Turán type inequalities for some special functions

Doktori (PhD) értekezés tézisei

Baricz Árpád

Debreceni Egyetem
Természettudományi Kar

Debrecen, 2008

TARTALOMJEGYZÉK

1. Bevezetés

Turán Pál [**Tu**] 1941-ben Legendre polinomokra igazolt egyenlőtlenségére 1948-ban Szegő Gábor négy elegáns bizonyítást adott, és kiterjesztette az eredményt ultraszférikus, Laguerre, Hermite és Jacobi polinomokra. Ezt követően, a Turán Pál és a Szegő Gábor eredményeinek hatására az 50-es és a 60-as években matematikusok serege igazolta, hogy a legtöbb (ortogonális) polinom (mint például Appell, Bernstein-Szegő, Hermite, Jacobi, Jensen, Pollaczek, Lommel, Laguerre, Askey-Wilson, Gegenbauer), illetve speciális függvény (mint például Bessel, q-Bessel, módosított Bessel, Riemann zeta) teljesít bizonyos Turán típusú egyenlőtlenségeket. Napjainkban ismét előtérbe kerültek a Turán típusú egyenlőtlenségek, más speciális függvények kapcsán.

A disszertációban különböző speciális függvényekre vonatkozó Turán típusú egyenlőtlenségekkel foglalkozunk. Az első fejezetben a következő témákat tárgyaljuk: az elliptikus integrálokra és a Gauss-féle hipergeometrikus sorra vonatkozó Turán típusú egyenlőtlenségek, elliptikus integrálokra vonatkozó alsó és felső korlátok, az általánosított Grötzsch gyűrű függvény paraméter szerinti viselkedése és a Poincaré metrika elliptikus integrálokkal való közelítése. Itt megjegyezzük, hogy ezek az eredmények kiegészítik a Legendre és Jacobi polinomokra igazolt klasszikus eredményeket. Pontosabban, az 1.1.1 Tétel kiegészíti Turán Pál Legendre polinomokra igazolt eredményét [**Tu**], míg az 1.4.1 Tétel kiegészíti Szegő Gábor [**Sze1**] és George Gasper [**Ga2**] Jacobi polinomokra igazolt eredményeit. A fejezet végén felsorolunk néhány a kutatás során nyitva maradt kérdést a hipergeometrikus és a gamma függvényekkel kapcsolatban.

A második fejezetben Bessel és módosított Bessel függvényekre vonatkozó Turán típusú egyenlőtlenségekkel, és azok azonnali alkalmazásaival foglalkozunk. Alkalmazzuk a megfelelő Turán típusú egyenlőtlenségeket trigonometrikus és hiperbolikus függvényekre felírt egyenlőtlenlenségek általánosításához. A fő eredmények a 2.1.1 Tétel és 2.2.1 Tétel, amelyekben a fent említett egyenlőtlenségek mellett a Bessel és a módosított Bessel függvényekre megadtunk néhány fontos monotonitási és konvexitási tulajdonságot. Itt fontos szerepet játszik Elbert Árpád [**El**] híres eredménye, miszerint az elsőfajú Bessel függvények gyökei konkávak a paraméterük szerint.

A harmadik fejezetben a fontosabb egyváltozós eloszlások sűrűségfüggvényeinek paramétereik szerinti konkavitását vizsgáljuk. Az első alfejezetben, az Edward Neumannal közösen igazolt eredmények [**BN**] segítségével, igazoljuk, hogy a nemcentrált khi és khi négyzet eloszlások sűrűségfüggvényeire is fennállnak bizonyos Turán típusú eredmények, akárcsak az elsőfajú módosított Bessel függvényekre. Ugyancsak igazak lesznek bizonyos Turán típusú egyenlőtlenségek a Student eloszlás sűrűségfüggvényére is. Mi több, a második alfejezetben igazoljuk, hogy a másodfajú módosított Bessel függvények logaritmikusan konvexek a paraméterükre nézve. Végül, a harmadik alfejezetben az előbb igazolt Turán típusú egyenlőtlenségeket használjuk arra, hogy egy lényeges egyszerűbb bizonyítást adjunk a különböző fajú módosított Bessel függvények szorzatának monotonitására. Ez a monotonitási tulajdonság, amely egy biofizikai probléma kapcsán merült fel, finomítja Robert Penfold és társai [**PVG**] eredményét. Ezenkívül érdemes megjegyezni, hogy a 3.1 alfejezet eredményeit Yin Sun és a szerző [**SB**] eredményesen használta a radarjelek vizsgálatánál használatos általánosított Marcum $Q-$függvény vizsgálatánál.

Végül, a negyedik fejezetben a matematikai statisztikában használatos standard normál eloszlás Mills arányára vonatkozó monotonitási tulajdonságokkal és Turán típusú egyenlőtlenségekkel foglalkozunk. Itt fontos szerepet játszik a Pinelis-féle ún. monoton l'Hospital szabály [**Pi2**], amely napjainkban egy nagyon fontos alapeszköz, többek között a kvázikonformis analizísben és az analítikus egyenlőtlenségek vizsgálatánál.

Az itt közölt eredmények jelentős része publikálásra került. Az 1. fejezet alapjául a szerző [**Ba4**] és [**Ba6**] dolgozatai szolgáltak. A 2. fejezet a [**Ba8**] munka alapján íródott. A 3. fejezet első két alfejezetében a [**Ba9**] dolgozatra támaszkodtunk, míg a harmadik alfejezetben a [**Ba7**] dolgozatot használtuk fel. A 4. fejezet a [**Ba5**] cikken alapszik.

2. Hipergeometrikus függvényekre vonatkozó Turán egyenlőtlenségek

Tekintsük az $F(a,b,c,x)$ Gauss-féle hipergeometrikus sort (függvényt) [**AAR**, p. 64], amelynek az a,b,c valós és $c \neq -1,-2,\ldots$ számok esetén a következő alakja van

$$F(a,b,c,x)=\sum_{n\geq 0}\frac{(a)_n(b)_n}{(c)_n}\cdot\frac{x^n}{n!}\quad\text{minden}\quad x\in(-1,1)\quad\text{esetén,}$$

ahol $(a)_n=a(a+1)(a+2)\ldots(a+n-1)$, $(a)_0=1$ jelöli az ún. Pochhammer (vagy Appell) szimbólumot. Ismert, hogy a Legendre polinom sajátos esete a Gauss-féle hipergeometrikus függvénynek, vagyis fennáll a $P_n(1-2x)=F(-n,n+1,1,x)$ azonosság minden $x\in(0,1)$ és $n\in\{0,1,2,\ldots\}$ esetén. Továbbá, tekintsük az $F_a(x)=F(a,1-a,1,x)$ jelölést, ahol $x\in(0,1)$, $a=-n$ és $n\in\{0,1,2,\ldots\}$. A fentiek alapján a

$$[P_{n+1}(x)]^2>P_n(x)P_{n+2}(x)$$

Turán egyenlőtlenség [**Tu**], amely fennáll minden $x\in(-1,1)$ és $n\in\{0,1,2,\ldots\}$ esetén, ekvivalens az

$$\left[F_{\frac{a_1+a_2}{2}}(x)\right]^2>F_{a_1}(x)F_{a_2}(x),$$

egyenlőtlenséggel, ahol $x\in(0,1)$, $a_1=a$ és $a_2=a-2$. Így természetesen tevődik fel a kérdés, hogy az előbbi egyenlőtlenség vagy a fordítottja fennáll-e az a paraméter más értékeire. Erre a kérdésre a választ megadja az 1. fejezet első fő eredménye:

1.1.1. Tétel. *Minden $a, x \in (0, 1)$ esetén az általánosított teljes elliptikus integrál*

$$a \mapsto \mathcal{K}_a(x) = \frac{\pi}{2} \cdot F(a, 1-a, 1, x^2)$$

szigorúan szubadditív és szigorúan konkáv, következésképpen szigorúan log-konkáv. Sajátosan, bármely $a_1, a_2, x \in (0, 1)$ esetén

$$\sqrt{\mathcal{K}_{a_1}(x)\mathcal{K}_{a_2}(x)} \leq \frac{\mathcal{K}_{a_1}(x) + \mathcal{K}_{a_2}(x)}{2} \leq \mathcal{K}_{\frac{a_1+a_2}{2}}(x) \leq \mathcal{K}_{\frac{a_1}{2}}(x) + \mathcal{K}_{\frac{a_2}{2}}(x).$$

Karlin és Szegő a [**KS**] cikkben felvetették a kérdést, hogy milyen α és β értékekre áll fenn az alábbi általánosított Turán egyenlőtlenség

$$\left[R_{n+1}^{(\alpha,\beta)}(x)\right]^2 > R_n^{(\alpha,\beta)}(x) R_{n+2}^{(\alpha,\beta)}(x)$$

minden $x \in (-1, 1)$ és $n \in \{0, 1, 2, \ldots\}$ esetén, ahol

$$R_n^{(\alpha,\beta)}(x) = P_n^{(\alpha,\beta)}(x)/P_n^{(\alpha,\beta)}(1)$$

a normalizált Jacobi polinom és $P_n^{(\alpha,\beta)}$ a Jacobi polinom, vagyis

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(x) = \frac{(\alpha+1)_n}{n!} \cdot F\left(-n, n+\alpha+\beta+1, \alpha+1, \frac{1-x}{2}\right), \quad \alpha, \beta > -1.$$

Itt megjegyezzük, hogy $R_n^{(0,0)}(x) = P_n(x)$ minden $x \in (-1, 1)$ esetén és

$$R_n^{(\alpha,\beta)}(x) = F\left(-n, n+\alpha+\beta+1, \alpha+1, \frac{1-x}{2}\right).$$

1962-ben Szegő [**Sze2**] igazolta, hogy a fenti általánosított Turán egyenlőtlenség fennáll minden $\beta \geq |\alpha|$ és $\alpha > -1$ esetén. Gasper [**Ga1**, **Ga2**] finomította ezt az eredményt igazolva, hogy a fenti általánosított Turán egyenlőtlenség fennáll akkor és csakis akkor ha $\beta \geq \alpha > -1$. Most tegyük fel, hogy $\beta = 0$ és tekintsük az $F_a(x) = F(a, c-a, c, x)$ jelölést, ahol $x \in (0, 1)$, $c = \alpha + 1 \in (0, 1]$, $a = -n$ és $n \in \{0, 1, 2, \ldots\}$. Felhasználva Gasper eredményét $\beta = 0$ esetén, azt kapjuk, hogy a fenti egyenlőtlenség ekvivalens az alábbival

$$\left[F_{\frac{a_1+a_2}{2}}(x)\right]^2 > F_{a_1}(x) \cdot F_{a_2}(x),$$

ahol $x \in (0, 1)$, $a_1 = a$ és $a_2 = a - 2$. Akárcsak a Legendre polinomokra felírt Turán egyenlőtlenségnél, itt is természetesen tevődik fel a kérdés, hogy az előbbi egyenlőtlenség vagy a fordítottja fennáll-e az a paraméter más értékeire. Az alábbi eredmény finomítja az 1.1.1 Tételt és kiegészíti a fenti eredményt.

1.4.1. Tétel. *Minden $0 < a < c \leq 1$ és $x \in (0, 1)$ esetén az $a \mapsto F_a(x) = F(a, c-a, c, x)$ függvény szigorúan szubadditív és szigorúan konkáv, következésképpen szigorúan log-konkáv. Sajátosan, minden $a_1, a_2 \in (0, c)$ és $x \in (0, 1)$ esetén az alábbi egyenlőtlenségek fennállnak*

$$\sqrt{F_{a_1}(x)F_{a_2}(x)} \leq \frac{F_{a_1}(r) + F_{a_2}(x)}{2} \leq F_{\frac{a_1+a_2}{2}}(x) \leq F_{\frac{a_1}{2}}(x) + F_{\frac{a_2}{2}}(x).$$

3. **Bessel függvényekre vonatkozó Turán egyenlőtlenségek**

A szinusz és a koszinusz függvények a Bessel függvények sajátos esetei, míg a szinusz hiperbolikusz és a koszinusz hiperbolikusz függvények sajátos esetei a módosított Bessel függvényeknek. Így ezekre az elemi függvényekre az ismert azonosságok, egyenlőtlenségek általánosítása természetes.

Lazarević [**Mi**, p. 270] igazolta, hogy minden $x \neq 0$ esetén a

$$\cosh x < \left(\frac{\sinh x}{x}\right)^3$$

fennáll és a kitevőben levő 3 a legjobb konstans.

Legyen $p > -1$ és tekintsük az $\mathcal{I}_p : \mathbb{R} \to [1, \infty)$,

$$\mathcal{I}_p(x) = 2^p \Gamma(p+1) x^{-p} I_p(x) = \sum_{n \geq 0} \frac{(1/4)^n}{(p+1)_n n!} x^{2n}$$

függvényt, ahol I_p az elsőfajú módosított Bessel függvény [**Wa**, p. 77]

$$I_p(x) = \sum_{n \geq 0} \frac{(x/2)^{2n+p}}{n! \cdot \Gamma(p+n+1)}, \ x \in \mathbb{R}.$$

Érdemes megjegyezni, hogy sajátosan

$$\mathcal{I}_{-1/2}(x) = \sqrt{\pi/2} \cdot x^{1/2} I_{-1/2}(x) = \cosh x,$$

$$\mathcal{I}_{1/2}(x) = \sqrt{\pi/2} \cdot x^{-1/2} I_{1/2}(x) = \frac{\sinh x}{x}.$$

Figyelembe véve ezeket az azonosságokat, a Lazarević egyenlőtlenség a következőképpen írható

$$[\mathcal{I}_{-1/2}(x)]^{-1/2+1} \leq [\mathcal{I}_{-1/2+1}(x)]^{-1/2+2}.$$

Az alábbi eredmény tartalmazza néhány ismert egyenlőtlenség kiterjesztését és néhány fontos monotonitási, konvexitási tulajdonságát a módosított Bessel függvényeknek.

2.1.1 Tétel. *Legyen $p > -1$ és $x \in \mathbb{R}$. Ekkor a következő állítások igazak:*

1. *a $p \mapsto \mathcal{I}_p(x)$ függvény csökkenő és log-konvex;*

2. *a $p \mapsto \mathcal{I}_{p+1}(x)/\mathcal{I}_p(x)$ és $p \mapsto [\mathcal{I}_p(x)]^{p+1}$ függvények növekvőek;*

3. *az alábbi egyenlőtlenségek*

$$[\mathcal{I}_{p+1}(x)]^2 \leq \mathcal{I}_p(x)\mathcal{I}_{p+2}(x),$$

$$[\mathcal{I}_p(x)]^{p+1} \leq [\mathcal{I}_{p+1}(x)]^{p+2},$$

$$[\mathcal{I}_p(x)]^{\frac{p+1}{p+2}} \leq \mathcal{I}_{p+1}(x) \leq \mathcal{I}_p(x),$$

$$[\mathcal{I}_{p+1}(x)]^{1/(p+1)} + \frac{\mathcal{I}_{p+1}(x)}{\mathcal{I}_p(x)} \geq 2,$$

fennállnak $p > -1$ és $x \in \mathbb{R}$ esetén. Az általánosított Lazarević egyenlőtlenségben a p kitevő a legjobb olyan értelemben, hogy $\tau =$

$(p+2)/(p+1)$ a legkisebb értéke $\tau-$nak úgy hogy $\mathcal{I}_p(x) \leq [\mathcal{I}_{p+1}(x)]^{\tau}$ fennálljon. Mi több, ha $x > 0$ rögzített és $p \to \infty$, akkor $[I_p(x)]^2 \sim I_{p-1}(x)I_{p+1}(x)$;

4. *az alábbi egyenlőtlenség*

$$\frac{\mathcal{I}_p(x)}{\mathcal{I}_{p+1}(x)} - 1 \leq \log[\mathcal{I}_{p+1}(x)] \leq \log[\mathcal{I}_p(x)]$$

igaz minden $p \geq 0$ és $x \in \mathbb{R}$ esetén.

Legyen $p > -1$ és tekintsük a $\mathcal{J}_p : \mathbb{R} \to (-\infty, 1]$,

$$\mathcal{J}_p(x) = 2^p\Gamma(p+1)x^{-p}J_p(x) = \sum_{n\geq 0} \frac{(-1/4)^n}{(p+1)_n n!}x^{2n}$$

függvényt, ahol

$$J_p(x) = \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n(x/2)^{2n+p}}{n! \cdot \Gamma(p+n+1)},\ x \in \mathbb{R}$$

az elsőfajú Bessel függvény [**Wa**, p. 40]. Sajátosan igaz, hogy

$$\mathcal{J}_{-1/2}(x) = \sqrt{\pi/2} \cdot x^{1/2}J_{-1/2}(x) = \cos x,$$

$$\mathcal{J}_{1/2}(x) = \sqrt{\pi/2} \cdot x^{-1/2}J_{1/2}(x) = \frac{\sin x}{x}.$$

Más részről ismert, hogy ha $\tau \leq 3$ és $x \in (0, \pi/2)$, akkor az alábbi Lazarević típusú egyenlőtlenség fennáll [**Mi**, p. 238]

$$\cos x < \left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\tau}.$$

Mi több, itt τ nem a legkisebb konstans, mert ha $\tau > 3$, akkor létezik $x_1(\tau) \in (0, \pi/2)$ úgy, hogy a fenti egyenlőtlenség fennáll minden $x \in (x_1(\tau), \pi/2)$ esetén. Vegyük észre, hogy $\tau = 3$ esetén a fenti egyenlőtlenséget úgy is írhatjuk, hogy

$$[\mathcal{J}_{-1/2}(x)]^{-1/2+1} \leq [\mathcal{J}_{-1/2+1}(x)]^{-1/2+2}.$$

Az alábbi eredmény általánosítja a fenti egyenlőtlenséget és tartalmazza néhány fontos monotonitási, konvexitási tulajdonságát az elsőfajú Bessel függvényeknek.

2.2.1 Tétel. *Legyen $p > -1$ és legyen $j_{p,n}$ a J_p Bessel függvény $n-$edik pozitív gyöke. Tekintsük a $\Delta = \Delta_1 \cup \Delta_2$ halmazt, ahol*

$$\Delta_1 = \bigcup_{n\geq 1}[-j_{p,2n}, -j_{p,2n-1}] \quad \text{és} \quad \Delta_2 = \bigcup_{n\geq 1}[j_{p,2n-1}, j_{p,2n}].$$

Ekkor az alábbi állítások igazak:

1. *az $x \mapsto \mathcal{J}_p(x)$ függvény negatív $\Delta-$n és szigorúan pozitív $\mathbb{R} \setminus \Delta-$n;*

2. *az $x \mapsto \mathcal{J}_p(x)$ függvény növekvő a $(-j_{p,1}, 0]-$on és csökkenő a $[0, j_{p,1})-$on;*

3. *az $x \mapsto \mathcal{J}_p(x)$ függvény szigorúan log-konkáv $\mathbb{R} \setminus \Delta-$n;*

4. *az $x \mapsto J_p(x)$ függvény szigorúan log-konkáv $(0,\infty) \setminus \Delta_2-$n feltéve ha $p \geq 0$;*
5. *a $p \mapsto \mathcal{J}_p(x)$ növekvő és log-konkáv minden $x \in (-j_{p,1}, j_{p,1})$ esetén;*
6. *a $p \mapsto J_p(x)$ függvény log-konkáv minden $x \in (0, j_{p,1})$ esetén;*
7. *a $p \mapsto \mathcal{J}_{p+1}(x)/\mathcal{J}_p(x)$ függvény csökkenő minden $x \in (-j_{p,1}, j_{p,1})$ esetén;*
8. *a $p \mapsto [\mathcal{J}_p(x)]^{p+1}$ függvény növekvő minden $x \in (-j_{p,1}, j_{p,1})$ esetén;*
9. *az alábbi egyenlőtlenségek fennállnak minden $\alpha \in (0,1)$ és $x, y \in (0,\infty) \setminus \Delta_2$, $x \neq y$ esetén*

$$J_p(\alpha x) > \alpha^p J_p(x)[\mathcal{J}_p(x)]^{\alpha-1},$$

$$[xJ_p'(x)]^2 > p\,[J_p(x)]^2 + x^2 J_p(x) J_p''(x),$$

$$J_p^2\left(\frac{x+y}{2}\right) > \left(\frac{x+y}{2\sqrt{xy}}\right)^{2p} J_p(x)J_p(y);$$

10. *az alábbi egyenlőtlenségek fennállnak minden $x \in (-j_{p,1}, j_{p,1})$ esetén*

$$[\mathcal{J}_{p+1}(x)]^2 \geq \mathcal{J}_p(x)\mathcal{J}_{p+2}(x),$$

$$[\mathcal{J}_p(x)]^{p+1} \leq [\mathcal{J}_{p+1}(x)]^{p+2},$$

$$[\mathcal{J}_{p+1}(x)]^{1/(p+1)} + \frac{\mathcal{J}_{p+1}(x)}{\mathcal{J}_p(x)} \geq 2.$$

4. Sűrűségfüggvényekre vonatkozó Turán egyenlőtlenségek

Ebben a fejezetben bemutatunk néhány Turán típusú egyenlőtlenséget a nemcentrált khi, nemcentrált khi négyzet és a Student eloszlások sűrűségfüggvényeire. Ezenkívül igazoljuk, hogy a módosított másodfajú Bessel függvény szigorúan log-konvex a paraméterére nézve, majd alkalmazzuk a módosított Bessel függvényekre igazolt Turán típusú egyenlőtlenségeket, hogy egy lényegesen egyszerűbb bizonyítást adjunk a különböző fajú módosított Bessel függvények szorzatának monotonitására. Ez a monotonitási tulajdonság, amely egy biofizikai probléma kapcsán merült fel, finomítja Robert Penfold és társai [**PVG**] eredményét. Ezenkívül érdemes megjegyezni, hogy a 3.1 alfejezet eredményeit Yin Sun és a szerző [**SB**] eredményesen használta a radarjelek vizsgálatánál használatos általánosított Marcum $Q-$függvény vizsgálatánál.

Legyenek $X_1, X_2, \ldots, X_n$ olyan normál eloszlású valószínűségi változók, amelyeknek szórása 1 és várható értéke μ_i, ahol $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Ismert tény, hogy az $X_1^2 + X_2^2 + \cdots + X_n^2$ valószínűségi változó nemcentrált khi négyzet eloszlást követ $n \in \{1, 2, 3, \ldots\}$ szabadságfokkal és $\lambda = \mu_1^2 + \mu_2^2 + \cdots + \mu_n^2$ nemcentráltsági paraméterrel. Ennek az eloszlásnak a $\chi^2_{n,\lambda} : (0,\infty) \to (0,\infty)$

sűrűségfüggvénye [**JKB**] a következőképpen értelmezett

$$\chi^2_{n,\lambda}(x) = 2^{-n/2}e^{-(x+\lambda)/2}\sum_{k\geq 0}\frac{x^{n/2+k-1}(\lambda/4)^k}{\Gamma(n/2+k)k!}$$
$$= \frac{e^{-(x+\lambda)/2}}{2}\left(\frac{x}{\lambda}\right)^{n/4-1/2} I_{n/2-1}(\sqrt{\lambda x}),$$

ahol I_ν az elsőfajú módosított Bessel függvény [**Wa**, p. 77]. Amikor $\mu_1 = \cdots = \mu_n = 0$, vagyis $\lambda = 0$, az előbbi eloszlás visszavezetődik a klasszikus khi négyzet eloszlásra, amelynek sűsűségfüggvénye $\chi^2_{n,0} : (0,\infty) \to (0,\infty)$,

$$\chi^2_n(x) = \chi^2_{n,0}(x) = \frac{x^{n/2-1}e^{-x/2}}{2^{n/2}\Gamma(n/2)}.$$

Más részről, ha az $X_1, X_2, \dots, X_n$ valószínűségi változók olyanok mint fentebb, akkor az $[X_1^2+X_2^2+\cdots+X_n^2]^{1/2}$ valószínűségi változó nemcentrált khi eloszlást követ $n \in \{1,2,3,\dots\}$ szabadságfokkal és $\tau = [\mu_1^2+\mu_2^2+\cdots+\mu_n^2]^{1/2}$ nemcentráltsági paraméterrel. Ennek az eloszlásnak a $\chi_{n,\tau} : (0,\infty) \to (0,\infty)$ sűrűségfüggvénye [**JKB**] a következőképpen értelmezett

$$\chi_{n,\tau}(x) = 2^{-n/2+1}e^{-(x^2+\tau^2)/2}\sum_{k\geq 0}\frac{x^{n+2k-1}(\tau/2)^{2k}}{\Gamma(n/2+k)k!}$$
$$= \tau e^{-(x^2+\tau^2)/2}\left(\frac{x}{\tau}\right)^{n/2} I_{n/2-1}(\tau x).$$

Vegyük észre, hogy ha $\mu_1 = \cdots = \mu_n = 0$, vagyis $\tau = 0$, akkor az előbbi eloszlás a klasszikus khi eloszlásra vezetődik vissza, amelynek a sűrűségfüggvénye $\chi_{n,0} : (0,\infty) \to (0,\infty)$,

$$\chi_n(x) = \chi_{n,0}(x) = \frac{x^{n-1}e^{-x^2/2}}{2^{n/2-1}\Gamma(n/2)}.$$

Ennek a fejezetnek a fő eredménye a következő:

3.1.1 Tétel. *Legyen $a > 0$ és $\lambda, \tau \geq 0$. Tekintsük a $\chi^2_{a,\lambda}, \chi_{a,\tau} : (0,\infty) \to (0,\infty)$,*

$$\chi^2_{a,\lambda}(x) = e^{-(x+\lambda)/2}\sum_{k\geq 0}\frac{(x/2)^{a/2}(\lambda/4)^k}{\Gamma(a/2+k)k!}x^{k-1},$$

$$\chi_{a,\tau}(x) = e^{-(x^2+\tau^2)/2}\sum_{k\geq 0}\frac{x^a(\tau/2)^{2k}}{2^{a/2-1}\Gamma(a/2+k)k!}x^{2k-1}.$$

függvényeket. Ekkor az alábbi állítások igazak:

1. $x \mapsto \chi^2_{a,\lambda}(x)$ *és* $x \mapsto \chi_{a,\tau}(\sqrt{x})$ *log-konkáv, ha* $a \geq 2$;
2. $\lambda \mapsto \chi^2_{a,\lambda}(x)$ *és* $\tau \mapsto \chi_{a,\sqrt{\tau}}(x)$ *log-konkáv* $[0,\infty)$*−on;*
3. $a \mapsto \chi^2_{a,\lambda}(x)$ *és* $a \mapsto \chi_{a,\tau}(x)$ *log-konkáv* $(0,\infty)$*−on;*
4. $a \mapsto \chi^2_{a,\lambda}(x)/\chi^2_a(x)$ *és* $a \mapsto \chi_{a,\tau}(x)/\chi_a(x)$ *log-konvex* $(0,\infty)$*−on;*

5. *$a \mapsto [\chi^2_{a+2,\lambda}(x)\chi^2_a(x)]/[\chi^2_{a+2}(x)\chi^2_{a,\lambda}(x)]$ és*
$a \mapsto [\chi_{a+2,\tau}(x)\chi_a(x)]/[\chi_{a+2}(x)\chi_{a,\tau}(x)]$ növekvő $(0,\infty)-$on.

Tekintsük a K_ν másodfajú módosított Bessel függvényt [**Wa**, p. 78]

$$K_\nu(x) = \frac{\pi}{2}\frac{I_{-\nu}(x) - I_\nu(x)}{\sin \nu\pi},$$

ahol az egyenlet jobb oldalán levő kifejezést a határértékével helyettesítjük, ha ν egész. Laforgia és Natalini [**LN2**, Theorem 2.4] igazolták, hogy minden $\nu_1, \nu_2 > -1/2$ és $x > 0$ esetén az alábbi fordított Turán típusú egyenlőtlenség fennáll

$$K_{\nu_1}(x)K_{\nu_2}(x) \geq \left[K_{\frac{\nu_1+\nu_2}{2}}(x)\right]^2.$$

Vegyük észre, hogy ha $\nu_1 = \nu$ és $\nu_2 = \nu + 2$, akkor minden $\nu > -1/2$ és $x > 0$ esetén az alábbi egyenlőtlenség fennáll [**LN2**, Eq. 2.18]

$$K_\nu(x)K_{\nu+2}(x) \geq [K_{\nu+1}(x)]^2.$$

3.2.1 Tétel. *A $\nu \mapsto K_\nu(x)$ függvény szigorúan log-konvex $\mathbb{R}-$en minden $x > 0$ esetén. Sajátosan, a fenti Turán típusú egyenlőtlenségek igazak minden $x > 0$, ν_1, ν_2 és ν tetszőleges valós számok esetén. Mi több, az első egyenlőtlenségben egyenlőség fennáll akkor és csakis akkor, ha $\nu_1 = \nu_2$, míg a második Turán típusú egyenlőtlenségben nem lehet egyenlőség.*

Legyen I_ν és K_ν a $\nu-$edrendű első és másodfajú módosított Bessel függvény. Egy biofizikai probléma kapcsán 2007-ben Penfold és társai [**PVG**, Theorem 3.1] egy kissé komplikált módon igazolták, hogy az $u \mapsto P_\nu(u) = I_\nu(u)K_\nu(u)$ függvény szigorúan csökkenő $(0,\infty)$ minden $\nu \geq 0$ esetén. Érdemes megjegyezni, hogy $\nu = n \geq 0$ pozitív egészekre ezt az eredményt már 1950-ben igazolta Phillips és Malin [**PM**, Corollary 2.2].

Ennek a fejezetnek az utolsó fő eredménye finomítja a fent említett eredményeket.

3.3.1 Tétel. *Az alábbi állítások igazak:*

1. *P_ν szigorúan csökkenő a $(0,\infty)-$on minden $\nu \geq -1/2$ esetén;*
2. *P_ν szigorúan teljesen monoton a $(0,\infty)-$on minden $\nu \in [-1/2, 1/2]$ esetén*
3. *$u \mapsto u^{1/2-\nu}P_\nu(u)$ szigorúan teljesen monoton a $(0,\infty)-$on minden $\nu \geq 1/2$ esetén.*

5. Mills arányra vonatkozó Turán egyenlőtlenségek

Tekintsük a standard normál eloszlás $\varphi : \mathbb{R} \to [1/\sqrt{2\pi}, \infty)$ sűrűségfüggvényét és a $\overline{\Phi} : \mathbb{R} \to (0,1)$ túlélő függvényét, amelyeket a következőképpen értelmezünk

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2} \qquad \text{és} \qquad \overline{\Phi}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_x^\infty \varphi(t)\,\mathrm{dt}.$$

Az $r : \mathbb{R} \to (0, \infty)$,

$$r(x) = \frac{\overline{\Phi}(x)}{\varphi(x)} = e^{x^2/2} \int_x^{\infty} e^{-t^2/2}\,\mathrm{dt}$$

függvényt a szakirodalomban Mills aránynak nevezik [**Mi**, Sect. 2.26] és többször előfordul a matematikai statisztikában (lásd például [**FMAC**]). Megjegyezzük, hogy több alsó és felső korlát ismert erre az arányra (lásd [**Mi**, Sect. 2.26]). A legismertebb korlátokat Gordon [**Go**] találta meg 1941-ben

$$\frac{x}{x^2+1} < r(x) < \frac{1}{x},$$

ahol $x > 0$. Pinelis [**Pi4**] felhasználva a monoton l'Hospital szabályt finomította az $r(x) < 1/x$ egyenlőtlenséget igazolva, hogy lényegében az $x \mapsto xr(x)$ függvény szigorúan növekvő a $(0, \infty)$ intervallumon. Megjegyezzük, hogy figyelembe véve az $r'(x) = xr(x) - 1$ azonosságot Pinelis eredményéből még a Gordon-féle alsó korlátot is visszakapjuk. Pinelis eredményeinek hatására ebben a fejezetben igazoljuk, hogy a monoton l'Hospital szabály segítségével más élesebb alsó és felső korlátokat is kaphatunk, mi több olyan monotonitási és konvexitási tulajdonságokat levezethetünk, amelyek egy érdekes és hasznos függvényegyenlőtlenségiánchoz vezetnek. Ezenkívül igazoljuk, hogy a Mills arány egy teljesen monoton függvény és hogy a Mills arányra is fennállnak bizonyos Turán típusú egyenlőtlenségek.

A 4. fejezet fő eredményei a következők:

4.1.2. Tétel. *Az alábbi állítások igazak:*

1. *az r Mills arány szigorúan log-konvex az $\mathbb{R}-$en;*
2. *az $x \mapsto xr'(x)/r(x)$ függvény szigorúan csökkenő $(0, \infty)-$en;*
3. *az $x \mapsto xr'(x)$ függvény szigorúan csökkenő $(0, x_0)-$on és szigorúan növekvő $(x_0, \infty)-$on, ahol $x_0 = 1.161527889\ldots$ az $x(x^2+2)\overline{\Phi}(x) = (x^2+1)\varphi(x)$ transzcendens egyenlet egyetlen pozitív gyöke.*
4. *az $x \mapsto x^2r'(x)$ függvény szigorúan csökkenő $(0, \infty)-$on.*

4.2.1. Tétel. *Legyen x egy valós szám és $n \geq 1$ egy természetes szám. Jelölje $r^{(n)}$ a Mills arány $n-$edrendű deriváltját és tekintsük a $\Delta_n = (-1)^n r^{(n)}(x)$ kifejezést. Ekkor a Mills arány szigorúan teljesen monoton az $\mathbb{R}-$en, vagyis $\Delta_n > 0$, és fennáll az alábbi Turán típusú egyenlőtlenség*

$$\Delta_n \cdot \Delta_{n+2} \geq [\Delta_{n+1}]^2.$$

Mi több, az $x \mapsto \left|r^{(n)}(x)\right|$ szigorúan log-konvex az $\mathbb{R}-$en és következésképpen az alábbi Turán típusú egyenlőtlenségek fennállnak:

$$\Delta_{2n-1} \cdot \Delta_{2n+1} \geq [\Delta_{2n}]^2 \geq \frac{2n}{2n+1}\Delta_{2n-1} \cdot \Delta_{2n+1}.$$

6. **Thesis**

In 1941, while studying the zeros of Legendre polynomials

$$P_n(x) = \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left[\frac{(x^2-1)^n}{n!2^n}\right] = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{[n/2]}(-1)^k\frac{(2n-2k)!}{k!(n-k)!(n-2k)!}x^{2n-k},$$

Turán [**Tu**] has discovered the famous inequality

$$[P_{n+1}(x)]^2 > P_n(x)P_{n+2}(x),$$

which holds for all $x \in (-1, 1)$ and $n \in \{0, 1, 2, \ldots\}$. Even if Turán's paper [**Tu**] has been published just in 1950, Szegő [**Sze1**] in 1948 presented four different elegant proofs of the above inequality and extended the result to ultraspherical (or Gegenbauer), Laguerre and Hermite polynomials. Turán's inequality established for Legendre polynomials has generated considerable interest, and shortly after 1948, analogous results were obtained by several authors for other classical polynomials and special functions. Today there is an extensive literature dealing with Turán type inequalities, for example analogous inequalities to Turán's inequality has been found for:

1. Laguerre and Hermite polynomials [**Di**, **Sze1**]
2. ultraspherical polynomials [**BI1**, **BP**, **BuSa**, **Da**, **Sza1**, **Sze1**, **VL**]
3. Jacobi polynomials [**Ga1**, **Ga2**]
4. Appell polynomials [**CW**, **Si**]
5. Pollaczek and Lommel polynomials [**BI3**]
6. Askey-Wilson polynomials [**AbBu**]
7. Bessel functions of the first kind [**JB**, **Sza1**, **Sza2**]
8. modified Bessel functions of the first kind [**IL**, **JB**, **TN**]
9. modified Bessel functions of the second kind [**IL**, **IM**, **LN2**]
10. Galué's generalized modified Bessel functions of the first kind [**Ba1**]
11. polygamma function and Riemann zeta function [**CNV**, **IL**, **LN1**]
12. zeros of general Bessel functions [**Lo**]
13. zeros of ultraspherical, Laguerre and Hermite polynomials [**EL1**, **EL2**, **La**],

and this list is far from being complete. This classical inequality still attracts the attention of mathematicians and it is worth mentioning that recently the above Turán inequality was improved by Constantinescu [**Co**], and further by Alzer et al. [**AGKL**]. Moreover, it is important to note that even if the Turán type inequalities are interesting in their own right, there are many applications of these inequalities. For example, a necessary condition for the Riemann hypothesis can be written as a higher order Turán type inequality. The interested reader is referred to the papers [**CNV**, **Di**, **LN2**] and to the references therein. Another example of applications can be found in the recent paper of Krasikov [**Kr**], where among other things the author used some Turán type inequalities to give new non-asymptotic bounds on the extreme zeros of orthogonal polynomials. Finally, we note that recently Sun and Baricz [**SB**] conjectured that the generalized Marcum $Q-$function is log-concave with respect to its order, and consequently satisfies a Turán type inequality. This Marcum function is of frequent occurrence in radar signal processing and the above conjecture - which was proved to be affirmative by Sun et al. [**SBZ**] - is very useful in order to establish some new and very tight bounds for the generalized Marcum $Q-$function.

This doctoral thesis is a further contribution to the subject and contains certain new Turán type inequalities for some special functions.

The thesis is divided into four chapters. In the first chapter our aim is to establish some Turán type inequalities for Gaussian hypergeometric functions and for generalized complete elliptic integrals. These results complete the earlier result of Turán proved for Legendre polynomials. Moreover, we show that there is a close connection between a Turán type inequality and a sharp lower bound for the generalized complete elliptic integral of the first kind. In section 1.3 we prove a recent conjecture of Sugawa and Vuorinen [**SV**] related to estimates of the hyperbolic distance of the twice punctured plane. The original results of the first three sections of this chapter were published by the author [**Ba4**]. In section 1.4, in order to improve some results from section 1.1, our aim is to establish a Turán type inequality for Gaussian hypergeometric functions. This result completes the earlier result of Szegő [**Sze2**] and Gasper [**Ga2**] proved for Jacobi polynomials. Moreover, at the end of this section we present some open problems, which may be of interest for further research. The results of this section were taken from the author's paper [**Ba6**].

In the second chapter we extend some known elementary trigonometric inequalities, and their hyperbolic analogues to Bessel and modified Bessel functions of the first kind. In order to generalize the Turán type inequalities established for Bessel and modified Bessel functions we present some monotonicity and convexity properties of some functions involving Bessel and modified Bessel functions of the first kind. For instance, we show that Elbert's result [**El**] on the concavity of the zeros of Bessel functions of the first kind can be used to improve the Turán type inequalities established for modified Bessel functions of the first kind. We also deduce some Turán type and Lazarević type inequalities for the confluent hypergeometric functions. The original results of this chapter may be found in Baricz's paper [**Ba8**].

Chapter 3 is devoted to the study of some Turán type inequalities for the probability density function of the non-central chi-squared distribution, non-central chi distribution and Student distribution, respectively. Moreover, in this chapter we improve a result of Laforgia and Natalini [**LN2**] concerning a Turán type inequality for the modified Bessel functions of the second kind. The results of this chapter were taken from the author's paper [**Ba9**]. As an application of some results deduced in sections 2.1 and 3.2, in section 3.3 we present a new very simple proof for the monotonicity of a product of two modified Bessel functions of different kind. This result complements and improves a recent result of Penfold et al. [**PVG**] which was motivated by a problem in biophysics. The original results of this section may be found in author's paper [**Ba7**].

Finally, in chapter 4 we study the monotonicity properties of some functions involving the Mills' ratio of the standard normal law. From these we deduce some new functional inequalities involving the Mills' ratio, and we show that the Mills' ratio is strictly completely monotonic. At the end of this chapter we present some Turán type inequalities for Mills' ratio. The original results of this chapter may be found in author's paper [**Ba5**].

In what follows, without sake of completeness, we present the main results of this doctoral thesis.

1. Turán type inequalities for elliptic integrals. Let $F(a,b,c,x)$ be the Gaussian hypergeometric series (function) [**AAR**, p. 64], which for real numbers a,b,c and $c \neq -1,-2,\dots$ has the form

$$F(a,b,c,x) = \sum_{n\geq 0} \frac{(a)_n(b)_n}{(c)_n} \cdot \frac{x^n}{n!} \quad \text{for all} \quad x \in (-1,1),$$

where $(a)_n = a(a+1)(a+2)\dots(a+n-1)$, $(a)_0 = 1$ denotes the Pochhammer (or Appell) symbol. It is known that the Legendre polynomials are particular cases of Gaussian hypergeometric functions, i.e. we have $P_n(1-2x) = F(-n,n+1,1,x)$ for all $x \in (0,1)$ and $n \in \{0,1,2,\dots\}$. Let us consider the following notation $F_a(x) = F(a,1-a,1,x)$, where $x \in (0,1)$, $a = -n$ and $n \in \{0,1,2,\dots\}$. In view of the above relation clearly Turán's inequality

$$[P_{n+1}(x)]^2 > P_n(x)P_{n+2}(x)$$

is equivalent with

$$\left[F_{\frac{a_1+a_2}{2}}(x)\right]^2 > F_{a_1}(x)F_{a_2}(x),$$

where $a_1 = a$ and $a_2 = a-2$. Thus it is natural to ask when the above inequality or its reverse holds for other values of a. The first main result of this chapter answer this question.

Theorem 1.1.1. *For $a,x \in (0,1)$ the generalized complete elliptic integral*

$$a \mapsto \mathcal{K}_a(x) = \frac{\pi}{2} \cdot F(a,1-a,1,x^2)$$

is strictly sub-additive and strictly concave, consequently it is strictly log-concave. In particular, for all $a_1,a_2,x \in (0,1)$

$$\sqrt{\mathcal{K}_{a_1}(x)\mathcal{K}_{a_2}(x)} \leq \frac{\mathcal{K}_{a_1}(x)+\mathcal{K}_{a_2}(x)}{2} \leq \mathcal{K}_{\frac{a_1+a_2}{2}}(x) \leq \mathcal{K}_{\frac{a_1}{2}}(x) + \mathcal{K}_{\frac{a_2}{2}}(x).$$

Karlin and Szegő in their mammoth work [**KS**] raised the question of determining the explicit range of parameters α and β for which the generalized Turán inequality

$$\left[R_{n+1}^{(\alpha,\beta)}(x)\right]^2 > R_n^{(\alpha,\beta)}(x)R_{n+2}^{(\alpha,\beta)}(x)$$

holds for all $x \in (-1,1)$ and $n \in \{0,1,2,\ldots\}$, where

$$R_n^{(\alpha,\beta)}(x) = P_n^{(\alpha,\beta)}(x)/P_n^{(\alpha,\beta)}(1)$$

is the normalized Jacobi polynomial and $P_n^{(\alpha,\beta)}$ is the Jacobi polynomial, that is,

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(x) = \frac{(\alpha+1)_n}{n!} \cdot F\left(-n, n+\alpha+\beta+1, \alpha+1, \frac{1-x}{2}\right), \quad \alpha,\beta > -1.$$

Clearly we have $R_n^{(0,0)}(x) = P_n(x)$ for all $x \in (-1,1)$ and

$$R_n^{(\alpha,\beta)}(x) = F\left(-n, n+\alpha+\beta+1, \alpha+1, \frac{1-x}{2}\right).$$

In 1962 Szegő [**Sze2**] proved that the above generalized Turán inequality holds for all $\beta \geq |\alpha|$ and $\alpha > -1$. Gasper [**Ga1**, **Ga2**] improved this result by showing that in fact the above inequality holds if and only if $\beta \geq \alpha > -1$. Now suppose that $\beta = 0$ and consider the following notation $F_a(x) = F(a, c-a, c, x)$, where $x \in (0,1)$, $c = \alpha + 1 \in (0,1]$, $a = -n$ and as above $n \in \{0,1,2,\ldots\}$. Using Gasper's result for $\beta = 0$, we obtain that the above generalized Turán inequality is equivalent to

$$\left[F_{\frac{a_1+a_2}{2}}(x)\right]^2 > F_{a_1}(x) \cdot F_{a_2}(x),$$

where $a_1 = a$ and $a_2 = a - 2$. Thus it is natural to ask when the above inequality or its reverse holds for other values of a. The second main result of this chapter, which improves Theorem 1.1.1, answer this question.

Theorem 1.4.1. *For $0 < a < c \leq 1$ and $x \in (0,1)$ fixed the function $a \mapsto F_a(x) = F(a, c-a, c, x)$ is strictly sub-additive and strictly concave, consequently is strictly log-concave. In particular, for all $a_1, a_2 \in (0,c)$ and $x \in (0,1)$, we have*

$$\sqrt{F_{a_1}(x)F_{a_2}(x)} \leq \frac{F_{a_1}(r) + F_{a_2}(x)}{2} \leq F_{\frac{a_1+a_2}{2}}(x) \leq F_{\frac{a_1}{2}}(x) + F_{\frac{a_2}{2}}(x).$$

2. Turán and Lazarević type inequalities for Bessel and modified Bessel functions. The sine and cosine functions are particular cases of Bessel functions, while the hyperbolic sine and hyperbolic cosine functions are particular cases of modified Bessel functions. Thus it is natural to generalize some formulas and inequalities involving these elementary functions to Bessel functions and modified Bessel functions, respectively.

I. Lazarević [**Mi**, p. 270] proved that for all $x \neq 0$ the inequality

$$\cosh x < \left(\frac{\sinh x}{x}\right)^3$$

holds and the exponent 3 is the least possible.

For $p > -1$ let us consider the function $\mathcal{I}_p : \mathbb{R} \to [1, \infty)$, defined by

$$\mathcal{I}_p(x) = 2^p \Gamma(p+1) x^{-p} I_p(x) = \sum_{n \geq 0} \frac{(1/4)^n}{(p+1)_n n!} x^{2n},$$

where I_p is the modified Bessel function of the first kind [**Wa**, p. 77]

$$I_p(x) = \sum_{n \geq 0} \frac{(x/2)^{2n+p}}{n! \cdot \Gamma(p+n+1)} \quad \text{for all} \quad x \in \mathbb{R}.$$

It is worth mentioning that in particular we have

$$\mathcal{I}_{-1/2}(x) = \sqrt{\pi/2} \cdot x^{1/2} I_{-1/2}(x) = \cosh x,$$

$$\mathcal{I}_{1/2}(x) = \sqrt{\pi/2} \cdot x^{-1/2} I_{1/2}(x) = \frac{\sinh x}{x}.$$

Thus the function $\mathcal{I}_p$ is of special interest in this section, because Lazarević inequality is actually equivalent with

$$[\mathcal{I}_{-1/2}(x)]^{-1/2+1} \leq [\mathcal{I}_{-1/2+1}(x)]^{-1/2+2}.$$

So in view of the above inequality it is natural to ask: what is the analogue of this inequality for modified Bessel functions of the first kind? In order to answer this question we prove the following results.

Theorem 2.1.1. *Let $p > -1$ and $x \in \mathbb{R}$. Then the following assertions are true:*

1. *the function $p \mapsto \mathcal{I}_p(x)$ is decreasing and log-convex;*
2. *the functions $p \mapsto \mathcal{I}_{p+1}(x)/\mathcal{I}_p(x)$, $p \mapsto [\mathcal{I}_p(x)]^{p+1}$ are increasing;*
3. *the following inequalities*

$$[\mathcal{I}_{p+1}(x)]^2 \leq \mathcal{I}_p(x)\mathcal{I}_{p+2}(x),$$

$$[\mathcal{I}_p(x)]^{p+1} \leq [\mathcal{I}_{p+1}(x)]^{p+2},$$

$$[\mathcal{I}_p(x)]^{\frac{p+1}{p+2}} \leq \mathcal{I}_{p+1}(x) \leq \mathcal{I}_p(x),$$

$$[\mathcal{I}_{p+1}(x)]^{1/(p+1)} + \frac{\mathcal{I}_{p+1}(x)}{\mathcal{I}_p(x)} \geq 2,$$

hold true for all $p > -1$ and $x \in \mathbb{R}$. In the generalized Lazarević inequality the exponent p is the best possible in the sense that $\tau = (p+2)/(p+1)$ is the smallest value of τ for which $\mathcal{I}_p(x) \leq [\mathcal{I}_{p+1}(x)]^\tau$ holds. Moreover, if $x > 0$ is fixed and $p \to \infty$, then $[I_p(x)]^2 \sim I_{p-1}(x)I_{p+1}(x)$;

4. *the inequality*

$$\frac{\mathcal{I}_p(x)}{\mathcal{I}_{p+1}(x)} - 1 \leq \log[\mathcal{I}_{p+1}(x)] \leq \log[\mathcal{I}_p(x)]$$

holds true for all $p \geq 0$ and $x \in \mathbb{R}$.

For $p > -1$ let us consider the function $\mathcal{J}_p : \mathbb{R} \to (-\infty, 1]$, defined by

$$\mathcal{J}_p(x) = 2^p\Gamma(p+1)x^{-p}J_p(x) = \sum_{n\geq 0} \frac{(-1/4)^n}{(p+1)_n n!}x^{2n},$$

where

$$J_p(x) = \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n(x/2)^{2n+p}}{n!\cdot\Gamma(p+n+1)} \quad \text{for all} \quad x\in\mathbb{R}$$

is the Bessel function of the first kind [**Wa**, p. 40]. It is worth mentioning that

$$\mathcal{J}_{-1/2}(x) = \sqrt{\pi/2}\cdot x^{1/2}J_{-1/2}(x) = \cos x,$$
$$\mathcal{J}_{1/2}(x) = \sqrt{\pi/2}\cdot x^{-1/2}J_{1/2}(x) = \frac{\sin x}{x}.$$

On the other hand, it is known that if $\tau \leq 3$ and $x \in (0, \pi/2)$, then the Lazarević-type inequality

$$\cos x < \left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\tau}$$

holds [**Mi**, p. 238]. Moreover, here the exponent τ is not the least possible, i.e. if $\tau > 3$, then there exists $x_1 \in (0, \pi/2)$, depending on τ, such that the above inequality holds for all $x \in (x_1, \pi/2)$. Observe that, the above Lazarević type inequality for $\tau = 3$ can be rewritten as

$$[\mathcal{J}_{-1/2}(x)]^{-1/2+1} \leq [\mathcal{J}_{-1/2+1}(x)]^{-1/2+2}.$$

So in view of the above inequality, as in section 2.1, it is natural to ask: what is the analogue of this inequality for Bessel functions?

Our second main result of this chapter answer the above question. Moreover, we present some new inequalities for Bessel functions of the first kind.

Theorem 2.2.1. *Let $p > -1$ and let $j_{p,n}$ be the $n-th$ positive zero of the Bessel function J_p. Further, consider the set $\Delta = \Delta_1 \cup \Delta_2$, where*

$$\Delta_1 = \bigcup_{n\geq 1}[-j_{p,2n}, -j_{p,2n-1}] \quad \text{and} \quad \Delta_2 = \bigcup_{n\geq 1}[j_{p,2n-1}, j_{p,2n}].$$

Then the following assertions are true:

1. *the function $x \mapsto \mathcal{J}_p(x)$ is negative on Δ and is strictly positive on $\mathbb{R}\setminus\Delta$;*
2. *the function $x \mapsto \mathcal{J}_p(x)$ is increasing on $(-j_{p,1}, 0]$ and is decreasing on $[0, j_{p,1})$;*
3. *the function $x \mapsto \mathcal{J}_p(x)$ is strictly log-concave on $\mathbb{R}\setminus\Delta$;*
4. *the function $x \mapsto J_p(x)$ is strictly log-concave on $(0,\infty)\setminus\Delta_2$, provided $p \geq 0$;*
5. *the function $p \mapsto \mathcal{J}_p(x)$ is increasing and log-concave for each fixed $x \in (-j_{p,1}, j_{p,1})$;*
6. *the function $p \mapsto J_p(x)$ is log-concave for each fixed $x \in (0, j_{p,1})$;*

7. *the function* $p \mapsto \mathcal{J}_{p+1}(x)/\mathcal{J}_p(x)$ *is decreasing for all fixed* $x \in (-j_{p,1}, j_{p,1})$;

8. *the function* $p \mapsto [\mathcal{J}_p(x)]^{p+1}$ *is increasing for each fixed* $x \in (-j_{p,1}, j_{p,1})$;

9. *the following inequalities hold for all* $\alpha \in (0,1)$ *and* $x, y \in (0,\infty)\backslash\Delta_2$, $x \neq y$

$$J_p(\alpha x) > \alpha^p J_p(x)[\mathcal{J}_p(x)]^{\alpha-1},$$

$$[xJ_p'(x)]^2 > p\,[J_p(x)]^2 + x^2 J_p(x)J_p''(x),$$

$$J_p^2\left(\frac{x+y}{2}\right) > \left(\frac{x+y}{2\sqrt{xy}}\right)^{2p} J_p(x)J_p(y);$$

10. *the following inequalities hold for all* $x \in (-j_{p,1}, j_{p,1})$

$$[\mathcal{J}_{p+1}(x)]^2 \geq \mathcal{J}_p(x)\mathcal{J}_{p+2}(x),$$

$$[\mathcal{J}_p(x)]^{p+1} \leq [\mathcal{J}_{p+1}(x)]^{p+2},$$

$$[\mathcal{J}_{p+1}(x)]^{1/(p+1)} + \frac{\mathcal{J}_{p+1}(x)}{\mathcal{J}_p(x)} \geq 2.$$

3. Turán type inequalities for probability density functions. In this chapter our aim is to present some Turán type inequalities for the probability density function (pdf) of the non-central chi-squared, non-central chi and Student distributions, in order to improve and complete some results from [**AnBa1**]. Moreover, at the end of this chapter we improve a known Turán type inequality for the modified Bessel function of the second kind, and we apply this result to deduce a short proof for the monotonicity of a product which involves modified Bessel functions of different kinds. Because the pdf-s of the non-central chi-squared and chi distribution are close connected to the modified Bessel function of the first kind, not surprisingly – as we will see below – these functions also satisfies some interesting Turán type inequalities. To achieve our goal first let us recall some basic things.

Let $X_1, X_2, \ldots, X_n$ be random variables that are normally distributed with unit variance and nonzero mean μ_i, where $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. It is known that the random variable $X_1^2 + X_2^2 + \cdots + X_n^2$ has the non-central chi-squared distribution with $n \in \{1, 2, 3, \ldots\}$ degrees of freedom and non-centrality parameter $\lambda = \mu_1^2 + \mu_2^2 + \cdots + \mu_n^2$. The probability density function $\chi^2_{n,\lambda} : (0,\infty) \to (0,\infty)$ of the non-central chi-squared distribution [**JKB**] is defined as

$$\chi^2_{n,\lambda}(x) = 2^{-n/2}e^{-(x+\lambda)/2}\sum_{k\geq 0}\frac{x^{n/2+k-1}(\lambda/4)^k}{\Gamma(n/2+k)k!}$$

$$= \frac{e^{-(x+\lambda)/2}}{2}\left(\frac{x}{\lambda}\right)^{n/4-1/2} I_{n/2-1}(\sqrt{\lambda x}),$$

where I_ν is the modified Bessel function of the first kind [**Wa**, p. 77]. Recall that when $\mu_1 = \cdots = \mu_n = 0$, i.e. $\lambda = 0$, the above distribution reduces to the classical (central) chi-squared distribution. The pdf $\chi^2_{n,0} : (0,\infty) \to (0,\infty)$ of this distribution is given by

$$\chi^2_n(x) = \chi^2_{n,0}(x) = \frac{x^{n/2-1}e^{-x/2}}{2^{n/2}\Gamma(n/2)}.$$

On the other hand it is known that if $X_1, X_2, \dots, X_n$ are random variables such as above, then $[X_1^2+X_2^2+\cdots+X_n^2]^{1/2}$ has the non-central chi distribution with $n \in \{1,2,3,\dots\}$ degrees of freedom and non-centrality parameter $\tau = [\mu_1^2+\mu_2^2+\cdots+\mu_n^2]^{1/2}$. The probability density function $\chi_{n,\tau} : (0,\infty) \to (0,\infty)$ of the non-central chi distribution [**JKB**] is defined as

$$\begin{aligned}\chi_{n,\tau}(x) &= 2^{-n/2+1}e^{-(x^2+\tau^2)/2}\sum_{k\geq 0}\frac{x^{n+2k-1}(\tau/2)^{2k}}{\Gamma(n/2+k)k!}\\ &= \tau e^{-(x^2+\tau^2)/2}\left(\frac{x}{\tau}\right)^{n/2} I_{n/2-1}(\tau x).\end{aligned}$$

Observe that when $\mu_1 = \cdots = \mu_n = 0$, i.e. $\tau = 0$, the above distribution reduces to the classical chi distribution with pdf $\chi_{n,0} : (0,\infty) \to (0,\infty)$ given by

$$\chi_n(x) = \chi_{n,0}(x) = \frac{x^{n-1}e^{-x^2/2}}{2^{n/2-1}\Gamma(n/2)}.$$

It is easy to verify, in view of the recurrence relation [**Wa**, p. 79]

$$xI_{\nu-1}(x) - xI_{\nu+1}(x) = 2\nu I_\nu(x),$$

that the pdf of the non-central chi-squared distribution satisfies the following recurrence formula

$$x\chi^2_{n,\lambda}(x) - \lambda\chi^2_{n+4,\lambda}(x) = n\chi^2_{n+2,\lambda}(x).$$

Recently, András and Baricz [**AnBa1**, Theorem 2.3] proved, among other things, that in fact the following Turán type inequality holds for all $\lambda, x \geq 0$ and $n \geq 1$ integer

$$\chi^2_{n,\lambda}(x)\chi^2_{n+4,\lambda}(x) < [\chi^2_{n+2,\lambda}(x)]^2.$$

This is an immediate consequence of the Turán type inequality

$$I_{\nu-1}(x)I_{\nu+1}(x) < I_\nu^2(x)$$

which is called in literature as Amos' inequality [**Am**, p. 243]. Moreover, using the Turán type inequality $[\mathcal{I}_{\nu+1}(x)]^2 \leq \mathcal{I}_\nu(x)\mathcal{I}_{\nu+2}(x)$, from Theorem 2.1.1, i.e.

$$(\nu+1)I_{\nu-1}(x)I_{\nu+1}(x) \geq \nu I_\nu^2(x),$$

we deduced that the next reversed Turán-type inequality holds true

$$\left[\frac{\chi^2_{n+2,\lambda}(x)}{\chi^2_{n+2}(x)}\right]^2 \leq \left[\frac{\chi^2_{n,\lambda}(x)}{\chi^2_n(x)}\right]\left[\frac{\chi^2_{n+4,\lambda}(x)}{\chi^2_{n+4}(x)}\right].$$

Our first main result of this chapter improves the above Turán type inequalities and completes Theorem 2.3 from [**AnBa1**].

Theorem 3.1.1. *For $a > 0$ and $\lambda, \tau \geq 0$ consider the functions $\chi^2_{a,\lambda}, \chi_{a,\tau} : (0,\infty) \to (0,\infty)$, defined by the relations*

$$\chi^2_{a,\lambda}(x) = e^{-(x+\lambda)/2} \sum_{k\geq 0} \frac{(x/2)^{a/2}(\lambda/4)^k}{\Gamma(a/2+k)k!} x^{k-1},$$

$$\chi_{a,\tau}(x) = e^{-(x^2+\tau^2)/2} \sum_{k\geq 0} \frac{x^a(\tau/2)^{2k}}{2^{a/2-1}\Gamma(a/2+k)k!} x^{2k-1}.$$

Then the functions

1. $x \mapsto \chi^2_{a,\lambda}(x)$ *and* $x \mapsto \chi_{a,\tau}(\sqrt{x})$ *are log-concave, provided* $a \geq 2$;
2. $\lambda \mapsto \chi^2_{a,\lambda}(x)$ *and* $\tau \mapsto \chi_{a,\sqrt{\tau}}(x)$ *are log-concave on* $[0,\infty)$;
3. $a \mapsto \chi^2_{a,\lambda}(x)$ *and* $a \mapsto \chi_{a,\tau}(x)$ *are log-concave on* $(0,\infty)$;
4. $a \mapsto \chi^2_{a,\lambda}(x)/\chi^2_a(x)$ *and* $a \mapsto \chi_{a,\tau}(x)/\chi_a(x)$ *are log-convex on* $(0,\infty)$;
5. $a \mapsto [\chi^2_{a+2,\lambda}(x)\chi^2_a(x)]/[\chi^2_{a+2}(x)\chi^2_{a,\lambda}(x)]$ *and* $a \mapsto [\chi_{a+2,\tau}(x)\chi_a(x)]/[\chi_{a+2}(x)\chi_{a,\tau}(x)]$ *are increasing on* $(0,\infty)$.

Consider the modified Bessel function of the second kind K_ν (called sometimes as the MacDonald function), defined [**Wa**, p. 78] as follows:

$$K_\nu(x) = \frac{\pi}{2}\frac{I_{-\nu}(x) - I_\nu(x)}{\sin \nu\pi},$$

where the right of this equation is replaced by its limiting value if ν is an integer or zero. Recently Laforgia and Natalini [**LN2**, Theorem 2.4] proved that for each $\nu_1, \nu_2 > -1/2$ and $x > 0$ the following reversed Turán type inequality holds true

$$K_{\nu_1}(x)K_{\nu_2}(x) \geq \left[K_{\frac{\nu_1+\nu_2}{2}}(x)\right]^2.$$

Observe that in particular, for $\nu_1 = \nu$ and $\nu_2 = \nu+2$, we get for all $\nu > -1/2$ and $x > 0$ the inequality [**LN2**, Eq. 2.18]

$$K_\nu(x)K_{\nu+2}(x) \geq [K_{\nu+1}(x)]^2.$$

It is worth mentioning here that the above inequality holds true for $\nu = -1/2$, and consequently for $\nu = -3/2$ too.

Theorem 3.2.1. *The function $\nu \mapsto K_\nu(x)$ is strictly log-convex on $\mathbb{R}$ for each fixed $x > 0$. In particular, the above reversed Turán type inequalities hold for all $x > 0$, ν_1, ν_2 and ν arbitrary real numbers. Moreover – due to the strict log-convexity – in the first Turán type inequality equality holds if and only if $\nu_1 = \nu_2$ and the second Turán inequality is strict.*

Let I_ν and K_ν denote, as usual, the modified Bessel functions of the first and second kinds of order ν. Recently, motivated by a problem which arises in biophysics, in 2007 Penfold et al. [**PVG**, Theorem 3.1] proved, in a complicated way, that the product of the modified Bessel functions of the first and second kinds, i.e. $u \mapsto P_\nu(u) = I_\nu(u)K_\nu(u)$ is strictly decreasing on $(0,\infty)$ for all $\nu \geq 0$. It is worth mentioning that this result for $\nu = n \geq 0$

positive integer has been verified already in 1950 by Phillips and Malin [**PM**, Corollary 2.2]. In this section our aim is to show that using the idea of Phillips and Malin the monotonicity of $u \mapsto P_\nu(u)$ for $\nu \geq -1/2$ can be verified easily by using the corresponding Turán type inequalities for modified Bessel functions. Moreover, we show that the function $u \mapsto I_\nu(u)K_\nu(u)$ is strictly completely monotonic on $(0,\infty)$ for all $\nu \in [-1/2, 1/2]$, i.e. for all $u > 0$, $\nu \in [-1/2, 1/2]$ and $m \in \{0, 1, 2, \dots\}$ we have

$$(-1)^m \left[I_\nu(u)K_\nu(u)\right]^{(m)} > 0.$$

In order to achieve our goal we improve some of the results of Phillips and Malin [**PM**, Eq. 1] concerning bounds for the logarithmic derivatives of the modified Bessel and Hankel functions.

Our main result of this section reads as follows:

Theorem 3.3.1. *The following assertions are true:*

1. *P_ν is strictly decreasing on $(0,\infty)$ for all $\nu \geq -1/2$;*
2. *P_ν is strictly completely monotonic on $(0,\infty)$ for all $\nu \in [-1/2, 1/2]$;*
3. *$u \mapsto u^{1/2-\nu}P_\nu(u)$ is strictly completely monotonic on $(0,\infty)$ for all $\nu \geq 1/2$.*

4. Monotonicity patterns for Mills' ratio. Let us consider the probability density function $\varphi : \mathbb{R} \to [1/\sqrt{2\pi}, \infty)$ and the reliability function $\overline{\Phi} : \mathbb{R} \to (0, 1)$ of the standard normal law, defined by

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} \qquad \text{and} \qquad \overline{\Phi}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^\infty \varphi(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

The function $r : \mathbb{R} \to (0,\infty)$, defined by

$$r(x) = \frac{\overline{\Phi}(x)}{\varphi(x)} = e^{x^2/2} \int_x^\infty e^{-t^2/2}\,\mathrm{d}t,$$

is known in literature as Mills' ratio [**Mi**, Sect. 2.26] of the standard normal law, while its reciprocal $1/r$, defined by $1/r(x) = \varphi(x)/\overline{\Phi}(x)$ for all $x \in \mathbb{R}$, is the so-called failure (hazard) rate. It is well-known that Mills' ratio is convex and strictly decreasing on $\mathbb{R}$. This ratio is frequently used in mathematical statistics, see for example the paper of Feuerverger et al. [**FMAC**]. We note that various lower and upper bounds are known for this ratio, see [**Mi**, Sect. 2.26] and the references therein for results which refer to the problem of finding some simple functions which approximate r. The most known inequalities proved by Gordon [**Go**] in 1941 are the followings

$$\frac{x}{x^2+1} < r(x) < \frac{1}{x},$$

for all $x > 0$. Recently Pinelis [**Pi4**] using a version of the monotone form of l'Hospital rule improved the inequality $r(x) < 1/x$, showing that in fact the function $x \mapsto xr(x)$ is strictly increasing on $(0,\infty)$. We note that in view of the derivative formula $r'(x) = xr(x) - 1$ this implies that the first above inequality of Gordon holds. Motivated by Pinelis' work in this chapter we show that using Pinelis' idea we can deduce some other known bounds for Mills' ratio, and we present a simple method to find other new functions which approximate r. Moreover, using the Pinelis version of the monotone l'Hospital's rule we study the monotonicity of some functions involving the Mills' ratio. As an application, at the end of section 4.1 we present an interesting chain of inequalities for Mills' ratio. Finally, in section 4.2 we prove that the Mills' ratio is strictly completely monotonic on $\mathbb{R}$ and using Buniakowsky-Schwarz's inequality for integrals we deduce some Turán-type inequalities for $n-$th derivative of Mills' ratio.

The main results of this chapter reads as follows.

Theorem 4.1.2. *The following assertions are true:*

1. *the Mills' ratio r is strictly log-convex on $\mathbb{R}$;*
2. *the function $x \mapsto xr'(x)/r(x)$ is strictly decreasing on $(0, \infty)$;*
3. *the function $x \mapsto xr'(x)$ is strictly decreasing on $(0, x_0)$ and is strictly increasing on (x_0, ∞), where $x_0 = 1.161527889\ldots$ is the unique positive root of the transcendent equation $x(x^2+2)\overline{\Phi}(x) = (x^2+1)\varphi(x)$;*
4. *the function $x \mapsto x^2r'(x)$ is strictly decreasing on $(0, \infty)$.*

Theorem 4.2.1. *Let x be a real number and $n \geq 1$ a natural number. Further let $r^{(n)}$ be the $n-$th derivative of Mills' ratio and let us consider the expression $\Delta_n = (-1)^n r^{(n)}(x)$. Then the Mills' ratio is strictly completely monotonic on $\mathbb{R}$, i.e. $\Delta_n > 0$, and satisfies the following reversed Turán type inequality*

$$\Delta_n \cdot \Delta_{n+2} \geq [\Delta_{n+1}]^2.$$

Moreover the function $x \mapsto \left|r^{(n)}(x)\right|$ is strictly log-convex on $\mathbb{R}$ and consequently the following Turán type inequalities hold:

$$\Delta_{2n-1} \cdot \Delta_{2n+1} \geq [\Delta_{2n}]^2 \geq \frac{2n}{2n+1}\Delta_{2n-1} \cdot \Delta_{2n+1}.$$

Irodalomjegyzék

[AS] M. Abramovitz and I.A. Stegun (Eds.): Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables. Dover Publications, Inc., New York, 1965.

[AbBu] L.D. Abreu and J. Bustoz: Turán inequalities for symmetric Askey-Wilson polynomials. Rocky Mountain J. Math. 30(2) (2000), 401–409.

[Al] H. Alzer: On a convexity theorem of Ruskai and Werner and related results. Glasg. Math. J. 47(3) (2005), 425–438.

[AlBe] H. Alzer and C. Berg: Some classes of completely monotonic functions II. Ramanujan J. 11 (2006), 225–248.

[AGKL] H. Alzer, S. Gerhold, M. Kauers and A. Lupaş: On Turán's inequality for Legendre polynomials. Expo. Math. 25 (2007), 181–186.

[AQ] H. Alzer and S.-L. Qiu: Monotonicity theorems and inequalities for the complete elliptic integrals. J. Comput. Appl. Math. 172 (2004), 289–312.

[Am] D.E. Amos: Computation of modified Bessel functions and their ratios. Math. Comp. 28 (1974), 239–251.

[AQVV] G.D. Anderson, S.-L. Qiu, M.K. Vamanamurthy and M. Vuorinen: Generalized elliptic integrals and modular equations. Pacific J. Math. 192 (2000), 1–37.

[ATVV] G.D. Anderson, T. Sugawa, M.K. Vamanamurthy and M. Vuorinen: Hypergeometric functions and hyperbolic metric, preprint.

[AVV1] G.D. Anderson, M.K. Vamanamurthy and M. Vuorinen: Functional inequalities for complete elliptic integrals and their ratios. SIAM J. Math. Anal. 21 (1990), 536–549.

[AVV2] G.D. Anderson, M.K. Vamanamurthy and M. Vuorinen: Functional inequalities for hypergeometric functions and complete elliptic integrals. SIAM J. Math. Anal. 23 (1992), 512–524.

[AVV3] G.D. Anderson, M.K. Vamanamurthy and M. Vuorinen: Inequalities for quasiconformal mappings in space. Pacific J. Math. 160(1) (1993), 1–18.

[AVV4] G.D. Anderson, M.K. Vamanamurthy and M. Vuorinen: Conformal Invariants, Inequalities, and Quasiconformal Maps. John Wiley & Sons, New York, 1997.

[AVV5] G.D. Anderson, M.K. Vamanamurthy and M. Vuorinen: Monotonicity rules in calculus. Amer. Math. Monthly 113(2) (2006), 805–816.

[AVV6] G.D. Anderson, M.K. Vamanamurthy and M. Vuorinen: Generalized convexity and inequalities. J. Math. Anal. Appl. 335(2) (2007), 1294–1308.

[AnBa1] Sz. András and Á. Baricz: Properties of the probability density function of the non-central chi-squared distribution. J. Math. Anal. Appl. submitted.

[AnBa2] Sz. András and Á. Baricz: New bounds for the complete elliptic integrals. SIAM J. Math. Anal. submitted.

[AAR] G.E. Andrews, R. Askey and R. Roy: Special Functions. Cambridge University Press, Cambridge, 1999.

[As] R. Askey: Remembering Paul Turán. J. Approx. Theory 86 (1996), 253–254.

[Ba1] Á. Baricz: Functional inequalities for Galué's generalized modified Bessel functions. J. Math. Inequal. 1(2) (2007), 183–193.

[Ba2] Á. Baricz: Redheffer type inequality for Bessel functions. JIPAM. J. Inequal. Pure Appl. Math. 8(1) (2007), Article 11, 6 pp. (electronic).

[Ba3] Á. Baricz: Some inequalities involving generalized Bessel functions. Math. Inequal. Appl. 10(4) (2007), 827–842.

[Ba4] Á. Baricz: Turán type inequalities for generalized complete elliptic integrals. Math. Z. 256 (2007), 895–911.

[Ba5] Á. Baricz: Mills' ratio: Monotonicity patterns and functional inequalities. J. Math. Anal. Appl. 340(2) (2008), 1362–1370.

[Ba6] Á. Baricz: Turán type inequalities for hypergeometric functions. Proc. Amer. Math. Soc. in press.

[Ba7] Á. Baricz: On a product of modified Bessel functions. Proc. Amer. Math. Soc. in press.

[Ba8] Á. Baricz: Functional inequalities involving Bessel and modified Bessel functions of the first kind. Expo. Math. in press.

[Ba9] Á. Baricz: Turán type inequalities for some probability density functions. Studia Sci. Math. Hungar. submitted.

[Ba10] Á. Baricz: Jordan-type inequalities for generalized Bessel functions. JIPAM. J. Inequal. Pure Appl. Math. submitted.

[Ba11] Á. Baricz: New bounds for the generalized Marcum $Q-$function. IEEE Trans. Inform. Theory, submitted.

[Ba12] Á. Baricz: New bounds for the generalized Marcum $Q-$function II. IEEE Trans. Inform. Theory, submitted.

[BN] Á. Baricz and E. Neuman: Inequalities involving modified Bessel functions of the first kind II. J. Math. Anal. Appl. 332(1) (2007), 265–271.

[BaSa] Á. Baricz and J. Sándor: Extensions of the generalized Wilker inequality to Bessel functions. Integral Transforms Spec. Funct. submitted.

[BZ] Á. Baricz and L. Zhu: Extension of Oppenheim's problem to Bessel functions. J. Inequal. Appl. (2007), Art. 82038.

[BW] Á. Baricz and S.-H. Wu: Sharp exponential Redheffer-type inequalities for Bessel functions. Publ. Math. Debrecen, submitted.

[Be] C. Berg: Integral representation of some functions related to the gamma function. Mediterr. J. Math. 1(4) (2004), 433–439.

[BF] C. Berg and G. Forst: Potential Theory and Locally Compact Abellian Groups. Springer, Berlin, 1975.

[BeSz] C. Berg and R. Szwarc: Bounds on Turán determinants. Available online at `http://www.math.ku.dk/~berg/manus/draft.pdf`.

[Bi] Z.W. Birnbaum: An inequality for Mills' ratio. Ann. Math. Statistics 13 (1942), 245–246.

[BB] J.M. Borwein and P.B. Borwein: Pi and the AGM. John Wiley & Sons, New York, 1987.

[Bo] F. Bowman: Introduction to Elliptic Functions with Applications. Dover, New York, 1961.

[BI1] J. Bustoz and M.E.H. Ismail: Turán inequalities for ultraspherical and continuous q-ultraspherical polynomials. SIAM J. Math. Anal. 14 (1983), 807–818.

[BI2] J. Bustoz and M.E.H. Ismail: On gamma function inequalities. Math. Comp. 47 (1986), 659–667.

[BI3] J. Bustoz and M.E.H. Ismail: Turán inequalities for symmetric orthogonal polynomials. Internat. J. Math. Math. Sci. 20(1) (1997), 1–8.

[BP] J. Bustoz and I.S. Pyung: Determinant inequalities for sieved ultraspherical polynomials. Internat. J. Math. Math. Sci. 25(11) (2001), 745–751.

[BuSa] J. Bustoz and N. Savage: Inequalities for ultraspherical and Laguerre polynomials. SIAM J. Math. Anal. 10(5) (1979), 902–912.

[Ca] B.C. Carlson: Special Functions and Applied Mathematics. Academic Press, New York, 1977.

[CGT] J. Cheeger, M. Gromov and M. Taylor: Finite propagation speed, kernel estimates for functions of the Laplace operator, and the geometry of complete Riemannian manifolds. J. Differential Geom. 17(1) (1982), 15–53.

[CNV] G. Csordas, T.S. Norfolk and R.S. Varga: The Riemann hypothesis and Turán inequalities. Trans. Amer. Math. Soc. 296(2) (1986), 521–541.

[CW] G. Csordas and J. Williamson: On polynomials satisfying a Turán type inequality. Proc. Amer. Math. Soc. 43(2) (1974), 367–372.

[Co] E. Constantinescu: On the inequality of P. Turán for Legendre polynomials. JIPAM. J. Inequal. Pure Appl. Math. 6(2) (2005), Article 28, 4 pp. (electronic).

[Da] A. Danese: Some identities and inequalities involving ultraspherical polynomials. Duke Math. J. 26 (1959), 349–359.

[De] L. Devroye: Simulating Bessel random variables. Statist. Probab. Lett. 57(3) (2002), 249–257.

[Di] D.K. Dimitrov: Higher order Turán inequalities. Proc. Amer. Math. Soc. 126 (1998), 2033—2037.

[DAB] S.S. Dragomir, R.P. Agarwal and N.S. Barnett: Inequalities for beta and gamma functions via some classical and new integral inequalities. J. Inequal. Appl. 5 (2000), 103–165.

[El] Á. Elbert: Concavity of the zeros of Bessel functions. Studia Sci. Math. Hungar. 12 (1977), 81–88.

[EL1] Á. Elbert and A. Laforgia: Some monotonicity properties for the zeros of ultraspherical polynomials. Acta Math. Hungar. 48 (1986), 155–159.

[EL2] Á. Elbert and A. Laforgia: Monotonicity results on the zeros of generalized Laguerre polynomials. J. Approx. Theory 51(2) (1987), 168–174.

[EMOT] A. Erdélyi, W. Magnus, F. Oberhettinger and F. Tricomi: Higher Transcendental Functions. vol. 2, McGraw-Hill, New York, 1954.

[Ev] R.J. Evans: Ramanujan's second notebook: asymptotic expansions for hypergeometric series and related functions. In Ramanujan Revisited: Proc. of the Centenary Conference Univ. of Illinois at Urbana-Champaign, ed. by G.E. Andrews, R.A. Askey, B.C. Berndt, R.G. Ramanathan, R.A. Rankin, Academic Press, Boston, (1988), 537–560.

[Fe] W. Feller: An Introduction to Probability Theory and its Applications. vol. 2, John Wiley, New York, 1966.

[FMAC] A. Feuerverger, M. Menzinger, H.L. Atwood and R.L. Cooper: Statistical methods for assessing the dimensions of synaptic vesicles in nerve terminals. J. Neurosci. Meth. 103 (2000), 181–190.

[Ga1] G. Gasper: On the extension of Turán's inequality for Jacobi polynomials. Duke Math. J. 38 (1971), 415–428.

[Ga2] G. Gasper: An inequality of Turán type for Jacobi polynomials. Proc. Amer. Math. Soc. 32 (1972), 435–439.

[GLP] C. Giordano, A. Laforgia and J. Pečărić: Supplement to known inequalities for some special functions. J. Math. Anal. Appl. 200 (1996), 34–41.

[Go] R.D. Gordon: Values of Mills' ratio of area bounding ordinate and of the normal probability integral for large values of the argument. Ann. Math. Statistics 12 (1941), 364–366.

[Grom] M. Gromov: Isoperimetric inequalities in Riemannian manifolds. In: Asymptotic Theory of Finite Dimensional Spaces, Lectures Notes Math. vol. 1200, Appendix I, Springer, Berlin, 1986, 114–129.

[Gron] T.H. Gronwall: An inequality for the Bessel functions of the first kind with imaginary argument. Ann. of Math. 33(2) (1932), 275–278.

[HVV] V. Heikkala, M.K. Vamanamurthy and M. Vuorinen: Generalized elliptic integrals. Comput. Methods Funct. Theory 9(1) (2009), 75–109.

[Ho] R.A. Horn: On infinitely divisible matrices, kernels and functions. Z. Wahrscheinlichkeitstheorie und Verw. Gebiete 8 (1967), 219–230.

[Is] M.E.H. Ismail: Remarks on a paper by Giordano, Laforgia, and Pečarić. J. Math. Anal. Appl. 211 (1997), 621–625.

[IL] M.E.H. Ismail and A. Laforgia: Monotonicity properties of determinants of special functions. Constr. Approx. 26(1) (2007), 1–9.

[IM] M.E.H. Ismail and M.E. Muldoon: Monotonicity of the zeros of a cross-product of Bessel functions. SIAM J. Math. Anal. 1 (1978), 759–767.

[JKB] N.L. Johnson, S. Kotz and N. Balakrishnan: Continuous Univariate Distributions. vol. 2, 2nd ed., Wiley Interscience, 1995.

[JG] O. Johnson and C. Goldschmidt: Preservation of log-concavity on summation. ESAIM Probab. Stat. 10 (2006), 206–215.

[JB] C.M. Joshi and S.K. Bissu: Some inequalities of Bessel and modified Bessel functions. J. Austral. Math. Soc. Ser. A 50(2) (1991), 333–342.

[KS] S. Karlin and G. Szegő: On certain determinants whose elements are orthogonal polynomials. J. Analyse Math. 8 (1960/61), 1–157. Reprinted in R. Askey, ed., "Gábor Szegő Collected Papers", vol. 3, Birkhauser, Boston, 1982, 605–761.

[Kom] Y. Komatu: Elementary inequalities for Mills' ratio. Rep. Statist. Appl. Res. Un. Jap. Sci. Engrs. 4 (1955), 69–70.

[Kou] O. Kouba: Inequalities related to the error function. submitted. Available online at `http://arxiv.org/abs/math/0607694`.

[Kr] I. Krasikov: Turán inequalities and zeros of orthogonal polynomials. Methods Appl. Anal. 12(1) (2005), 75–88.

[La] A. Laforgia: Sturm theory for certain class of Sturm-Liouville equations and Turánians and Wronskians for the zeros of derivative of Bessel functions. Nederl. Akad. Wetensch. Indag. Math. 3 (1982), 295–301.

[LN1] A. Laforgia and P. Natalini: Turán type inequalities for some special functions. JIPAM. J. Inequal. Pure Appl. Math. 7(1) (2006), Article 32, 3 pp. (electronic).

[LN2] A. Laforgia and P. Natalini: On some Turán-type inequalities. J. Inequal. Appl. (2006), Article 29828.

[OV] O. Lehto and K.I. Virtanen: Quasiconformal Mappings in the Plane, 2nd ed., Springer-Verlag, 1973.

[Lo] L. Lorch: Turánians and Wronskians for the zeros of Bessel functions. SIAM J. Math. Anal. 11 (1980), 223–227.

[MS] K.S. Miller and G. Samko: Completely monotonic functions. Integral Transforms Spec. Funct. 12 (2001), 389—402.

[Mi] D.S. Mitrinović: Analytic Inequalities. Springer-Verlag, Berlin, 1970.

[Mu] M.E. Muldoon: Convexity properties of special functions and their zeros. In: G.V. Milovanović (Ed.), Recent progress in inequalities, Kluwer Academic Publishers. Math. Appl., Dordrecht 430 (1998), 309–323.

[Na] I. Nåsell: Rational bounds for ratios of modified Bessel functions. SIAM J. Math. Anal. 9 (1978), 1–11.

[Ne1] E. Neuman: Inequalities involving modified Bessel functions of the first kind. J. Math. Anal. Appl. 171 (1992), 532–536.

[Ne2] E. Neuman: Inequalities involving inverse circular and inverse hyperbolic functions. Univ. Beograd. Publ. Elektrotehn. Fak. Ser. Mat. 18 (2007), 32–37.

[Ni] C.P. Niculescu: A new look at Newton's inequality. JIPAM. J. Inequal. Pure Appl. Math. 1(2) (2000), Article 17, 14 pp. (electronic).

[PVG] R. Penfold, J.-M. Vanden-Broeck and S. Grandison: Monotonicity of some modified Bessel function products. Integral Transforms Spec. Funct. 18(2) (2007), 139–144.

[PM] R.S. Phillips and H. Malin: Bessel function approximations. Amer. J. Math. 72(2) (1950), 407–418.

[Pi1] I. Pinelis: L'Hospital type rules for oscillation, with applications. JIPAM. J. Inequal. Pure Appl. Math. 2(3) (2001), Article 33, 24 pp. (electronic).

[Pi2] I. Pinelis: L'Hospital's rules for monotonicity, with applications. JIPAM. J. Inequal. Pure Appl. Math. 3(1) (2002), Article 5, 5 pp. (electronic).

[Pi3] I. Pinelis: L'Hospital type rules for monotonicity: applications to probability inequalities for sums of bounded random variables. JIPAM. J. Inequal. Pure Appl. Math. 3(1) (2002), Article 7, 9 pp. (electronic).

[Pi4] I. Pinelis: Monotinicity properties of the relative error of a Padé approximation for Mills' ratio. JIPAM. J. Inequal. Pure Appl. Math. 3(2) (2002), Article 20, 8 pp. (electronic).

[Pi5] I. Pinelis: L'Hospital rules for monotonicity and the Wilker-Anglesio inequality. Amer. Math. Monthly 111 (2004), 905–909.

[Pi6] I. Pinelis: On l'Hospital-type rules for monotonicity. JIPAM. J. Inequal. Pure Appl. Math. 7(2) (2006), Article 40, 19 pp. (electronic).

[QG] F. Qi and B.-N. Guo: Complete monotonicities of functions involving the gamma and digamma functions. RGMIA Res. Rep. Coll. 7(1) (2004), Article 8, 63–72. (electronic).

[QH] F. Qi and Zh. Huang: Inequalities for the complete elliptic integrals. Tamkang J. Math. 29 (1998), 165–169.

[QVV] S.-L. Qiu, M.K. Vamanamurthy and M. Vuorinen: Bounds for quasiconformal distortion functions. J. Math. Anal. Appl. 205 (1997), 43–64.

[QV1] S.-L. Qiu and M. Vuorinen: Duplication inequalities for the ratios of hypergeometric functions. Forum Math. 12 (2000), 109–133.

[QV2] S.-L. Qiu and M. Vuorinen: Some properties of the gamma and psi functions, with application. Math. Comp. 74(250) (2005), 723–742.

[Ra] E.D. Rainville: Special Functions. Chelsea Publishing Company, New York, 1960.

[RW] M.B. Ruskai and E. Werner: Study of a class of regularizations of $1/|x|$ using Gaussian integrals. SIAM J. Math. Anal. 32 (2000), 435–463.

[Sa] M.R. Sampford: Some inequalities on Mills' ratio and related functions. Ann. Math. Statistics 24 (1953), 132–134.

[Sh] L.R. Shenton: Inequalities for the normal integral including a new continued fraction. Biometrika 41 (1954), 177–189.

[Si] S. Simic: Turán's inequality for Appell polynomials. J. Inequal. Appl. (2006), Article 91420.

[SV] A.Yu. Solynin and M. Vuorinen: Estimates for the hyperbolic metric of the punctured plane and applications. Israel J. Math. 124 (2001), 29–60.

[SH] F.W. Steutel and K. van Harn: Infinite Divisibility of Probability Distributions on the Real Line. Marcel Dekker, New York, 2004.

[St] K.B. Stolarsky: Hölder means, Lehmer means, and $x^{-1} \log \cosh x$. J. Math. Anal. Appl. 202 (1996), 810–818.

[SV] T. Sugawa and M. Vuorinen: Some inequalities for the Poincaré metric of plane domains. Math. Z. 250(4) (2005), 885–906.

[SB] Y. Sun and Á. Baricz: Inequalities for the generalized Marcum $Q-$function. Appl. Math. Comput. in press.

[SBZ] Y. Sun, Á. Baricz and S. Zhou: New results on the monotonicity and log-concavity of the generalized Marcum and Nuttall $Q-$functions. IEEE Trans. Inform. Theory, submitted.

[Sza1] O. Szász: Inequalities concerning ultraspherical polynomials and Bessel functions. Proc. Amer. Math. Soc. 1 (1950), 256–267.

[Sza2] O. Szász: Identities and inequalities concerning orthogonal polynomials and Bessel functions. J. Analyse Math. 1 (1951), 116–134.

[Sze1] G. Szegő: On an inequality of P. Turán concerning Legendre polynomials. Bull. Amer. Math. Soc. 54 (1948), 401–405.

[Sze2] G. Szegő: An inequality for Jacobi polynomials, Studies in Mathematical Analysis and Related Topics, Stanford Univ. Press., Stanford, California, (1962), 392–398.

[TN] V.K. Thiruvenkatachar and T.S. Nanjundiah: Inequalities concerning Bessel functions and orthogonal polynomials. Proc. Indian Acad. Sci., Sect. A. 33 (1951), 373–384.

[Tu] P. Turán: On the zeros of the polynomials of Legendre. Časopis Pěst. Mat. Fys. 75 (1950), 113–122.

[VL] K. Venkatachaliengar and S.K. Lakshmana Rao: On Turán's inequality for ultraspherical polynomials. Proc. Amer. Math. Soc. 8 (1957), 1075–1087.

[Wa] G.N. Watson: A Treatise on the Theory of Bessel Functions. Cambridge University Press, Cambridge, 1944.

[WW] E.T. Whittaker and G.N. Watson: A Course of Modern Analysis. 4th ed., Cambridge University Press, 1958.

[Wi] D.V. Widder: The Laplace Trasform. Princeton Univ. Press, NJ, 1941.

[Wi] J.B. Wilker: Problem E3306. Amer. Math. Monthly 96 (1989), 55.

[WS] S.-H. Wu and H.M. Srivastava: A weighted and exponential generalization of Wilker's inequality and its applications. Integral Transforms Spec. Funct. 18(8) (2007), 529–535.

[ZCW] X. Zhang, Y. Chu and G. Wang: Some inequalities for the generalized Grötzsch function. Proc. Edinburgh Math. Soc. in press.

[Zh] L. Zhu: On Wilker-type inequalities. Math. Inequal. Appl. 10(4) (2007), 727–731.

List of publications

A. Published papers

1. Applications of the admissible functions method for some differential equations. Pure Math. Appl. 13 (2002), 433–440.
2. A subclass of starlike functions. Mathematica 47(70)(1) (2005), 19–25.
3. Univalent functions in simply connected domains. Libertas Math. 25 (2005), 97–103.
4. Landen–type inequality for Bessel functions. Comput. Methods Funct. Theory 5(2) (2005), 373–379.
   - G.D. Anderson, M.K. Vamanamurthy and M. Vuorinen: Topics in special functions II. Conform Geom. Dyn. 11 (2007), 250–270.
   - V. Heikkala, M.K. Vamanamurthy and M. Vuorinen: Generalized elliptic integrals. Comput. Methods Funct. Theory 9(1) (2009), 75–109.
5. [with E. Neuman] Inequalities involving generalized Bessel functions. JIPAM. J. Inequal. Pure Appl. Math. 6(4) (2005), Article 126, 9 pp. (electronic).
6. Geometric properties of generalized Bessel functions of complex order. Mathematica 48(71)(1) (2006), 13–18.
7. Bessel transforms and Hardy space of generalized Bessel functions. Mathematica 48(71)(2) (2006), 127–136.
8. Grünbaum-type inequalities for special functions. JIPAM. J. Inequal. Pure Appl. Math. 7(5) (2006), Article 175, 8 pp. (electronic).
9. Functional inequalities involving special functions. J. Math. Anal. Appl. 319(2) (2006), 450–459.
   - G.D. Anderson, M.K. Vamanamurthy and M. Vuorinen: Generalized convexity and inequalities. J. Math. Anal. Appl. 335 (2007), 1294–1308.
   - G.D. Anderson, M.K. Vamanamurthy and M. Vuorinen: Topics in special functions II. Conform. Geom. Dyn. 11 (2007), 250–270.
   - V. Heikkala, M.K. Vamanamurthy and M. Vuorinen: Generalized elliptic integrals. Comput. Methods Funct. Theory 9(1) (2009), 75–109.
   - D. Karp and S.M. Sitnik: Inequalities and monotonicity of ratios for generalized hypergeometric function. Available online at `http://arxiv.org/PS_cache/math/pdf/0703/0703084v1.pdf`
10. Functional inequalities involving special functions II. J. Math. Anal. Appl. 327(2) (2007), 1202–1213.
    - G.D. Anderson, M.K. Vamanamurthy and M. Vuorinen: Generalized convexity and inequalities. J. Math. Anal. Appl. 335 (2007), 1294–1308.

- G.D. Anderson, M.K. Vamanamurthy and M. Vuorinen: Topics in special functions II. Conform. Geom. Dyn. 11 (2007), 250–270.
- V. Heikkala, M.K. Vamanamurthy and M. Vuorinen: Generalized elliptic integrals. Comput. Methods Funct. Theory 9(1) (2009), 75–109.
- D. Karp and S.M. Sitnik: Inequalities and monotonicity of ratios for generalized hypergeometric function. Available online at `http://arxiv.org/PS_cache/math/pdf/0703/0703084v1.pdf`

11. Redheffer type inequality for Bessel functions. JIPAM. J. Inequal. Pure Appl. Math. 8(1) (2007), Article 11, 6 pp. (electronic).
    - F. Qi: Jordan's inequality: Refinements, generalizations, applications and related problems. RGMIA Res. Rep. Coll. 9(3) (2006), Article 12. `http://rgmia.vu.edu.au/v9n3.html`. Bùděngshì Yānjiū Tōngxùn [Communications in Studies on Inequalities] 13 (2006), 243–259.
    - L. Zhu and J. Sun: Six new Redheffer-type inequalities for circular and hyperbolic functions. Comp. Math. Appl. in press.
12. Convexity of the zero-balanced Gaussian hypergeometric functions with respect to Hölder means. JIPAM. J. Inequal. Pure Appl. Math. 8(2) (2007), Article 40, 9 pp. (electronic).
13. Some inequalities involving generalized Bessel functions. Math. Inequal. Appl. 10(4) (2007), 827–842.
14. Functional inequalities for Galué's generalized modified Bessel functions. J. Math. Inequal. 1(2) (2007), 183–193.
15. Turán type inequalities for generalized complete elliptic integrals. Math. Z. 256(4) (2007), 895–911.
    - G.D. Anderson, M.K. Vamanamurthy and M. Vuorinen: Topics in special functions II. Conform. Geom. Dyn. 11 (2007), 250–270.
    - V. Heikkala, M.K. Vamanamurthy and M. Vuorinen: Generalized elliptic integrals. Comput. Methods Funct. Theory 9(1) (2009), 75–109.
    - G.D. Anderson, T. Sugawa, M.K. Vamanamurthy and M. Vuorinen: Hypergeometric functions and hyperbolic metric, preprint.
    - F. Qi, S. Guo and B.-N. Guo: A Class of k-log-convex functions and their applications to some special functions. RGMIA Res. Rep. Coll. 10(1) (2007), Article 21. Available online at `http://rgmia.vu.edu.au/v10n1.html`.
16. [with E. Neuman] Inequalities involving modified Bessel functions of the first kind II. J. Math. Anal. Appl. 332(1) (2007), 256–271.

- D. Hammarwall: Resource Allocation in Multi–Antenna Communication Systems with Limited Feedback. Doctoral Thesis in Telecommunications, Stockholm, Sweden, 2007.
- V. Heikkala, M.K. Vamanamurthy and M. Vuorinen: Generalized elliptic integrals. Computat. Methods Funct. Theory 9(1) (2009), 75–109.

17. [with L. Zhu] Extension of Oppenheim's problem to Bessel functions. J. Inequal. Appl. 2007 (2007), Art. 82038.
18. Mills' ratio: Monotonicity patterns and functional inequalities. J. Math. Anal. Appl. 340(2) (2008), 1362–1370.
19. A functional inequality for the survival function of the gamma distribution. JIPAM. J. Inequal. Pure Appl. Math. 9(1) (2008), Article 13, 5 pp. (electronic).

B. Accepted papers

1. On a product of modified Bessel functions. Proc. Amer. Math. Soc.
2. Geometric properties of generalized Bessel functions. Publ. Math. Debrecen.
3. Turán type inequalities for hypergeometric functions. Proc. Amer. Math. Soc.
4. Functional inequalities involving Bessel and modified Bessel functions of the first kind. Expo. Math.
5. [with Y. Sun] Inequalities for the generalized Marcum $Q-$function. Appl. Math. Comput.