FELKÉSZÍTÉS A MATEMATIKAI DIÁKOLIMPIÁRA

PREPARATION FOR THE IMO

című PhD értekezés tézisei

Dobos Sándor

Témavezető: Dr. Freud Róbert

Debreceni Egyetem, Matematika- és Számítástudományok Doktori Iskola
Vezető: Dr. Páles Zsolt

Matematika-didaktika Program
Vezető: Dr. Maksa Gyula

Debrecen, 2011

1. Bevezetés

A disszertáció aktualitása, hogy bő fél évszázada indult a Nemzetközi Matematikai Diákolimpia (IMO). Az értekezésben igyekezünk áttekinteni a magyarországi felkészítő munkát.

A szerző 14 éve végzi a felkészítést, vezeti egész évben a központi olimpiai szakkört, a nyári három hetes olimpiai edzőtábort. Összeállítja és javítja a válogatóversenyeket. Pelikán József csapatvezető helyetteseként az olimpián kíséri a magyar csapatot, részt vesz a versenydolgozatok javításában, koordinálásában. Télen egy hetes angol nyelvű olimpiai edzőtábort szervez Magyarország és Nagy-Britannia 20-20 fős olimpiai keretének. Ez idő alatt jelent meg szorosan az olimpiához kapcsolódva Reiman István és Dobos Sándor olimpiai könyve [6]. További publikációk az „Olimpiai válogatóversenyek 2001-2005" [4], a „Feladatok a nagyvilágból" [3], fiatalabb korosztályok felkészítését szolgálják [5] és [9].

A 2. fejezetben bemutatjuk az IMO-t, vizsgáljuk szerepét a tehetséggondozásban, majd a magyar versenyzők és eredményeik áttekintése következik. A 3. fejezetben a diákok felkészítését vizsgáljuk, nemzetközi összehasonlítást is végezve. A 4. fejezetben a szerző által összeállított, illetve kitalált két feladatsor található didaktikai megjegyzésekkel. Az első a rendezés fogalmának elmélyítését célozza, amely az [1] cikk alapján született. A második a szűk olimpiai csapat felkészítő anyaga, a [2] cikk alapján. Az 5. fejezetben a szerző önálló ötleteiből született feladatai találhatók, közülük több hazai, illetve nemzetközi versenyeken szerepelt. A 6. fejezet a 2001 és 2010 közötti évek hazai olimpiai válogatóversenyeinek áttekintése.

2. A Nemzetközi Matematikai Diákolimpia (IMO) bemutatása

A rövid történeti bevezetőben leírjuk, hogyan változott a csapat létszáma az évek során, hogyan zajlik maga a verseny, miként szervezik a javítást, a díjazást.

A diákolimpia szerepe a tehetséggondozásban sokrétű. Nemzetközi viszonylatban sok ország számára a matematikaverseny mintája lett az IMO. A versenyen érintett témakörök irányadók egy globális standard tantervi kerethez. Hazai viszonylatban az IMO motiváció és mérce, ezt didaktikai oldalról is elemezzük.

Bemutatjuk a magyar versenyzőket, eredményeiket. Magyarország az eddig megrendezésre került 51 IMO közül 50-en vett részt. Eddig 336 magyar versenyző volt, közülük 325 fiú és 11 lány, az utóbbiakat név szerint is bemutatjuk. Felsoroljuk azt a 15 versenyzőt, akik legalább két aranyérmet szereztek. A versenyzőket adó városok is itt szerepelnek a versenyzők számával.

Noha az IMO hivatalosan egyéni verseny, a csapatok összpontszáma alapján az országok sorrendje is megállapítható. Ezen eredmények értékelése zárja a fejezetet. Reiman István összefoglaló könyve az első 35 olimpiáról [7] útmutató volt a fejezet összeállításához.

3. Az IMO-ra való felkészítés

Sorra vesszük azokat a tehetséggondozó műhelyeket, amelyek az olimpikonok visszajelzései alapján felkészítésükben szerepet játszottak. Ezt követően bemutatjuk az országos versenyeket, melyeknek a tehetségek kiválasztása mellett nagyon fontos a motiváló szerepük.

Az olimpiára készülő szűk keret felkészítése, a szakkörök és edzőtáborok bemutatása után nemzetközi összehasonlításként néhány ország felkészítésének rendszerét röviden vázoljuk. Igyekeztünk szomszédos országokat, más európaiakat és különböző földrészekről valókat is válogatni.

4. Problémamegoldást fejlesztő feladatsorok

A fejezet első felében olyan feladatsor található, amely a kisebb-nagyobb reláció sokoldalú megközelítését mutatja be. Ez a rész a szerző [1] publikációján alapul. A rendezés fogalmának alapos megértését szolgálja, ha többfajta környezetben találkozhatnak a diákok ugyanazzal a gondolattal. A feladatsor elején általános iskolásoknak való problémákkal indítunk, majd a matematika különböző területein veszünk sorra problémákat. Feladatokat fűzünk egymás után, amelyek egymásra épülve, több oldalról közelítve a kérdést, alkalmasak lehetnek a tehetséges diákokkal való foglalkozásra, a tehetségek felismerésére. A feladatokat követő megjegyzésekben igyekezünk rámutatni a didaktikai vonatkozásokra. Az utolsó feladatot Pach János-tól hallottam:

4.1.10. Feladat *Adott a síkon n pszeudoszakasz. Megszámozhatók-e a metszéspontjaik különböző pozitív egészekkel úgy, hogy a számozás mindegyik mentén szigorúan monoton legyen?*

Sikerült megtalálnom a legkisebb, $n = 5$-höz tartozó elrendezést, amely esetben a számozás nem végezhető el.

A fejezet második részében bemutatunk egy olyan anyagot, amely az olimpiára készülő csapat felkészítését szolgálja, a szerző [2] cikke alapján. A kettősviszony a középiskolai törzsanyagban nem szerepel, a speciális matematika tagozatosok megismerkednek vele. A kettősviszony segítségével nehéz feladatok is meglepően röviden megoldhatók. A feladatok nehézségi foka ezért nem is szembetűnő. A feladatok közül kiemelünk kettőt. Az egyiket, a 4.2.9. számút a szerző találta ki és javasolta a Közép-Európai Matematikai Diákolimpiára (MEMO).

4.2.9. Feladat *Az ABC háromszögben $AC = CB$. A beírt kör az AB és BC oldalakat rendre a D és E pontokban érinti. Egy A-n áthaladó, de AE-től különböző egyenes a beírt kört F és G pontokban metszi. AB az EF és EG egyeneseket rendre K és L pontokban metszi. Igazoljuk, hogy $KD = DL$.*

A másikat Bohner Géza, a Szent István Gimnázium tanára, tűzte ki a KöMaL fórumban [11]. Sokáig senki nem oldotta meg, a kettősviszonyos megoldás a szerzőtől származik.

4.2.11. Feladat *Legyen az ABC háromszög beírt körének BC-n lévő érintési pontja D. Igazoljuk, hogy az AD-re D-ben állított merőlegesnek a B, illetve C csúcsnál lévő belső szögfelező közti szakaszát D felezi.*

A feladat szerepelt olimpiai válogatóversenyen is (2008.3). A hatodik fejezetben ennek a feladatnak a részletesebb elemzését találjuk.

5. Versenyfeladatok

Ebben a fejezetben olyan feladatokat ismertetünk, amelyek a szerző ötletéből születtek. A célzott korosztályok szerint haladunk sorban, indulunk az általános iskola felsőseivel, szerepel KöMaL-ban kitűzött feladat, OKTV példa. A részletes megoldások mellett alkalmanként bemutatjuk a probléma lehetséges továbbgondolását. A szerző egyik legnagyobb szakmai sikerének tartja, hogy az IMO-n is szerepelt kitűzött feladata, a nemzetközi versenyeken megjelent feladatokat ez a példa zárja.

A feladatok közül kiemelünk minden szintről egyet-egyet. Az 5.1.1.-es felkeltette Szőnyi Tamás és Hraskó András figyelmét, akik a kódokkal foglalkozó tanítási anyagukba beillesztették [10].

5.1.1. Feladat *(Fazekas Mihály Főv. Gyak. Gimn. speciális matematika tagozatos felvételi feladat, 8. évfolyam, 1999) Számrontó Rezsőnek két módszere van egy szám elrontására. Vagy egy jegyet tetszőlegesen megváltoztat,* *vagy két jegyet kicserél. Ugyanannak a 4 jegyű számnak két elrontása az 1323 és az 1213. Mi lehetett az eredeti szám, amit elrontott Rezső?*

Komoly továbbgondolást és általánosabb eredményeket indukált a következő feladat:

5.1.4. Feladat *(Fazekas Mihály Főv. Gyak. Gimn. speciális matematika tagozatos házi verseny, 7. évfolyam) A pozitív egészeket helyezzük el három zsákba A, B és C-be úgy, hogy ha valaki egy zsákból kihúz három különböző számot és közli velünk az összegüket, mi ki tudjuk találni, mely zsákból választott. Minden zsákban végtelen sok szám legyen.*

Ha a halmazok száma n és a kivett számok száma k, akkor a különböző $(n; k)$ párok esetén előfordulhat, hogy nincs megoldás. Ha van, akkor pedig változatos konstrukciókat mutatunk be. Az eredmények mellett megjegyezzük, az általános probléma továbbra is nyitott.

A KöMaL kitűzte a szerző feladatát, amelynek általános megoldása nem ismert:

5.2.1. Feladat *(B.3676.) Bergengóciában a totón négy mérkőzésre lehet tippelni. Betli Benő — nevéhez méltó módon — szeretne barátai előtt egy olyan szelvénnyel büszkélkedni, amelyen egyetlen találat sincs. Hány szelvény ügyes kitöltésével mehet biztosra?*

A játékban n mérkőzés esetén a betlihez szükséges szelvények minimális számát jelölje b_n. Megadjuk $n < 6$ esetén a pontos értékeket, majd mutatunk alsó és felső becslést.

A szerzőnek az OKTV-n kitűzött feladatai közül négy is található a fejezetben. Ezek közül kiemelünk kettőt:

5.2.3. Feladat *(OKTV 2000-2001, II. kategória, döntő, 1. feladat) Legyen a $H = \{1, 2, 3, ..., 2000, 2001\}$ halmaz 77 elemű részhalmazai közül azoknak a száma, amelyekben az elemek összege páros, S-sel egyenlő, és azoknak a száma, amelyekben az elemek összege páratlan, N-nel egyenlő. Melyik nagyobb: S vagy N? És mennyivel?*

Erre a feladatra két különböző megoldást adunk. A következő példa térgeometria:

5.2.4. Feladat *(OKTV 1998-1999, II. kategória, második forduló, 3. feladat) Egy szabályos négyoldalú gúla beírt gömbjének a középpontja, valamint élérintő gömbjének a középpontja egyenlő távol van a gúla alapsíkjától. Mekkora a gúla térfogata, ha alapélének a hossza 2? (Az élérintő gömb* *a gúla minden élét az él belső pontjában érinti, a beírt gömb pedig minden lapot belső pontban érint.)*

Végül a nemzetközi versenyeken kitűzött problémák közül íme a szerző azon feladata, amely az IMO 2000.4. példája volt:

5.3.3. Feladat *Egy bűvésznek száz kártyája van, amelyek 1-től 100-ig vannak számozva. Mindegyiket beleteszi három — egy piros doboz, egy fehér doboz és egy kék doboz — valamelyikébe, olymódon, hogy mindegyik dobozban van legalább egy kártya.*

A közönség egy tagja kiválaszt kettőt a három doboz közül és mindegyikből kivesz egy kártyát, majd kihirdeti a kivett kártyákon lévő két szám összegét. Ennek az összegnek az ismeretében a bűvész meg tudja mondani, hogy melyik az a doboz, amiből nem vettek ki kártyát.

Hányféleképpen lehet a kártyákat a dobozokban úgy elhelyezni, hogy ez a mutatvány mindig sikerüljön? (Két elhelyezést különbözőnek tekintünk, ha van legalább egy kártya, ami másik dobozba kerül.)

6. A magyar IMO csapat kiválasztása

A 6. fejezetben 10 év olimpiai válogatóversenyeit igyekezünk áttekinteni. Az IMO mintájára zajlik a két válogatóverseny: négy és fél óra alatt kell megoldani három feladatot. A fejezet első szakaszában bemutatjuk részletesen a versenyt. Leírjuk a feladatok összeállításának didaktikai szempontjait, a kontrolt. A feladatsorok előkészítésén a szerző sokat dolgozott. A közölt 60 feladat sokszorosát nézte át, hogy megfelelő színvonalúak, nehézségűek legyenek a versenyek.

A fejezet további négy szakaszában a feladatanyag áttekintése következik az IMO témakörei szerint: algebra, geometria, kombinatorika és számelmélet. Az egyes fejezetekben mintapéldákat elemzünk részletesen. A teljes feladatanyag a függelékben található tematikus összeállításban. A 2001-2005 közötti időszak teljes anyagát a szerző publikálta [4].

7. Összegzés

Az értekezésben az IMO felkészítő munka egy keresztmetszetét mutattuk be. Ebben a felkészítő munkában a szerző 14 éve vesz részt, ez a munka tekinthető az igazi „disszertációnak”. Középiskolás diákok felkészítése a vizsgált téma, az IMO nívója által diktált „nem középiskolás fokon”. Didaktikai oldalról vizsgálva három téren mutattuk be a szerző eredményeit. Szervezési oldal: a felkészítő munka és versenyek. Tanári oldal: didaktikailag tudatosan felépített felkészítő feladatsorok. Matematikai oldal: saját ötletből született feladatok változatos témákban és nehézségben, olimpiai szintű válogatóversenyek összeállítása.

Köszönetnyilvánítás

Az olimpiai felkészítés munkájába Reiman István tanár úr hívott meg. Pártfogása, szakmai segítsége sokat jelentett. Ezúton is szeretnék köszönetet mondani témavezetőmnek, Freud Róbert tanár úrnak, aki egyetemista éveim óta segíti szakmai munkámat. Folyamatos bíztatása és tanácsai nagyban hozzájárultak ahhoz, hogy ez a dolgozat létrejöhetett.

1. Introduction

The International Mathematical Olympiad (IMO) started a bit more than half a century ago. In the thesis we investigate the preparatory work for the IMO in Hungary.

The author has been doing the preparation for 14 years, leading the central problem-solving seminars, the three-week summer training camps before the IMO, preparing and grading the team selection tests. The leader of the Hungarian team is József Pelikán, the author is the deputy leader and the escort of the students, also taking part in correcting and coordinating the competition papers. For ten years the author has been organizing a common winter training camp to the squad of the United Kingdom and Hungary (20-20 students), which is a whole week long. The main publication related to the IMO is written by István Reiman and Sándor Dobos [6]. Further publications are [4], [3], and for the preparation of the younger generations [5] and [9].

In Chapter 2 we introduce the IMO, investigate its role in developing talented students, and survey the Hungarian contestants and their results. In Chapter 3 we look at the preparation of the sudents, followed by international comparison, as well. In Chapter 4 there are two problem sets by the author with didactical remarks. The first one is devoted to deepen the concept of ordering, based on paper [1]. The second one is a preparatory material for the IMO team, published in [2]. In Chapter 5 we can find problems created by the author, among them quite a few occurred in local and international competitions. Chapter 6 is a survey of the selection tests in Hungary in the period between 2001 and 2010.

2. The introduction of the IMO

In a short historical description we sketch how the size of the teams changed throughout the years, and how the competitions are organized, graded, and rewarded.

The role of the IMO in working with the talented has many aspects. Internationally it has become a model for mathematical competitions for many countries. The topics involved in the contests give direction for a global curriculum. Within Hungary the IMO is both motivation and measurement, we analyse various sides of these aspects.

We introduce the contestants and their results. Hungary has taken part in 50 of the 51 IMO's. There were 336 contestants, 325 boys and 11 girls, we list the latter ones, and also the 15 students who got at least two gold medals. We give also a list of the home towns of the students.

Although the IMO is an individual competition, the order of the countries can be obtained from the sum of points of their teams. The assessment of the team results constitutes the final part of the chapter. The book of Reiman István [7] gave guidelines for compiling this chapter.

3. Preparation for the IMO

We survey those mathematical workshops which were important in the preparation according to the feedback of the contestants. After this we present the national competitions which play two important roles: to select the best students, and to motivate also the others.

We look at the preparation of the IMO team, the training camps, then we present briefly the preparation system of some other countries as international comparison. We tried to choose neighbouring countries, other Europeans and also some from other continents.

4. Problem sets for improving problem solving skills

In the first part of Chapter 4 there is a problem set about the ordering relation. This part is based on the publication [1] of the author. In order to have better understanding of the concept of ordering it is useful if the students meet with the same idea at various circumstances. We start with problems for primary school students then we look at problems from various fields of mathematics. The step by step building and the approach from several sides make the problem set appropriate for working with the talented. We give didactical remarks after the problems.

I heard the last problem from János Pach:

Problem 4.1.10. *There are n pseudosegments in the plane. Put distinct integers to their intersections so that the numbers should be in monotone order along any pseudosegment. Is this always possible?*

I succeeded in creating a figure for $n = 5$, the smallest possible value of n, where the numbering is not possible.

In the second part of Chapter 4 we discuss a preparatory material for the IMO team, based on paper [2]. Cross ratio is not in the curriculum of secondary schools, it is taught only in the special mathematical classes. Cross ratio will help us to give quite short solutions for the problems which might be rather hard to solve with other methods. We would like to point out two problems. The first one is 4.2.9. created by the author and proposed to the Middle European Mathematical Olympiad (MEMO).

Problem 4.2.9. *Let ABC be an isosceles triangle with $AC = BC$. Its incircle touches AB and BC at D and E respectively. A line distinct of AE through A meets the incircle at F and G. Line AB meets line EF and EG at K and L, respectively. Prove that $DK = DL$.*

The second problem was created by Géza Bohner, the teacher of Szent István High School, and proposed in the forum of KöMaL [11]. For quite a while it was not solved, the solution with cross ratio is due to the author.

Problem 4.2.11. *The incircle of triangle ABC touches BC at D. Let m be a line through D perpendicular to AD. Prove that D is the midpoint of the segment on m which is between the internal bisectors of the triangle at vertices B and C.*

This problem occurred in a selection test (2008.3). In Chapter 6 we analyse it in detail.

5. Competition problems

In Chapter 5 we present problems created by the author. We proceed according to the target age group. We start with the upper primary, then we can find problems from KöMaL and from the National Olympiad (OKTV). Beside the detailed solutions sometimes we show where the problem could lead further on. The author is proud to be the composer of an IMO problem which closes the list of problems that occurred in international competitions.

We present now one problem from each level. Tamás Szőnyi and András Hraskó found Problem 5.1.1. interesting and inserted it into their teaching material about codes [10].

Problem 5.1.1 *(Fazekas Mihály High School entrance examination test at the age of 14, 1999) Naughty Nick has two methods to spoil a number: either to change one digit arbitrarily, or to reverse two digits. Nick spoilt the same number twice, first he got 1323, then 1213. Find the original number which was spoilt.*

The following problem gave more general results:

Problem 5.1.4. *(Fazekas Mihály High School, competition in a special mathematical class, age 13) Distribute the positive integers into three infinite* *disjoint sets A, B and C so that taking three distinct numbers from a set and telling their sum to another person he can identify the set in question.*

In the general problem with n sets and k numbers taken from one of the sets, we show various constructions for certain pairs $(n;k)$, or we prove that there is no solution. We note that the general problem is still open.

The following problem was submitted to journal KöMaL, the general solution is not known:

PROBLEM 5.2.1. *(B.3676.) At a certain country one may bet on four matches in the football pool tickets. Unlucky Luke would like to have surely a ticket without any correct bets. How many tickets does he need?*

If there are n matches we denote the minimal number of tickets by b_n. For $n < 6$ we determine the exact values of b_n, and for larger n we give lower and upper bounds.

In this chapter of the thesis we discuss four problems by the author set in the competition OKTV. We consider here two of them:

PROBLEM 5.2.3. *(OKTV 2000-2001, Category II., final round, Problem 1) Let S denote the number of 77-element subsets of $H = \{1, 2, ..., 2000, 2001\}$ for which the sum of the elements of the subset is even, and N the number of 77-element subsets for which the sum is odd. Which one is greater: S or N? Determine the difference of them.*

We give two solutions for this problem. The next problem is from the field of solid geometry:

PROBLEM 5.2.4. *(OKTV 1998-1999, Category II., second round, Problem 3) Let O and K be the centres of the spheres touching the sides and touching the edges of a straight pyramid, whose base is a 2×2 square. Determine the volume of the pyramid if the distances of O and K from the base are the same. (The sphere with center O touches each side of the pyramid at an inner point, the sphere with center K touches each edge at an inner point.)*

Finally, out of those problems which occurred in international competitions, we present the IMO 2000.4. problem:

5.3.3. PROBLEM *A magician has one hundred cards numbered 1 to 100. He puts them into three boxes, a red one, a white one and a blue one, so that each box contains at least one card.*

A member of the audience selects two of the three boxes, chooses one card from each and announces the sum of the numbers on the chosen cards.

Given this sum, the magician identifies the box from which no card has been chosen.

How many ways are there to put all the cards into the boxes so that this trick always work? (Two ways are considered different if at least one card is put into a different box.)

6. Selection of the Hungarian team

In Chapter 6 we survey the selection tests of the past ten years. The tests are organized like the IMO: the students should solve three problems within 4 and a half hours. First we describe this competition in detail, the didactical sides, and the control. The author worked a lot to compile the tests, looked at many more than the 60 proposed problems in order to ensure the appropriate level and difficulty of the tests.

We group the problems into four sections following the topics of the IMO: algebra, geometry, combinatorics, and number theory. We analyse some problems in detail. The complete list of the problems appears in the appendix grouped according classification. The author has published the material of the years 2001-2005, [4].

7. Summary

The thesis gives a cross-sectional view of the preparation for the IMO. The author has been involved in this task since 1997, this work gives credit for the dissertation. The preparation of the students for the IMO means a much higher level than the normal school level. We can see three didactical sides of this work. Organizational side: preparatory work and competitions. Teaching side: consciously built problem sets. Mathematical side: original problems in various fields and difficulty, compiling IMO level selection tests.

Acknowledgement

Professor István Reiman invited me to the preparatory work for the IMO, his support was most encouraging. I would like to say thanks to my thesis advisor, Professor Róbert Freud, who has been helping my professional work since my studies at university. His suggestions and encouragement contributed a lot to the formation of the thesis.

Irodalomjegyzék/References

Referált folyóiratban, konferencia kiadványban megjelent angol nyelvű publikációk az értekezés témájában: [1], [2].
Magyar nyelvű publikációk az értekezés témájában: [3], [4], [6].
Weblikációk az értekezés témájában: [8], [9].

[1] Dobos, S.: Big small, *A. Ambrus, É. Vásárhelyi (szerk.): Problem Solving in Mathematics Education. Proceedings of the 11th Pro Math conference,* Eötvös Loránd University, Budapest, 2010. (p. 41–50).

[2] Dobos, S.: Cross ratio in use, *The Mathematical Gazette, The Mathematical Association, ISSN: 00255572,* London, March. 2012.

[3] Dobos, S., Hraskó, A., Surányi, L.: Feladatok a nagyvilágból, *Bolyai János Matematikai Társulat,* Budapest, 2000.

[4] Dobos, S.: Olimpiai válogatóversenyek 2001–2005, *Bolyai János Matematikai Társulat,* Budapest, 2005.

[5] Dobos, S.: Területek meghatározása, összehasonlítása, felezése, *Raabe Tanácsadó és Kiadó, ISBN 963 86123 9 8,* Budapest, December 2008.

[6] Reiman, I., Dobos, S.: Nemzetközi Matematikai Diákolimpiák 1959–2003, *Typotex Kiadó, ISBN 963 9548 04 9,* Budapest, 2003.

[7] Reiman, I.: Nemzetközi Matematikai Diákolimpiák 1959–1994, *Typotex Kiadó, ISBN 963 7546 76 6,* Budapest, 1997.

[8] Dobos, S., Hraskó, A.: Projektív geometria, *http://matek.fazekas.hu/mathdisplay/cache/pdf/volume_g_iii.pdf* 2008.

[9] Dobos, S.: A budapesti IMO felkészítő szakkör honlapja *http://home.fazekas.hu/ dobos/olimpia/cimlap.htm*

[10] *http://matek.fazekas.hu/portal/tanitasianyagok /Hrasko_Andras/kodok/kodfelgyujt.html*

[11] *http://www.komal.hu/forum/ /forum.cgi?a=to&tid=43&st=25&dr=0&sp=121*
[97]-es bejegyzés, 20. feladat