KÖZÉPÉRTÉKEKET TARTALMAZÓ FÜGGVÉNYEGYENLETEK

FUNCTIONAL EQUATIONS INVOLVING MEANS

Doktori (PhD) értekezés tézisei

Burai Pál József

Debreceni Egyetem
Természettudományi Kar

Debrecen, 2007

Bevezetés

A függvényegyenletek elmélete a nagy matematikai diszciplínákon belül az analízishez tartozik, de alkalmazása kiterjed a matematika más területeire is, pl. geometriára (pl. [Acz66], [Ben01], [Ben03], [Ger92]), játékelméletre (pl.[CanJuaInd97], [KuzNat70]), valószínűségelméletre (pl. [Bak94], [RaoSha94]), információelméletre (pl.[AD75], [Dar70], [DM79], [Mak87]). Az utóbbi években a közgazdaságtanban (pl.[Acz89], [AD89], [Eic78], [Szé88]) és a pszichológiában (pl.[Acz95], [AD89]) is egyre nagyobb teret nyer alkalmazása.

A középértékekkel kapcsolatos kutatások régebbiek, mint a függvényegyenletekkel kapcsolatosak. A számtani és a mértani közép közötti egyenlőtlenség kétváltozós változatát már az ókorban is ismerték. A középértékeket tartalmazó függvényegyenletek problémakör viszont nem számít réginek a matematikán belül. Valószínűleg az egyik legrégebbi ilyen témájú dolgozatok Jensen dán és Sutô japán matematikusok nevéhez fűződnek (lásd. [Jen05], [Jen06], [Sut14a], [Sut14b]).

A múlt század második felében felélénkültek a középértékekkel kapcsolatos kutatások, több új középérték osztályt fedeztek fel (pl. [BajPal], [DP06a],[DP06a], [Gin38], [Los00], [Los02a], [MakoPal], [Sto75]), új kutatási irányok indultak el. Az egyik ilyen a Matkowski-Sutô egyenletek problémaköre. A debreceni függvényegyenletes iskolához kapcsolódik sok új, jelentős eredmény felfedezése, vagy probléma felvetése a tárgykörben (pl. [BajPal], [Dar99], [Dar00], [Dar04], [Dar05], [DH05], [DHN03], [DLL+07], [DM99], [DMP00], [DMP04], [DMP06], [DP02a], [DP01], [DP02b], [DP03b], [DP03c], [Haj02], [Haj03], [Los99], [Los00], [Los02b], [Los03], [Los06], [MakoPal]). A jelen dolgozatban található eredmények kapcsolódnak az itt folytatott munkához. A felvetett problémák jelenleg is intenzíven kutatottak. Több hazai és külföldi matematikus publikál ebben a témakörben (pl. [DM06], [Jar07], [Haj02], [JM06], [KM96], [KM97], [KM03], [Mat99], [Mat04], [Mat06]).

A disszertáció a bevezetésen kívűl három fejezetet tartalmaz. Az első: Középértékek és Gauss kompozíciójuk. Ebben a felhasznált fogalmakat, jelöléseket rögzítjük. Definiáljuk azon középérték osztályokat, melyek a későbbi fejezetekben dolgozunk. Szerepel néhány- a bevezetett fogalmakkal és közepekkel kapcsolatos- alapvető tétel, melyeket szintén később használunk. Ebben a fejezetben található még néhány történeti megjegyzés is.

A másokik: Matkowski-Sutô egyenletek. Ez a rész egy rövid történeti bevezetővel kezdődik, mely az ilyen típusú egyenletekkel kapcsolatos első kutatásokat mutatja be. Ez után három Matkowski-Sutô típusú egyenlettel kapcsolatos különféle eredményeket mutatunk be.

A harmadik: Középértékeket tartalmazó függvényegyenletek ekvivalenciája. Ebben a fejezetben [Dar02]-ben és [DMP06]-ban a szerzők által felvetett problémakört tárgyaljuk. Bemutatjuk az eddig ismert eredményeket. A fejezetet egy alkalmazás zárja.

1. Középértékek és Gauss kompozíciójuk

Ebben az fejezetben a legfontosabb fogalmakat és jelöléseket ismertetjük.

A szokásoknak megfelelően $\mathbb{R}$ jelöli a valós, $\mathbb{R}_+$ pedig a pozitív valós számok halmazát. $I \subset \mathbb{R}$ mindig egy pozitív hosszúságú, nyílt intervallumot jelent, ha mást nem mondunk.

Az $M : I \times I \to I$ folytonos függvényt *középnek* nevezzük I-n, ha teljesül rá az un. *közepelő tulajdonság*:

$$\text{(KT)} \qquad \min\{x,y\} \leq M(x,y) \leq \max\{x,y\}\,,$$

minden $x, y \in I$-re. Az I-n adott M közepet *szimmetrikusnak* nevezzük, ha $M(x,y) = M(y,x)$ teljesül minden I-beli x, y-ra. Ha (KT)-ben szigorú egyenlőtlenségek állnak fenn minden $x \neq y\,,\ x, y \in I$ esetén, akkor M-et *szigorú* középnek nevezzük.

Használni fogjuk a következő egyparaméteres függvénycsaládot:

$$\chi_p(x) := \begin{cases} x & \text{ha } \ p = 0 \\ & \\ e^{px} & \text{ha } \ p \neq 0 \end{cases} \qquad x \in I\,. \quad .$$

1.1. **Példák középértékekre.** $\mathcal{CM}(I)$-vel jelöli az I intervallumon értelmezett valós értékű, szigorúan monoton, folytonos függvények osztályát. Az I-n adott M közepet *kvázi-aritmetikai*nak nevezzük, ha létezik $\varphi \in \mathcal{CM}(I)$, hogy

$$M(x,y) = \varphi^{-1}\left(\frac{\varphi(x)+\varphi(y)}{2}\right) =: A_\varphi(x,y)\,, \qquad x, y \in I\,.$$

Az I-n adott M közepet *súlyozott kvázi-aritmetikai*nak nevezzük, ha létezik $\varphi \in \mathcal{CM}(I)$ és $\alpha \in]0,1[$, hogy

$$M(x,y) = \varphi^{-1}\left(\alpha\varphi(x) + (1-\alpha)\varphi(y)\right) =: A_\varphi(x,y;\alpha)\,, \qquad x, y \in I\,.$$

Az I-n adott M közepet *szimmetrizált kvázi-aritmetikai*nak nevezzük, ha létezik $\varphi \in \mathcal{CM}(I)$ és $\alpha \in]0,1[$, hogy

$$M(x,y) = \frac{A_\varphi(x,y;\alpha) + A_\varphi(x,y;1-\alpha)}{2} =: A^*_\varphi(x,y;\alpha)\,, \qquad x, y \in I\,.$$

Ekkor φ-t az M kvázi-aritmetikai/súlyozott kvázi-aritmetikai/szimmetrizált kvázi-aritmetikai közép *generátorfüggvény*ének, α-t (csak a súlyozott kvázi-aritmetikai és szimmetrizált kvázi-aritmetikai közepek esetében) pedig *súlynak* nevezzük. Az I-n adott M közepet *identikus súlyfüggvénnyel súlyozott kvázi-aritmetikai közép*nek nevezzük, ha létezik $\varphi \in \mathcal{CM}(I)$, hogy

$$M_\varphi(x,y) := \varphi^{-1}\left(\frac{x\varphi(x) + y\varphi(y)}{x+y}\right), \qquad x, y \in I\,.$$

Ekkor φ-t az identikus súlyfüggvénnyel súlyozott kvázi-aritmetikai közép *generátorfüggvényének* nevezzük.

Az előbbiekben definiált közepek mind szigorúak, a súlyozott kvázi-aritmetiakat kivéve pedig szimmetrikusak is.

1.2. **Gauss kompozíció.** Tekintsünk két ugyanazon az I intervallumon adott középértéket, M_1-et és M_2-t. Ekkor elkészíthetjük a következő un. *Gauss-féle iterációs sorozat*okat tetszőleges $x, y \in I$ elemek esetén:

$$x_1 := x\,, \quad y_1 := y\,, \quad x_{n+1} := M_1(x_n, y_n)\,, \quad y_{n+1} := M_2(x_n, y_n)\,.$$

Ha a fenti sorozatok minden $x, y \in I$ esetén konvergensek és határértékeik egyenlőek, akkor a közös határértéket az adott közepek *Gauss kompozíció*jának nevezzük I-n és $M_1 \otimes M_2(x,y)$-nal jelöljük.

1.1. **Tétel.** *Legyenek M_1, M_2 I-n adott közepek. Ha legalább az egyik szigorú, akkor létezik a Gauss kompozíciójuk $M_1 \otimes M_2$, mely maga is közép I-n.*

1.2. **Tétel.** *Legyenek M_1, M_2 I-n adott közepek, melyeknek létezik az $M_1 \otimes M_2$ Gauss kompozíciója. Ha egy $F : I \times I \to I$ folytonos függvény megoldása az*

$$\text{(IE)} \qquad F\Big(M_1(x,y), M_2(x,y)\Big) = F(x,y)\,, \qquad x, y \in I$$

egyenletnek, és $F(x,x) = x$ minden I-beli x esetén, akkor $F(x,y) = M_1 \otimes M_2(x,y)$ minden I-beli x és y esetén.

Megfordítva, a Gauss kompozíció, amennyiben létezik, megoldása az (IE) függvényegyenletnek. Azaz, ha $M_1 \otimes M_2$ létezik I-n, akkor

$$\text{(IE')} \quad M_1 \otimes M_2\Big(M_1(x,y), M_2(x,y)\Big) = M_1 \otimes M_2(x,y)\,, \qquad x, y \in I\,.$$

2. Matkowski-Sutô típusí egyenletek

2.1. **Az eredeti Matkowski-Sutô egyenlet.** 1995-ben vetette fel a következő problémát Janusz Matkowski lengyel matematikus: Mikor lesz két kvázi-aritmetikai közép összege egyenlő az aritmetikai közép kétszeresével? Más szavakkal, adjuk meg az alábbi függvényegyenlet összes megoldását:

$$\text{(MS)} \qquad A_\varphi(x,y) + A_\psi(x,y) = x + y\,, \qquad x, y \in I\,,$$

ahol $\varphi\,, \psi \in \mathcal{CM}(I)$. [Mat99]-ben Matkowski megadta a kétszer folytonosan differenciálható megoldásait az (MS) függvényegyenletnek. Később kiderült, hogy Sutô, japán matematikus, 1914-ben szintén foglalkozott ezzel a függvényegyenlettel és [Sut14a]-ban megadta az analitikus megoldásokat. A probléma 1995-ös újrafelfedezése után több dolgozat is született a témával kapcsolatban pl. [DM99], [DMP00], [DP01]. Végül Daróczy és Páles [DP02a]-ban minden regularitási feltétel nélkül megoldották a problémát.

2.1. **Tétel** (Daróczy-Páles)**.** *Ha a $(\varphi, \psi) \in \mathcal{CM}(I)^2$ pár megoldása az* (MS) *egyenletnek, akkor létezik olyan p valós szám, hogy*

$$\varphi \overset{I}{\sim} \chi_p\,, \qquad \text{\textit{és}} \qquad \psi \overset{I}{\sim} \chi_{-p}\,.$$

2.2. **Matkowski-Sutô probléma súlyozott kvázi-aritmetikai közepekre.** Az Matkowski-Sutô probléma mintájára vetette fel Daróczy Zoltán a következő, vele rokon problémát: Adjuk meg az összes megoldását a következő Matkowski-Sutô típusú egyenletnek:

$$(*) \quad \varphi^{-1}\Big(\alpha\varphi(x) + (1-\alpha)\varphi(y)\Big) + \psi^{-1}\Big((1-\alpha)\psi(x) + \alpha\psi(y)\Big) = x + y\,,$$

ha $x, y \in I$, ahol $I \subset \mathbb{R}$ továbbra is egy pozitív hosszúságú, nyílt intervallum, $\varphi, \psi \in \mathcal{CM}(I)$ és $\alpha \in]0,1[$. Fő eredményünk a következő:

1. **Tétel.** *Legyen $I \subset \mathbb{R}$ pozitív hosszúságú, nyílt intervallum. Tegyük fel, hogy $\varphi, \psi : I \to \mathbb{R}$ szigorúan monoton, folytonos függvények megoldásai a $(*)$ függvényegyenletnek. Ha φ és ψ I-nek egy pozitív hosszúságú, nyílt intervallumán folytonosan differenciálhatóak, akkor létezik olyan p valós konstans, hogy*

$$\varphi \overset{I}{\sim} \chi_p \qquad \text{\textit{és}} \qquad \psi \overset{I}{\sim} \chi_{-p}\,.$$

A bizonyításban fontos szerepet játszik a következő kiterjesztési tétel:

2.2. **Tétel.** *Tegyük fel, hogy a $(\varphi, \psi) \in \mathcal{CM}(I)^2$ pár megoldása a $(*)$ egyenletnek. Ha létezik olyan $I' \subset I$ pozitív hosszúságú, nyílt intervallum és $p \in \mathbb{R}$ konstans, hogy*

$$\varphi \overset{I'}{\sim} \chi_p \qquad \text{\textit{és}} \qquad \psi \overset{I'}{\sim} \chi_{-p}\,,$$

akkor

$$\varphi \overset{I}{\sim} \chi_p \qquad \text{\textit{és}} \qquad \psi \overset{I}{\sim} \chi_{-p}\,.$$

2.3. **Matkowski-Sutô probléma identikus súlyfüggvénnyel súlyozott kvázi-aritmetikai közepekre.** Ebben a részben egy Matkowski által felvetett

$$M_\varphi(x,y)+M_\psi(x,y)=x+y\,,\qquad x,y\in I \tag{1}$$

Matkowski-Sutô típusú egyenletre bizonyítunk kiterjesztési tételt.

2.3. **Tétel.** *Legyen a $(\varphi,\psi)\in\mathcal{CM}(I)^2$ pár megoldása a (1) $x,y\in I$ egyenletnek. Tegyük fel, hogy létezik olyan $J\subset I$ nemüres nyílt intervallum, hogy*

$$\varphi(x)\overset{J}{\sim}\frac{1}{x}\qquad\text{és}\qquad\psi(x)\overset{J}{\sim}\frac{1}{x}\,,$$

ekkor

$$\varphi(x)\overset{I}{\sim}\frac{1}{x}\qquad\text{és}\qquad\psi(x)\overset{I}{\sim}\frac{1}{x}\,.$$

Ezzel általánosítjuk Domsta és Matkowski [DM06]-ban megjelent eredményét:

2.4. **Tétel** (Domsta-Matkowski)**.** *Legyen $I\subset\mathbb{R}_+$ nemüres, nyílt intervallum. Ha a $(\varphi,\psi)\in\mathcal{CM}(I)^2$ pár megoldása a (1) egyenletnek, és vagy φ vagy ψ négyszer folytonosan differenciálható I-n, akkor*

$$\varphi(x)\overset{I}{\sim}\frac{1}{x}\qquad\text{és}\qquad\psi(x)\overset{I}{\sim}\frac{1}{x}\,.$$

2.5. **Tétel.** *Legyenek $\varphi\,,\psi\in\mathcal{CM}(I)$ megoldásai a (1) egyenletnek. Ha φ és ψ közül legalább az egyik négyszer folytonosan differenciálható I-nek egy nemüres részintervallumán, akkor*

$$\varphi(x)\overset{I}{\sim}\frac{1}{x}\qquad\text{és}\qquad\psi(x)\overset{I}{\sim}\frac{1}{x}\,.$$

2.4. **Matkowski-Sutô egyenlet szimmetrizált kvázi-aritmetikai közepekre.** Ebben a fejezeben a

$$A^*_\varphi(x,y;\alpha)+A^*_\psi(x,y;\alpha)=2A_{id_I}(x,y)\,,\qquad x,y\in I\,. \tag{2}$$

Matkowski-Sutô típusú egyenletet oldjuk meg közepes erősségű regularitást feltételezve.

2.6. **Tétel.** *Tegyük fel, hogy a $(\varphi,\psi)\in\mathcal{CM}(I)^2$ pár négyszer differenciálható megoldása a (2) egyenletnek, $\varphi'(x)\neq 0$, $\psi'(x)\neq 0$, ha $x\in I$. Továbbá, $\alpha\notin\left\{\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{21}}{14},\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{21}}{14}\right\}$. Ekkor létezik olyan p valós szám, hogy*

$$\varphi\overset{I}{\sim}\chi_p\qquad\text{és}\qquad\psi\overset{I}{\sim}\chi_{-p}\,.$$

Az előbbi tételben kapott megoldások tetszőleges $\alpha \in]0,1[$ paraméter esetén is megoldások (ez visszahelyettesítéssel könnyen ellenőrízhető), de jelenleg nem tudjuk, hogy léteznek-e más négyszer differenciálható megoldások $\alpha \in \left\{\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{21}}{14}, \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{21}}{14}\right\}$ esetén.

3. Középértékeket tartalmazó függvényegyenletek ekvivalenciája

Ebben a fejezetben egy [Dar02]-ben és [DMP06]-ban a szerzők által felvetett problémával foglalkozunk. A témával kapcsolatban jó áttekintést találhatunk [Mak]-ban.

Legyenek M_1, M_2 ugyanazon az I intervallumon adott szigorú közepek. Milyen további, a közepekre kirótt feltételek esetén egyenlő a következő két függvényegyenlet megoldáshalmaza?

$$f(M_1(x,y)) + f(M_2(x,y)) = f(x) + f(y)\,, \qquad x, y \in I\,, \tag{3}$$

$$2f\big(M_1 \otimes M_2(x,y)\big) = f(x) + f(y)\,, \qquad x, y \in I\,. \tag{4}$$

3.1. **Eddig ismert eredmények.** [DMP06]-ban a szerzők három jól elkülöníthető esetben vizsgálják a (3) és (4) egyenletek ekvivalenciáját. Elsőként az egyik közép egyenlő a mértani a másik a számtani középpel. A második esetben a közepek és a Gauss-kompozíciójuk is kvázi-aritmetikai. A harmadik esetben pedig mindkét közép súlyozott aritmetikai, az egyik $p \in]0,1[$-gyel a másik $(1-p)$-vel. A felsorolt esetekben a következő eredményeket kapták:

3.1. **Tétel** (Daróczy-Maksa-Páles)**.** *Tegyük fel, hogy* $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ *megoldása az*

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) + f\left(\sqrt{xy}\right) = f(x) + f(y)\,,$$

függvényegyenletnek minden $x, y \in \mathbb{R}_+$ *esetén. Ekkor* f *konstans a pozitív valós számok halmazán.*

3.2. **Tétel** (Daróczy-Maksa-Páles)**.** *Tegyük fel, hogy* M_1, M_2 *és* $M_1 \otimes M_2$ *kvázi aritmetikai közepek az* I *intervallumon, ekkor* (3) *és* (4) *megoldáshalmazai megegyeznek.*

3.3. **Tétel** (Daróczy-Maksa-Páles)**.** *Legyen* $M_1(x,y) = px + (1-p)y$, $M_2(x,y) = (1-p)x + py$, *ahol* $p \in]0,1[$. *Ha* p *transzcendens vagy pedig olyan algebrai szám, hogy* $\beta = \frac{p}{2p-1}$ *algebrai konjugáltja* p*-nak, akkor* (3) *megoldáshalmaza bővebb, mint* (4) *megoldáshalmaza.*

[DLL+07] első részében szükséges és elegendő feltételt adnak az ekvivalencia eldöntésére p függvényében.

3.4. **Tétel** (Daróczy-Lajkó-Lovas-Maksa-Páles). *Legyen* $p \in]0,1[$. *Ekkor következő két eset lehetséges:*

(a) Ha $\frac{1-p}{p}$ *algebrai és* $-\frac{1-p}{p}$ *nem algebrai konjugáltja, akkor a* (3) *egyenlet megoldáshalmaza megegyezik a* (4) *egyenlet megoldáshalmazával.*

(b) Ha $\frac{1-p}{p}$ *transzcendens vagy olyan algebrai szám, hogy* $-\frac{1-p}{p}$ *algebrai konjugáltja, akkor a* (3) *egyenlet megoldáshalmaza bővebb a* (4) *egyenlet megoldáshalmazánál.*

3.2. **Saját eredmények.** A továbbiakban $I \subset \mathbb{R}_+$. Vizsgáljuk a (3) és (4) egyenletek ekvivalenciáját, ha M_1 egyenlő az p-vel súlyozott számtani középpel, M_2 pedig egyenlő az $(1-p)$-vel súlyozott harmónikus középpel. Tehát a következő két egyenlet megoldáshalmazaival foglalkozunk:

$$f(px+(1-p)y)+f\left(\frac{1}{(1-p)\frac{1}{x}+p\frac{1}{y}}\right)=f(x)+f(y)\,, \tag{5}$$

$$2f(\sqrt{xy})=f(x)+f(y)\,, \tag{6}$$

ahol $x, y \in I$.

3.5. **Tétel.** *Az* (5) *függvényegyenlet megoldáshalmaza megegyezik az* (6) *függvényegyenlet megoldáshalmazával.*

Az előbbi tétel speciális esetét ($p = \frac{1}{2}$) Ebanks bizonyította [Eba02]-ben.

3.3. **Egy alkalmazás.** Legyenek M_1 , M_2 , M_3 ugynazon az I intervallumon értelmezett súlyozott kvázi-aritmetikai közepek úgy, hogy M_3 a Gauss kompozíciója M_1-nek és M_2-nek I-n. Az (M_1 , M_2 , M_3) rendezett hármast kivételes esetnek nevezzük I-n, ha létezik azonos generátorfüggvényük és $0 < p < 1$ valós szám, hogy M_1 p-vel M_2 $(1-p)$-vel M_3 pedig $\frac{1}{2}$-del van súlyozva, ahol p vagy transzcendens, vagy olyan algebrai szám, hogy $\frac{1-p}{p}$ és $-\frac{1-p}{p}$ algebrai konjugáltak.

A következő tételt Daróczy bizonyította [Dar07]-ben. A bizonyításban felhasználja többek között a 3.5 Tételt is.

3.6. **Tétel** (Daróczy). *Legyenek* M_1 , M_2 , M_3 *ugynazon az* I *intervallumon értelmezett súlyozott kvázi-aritmetikai közepek úgy, hogy* M_3 *a Gauss kompozíciója* M_1*-nek és* M_2*-nek* I*-n.*

- *Ha az* (M_1 , M_2 , M_3) *rendezett hármas nem kivételes eset, akkor a* (3) *és* (4) *egyenletek ekvivalensek.*

- *Ha az* $(M_1\,,\, M_2\,,\, M_3)$ *rendezett hármas kivételes eset, akkor a* (3) *egyenletnek létzik olyan megoldása, amely* (4)*-nek nem megoldása.*

Introduction

4. Means and their Gauss composition

5. Matkowski-Sutô type equations

5.1. The original Matkowski-Sutô equation.

5.2. Matkowski-Sutô problem on weighted quasi-arithmetic means.

5.3. Matkowski-Sutô problem on weighted quasi-arithmetic means with variable weights.

5.4. Matkowski-Sutô equation involving symmetrized weighted quasi-arithmetic means.

6. Equivalence of functional equations involving means

References

[Acz47] J. Aczél, *The notion of mean values*, Norske Vid. Selsk. Forh., Trondhjem **19** (1947), no. 23, 83–86.

[Acz48] ______, *On mean values*, Bull. Amer. Math. Soc. **54** (1948), 392–400.

[Acz66] ______, *Lectures on Functional Equations and Their Applications*, Mathematics in Science and Engineering, vol. 19, Academic Press, New York–London, 1966.

[Acz89] ______, *Basics of functional equations arising from recent applications to economics and to other sciences*, XII Symposium on Operations Research (Passau, 1987), Athenäum/Hain/Hanstein, Königstein, 1989, pp. 3–14.

[Acz95] ______, *Some recent applications of functional equations to the social and behavioral sciences. Further problems*, Aequationes Math. **50** (1995), no. 1-2, 38–49.

[AD75] J. Aczél and Z. Daróczy, *On measures of information and their characterizations*, Academic Press [Harcourt Brace Jovanovich Publishers], New York, 1975, Mathematics in Science and Engineering, Vol. 115.

[AD89] J. Aczél and J. Dhombres, *Functional Equations in Several Variables*, Cambridge University Press, Cambridge, 1989, With applications to mathematics, information theory and to the natural and social sciences.

[BajPal] Baják, Sz. and Páles, Zs., *Invariance for generalized quasi-arithmetic means*, submitted.

[Bak94] J. A. Baker, *A functional equation from probability theory*, Proc. Amer. Math. Soc. **121** (1994), no. 3, 767–773.

[Ben01] W. Benz, *Functional equation problems in geometry*, Aequationes Math. **62** (2001), no. 1-2, 11–17.

[Ben03] ______, *A common characterization of Euclidean and hyperbolic geometry by functional equations*, Publ. Math. Debrecen **63** (2003), no. 3, 495–510.

[BorBor87] J. M. Borwein and P. B. Borwein, *Pi and the AGM*, Canadian Mathematical Society Series of Monographs and Advanced Texts, John Wiley & Sons Inc., New York, 1987.

[Bur06] P. Burai, *Extension theorem for a functional equation*, J. Appl. Anal. **12** (2006), no. 2, 293–299.

[Bur07] ______, *A Matkowski–Sutô type equation*, Publ. Math. Debrecen **70** (2007), no. 1-2, 233–247.

[Bur] ______, *On the equicalence of equations involving means and solution to a problem of Daróczy*, accepted, Aequationes Math..

[CanJuaInd97] Candeal, Juan C. and De Miguel, Juan R. and Induráin, *Functional equations in utility and game theory*, Rev. Un. Mat. Argentina, **40** (1997), no. 3-4, 113–124.

[Dar70] Z. Daróczy, *On the Shannon measure of information*, Magyar Tud. Akad. Mat. Fiz. Oszt. Közl. **19** (1970), 9–24. MR 40:8497

[Dar99] ______, *On a class of means of two variables*, Publ. Math. Debrecen **55** (1999), no. 1-2, 177–197.

[Dar00] ______, *Matkowski-Sutô type problem for conjugate arithmetic means*, Rocznik Nauk.-Dydakt. Prace Mat. **17** (2000), 89–100, Dedicated to Professor Zenon Moszner on the occasion of his seventieth birthday.

[Dar02] ______, *Functional equations involving means and their Gauss-composition*, Report of Meeting: The Second Debrecen-Katowice Winter Seminar on Functional Equations and Inequalitiess, http://riesz.math.klte.hu/ debkat/2002/2002.html.

[Dar04] ______, *Quasi-arithmetic elements of a given class of means*, Publ. Math. Debrecen **65** (2004), no. 3-4, 317–322, Dedicated to the memory of Béla Brindza and Jenő Erdős.

[Dar05] ______, *Functional equations involving means and Gauss compositions of means*, Nonlinear Anal. **63** (2005), no. 5-7, e417–e425.

[Dar07] Z. Daróczy, *Functional equations involving weighted quasi-arithmetic means*, Annales Univ.Sci. Budapest, Sec. Comp. **27** (2007), 45-55.

[DEP02] Z. Daróczy B. Ebanks and Zs. Páles, *5. feladat és megoldása, Jelentés a2001. évi Schweitzer Miklós matematikai emlékversenyről*, Mat.Lapok, **2**(2000–2001), 58–60. (Problem 5. solution, Schwitzer Contest in Higher Matematics 2001 (in Hungarian)).

[DH05] Z. Daróczy and G. Hajdu, *On linear combinations of weighted quasi-arithmetic means*, Aequationes Math. **69** (2005), no. 1-2, 58–67.

[DHN03] Z. Daróczy, G. Hajdu, and C. T. Ng, *An extension theorem for a Matkowski-Sutô problem*, Colloq. Math. **95** (2003), no. 2, 153–161.

[DLL+07] Z. Daróczy, K. Lajkó, R. L. Lovas, Gy. Maksa, and Zs. Páles, *Functional equations involving means*, Acta Math. Hungar. **116** (2007), no. 1-2, 79–87.

[DM79] Z. Daróczy and Gy. Maksa, *Nonnegative information functions*, Analytic function methods in probability theory (Proc. Colloq. Methods of Complex Anal. in the Theory of Probab. and Statist., Kossuth L. Univ. Debrecen, Debrecen, 1977), North-Holland, Amsterdam, 1979, pp. 67–78.

[DM99] ______, *On a problem of Matkowski*, Colloq. Math. **82** (1999), no. 1, 117–123.

[DMP00] Z. Daróczy, Gy. Maksa, and Zs. Páles, *Extension theorems for the Matkowski-Sutô problem*, Demonstratio Math. **33** (2000), no. 3, 547–556.

[DMP04] ______, *On two-variable means with variable weights*, Aequationes Math. **67** (2004), no. 1-2, 154–159.

[DMP06] ______, *Functional equations involving means and their Gauss composition*, Proc. Amer. Math. Soc. **134** (2006), no. 2, 521–530.

[DP87] Z. Daróczy and Zs. Páles, *Convexity with given infinite weight sequences*, Stochastica **11** (1987), no. 1, 5–12.

[DP01] ______, *On means that are both quasi-arithmetic and conjugate arithmetic*, Acta Math. Hungar. **90** (2001), no. 4, 271–282.

[DP02a] ______, *Gauss-composition of means and the solution of the Matkowski–Sutô problem*, Publ. Math. Debrecen **61** (2002), no. 1-2, 157–218.

[DP02b] ______, *A Matkowski-Sutô type problem for quasi-arithmetic means of order α*, Functional Equations — Results and Advances (Z. Daróczy and Zs. Páles, eds.), Adv. Math. (Dordr.), vol. 3, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 2002, pp. 189–200.

[DP03a] ______, *Középértékek Gauss-féle kompozíciója és a Matkowski–Sutô probléma megoldása*, Mat. Lapok (1998-99 (2003)), no. 3-4, 1–53.

[DP03b] ———, *A Matkowski–Sutô-type problem for weighted quasi-arithmetic means*, Ann. Univ. Sci. Budapest. Sect. Comput. **22** (2003), 69–81, Dedicated to the 60th birthday of Professor Karl-Heinz Indlekofer.

[DP03c] ———, *On functional equations involving means*, Publ. Math. Debrecen **62** (2003), no. 3-4, 363–377, Dedicated to Professor Lajos Tamássy on the occasion of his 80th birthday.

[DP06a] ———, *On the equality of means*, Report of Meeting: The Sixth Debrecen-Katowice Winter Seminar on Functional Equations and Inequalities, http://riesz.math.klte.hu/ debkat/2006/2006.html

[DP06b] ———, *On symmetrized weighted quasi-arithmetic means*, Report of Meeting: The Forty-third International Symposium on Functional Equations, Aequationes Math. **71** (2006), 178–179.

[DM06] J. Domsta and J. Matkowski, *Invariance of the arithmetic mean with respect to special mean-type mappings*, Aequationes Math. **71** (2006), no. 1-2, 70–85.

[Eba02] B. R. Ebanks, *Solution of some functional equations involving symmetric means*, Publ. Math. Debrecen **61** (2002), no. 3-4, 579–588.

[Eic78] W. Eichhorn, *Functional equations in economics*, Applied Mathematics and Computation, vol. 11, Addison-Wesley Publishing Co., Reading, Mass., 1978.

[Ger92] Ger, Roman *On a system of functional equations occurring in projective geometry*, Rad. Mat., **2** (1992), no. 3-4, 189–200.

[Gin38] C. Gini, *Di una formula compressiva delle medie*, Metron **13** (1938), 3–22.

[Haj02] G. Hajdu, *An extension theorem for the Matkowski–Sutô problem for conjugate arithmetic means*, Functional Equations — Results and Advances (Z. Daróczy and Zs. Páles, eds.), Advances in Mathematics, vol. 3, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 2002, pp. 201–208. MR 2003e:39046

[Haj03] ———, *Investigations in the theory of functional equations*, PhD értekezés, (PhD Thesis), Matematikai Intézet, Debreceni Egyetem Institute of Mathematics, University of Debrecen, Debrecen, Hungary, 2003.

[HLP34] G. H. Hardy, J. E. Littlewood, and G. Pólya, *Inequalities*, Cambridge University Press, Cambridge, 1934, (first edition), 1952 (second edition).

[Jár05] A. Járai, *Regularity Properties of Functional Equations in Several Variables*, Adv. Math. (Springer), vol. 8, Springer, Berlin–Heidelberg, 2005.

[Jar07] J. Jarczyk, *Invariance of weighted quasi-arithmetic means with continuous generators*, Publ. Math. Debrecen **71** (2007).

[JM06] J. Jarczyk and J. Matkowski, *Invariance in the class of weighted quasi-arithmetic means*, Ann. Polon. Math. **88** (2006), no. 1, 39–51.

[Jen05] J.L.W.V. Jensen, *Om konvekse funktioner og uligheder imellem middelvaerdier*, Nyt. Tidsskrift for Mathematik **16 B** (1905), 49–69.

[Jen06] J.L.W.V. Jensen, *Sur les fonctions convexes et les inégalités entere les valeurs moyennes*, Acta Math. **30** (1906), 179–193.

[KM96] P. Kahlig and J. Matkowski, *Functional equations involving the logarithmic mean*, Z. Angew. Math. Mech. **76** (1996), no. 7, 385–390.

[KM97] ———, *On the composition of homogeneous quasi-arithmetic means*, J. Math. Anal. Appl. **216** (1997), no. 1, 69–85.

[KM03] ———, *A solution of a problem of Z. Daróczy on mixing-arithmetic means*, Acta Sci. Math. (Szeged) **69** (2003), no. 1-2, 49–56.

[Kuc85] M. Kuczma, *An Introduction to the Theory of Functional Equations and Inequalities*, Prace Naukowe Uniwersytetu Śląskiego w Katowicach, vol. 489, Państwowe Wydawnictwo Naukowe — Uniwersytet Śląski, Warszawa–Kraków–Katowice, 1985.

[KuzNat70] Kuznecov, S. E. and Natanzon, S. M., *A certain functional equation that has applications in game theory*, Sibirsk. Mat. Ž., **11** (1970), 128–136.

[Los99] L. Losonczi, *Equality of two variable weighted means: reduction to differential equations*, Aequationes Math. **58** (1999), no. 3, 223–241.

[Los00] ———, *Equality of Cauchy mean values*, Publ. Math. Debrecen **57** (2000), no. 1-2, 217–230.

[Los02a] ———, *Comparison and subhomogeneity of integral means*, Math. Inequal. Appl. **5** (2002), no. 4, 609–618.

[Los02b] ———, *Homogeneous Cauchy mean values*, Functional Equations — Results and Advances (Z. Daróczy and Zs. Páles, eds.), Advances in Mathematics, vol. 3, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 2002, pp. 209–218.

[Los03] ———, *Equality of two variable Cauchy mean values*, Aequationes Math. **65** (2003), no. 1-2, 61–81.

[Los06] ———, *Equality of two variable means revisited*, Aequationes Math. **71** (2006), no. 3, 228–245.

[MakoPal] Makó, Z. and Páles, Zs., *On the equaility of generalized quasi-arithmetic means*, submitted to Publ.Math. Debrecen.

[Mak87] Gy. Maksa, *The general solution of a functional equation arising in information theory*, Acta Math. Hungar. **49** (1987), no. 1-2, 213–217.

[Mak] ———, *Középértékeket tartalmazó függvényegyenletek*, Közgyűlési előadások, 2006 Magyar Tudományos Akadémia, Budapest (to appear).

[Mat99] J. Matkowski, *Invariant and complementary quasi-arithmetic means*, Aequationes Math. **57** (1999), no. 1, 87–107.

[Mat04] ———, *Solution of a regularity problem in equality of Cauchy means*, Publ. Math. Debrecen **64** (2004), no. 3-4, 391–400.

[Mat06] ———, *On weighted extensions of Cauchy's means*, J. Math. Anal. Appl. **319** (2006), no. 1, 215–227.

[RaoSha94] Rao, C. Radhakrishna and Shanbhag, D. N. *Choquet-Deny type functional equations with applications to stochastic models*, John Wiley & Sons Ltd., Chichester, (1994).

[Sch82] I. J. Schoenberg, *Mathematical time exposures*, Mathematical Association of America, Washington, DC, 1982.

[Sto75] K. B. Stolarsky, *Generalizations of the logarithmic mean*, Math. Mag. **48** (1975), 87–92.

[Sut14a] O. Sutô, *Studies on some functional equations I*, Tôhoku Math. J. **6** (1914), 1–15.

[Sut14b] ———, *Studies on some functional equations II*, Tôhoku Math. J. **6** (1914), 82–101.

[Szé88] L. Székelyhidi, *Stability of some functional equations in economics*, Rend. Sem. Mat. Fis. Milano **58** (1988), 169–176 (1990).

Publikációk

(1) Pál Burai: *On the equivalence of equations involving means and solution to a problem of Daróczy,* közlésre elfogadva (Aequationes Mathematicae).
   - Zoltán Daróczy, *Functional equations involving weighted quasi-arithmetic means*, Annales Univ.Sci. Budapest, Sec. Comp. **27** (2007), 45-55.

(2) Pál Burai: *A Matkowski-Sutô type equation,* Publ.Math. Debrecen **70/1-2** (2007), 233–247.
   - Szabolcs Baják and Zsolt Páles, *Invariance for generalized quasi-arithmetic means*, submitted
   - Zita Makó and Zsolt Páles, *On the equaility of generalized quasi-arithmetic means*, submitted

(3) Pál Burai: *Extension theorem for a functional equation,* Journal of Applied Analysis **12/2** (2006), 293–299.
   - Szabolcs Baják and Zsolt Páles, *Invariance for generalized quasi-arithmetic means*, submitted
   - Zita Makó and Zsolt Páles, *On the equaility of generalized quasi-arithmetic means*, submitted

(4) Pál Burai and Árpád Száz, *Homogeneity properties of subadditive functions,*Acta Acad. Paedagog. Agriensis Sect. Mat. (N.S.) **32** (2005), 189–201.

(5) Pál Burai and Árpád Száz, *Coincidence theorems for subadditive and superadditive functions,*Carpathian J. Math., **21** (2005), no. 1-2, 21–26.

(6) Pál Burai and Árpád Száz, *Relationships between homogeneity, subadditivity and convexity properties,* Univ. Beograd. Publ. Elektrotehn. Fak. Ser. Mat. **16** (2005), 77–87.

Előadások

1. *Extension theorem for a functional equation*, 2004, Síkfőkút, Hungary.
2. *Extension theorem for a functional equation*, The Fifth Katowice-Debrecen Winter Seminar on Functional Equations and Inequalities, 2005. 02. 2–5, Bedlewo, Poland.
3. *Functional equation of Domsta and Matkowski*, The First International Student's Conference of Analysis, 2005.02.09–13, Szczyrk, Poland.
4. *How to use Maple to solve functional equations*, 2005, Síkfőkút, Hungary.
5. *Matkowski-Sutôtype functional equations*, 2006. 01. 15–22, Karlsruhe, Germany.
6. *A Matkowski-Sutô type equation*, The Sixth Debrecen-Katowice Winter Seminar on Functional Equations and Inequalities, 2006.02. 1–4, Berekfürdő, Hungary.
7. *A Matkowski-Sutô type equation*, The Second International Students Conference of Analysis, 2006.02. 4–7, Síkfőkút, Hungary.
8. *On a Matkowski- Sutô type equation*, 6th Joint Conference on Mathematics and Computer Science, 2006.07. 12–15, Pécs, Hungary.
9. *On the equivalence of equations involving means and solution to a problem of Daróczy*, 11th International Conference on Functional Equations and Inequalities, 2006.09. 17–23, Bedlewo, Poland.
10. *Means and their Gauss composition*, The Third International Students Conference of Analysis, 2007.02. 3–6, Síkfőkút, Hungary.
11. *Matkowski-Sutô equation on symmetrized weighted quasi-arithmetic means*, The Seventh Katowice- Debrecen Winter Seminar on Functional Equations and Inequalities, 2007. 01.31–02.3, Bedlewo, Poland.
12. *Equivalence of equations involving means*, The 45^{th} International Symposium on Functional Equations, Bielsko-Biała, Poland June 24-July 1, 2007.