mathbb{N}} |f * K_n^{\alpha, \gamma}| &\leq \sup_{n \in \mathbb{N}} \left| \int_I |f(x) K_n^{\alpha, \gamma}(y-x)| dy \right| \\ &\leq \sum_{m=1}^{10} \|f\|_\infty \int_I \sup_{n \in \mathbb{N}} |T_m(y-x)| dy \leq C_{\alpha, \gamma} \|f\|_\infty. \end{aligned}$$

Továbbá,

$$\begin{aligned} \int_I \sup_{n \in \mathbb{N}} |f * K_n^{\alpha, \gamma}| &\leq \sup_{n \in \mathbb{N}} \int_I \left| \int_I |f(x) K_n^{\alpha, \gamma}(y-x)| dy \right| dx \\ &\leq \sum_{m=1}^{10} \int_I |f(x)| dx \cdot \int_I \sup_{n \in \mathbb{N}} |T_m(y-x)| dy \leq C_{\alpha, \gamma} \|f\|_1. \end{aligned}$$

Ha $m \in \{1, 2, 4, 6, 8\}$, akkor (3) azonosságot használjuk. Ha $m \in \{7, 11\}$, akkor $\|T_m\|_1 \leq C$, ahol $m \in \{7, 11\}$. Végül, ha $m \in \{3, 5, 9, 10\}$, akkor 2.17, 2.15, 2.13 és 2.11 Lemmák miatt adódik az állítás. \square

A 2.1 TÉTEL BIZONYÍTÁSA. A v_n függvények véges lineáris kombinációi sűrű halmazzal alkotnak az $L^1(I)$ térben. Ezt a tényt és az előző két lemmát felhasználva kapjuk a tételünk állítását. A módszer részletes kifejtése megtalálható a [27] könyvben. \square

2.3. A (C, α) -közepek majdnem mindenütti konvergenciája

Első lépésként tekintsük át a 2-adikus egészek csoportján definiált kétdimenziós Fourier-sorokkal kapcsolatos fogalmakat. A normált Haar-mérték egybeesik egyszimmetrikus esettel. A kétdimenziós Fourier együtthatókat, a kétdimenziós Fourier-sor téglalap felett vett részletösszeget és a (C, α) Marcinkiewicz magfüggvényt és közepet az alábbi módon definiáljuk:

$$\begin{aligned}\hat{f}(n^1, n^2) &:= \int_{I^2} f(x^1, x^2) \bar{v}_{n^1}(x^1) \bar{v}_{n^2}(x^2) d\lambda(x^1, x^2), \\ S_{n^1, n^2} f(y^1, y^2) &:= \sum_{k^1=0}^{n^1-1} \sum_{k^2=0}^{n^2-1} \hat{f}(k^1, k^2) v_{k^1}(y^1) v_{k^2}(y^2) \\ &= \int_{I^2} f(x^1, x^2) D_{n^1}(y^1 - x^1) D_{n^2}(y^2 - x^2) d\lambda(x^1, x^2), \\ K_n^\alpha(y^1, y^2) &:= \frac{1}{A_n^\alpha} \sum_{j=0}^n A_{n-k}^{\alpha-1} D_j(y^1) D_j(y^2), \\ \sigma_n^\alpha f(y^1, y^2) &:= \frac{1}{A_n^\alpha} \sum_{j=1}^n A_{n-k}^{\alpha-1} S_{j,j} f(y^1, y^2),\end{aligned}$$

Ismert az alábbi összefüggés

$$\sigma_n^\alpha f(y^1, y^2) = \int_{I \times I} f(x^1, x^2) K_n^\alpha(y^1 - x^1, y^2 - x^2) d\lambda(x^1, x^2),$$

ahol $n, n^1, n^2 \in \mathbb{N}$ és $x^1, x^2, y^1, y^2 \in I$.

A következő lemma a kétdimenziós Marcinkiewicz magfüggvény-nyel kapcsolatos.

2.20. LEMMA ([3]). *Legyen $k \in \mathbb{N}$. Ekkor*

$$\int_{I_k \times I_k} \sup_{|n| \geq k} |K_n| \leq C.$$

Ebből a lemmából adódik az alábbi következmény.

2.2. KÖVETKEZMÉNY ([3]). *Minden $n \in \mathbb{N}$*

$$\|K_n\|_1 \leq C$$

teljesül.

A továbbiakban az alábbi jelöléseket fogjuk használni:

$$J_\tau = I_{\tau+1} \setminus I_\tau, \quad K_{a,b} = \sum_{l=a}^{a+b-1} D_l.$$

2.21. LEMMA (Gát-Lucskai [D]). *Legyen $t^1 \leq t^2$ és $m \geq k$. Ekkor*

$$\sum_{t^1=0}^{k-1} \sum_{t^2=t^1}^{\infty} \int_{J_{t^1} \times J_{t^2}} \sup_{A \geq m} \sup_{|n|=A} \frac{1}{2^A} \sum_{s=t^1+1}^A |K_{n^{(s)}, 2^s}(x^1, x^2)| dx \leq C 2^{(k-m)/3},$$

ahol C egy abszolút konstans.

BIZONYÍTÁS. Legyen $a \vee b := \min\{a, b\}$. A

$$\int_{J_{t^1} \times J_{t^2}} \sup_{|n|=A} |K_{n^{(s)}, 2^s}(x^1, x^2)| dx \leq C \sqrt{2^{A+t^1}}$$

becslést Blahota és Gát és bizonyította a [3] cikkben. Ennek a becslésnek a felhasználásával azt kapjuk, hogy ha $m \geq k$, akkor

$$\begin{aligned}
& \sum_{t^1=0}^{k-1} \sum_{t^2=t^1}^{\infty} \int_{J_{t^1} \times J_{t^2}} \sup_{A \geq (m \vee t^2)} \sup_{|n|=A} \frac{1}{2^A} \sum_{s=t^1+1}^A |K_{n^{(s)}, 2^s}(x^1, x^2)| d(x^1, x^2) \\
& \leq C \sum_{t^1=0}^{k-1} \sum_{t^2=t^1}^{\infty} \sum_{A=(m \vee t^2)}^{\infty} \sum_{s=t^1+1}^A \sqrt{2^{t^1-A}} \\
& \leq C \sum_{t^1=0}^{k-1} \sum_{t^2=t^1}^{m-1} \sum_{A=(m \vee t^2)}^{\infty} (A - t^1) \sqrt{2^{t^1-A}} \\
& \leq C \sum_{t^1=0}^{k-1} \sum_{t^2=t^1}^{\infty} ((m \vee t^2) - t^1) \sqrt{2^{t^1-(m \vee t^2)}} \\
& \leq C \sum_{t^1=0}^{k-1} (m - t^1)^2 \sqrt{2^{t^1-m}} \leq C(m - k)^2 \sqrt{2^{k-m}} \leq C2^{(k-m)/3}.
\end{aligned}$$

Így az $A \geq (m \vee t^2)$ eset vizsgálatával készen vagyunk az $\bigcup_{t^1=0}^{k-1} \bigcup_{t^2=t^1}^{\infty} J_{t^1} \times J_{t^2}$ halmazon.

Ezután tekintsük a $t^2 > A \geq m$ esetet, ekkor ismét az $\bigcup_{t^1=0}^{k-1} \bigcup_{t^2=t^1}^{\infty} J_{t^1} \times J_{t^2}$ halmazon integrálunk. Nyilvánvaló, hogy $t^2 > m$. Továbbá,

$$\begin{aligned}
& \sum_{t^1=0}^{k-1} \sum_{t^2=m+1}^{\infty} \int_{J_{t^1} \times J_{t^2}} \sup_{t^2 > A \geq m} \sup_{|n|=A} \frac{1}{2^A} \sum_{s=t^1+1}^A |K_{n^{(s)}, 2^s}(x^1, x^2)| d(x^1, x^2) \\
& \leq \sum_{t^1=0}^{k-1} \sum_{t^2=m+1}^{\infty} \frac{1}{2^{t^2}} \int_{J_{t^1}} \sup_{t^2 > A \geq m} \sup_{|n|=A} \frac{1}{2^A} \sum_{s=t^1+1}^A |K_{n^{(s)}, 2^s}(x^1, 0)| dx^1 \\
& \leq C \sum_{t^1=0}^{k-1} \sum_{t^2=m+1}^{\infty} \frac{1}{2^{t^2}} \sum_{A=m}^{t^2} \frac{1}{2^A} \sum_{s=t^1}^A \int_{J_{t^1}} \left| \sum_{k=n^{(s)}}^{n^{(s)}+2^s-1} v_{k^{(t^1+1)}}(x^1) \tilde{k}_{t^1} k \right| dx^1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq C \sum_{t^1=0}^{k-1} \sum_{t^2=m+1}^{\infty} \frac{1}{2^{t^2}} \sum_{A=m}^{t^2} \frac{1}{2^A} \sum_{s=t^1}^A \left(\frac{1}{2^{t^1}}\right)^{1/2} \left(\frac{1}{2^{t^1}} 2^{s+t^1+2t^1+2A}\right)^{1/2} \\
&\leq \sum_{t^1=0}^{k-1} \sum_{t^2=m+1}^{\infty} \frac{1}{2^{t^2}} \sum_{A=m}^{t^2} \sqrt{2^{A+t^1}} \\
&\leq C \sum_{t^1=0}^{k-1} \sum_{t^2=m+1}^{\infty} \sqrt{2^{t^1-t^2}} \leq C \sqrt{2^{k-m}}.
\end{aligned}$$

□

Jelölje $\overline{I_m \times I_m}$ az $I_m \times I_m$ halmaz komplementerét.

2.22. LEMMA (Gát-Lucskai [D]).

$$\int_{\overline{I_k \times I_k}} \sup_{|n| \geq m} |K_n(x^1, x^2)| d(x^1, x^2) \leq C \cdot 2^{(k-m)/3}.$$

BIZONYÍTÁS. Egyszerű becsléssel kapjuk, hogy

$$|K_{n^{(s)}, 2^s}| \leq \sum_{k=n^{(s)}}^{n^{(s)}+2^s-1} |D_k| \leq \sum_{k=n^{(s)}}^{n^{(s)}+2^s-1} |\tilde{k}_{t^1} \tilde{k}_{t^2}| \leq 2^{s+t^1+(t^2 \wedge |n|)},$$

ahol $a \vee b := \min\{a, b\}$, ezért

$$\sum_{s=0}^{t^1} |K_{n^{(s)}, 2^s}| \leq c 2^{2t^1+(t^2 \wedge |n|)}.$$

Ezt az egyenlőtlenséget felhasználva kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
&\sum_{t^1=0}^{k-1} \sum_{t^2=t^1}^{\infty} \int_{J_{t^1} \times J_{t^2}} \sup_{A \geq m} \sup_{|n|=A} \frac{1}{2^A} \sum_{s=0}^{t^1} |K_{n^{(s)}, 2^s}(x^1, x^2)| d(x^1, x^2) \\
&\leq C \sum_{t^1=0}^{k-1} \sum_{t^2=t^1}^{\infty} \int_{J_{t^1} \times J_{t^2}} \sup_{A \geq m} \frac{2^{2t^1+(t^2 \wedge A)}}{2^A} d(x^1, x^2) \\
&\leq C \sum_{t^1=0}^{k-1} \sum_{t^2=t^1}^{m-1} \frac{1}{2^{t^1+t^2}} \frac{2^{2t^1+t^2}}{2^m} + C \sum_{t^1=0}^{k-1} \sum_{t^2=m}^{\infty} \frac{1}{2^{t^1+t^2}} 2^{2t^1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq C \sum_{t^1=0}^{k-1} (m - t^1) 2^{t^1-m} + C \sum_{t^1=0}^{k-1} \sum_{t^2=m}^{\infty} 2^{t^1-t^2} \\
&\leq C(m - k)2^{k-m} + C2^{k-m} \leq C\sqrt{2^{k-m}}.
\end{aligned}$$

Tehát,

$$\sum_{t^1=0}^{k-1} \sum_{t^2=t^1}^{\infty} \int_{J_{t^1} \times J_{t^2}} \sup_{|n| \geq m} |K_n| \leq C2^{(k-m)/3}.$$

Hasonlóan kapjuk, hogy

$$\sum_{t^2=0}^{k-1} \sum_{t^1=t^2}^{\infty} \int_{J_{t^1} \times J_{t^2}} \sup_{|n| \geq m} |K_n| \leq C2^{(k-m)/3}.$$

A következő reláció

$$\overline{I_k \times I_k} \subseteq \left(\bigcup_{t^2=0}^{k-1} \bigcup_{t^1=t^2}^{\infty} J_{t^1} \times J_{t^2} \right) \cup \left(\bigcup_{t^1=0}^{k-1} \bigcup_{t^2=t^1}^{\infty} J_{t^1} \times J_{t^2} \right)$$

majdnem mindenütt teljesül és emiatt a fenti egyenlőtlenségből kapjuk, hogy

$$(4) \quad \int_{I_k \times I_k} \sup_{|n| \geq m} |K_n(x^1, x^2)| d(x^1, x^2) \leq C2^{(k-m)/3}.$$

Ezzel teljes a bizonyítás. \square

A diadikus csoporttal megegyező topológiával rendelkezik a 2-adikus egészek csoportja. Ennek ellenére Taibleson kérdése ideig nyitott volt azaz, hogy a teljesül-e Fejér-Lebesgue tétel, azaz $\sigma_n f \rightarrow f$ majdnem mindenütt ([31]). Közel húsz évvel később, 1997-ben Gát igazolta a majdnem mindenütti konvergenciát integrálható függvények esetén. A 2-adikus Dirichlet-magfüggvények felbontását alkalmazva a normakonvergenciára vonatkozó tételt Schipp és Wade igazolta ([26]). 2007-ben Gát az $\alpha > 0$ esetén igazolta a majdnem mindenütti konvergenciát minden f integrálható függvényre ([10]).

Az $\alpha = 1$ esetet sokkal általánosabb ortonormált rendszerekben igazolta Zheng és Gát ([36, 9]).

A $(C, 1)$ Marczinkiewicz közepek majdnem mindenütti konvergenciáját tetszőleges integrálható Blahota és Gát igazolta 2009-ben ([3]). Ezt az eredmény trigonometrikus rendszerben Grünwald ([18]) és Zhizhiashvili ([37]) igazolta. 2006-ban Gát és Goginava igazolta minden integrálható függvény esetén a kvadratikusan részletösszegek (C, α) közepek konvergenciáját kétdimenziós Vilenkin-Fourier sorokra ([11]). Az alábbi eredményünk általánosítja Blahota és Gát eredményét minden $\alpha > 0$ esetén, amely eredményt Goginava igazolta a Walsh–Paley rendszerben ([14], [16], [17]).

2.2. TÉTEL (Gát-Lucskai [D]). *Legyen $0 < \alpha < 1$. Ekkor $\sigma_n^\alpha f \rightarrow f$ teljesül majdnem mindenütt, minden $f \in L^1(I^2)$ esetén, ahol I jelöli a 2-adikus egészek csoportját.*

2.4. A fő eredmény bizonyítása

A bizonyításhoz vezető út *első lépéseként az egydimenziós (C, α) Cesàro-magfüggvény maximálfüggvényét vizsgáljuk*, ahol $0 < \alpha < 1$. Definiáljuk a T_n^α függvényt az alábbi módon:

$$T_n^\alpha = \frac{1}{A_n^\alpha} \sum_{j=0}^{2^{|n|}} A_{n-j}^{\alpha-1} D_j.$$

Két esetet különböztetünk meg. Az $A \geq k$ esetén teljesül az alábbi állítás.

2.23. LEMMA (Gát-Lucskai [D]). *Legyen $A, k \in \mathbb{N}$ és $A \geq k$, ekkor*

$$\int_{\bar{I}_k} \sup_{n \geq 2^A} |T_n^\alpha(z)| d\lambda(z) \leq C_\alpha \left(\frac{2^k}{2^A} \right)^\delta$$

teljesül, ahol $\delta = \min \left\{ \frac{\alpha}{2}, \frac{1}{4} \right\}$.

BIZONYÍTÁS. Legyen $|n| = B \geq A$ és ezért n felírható $2^B + n_{(B)}$. Ekkor

$$\sum_{j=0}^{2^B} A_{n-j}^{\alpha-1} D_j = \sum_{j=0}^{2^B} A_{2^B+n_{(B)}-j}^{\alpha-1} D_j = \sum_{j=0}^{2^B} A_{n_{(B)}+j}^{\alpha-1} D_{2^B-j} = \sum_{j=0}^{2^B-1} A_{n_{(B)}+j}^{\alpha-1} D_{2^B-j}.$$

Az 2.2 Lemma (c) részének felhasználásával kapjuk, hogy

$$\sum_{j=0}^{2^B} A_{n-j}^{\alpha-1} D_j = D_{2^B} \sum_{j=0}^{2^B-1} A_{n_{(B)+j}^{\alpha-1}} - v_{2^B-1} \sum_{j=0}^{2^B-1} A_{n_{(B)+j}^{\alpha-1}} \bar{D}_j.$$

Egyszerűen belátható, hogy ha $z \in \bar{I}_k$ tetszőleges elem, akkor az összeg első tagja nulla.

A második tag vizsgálatához az Abel-transzformációt alkalmazzuk. Ekkor

$$\begin{aligned} \left| \sum_{j=0}^{2^B-1} A_{n_{(B)+j}^{\alpha-1}} \bar{D}_j \right| &= \left| \sum_{j=0}^{2^B-1} (A_{n_{(B)+j}^{\alpha-1}} - A_{n_{(B)+j+1}^{\alpha-1}}) \sum_{i=0}^j \bar{D}_i + A_{n_{(B)+2^B-1}^{\alpha-1}} \sum_{i=0}^{2^B-1} \bar{D}_i \right| \\ &= \left| (1-\alpha) \sum_{j=0}^{2^B-1} A_{n_{(B)+j}^{\alpha-1}} \frac{j+1}{n_{(B)}+j+1} \bar{K}_j^{-1} + A_{n_{(B)+2^B-1}^{\alpha-1}} 2^B \bar{K}_{2^B-1} \right| \\ &\leq (1-\alpha) \sum_{j=0}^{2^D-1} A_{n_{(B)+j}^{\alpha-1}} |\bar{K}_j| + (1-\alpha) \sum_{j=2^D}^{2^B-1} A_{n_{(B)+j}^{\alpha-1}} |\bar{K}_j| \\ &\quad + A_{n_{(B)+2^B-1}^{\alpha-1}} 2^B |\bar{K}_{2^B-1}| =: (I) + (II) + (III), \end{aligned}$$

ahol $D = \left\lfloor \frac{A+k}{2} \right\rfloor$.

Mivel $0 < \alpha < 1$, ezért $A_{n_{(B)+j}^{\alpha-1}} \leq A_j^{\alpha-1}$ teljesül. Ezért,

$$\frac{1}{A_n^\alpha} (I) \leq (1-\alpha) \frac{A_{2^D}^\alpha}{A_{2^A}^\alpha} \cdot \frac{1}{A_{2^D}^\alpha} \sum_{j=0}^{2^D-1} A_{n_{(B)+j}^{\alpha-1}} |K_j|.$$

Az 2.1. következményből kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \int_{\bar{I}_k} \sup_{n \geq 2^A} \frac{1}{A_n^\alpha} |(I)| \, d\lambda &\leq (1-\alpha) \frac{A_{2^D}^\alpha}{A_{2^A}^\alpha} \cdot \frac{1}{A_{2^D}^\alpha} \sum_{j=0}^{2^D-1} A_j^{\alpha-1} \|K_j\|_1 \\ &\leq C_\alpha \left(\frac{2^D}{2^A} \right)^\alpha = C_\alpha \left(\frac{2^k}{2^A} \right)^{\frac{\alpha}{2}}. \end{aligned}$$

A második esetben:

$$\frac{1}{A_n^\alpha} |(II)| \leq \frac{1-\alpha}{A_n^\alpha} \sup_{j \geq 2^D} |K_j| \sum_{j=2^D}^{2^B-1} A_{n(B)+j}^{\alpha-1} \leq C_\alpha \sup_{j \geq 2^D} |K_j|.$$

A 2.4. lemmából adódik a következő becslés:

$$\int_{\bar{I}_k} \sup_{n \geq 2^A} \frac{1}{A_n^\alpha} |(II)| \, d\lambda \leq C_\alpha \int_{\bar{I}_k} \sup_{j \geq 2^D} |K_j| \, d\lambda \leq C_\alpha \sqrt{\frac{2^k}{2^D}} = C_\alpha \left(\frac{2^k}{2^A}\right)^{\frac{1}{4}}.$$

Az utolsó esetben azt kapjuk, hogy

$$\frac{1}{A_n^\alpha} |(III)| \leq \frac{nA_n^{\alpha-1}}{A_n^\alpha} \cdot |K_{2^{B-1}}| \leq |K_{2^{|n|-1}}|.$$

A 2.4. Lemmát újra alkalmazzuk és ekkor

$$\int_{\bar{I}_k} \sup_{n \geq 2^A} \frac{1}{A_n^\alpha} |(III)| \, d\lambda \leq \int_{\bar{I}_k} \sup_{n \geq 2^A} |K_{2^{|n|-1}}| \, d\lambda \leq C_\alpha \cdot \left(\frac{2^k}{2^A}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Ezzel a bizonyítás teljes. □

Az $A < k$ esetet tartalmazza az alábbi lemma.

2.24. LEMMA ([10]). *Legyen $A, k \in \mathbb{N}$ és $A < k$. Ekkor*

$$\int_{\bar{I}_k} \sup_{n \geq 2^A} |T_n^\alpha| \, d\lambda \leq C_\alpha(k - A).$$

A következő lemma az egydimenziós (C, α) Cesaro-közép máximaloperátorának becslését adja meg.

2.25. LEMMA (Gát-Lucskai [D]). *Legyen $A, k \in \mathbb{N}$ és $A \geq k$. Ekkor*

$$\int_{\bar{I}_k} \sup_{n \geq 2^A} |K_n^\alpha| \, d\lambda \leq C_\alpha \left(\frac{2^k}{2^A}\right)^\delta,$$

ahol $\delta = \min \left\{ \frac{\alpha}{2}, \frac{1}{4} \right\}.$

BIZONYÍTÁS. Legyenek $h_s > \dots > h_0 \geq 0$ egész számok és $n = 2^{h_s} + \dots + 2^{h_0}$. Ez azt jelenti, hogy $|n| = h_s$. Vezessük be az $n^{(j)} := 2^{h_j} + \dots + 2^{h_0}$ jelölést. Ekkor

$$K_n^\alpha = T_n^\alpha + \frac{1}{A_n^\alpha} \sum_{j=2^{h_s}}^n A_{n-j}^{\alpha-1} D_j.$$

Mivel $n = 2^{h_s} + n^{(s-1)}$, then by $D_{2^{h_s}+k} = D_{2^{h_s}} + v_{2^{h_s}} \bar{D}_k$

$$\begin{aligned} \sum_{j=2^{h_s}}^{2^{h_s}+n^{(s-1)}} A_{2^{h_s}+n^{(s-1)}-j}^{\alpha-1} D_j &= \sum_{k=0}^{n^{(s-1)}} A_{n^{(s-1)}-k}^{\alpha-1} D_{2^{h_s}+k} \\ &= D_{2^{h_s}} \sum_{k=0}^{n^{(s-1)}} A_{n^{(s-1)}-k}^{\alpha-1} + v_{2^{h_s}} \sum_{k=0}^{n^{(s-1)}} A_{n^{(s-1)}-k}^{\alpha-1} \bar{D}_k. \end{aligned}$$

Ezeknek az egyenlőségeknek a segítségével az alábbi azonossághoz jutunk:

$$K_{n^{(s)}}^\alpha = T_{n^{(s)}}^\alpha + \frac{A_{n^{(s-1)}}^\alpha}{A_{n^{(s)}}^\alpha} D_{2^{h_s}} + \frac{A_{n^{(s-1)}}^\alpha}{A_{n^{(s)}}^\alpha} v_{2^{h_s}} \bar{K}_{n^{(s-1)}}^\alpha.$$

De $n^{(s-1)} < 2^{h_{(s-1)+1}}$, ahol $n^{(s-1)} = 2^{h_0} + \dots + 2^{h_{s-1}}$. A 2.7 alapján azt kapjuk, hogy ha $n^{(s-1)} \geq C_\alpha$, akkor

$$\frac{A_{n^{(s-1)}}^\alpha}{A_{n^{(s)}}^\alpha} \leq \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^{\alpha(h_s - h_{s-1})}.$$

Tehát,

$$|K_{n^{(s)}}^\alpha| \leq |T_{n^{(s)}}^\alpha| + \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^{\alpha(h_s - h_{s-1})} (D_{2^{h_s}} + |K_{n^{(s-1)}}^\alpha|).$$

Legyen $\tau = \min\{j : n^{(j)} > C_\alpha\}$ ahol C_α definícióját lásd a 2.7 Lemmában. Alkalmazzuk ezt a formulát rekurzívan. Ekkor

$$\begin{aligned} |K_{n^{(s)}}^\alpha| &\leq |T_{n^{(s)}}^\alpha| + \sum_{l=\tau}^s \prod_{j=l}^s \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^{\alpha(h_j - h_{j-1})} D_{2^{h_l}} \\ &+ \sum_{l=\tau}^s \prod_{j=l}^s \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^{\alpha(h_j - h_{j-1})} |T_{n^{(l-1)}}^\alpha| + \prod_{j=\tau}^s \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^{\alpha(h_j - h_{j-1})} |K_{n^{(\tau-1)}}^\alpha| \\ &=: G_1 + G_2 + G_3 + G_4. \end{aligned}$$

Mivel $n^{(s)} = n \geq 2^A$, ezért a 2.23. Lemma miatt adódik, hogy

$$\int_{\bar{I}_k} \sup_{n \geq 2^A} G_1 d\lambda \leq \int_{\bar{I}_k} \sup_{n \geq 2^A} |T_n^\alpha| d\lambda \leq C_\alpha \left(\frac{2^k}{2^A} \right)^\delta,$$

$$\text{ahol } \delta = \min \left\{ \frac{\alpha}{2}, \frac{1}{4} \right\}.$$

Vizsgáljuk a G_2 magfüggvényt! Ha $x \in \bar{I}_k$ és $h_l \geq k$, akkor $D_{2^{h_l}}(x) = 0$. Tehát

$$\begin{aligned} \int_{\bar{I}_k} \sup_{n \geq 2^A} G_2 d\lambda &= \int_{\bar{I}_k} \sup_{n \geq 2^A} \sum_{\{l: \tau \leq l, h_l < k\}} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^{\alpha(h_s - h_{l-1})} D_{2^{h_l}}(x) d\lambda(x) \\ &\leq \sum_{i=0}^{k-1} \int_{I_i \setminus I_{i+1}} \sup_{n \geq 2^A} \sum_{\{l: \tau \leq l, h_l \leq i\}} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^{\alpha(h_s - h_{l-1})} 2^{h_l} d\lambda(x) \\ &\leq C \cdot \sum_{i=0}^{k-1} \frac{1}{2^{i+1}} \sup_{n \geq 2^A} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^{\alpha(h_s - i)} 2^i \\ &\leq C \cdot \sum_{i=0}^{k-1} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^{\alpha(A-i)} \leq C_\alpha \left(\frac{2^k}{2^A} \right)^{\frac{\alpha}{2}}. \end{aligned}$$

Emlékeztetünk arra, hogy $|n| = h_s \geq A$. A G_3 magfüggvényt az alábbi módon becsülhetjük:

$$\begin{aligned} G_3 &= \sum_{l=\tau}^s \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^{\alpha(h_s - h_{l-1})} |T_{n^{(l-1)}}^\alpha| \\ &\leq \sum_{h_s=A}^{\infty} \sum_{h=k+1}^{h_s} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^{\alpha(h_s - h)} \sup_{N \geq 2^h} |T_N^\alpha| \\ &\quad + \sum_{h_s=A}^{\infty} \sum_{h=0}^k \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^{\alpha(h_s - h)} \sup_{N \geq 2^h} |T_N^\alpha| =: G_{3,1} + G_{3,2}. \end{aligned}$$

A 2.23 Lemmát használva kapjuk a $G_{3,1}$ tagra vonatkozó becslést:

$$\begin{aligned} \int_{\bar{I}_k} \sup_{n \geq 2^A} G_{3,1} d\lambda &\leq \sum_{h_s=A}^{\infty} \sum_{h=k+1}^{h_s} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{\alpha(h_s-h)} \int_{\bar{I}_k} \sup_{N \geq 2^h} |T_N^\alpha| d\lambda \\ &\leq C_\alpha \sum_{h_s=A}^{\infty} \sum_{h=k+1}^{h_s} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{\alpha(h_s-h)} \cdot \left(\frac{2^k}{2^h}\right)^\delta \\ &\leq C_\alpha \sum_{h_s=A}^{\infty} \left(\frac{2^k}{2^{h_s}}\right)^\delta \leq C_\alpha \left(\frac{2^k}{2^A}\right)^\delta. \end{aligned}$$

A következő lépésben térjünk át $G_{3,2}$ vizsgálatára. A 2.24 Lemma alapján az alábbi becslést kapjuk

$$\begin{aligned} \int_{\bar{I}_k} \sup_{n \geq 2^A} G_{3,2} d\lambda &\leq \sum_{h_s=A}^{\infty} \sum_{h=0}^k \left(\frac{2^h}{2^A}\right)^{\alpha/2} \int_{\bar{I}_k} \sup_{N \geq 2^h} |T_N^\alpha| d\lambda \\ &\leq C_\alpha \sum_{h_s=A}^{\infty} \sum_{h=0}^k \left(\frac{2^h}{2^A}\right)^{\alpha/2} (k-h) \leq C_\alpha \left(\frac{2^k}{2^A}\right)^{\alpha/2}. \end{aligned}$$

A G_4 tag becslése egyszerű, mivel $n^{(\tau-1)} \leq 2^\tau$ miatt $|K_{n^{(\tau-1)}}^\alpha(x)| \leq C_\alpha$ becslés mindenhol teljesül. (τ definíciója: $\min\{j : n^{(j)} > C_\alpha\}$) Ez alapján kapjuk, hogy

$$\int_{\bar{I}_k} \sup_{n \geq 2^k} G_4 d\lambda \leq C_\alpha.$$

Ezzel teljes a bizonyítás. \square

A következő részben legyen $0 < \alpha < 1$ és $|n| := B$. Először definiáljuk a M_n^α magfüggvényt az alábbi módon:

$$M_n^\alpha(x^1, x^2) := \frac{1}{A_n^\alpha} \sum_{j=0}^{2^B} A_{n-j}^{\alpha-1} D_j(x^1) D_j(x^2) \quad (x^1, x^2 \in I).$$

2.26. LEMMA (Gát-Lucskai [D]). *Legyen $n \in \mathbb{N}$, $z^1, z^2 \in I$. Ekkor*

$$|M_n^\alpha(z^1, z^2)| \leq T_B^1(z^1, z^2) + \sum_{u=2}^5 \sum_{i=1}^2 T_B^u(z^i, z^{3-i}) + T_B^6(z^1, z^2) + T_B^7(z^1, z^2),$$

ahol

$$\begin{aligned}
T_B^1(z^1, z^2) &:= D_{2^B}(z^1)D_{2^B}(z^2), \\
T_B^2(z^i, z^{3-i}) &:= (1 - \alpha)D_{2^B}(z^{3-i}) \sum_{l=0}^{B-1} \sum_{t=2^l}^{2^{l+1}-1} \frac{A_t^{\alpha-1}}{A_n^\alpha} |K_t^1(z^i)|, \\
T_B^3(z^i, z^{3-i}) &:= D_{2^B}(z^{3-i}) \sum_{l=0}^{B-1} 2^{(l+1-B)\alpha} |K_{2^{l+1}}^1(z^i)|, \\
T_B^4(z^i, z^{3-i}) &:= (1 - \alpha)D_{2^B}(z^{3-i}) \sum_{l=0}^{B-1} 2^{(l+1-B)\alpha} |K_{2^l}^1(z^i)|, \\
T_B^5(z^i, z^{3-i}) &:= D_{2^B}(z^{3-i}) \sum_{l=0}^{B-1} 2^{(l+1-B)\alpha} |K_{2^l}^1(z^i)|, \\
T_B^6(z^1, z^2) &:= (1 - \alpha) \frac{1}{A_{2^B}^\alpha} \sum_{t=0}^{2^B-1} A_t^{\alpha-1} |K_t(z^1, z^2)|, \\
T_B^7(z^1, z^2) &:= |K_{2^{B-1}}(z^1, z^2)|,
\end{aligned}$$

és $i = 1$ vagy 2 .

BIZONYÍTÁS. Először felhasználjuk, hogy $n = n_{(B)} + 2^B$, mivel $|n| = B$, így azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
M_n^\alpha &= \frac{1}{A_n^\alpha} \sum_{j=0}^{2^B} A_{n_{(B)}+2^B-j}^{\alpha-1} D_j(z^1)D_j(z^2) = \frac{1}{A_n^\alpha} \sum_{t=0}^{2^B} A_{n_{(B)}+t}^{\alpha-1} D_{2^B-t}(z^1)D_{2^B-t}(z^2) \\
&= \frac{1}{A_n^\alpha} \sum_{t=0}^{2^B-1} A_{n_{(B)}+t}^{\alpha-1} D_{2^B-t}(z^1)D_{2^B-t}(z^2).
\end{aligned}$$

Továbbá, alkalmazzuk a 2.1 Lemmát. Ekkor

$$\begin{aligned}
A_n^\alpha M_n^\alpha(z^1, z^2) &= \sum_{t=0}^{2^B-1} A_{n_{(B)}+t}^{\alpha-1} D_{2^B-t}(z^1)D_{2^B-t}(z^2) \\
&= \sum_{t=0}^{2^B-1} A_{n_{(B)}+t}^{\alpha-1} [D_{2^B}(z^1) - v_{2^B-1}(z^1)\bar{D}_t(z^1)] \cdot [D_{2^B}(z^2) - v_{2^B-1}(z^2)\bar{D}_t(z^2)]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{t=0}^{2^B-1} A_{n_{(B)+t}}^{\alpha-1} [D_{2^B}(z^1)D_{2^B}(z^2) - v_{2^B-1}(z^1)\bar{D}_t(z^1)D_{2^B}(z^2) \\
&\quad - v_{2^B-1}(z^2)\bar{D}_t(z^2)D_{2^B}(z^1) + v_{2^B-1}(z^1)v_{2^B-1}(z^2)\bar{D}_t(z^1)\bar{D}_t(z^2)] \\
&=: (I) + (II) + (III) + (IV).
\end{aligned}$$

Először az (I) függvény vizsgáljuk:

$$\left| \frac{1}{A_n^\alpha} (I) \right| \leq D_{2^B}(z^1)D_{2^B}(z^2) \frac{1}{A_n^\alpha} \sum_{t=0}^{2^B-1} A_{n_{(B)+t}}^{\alpha-1} \leq D_{2^B}(z^1)D_{2^B}(z^2) = T_B^1(z^1, z^2).$$

A (II) és (III) függvényeket együttesen vizsgáljuk az alábbi alakban:

$$\begin{aligned}
&\left| \frac{1}{A_n^\alpha} \sum_{t=0}^{2^B-1} A_{n_{(B)+t}}^{\alpha-1} D_t(z^i) D_{2^B}(z^{3-i}) \right| \\
&= \left| \frac{1}{A_n^\alpha} D_{2^B}(z^{3-i}) \sum_{l=0}^{B-1} \sum_{t=2^l}^{2^{l+1}-1} A_{n_{(B)+t}}^{\alpha-1} D_t(z^i) \right| =: D_{2^B}(z^{3-i}) \left| \frac{1}{A_n^\alpha} \sum_{l=0}^{B-1} V_l(z^i) \right|,
\end{aligned}$$

ahol $i = 1$ vagy 2 . A $V_l(z^i)$ kifejezésre alkalmazzuk az Abel-transzformációt. Ekkor

$$\begin{aligned}
V_l(z^i) &:= \sum_{t=2^l}^{2^{l+1}-1} A_{n_{(B)+t}}^{\alpha-1} D_t(z^i) \\
&= \sum_{t=2^l}^{2^{l+1}-1} (A_{n_{(B)+t}}^{\alpha-1} - A_{n_{(B)+t+1}}^{\alpha-1}) \sum_{j=2^l}^t D_j(z^i) + A_{n_{(B)+2^{l+1}}}^{\alpha-1} \sum_{t=2^l}^{2^{l+1}-1} D_t(z^i) \\
&= \sum_{t=2^l}^{2^{l+1}-1} (A_{n_{(B)+t}}^{\alpha-1} - A_{n_{(B)+t+1}}^{\alpha-1})(t+1)K_t^1(z^i) + A_{n_{(B)+2^{l+1}}}^{\alpha-1} \cdot 2^{l+1}K_{2^{l+1}-1}^1(z^i) - \\
&\quad - \sum_{t=2^l}^{2^{l+1}-1} (A_{n_{(B)+t}}^{\alpha-1} - A_{n_{(B)+t+1}}^{\alpha-1})2^l K_{2^l-1}^1(z^i) - A_{n_{(B)+2^{l+1}}}^{\alpha-1} 2^l K_{2^l-1}^1(z^i) \\
&=: (A) + (B) + (C) + (D).
\end{aligned}$$

Az (A) függvény vizsgálatával kezdünk:

$$\begin{aligned}
D_{2^B}(z^{3-i}) & \left| \sum_{l=0}^{B-1} \frac{1}{A_n^\alpha}(A) \right| \\
& = D_{2^B}(z^{3-i}) \left| \sum_{l=0}^{B-1} \frac{1}{A_n^\alpha} \sum_{t=2^l}^{2^{l+1}-1} (A_{n_{(B)+t}^{\alpha-1}} - A_{n_{(B)+t+1}^{\alpha-1}})(t+1)K_t^1(z^i) \right| \\
& \leq (1-\alpha)D_{2^B}(z^{3-i}) \sum_{l=0}^{B-1} \sum_{t=2^l}^{2^{l+1}-1} \frac{t+1}{n_{(B)}+t+1} \frac{A_{n_{(B)+t}^{\alpha-1}}}{A_n^\alpha} |K_t^1(z^i)| \\
& \leq (1-\alpha)D_{2^B}(z^{3-i}) \sum_{l=0}^{B-1} \sum_{t=2^l}^{2^{l+1}-1} \frac{A_t^{\alpha-1}}{A_n^\alpha} |K_t^1(z^i)|.
\end{aligned}$$

Ez a becslés adja a T_B^2 függvényt. Míg a T_B^3 függvény a következő számításból következik:

$$\begin{aligned}
D_{2^B}(z^{3-i}) \left| \sum_{l=0}^{B-1} \frac{1}{A_n^\alpha}(B) \right| & \leq D_{2^B}(z^{3-i}) \sum_{l=0}^{B-1} \frac{A_{n_{(B)+2^{l+1}}^{\alpha-1}} \cdot 2^{l+1}}{A_n^\alpha} |K_{2^{l+1}-1}^1(z^i)| \\
& \leq D_{2^B}(z^{3-i}) \sum_{l=0}^{B-1} \frac{A_{2^{l+1}}^{\alpha-1} \cdot 2^{l+1}}{A_n^\alpha} |K_{2^{l+1}-1}^1(z^i)| \\
& \leq D_{2^B}(z^{3-i}) \sum_{l=0}^{B-1} \frac{A_{2^{l+1}}^\alpha}{A_{2^B}^\alpha} |K_{2^{l+1}-1}^1(z^i)| \\
& \leq D_{2^B}(z^{3-i}) \sum_{l=0}^{B-1} 2^{(l+1-B)\alpha} |K_{2^{l+1}-1}^1(z^i)|.
\end{aligned}$$

A (C) eset vizsgálata után kapjuk meg a T_B^4 kifejezést:

$$\begin{aligned}
D_{2^B}(z^{3-i}) \left| \sum_{l=0}^{B-1} \frac{1}{A_n^\alpha}(C) \right| & = \\
& = D_{2^B}(z^{3-i}) \left| \frac{1}{A_n^\alpha} \sum_{l=0}^{B-1} \sum_{t=2^l}^{2^{l+1}-1} (A_{n_{(B)+t}^{\alpha-1}} - A_{n_{(B)+t+1}^{\alpha-1}})2^l K_{2^l-1}^1(z^i) \right|
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq (1 - \alpha) D_{2^B}(z^{3-i}) \sum_{l=0}^{B-1} \sum_{t=2^l}^{2^{l+1}-1} \frac{A_{n_{(B)+t}}^{\alpha-1}}{A_n^\alpha} \frac{2^l}{n_{n_{(B)+t+1}}} \cdot |K_{2^{l-1}}^1(z^i)| \\
&\leq (1 - \alpha) D_{2^B}(z^{3-i}) \sum_{l=0}^{B-1} \sum_{t=2^l}^{2^{l+1}-1} \frac{A_t^{\alpha-1}}{A_{2^B}^\alpha} |K_{2^{l-1}}^1(z^i)| \\
&\leq (1 - \alpha) D_{2^B}(z^{3-i}) \sum_{l=0}^{B-1} \frac{A_{2^{l+1}}^\alpha}{A_{2^B}^\alpha} |K_{2^{l-1}}^1(z^i)| \\
&\leq (1 - \alpha) D_{2^B}(z^{3-i}) \sum_{l=0}^{B-1} 2^{(l+1-B)\alpha} |K_{2^{l-1}}^1(z^i)|.
\end{aligned}$$

A (D) esetben azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
D_{2^B}(z^{3-i}) \left| \sum_{l=0}^{B-1} \frac{1}{A_n^\alpha} (D) \right| &= D_{2^B}(z^{3-i}) \sum_{l=0}^{B-1} \frac{2^l A_{n_{(B)+2^{l+1}}}^{\alpha-1}}{A_n^\alpha} |K_{2^{l-1}}^1(z^i)| \\
&\leq D_{2^B}(z^{3-i}) \sum_{l=0}^{B-1} \frac{2^l A_{2^{l+1}}^{\alpha-1}}{A_n^\alpha} |K_{2^{l-1}}^1(z^i)| \\
&\leq D_{2^B}(z^{3-i}) \sum_{l=0}^{B-1} \frac{A_{2^{l+1}}^\alpha}{A_n^\alpha} |K_{2^{l-1}}^1(z^i)| \\
&\leq D_{2^B}(z^{3-i}) \sum_{l=0}^{B-1} 2^{(l+1-B)\alpha} |K_{2^{l-1}}^1(z^i)| = T_B^5(z^i, z^{3-i}).
\end{aligned}$$

A (IV) esetben alkalmazzuk az Abel-transzformációt:

$$\begin{aligned}
&\left| \sum_{t=0}^{2^B-1} A_{n_{(B)+t}}^{\alpha-1} D_t(z^1) D_t(z^2) \right| = \\
&= \left| \sum_{t=0}^{2^B-1} (A_{n_{(B)+t}}^{\alpha-1} - A_{n_{(B)+t+1}}^{\alpha-1}) \sum_{j=0}^t D_j(z^1) D_j(z^2) + A_{n_{(B)+2^B}}^{\alpha-1} \sum_{t=0}^{2^B-1} D_t(z^1) D_t(z^2) \right| \\
&\leq \left| \sum_{t=0}^{2^B-1} (A_{n_{(B)+t}}^{\alpha-1} - A_{n_{(B)+t+1}}^{\alpha-1}) (t+1) K_t(z^1, z^2) + A_{n_{(B)+2^B}}^{\alpha-1} 2^B K_{2^B-1}(z^1, z^2) \right|
\end{aligned}$$

$$\leq (1 - \alpha) \sum_{t=0}^{2^B-1} A_{n_{(B)+t}}^{\alpha-1} \frac{t+1}{n_{(B)}+t+1} |K_t(z^1, z^2)| + A_{n_{(B)+2^B}}^{\alpha-1} 2^B |K_{2^B-1}(z^1, z^2)|$$

$$=: |(IV.1)| + |(IV.2)|.$$

Ezeket az eseteket az előzőekhez hasonlóan fogjuk becsülni, azaz

$$\left| \frac{1}{A_n^\alpha} (IV.1) \right| = (1 - \alpha) \frac{1}{A_n^\alpha} \sum_{t=0}^{2^B-1} A_{n_{(B)+t}}^{\alpha-1} \frac{t+1}{n_{(B)+t+1}} |K_t(z^1, z^2)|$$

$$\leq (1 - \alpha) \frac{1}{A_{2^B}^\alpha} \sum_{t=0}^{2^B-1} A_t^{\alpha-1} |K_t(z^1, z^2)| = T_B^6(z^1, z^2),$$

és

$$\left| \frac{1}{A_n^\alpha} (IV.2) \right| \leq \frac{2^B A_{n_{(B)+2^B}}^{\alpha-1}}{A_n^\alpha} |K_{2^B-1}(z^1, z^2)| \leq \frac{2^B A_{2^B}^{\alpha-1}}{A_n^\alpha} |K_{2^B-1}(z^1, z^2)|$$

$$\leq \frac{A_{2^B}^\alpha}{A_n^\alpha} |K_{2^B-1}(z^1, z^2)| \leq |K_{2^B-1}(z^1, z^2)| = T_B^7(z^1, z^2).$$

A bizonyítás ezzel teljes. \square

2.27. LEMMA (Gát-Lucskai [D]). *Legyen $k \in \mathbb{N}$ és $|n| = B$. Ekkor*

$$\int_{\bar{I}_k \times I_k} \sup_{n \geq 2^k} T_B^u(z^1, z^2) d(z^1, z^2) \leq C_\alpha,$$

teljesül $u = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ esetén, ahol C_α csak az α -tól függő konstans.

BIZONYÍTÁS. Legyen $u = 1$,

$$\int_{\bar{I}_k \times I_k} \sup_{n \geq 2^k} |D_{2^B}(z^1) D_{2^B}(z^2)| d(z^1, z^2) = 0,$$

mivel $k \leq B = |n|$, ekkor $z^i \in \bar{I}_k$ és $D_{2^B}(y^i - x^i) = 0$, ahol i értéke vagy 1 vagy 2.

Ha $u = 2, 3, 4, 5$ és $i = 1$ (az $i = 2$ eset hasonlóan kezelhető), akkor

$$\int_{\bar{I}_k \times I_k} \sup_{n \geq 2^k} T_B^u(z^1, z^2) d(z^1, z^2) = \int_{(\bar{I}_k \times I_k) \cup (I_k \times \bar{I}_k) \cup (\bar{I}_k \times \bar{I}_k)} \sup_{n \geq 2^k} T_B^u(z^1, z^2) d(z^1, z^2)$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{\bar{I}_k \times I_k} \sup_{n \geq 2^k} T_B^u(z^1, z^2) d(z^1, z^2) \\
&\quad + \int_{I_k \times \bar{I}_k} \sup_{n \geq 2^k} T_B^u(z^1, z^2) d(z^1, z^2) + \int_{\bar{I}_k \times \bar{I}_k} \sup_{n \geq 2^k} T_B^u(z^1, z^2) d(z^1, z^2).
\end{aligned}$$

Az utolsó két integrál értéke 0, mivel ha $z^2 \in \bar{I}_k$, akkor $D_{2^B}(z^2) = 0$.
Az $u = 2$ esetben azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
&\int_{\bar{I}_k \times I_k} \sup_{n \geq 2^B} T_B^2(z^1, z^2) d(z^1, z^2) \\
&= (1 - \alpha) \int_{\bar{I}_k \times I_k} \sup_{n \geq 2^k} D_{2^B}(z^2) \sum_{l=0}^{B-1} \sum_{t=2^l}^{2^{l+1}-1} \frac{A_t^{\alpha-1}}{A_n^\alpha} |K_t^1(z^1)| d(z^1, z^2) \\
&\leq C_\alpha \int_{\bar{I}_k \times I_k} \sup_{n \geq 2^k} D_{2^B}(z^2) \sum_{l=0}^{B-1} \frac{2^l \cdot 2^{l(\alpha-1)}}{2^{B\alpha}} \sup_{|t|=l} |K_t^1(z^1)| d(z^1, z^2) \\
&\leq C_\alpha \int_{\bar{I}_k} \int_{I_k} \sum_{B=k}^{\infty} D_{2^B}(z^2) \sum_{l=0}^{B-1} \frac{2^{l\alpha}}{2^{B\alpha}} \sup_{|t|=2^l} |K_t^1(z^1)| dz^1 dz^2 \\
&\leq C_\alpha \sum_{B=k}^{\infty} \sum_{l=0}^{B-1} \frac{2^{l\alpha}}{2^{B\alpha}} \int_{I_k} D_{2^B}(z^2) dz^2 \int_{\bar{I}_k} \sup_{|t|=l} |K_t^1(z^1)| dz^1 \\
&\leq C_\alpha \sum_{B=k}^{\infty} \sum_{l=0}^{B-1} \frac{2^{l\alpha}}{2^{B\alpha}} \int_{\bar{I}_k} \sup_{|t|=l} |K_t^1(z^1)| dz^1 \\
&\leq C_\alpha \sum_{B=k}^{\infty} \sum_{l=0}^{k-1} \frac{2^{l\alpha}}{2^{B\alpha}} (k-l) + \sum_{B=k}^{\infty} \sum_{l=k}^{B-1} \frac{2^{l\alpha}}{2^{B\alpha}} \sqrt{\frac{2^k}{2^l}} \\
&\leq C_\alpha + \sum_{B=k}^{\infty} \sum_{l=k}^{B-1} \frac{2^{l(\alpha-1/2)} 2^{k/2}}{2^{B\alpha}} =: C_\alpha + (A),
\end{aligned}$$

ahol a 2.4 Lemmát használtuk. Az α értékétől függően három esetet különböztetünk meg:

$$\begin{aligned} \alpha > \frac{1}{2} : \quad (A) &\leq C_\alpha \sum_{B=k}^{\infty} \frac{2^{B(\alpha-1/2)} 2^{k/2}}{2^{B\alpha}} \leq \sum_{B=k}^{\infty} \frac{2^{k/2}}{2^{B/2}} \leq C_\alpha, \\ \alpha = \frac{1}{2} : \quad (A) &= C_\alpha \sum_{B=k}^{\infty} \sum_{l=k}^{B-1} \frac{2^{k/2}}{2^{B/2}} = C_\alpha \sum_{B=k}^{\infty} (B-k) \frac{2^{k/2}}{2^{B/2}} \leq C_\alpha, \\ \alpha < \frac{1}{2} : \quad (A) &\leq C_\alpha \sum_{B=k}^{\infty} \frac{2^{k(\alpha-1/2)} 2^{k/2}}{2^{B\alpha}} = C_\alpha \sum_{B=k}^{\infty} \frac{2^{k\alpha}}{2^{B\alpha}} \leq C_\alpha. \end{aligned}$$

A következő esetben legyen $u = 3$ és használjuk fel a 2.6 Lemmát:

$$\begin{aligned} &\int_{\bar{I}_k \times I_k} \sup_{n \geq 2^k} T_B^3(z^1, z^2) d(z^1, z^2) \\ &= \int_{\bar{I}_k} \int_{I_k} \sup_{n \geq 2^k} D_{2^B}(z^2) \sum_{l=0}^{B-1} 2^{(l+1-B)\alpha} |K_{2^{l+1}}^1(z^1)| dz^1 dz^2 \\ &\leq \int_{I_k} \int_{\bar{I}_k} \sum_{B=k}^{\infty} D_{2^B}(z^2) \sum_{l=0}^{B-1} 2^{(l+1-B)\alpha} |K_{2^{l+1}}^1(z^1)| dz^1 dz^2 \\ &\leq \sum_{B=k}^{\infty} \sum_{l=0}^{B-1} 2^{(l+1-B)\alpha} \int_{I_k} D_{2^B}(z^2) dz^2 \int_{\bar{I}_k} |K_{2^{l+1}}^1(z^1)| dz^1 \\ &\leq \sum_{B=k}^{\infty} \sum_{l=0}^{k-1} C 2^{(l+1-B)\alpha} (k-l) + \sum_{B=k}^{\infty} \sum_{l=k}^{B-1} C 2^{(l+1-B)\alpha} \cdot \sqrt{\frac{2^k}{2^l}} \\ &\leq C_\alpha + C_\alpha \cdot \sum_{B=k}^{\infty} 2^{-B\alpha+k/2} \sum_{l=k}^{B-1} 2^{l(\alpha-1/2)} := C_\alpha + (S). \end{aligned}$$

Az α értékétől függően három esetet különböztetünk meg:

$$\alpha > \frac{1}{2} : \quad (S) \leq C_\alpha \cdot \sum_{B=k}^{\infty} 2^{-B\alpha+k/2} \cdot 2^{B(\alpha-1/2)} = C_\alpha \sum_{B=k}^{\infty} \frac{2^{k/2}}{2^{B/2}} \leq C_\alpha,$$

$$\alpha = \frac{1}{2} : \quad (S) \leq C_\alpha \sum_{B=k}^{\infty} 2^{-B\alpha+k/2} (B-k) \leq C_\alpha,$$

$$\alpha < \frac{1}{2} : \quad (S) \leq C_\alpha \cdot \sum_{B=k}^{\infty} 2^{-B\alpha+k/2} \cdot 2^{k(\alpha-1/2)} = \sum_{B=k}^{\infty} \frac{2^{k\alpha}}{2^{B\alpha}} \leq C_\alpha.$$

Az $u = 4$ és $u = 5$ eset bizonyítása az előző esethez hasonlóan történik.

Legyen $u = 6$. Ekkor a 2.20 Lemma alapján kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} & \int_{I_k \times I_k} \sup_{n \geq 2^k} T_k^6(z^1, z^2) d(z^1, z^2) \\ &= \int_{I_k \times I_k} \sup_{n \geq 2^k} (1 - \alpha) \frac{1}{A_{2^B}^\alpha} \sum_{t=0}^{2^B-1} A_t^{\alpha-1} |K_t(z^1, z^2)| d(z^1, z^2) \\ &\leq C_\alpha \int_{I_k \times I_k} \sup_{n \geq 2^k} \frac{1}{A_{2^B}^\alpha} \sum_{t=0}^{2^k-1} A_t^{\alpha-1} |K_t(z^1, z^2)| d(z^1, z^2) \\ &+ C_\alpha \int_{I_k \times I_k} \sup_{n \geq 2^k} \frac{1}{A_{2^B}^\alpha} \sum_{t=2^k}^{2^B-1} A_t^{\alpha-1} |K_t(z^1, z^2)| d(z^1, z^2) =: i_1 + i_2. \end{aligned}$$

Az első egyenlőtlenség egyszerűen következik a 2.20 Lemmából

$$i_1 \leq C_\alpha \int_{I_k \times I_k} \sup_{n \geq 2^k} |K_t(z^1, z^2)| d(z^1, z^2) \leq C_\alpha.$$

Valamint alkalmazzuk az (4) egyenlőséget. Így az alábbi becslést kapjuk

$$\begin{aligned} i_2 &\leq C_\alpha \int_{I_k \times I_k} \sup_{n \geq 2^k} \frac{1}{A_{2^B}^\alpha} \sum_{l=k}^{B-1} \sum_{t=2^l}^{2^{l+1}-1} A_t^{\alpha-1} |K_t(z^1, z^2)| d(z^1, z^2) \\ &\leq C_\alpha \int_{I_k \times I_k} \sup_{n \geq 2^k} \frac{1}{A_{2^B}^\alpha} \sum_{l=k}^{B-1} A_{2^{l+1}}^\alpha \sup_{2^l \leq t < 2^{l+1}} |K_t(z^1, z^2)| d(z^1, z^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq C_\alpha \sum_{B=k}^{\infty} \sum_{l=k}^{B-1} 2^{(l-B)\alpha} \int_{\overline{I_k \times I_k}} \sup_{|l|=l} |K_l(z^1, z^2)| d(z^1, z^2) \\
&\leq C_\alpha \sum_{B=k}^{\infty} \sum_{l=k}^{B-1} 2^{(l-B)\alpha} 2^{(k-l)/3} = C_\alpha \sum_{B=k}^{\infty} \sum_{l=k}^{B-1} \frac{2^{l(\alpha-1/3)} 2^{k/3}}{2^{B\alpha}} =: (B).
\end{aligned}$$

Az α értékétől függően három esetünk van:

$$\begin{aligned}
\alpha > \frac{1}{3} : \quad (B) &\leq C_\alpha \sum_{B=k}^{\infty} \frac{2^{B(\alpha-1/3)} 2^{k/3}}{2^{B\alpha}} \leq \sum_{B=k}^{\infty} \frac{2^{k/3}}{2^{B/3}} \leq C_\alpha, \\
\alpha = \frac{1}{3} : \quad (B) &= C_\alpha \sum_{B=k}^{\infty} \sum_{l=k}^{B-1} \frac{2^{k/3}}{2^{B/3}} = C_\alpha \sum_{B=k}^{\infty} (B-k) \frac{2^{k/3}}{2^{B/3}} \leq C_\alpha, \\
\alpha < \frac{1}{3} : \quad (B) &\leq C_\alpha \sum_{B=k}^{\infty} \frac{2^{k(\alpha-1/3)} 2^{k/3}}{2^{B\alpha}} = C_\alpha \sum_{B=k}^{\infty} \frac{2^{k\alpha}}{2^{B\alpha}} \leq C_\alpha.
\end{aligned}$$

Végezetül, legyen $u = 7$. A 2.20. Lemmát használjuk ismét. Ekkor

$$\begin{aligned}
\int_{\overline{I_k \times I_k}} \sup_{n \geq 2^k} T_B^7(z^1, z^2) d(z^1, z^2) &= \int_{\overline{I_k \times I_k}} \sup_{n \geq 2^k} |K_{2^{B-1}}(z^1, z^2)| d(z^1, z^2) \\
&\leq \int_{\overline{I_k \times I_k}} \sup_{|l| \geq k} |K_l(z^1, z^2)| d(z^1, z^2) \leq C_\alpha.
\end{aligned}$$

□

2.28. LEMMA (Gát-Lucskai [D]). *Legyen $f \in L^1(I^2)$ olyan, hogy $\text{supp } f \subset I_k \times I_k$ és $\int f = 0$. Ekkor*

$$\int_{\overline{I_k \times I_k}} \sup_{n \geq 2^k} |f * T_B^u| d\lambda \leq C_\alpha \cdot \|f\|_1,$$

ahol $u = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$.

BIZONYÍTÁS. Alkalmazzuk az előző lemmát. Ekkor

$$\begin{aligned} \int_{I_k \times I_k} \sup_{n \geq 2^k} |f * T_B^u| \, d\lambda &= \int_{I_k \times I_k} \sup_{n \geq 2^k} \int_{I_k \times I_k} |f(x) \cdot T_B^u(y-x)| \, dx \, dy \\ &\leq \int_{I_k \times I_k} |f(y-x)| \int_{I_k \times I_k} \sup_{n \geq 2^k} T_B^u(y) \, dy \, dx \leq C_\alpha \cdot \|f\|_1. \end{aligned}$$

□

2.29. LEMMA (Gát-Lucskai [D]). *Legyen $f \in L^1(I^2)$. Teljesülnek az alábbi egyenlőtlenségek*

- (i) $\left\| \sup_{t \in \mathbb{N}} |f * K_t| \right\|_\infty \leq C \cdot \|f\|_\infty,$
- (ii) $\left\| \sup_{B, l \in \mathbb{N}} |f * (|K_l| \times D_{2^B})| \right\|_\infty \leq C \cdot \|f\|_\infty,$
- (iii) $\left\| \sup_{B, l \in \mathbb{N}} |f * (|K_l^{1,\alpha}| \times D_{2^B})| \right\|_\infty \leq C \cdot \|f\|_\infty.$

BIZONYÍTÁS. Az első eset 2.2. Következményből kapjuk:

$$\left\| \sup_{t \in \mathbb{N}} |f * K_t| \right\|_\infty \leq \|f\|_\infty \left(\sup_{t \in \mathbb{N}} \|K_t\|_1 \right) \leq C \|f\|_\infty.$$

A második esetet a 2.1 Következményből kapjuk:

$$\begin{aligned} &|f * (K_l \times D_{2^B})(x^1, x^2)| \\ &= \left| \int_{I \times I} |f(y^1, y^2)| |K_l(y^1 - x^1)| \cdot D_{2^B}(y^2 - x^2) \, d(y^1, y^2) \right| \\ &\leq \|f\|_\infty \cdot \int_{I \times I} |K_l(x^1)| \cdot D_{2^B}(x^2) \, d(x^1, x^2) \leq C \cdot \|f\|_\infty. \end{aligned}$$

Tehát,

$$\left\| \sup_{B, l \in \mathbb{N}} |f * (K_l \times D_{2^B})| \right\|_\infty \leq C \cdot \|f\|_\infty.$$

Az utolsó egyenlőtlenséget pedig 2.2 Következményből kapjuk:

$$|f * (K_l \times D_{2^B})(x^1, x^2)|$$

$$\begin{aligned}
&= \left| \int_{I \times I} |f(y^1, y^2)| |K_l^\alpha(y^1 - x^1)| \cdot |D_{2^B}(y^2 - x^2)| d(y^1, y^2) \right| \\
&\leq \|f\|_\infty \cdot \int_{I \times I} |K_l^\alpha(y^1 - x^1)| \cdot |D_{2^B}(x^2)| d(x^1, x^2) \leq C \cdot \|f\|_\infty.
\end{aligned}$$

Így,

$$\left\| \sup_{B, l \in \mathbb{N}} |f * (K_l^\alpha \times D_{2^B})| \right\|_\infty \leq C \cdot \|f\|_\infty.$$

A bizonyítás ezzel teljes. \square

2.30. LEMMA (Gát-Lucskai [D]). *Legyen $f \in L^1(I^2)$. Ekkor $u = 1, 2, \dots, 7$ esetén a $\sup_{B \in \mathbb{N}} |f * T_B^u|$ operátorok (L^∞, L^∞) -típusúak.*

BIZONYÍTÁS. Az előző lemma és a $\|T_B^u\|_1 \leq C_\alpha$ ($u = 1, 2, \dots, 7$) egyenlőtlenségek felhasználásával adódik. \square

2.31. LEMMA (Gát-Lucskai [D]). *Legyen $f \in L^1(I^2)$. Ekkor $u = 1, 2, \dots, 7$ esetén a $\sup_{n \in \mathbb{N}} |f * T_B^u|$ operátor gyengén (L^1, L^1) -típusú.*

BIZONYÍTÁS. A 2.28 Lemmából kapjuk, hogy a $\sup_{n \in \mathbb{N}} |f * T_B^u|$ operátor (L^∞, L^∞) -típusú. A 2.31 Lemma mutatja, hogy ez az operátor kvázilokális. Felhasználva a standard eljárást (lásd például [27]) azt kapjuk, hogy a $\sup_{n \in \mathbb{N}} |f * T_B^u|$ operátor gyengén (L^1, L^1) -típus. \square

2.3. KÖVETKEZMÉNY (Gát-Lucskai [D]). *A $\sup_{n \in \mathbb{N}} |f * M_n^\alpha|$ operátor gyengén (L^1, L^1) -típusú.*

BIZONYÍTÁS. Gyengén (L^1, L^1) -típusú operátorok összege is gyengén (L^1, L^1) -típusú. \square

A folytatásban legyen $n = 2^{h_s} + \dots + 2^{h_0}$, ahol $h_s > \dots > h_0 \geq 0$ egész számok. Azaz $|n| = h_s$. Továbbá, legyen $n^{(j)} := 2^{h_j} + \dots + 2^{h_0}$, így $n = n^{(s)}$.

2.32. LEMMA (Gát-Lucskai [D]). *Legyen $n \in \mathbb{N}$, ekkor*

$$|K_n^\alpha(x^1, x^2)| \leq G_1(x^1, x^2) + \sum_{z=\tau}^s \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^{\alpha(h_s - h_{z-1})} \sum_{j=2}^5 G_j(x^1, x^2) + G_6(x^1, x^2),$$

ahol

$$\begin{aligned} G_1(x^1, x^2) &= |M_{n^{(s)}}^\alpha(x^1, x^2)|, \\ G_2(x^1, x^2) &= D_{2^{h_s}}(x^1)D_{2^{h_s}}(x^2), \\ G_3(x^1, x^2) &= D_{2^{h_s}}(x^2) |K_{n^{(s-1)}}^{1,\alpha}(x^1)|, \\ G_4(x^1, x^2) &= D_{2^{h_s}}(x^1) |K_{n^{(s-1)}}^{1,\alpha}(x^2)|, \\ G_5(x^1, x^2) &= |M_{n^{(s-1)}}^\alpha(x^1, x^2)|, \\ G_6(x^1, x^2) &= \prod_{j=\tau}^s \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^{\alpha(h_s - h_{z-1})} |K_{n^{(s-1)}}^\alpha(x^1, x^2)|. \end{aligned}$$

BIZONYÍTÁS. Első lépésként alakítsuk át $K_{n^{(s)}}^\alpha$ magfüggvény az alábbiak szerint:

$$\begin{aligned} (1) \quad K_{n^{(s)}}^\alpha &= \frac{1}{A_{n^{(s)}}^\alpha} \sum_{j=0}^{n^{(s)}} A_{n^{(s)}-j}^{\alpha-1} D_{j,j} \\ &= \frac{1}{A_{n^{(s)}}^\alpha} \sum_{j=0}^{2^{h_s}} A_{n^{(s)}-j}^{\alpha-1} D_{j,j} + \frac{1}{A_{n^{(s)}}^\alpha} \sum_{j=2^{h_s}}^{n^{(s)}} A_{n^{(s)}-j}^{\alpha-1} D_{j,j} \\ &= M_n^\alpha + \frac{1}{A_{n^{(s)}}^\alpha} \sum_{j=2^{h_s}}^{n^{(s)}} A_{n^{(s)}-j}^{\alpha-1} D_{j,j}. \end{aligned}$$

Mivel $n = n^{(s)} = 2^{h_s} + n^{(s-1)}$, így azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \sum_{j=2^{h_s}}^{2^{h_s} + n^{(s-1)}} A_{2^{h_s} + n^{(s-1)} - j}^{\alpha-1} D_j(x^1) D_j(x^2) &= \sum_{k=0}^{n^{(s-1)}} A_{n^{(s-1)} - k}^{\alpha-1} D_{2^{h_s} + k}(x^1) D_{2^{h_s} + k}(x^2) \\ &= \sum_{k=0}^{n^{(s-1)}} A_{n^{(s-1)} - k}^{\alpha-1} (D_{2^{h_s}}(x^1) + v_{2^{h_s}}(x^1) D_k(x^1)) (D_{2^{h_s}}(x^2) + v_{2^{h_s}}(x^2) D_k(x^2)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= D_{2^{h_s}}(x^1)D_{2^{h_s}}(x^2) \sum_{k=0}^{n^{(s-1)}} A_{n^{(s-1)}-k}^{\alpha-1} + v_{2^{h_s}}(x^2)D_{2^{h_s}}(x^1) \sum_{k=0}^{n^{(s-1)}} A_{n^{(s-1)}-k}^{\alpha-1} D_k(x^2) \\
&\quad + v_{2^{h_s}}(x^1)D_{2^{h_s}}(x^2) \sum_{k=0}^{n^{(s-1)}} A_{n^{(s-1)}-k}^{\alpha-1} D_k(x^1) \\
&\quad + v_{2^{h_s}}(x^1)v_{2^{h_s}}(x^2) \sum_{k=0}^{n^{(s-1)}} A_{n^{(s-1)}-k}^{\alpha-1} D_k(x^1)D_k(x^2) \\
&= A_{n^{(s-1)}}^\alpha D_{2^{h_s}}(x^1)D_{2^{h_s}}(x^2) + v_{2^{h_s}}(x^1)A_{n^{(s-1)}}^\alpha D_{2^{h_s}}(x^1)K_{n^{(s-1)}}^{1,\alpha}(x^2) \\
&\quad + v_{2^{h_s}}(x^2)A_{n^{(s-1)}}^\alpha D_{2^{h_s}}(x^2)K_{n^{(s-1)}}^{1,\alpha}(x^1) + v_{2^{h_s}}(x^1)v_{2^{h_s}}(x^2)A_{n^{(s-1)}}^\alpha K_{n^{(s-1)}}^\alpha(x^1, x^2).
\end{aligned}$$

Ezt az egyenletet helyettesítsük be (1)-be. Ekkor

$$\begin{aligned}
K_{n^{(s)}}^\alpha(x^1, x^2) &= M_{n^{(s)}}^\alpha(x^1, x^2) + \frac{A_{n^{(s-1)}}^\alpha}{A_{n^{(s)}}} D_{2^{h_s}}(x^1)D_{2^{h_s}}(x^2) \\
&\quad + v_{2^{h_s}}(x^1) \frac{A_{n^{(s-1)}}^\alpha}{A_{n^{(s)}}} D_{2^{h_s}}(x^1)K_{n^{(s-1)}}^{1,\alpha}(x^2) + v_{2^{h_s}}(x^2) \frac{A_{n^{(s-1)}}^\alpha}{A_{n^{(s)}}} D_{2^{h_s}}(x^2)K_{n^{(s-1)}}^{1,\alpha}(x^1) \\
&\quad + v_{2^{h_s}}(x^1)v_{2^{h_s}}(x^2) \frac{A_{n^{(s-1)}}^\alpha}{A_{n^{(s)}}} K_{n^{(s-1)}}^\alpha(x^1, x^2).
\end{aligned}$$

Mivel $n^{(s-1)} \leq 2^{h_s} - 1$, így a 2.7 Lemma alapján

$$\frac{A_{n^{(s-1)}}^\alpha}{A_{n^{(s)}}} \leq \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^{\alpha(h_s - h_{s-1})}.$$

teljesül $n^{(s-1)} \geq C_\alpha$ esetén. Azaz,

$$\begin{aligned}
|K_{n^{(s)}}^\alpha(x^1, x^2)| &\leq |M_{n^{(s)}}^\alpha(x^1, x^2)| + \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^{\alpha(h_s - h_{s-1})} D_{2^{h_s}}(x^1)D_{2^{h_s}}(x^2) \\
&\quad + \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^{\alpha(h_s - h_{s-1})} D_{2^{h_s}}(x^1) |K_{n^{(s-1)}}^{1,\alpha}(x^2)| \\
&\quad + \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^{\alpha(h_s - h_{s-1})} D_{2^{h_s}}(x^2) |K_{n^{(s-1)}}^{1,\alpha}(x^1)| \\
&\quad + \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^{\alpha(h_s - h_{s-1})} |K_{n^{(s-1)}}^\alpha(x^1, x^2)|.
\end{aligned}$$

Legyen $\tau := \min \{j : n^{(j)} > C_\alpha\}$, ahol a C_α értéke a 2.7 Lemma alapján adott. Alkalmazzuk rekurzívan az előző formulát:

$$\begin{aligned}
|K_{n^{(s)}}^\alpha(x^1, x^2)| &\leq |M_{n^{(s)}}^\alpha(x^1, x^2)| + \sum_{z=\tau}^s \prod_{j=z}^s \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{\alpha(h_j-h_{j-1})} D_{2^{h_z}}(x^1) D_{2^{h_z}}(x^2) \\
&\quad + \sum_{z=\tau}^s \prod_{j=z}^s \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{\alpha(h_j-h_{j-1})} D_{2^{h_z}}(x^2) |K_{n^{(z-1)}}^{1,\alpha}(x^1)| \\
&\quad + \sum_{z=\tau}^s \prod_{j=z}^s \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{\alpha(h_j-h_{j-1})} D_{2^{h_z}}(x^1) |K_{n^{(z-1)}}^{1,\alpha}(x^2)| \\
&\quad + \sum_{z=\tau}^s \prod_{j=z}^s \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{\alpha(h_j-h_{j-1})} |M_{n^{(z-1)}}^\alpha(x^1, x^2)| \\
&\quad + \prod_{j=\tau}^s \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{\alpha(h_j-h_{j-1})} |K_{n^{(\tau-1)}}^\alpha(x^1, x^2)|.
\end{aligned}$$

A bizonyítás ezzel kész. \square

2.33. LEMMA (Gát-Lucskai [D]). *Legyen $n = 2^{h_s} + \dots + 2^{h_0}$, ahol $h_s > \dots > h_0 \geq 0$ egész számok. Továbbá, legyen $n^{(j)} := 2^{h_j} + \dots + 2^{h_0}$. Ekkor*

$$\int_{\bar{I}_k \times I_k} \sup_{n \geq 2^k} G_3 \, d\lambda \leq C_\alpha.$$

BIZONYÍTÁS. Használjuk a 2.25 Lemmát. Ekkor

$$\begin{aligned}
\int_{\bar{I}_k \times I_k} \sup_{n \geq 2^k} G_3 \, d\lambda &= \int_{\bar{I}_k \times I_k} \sup_{n \geq 2^k} \sum_{z=\tau}^s \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{\alpha(h_s-h_{z-1})} D_{2^{h_z}}(x^1) |K_{n^{(z-1)}}^{1,\alpha}(x^2)| \, d\lambda \\
&\leq \sum_{A=k}^{\infty} \sum_{a=0}^{k-1} \sum_{j=0}^{A-a} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{\alpha(A-a)} \int_{I_k} D_{2^{a+j}} \, dx^1 \int_{\bar{I}_k} \sup_{|m|=a} |K_m^{1,\alpha}| \, dx^2 \\
&\quad + \sum_{A=k}^{\infty} \sum_{a=k}^A \sum_{j=0}^{A-a} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{\alpha(A-a)} \int_{I_k} D_{2^{a+j}} \, dx^1 \int_{\bar{I}_k} \sup_{|m|=a} |K_m^{1,\alpha}| \, dx^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq C_\alpha \sum_{A=k}^{\infty} \sum_{a=k}^A \sum_{j=0}^{A-a} \left(\frac{2^a}{2^A}\right)^{\alpha/2} \cdot \left(\frac{2^k}{2^a}\right)^\delta \\
&\quad + \sum_{A=k}^{\infty} \sum_{a=0}^{k-1} \sum_{j=0}^{A-a} \left(\frac{2^{\wedge(k,a+j)}}{2^k}\right) \left(\frac{2^a}{2^A}\right)^{\alpha/2} (k-a) \\
&=: C_\alpha + (Q)
\end{aligned}$$

Tekintsük a (Q) kifejezést:

$$\begin{aligned}
&\sum_{A=k}^{\infty} \sum_{a=0}^{k-1} \sum_{j=0}^{A-a} \left(\frac{2^{\wedge(k,a+j)}}{2^k}\right) \left(\frac{2^a}{2^A}\right)^{\alpha/2} (k-a) \\
&= \sum_{A=k}^{\infty} \sum_{a=0}^{k-1} \sum_{j=0}^{k-a} \frac{2^{a+j}}{2^k} \left(\frac{2^a}{2^A}\right)^{\alpha/2} (k-a) + \sum_{A=k}^{\infty} \sum_{a=0}^{k-1} \sum_{j=k-a+1}^{A-a} \left(\frac{2^a}{2^A}\right)^{\alpha/2} (k-a) \\
&= \sum_{A=k}^{\infty} \sum_{a=0}^{k-1} \left(\frac{2^a}{2^A}\right)^{\alpha/2} (k-a) + \sum_{A=k}^{\infty} \sum_{a=0}^{k-1} \left(\frac{2^a}{2^A}\right)^{\alpha/2} (A-k)(k-a) \leq C_\alpha
\end{aligned}$$

□

2.34. LEMMA (Gát-Lucskai [D]). Az $\sup_{n \in \mathbb{N}} |f * K_n^\alpha|$ operátor, ahol $f \in L^1(I^2)$, gyengén (L^1, L^1) -típusú.

BIZONYÍTÁS. Használjuk fel K_n^α felbontását. Először tekintsük a $\sup_{n \in \mathbb{N}} \left| f * \sum_{z=\tau}^s \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{\alpha(h_s-h_{z-1})} G_5 \right|$ operátort. A következő becslést kapjuk

$$\begin{aligned}
&\sup_{n \in \mathbb{N}} \left| f * \sum_{z=\tau}^s \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{\alpha(h_s-h_{z-1})} G_5 \right| = \sup_{n \in \mathbb{N}} \left| f * \sum_{z=\tau}^s \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{\alpha(h_s-h_{z-1})} |M_{n^{(z-1)}}^\alpha| \right| \\
&\leq \sup_{n \in \mathbb{N}} \left| \sum_{z=\tau}^s \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{\alpha(h_s-h_{z-1})} \sup_{k \in \mathbb{N}} |f * M_k^\alpha| \right| \leq C_\alpha \cdot \sup_{k \in \mathbb{N}} |f * M_k^\alpha|.
\end{aligned}$$

Tehát a 2.3 alapján $\sup_{n \in \mathbb{N}} |f * G_1|$ és $\sup_{n \in \mathbb{N}} \left| f * \sum_{z=\tau}^s \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{\alpha(h_s-h_{z-1})} G_1 \right|$ operátorok gyengén (L^1, L^1) -típusúak.

A $\sup_{n \in \mathbb{N}} \left| f * \sum_{z=\tau}^s \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^{\alpha(h_s - h_{z-1})} G_2 \right|$ operátor felírható az alábbi alakban:

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \left| f * \sum_{z=\tau}^s \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^{\alpha(h_s - h_{z-1})} G_2 \right| \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} |f * T_B^1|,$$

ahol $T_B^1 = D_{2^B}(z^1)D_{2^B}(z^2)$. Tehát a 2.31 Lemma alapján gyengén (L^1, L^1) -típusú.

A fennmaradó eseteket a "szokásos" eljárás szerint vizsgáljuk, azaz igazoljuk az (L^∞, L^∞) -típusú tulajdonságot és a kvázilokális tulajdonságot is.

Először a $\sup_{n \in \mathbb{N}} |f * G_6|$ operátort vizsgáljuk. Mivel $n^{(\tau-1)} \leq 2^\tau$, ekkor ebből $|K_{n^{(\tau-1)}}| \leq C_\alpha$ következik. Ezáltal kapjuk, hogy

$$\int_{\overline{I_k} \times I_k} \sup_{n \in \mathbb{N}} G_6 \, d\lambda \leq C_\alpha.$$

Egyszerű számítások alapján kapjuk ennek az operátornak kvázilokálitását. A 2.29 Lemma (i) része alapján ez az operátor (L^∞, L^∞) -típusú is.

A fennmaradó operátorok is kvázilokálisak a 2.24 Lemma alapján. Míg az (L^∞, L^∞) -típusosság a 2.29 Lemma (iii) részéből következik.

A bizonyítás ezzel teljes, mivel gyengén (L^1, L^1) -típusú operátorok összege szintén gyengén (L^1, L^1) -típusú. \square

A 2.2 TÉTEL IGAZOLÁSA. A $v_n v_m$ függvények lineáris kombinációja sűrű halmazt alkot az $L^1(I^2)$ térben. Ezt a tény és a 2.34 Lemma igazolja a tétel. Az eljárás részletesen a [27] könyvben megtalálható. \square

3. FEJEZET

Függelék

3.1. Matlab-kódok

Itt található a MATLAB kódoknak a listája, amely segítségével szolgált a 1.5 Tétel igazolásában. Az N természetes szám és $x \in [0, 1)$ számok bináris alakjának n -edik koordinátáját adja meg az alábbi kód.

```
function g = coordN(n, N)  
g = mod(floor(2.^(-n) * N), 2);  
end
```

A következő kód az n -edik Rademacher függvény és az n -edik Walsh értékét számítja ki az x pontban:

```
function h = rad(n, x)  
h = (-1).^(mod(floor(2.^(n + 1) * x), 2));  
end
```

```
function f = walsh(n, x)  
a = floor(log2(1 + n));  
for b = 1 : 1 : a + 1;  
y(b) = rad(b - 1, x) ^ coordN(b - 1, n);  
end  
f = prod(y);  
end
```

Az n -edik Dirichlet magfüggvény és az n -edik logaritmikus magfüggvény értékét az x pontban az alábbi kód adja meg:

```

function f = Dir(n, x)           function f = logkernel(n, x)
for a = 1 : 1 : n;              for k = 1 : n;
y(a) = walsh(a - 1, x);        h(k) = sum(Dir(k, x))/k;
end                               end
f = sum(y);                      f = sum(h);
end                               end

```

A következő kód megszámolja, hogy hány alkalommal lesz a logarit-
mikus magfüggvény értéke kisebb, mint $2^t/16$:

```

function f = logkern2t16(n)
A = floor(log2(n));
for k = 2 : 2^A
x = (k - 1)/2^A; t = floor(log2(1/x));
if logkernel(n, x) < 2^t/16 error(k) = -1;
else error(k) = 0;
end
f = sum(error);
end

```

Az $f(x) = \log(128) \cdot R_{128}$ és $g(x) = 0.58 \cdot 2^t$ függvényeket a $t \in \{0, 1, 2\}$
és $x \in [1/8, 1]$ esetén az alábbi kód jeleníti meg:

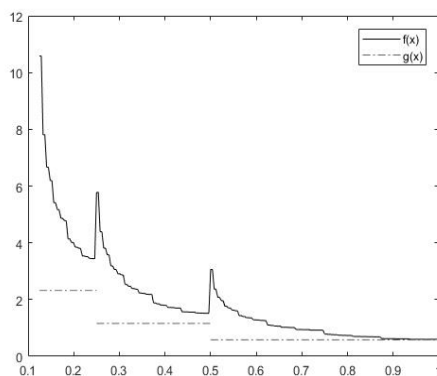
```

for k = 1 : 224 x(k) = (k + 31)/256; y(k) = logkernel(127, x(k));
end
plot(x, y, 'k')
hold on
a1 = [1/8 1/4];
a2 = [1/4 1/2];
a3 = [1/2 1];
b3 = [0.58 0.58];
b2 = [0.58 * 2 0.58 * 2];
b1 = [0.58 * 4 0.58 * 4];
plot(a1, b1, ' - .', a2, b2, ' - .', a3, b3, ' - .', 'color', [0.4 0.4 0.4])
legend('f(x)', 'g(x)')

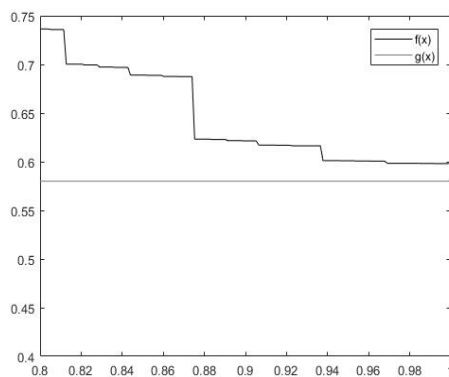
```

3.2. Az 1.5 azonosságot szemléltető ábrák

A függelék előző részében szereplő kódokkal készült az alábbi két ábra, amely a 1.5 azonosság alapjául szolgált.



1. ÁBRA. $f(x) = \log 128 \cdot R_{128}(x)$ és $g(x) = 0.58 \cdot 2^t$ ábrázolása abban az esetben, amikor $t \in \{0, 1, 2\}$ és $x \in [1/8, 1]$



2. ÁBRA. $f(x) = \log 128 \cdot R_{128}$ és $g(x) = 0.58 \cdot 2^t$ ábrázolása abban az esetben, amikor $t = 0$ és $x \in [0.8, 1]$

Összefoglaló

A disszertáció két fő fejezetet tartalmaz, egy függelékét és egy hivatkozásokat tartalmazó részt. A disszertáció során a diadikus analízis szokásos jelöléseit alkalmazzuk. Legyen $n \in \mathbb{N}$ és $I := [0, 1)$. Ekkor

$$n = \sum_{j=0}^{\infty} n_j 2^j \quad \text{és} \quad x = \sum_{n=0}^{\infty} x_n 2^{-(n+1)}$$

az $x \in I$ és $n \in \mathbb{N}$ számok diadikus alakja, ahol $n_k, x_k \in \{0, 1\}$.

Definiáljunk már karakterrendszert az $(I, +)$ halmazon. Első lépésként az $\omega = (\omega_n, n \in \mathbb{N})$ Walsh–Paley- és $\kappa = (\kappa_n, n \in \mathbb{N})$ Walsh–Kaczmarz-rendszer n -edik tagját az alábbi módon definiáljuk:

$$\omega_n(x) := \prod_{j=0}^{\infty} (-1)^{x_j n_j} \quad \text{és} \quad \kappa_n(x) := r_{|n|}(x) (-1)^{\sum_{k=0}^{|n|-1} n_k x_{|n|-1-k}}.$$

Ezek a rendszerek karakterrendszert alkotnak az $(I, +)$ halmazon, ahol a $+$ művelet az úgynevezett diadikus vagy logikai összeget jelöli.

Ezen a halmazon a harmadik karakterrendszer a $v = (v_n, n \in \mathbb{N})$ 2-adikus egészek rendszere. Ebben az esetben a $+$ művelet a 2-adikus vagy más néven aritmetikai összeget jelöli. A rendszer n -edik tagja az alábbi módon írható fel,

$$v_n := \prod_{n=0}^{\infty} v_{2^j}^{n_j}, \quad \text{ahol} \quad v_{2^n}(x) := \varepsilon \left(\frac{x_n}{2} + \dots + \frac{x_0}{2^{n+1}} \right).$$

Mindhárom esetben n_j és x_j ($j \in \mathbb{N}$) jelöli rendre az $n \in \mathbb{N}$ és $x \in I$ számok bináris együtthatóit.

Legyen $\varphi \in \{\omega, \kappa, v\}$. A Dirichlet-magfüggvényt, illetve az $f \in L^1(I)$ n -edik Fourier-együtthatóját és Fourier-sorának n -edik részletösszegét rendre az alábbi módon definiáljuk:

$$D_n^\varphi := \sum_{k=0}^{n-1} \varphi_k, \quad \hat{f}^\varphi(n) := \int_I f(x) \bar{\varphi}_n(x) d\lambda(x),$$

$$S_n^\varphi f(y) := \sum_{k=0}^{n-1} \hat{f}(k) \varphi_k(y), \quad \sigma_n^\varphi f(y) := \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n S_k f(y).$$

Első rész. A disszertáció első részében a Fejér-magfüggvények maximáloperátorát vizsgáltuk a Walsh–Paley-rendszerben, illetve a Riesz–logaritmikus közepeket vizsgáltuk a Walsh–Paley- és a Walsh–Kaczmarz-rendszerekben.

Az említett magfüggvényeket rendre az alábbi módon definiáljuk:

$$K_n^\varphi := \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} D_k^\varphi, \quad R_n^\varphi := \frac{1}{\log n} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{D_k^\varphi}{k},$$

ahol $K_0 := 0$ és $\varphi \in \{\omega, \kappa\}$.

Walsh–Paley-rendszerben 1955-ben N.J. Fine integrálható függvényekre bizonyította $\sigma_n f \rightarrow f$ majdnem mindenütti konvergenciát ([5]). 1997-ben Gát a Fejér-magfüggvény maximáloperátorára adott becslés segítségével bizonyította a Fejér-közepek majdnem mindenütti konvergenciát a Walsh–Paley-rendszerben ([7]).

Ezek után térjünk át a Fejér-magfüggvények maximáloperátorának a vizsgálatára. Az első ezzel kapcsolatos egyenlőtlenség Gát nevéhez fűződik, aki 1997-ben igazolta az alábbi egyenlőtlenséget.

TÉTEL ([7]). Minden $a \leq A \in \mathbb{N}$ esetén

$$\int_{I \setminus I_a} \sup_{|n| \geq A} |K_n(x)| dx \leq C \sqrt{2^{a-A}}.$$

Goginava 2004-ben jobb felső becslést adott az előző eredményhez képest. Ő az alábbi állítást bizonyította.

TÉTEL ([15]). Minden $a < A \in \mathbb{N}$ esetén

$$\int_{I \setminus I_a} \sup_{|n| \geq A} |K_n(x)| dx \leq C \frac{A-a}{2^{A-a}}.$$

Az első eredmény, hogy a Goginava által adott becslés tovább nem javítható.

TÉTEL (Gát–Lucskai [A]).

$$\int_{\delta}^1 \sup_{n \geq N} |K_n(x)| dx \geq c \frac{\log(N\delta)}{N\delta} \quad \left(N > \frac{1}{\delta}\right).$$

Ezt követően térjünk át Riesz-logaritmikus magfüggvények vizsgálatára. Trigonometrikus esetben a Fejér-magfüggvények csak pozitív értéket vehetnek fel, így ezt a tulajdonságot felhasználva könnyen igazolhatjuk, hogy a Riesz-logaritmikus közepek csak pozitív értéket vesznek fel. Azonban a Walsh–Paley- és a Walsh–Kaczmarz-rendszerben a Fejér-magfüggvények negatív értéket is felvehetnek. Tehát ezekben a rendszerekben nem használható a trigonometrikus rendszerbeli bizonyítás. Ennek ellenére a Walsh–Paley-rendszerben sikerült igazolni az alábbi tételt, amely bizonyítása sokkal összetettebb, mint a trigonometrikus rendszerre vonatkozó bizonyítás.

TÉTEL (Gát–Lucskai, [A]). *Legyen $t, n \in \mathbb{N}$ és $x \in I_t \setminus I_{t+1}$. Ekkor*

$$R_n(x) \geq \frac{2^t}{16 \log n}, \quad \text{ha } n > 2^t \quad \text{és} \quad R_n(x) = \frac{n-1}{\log n}, \quad \text{ha } n \leq 2^t.$$

A tételnek két következménye van.

3.1. KÖVETKEZMÉNY (Gát–Lucskai, [A]). *A Walsh–Paley-rendszerre vonatkozó Riesz-logaritmikus magfüggvény pozitív $n \in \mathbb{N}$ és minden $x \in [0, 1)$ esetén.*

A másik következmény egy komoly eltérést mutat a Walsh–Fejér és a Walsh-logaritmikus közepek között.

3.2. KÖVETKEZMÉNY (Gát–Lucskai [A]). *Legyen $t, a \in \mathbb{N}$ úgy, hogy $t \geq a$ teljesüljön. Ekkor*

$$\int_{2^{-a}}^1 \sup_{n \geq 2^t} |R_n(x)| dx = \infty.$$

fennáll a Walsh–Paley-rendszer esetén.

A következő eredményünk egy újabb eltérés mutat a Walsh–Paley- és a Walsh–Kaczmarz-rendszerek között. Utóbbi rendszerben

megadható a Riesz-logaritmikus magfüggvényeknek egy olyan sorozata, amely valamely intervallumon negatív értéket vesz fel. Pontosabban teljesül az alábbi tétel.

TÉTEL (Gát–Lucskai [B]). *Legyen $A = 2^n + 2^{n-1}$, $11 \leq n \in \mathbb{N}$ és $x = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2^{n+1}}$ Ekkor*

$$\log(A)R_A^K(x) \leq -0.02 \cdot 2^n.$$

Második rész. Ebben a részben igazoljuk az egydimenziós Riesz-közepek és a kétdimenziós (C, α) -közepek majdnem mindenütti konvergenciáját.

Először tekintsük az egydimenziós esetet. A Fejér-közepet és a Riesz-összegzési eljárás $K_n^{\alpha, \gamma}$ magfüggvényét a következőképpen definiáljuk:

$$K_n := \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n D_k, \quad K_n^{\alpha, \gamma} := \frac{1}{n^{\alpha\gamma}} \sum_{k=0}^{n-1} (n^\gamma - k^\gamma)^\alpha v_k,$$

ahol $K_0 := 0$, $n \in \mathbb{N}$ és $0 < \min\{\alpha, \gamma\} \leq 1 \leq \max\{\alpha, \gamma\} < \infty$. Az f integrálható függvény Riesz-közepé:

$$\sigma_n^{\alpha, \gamma} f(y) := \frac{1}{n^{\alpha\gamma}} \sum_{j=0}^{n-1} (n^\gamma - k^\gamma)^\alpha \hat{f}(j).$$

Ha $\alpha = \gamma = 1$, akkor Fejér-középről beszélünk.

Taibleson kérdése az volt, hogy a 2-adikus egészek rendszerében teljesül-e a $\sigma_n f \rightarrow f$ majdnem mindenütti konvergencia minden $f \in L^1$ esetén. Több mint húsz évvel később, 1997-ben Gát a [8] cikkében igazolta Taibleson sejtését, 2007-ben pedig a [10] cikkében általánosította az előző eredményét minden $\alpha > 0$ esetén.

A Riesz-közepek majdnem mindenütti konvergenciáját a trigonometrikus rendszerben Riesz igazolta ([22, 38]). A Walsh–Paley-rendszerben a $0 < \gamma \leq 1 \leq \alpha$ esetet Weisz bizonyította ([33]). Weisz eredményét bizonyítottuk a 2-adikus egészek körében.

TÉTEL (Gát–Lucskai [C]). *Legyen $0 < \gamma \leq 1 \leq \alpha$. Ekkor $\sigma_n^{\alpha, \gamma} f \rightarrow f$ majdnem mindenütt minden $f \in L^1(I)$ esetén, ahol I jelöli a 2-adic egészek csoportját.*

Ezután tekintsük a 2-adikus egészek csoportján definiált kétdimenziós Fourier-sorokkal kapcsolatos fogalmakat. A normált Haar-mérték egybeesik egydimenziós esettel. A kétdimenziós Fourier együtthatókat, a kétdimenziós Fourier-sor téglalap felett vett részletösszeget és a (C, α) Marcinkiewicz magfüggvényt és közepet az alábbi módon definiáljuk:

$$\begin{aligned}\hat{f}(n^1, n^2) &:= \int_{I \times I} f(x^1, x^2) \bar{v}_{n^1}(x^1) \bar{v}_{n^2}(x^2) d\lambda(x^1, x^2), \\ S_{n^1, n^2} f(y^1, y^2) &:= \sum_{k^1=0}^{n^1-1} \sum_{k^2=0}^{n^2-1} \hat{f}(k^1, k^2) v_{k^1}(y^1) v_{k^2}(y^2), \\ K_n^\alpha(y^1, y^2) &:= \frac{1}{A_n^\alpha} \sum_{j=0}^n A_{n-k}^{\alpha-1} D_j(y^1) D_j(y^2), \\ \sigma_n^\alpha f(y^1, y^2) &:= \frac{1}{A_n^\alpha} \sum_{j=1}^n A_{n-k}^{\alpha-1} S_{j,j} f(y^1, y^2), \\ K_n^1(x^1, x^2) &:= \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^n D_j(x^1) D_j(x^2),\end{aligned}$$

ahol $n, n^1, n^2 \in \mathbb{N}$ és $x^1, x^2, y^1, y^2 \in I$.

A $(C, 1)$ Marcinkiewicz közepek majdnem mindenütti konvergenciáját tetszőleges integrálható függvény esetén Blahota és Gát igazolta 2009-ben ([3]). Ezt az eredmény trigonometrikus rendszerben Grünwald ([18]) és Zhizhiashvili ([37]) igazolta. 2006-ban Gát és Goginava igazolta minden integrálható függvény esetén a kvadratikus részletösszegek (C, α) közepének konvergenciáját kétdimenziós Vilenkin-Fourier sorokra ([11]). Az alábbi eredményünk általánosítja Blahota és Gát eredményét minden $\alpha > 0$ esetén, amely eredményt Goginava igazolta a Walsh–Paley-rendszerben ([14], [16], [17]).

TÉTEL (Gát-Lucskai, [D]). *Legyen $0 < \alpha < 1$. Ekkor $\sigma_n^\alpha f \rightarrow f$ teljesül majdnem mindenütt, minden $f \in L^1(I^2)$ esetén ahol, I jelöli a 2-adikus egészek csoportját.*

Summary

My dissertation contains two sections, an Appendix and a bibliography. During my dissertataton I use the standard notation of dyadic analysis. Let $n \in \mathbb{N}$ and $I := [0, 1)$. Then

$$n = \sum_{n=0}^{\infty} n_j 2^j \quad \text{and} \quad x = \sum_{n=0}^{\infty} x_n 2^{-(n+1)}$$

the dyadic expansion of $x \in I$ and $n \in \mathbb{N}$, where $n_k, x_k \in \{0, 1\}$.

Now, we define three character systems on $(I, +)$, which are used during the dissertation. First step, the n th term of Walsh–Paley $\omega = (\omega_n, n \in \mathbb{N})$ and Walsh–Kaczmarz system $\kappa = (\kappa_n, n \in \mathbb{N})$ are defined in the following way

$$\omega_n(x) := \prod_{j=0}^{\infty} (-1)^{x_j n_j} \quad \text{and} \quad \kappa_n(x) := r_{|n|}(x) (-1)^{\sum_{k=0}^{|n|-1} n_k x_{|n|-1-k}}.$$

These systems are a character system on $(I, +)$, where the group operation $+$ is the so-called dyadic or logical addition.

The third character system on $(I, +)$ is the group of 2-adic integers $v = (v_n, n \in \mathbb{N})$. Here the group operation $+$ is the 2-adic (or arithmetic) sum. The n th term of this system is

$$v_n := \prod_{n=0}^{\infty} v_{2^j}^{n_j}, \quad \text{where} \quad v_{2^n}(x) := \varepsilon \left(\frac{x_n}{2} + \dots + \frac{x_0}{2^{n+1}} \right).$$

Both cases n_j and x_j ($j \in \mathbb{N}$) are the binary coefficients of $n \in \mathbb{N}$ and $x \in I$, respectively.

Let $\varphi \in \{\omega, \kappa, v\}$. The Dirichlet kernels and the n th Fourier coefficients, the partial sum of the Fourier series, the $(C, 1)$ or the Fejér means of $f \in L^1(I)$ are

$$D_n^\varphi := \sum_{k=0}^{n-1} \varphi_k, \quad \hat{f}^\varphi(n) := \int_I f(x) \bar{\varphi}_n(x) d\lambda(x),$$

$$S_n^\varphi f(y) := \sum_{k=0}^{n-1} \hat{f}(k) \varphi_k(y), \quad \sigma_n^\varphi f(y) := \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n S_k f(y)$$

respectively.

First part. The maximal operator of Fejér kernels for Walsh–Paley system and the Riesz-logarithmic kernels for Walsh–Paley and Walsh–Kaczmarz system are investigated in the first part of my dissertation.

Now define Fejér kernel and Riesz-logarithmic kernel in the following way:

$$K_n^\varphi := \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} D_k^\varphi, \quad R_n^\varphi := \frac{1}{\log n} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{D_k^\varphi}{k},$$

respectively, where $K_0 := 0$ and $\varphi \in \{\omega, \kappa\}$.

In 1955, N.J. Fine proved that the almost everywhere convergence $\sigma_n^1 f \rightarrow f$ holds for $f \in L^1$ ([4]). By the help of the maximal operator of Fejér kernels, Gát proved this theorem for Walsh–Paley system in 1997 ([7]). He proved the following inequality in connection with the maximal operator of Walsh–Fejér means.

THEOREM ([7]). Let $a \leq A \in \mathbb{N}$. Then

$$\int_{I \setminus I_a} \sup_{|n| \geq A} |K_n(x)| dx \leq C \sqrt{2^{a-A}}.$$

The following result was proved by Goginava in 2004.

THEOREM ([15]). Let $a < A \in \mathbb{N}$. Then

$$\int_{I \setminus I_a} \sup_{|n| \geq A} |K_n(x)| dx \leq C \frac{A-a}{2^{A-a}}.$$

First our result, Goginava's upper estimation cannot improve.

THEOREM (Gát–Lucskai, [A]).

$$\int_{\delta}^1 \sup_{n \geq N} |K_n(x)| dx \geq c \frac{\log(N\delta)}{N\delta} \quad \left(N > \frac{1}{\delta}\right).$$

After that we investigated Riesz-logarithmic kernels in both systems. These kernels have only positive values in the trigonometric system. The proof of this result uses the positivity of Fejér kernels. However, the Fejér kernels can take negative values the Walsh–Paley and the Walsh–Kaczmarz systems, therefore we don't use the proof of the trigonometric case. But we proved that the Riesz logarithmic kernels can take only positive values also in the Walsh–Paley system. The proof of the following theorem is more complicated than in the case of the trigonometric system.

THEOREM (Gát–Lucskai, [A]). Let $t, n \in \mathbb{N}$ and $x \in I_t \setminus I_{t+1}$. Then

$$R_n(x) \geq \frac{2^t}{16 \log n}, \quad \text{if } n > 2^t \quad \text{and} \quad R_n(x) = \frac{n-1}{\log n}, \quad \text{if } n \leq 2^t.$$

This theorem have two corollaries.

COROLLARY (Gát–Lucskai [A]). The Walsh–Riesz-logarithmic kernels are positive for each $n \in \mathbb{N}$ and for all $x \in [0, 1[$.

The next corollary shows a sharp contrast between the Walsh–Fejér and Walsh–logarithmic kernels.

COROLLARY (Gát–Lucskai [A]).

$$\int_{2^{-a}}^1 \sup_{n \geq 2^t} |R_n(x)| dx = \infty.$$

The next our result shows that the Walsh–Kaczmarz system is different from the Walsh–Paley system in this point of view. More precisely, we give a sequence of the Riesz-logarithmic kernels such that all of them take negative values on some intervals.

THEOREM (Gát–Lucskai, [B]). Let $A = 2^n + 2^{n-1}$, $11 \leq n \in \mathbb{N}$ and $x = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2^{n+1}}$. Then

$$\log(A)R_A^k(x) \leq -0.02 \cdot 2^n.$$

Second part. In this part, we investigated the one-dimensional Riesz means and the two-dimensional (C, α) -means on the group of 2-adic integers.

Firstly, we consider the one-dimensional Riesz means.

The Fejér kernels and the kernel $K_n^{\alpha, \gamma}$ of the Riesz summability method are

$$K_n := \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n D_k, \quad K_n^{\alpha, \gamma} := \frac{1}{n^{\alpha\gamma}} \sum_{k=0}^{n-1} (n^\gamma - k^\gamma)^\alpha v_k,$$

where $K_0 := 0$, $n \in \mathbb{N}$ and $0 < \min\{\alpha, \gamma\} \leq 1 \leq \max\{\alpha, \gamma\} < \infty$. The Riesz-means of the integrable functions f are

$$\sigma_n^{\alpha, \gamma} f(y) := \frac{1}{n^{\alpha\gamma}} \sum_{j=0}^{n-1} (n^\gamma - k^\gamma)^\alpha \hat{f}(j).$$

The Riesz means are called Fejér means if $\alpha = \gamma = 1$.

For the character system of the group of 2-adic integers, Fejér means related to Taibleson ([31]). This question was open for a long time. In 1997, Gát gave an affirmative answer the Taibleson's question ([8]).

For the trigonometric system, the almost everywhere convergence of Riesz-means was proved by Riesz ([22, 38]). The case $0 < \gamma \leq 1 \leq \alpha$ was proved in the case of the Walsh–Paley system by Weisz [33]. We proved the same result in the 2-adic case.

THEOREM (Gát–Lucskai, [C]). Let $0 < \gamma \leq 1 \leq \alpha$. Then we have $\sigma_n^{\alpha, \gamma} f \rightarrow f$ almost everywhere for every $f \in L^1(I)$, where I is the group of 2-adic integers.

Next we introduce some notation for two-dimensional Fourier series on the group of 2-adic integers. The normalized Haar measure is just as in the one-dimensional case. The two-dimensional Fourier coefficients, the rectangular partial sums of the Fourier series, the (C, α) Marcinkiewicz kernels and means, and Fejér kernels are defined as follows

$$\hat{f}(n^1, n^2) := \int_{I \times I} f(x^1, x^2) \bar{v}_{n^1}(x^1) \bar{v}_{n^2}(x^2) d\lambda(x^1, x^2),$$

$$S_{n^1, n^2} f(y^1, y^2) := \sum_{k^1=0}^{n^1-1} \sum_{k^2=0}^{n^2-1} \hat{f}(k^1, k^2) v_{k^1}(y^1) v_{k^2}(y^2),$$

$$K_n^\alpha(y^1, y^2) := \frac{1}{A_n^\alpha} \sum_{j=0}^n A_{n-k}^{\alpha-1} D_j(y^1) D_j(y^2),$$

$$\sigma_n^\alpha f(y^1, y^2) := \frac{1}{A_n^\alpha} \sum_{j=1}^n A_{n-k}^{\alpha-1} S_{j,j} f(y^1, y^2),$$

$$K_n^1(x^1, x^2) := \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^n D_j(x^1) D_j(x^2),$$

where $n, n^1, n^2 \in \mathbb{N}$ and $x^1, x^2, y^1, y^2 \in I$.

The convergence of $(C, 1)$ Marcinkiewicz means was proved in 2009 by Blahota and Gát ([3]). For the trigonometric system this result was proved by Grünwald ([18]) and Zhizhiashvili ([37]). In 2006 Gát and Goginava ([11]) proved the convergence of the (C, α) -means of quadratical partial sums of double Vilenkin-Fourier series for every integrable function. The following result will generalize the result of Blahota and Gát for every $\alpha > 0$, which for the Walsh–Paley system is due to Goginava ([14], [16], [17]).

THEOREM (Gát–Lucskai, [D]). Let $0 < \alpha < 1$. Then we have $\sigma_n^\alpha f \rightarrow f$ almost everywhere for every $f \in L^1(I^2)$, where I is the group of 2-adic integers.

A dolgozatban felhasznált saját publikációk

- [A] G. Gát, G. Lucskai. Estimation on the Walsh–Fejér and Walsh logarithmic kernels. *Publ. Math. Debr.* 95 (3-4), 415-435, 2019.
- [B] G. Gát, G. Lucskai. On the negativity of the Walsh–Kaczmarz–Riesz logarithmic kernels. *Acta Math. Acad. Paedag. Nyíregyh.* 1-7, 2020. (Megjelenés alatt áll.)
- [C] G. Gát, G. Lucskai. Almost everywhere convergence of Riesz means of one-dimensional Fourier series on the group of 2-adic integers. *Novi Sad Journal of Mathematics.* 1-12, 2021.
<https://doi.org/10.30755/NSJOM.12069>
- [D] G. Gát, G. Lucskai. Almost everywhere convergence of Cesàro–Marcinkiewicz means of two-dimensional Fourier series on the group of 2-adic integers. 1-23. (Benyújtva 2018-ban)

A dolgozatban idézett további közlemények

- [1] S. Baron and F. Schipp. Identical classes of multipliers for Walsh series. *Ann. Univ. Sci. Budapest Sect. Comput.*, 16:13–30, 1996.
- [2] N. K. Bary and M. F. Mullins. *A treatise on trigonometric series*. Pergamon Oxford, 1964.
- [3] I. Blahota and G. Gát. Almost everywhere convergence of Marcinkiewicz means of Fourier series on the group of 2-adic integers. *Studia Mathematica*, 191:215–222, 2009.
- [4] N. J. Fine. Cesaro summability of Walsh-Fourier series. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, 41:588–591, 1955.
- [5] N. J. Fine. Cesaro summability of Walsh-Fourier series. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, 41(8):588, 1955.
- [6] G. Gát. Pointwise convergence of the Cesaro means of double Walsh series. *Ann. Univ. Sci. Budapest. Sect. Comput*, 16:173–184, 1996.
- [7] G. Gát. On the Fejér kernel functions with respect to the Walsh-Paley system. *Acta Acad. Paed. Agriensis Sectio Mathematicae*, 24:105–110, 1997.
- [8] G. Gát. On $(C, 1)$ summability of integrable functions with respect to the Walsh-Kaczmarz system. *Studia Math*, 130(2): 135–148, 1998.
- [9] G. Gát. On $(C, 1)$ summability for Vilenkin-like systems. *Studia Mathematica*, 144:101–120, 2001.
- [10] G. Gát. Almost everywhere convergence of Cesaro means of Fourier series on the group of 2-adic integers. *Acta Mathematica Hungarica*, 116(3):209–221, 2007.

-
- [11] G. Gát and U. Goginava. Almost Everywhere Convergence of (C, α) -Means of Quadratical Partial Sums of Double Vilenkin–Fourier Series. *Georgian Mathematical Journal*, 13(3):447–462, 2006.
- [12] G. Gát and U. Goginava. Uniform and L-convergence of logarithmic means of Walsh-Fourier series. *Acta Mathematica Sinica, English Series*, 22(2):497, 2006.
- [13] U. Goginava. Approximation properties of (C, α) means of double Walsh-Fourier series. *Analysis in Theory and Applications*, 20(1):77–98, 2004.
- [14] U. Goginava. Marcinkiewicz–Fejér means of d-dimensional Walsh–Fourier series. *Journal of mathematical analysis and applications*, 307(1):206–218, 2005.
- [15] U. Goginava. Almost everywhere convergence of (C, α) -means of cubical partial sums of d-dimensional Walsh–Fourier series. *Journal of Approximation Theory*, 141(1):8–28, 2006.
- [16] U. Goginava. Weak type inequality for the maximal operator of the (C, α) means of two-dimensional Walsh-Fourier series. *Analysis Mathematica*, 36(1):1–31, 2010.
- [17] U. Goginava. The martingale Hardy type inequality for Marcinkiewicz-Fejér means of two-dimensional conjugate Walsh-Fourier series. *Acta Mathematica Sinica, English Series*, 27(10):1949–1958, 2011.
- [18] G. Grünwald. Zur Summabilitätstheorie der Fourierschen Doppelreihe, 1939.
- [19] H. Lebesgue. Recherches sur la convergence des séries de Fourier. *Mathematische Annalen*, 61(2):251–280, 1905.
- [20] R. Paley. A remarkable series of orthogonal functions. *Proc. London Math. Soc*, 34(1):241–279, 1931.
- [21] H. Rademacher. Einige sätze über reihen von allgemeinen orthogonalfunktionen. *Mathematische Annalen*, 87(1-2):112–138, 1922.
- [22] M. Riesz. Sur la sommation des séries de Fourier. *Acta Sci. Math.(Szeged)*, 1:104–113, 1923.
- [23] K. A. Ross and E. Hewitt. *Abstract Harmonic Analysis: Structure of Topological Groups: Integration Theory. Group Representations*. 1963.

-
- [24] F. Schipp. Über gewissen maximaloperatoren. In *Annales Univ. Sci. Budapestiensis, Sectio Math*, volume 18, pages 189–195, 1975.
- [25] F. Schipp. On the strong summability of Walsh series. *Publicationes Mathematicae-Debrecen*, 52(3-4):611–633, 1998.
- [26] F. Schipp and W. R. Wade. *Transforms on normed fields*. Janus Pannonius Univ., 1995.
- [27] F. Schipp, W. R. Wade, P. Simon, and J. Pál. *Walsh series: an introduction to dyadic harmonic analysis*. Adam Hilger Bristol and New York, 1990.
- [28] V. Skvorcov. On Fourier series with respect to the Walsh-Kaczmarz system. *Analysis Mathematica*, 7(2):141–150, 1981.
- [29] A. Šneider. On series with respect to Walsh functions with monotone coefficients. *Izvestija Akad Nauk SSSR, Ser. Matem*, 12: 179–192, 1948.
- [30] O. Szasz et al. On the logarithmic means of rearranged partial sums of a Fourier series. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 48(10):705–711, 1942.
- [31] M. H. Taibleson. *Fourier Analysis on Local Fields.(MN-15)*. Princeton University Press, 1975.
- [32] F. Weisz. (C, α) summability of Walsh—Fourier series. *Analysis Mathematica*, 27(2):141–155, 2001.
- [33] F. Weisz. *Summability of multi-dimensional Fourier series and Hardy spaces*, volume 541. Springer Science & Business Media, 2013.
- [34] K. Yabuta. Quasi-Tauberian theorems, applied to the summability of Fourier series by Riesz’s logarithmic means. *Tohoku Mathematical Journal, Second Series*, 22(1):117–129, 1970.
- [35] R. M. Young. Euler’s Constant. *The Mathematical Gazette*, 75 (472):187–190, 1991.
- [36] S. Zheng. Cesàro summability of Hardy spaces on the ring of integers in a local field. *Journal of mathematical analysis and applications*, 249(2):626–651, 2000.
- [37] L. Zhizhiashvili. Generalization of a theorem of Marcinkiewicz. *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.*, 32.
- [38] A. Zygmund. *Trigonometric Series*, Univ. Press, Cambridge, 1959.