Egyetemi doktori (PhD) értekezés tézisei

Combinatorial Diophantine equations

Kombinatorikus diofantikus egyenletek

Kovács Tünde

Témavezető: Dr. Hajdu Lajos

Debreceni Egyetem
Matematika- és Számítástudományok Doktori Iskola
Debrecen, 2011.

Egyetemi doktori (PhD) értekezés tézisei

Combinatorial Diophantine equations

Kombinatorikus diofantikus egyenletek

Kovács Tünde

Témavezető: Dr. Hajdu Lajos

Debreceni Egyetem
Matematika- és Számítástudományok Doktori Iskola
Debrecen, 2011.

Introduction

Our dissertation consists of five chapters each containing new results concerning Diophantine equations and Diophantine problems. Most problems have certain combinatorial background. These results have been published in our papers [20], [25], [26], [27] and [21], respectively. Here we shall give an overview of the contents of the chapters, but before doing so we make some introductory notes on the subjects of our thesis.

In the first chapter we present the main method used in our studies namely the $\mathcal{E}llog$ method together with an improvement due to Hajdu and Kovács [20]. For the resolution of elliptic equations, an efficient method was developed simultaneously and independently by Stroeker, Tzanakis [47] and Gebel, Pethő, Zimmer [14] in 1994. The most recent version of this so-called $\mathcal{E}llog$ method is already capable to find (at least in principle) all integral points on genus 1 curves (see [49], and also the references given there). Furthermore, Stroeker and Tzanakis [48] provided an algorithm to determine that Mordell-Weil basis of the curve in which one can get the best bound for the integral points of the curve. In the first chapter we show that working with more Mordell-Weil bases simultaneously, the final bound for the integral points can be further decreased. The results of this chapter are published in [20].

In the second chapter we apply the $\mathcal{E}llog$ method to solve many combinatorial Diophantine equations whose solutions are missing from the literature. One of the first results giving all integer solutions of a combinatorial Diophantine equation is a theorem of Mordell [35], which provides all integer solutions of the equation $y(y+1) = x(x+1)(x+2)$. Other scattered equations have been investigated by several authors, see for example [1], [2], [9], [31], [43], [47], [57], [58], [61]. Hajdu and Pintér [22] systematically collected and solved those combinatorial equations that can be reduced to Mordell-type equations. We extend this result to more general combinatorial equations that can be reduced to general elliptic equations. Namely, we collect those equations that can be reduced to equations of genus 1. The results of the second chapter are published in [25].

In the third chapter we give several effective and explicit results concerning the values of some polynomials in binary recurrence sequences. First we provide an effective finiteness theorem for certain combinatorial numbers (binomial coefficients, products of consecutive integers, power sums, alternating power sums) in binary recurrence sequences, under some assumptions. The proof of this theorem is based on Baker's method. We also give an efficient algorithm (based on genus 1 curves) for determining the values of certain degree 4 polynomials in such sequences. Finally, partly by the help of this algorithm we completely determine all combinatorial numbers of the above type for the small values of the parameter involved in the Fibonacci, Lucas, Pell and Associated Pell sequences. The results of the third chapter are published in [26].

Balancing numbers and their generalizations have been investigated by several authors, from many aspects. In the fourth chapter we introduce the concept of balancing numbers in arithmetic progressions, and prove several effective finiteness and explicit results about them. In the proofs of our results, among others, we combine Baker's method, the modular method, the Chabauty method and the theory of elliptic curves. The results of the fourth chapter are published in [27].

In the fifth chapter we prove that the product of k consecutive terms of a primitive arithmetic progression is never a perfect fifth power when $3 \leq k \leq 54$. This problem is closely related to a classical problem, considered by several mathematicians e.g. Erdős, Selfridge, Győry, Saradha, Shorey, Tijdeman. We also provide a more precise statement, concerning the case where the product is an "almost" fifth power. Our theorems yield considerable improvements and extensions, in the fifth power case, of recent results due to Győry, Hajdu and Pintér [19]. While the earlier results have been proved by classical (mainly algebraic number theoretical) methods, our proofs are based upon a new tool: we apply genus 2 curves and the Chabauty method (both the classical and the elliptic verison). The results of the fifth chapter are published in [21].

The $\mathcal{E}llog$ method and an improvement

Elliptic Diophantine equations have a long history. Even the effective theory of such equations have an extremely rich literature. A classical result of Baker [3] yields that an elliptic equation can have only finitely many integer solutions, and the size (absolute value) of the solutions can be effectively bounded. However, to explicitly find all integral solutions another method has been developed, which uses the arithmetic properties of elliptic curves. This algorithm combines many deep ingredients, due to several authors. Here we only refer to the papers of Stroeker, Tzanakis [47] and Gebel, Pethő, Zimmer [14], where the first complete versions of this method are independently given. (See also the references in these papers.) The most recent version of this so-called $\mathcal{E}llog$ method is already capable to find (at least in principle) all integral points on genus one curves (see [49], and also the references given there for certain important intermediate steps). To summarize the method in one sentence, what happens is that first the maximum N of the coefficients of the integral points (in some Mordell-Weil basis) is bounded, and then this bound is gradually decreased to a size where the actual points can already be identified by an exhaustive search. (Of course, in fact the method is much more general and complicated.) To get the final bound N_{final} for N, the LLL-algorithm is applied.

First we briefly summarize the main steps of the $\mathcal{E}llog$ method. We follow the presentation in [49].

Let $f \in \mathbb{Z}[u, v]$ and define the curve C by

$$C: \quad f(u, v) = 0.$$

Suppose that C is of genus one. Then C is birationally equivalent (over a number field) to some elliptic curve

$$E: \quad x^3 + Ax + B = y^2$$

with $A, B \in \mathbb{Q}$. Let r be the rank of E, and let $P_1, \ldots, P_r$ be a Mordell-Weil basis of E. Then any rational point P of E can be written as

$$P = P_0 + n_1 P_1 + \ldots + n_r P_r, \tag{1}$$

where P_0 is some torsion point of E, and $n_i \in \mathbb{Z}$ $(i = 1, \ldots, r)$.

Now on the one hand, using estimates of David [11] concerning linear forms in elliptic logarithms, one gets a lower bound of the form

$$|L(P)| \geq \exp(-c_1(\log N + c_2)(\log\log N + c_3)^{r+3}). \tag{2}$$

Here $L(P)$ is a certain linear form in elliptic logarithms (”roughly" the elliptic logarithm of P), $N = \max\limits_{1 \leq i \leq r} |n_i|$ and c_1, c_2, c_3 are constants depending only on the curves C and E. On the other hand, supposing that P is the image of an integral point of C under the above birational transformation, using standard arguments (including height estimates of points of E) we get an inequality of the form

$$|L(P)| \leq c_4 \exp(-c_5 \lambda N^2). \tag{3}$$

Here c_4, c_5 are again constants, which depend only on C and E. Further, most importantly from our point of view, λ is the least eigenvalue of the height pairing matrix of the basis $P_1, \ldots, P_r$ occurring in (1). That is, λ certainly depends on the choice of the Mordell-Weil basis. As it is demonstrated by Stroeker and Tzanakis [48], the size of λ has a great impact on the final bound N_{final} for N. We shall return here a little later.

Combining estimates (2) and (3) we get an initial upper bound N_0 for N. However, this upper bound is usually extremely huge. Due to an observation of Stroeker and Tzanakis [48], N_0 should be around $10^{(5r^2+5r+28)/2}$. Hence to explicitly determine the integral points on C, this initial bound N_0 should be reduced. This can be done by lattice reduction techniques due to de Weger [59], based on the LLL-algorithm. We use a variant due to Tzanakis [56]. To apply this result, one starts with (3), together with the inequality $N < N_0$. Using the appropriate Proposition from Section 5 of Tzanakis [56], one gets a new lower bound of the shape

$$N < \frac{c_6}{\sqrt{c_5 \lambda}}$$

for N, where c_6 is an explicitly computable constant depending on some parameters of E, and also on the length of the shortest vector of an LLL-reduced basis of a certain lattice. As one can see, this new bound is linear in $\lambda^{-1/2}$, which shows the importance of this parameter. Stroeker and Tzanakis [48] have considered several examples which indicate this phenomenon in a rather convincing way. Summarizing the results in [48], to get the best possible reduced bound N_{final} for N one should definitely choose an ST-basis (i.e. a basis for which the corresponding λ value is the greatest possible) of the curve E in (1). Subsequently, Stroeker and Tzanakis [48] have also worked out an efficient algorithm for finding an ST-basis of the curve.

However, in the sequel it turns out that the bound obtained by using an ST-basis, can still be improved further, if one works with several Mordell-Weil bases simultaneously. It is important to note that following our method the use of more bases shall increase only by a fraction the total time needed to get a better N_{final}. Already a small gain in N_{final} may lead to a large improvement in the searching time for finding the small solutions - in particular, if r is large. The reason is simply that the region where we have to look for the small solutions is of size $(2N_{final}+1)^r$. Note that a similar "size" notion was used also in [48] to compare the final bounds obtained in different Mordell-Weil bases.

Now we briefly outline how to work in several bases simultaneously. To explain our ideas in fact it is sufficient to use two bases. So assume that $B_1 = (P_1, \ldots, P_r)$ is a Mordell-Weil basis of E, and let S be an integral unimodular matrix of size $r \times r$. Let $B_2 = (Q_1, \ldots, Q_r)$ be the basis of E obtained from B_1 by using S as a basis transformation matrix. Let P be a rational point on E with the representation (1), and assume that we also have

$$P = Q_0 + m_1 Q_1 + \ldots + m_r Q_r, \tag{4}$$

with some torsion point Q_0 and integers $m_1, \ldots, m_r$. Put $M = \max_{1 \le i \le r} |m_i|$, and recall that by elementary linear algebra we have

$$S^{-1} \begin{pmatrix} n_1 \\ \vdots \\ n_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_1 \\ \vdots \\ m_r \end{pmatrix}. \tag{5}$$

This implies $M \le sN$, where $s = ||S^{-1}||$ is the row norm of S^{-1}. (The row norm of a $k \times \ell$ type real matrix $A = (a_{ij})_{\substack{1 \le i \le k \\ 1 \le j \le \ell}}$ is defined by $||A|| = \max_{1 \le i \le k} \sum_{j=1}^{\ell} |a_{ij}|$.) In particular, this means that one does not have to go through the $\mathcal{E}llog$ method both for B_1 and B_2, it is sufficient to use it with B_1 say. Indeed, take for example B_1 to be an ST-basis of E, and suppose that after applying the $\mathcal{E}llog$ method (together with the reduction stage) we have the bound $N < N_{final}$. Then by $M \le sN$, we automatically have $M \le M_0 := sN_{final}$. As s is typically "small" (it will be at most around ten), M_0 is not too large - and of course, it can also be reduced. Importantly, we can get the final bound M_{final} very easily and quickly. The reason is that the reduction steps are difficult and time consuming only if the initial bound is large, as then e.g. high precision is needed. However, as s will be small, the reduction steps leading from M_0 to M_{final} are made very easily. The final bounds N_{final} and M_{final} yield simultaneous upper bounds for the coefficients of P, in two different bases. Combining these two bounds by (5), we can decrease the domain where the final search has to be done. As one may predict (which will turn out to be true), the gain starts getting more and more significant as the rank r is getting larger and larger.

Strategy 1. We try to decrease $N^{(1)}_{final}$ (corresponding to B_1), componentwise. For this purpose, choose distinct indices i, j with $1 \le i, j \le r$ and a positive integer t, and consider the bases B_2 and B_3 obtained by replacing P_i by $P_i + tP_j$ and $P_i - tP_j$ in B_1, respectively (leaving the other basis elements untouched). With the bases B_2 and B_3 the reduction process starts from the quite small bound $(t+1)N^{(1)}_{final}$ and gives, respectively, the final bounds, say, $N^{(2)}_{final}$ and $N^{(3)}_{final}$. Then a simple calculation yields that

$$|n_i| \le \frac{N^{(2)}_{final} + N^{(3)}_{final}}{2t}$$

holds. If the right hand side happens to be less than $N^{(1)}_{final}$, then we get a new, improved bound for $|n_i|$. To make this principle work, for each fixed i we (heuristically) choose that j, for which the sum of the λ values (corresponding to B_2 and B_3) is maximal with $t = 1$. Then for simplicity (and also because we try to keep the time consumption of the method low), instead of checking several values, we take the fixed value $t = 10$ in the computations. The procedure can be iterated, and the iteration leads to further improvement in some cases.

Further, we have some reasons for the choice of $t = 10$. If λ_t denotes the value of λ corresponding to t (either in B_2 or in B_3), then $\frac{t+1}{t}\sqrt{\frac{\lambda_t}{\lambda_{t+1}}}$ is close to 1, if t is "large". The value $t = 10$ seems to be large enough to make the λ-s corresponding to B_2 and B_3 more or less close to each other, and it seems to have some good effect on the outcome. Still, obviously at this point the method can have many variants.

Strategy 2. Using the algorithm of Stroeker and Tzanakis [48], we determine the "best" ten Mordell-Weil bases B_j $(j = 1, \ldots, 10)$ i.e. ten Mordell-Weil basis corresponding to the ten largest λ-values. (Note that by the algorithm we get all the basis transformation matrices with respect to B_1, as well, and also that the calculation of ten basis takes only a little extra time than calculating only B_1.) Then we compute the initial upper bounds $N_0^{(j)}$ $(j = 1, \ldots, 10)$ for the coordinates of the integral points in these bases, respectively. (As we mentioned, out of these only the calculation of $N_0^{(1)}$ is time consuming (but it has to be calculated even if we use only B_1), the other bounds come very quickly and easily.) Having these bounds, using the basis transformation matrices, we get several extra information for the coefficients of P in B_1. In fact we get a system of inequalities defining a convex body, which contains much less integral points than the one implied by $|n_i| \leq N_{final}^{(1)}$ $(i = 1, \ldots, r)$.

Finally, we mention that altogether it seems that *Strategy 2* yields more improvement than *Strategy 1*. In the dissertation we give several examples to illustrate how our method works. The results of the first chapter are published in [20].

Combinatorial Diophantine equations of genus 1

Many Diophantine equations possess combinatorial background. One of the first results giving all integer solutions of a combinatorial Diophantine equation is a theorem of Mordell [35], which provides all integer solutions of the equation $y(y+1) = x(x+1)(x+2)$. Other scattered equations have been investigated by several authors, see for example [1], [2], [9], [31], [43], [47], [57], [58], [61].

Hajdu and Pintér [22] systematically collected and solved those combinatorial equations that can be reduced to Mordell-type equations. Our purpose is to extend this result to more general combinatorial equations that can be reduced to general elliptic equations. Namely, we collect those equations that can be reduced to equations of genus 1. The equations are solved with the $\mathcal{E}llog$ method and with the Magma [8] computational algebra system. We mention that beside a lot of sparse results (see e.g. [40], [41], [43], [50] and [60]), Stroeker and de Weger [51] solved all such equations involving binomial coefficients.

We need some notation to formulate our results. For all $n, x \in \mathbb{N}$ let

$$S_n(x) = 1^n + 2^n + \ldots + (x-1)^n,$$
$$\Pi_n(x) = x(x+1)\cdots(x+n-1).$$

The formerly solved Diophantine equations which can be reduced to elliptic equations concerning $\Pi_n(x)$, $S_n(x)$ and $\binom{x}{n}$, are the followings:

$\Pi_2(k) = \Pi_3(l)$ (Mordell [35]),
$\binom{k}{2} = \binom{l}{3}$ (Avanesov [1]),
$\Pi_2(k) = \Pi_6(l)$ (MacLeod and Barrodale [31]),
$S_2(k) = \binom{l}{2}$ (Avanesov [2] and Uchiyama [58]),
$\Pi_3(k) = \Pi_4(l)$, $S_2(k) = \binom{l}{4}$ (Boyd and Kisilevsky [9]),
$\binom{k}{2} = \Pi_3(l)$ (Tzanakis and de Weger [57]),
$\binom{k}{2} = \Pi_4(l)$ (Pintér [40], see also [15], p. 225.),
$\binom{k}{4} = \binom{l}{2}$ (Pintér [41] and de Weger [60]),
$\binom{k}{3} = \binom{l}{4}$ (de Weger [61]),
$\binom{k}{4} = \Pi_2(l), \Pi_3(l)$ (Pintér and de Weger [43]),
$\binom{k}{m} = \Pi_n(l)$, where $(m, n) = (3, 6; 3, 6)$ (Stroeker and de Weger [50]),
$\binom{k}{m} = \binom{l}{n}$, where $(m, n) = (2; 3, 4, 6, 8), (3; 4, 6), (4; 6, 8)$ (Stroeker and de Weger [51]),
$S_5(k) = \binom{l}{2}$, $S_5(k) = \binom{l}{4}$, $S_m(k) = \Pi_n(l)$, where $(m, n) = (2, 5; 2, 4)$, $\binom{k}{m} = \Pi_n(l)$, where $(m, n) = (2, 4; 6), (3, 6; 2, 4)$, $\Pi_4(k) = \Pi_6(l)$ (Hajdu and Pintér [22]).

Here and later on $(k, l) = (a_1, \ldots, a_n; b_1, \ldots, b_m)$ means that (k, l) can be any of the pairs (a_i, b_j), $i \in \{1, \ldots, n\}$, $j \in \{1, \ldots, m\}$.

Equation	Solutions
$S_3(k) = \Pi_2(l)$	$(k,l) = (-1,0;-1,0)$
$S_3(k) = \Pi_4(l)$	$(k,l) = (-1,0;-3,-2,-1,0)$
$S_3(k) = \Pi_8(l)$	$(k,l) = (-1,0;-7,-6,-5,-4,-3,-2,-1,0)$
$S_5(k) = \binom{l}{3}$	$(k,l) = (-1,0;0,1,2),(-2,1;3)$
$S_7(k) = \binom{l}{2}$	$(k,l) = (-1,0;0,1),(-2,1;-1,2)$
$P_2(k) = \Pi_4(l)$	$(k,l) = (-1,0;-3,-2,-1,0)$
$P_2(k) = \Pi_8(l)$	$(k,l) = (-1,0;-7,-6,-5,-4,-3,-2,-1,0)$
$P_3(k) = \Pi_6(l)$	$(k,l) = (-2,-1,0;-5,-4,-3,-2,-1,0),(8;-6,1)$
$P_4(k) = \Pi_8(l)$	$(k,l) = (-3,-2,-1,0;-7,-6,-5,-4,-3,-2,-1,0)$

Table 1: Equations which can be solved by Runge's method

Equation	Solutions
$S_3(k) = \binom{l}{3}$	$(k,l) = (-1,0;0,1,2),(-2,1;3)$
$S_3(k) = \binom{l}{6}$	$(k,l) = (-1,0;0,1,2,3,4,5),(-2,1;-1,6)$
$S_3(k) = \Pi_3(l)$	$(k,l) = (-1,0;-2,-1,0)$
$S_3(k) = \Pi_6(l)$	$(k,l) = (-1,0;-5,-4,-3,-2,-2,-1,0)$
$S_5(k) = \binom{l}{2}$	$(k,l) = (-1,0;0,1),(-2,1;-1,2),(-4,3;-23,24),$ $(-9,8;-351,352)$
$S_5(k) = \binom{l}{4}$	$(k,l) = (-1,0;0,1,2,3),(-2,1;-1,4)$
$S_5(k) = \Pi_2(l)$	$(k,l) = (-1,0;-1,0)$
$S_5(k) = \Pi_4(l)$	$(k,l) = (-1,0;-3,-2,-1,0)$

Table 2: Equations which can be reduced to Mordell-type equations

We mention that $S_n(x)$ is a polynomial of degree $n+1$, and $\Pi_n(x)$ is a polynomial of degree n. For the sake of completeness we give all integer solutions of the investigated polynomial equations (although the negative solutions do not have combinatorial meanings). Our results are summarized in the next theorem. We distribute the equations considered into three tables, according to the methods used in their solutions.

Theorem 1 (Kovács, 2008)**.** *All integral solutions of the equations in the first columns of Tables 1-3 are exactly the ones appearing in the second columns of the tables, respectively.*

The results of the second chapter are published in [25].

Equation	Solutions
$S_1(k) = \binom{l}{4}$	$(k,l) = (-21, 20; -7, 10), (-6, 5; -3, 6),$ $(-2, 1; -1, 4), (-1, 0; 0, 1, 2, 3)$
$S_1(k) = \binom{l}{8}$	$(k,l) = (-1, 0; 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7), (-2, 1; -1, 8),$ $(-10, 9; -3, 10;), (-78, 77; -7, 14), (-221, 220; -10, 17)$
$S_1(k) = \Pi_4(l)$	$(k,l) = (-16, 15; -5, 2), (-1, 0; -3, -2, -1, 0))$
$S_1(k) = \Pi_8(l)$	$(k,l) = (-1, 0; -7, -6, -5, -4, -3, -2, -1, 0)$
$S_2(k) = \binom{l}{3}$	$(k,l) = (-1, 0; 0, 1, 2), (-2, -1), (1, 3)$
$S_2(k) = \binom{l}{6}$	$(k,l) = (-1, 0; 0, 1, 2, 3, 4, 5), (1; -1, 6)$
$S_2(k) = \Pi_3(l)$	$(k,l) = (-1, 0; -2, -1, 0)$
$S_2(k) = \Pi_6(l)$	$(k,l) = (-1, 0; -5, -4, -3, -2, -1, 0)$
$S_3(k) = \binom{l}{2}$	$(k,l) = (-4, 3; -8, 9), (-2, 1; -1, 2), (-1, 0; 0, 1)$
$S_3(k) = \binom{l}{4}$	$(k,l) = (-2, 1; -1, 4), (-1, 0; 0, 1, 2, 3)$
$S_3(k) = \binom{l}{8}$	$(k,l) = (-1, 0; 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7), (-3, 2; -2, 9),$ $(-2, 1; -1, 8)$
$S_5(k) = \binom{l}{6}$	$(k,l) = (-1, 0; 0, 1, 2, 3, 4, 5), (-2, 1; -1, 6)$
$S_5(k) = \Pi_3(l)$	$(k,l) = (-1, 0; -2, -1, 0)$
$S_5(k) = \Pi_6(l)$	$(k,l) = (-1, 0; -5, -4, -3, -2, -1, 0)$
$S_7(k) = \binom{l}{4}$	$(k,l) = (-2, 1; -1, 4), (-1, 0; 0, 1, 2, 3)$
$S_7(k) = \Pi_2(l)$	$(k,l) = (-1, 0; -1, 0)$
$S_7(k) = \Pi_4(l)$	$(k,l) = (-1, 0; -3, -2, -1, 0)$
$\binom{k}{2} = \Pi_8(l)$	$(k,l) = (0, 1; -7, -6, -5, -4, -3, -2, -1, 0)$
$\binom{k}{4} = \Pi_4(l)$	$(k,l) = (0, 1, 2, 3; -3, -2, -1, 0)$
$\binom{k}{4} = \Pi_8(l)$	$(k,l) = (0, 1, 2, 3; -7, -6, -5, -4, -3, -2, -1, 0)$
$\binom{k}{8} = \Pi_2(l)$	$(k,l) = (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7; -1, 0)$
$\binom{k}{8} = \Pi_4(l)$	$(k,l) = (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7; -3, -2, -1, 0)$

Table 3: Equations which can be reduced to genus 1 equations

Combinatorial numbers in binary recurrences

Let $U = \{U_n\}_{n=0}^{\infty}$ be a binary recurrence sequence defined by the initial terms U_0, $U_1 \in \mathbb{Z}$ and the recurrence relation

$$U_n = AU_{n-1} + BU_{n-2} \quad (n \geq 2)$$

where A, B are non-zero integers. Let α and β denote the zeros of the companion polynomial $x^2 - Ax - B$ of U. Further, let $D = A^2 + 4B$ be the discriminant of U and

$$a_u = U_1 - \beta U_0, \quad b_u = U_1 - \alpha U_0, \quad C = a_u b_u = U_1^2 - AU_0U_1 - BU_0^2.$$

The sequence U is called non-degenerate if $C \neq 0$ and α/β is not a root of unity. It is well-known that if U is non-degenerate then for all $n = 0, 1, \ldots$ we have

$$U_n = \frac{a_u \alpha^n - b_u \beta^n}{\alpha - \beta}.$$

From this point on we assume that $B = \pm 1$ and that U is non-degenerate. Then as it is also well-known, U has a so-called associate sequence $V = \{V_n\}_{n=0}^{\infty}$ for which

$$V_n^2 - DU_n^2 = 4C(-B)^n \tag{6}$$

holds for all $n = 0, 1, \ldots$. Observe that by our assumption $B = \pm 1$, we have $(-B)^n = \pm 1$. Further, note that $V_0 = 2U_1 - AU_0$, $V_1 = AU_1 + 2BU_0$ and V satisfies the same recurrence relation as U.

Beside dealing with general sequences U we consider combinatorial numbers in certain special famous sequences, too. Let F, L, P and Q denote the Fibonacci, Lucas, Pell and Associated Pell sequence, respectively. These sequences are defined by

$$\begin{array}{llll}
F_0 = 0, & F_1 = 1, & F_n = F_{n-1} + F_{n-2} & (n \geq 2), \\
L_0 = 2, & L_1 = 1, & L_n = L_{n-1} + L_{n-2} & (n \geq 2), \\
P_0 = 0, & P_1 = 1, & P_n = 2P_{n-1} + P_{n-2} & (n \geq 2), \\
Q_0 = 1, & Q_1 = 1, & Q_n = 2Q_{n-1} + Q_{n-2} & (n \geq 2).
\end{array}$$

Now we give what kind of combinatorial numbers we are interested in. Beside binomial coefficients, we consider power sums, alternating power sums and products of consecutive integers as well. In the previous chapter we defined these polynomials except for the alternating power sum. That polynomial is defined for all $k, x \in \mathbb{N}$ as

$$R_k(x) = -1^k + 2^k - \ldots + (-1)^{x-1}(x-1)^k.$$

We mention that $R_k(x)$ is a polynomial of degree k.

We use the previous notation. Further, recall that $B = \pm 1$ and $U = \{U_n\}_{n=0}^{\infty}$ is non-degenerate. All our results concern the equation

$$U_n = p(x) \tag{7}$$

in integers n, x with $n \geq 0$. For the sake of completeness we also take care of the solutions with $x \leq 0$, although these solutions usually do not have combinatorial meanings.

First we give an effective result for the solutions of (7) which is valid for general U.

Theorem 2 (Kovács, 2009). *Let $k \geq 2$ and $p(x)$ be one of the polynomials $S_{k-1}(x)$, $R_k(x)$, $\Pi_k(x)$, $\binom{x}{k}$. If either $k = 2$ or $p(x)$ is one of $S_2(x), \Pi_3(x), \binom{x}{3}$, then further assume that $B = 1$. Then the solutions n, x of equation (7) satisfy $\max(n, |x|) < c_0(U, k)$, where $c_0(U, k)$ is an effectively computable constant depending only on U and k.*

Obviously, the assumption $k \geq 2$ cannot be omitted. The next proposition shows that the condition $B = 1$ in the special cases of the theorem is necessary as well.

Proposition 1. *Let U be the sequence defined by $B = -1$ and by the values U_0, U_1, A given in the ith row of Table 4, for any $i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Further, let $p(x)$ be a polynomial from the last column of the ith row of Table 4. Then equation (7) has infinitely many solutions.*

U_0	U_1	A	$p(x)$
1	253	254	$S_1(x), R_2(x), \binom{x}{2}$
2	506	254	$\Pi_2(x)$
1	3759787041401	3760028828350	$S_2(x)$
7770	455962704852690	58682458798	$\binom{x}{3}$
46620	2735776229116140	58682458798	$\Pi_3(x)$

Table 4: Settings where equation (7) has infinitely many solutions

Remark. If (7) has infinitely many solutions then these solutions have some special structure. This structure has been described by Nemes and Pethő [36], see Theorem 3 (cf. also [37], [38]).

Szalay [52] gave an algorithm for the resolution of (7) in the case when $p(x)$ is a polynomial of degree 3. We extend this result to the degree 4 case. For this purpose we need some further notation. Let $p(x) \in \mathbb{Q}[x]$ be a polynomial of degree 4 and write

$$p(x) = A_0x^4 + A_1x^3 + A_2x^2 + A_3x + A_4.$$

Suppose that the coefficients of p fulfill the relations

$$A_0 = \frac{a}{e}, A_1 = \frac{4ab}{e}, A_2 = \frac{6ab^2 + c}{e}, A_3 = \frac{4ab^3 + 2bc}{e}, A_4 = \frac{ab^4 + b^2c + d}{e},$$

with some integers a, b, c, d, e, $ae \neq 0$. Then we have

$$p(x) = \frac{a(x + b)^4 + c(x + b)^2 + d}{e}.$$

Write $x_1 = x + b$ and let $y = V_n$ where $V = \{V_n\}_{n=0}^{\infty}$ is the associate sequence of U. Then by (6) we get

$$y^2 - D\left(\frac{ax_1^4 + cx_1^2 + d}{e}\right)^2 = 4C(-B)^n,$$

which yields

$$Y^2 = h_4X^4 + h_3X^3 + h_2X^2 + h_1X + h_0, \tag{8}$$

where

$$Y = ey, \quad X = x_1^2, \quad h_4 = a^2D, \quad h_3 = 2acD,$$
$$h_2 = (c^2 + 2ad)D, \quad h_1 = 2cdD, \quad h_0 = d^2D + 4e^2C(-B)^n.$$

Equation (18) in general is of genus 1, therefore the $\mathcal{E}llog$ method can be used to determine all its integral solutions. In particular, using the program package Magma, equation (18) can be solved completely in concrete cases. If h_0 is a perfect square then (18) can be solved by the procedure `IntegralQuarticPoints`. Putting together some tools and results about genus 1 curves, we give an efficient method for the resolution of (18) in the general case. For the description of the method see the proof of Theorem 3. (Further, we implemented our algorithm in Magma, too.) From the solutions, the values x and the indices n can be easily determined.

Summarizing the above argument, we get

$=$	F_n	L_n	P_n	Q_n
$S_1(x)$	[33]	[34]	[32]	$(0,-1),(0,2),(1,-1),$ $(1,2),(2,-2),(2,3)$
$S_2(x)$	[52]	[52]	[52]	$(0,2),(1,2)$
$S_3(x)$	[52]	[52]	[52]	$(0,-1),(0,2),$ $(1,-1),(1,2)$
$T_2(x)$	$(0,0),(0,1),(1,-1),$ $(2,-1),(4,3),(8,7),$ $(10,11)$	$(1,-1),(2,3),$ $(18,-107)$	$(1,-1)$	$(0,-1),(1,-1),(2,3)$
$T_4(x)$	$(0,0),(0,1),$ $(1,-1),(2,-1)$	$(1,-1)$	$(0,0),(0,1),$ $(1,-1)$	$(0,-1),(1,-1)$
$\Pi_2(x)$	$(0,-1),(0,0),$ $(3,-2),(3,1)$	–	$(0,-1),(0,0),(2,-2),$ $(2,1),(4,-4),(4,3)$	–
$\Pi_3(x)$	$(0,-2),(0,-1),$ $(0,0)$	–	$(0,-2),(0,-1),$ $(0,0)$	–
$\Pi_4(x)$	$(0,-3),(0,-2),$ $(0,-1),(0,0)$	–	$(0,-3),(0,-2),$ $(0,-1),(0,0)$	–
$\binom{x}{2}$	[33]	[34]	[32]	$(0,-1),(0,2),(1,-1),$ $(1,2),(2,-2),(2,3)$
$\binom{x}{3}$	[53]	[53]	[53]	–
$\binom{x}{4}$	[52]	[52]	$(0,0),(0,1),(0,2),$ $(0,3),(1,-1),(1,4),$ $(3,-2),(3,5),$ $(6,-5),(6,8)$	$(1,-1),(1,4)$

Table 5: Solutions of equation (7) with the particular settings

Theorem 3 (Kovács, 2009)**.** *Using the previous notation, suppose that* $8aDd(2ad-c^2) \neq -64a^2C \pm e^2 - c^4D$. *Then equation* (7) *has only finitely many solutions* n, x *and these solutions can be effectively determined.*

Our final result about this problem completely describes the above type combinatorial numbers for the small values of the parameter k in some well-known binary recurrence sequences.

Theorem 4 (Kovács, 2009)**.** *Let* $U \in \{F, L, P, Q\}$, $p(x) \in \{S_1(x), S_2(x), S_3(x), R_2(x), R_4(x), \Pi_2(x), \Pi_3(x), \Pi_4(x), \binom{x}{2}, \binom{x}{3}, \binom{x}{4}\}$. *Then the solutions* n, x *of equation* (7) *are exactly those contained in Table 5. The sign "–" shows that the actual equation has no solution. Further, the references given in the table indicate that the corresponding equation was solved in the appropriate paper.*

Remark. The complete solution of the equation $U_n = R_3(x)$ remains open.

These equations are of genus 2 thus neither Szalay's method nor our algorithm given in the proof of Theorem 3 can be used to solve them.

The results of the third chapter are published in [26].

Results on (a, b)-balancing numbers

A positive integer n is called a balancing number if

$$1 + \cdots + (n-1) = (n+1) + \cdots + (n+r)$$

holds for some positive integer r (see [4] and [13]). The sequence of balancing numbers is denoted by B_m $(m = 1, 2, \dots)$. As one can easily check, we have $B_1 = 6$ and $B_2 = 35$. Note that by a result of Behera and Panda [4], we have

$$B_{m+1} = 6B_m - B_{m-1} \qquad (m > 1).$$

In particular, there are infinitely many balancing numbers.

The literature of balancing numbers is very rich. In [28] and [29] Liptai proved that there are no Fibonacci and Lucas balancing numbers, respectively. Later, Szalay [54] derived the same results by a different method.

In [30] Liptai, Luca, Pintér and Szalay generalized the concept of balancing numbers in the following way. Let y, k, l be fixed positive integers with $y \geq 4$. A positive integer x with $x \leq y - 2$ is called a (k, l)-power numerical center for y if

$$1^k + \cdots + (x-1)^k = (x+1)^l + \cdots + (y-1)^l.$$

In [30] several effective and ineffective finiteness results were proved for (k, l)-power numerical centers.

Recently, the "balancing" property has been investigated in recurrence sequences (see [7]). In this chapter we extend the concept of balancing numbers to arithmetic progressions. Let $a > 0$ and $b \geq 0$ be coprime integers. If for some positive integers n and r we have

$$(a+b) + \cdots + (a(n-1)+b) = (a(n+1)+b) + \cdots + (a(n+r)+b)$$

then we say that $an + b$ is an (a, b)-balancing number. The sequence of (a, b)-balancing numbers is denoted by $B_m^{(a,b)}$ $(m = 1, 2, \dots)$. We mention that since $B_m^{(1,0)} = B_m$ for all m, we obtain a generalization of balancing numbers.

We prove several effective finiteness and explicit results concerning polynomial values in the sequences $B_m^{(a,b)}$. That is, we consider the equation

$$B_m^{(a,b)} = f(x) \tag{9}$$

in integers m and x with $m \geq 1$, where f is some polynomial with rational coefficients, taking only integral values at integers. To prove our theorems, beside the above mentioned results of Ping-Zhi [39], Pintér and Rakaczki [42] and Rakaczki [44], we further need the modular method developed by Wiles [62] and others and a deep result of Bennett [5] concerning binomial Thue equations.

From this point on, when we refer to equation (9) we always assume that a and b are arbitrary, but fixed coprime integers such that $a > 0$ and $b \geq 0$. Our first result is the following.

Theorem 5 (Kovács, Liptai, Olajos, 2010). *Let $f(x)$ be a monic polynomial with integer coefficients, of degree ≥ 2. If a is odd, then for the solutions of* (9) *we have* $\max(m, |x|) < c_0(f, a, b)$*, where $c_0(f, a, b)$ is an effectively computable constant depending only on a, b and f.*

Our next result concerns the case where $f(x) = x^l$ with some $l \geq 2$. In this case solving equation (9) is equivalent to finding (a, b)-balancing numbers which are perfect powers.

Theorem 6 (Kovács, Liptai, Olajos, 2010). *If $a^2 - 4ab - 4b^2 = 1$, then there is no perfect power (a, b)-balancing number.*

Remark. One can easily check that the equation $a^2-4ab-4b^2 = 1$ has infinitely many solutions in integers a, b with $a > 0$, $b \geq 0$. Hence Theorem 6 completely solves the proposed problem for infinitely many pairs (a, b).

The following theorem takes up the problem where the polynomial $f(x)$ in (9) has some combinatorial meaning. More precisely, we investigate binomial coefficients $\binom{x}{k}$, products of consecutive integers $\Pi_k(x)$, power sums $S_k(x)$ and alternating power sums $R_k(x)$. Note that the coefficients of $\binom{x}{k}$, $S_k(x)$ and $R_k(x)$ are not integers. Further, in the case $f(x) = \Pi_k(x)$ Theorem 5 yields a finiteness result, however, only for the odd values of the parameter a.

For these combinatorial choices of $f(x)$ our next statement yields a bound for the solutions of (9), without any assumptions for the parameters a and b.

Theorem 7 (Kovács, Liptai, Olajos, 2010). *Let $k \geq 2$ and $f(x)$ be one of the polynomials $\binom{x}{k}$, $\Pi_k(x)$, $S_{k-1}(x)$, $R_k(x)$. Then the solutions of equation* (9) *satisfy* $\max(m, |x|) < c_1(a, b, k)$*, where $c_1(a, b, k)$ is an effectively computable constant depending only on a, b and k.*

In our final result, under the assumption $a^2 - 4ab - 4b^2 = 1$, we provide the complete solution of (9) with the above choices of $f(x)$, for some small values of the parameter k. More precisely, we consider all cases where (9) can be reduced to an equation of genus 1. Further, we also solve a particular case of (9) which can be reduced to the resolution of a genus 2 equation.

Theorem 8 (Kovács, Liptai, Olajos, 2010). *Suppose that* $a^2 - 4ab - 4b^2 = 1$. *Let* $f(x) \in \{\binom{x}{2}, \binom{x}{3}, \binom{x}{4}, \Pi_2(x), \Pi_3(x), \Pi_4(x), S_1(x), S_2(x), S_3(x), S_5(x)\}$. *Then the solutions* (m, x) *of equation* (9) *are those contained in Table 6. For the corresponding parameter values we have* $(a, b) = (1, 0)$ *in all cases.*

$f(x)$	Solutions (m, x) of (9)
$\binom{x}{2}$	$(1, -3), (1, 4)$
$\binom{x}{3}$	$(2, -5), (2, 7)$
$\binom{x}{4}$	$(2, -4), (2, 7)$
$\Pi_2(x)$	$(1, -3), (1, 2)$
$\Pi_3(x)$	$(1, -3), (1, 1)$
$\Pi_4(x)$	–
$S_1(x)$	$(1, -4), (1, 3)$
$S_2(x)$	$(3, -8), (3, 9), (5, -27), (5, 28)$
$S_3(x)$	–
$S_5(x)$	–

Table 6: Solutions of equation (9) with the particular polynomials

Remark. We considered some other related equations that lead to genus 2 equations. However, because of certain technical difficulties, we could not solve them by the Chabauty method. We checked that under the assumption $a^2 - 4ab - 4b^2 = 1$ equation (9) has no "small" solutions (i.e. solutions with $|x| \leq 10000$) in cases $f(x) \in \{\binom{x}{6}, \binom{x}{8}, \Pi_6(x), \Pi_8(x), S_7(x)\}$.

The result of the fourth chapter are published in [27].

Almost fifth powers in arithmetic progression

A classical theorem of Erdős and Selfridge [12] states that the product of consecutive positive integers is never a perfect power. A natural generalization is the Diophantine equation

$$x(x+d)\dots(x+(k-1)d) = by^n \tag{10}$$

in non-zero integers x, d, k, b, y, n with $\gcd(x, d) = 1$, $d \geq 1$, $k \geq 3$, $n \geq 2$ and $P(b) \leq k$. Here $P(u)$ stands for the largest prime divisor of a non-zero integer u, with the convention $P(\pm 1) = 1$.

This equation has a long history with an extremely rich literature. The complete solution of (10) in case of $d = 1$ is due to Saradha [45] (case $k \geq 4$) and Győry [16] (case $k < 4$).

In case $d > 1$ we concentrate only on results where all solutions of (10) have been determined when the number k of terms is fixed. By a conjecture of Erdős, equation (10) has no solutions in positive integers when $k > 3$ and $b = 1$. The conjecture of Erdős has recently been verified for certain values of k in a more general form; see the papers [17], [18], [6], [19]. Since now we focus on the case $n = 5$, we give only the best known result for this particular exponent. (Though the results mentioned are valid for any $n \geq 2$.) The following statement is a combination of results from [17] (case $k = 3$), [18] (cases $k = 4, 5$), [6] (cases $k = 6, 7$) and [19] (cases $8 \leq k \leq 34$).

Theorem A. *The only solutions to equation* (10) *with* $n = 5$, $3 \leq k \leq 34$ *and* $P(b) \leq P_k$, *with*

$$P_k = \begin{cases} 2, & \text{if } k = 3, 4, \\ 3, & \text{if } k = 5, \\ 5, & \text{if } k = 6, 7, \\ 7, & \text{if } 8 \leq k \leq 22, \\ \frac{k-1}{2}, & \text{if } 23 \leq k \leq 34 \end{cases}$$

are given by

$$(k, d) = (8, 1),\ x \in \{-10, -9, -8, 1, 2, 3\}; \quad (k, d) = (8, 2),\ x \in \{-9, -7, -5\};$$

$$(k, d) = (9, 1),\ x \in \{-10, -9, 1, 2\}; \quad (k, d) = (9, 2),\ x \in \{-9, -7\};$$

$$(k, d) = (10, 1),\ x \in \{-10, 1\}; \quad (k, d, x) = (10, 2, -9).$$

To explain why the case $n = 5$ in equation (10) is special, we need to give some insight into the method of solving (10) for fixed k, in the general case $n \geq 2$. One of the most important tools is the modular method, developed by Wiles [62]. However, the modular technique works effectively only for "large" exponents, typically for $n \geq 7$. Thus the "small" exponents $n = 2, 3, 5$ must be handled separately.

Further, the exponents $n = 2, 3$ has already been considered in separate papers. For $n = 2$ and positive x, equation (10) has been completely solved up to a few exceptional cases by Hirata-Kohno, Laishram, Shorey and Tijdeman [24] for $k \leq 100$, and in case of $b = 1$, even for $k \leq 109$. Their main tools were elliptic curves and quadratic residues. Later, the exceptional remaining cases have been handled by Tengely [55], by the help of the Chabauty method.

When $n = 3$, working mainly with cubic residues, however making use of elliptic curves and the Chabauty method as well, Hajdu, Tengely and Tijdeman [23] obtained all solutions to equation (10) with $k < 32$ such that $P(b) \leq k$ if $4 \leq k \leq 12$ and $P(b) < k$ if $k = 3$ or $k \geq 13$. Further, if $b = 1$ then they could solve (10) for $k < 39$.

The case $n = 5$ has not yet been closely investigated. In this case mainly classical methods were used, due to Dirichlet and Lebesgue (see e.g. [19]). Apparently, for $n = 5$ elliptic curves are not applicable. We show that in this case the Chabauty method (both the classical and the elliptic version) can be applied very efficiently. In our results we solve a large number of genus 2 equations by Chabauty method, and then build a kind of sieve system based upon them.

Our first theorem considerably extends Theorem A, in the most interesting case of $b = 1$ in equation (10). We call an arithmetic progression of the form $x, x + d, \ldots, x + (k - 1)d$ *primitive*, if $\gcd(x, d) = 1$.

Theorem 9 (Hajdu, Kovács, 2011). *The product of k consecutive non-zero terms in a primitive arithmetic progression with $3 \leq k \leq 54$ is never a fifth power.*

In fact Theorem 9 follows directly from the next result. To formulate it, we need to introduce a new concept. An arithmetic progression $x, x+d, \ldots, x+(k-1)d$ is called *trivial* if $d \leq 5$ and $|x+id| \leq 15$ for some $i = 0, 1, \ldots, k-1$. Further, a solution to equation (10) is also called *trivial*, if the terms $x, x + d, \ldots, x + (k-1)d$ on the left-hand side of (10) form a trivial arithmetic progression. This concept is needed because of the huge number of trivial solutions; on the other hand, such solutions of (10) can be listed easily for any fixed k.

Theorem 10 (Hajdu, Kovács, 2011). *Equation (10) with $n = 5$, $3 \leq k \leq 24$ and $P(b) \leq P_k$ has the only nontrivial solutions with*

$$(k, d) = (3, 7),\ x \in \{-16, -8, -6, 2\};$$

$$(k, d) = (4, 7),\ x \in \{-16, -15, -12, -9, -6, -5\};$$

$$(k, d) = (4, 11),\ x \in \{-27, -6\}; \quad (k, d) = (5, 7),\ x \in \{-16, -12\};$$

$$(k, d) = (5, 11),\ x \in \{-36, -32, -12, -8\};$$

$$(k,d) = (5,13),\ x \in \{-40,-27,-25,-12\};$$
$$(k,d) = (6,7),\ x \in \{-32,-25,-10,-3\};$$
$$(k,d) = (6,9),\ x \in \{-25,-20\}; \quad (k,d) = (6,13),\ x \in \{-40,-25\};$$
$$(k,d) = (7,7),\ x \in \{-39,-32,-27,-22,-20,-15,-10,-3\};$$
$$(k,d) = (8,7),\ x \in \{-39,-27,-22,-10\};$$
$$(k,d) = (9,7),\ x \in \{-39,-34,-32,-24,-22,-17\};$$
$$(k,d) = (10,7),\ x \in \{-39,-24\},$$

where the values of P_k *are given by*

k	3	4	5	6	$7,8$
P_k	3	5	7	11	13

k	$9,10,11,12$	$13,14,15$	$16,17$	$18,19,20,21,22,23$	24
P_k	17	19	23	29	31

Observe that $P_k > k$ for $k \geq 4$ in Theorem 10, which is a new feature about equation (10).

As a simple and immediate corollary of Theorem 10 we get the following statement, concerning the case $P(b) \leq k$. We mention that already this result yields considerable improvement of Theorem A, in particular with respect to the bound for $P(b)$.

Corollary 1. *For* $n = 5$ *and* $3 \leq k \leq 36$ *all nontrivial solutions of equation* (10) *with* $P(b) \leq k$ *are given by*

$$(k,d) = (3,7),\ x \in \{-16,-8,-6,2\}; \quad (k,d) = (5,7),\ x \in \{-16,-12\}.$$

Our last theorem provides the key to the proof of Theorem 10 in case of $k \geq 4$. It has been proved by a kind of sieving procedure, based upon genus 2 equations and the Chabauty method.

Note that having an increasing arithmetic progression $z_1 < \ldots < z_l$, by symmetry we obtain that $-z_l < \ldots < -z_1$ is also an increasing arithmetic progression. Hence dealing with such arithmetic progressions it is sufficient to give only one progression from each symmetric pair.

Theorem 11 (Hajdu, Kovács, 2011). *Let $4 \leq t \leq 8$ and $z_0 < z_1 < \ldots < z_{t-1}$ be a non-trivial primitive arithmetic progression. Suppose that*

$$z_0 = b_0 x_0^5, z_{i_1} = b_{i_1} x_{i_1}^5, z_{i_2} = b_{i_2} x_{i_2}^5, z_{t-1} = b_{t-1} x_{t-1}^5,$$

with some indices $0 < i_1 < i_2 < t-1$ such that $P(b_0 b_{i_1} b_{i_2} b_{t-1}) \leq 5$. Then the initial term z_0 and common difference $z_1 - z_0$ of the arithmetic progression $z_0, \ldots, z_{t-1}$ for the separate values of $t = 4, \ldots, 8$ up to symmetry is one of
$t = 4 : (-9, 7), (-6, 7), (-6, 11), (-5, 7);$

$t = 5 : (-32, 17), (-25, 13), (-20, 11), (-16, 13), (-12, 7), (-12, 11),$
$(-12, 13), (-10, 7), (-8, 7), (-8, 11), (-4, 7), (-3, 7), (-1, 7), (2, 7),$
$(4, 7), (4, 23);$

$t = 6 : (-125, 61), (-81, 17), (-30, 31), (-25, 8), (-25, 11), (-25, 13),$
$(-25, 17), (-20, 9), (-20, 13), (-20, 19), (-20, 29), (-15, 7), (-15, 11),$
$(-15, 13), (-15, 23), (-10, 7), (-10, 11), (-8, 7), (-5, 7), (-3, 7),$
$(-1, 11), (-1, 13), (1, 7), (5, 11);$

$t = 7 : (-54, 19), (-54, 29), (-48, 23), (-30, 11), (-30, 13), (-27, 17),$
$(-24, 13), (-18, 7), (-18, 11), (-18, 13), (-18, 19), (-16, 11), (-15, 7),$
$(-12, 7), (-12, 11), (-10, 7), (-6, 7), (-6, 11), (-4, 9), (-3, 13), (-2, 7),$
$(-2, 17), (2, 13), (3, 7), (6, 7), (8, 7), (9, 11), (18, 7);$

$t = 8 : (-405, 131), (-125, 41), (-100, 49), (-32, 11), (-27, 11),$
$(-27, 13), (-25, 19), (-24, 7), (-16, 13), (-10, 13), (-9, 7), (-5, 11),$
$(-4, 7), (-2, 11), (-1, 13), (-1, 7), (1, 7), (3, 11), (4, 11), (5, 7), (6, 17).$

The results of the fifth chapter are published in [21].

Bevezetés

Az értekezés öt fejezetből áll, melyekben kombinatorikus háttérrel rendelkező diofantikus egyenletekkel, illetve diofantikus problémákkal kapcsolatos új eredmények szerepelnek. A disszertáció eredményeit a [20], [25], [26], [27] és [21] dolgozatok tartalmazzák. Mielőtt az egyes fejezetek legfontosabb eredményeit bemutatjuk, rövid áttekintést adunk az általunk vizsgált témákról.

Az **első fejezet**ben a bizonyításaink során használt egyik legfontosabb módszert, az úgynevezett $\mathcal{E}llog$ módszert és annak egy tőlünk származó javítását [20] mutatjuk be. 1994-ben egymástól függetlenül Gebel, Pethő, Zimmer [14] és Stroeker, Tzanakis [47] kidolgozott egy általános módszert elliptikus görbék egész pontjainak meghatározására. Az úgynevezett $\mathcal{E}llog$ módszer képes 1 génuszú görbék egész pontjainak meghatározására, legalábbis elvben (lásd [49]-et és az ottani hivatkozásokat). Stroeker és Tzanakis [48]-ben kidolgoztak egy algoritmust, mely segítségével meghatározható a görbe egy olyan Mordell-Weil bázisa, mellyel dolgozva a görbe egész pontjaira kapott korlát a lehető legjobb. Az első fejezetben megmutatjuk, hogy ha több bázisban párhuzamosan dolgozunk, és kombináljuk az így adódó információkat, akkor a „legjobb” végső korlát is tovább javítható. Az első fejezet eredményeit a [20] publikáció tartalmazza.

A **második fejezet**ben az $\mathcal{E}llog$ módszert használva számos kombinatorikus hátterű diofantikus egyenletet oldunk meg. Az egyik első ilyen jellegű eredménynek Mordell [35] egy tétele tekinthető, mely az $y(y+1) = x(x+1)(x+2)$ egyenlet összes egész megoldását megadja. A későbbiekben számos elszórt eredmény született, amely a tekintett egyenlet összes egész megoldását leírja, lásd például [1], [2], [9], [31], [43], [47], [57], [58], [61] és az ottani hivatkozásokat. Hajdu és Pintér [22] szisztematikusan összegyűjtötte azokat a kombinatorikus egyenleteket, melyek Mordell-típusú (azaz $f(x) = y^2$, $\deg f = 3$ alakú) elliptikus egyenletre redukálhatóak, és a korábban nem vizsgált egyenleteket megoldotta. A második fejezetben szisztematikusan összegyűjtjük és megoldjuk mindazon kombinatorikus hátterű egyenletet, melyek 1 génuszú egyenletekre redukálhatóak. A második fejezet eredményeit a [25] dolgozat tartalmazza.

A **harmadik fejezet**ben másodrendű lineáris rekurzív sorozatok polinomértékeivel kapcsolatos effektív és explicit eredményeinket mutatjuk be. Először egy effektív végességi tételt bizonyítunk az $U_n = p(x)$ egyenlet egész megoldásaira vonatkozóan. Itt U_n egy nemdegenerált másodrendű lineáris rekurzív sorozat, $p(x)$ pedig egy legalább negyedfokú polinom, mely binomiális együtthatót, egymást követő számok szorzatát, hatványösszeget, vagy alternáló hatványösszeget jelöl. A bizonyítás a Baker-módszeren alapszik. Ezután egy hatékony (1 génuszú görbéken alapuló) algoritmust adunk, mely segítségével meghatározhatók másodrendű lineáris rekurzív sorozatokban található különböző negyedfokú polinomok értékei. Végül, részben ennek az algoritmusnak a felhasználásával kis paraméterértékek esetén meghatározzuk a Fibonacci, Lucas, Pell és Asszociált Pell sorozatban található fent említett kombinatorikus számokat. A harmadik fejezet eredményeit a [26] cikk tartalmazza.

Balansz számokkal és azok általánosításaival már többen, több szempontból foglalkoztak. A **negyedik fejezet**ben kiterjesztjük a balansz számok fogalmát számtani sorozatokra és vizsgálataink során több effektív végességi és explicit eredményt bizonyítunk velük kapcsolatban. Bizonyításaink során szükségünk van többek között a Baker módszerre, a moduláris módszerre, a Chabauty módszerre és az elliptikus görbék elméletére. A negyedik fejezet eredményeit a [27] cikk tartalmazza.

Az **ötödik fejezet**ben bebizonyítjuk, hogy egy primitív számtani sorozat k darab egymást követő elemének szorzata $3 \leq k \leq 54$ esetén nem lehet teljes ötödik hatvány. Ez a probléma szorosan kapcsolódik egy olyan klasszikus kérdéskörhöz, mellyel sok más matematikus mellett például Erdős, Selfridge, Győry, Saradha, Shorey, Tijdeman is foglalkozott. Emellett megadunk egy pontosabb állítást abban az esetben, mikor a szorzat egy „majdnem" teljes ötödik hatvány. Tételeink Győry, Hajdu és Pintér [19] eredményeinek ötödik hatványokra vonatkozó esetének lényeges továbbvitelét és kiterjesztését jelentik. Az eddigi eredmények bizonyításában klasszikus (főleg algebrai számelméleti) módszereket használtak fel. A mi bizonyításaink egy új eszközön alapulnak: 2 génuszú egyenleteket és a Chabauty módszert (mind a klasszikus, mind az elliptikus verzióját) alkalmazzuk. Az ötödik fejezet eredményeit a [21] dolgozat tartalmazza.

Az $\mathcal{E}llog$ módszer és annak egy javítása

Elliptikus egyenletek egész megoldásainak meghatározásával először Mordell foglalkozott. Siegel [46] egy klasszikus eredménye alapján ismert, hogy (bizonyos triviális feltételek mellett) egy ilyen egyenlet csak véges sok egész megoldással rendelkezik. Később Baker [3] az egyenlet paraméterei segítségével a megoldásokra effektív felső korlátot adott.

Gebel, Pethő, Zimmer [14] és Stroeker, Tzanakis [47] 1994-ben egymástól függetlenül kidolgozott egy általános módszert elliptikus görbék egész pontjainak meghatározására, mely a görbék algebrai és geometriai tulajdonságait használja. Az úgynevezett $\mathcal{E}llog$ módszer képes 1 génuszú görbék egész pontjainak meghatározására, legalábbis elvben (lásd [49] és az ottani hivatkozások). A módszert röviden összefoglalva azt mondhatjuk, hogy először az adott görbe valamely Mordell-Weil bázisában felírt egész pontjai együtthatóinak maximumára, N-re adunk egy felső korlátot. Ezután ezt a korlátot redukáljuk olyan méretűvé, hogy az lehetővé tegye a megoldások tényleges megkeresését. (Valójában a módszer ennél lényegesen általánosabb és bonyolultabb.) Az N-re kapott N_v végső korlát kiszámításához az LLL-algoritmust használjuk.

Először tömören összefoglaljuk az $\mathcal{E}llog$ módszer főbb lépéseit, melynek során [49] tárgyalásmódját követjük.

Legyen $f \in \mathbb{Z}[u, v]$ és definiáljuk a C görbét az alábbi módon:

$$C: \quad f(u, v) = 0.$$

Tegyük fel, hogy C 1 génuszú. Ekkor C biracionálisan ekvivalens (egy számtest felett) valamely

$$E: \quad y^2 = x^3 + Ax + B$$

alakú elliptikus görbével, ahol $A, B \in \mathbb{Q}$. Legyen r az E görbe rangja, és $P_1, \ldots, P_r$ pedig egy Mordell-Weil bázisa. Ekkor az E görbe bármely P racionális pontja felírható

$$P = P_0 + n_1 P_1 + \ldots + n_r P_r \tag{11}$$

alakban, ahol P_0 egy torziópont és $n_i \in \mathbb{Z}$ $(i = 1, \ldots, r)$.

Ekkor egyrészt David [11] elliptikus logaritmusokat tartalmazó lineáris formákra vonatkozó eredményei alapján egy

$$|L(P)| \geq \exp(-c_1(\log N + c_2)(\log \log N + c_3)^{r+3}) \tag{12}$$

alakú összefüggést kapunk. Itt $L(P)$ egy pontosan meghatározott, elliptikus logaritmusokat tartalmazó lineáris forma (lényegében a P pont elliptikus logaritmusa), $N = \max\limits_{1 \leq i \leq r} |n_i|$ és c_1, c_2, c_3 csak a C és E görbéktől függő konstansok. Másrészt, ha feltesszük, hogy P egy, a C görbén lévő egész pont képe az E görbén, akkor egy standard levezetés segítségével (mely az E görbe pontjaihoz tartozó különböző magasságokra vonatkozó becsléseket tartalmaz) $|L(P)|$-re egy

$$|L(P)| \leq c_4 \exp(-c_5 \lambda N^2) \tag{13}$$

alakú felső korláthoz jutunk. Itt c_4 és c_5 csak a C és E görbéktől függő konstansok, λ pedig a (11)-ben szereplő $P_1, \ldots, P_r$ bázishoz tartozó magasságmátrix legkisebb pozitív sajátértéke, vagyis függ a bázis megválasztásától.

A (12) és (13) becsléseket összehasonlítva N-re egy kezdeti N_0 korlát adódik. Ez a kezdeti korlát Stroeker és Tzanakis [48] egy heurisztikus indoklása alapján

$10^{(5r^2+5r+28)/2}$ nagyságrendű lesz, vagyis túl nagy ahhoz, hogy segítségével a kiinduló egyenlet egész megoldásait meghatározzuk. A korlát azonban az LLL-algoritmuson alapuló eljárás segítségével redukálható (lásd például [56]). Tekintsük ehhez a (13) és az $N < N_0$ egyenlőtlenségeket. Ezután [56] 5. fejezetének megfelelő tételét alkalmazva N-re egy

$$N < \frac{c_6}{\sqrt{c_5 \lambda}}$$

alakú új felső korlátot kapunk, ahol c_6 egy explicit konstans, mely csak az E görbe paramétereitől és egy bizonyos rács LLL-redukált bázisának legrövidebb vektorának hosszától függ. Látható, hogy ez az új korlát lineáris $\lambda^{-1/2}$-ben, ami ennek a paraméternek a kiemelkedő szerepét mutatja. Stroeker és Tzanakis [48] ezt a jelenséget több példán keresztül illusztrálták. Összefoglalva a [48]-beli eredményeket, a legjobb N_v végső korlát eléréséhez (11)-ben az E egy ST-bázisát (azaz olyan bázisát, melyhez tartozó λ érték a lehető legnagyobb) kell használni. Stroeker és Tzanakis [48] továbbá ki is dolgoztak egy algoritmust, mely segítségével meghatározható egy adott görbe egy ST-bázisa.

Hajduval [20]-ban megmutattuk, hogy egy ST-bázis használata során adódó „legjobb" végső korlát is tovább javítható, ha párhuzamosan dolgozunk több bázisban, és kombináljuk az így adódó információkat. Amint látni fogjuk, az extra információk begyűjtése igen kis időráfordítást igényel. Megemlítjük, hogy az új módszer elsősorban „nagy" rangú görbék esetén jelent lényeges előrelépést, mivel a tartomány, ahol a kis megoldásokat kell keresnünk, $(2N_v + 1)^r$ méretű.

Először bemutatjuk, hogyan dolgozhatunk több bázisban párhuzamosan. A módszer működésének illusztrálásához elegendő két bázist tekintenünk. Tegyük fel, hogy $B_1 = (P_1, \ldots, P_r)$ az E görbe egy Mordell-Weil bázisa, és legyen S egy $r \times r$ típusú unimoduláris mátrix. Legyen $B_2 = (Q_1, \ldots, Q_r)$ az E görbe azon bázisa, melyet a B_1-ből az S, mint bázistranszformációs mátrix segítségével kapunk. Legyen P az E görbe egy racionális pontja, mely a (11) alakban írható fel, és tegyük fel, hogy P előállítható a

$$P = Q_0 + m_1 Q_1 + \ldots + m_r Q_r \tag{14}$$

módon is, valamely Q_0 torzióponttal és $m_1, \ldots, m_r$ egészekkel. Legyen $M = \max\limits_{1 \le i \le r} |m_i|$. Elemi lineáris algebrai összefüggésekből adódik, hogy

$$S^{-1} \begin{pmatrix} n_1 \\ \vdots \\ n_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_1 \\ \vdots \\ m_r \end{pmatrix}. \tag{15}$$

Ebből az $M \leq sN$ egyenlőtlenséget kapjuk, ahol $s = ||S^{-1}||$ az S^{-1} mátrix sornormája. (Egy $A = (a_{ij})_{1\leq j\leq l, 1\leq i\leq k}$ $k \times l$ típusú valós elemű mátrix sornormája $||A|| = \max\limits_{1\leq i\leq k} \sum\limits_{j=1}^{l} |a_{ij}|$.) Így nem szükséges az $\mathcal{E}llog$ módszert mindkét bázis esetén végigszámolnunk, elegendő ezt mondjuk B_1 esetén megtennünk. Tegyük fel, hogy a B_1 bázis egy ST-bázis, melyben az $\mathcal{E}llog$ módszert és a redukciót alkalmazva az $N < N_v$ végső korlátot kaptuk. Ekkor a B_2 bázisra $M \leq sN$ alapján automatikusan adódik az $M \leq M_0 := sN_v$ kezdeti korlát. Mivel s tipikusan „kicsi" (általában legeljebb 10 körüli érték), így M_0 nem lesz túl nagy, és természetesen tovább redukálható. Fontos, hogy az M_v végső korlátot nagyon gyorsan és könnyen ki tudjuk számolni. Ennek oka, hogy a redukció csak abban az esetben bonyolult és időigényes, amikor a kiinduló korlát óriási, mert ekkor több száz tizedesjegy pontossággal kell számolni. Az N_v és M_v végső korlátok szimultán felső korlátot adnak a P pont két különböző bázisbeli együtthatóira. Összevetve ezt a két korlátot a (15) egyenlőtlenséggel, a megoldásokat tartalmazó tartomány mérete csökkenthető. A módszer hatékonysága a görbe rangjával arányosan nő.

1. stratégia. A B_1 bázishoz tartozó $N_v^{(1)}$ korlátot komponensenként próbáljuk meg csökkenteni. Ehhez válasszunk különböző i, j indexeket, ahol $1 \leq i, j \leq r$, és egy t pozitív egész számot. Állítsunk elő két új bázist, B_2-t és B_3-at úgy, hogy a B_1 bázis P_i pontját cseréljük ki a $P_i + tP_j$, illetve a $P_i - tP_j$ pontokra, az összes többi bázisbeli pontot érintetlenül hagyva. A B_2 és B_3 bázisokban a redukciós eljárás a viszonylag kicsi $(t+1)N_v^{(1)}$ korláttal indul, és az $N_v^{(2)}$, valamint $N_v^{(3)}$ végső korlátokat eredményezi. Ekkor egyszerű számolással

$$|n_i| \leq \frac{N_v^{(2)} + N_v^{(3)}}{2t}$$

adódik. Amennyiben a jobb oldalon álló kifejezés kisebb, mint $N_v^{(1)}$, úgy sikerült az $|n_i|$-re vonatkozó korlátot csökkentenünk. A stratégia működéséhez válasszuk minden rögzített i indexhez azt a j indexet, melyre a $t = 1$ esetén adódó B_2 és B_3 bázisokhoz tartozó λ értékek összege maximális. Ezután az egyszerűség kedvéért (valamint azért, mert az időfelhasználást próbáljuk alacsonyan tartani), a számolások során rögzítsük a $t = 10$ értéket. Az eljárást iterálhatjuk, mely egyes esetekben további javuláshoz vezethet. Továbbá a $t = 10$ választást az alábbi érvelés is alátámasztja. Ha λ_t jelöli a t értékhez tartozó λ értéket (akár a B_2, akár a B_3 bázisban), akkor $\frac{t+1}{t}\sqrt{\frac{\lambda_t}{\lambda_{t+1}}}$ közel van 1-hez, amennyiben t „nagy" . A $t = 10$ választás elég nagynak bizonyul ahhoz, hogy a B_2 és B_3

bázisokhoz tartozó λ értékek „közel" legyenek egymáshoz. Természetesen ennek a módszernek többféle variánsa kidolgozható.

2. stratégia. Stroeker és Tzanakis [48] algoritmusával meghatározzuk a „legjobb" tíz B_i $(i = 1, \dots, 10)$ Mordell-Weil bázist, azaz azokat a bázisokat melyekhez tartozó λ sajátértékek a legnagyobbak. (Megjegyezzük, hogy az algoritmus megadja a bázistranszformációs mátrixokat is a B_1 bázisra vonatkozóan. A tíz legjobb bázis kiszámításához nincs sokkal több időre szükség, mint ha csak a legjobb B_1 bázist akarnánk meghatározni.) Ezután kiszámítjuk az $N_0^{(j)}$ $(j = 1, \dots, 10)$ kezdeti korlátokat. (Ahogy említettük, csak az $N_0^{(1)}$ korlát kiszámítása időigényes, viszont ezt akkor is ki kell számolnunk, ha csak a B_1 bázissal dolgozunk.) Amennyiben már adottak a végső korlátok, a bázistranszformációs mátrixok segítségével a P pont B_1 bázisbeli együtthatóira vonatkozó számos plusz információhoz jutunk. Valójában egy egyenlőtlenségrendszert kapunk, amely egy konvex halmazt határoz meg. Az ebben található egész pontok száma lényegesen kevesebb, mint az $|n_i| \le N_v^{(1)}$ $(i = 1, \dots, r)$ feltételek által meghatározott konvex halmazban.

Végül megemlítjük, hogy általában a 2. stratégia nagyobb mértékű javulást eredményez, mint az 1. stratégia. Az első fejezet eredményeit a [20] dolgozat tartalmazza.

1 génuszú kombinatorikus diofantikus egyenletek

A kombinatorikus hátterű, egymást követő számok szorzataival, hatványösszegekkel és binomiális együtthatókkal kapcsolatos diofantikus egyenletek irodalma rendkívül gazdag. Az egyik első olyan eredmény, mely egy ilyen típusú egyenlet összes egész megoldását leírja Mordell [35] egy tétele, mely az $y(y+1) = x(x+1)(x+2)$ egyenlet megoldásait adja meg. A későbbiekben számos olyan elszórt eredmény született, amely említett típusú egyenletek összes megoldását meghatározza, lásd például [1], [2], [9], [31], [43], [47], [57], [58], [61] és az ottani hivatkozásokat. Hajdu és Pintér [22] szisztematikusan összegyűjtötte azokat a kombinatorikus egyenleteket, melyek Mordell-típusú (azaz $f(x) = y^2$, $\deg f = 3$ alakú) elliptikus egyenletre redukálhatóak, és a korábban nem vizsgált egyenleteket megoldotta. A második fejezetben szisztematikusan összegyűjtjük és megoldjuk mindazon fenti típusú egyenletet, melyek 1 génuszú egyenletekre redukálhatóak. Megemlítjük, hogy az irodalomban ebben az esetben is számos elszórt eredmény ismert (lásd [40], [41], [43], [50], [51] és [60]). Az egyenleteink megoldása az $\mathcal{E}llog$ módszer és a Magma programcsomag segítségével történik.

Eredményeink megfogalmazásához néhány jelölés bevezetésére van szükség. Bármely $n, x \in \mathbb{N}$ esetén legyen

$$S_n(x) = 1^n + 2^n + \ldots + (x-1)^n,$$
$$\Pi_n(x) = x(x+1)\cdots(x+n-1).$$

A korábban megoldott, elliptikus egyenletekre redukálható, $\Pi_n(x)$-et, $S_n(x)$-et illetve $\binom{x}{n}$-et tartalmazó diofantikus egyenletek a következők:

$\Pi_2(k) = \Pi_3(l)$ (Mordell [35]),
$\binom{k}{2} = \binom{l}{3}$ (Avanesov [1]),
$\Pi_2(k) = \Pi_6(l)$ (MacLeod és Barrodale [31]),
$S_2(k) = \binom{l}{2}$ (Avanesov [2] és Uchiyama [58]),
$\Pi_3(k) = \Pi_4(l)$, $S_2(k) = \binom{l}{4}$ (Boyd és Kisilevsky [9]),
$\binom{k}{2} = \Pi_3(l)$ (Tzanakis és de Weger [57]),
$\binom{k}{2} = \Pi_4(l)$ (Pintér [40], lásd még [15], p. 225.),
$\binom{k}{4} = \binom{l}{2}$ (Pintér [41] és de Weger [60]),
$\binom{k}{3} = \binom{l}{4}$ (de Weger [61]),
$\binom{k}{4} = \Pi_2(l), \Pi_3(l)$ (Pintér és de Weger [43]),
$\binom{k}{m} = \Pi_n(l)$, ahol $(m,n) = (3,6;3,6)$ (Stroeker és de Weger [50]),
$\binom{k}{m} = \binom{l}{n}$, ahol $(m,n) = (2;3,4,6,8),(3;4,6),(4;6,8)$ (Stroeker és de Weger [51]),
$S_5(k) = \binom{l}{2}$, $S_5(k) = \binom{l}{4}$, $S_m(k) = \Pi_n(l)$, ahol $(m,n) = (2,5;2,4)$, $\binom{k}{m} = \Pi_n(l)$, ahol $(m,n) = (2,4;6),(3,6;2,4)$, $\Pi_4(k) = \Pi_6(l)$ (Hajdu és Pintér [22]).

Megemlítjük, hogy S_n x-nek $(n+1)$-ed, míg Π_n n-ed fokú polinomja. A teljesség kedvéért a fellépő egyenletek összes egész megoldását megadjuk, bár a negatív értékek nem rendelkeznek kombinatorikus jelentéssel. Eredményeinket a következő tételben foglaljuk össze. A tekintett egyenleteket három csoportra osztjuk megoldásuk módszere alapján. A táblázatokban szereplő $(k,l) = (a_1,\ldots,a_i;b_1,\ldots,b_j)$ jelölés $(k,l) \in \{a_1,\ldots,a_i\} \times \{b_1,\ldots,b_j\}$ rövidítése.

1. Tétel. *[Kovács, 2008] A 7-9. táblázat első oszlopában található egyenletek összes egész megoldásai rendre a táblázatok második oszlopában megadott értékek.*

A második fejezet eredményeit a [25] dolgozat tartalmazza.

Egyenlet	Megoldás
$S_3(k) = \Pi_2(l)$	$(k, l) = (-1, 0; -1, 0)$
$S_3(k) = \Pi_4(l)$	$(k, l) = (-1, 0; -3, -2, -1, 0)$
$S_3(k) = \Pi_8(l)$	$(k, l) = (-1, 0; -7, -6, -5, -4, -3, -2, -1, 0)$
$S_5(k) = \binom{l}{3}$	$(k, l) = (-1, 0; 0, 1, 2), (-2, 1; 3)$
$S_7(k) = \binom{l}{2}$	$(k, l) = (-1, 0; 0, 1), (-2, 1; -1, 2)$
$P_2(k) = \Pi_4(l)$	$(k, l) = (-1, 0; -3, -2, -1, 0)$
$P_2(k) = \Pi_8(l)$	$(k, l) = (-1, 0; -7, -6, -5, -4, -3, -2, -1, 0)$
$P_3(k) = \Pi_6(l)$	$(k, l) = (-2, -1, 0; -5, -4, -3, -2, -1, 0), (8; -6, 1)$
$P_4(k) = \Pi_8(l)$	$(k, l) = (-3, -2, -1, 0; -7, -6, -5, -4, -3, -2, -1, 0)$

7. táblázat. Runge módszerrel megoldható egyenletek

Egyenlet	Megoldás
$S_3(k) = \binom{l}{3}$	$(k, l) = (-1, 0; 0, 1, 2), (-2, 1; 3)$
$S_3(k) = \binom{l}{6}$	$(k, l) = (-1, 0; 0, 1, 2, 3, 4, 5), (-2, 1; -1, 6)$
$S_3(k) = \Pi_3(l)$	$(k, l) = (-1, 0; -2, -1, 0)$
$S_3(k) = \Pi_6(l)$	$(k, l) = (-1, 0; -5, -4, -3, -2, -2, -1, 0)$
$S_5(k) = \binom{l}{2}$	$(k, l) = (-1, 0; 0, 1), (-2, 1; -1, 2), (-4, 3; -23, 24),$ $(-9, 8; -351, 352)$
$S_5(k) = \binom{l}{4}$	$(k, l) = (-1, 0; 0, 1, 2, 3), (-2, 1; -1, 4)$
$S_5(k) = \Pi_2(l)$	$(k, l) = (-1, 0; -1, 0)$
$S_5(k) = \Pi_4(l)$	$(k, l) = (-1, 0; -3, -2, -1, 0)$

8. táblázat. Mordell-típusú egyenletre redukálható egyenletek

Egyenlet	Megoldás
$S_1(k) = \binom{l}{4}$	$(k,l) = (-21,20;-7,10), (-6,5;-3,6),$ $(-2,1;-1,4), (-1,0;0,1,2,3)$
$S_1(k) = \binom{l}{8}$	$(k,l) = (-1,0;0,1,2,3,4,5,6,7), (-2,1;-1,8),$ $(-10,9;-3,10;), (-78,77;-7,14), (-221,220;-10,17)$
$S_1(k) = \Pi_4(l)$	$(k,l) = (-16,15;-5,2), (-1,0;-3,-2,-1,0))$
$S_1(k) = \Pi_8(l)$	$(k,l) = (-1,0;-7,-6,-5,-4,-3,-2,-1,0)$
$S_2(k) = \binom{l}{3}$	$(k,l) = (-1,0;0,1,2), (-2,-1), (1,3)$
$S_2(k) = \binom{l}{6}$	$(k,l) = (-1,0;0,1,2,3,4,5), (1;-1,6)$
$S_2(k) = \Pi_3(l)$	$(k,l) = (-1,0;-2,-1,0)$
$S_2(k) = \Pi_6(l)$	$(k,l) = (-1,0;-5,-4,-3,-2,-1,0)$
$S_3(k) = \binom{l}{2}$	$(k,l) = (-4,3;-8,9), (-2,1;-1,2), (-1,0;0,1)$
$S_3(k) = \binom{l}{4}$	$(k,l) = (-2,1;-1,4), (-1,0;0,1,2,3)$
$S_3(k) = \binom{l}{8}$	$(k,l) = (-1,0;0,1,2,3,4,5,6,7), (-3,2;-2,9),$ $(-2,1;-1,8)$
$S_5(k) = \binom{l}{6}$	$(k,l) = (-1,0;0,1,2,3,4,5), (-2,1;-1,6)$
$S_5(k) = \Pi_3(l)$	$(k,l) = (-1,0;-2,-1,0)$
$S_5(k) = \Pi_6(l)$	$(k,l) = (-1,0;-5,-4,-3,-2,-1,0)$
$S_7(k) = \binom{l}{4}$	$(k,l) = (-2,1;-1,4), (-1,0;0,1,2,3)$
$S_7(k) = \Pi_2(l)$	$(k,l) = (-1,0;-1,0)$
$S_7(k) = \Pi_4(l)$	$(k,l) = (-1,0;-3,-2,-1,0)$
$\binom{k}{2} = \Pi_8(l)$	$(k,l) = (0,1;-7,-6,-5,-4,-3,-2,-1,0)$
$\binom{k}{4} = \Pi_4(l)$	$(k,l) = (0,1,2,3;-3,-2,-1,0)$
$\binom{k}{4} = \Pi_8(l)$	$(k,l) = (0,1,2,3;-7,-6,-5,-4,-3,-2,-1,0)$
$\binom{k}{8} = \Pi_2(l)$	$(k,l) = (0,1,2,3,4,5,6,7;-1,0)$
$\binom{k}{8} = \Pi_4(l)$	$(k,l) = (0,1,2,3,4,5,6,7;-3,-2,-1,0)$

9. táblázat. 1 génuszú egyenletre redukálható egyenletek

Kombinatorikus számok rekurzív sorozatokban

Tételeink megfogalmazásához szükségünk van néhány jelölésre és definícióra.

Legyen $U = \{U_n\}_{n=0}^{\infty}$ egy másodrendű lineáris rekurzív sorozat, melyet az U_0, U_1 kezdőértékek és az $U_n = AU_{n-1} + BU_{n-2}$ $(n \geq 2)$ rekurzió definiál. Itt A és B nemnulla egész számok. Jelölje α és β az U sorozat $x^2 - Ax - B$ karakterisztikus polinomjának gyökeit. Legyen továbbá $D = A^2 + 4B$ az U sorozat diszkriminánsa. Vezessük be a következő jelöléseket:

$$a_u = U_1 - \beta U_0, \quad b_u = U_1 - \alpha U_0, \quad C = a_u b_u = U_1^2 - AU_0U_1 - BU_0^2.$$

Az U sorozatot nemdegeneráltnak nevezzük, ha $C \neq 0$ és α/β nem egységgyök. Ismert, hogy ha U nemdegenerált, akkor $U_n = \frac{a_u\alpha^n - b_u\beta^n}{\alpha-\beta}$ teljesül $n = 0, 1, \ldots$ esetén.

A továbbiakban feltesszük, hogy $B = \pm 1$ teljesül és U nemdegenerált. Legyen $V = \{V_n\}_{n=0}^{\infty}$ az a másodrendű lineáris rekurzív sorozat, amelyre $V_0 = 2U_1 - AU_0$, $V_1 = AU_1 + 2BU_0$ és V teljesíti ugyanazt a rekurziót, mint U. A V sorozatot az U asszociált sorozatának nevezzük. Ekkor minden $n = 0, 1, \ldots$ esetén

$$V_n^2 - DU_n^2 = 4C(-B)^n \tag{16}$$

teljesül. Vegyük észre, hogy $B = \pm 1$ alapján $(-B)^n = \pm 1$. A továbbiakban jelölje F_n, L_n, P_n és Q_n, a Fibonacci, Lucas, Pell és Asszociált Pell sorozat n-dik tagját. Ezen sorozatok definíciója a következő:

$$\begin{array}{llll}
F_0 = 0, & F_1 = 1, & F_n = F_{n-1} + F_{n-2} & (n \geq 2), \\
L_0 = 2, & L_1 = 1, & L_n = L_{n-1} + L_{n-2} & (n \geq 2), \\
P_0 = 0, & P_1 = 1, & P_n = 2P_{n-1} + P_{n-2} & (n \geq 2), \\
Q_0 = 1, & Q_1 = 1, & Q_n = 2Q_{n-1} + Q_{n-2} & (n \geq 2).
\end{array}$$

Tételeinkben többféle kombinatorikus polinommal foglalkozunk, ezek a binomiális együtthatók, hatványösszegek, alternáló hatványösszegek és egymást követő egészek szorzatai. A korábbiakban az alternáló hatványösszegek kivételével a többit már definiáltuk, ez pedig az alábbi módon értelmezhető. Bármely $k, x \in \mathbb{N}$ esetén legyen

$$R_k(x) = -1^k + 2^k - \ldots + (-1)^{x-1}(x-1)^k.$$

Megemlítjük, hogy R_k az x-nek k-ad fokú polinomja.

Legyen $U = \{U_n\}_{n=0}^{\infty}$ a korábbi feltételeknek eleget tevő sorozat és $B = \pm 1$. A továbbiakban az

$$U_n = p(x) \tag{17}$$

egyenletet tekintjük, ahol n, x egészek és $n \geq 0$. A teljesség kedvéért a fellépő polinomegyenletek összes egész x megoldását meghatározzuk, bár a negatív értékek nem rendelkeznek kombinatorikus jelentéssel.

Első tételünk, mely egy effektív végességi állítás, általános U esetén is érvényes.

2. Tétel. *[Kovács, 2009] Legyen $k \geq 2$ és $p(x)$ az $S_{k-1}(x), R_k(x), \Pi_k(x), \binom{x}{k}$ polinomok egyike. Ha $k = 2$ vagy $k = 3$, $p(x) \neq R_3(x)$, akkor tegyük fel továbbá, hogy $B = 1$. Ekkor a fenti jelölésekkel a (17) egyenlet egész megoldásaira $\max(n, |x|) < c_0(U, k)$ teljesül, ahol $c_0(U, k)$ egy csak U-tól és k-tól függő effektív konstans.*

A következő állítás azt mutatja, hogy a tételben szereplő feltételek szükségesek.

1. Állítás. *[Kovács, 2009] A 10. táblázat soraiban szereplő U_0, U_1, A illetve $B = -1$ paraméterek segítségével képzett U sorozattal a (17) egyenlet végtelen sok n, x egész megoldással rendelkezik, ahol $p(x)$ a táblázat utolsó oszlopában szereplő polinom.*

U_0	U_1	A	$p(x)$
1	253	254	$S_1(x), R_2(x), \binom{x}{2}$
2	506	254	$\Pi_2(x)$
1	3759787041401	3760028828350	$S_2(x)$
7770	455962704852690	58682458798	$\binom{x}{3}$
46620	2735776229116140	58682458798	$\Pi_3(x)$

10. táblázat. A (17) egyenlet kivételes esetei

Megjegyzés. Abban az esetben, mikor a (17) egyenlet végtelen sok megoldással rendelkezik, a megoldások struktúrája speciális, melyet Nemes és Pethő írt le [36]-ban (lásd még továbbá [37], [38]).

Szalay [52]-ban algoritmust adott (17) megoldására abban az esetben, amikor $p(x)$ egy harmadfokú polinom. Mi ezt az eredményt terjesztjük ki a negyedfokú esetre. Legyen $p(x) \in \mathbb{Q}[x]$ egy negyedfokú polinom,

$$p(x) = A_0x^4 + A_1x^3 + A_2x^2 + A_3x + A_4,$$

melynek együtthatói teljesítik az alábbi összefüggéseket:

$$A_0 = \frac{a}{e}, A_1 = \frac{4ab}{e}, A_2 = \frac{6ab^2+c}{e}, A_3 = \frac{4ab^3+2bc}{e}, A_4 = \frac{ab^4+b^2c+d}{e},$$

valamely a, b, c, d, e, $ae \neq 0$ egész számokkal. Ekkor az $x_1 = x+b$ helyettesítéssel az előbbi polinom $\frac{(ax_1^4+cx_1^2+d)}{e}$ alakúra transzformálható. Legyen $y = V_n$. Ekkor a (16) összefüggés alapján az

$$y^2 - D\left(\frac{ax_1^4+cx_1^2+d}{e}\right)^2 = 4C(-B)^n$$

egyenletet kapjuk, melyből az

$$Y^2 = h_4X^4 + h_3X^3 + h_2X^2 + h_1X + h_0 \tag{18}$$

egyenlethez jutunk, ahol

$$Y = ey, \quad X = x_1^2, \quad h_4 = a^2D, \quad h_3 = 2acD,$$
$$h_2 = (c^2+2ad)D, \quad h_1 = 2cdD, \quad h_0 = d^2D + 4e^2C(-B)^n.$$

A (18) egyenlet egy 1 génuszú egyenlet, így az $\mathcal{E}llog$ módszer segítségével meghatározhatjuk ennek összes egész megoldását. A Magma [8] programcsomag segítségével a (18) egyenlet konkrét esetben megoldható. Ha h_0 teljes négyzet, akkor ez az `IntegralQuarticPoints` eljárással tehető meg. Különböző eszközök és eredmények ötvözése révén egy hatékony eljárást adunk a (18) egyenlet megoldására általános esetben. A módszer leírását a 3. Tétel bizonyítása tartalmazza. (Megjegyezzük, hogy az algoritmusunkat implementáltuk is a Magma programcsomagban.)

3. Tétel. *[Kovács, 2009] Tegyük fel, hogy a korábbi jelölésekkel $8aDd(2ad - c^2) \neq -64a^2C(-B)^ne^2 - c^4D$. Ekkor a (17) egyenletnek csak véges sok megoldása van n és x egészekben, és ezek a megoldások effektív és explicit módon meghatározhatók.*

A fejezet utolsó eredményében nevezetes másodrendű lineáris rekurzív sorozatokban található különböző típusú kombinatorikus számokat vizsgálunk.

4. Tétel. *[Kovács, 2009] Legyen $U \in \{F, L, P, Q\}$, $p(x) \in \{S_1(x), S_2(x), S_3(x), T_2(x), T_4(x), \Pi_2(x), \Pi_3(x), \Pi_4(x), \binom{x}{2}, \binom{x}{3}, \binom{x}{4}\}$. Ekkor a (17) egyenlet összes (n, x) egész megoldását a 11. táblázat tartalmazza. A táblázatban szereplő hivatkozások arra utalnak, hogy az aktuális egyenletet az idézett cikkben megoldották.*

=	F_n	L_n	P_n	Q_n
$S_1(x)$	[33]	[34]	[32]	$(0,-1),(0,2),(1,-1),$ $(1,2),(2,-2),(2,3)$
$S_2(x)$	[52]	[52]	[52]	$(0,2),(1,2)$
$S_3(x)$	[52]	[52]	[52]	$(0,-1),(0,2),$ $(1,-1),(1,2)$
$T_2(x)$	$(0,0),(0,1),(1,-1),$ $(2,-1),(4,3),(8,7),$ $(10,11)$	$(1,-1),(2,3),$ $(18,-107)$	$(1,-1)$	$(0,-1),(1,-1),(2,3)$
$T_4(x)$	$(0,0),(0,1),$ $(1,-1),(2,-1)$	$(1,-1)$	$(0,0),(0,1),$ $(1,-1)$	$(0,-1),(1,-1)$
$\Pi_2(x)$	$(0,-1),(0,0),$ $(3,-2),(3,1)$	–	$(0,-1),(0,0),(2,-2),$ $(2,1),(4,-4),(4,3)$	–
$\Pi_3(x)$	$(0,-2),(0,-1),$ $(0,0)$	–	$(0,-2),(0,-1),$ $(0,0)$	–
$\Pi_4(x)$	$(0,-3),(0,-2),$ $(0,-1),(0,0)$	–	$(0,-3),(0,-2),$ $(0,-1),(0,0)$	–
$\binom{x}{2}$	[33]	[34]	[32]	$(0,-1),(0,2),(1,-1),$ $(1,2),(2,-2),(2,3)$
$\binom{x}{3}$	[53]	[53]	[53]	–
$\binom{x}{4}$	[52]	[52]	$(0,0),(0,1),(0,2),$ $(0,3),(1,-1),(1,4),$ $(3,-2),(3,5),$ $(6,-5),(6,8)$	$(1,-1),(1,4)$

11. táblázat. A (17) egyenlet megoldásai konkrét esetekben

Megjegyzés. Az $U_n = R_3(x)$ egyenlet megoldása nyitott probléma marad. A helyettesítések során adódó egyenlet 2 génuszú, így sajnos sem a Szalay által kidolgozott módszer, sem az általunk a 3. Tételben kidolgozott algoritmus nem alkalmazható.

A harmadik fejezet eredményeit a [26] dolgozat tartalmazza.

(a, b)-balansz számok

Egy n pozitív egész számot balansz számnak nevezünk, ha

$$1 + \cdots + (n-1) = (n+1) + \cdots + (n+r)$$

teljesül valamely r pozitív egész számra (lásd [4] és [13]). A balansz számok sorozatát B_m-mel jelöljük ($m = 1, 2, \ldots$). Könnyen ellenőrizhető, hogy $B_1 = 6$ és $B_2 = 35$. Behera és Panda [4] megmutatták, hogy a sorozatra a

$$B_{m+1} = 6B_m - B_{m-1} \qquad (m > 1)$$

rekurzió érvényes. Megjegyezzük, hogy végtelen sok balansz szám létezik.

A balansz számokkal kapcsolatos irodalom nagyon gazdag. Liptai [28]-ban és [29]-ben megmutatta, hogy nem létezik Fibonacci, illetve Lucas balansz szám. Később Szalay [54] más módszerrel belátta ugyanezt.

[30]-ban Liptai, Luca, Pintér és Szalay általánosították a balansz számok fogalmát a következőképpen. Legyen y, k, l rögzített pozitív egészek, $y \geq 4$. Egy x pozitív egészt, ahol $x \leq y-2$, (k, l)-hatvány számtani középnek nevezünk, ha

$$1^k + \cdots + (x-1)^k = (x+1)^l + \cdots + (y-1)^l$$

teljesül. [30]-ban számos effektív és ineffektív végességi tételt bizonyítottak (k, l)-hatvány számtani közepekre.

Nemrégiben a „balansz" tulajdonságot rekurzív sorozatokban is vizsgálták (lásd [7]). A negyedik fejezetben kiterjesztjük a balansz számok fogalmát számtani sorozatokra. Legyen $a > 0$ és $b \geq 0$ relatív prím egészek. Ha valamely n és r pozitív egészekre

$$(a+b) + \cdots + (a(n-1)+b) = (a(n+1)+b) + \cdots + (a(n+r)+b)$$

teljesül, akkor azt mondjuk, hogy $an + b$ egy (a, b)-balansz szám. Jelölje $B_m^{(a,b)}$ ($m = 1, 2, \ldots$) az (a, b)-balansz számok sorozatát. Megjegyezzük, hogy mivel $B_m^{(1,0)} = B_m$ bármely m-re, így a balansz számok egy általánosítását kapjuk.

Vizsgálataink során több effektív végességi és explicit eredményt bizonyítunk a $B_m^{(a,b)}$ sorozatban található különböző polinomértékekkel kapcsolatban. Konkrétan, a

$$B_m^{(a,b)} = f(x) \tag{19}$$

egyenletet tekintjük, ahol m és x egészek, továbbá $m \geq 1$, f egy racionális együtthatós polinom, mely egész értékű helyeken egész értéket vesz fel. Bizonyításaink során Ping-Zhi [39], Pintér és Rakaczki [42] és Rakaczki [44] eredményei mellett szükségünk van továbbá a Wiles [62] által kidolgozott moduláris módszerre, valamint Bennett [5] egy binom Thue egyenletekkel kapcsolatos mély eredményére.

A továbbiakban feltesszük, hogy a (19) egyenletben a és b tetszőleges, de rögzített relatív prím egészek, $a > 0$ és $b \geq 0$.

5. Tétel. *[Kovács, Liptai, Olajos, 2010] Legyen $f(x)$ egy legalább másodfokú egész együtthatós főpolinom. Ha a páratlan, akkor a* (19) *egyenlet megoldásaira* $\max(m, |x|) < c_0(f, a, b)$ *teljesül, ahol $c_0(f, a, b)$ egy csak a-tól, b-től és f-től függő effektív konstans.*

Következő eredményünk az $f(x) = x^l$ esettel folalkozik, ahol $l \geq 2$. Ebben az esetben a (19) egyenlet megoldása ekvivalens azzal, hogy az (a, b)-balansz számok között megkeressük a teljes hatványokat.

6. Tétel. *[Kovács, Liptai, Olajos, 2010] Az $a^2 - 4ab - 4b^2 = 1$ esetén nem létezik teljes hatvány (a, b)-balansz szám.*

Megjegyzés. Könnyen ellenőrizhető, hogy az $a^2 - 4ab - 4b^2 = 1$ egyenlet végtelen sok a, b egész megoldással rendelkezik, ahol $a > 0$, $b \geq 0$. Így a 6. Tétel végtelen sok (a, b) pár esetén teljesen megoldja a (19) egyenletet.

A következő tételben a (19) egyenletben szereplő $f(x)$ polinomot valamely korábban definiált kombinatorikus polinomnak választjuk. Pontosabban $\binom{x}{k}$ binomiális együtthatókat, $\Pi_k(x)$ egymást követő számok szorzatait, $S_k(x)$ hatványösszegeket és $R_k(x)$ alternáló hatványösszegeket tekintünk. Megjegyezzük, hogy az $\binom{x}{k}$, $S_k(x)$ és $R_k(x)$ polinomok nem egész együtthatósak. Továbbá, az 5. Tétel az $f(x) = \Pi_k(x)$ esetben ad egy végességi állítást, azonban csak az a paraméter páratlan értékeire.

7. Tétel. *[Kovács, Liptai, Olajos, 2010] Legyen $k \geq 2$ és $f(x)$ egyike az $\binom{x}{k}$, $\Pi_k(x)$, $S_{k-1}(x)$, $R_k(x)$ polinomoknak. Ekkor a* (19) *megoldásaira* $\max(m, |x|) < c_1(a, b, k)$ *teljesül, ahol $c_1(a, b, k)$ egy csak a-tól, b-től és k-tól függő effektív konstans.*

A fejezet utolsó tételében az $a^2-4ab-4b^2=1$ feltétel esetén az $f(x)$ polinom fenti megválasztásai mellett kis k paraméterértékek esetén a (19) egyenlet összes egész megoldását meghatározzuk. Konkrétan, az összes olyan esetet tekintjük, ahol (19) 1 génuszú egyenletre redukálható. Ezen kívül a (19) egyenletet egy olyan esetben is megoldjuk, mikor az 2 génuszú egyenletre vezethető vissza.

8. Tétel. *[Kovács, Liptai, Olajos, 2010] Tegyük fel, hogy* $a^2-4ab-4b^2=1$. *Legyen* $f(x) \in \{\binom{x}{2}, \binom{x}{3}, \binom{x}{4}, \Pi_2(x), \Pi_3(x), \Pi_4(x), S_1(x), S_2(x), S_3(x), S_5(x)\}$. *Ekkor a* (19) *egyenlet* (m,x) *megoldásai pontosan azok, melyeket a 12. táblázat tartalmaz. A megoldásokhoz tartozó* (a,b) *paraméterekre minden esetben az* $(1,0)$ *érték adódik.*

$f(x)$	A (19) egyenlet megoldásai
$\binom{x}{2}$	$(1,-3),(1,4)$
$\binom{x}{3}$	$(2,-5),(2,7)$
$\binom{x}{4}$	$(2,-4),(2,7)$
$\Pi_2(x)$	$(1,-3),(1,2)$
$\Pi_3(x)$	$(1,-3),(1,1)$
$\Pi_4(x)$	$-$
$S_1(x)$	$(1,-4),(1,3)$
$S_2(x)$	$(3,-8),(3,9),(5,-27),(5,28)$
$S_3(x)$	$-$
$S_5(x)$	$-$

12. táblázat. A (19) egyenlet megoldásai

Megjegyzés. Több olyan kapcsolódó egyenletet is tekintettünk, melyek 2 génuszú egyenletekre vezettek vissza, azonban bizonyos technikai nehézségek miatt ezeket nem tudtuk megoldani a Chabauty módszerrel. Ellenőriztük, hogy az $a^2-4ab-4b^2=1$ feltétel mellett a (19) egyenletnek nincs egyetlen „kis" megoldása sem (vagyis olyan megoldása, melyre $|x| \leq 10000$) az $f(x) \in \{\binom{x}{6}, \binom{x}{8}, \Pi_6(x), \Pi_8(x), S_7(x)\}$ esetekben.

A negyedik fejezet eredményeit a [27] cikk tartalmazza.

Számtani sorozatban álló ötödik hatványok

Erdős és Selfridge [12] egy ünnepelt tétele azt mondja ki, hogy egymást követő pozitív egészek szorzata nem lehet teljes hatvány. Az

$$x(x+d)\dots(x+(k-1)d) = by^n \tag{20}$$

egyenlet ennek a problémának egy természetes általánosítása. Itt x, d, k, b, y, n nem-nulla egészek, $\gcd(x,d) = 1$, $d \geq 1$, $k \geq 3$, $n \geq 2$ és $P(b) \leq k$, ahol $P(u)$ az u nem-nulla egész legnagyobb prímosztóját jelöli és megállapodás szerint $P(\pm 1) = 1$.

A (20) egyenlet irodalma rendkívül gazdag. Az egyenletet $d = 1$-re Saradha [45] ($k \geq 4$ eset) és Győry [16] ($k < 4$ eset) teljesen megoldotta. A $d > 1$ esetben most csak azon eredményekre szorítkozunk, ahol rögzített k mellett a (20) egyenlet összes megoldását megadták. Erdős egy sejtése szerint a (20) egyenletnek $k > 3$ és $b = 1$ esetén nincs pozitív egész megoldása. Nemrégiben Erdős sejtését a k különböző értékeire sikerült általánosabb alakban igazolni; lásd [17], [18], [6], [19]. Mi az $n = 5$ esetre koncentrálunk. Az erre a kitevőre vonatkozó legjobb eredményt a következő tétel tartalmazza, mely [17] ($k = 3$ eset), [18] ($k = 4, 5$ esetek), [6] ($k = 6, 7$ esetek) és [19] ($8 \leq k \leq 34$ esetek) megfelelő eredményeinek ötvözete. (Megjegyezzük, hogy az említett eredmények az általános $n \geq 2$ esetre vonatkoznak.)

Tétel A. *A* (20) *egyenlet összes megoldása* $n = 5$, $3 \leq k \leq 34$ *és* $P(b) \leq P_k$ *esetén, ahol*

$$P_k = \begin{cases} 2, & \text{ha } k = 3, 4, \\ 3, & \text{ha } k = 5, \\ 5, & \text{ha } k = 6, 7, \\ 7, & \text{ha } 8 \leq k \leq 22, \\ \frac{k-1}{2}, & \text{ha } 23 \leq k \leq 34 \end{cases}$$

az alábbiak:

$$(k,d) = (8,1),\ x \in \{-10,-9,-8,1,2,3\};\quad (k,d) = (8,2),\ x \in \{-9,-7,-5\};$$

$$(k,d) = (9,1),\ x \in \{-10,-9,1,2\};\quad (k,d) = (9,2),\ x \in \{-9,-7\};$$

$$(k,d) = (10,1),\ x \in \{-10,1\};\quad (k,d,x) = (10,2,-9).$$

Az $n = 5$ kitevő esete speciális. Rögzített k és $n \geq 2$ esetén a (20) egyenlet vizsgálatának legfontosabb eszköze a moduláris módszer, melyet Wiles [62] fejlesztett ki. Azonban ez a módszer csak „nagy" kitevők, tipikusan $n \geq 7$ esetén dolgozik eredményesen. Emiatt a „kis" kitevőket külön kell kezelni.

Az $n = 2, 3$ kitevőket már több önálló cikkben vizsgálták. Az $n = 2$ és pozitív x esetén a (20) egyenletet néhány kivételes esettől eltekintve Hirata-Kohno, Laishram, Shorey és Tijdeman [24] $k \leq 100$-ra, $b = 1$ esetén pedig $k \leq 109$-re teljesen megoldotta. Legfontosabb eszközeik az elliptikus görbék és a kvadratikus maradékok voltak. Később a kimaradt kivételes eseteket Tengelynek [55] a Chabauty módszer segítségével sikerült kezelnie.

Az $n = 3$ esetben főként köbmaradékok, illetve emellett az elliptikus görbék és a Chabauty módszer használatával a (20) egyenletet $k < 32$-re Hajdu, Tengely és Tijdeman [23] teljesen megoldotta, ahol $P(b) \leq k$, ha $4 \leq k \leq 12$ illetve $P(b) < k$, ha $k = 3$ vagy $k \geq 13$. Továbbá $b = 1$ esetén megoldották (20)-at $k < 39$-re.

Az $n = 5$ esetet korábban nem vizsgálták meg közelebbről. Az eddigi eredményekben főleg Dirichlet és Lebesgue klasszikus eredményeit használtak fel, lásd például [19]. Ennél a kitevőnél az elliptikus görbék nem használhatóak. Az ötödik fejezetben megmutatjuk, hogy a Chabauty módszer nagyon hatékonyan alkalmazható. Eredményeink igazolásához nagy számú 2 génuszú egyenletet oldunk meg a Chabauty módszerrel, majd egy ezeken alapuló szitarendszert dolgozunk ki.

A fejezet első tétele lényegesen kiterjeszti Tétel A-t a legérdekesebb esetben, azaz $b = 1$ mellett. Egy $x, x + d, \ldots, x + (k - 1)d$ alakú számtani sorozatot *primitív*nek nevezünk, ha $\gcd(x, d) = 1$.

9. Tétel. *[Hajdu, Kovács, 2011] Egy primitív számtani sorozat k darab egymást követő nem-nulla elemének szorzata $3 \leq k \leq 54$ esetén sohasem ötödik hatvány.*

A 9. Tétel a következő eredményből rögtön következik. A tétel kimondásához egy további fogalomra van szükségünk. Egy $x, x + d, \ldots, x + (k - 1)d$ számtani sorozatot *triviális*nak nevezünk, ha $d \leq 5$ és $|x + id| \leq 15$ valamely $i = 0, 1, \ldots, k - 1$ esetén. Továbbá, a (20) egyenlet egy megoldását *triviális*nak nevezzük, ha az egyenlet bal oldalán álló $x, x+d, \ldots, x+(k-1)d$ tagok triviális számtani sorozatot alkotnak. Erre a fogalomra a triviális megoldások igen nagy száma miatt van szükség. Fontos megemlíteni, hogy a (20) egyenlet triviális megoldásai rögzített k esetén könnyen felsorolhatóak.

10. Tétel. *[Hajdu, Kovács, 2011] A (20) egyenlet nemtriviális megoldásai $n =$*

5, $3 \le k \le 24$ és $P(b) \le P_k$ esetén

$$(k,d) = (3,7),\ x \in \{-16,-8,-6,2\};$$

$$(k,d) = (4,7),\ x \in \{-16,-15,-12,-9,-6,-5\};$$

$$(k,d) = (4,11),\ x \in \{-27,-6\}; \quad (k,d) = (5,7),\ x \in \{-16,-12\};$$

$$(k,d) = (5,11),\ x \in \{-36,-32,-12,-8\};$$

$$(k,d) = (5,13),\ x \in \{-40,-27,-25,-12\};$$

$$(k,d) = (6,7),\ x \in \{-32,-25,-10,-3\};$$

$$(k,d) = (6,9),\ x \in \{-25,-20\}; \quad (k,d) = (6,13),\ x \in \{-40,-25\};$$

$$(k,d) = (7,7),\ x \in \{-39,-32,-27,-22,-20,-15,-10,-3\};$$

$$(k,d) = (8,7),\ x \in \{-39,-27,-22,-10\};$$

$$(k,d) = (9,7),\ x \in \{-39,-34,-32,-24,-22,-17\};$$

$$(k,d) = (10,7),\ x \in \{-39,-24\},$$

ahol a P_k értékek az alábbi módon vannak definiálva:

k	3	4	5	6	7, 8
P_k	3	5	7	11	13
k	9, 10, 11, 12	13, 14, 15	16, 17	18, 19, 20, 21, 22, 23	24
P_k	17	19	23	29	31

Vegyük észre, hogy a 10. Tételben $k \ge 4$ esetén $P_k > k$, ami újszerű a (20) egyenletre vonatkozóan.

A 10. Tétel azonnal adódó következménye az alábbi állítás, mely a $P(b) \le k$ esetre vonatkozik. Megemlítjük, hogy már ez az eredmény is jelentős javítása a Tétel A-nak, különös tekintettel a $P(b)$-re vonatkozó feltételt illetően.

1. Következmény. *[Hajdu, Kovács, 2011] A (20) egyenlet összes nemtriviális megoldása $n = 5$ és $3 \le k \le 36$ esetén az alábbi:*

$$(k,d) = (3,7),\ x \in \{-16,-8,-6,2\}; \quad (k,d) = (5,7),\ x \in \{-16,-12\}.$$

A $k \geq 4$ esetben a 10. Tétel bizonyításának kulcsa az utolsó állításunk. Ezt az állítást egy 2 génuszú egyenleteken és a Chabauty módszeren alapuló szitarendszer segítségével igazoltuk.

Vegyük észre, hogy egy $z_1 < \ldots < z_l$ növekvő számtani sorozat esetén szimmetria alapján azt kapjuk, hogy $-z_l < \ldots < -z_1$ is egy növekvő számtani sorozat. Így minden hasonló szimmetrikus számtani sorozat párból elegendő csak az egyiket megadni.

11. Tétel. *[Hajdu, Kovács, 2011] Legyen $4 \leq t \leq 8$ és $z_0 < z_1 < \ldots < z_{t-1}$ egy nemtriviális primitív számtani sorozat. Tegyük fel, hogy*

$$z_0 = b_0 x_0^5, z_{i_1} = b_{i_1} x_{i_1}^5, z_{i_2} = b_{i_2} x_{i_2}^5, z_{t-1} = b_{t-1} x_{t-1}^5$$

teljesül valamely $0 < i_1 < i_2 < t-1$ indexekre úgy, hogy $P(b_0 b_{i_1} b_{i_2} b_{t-1}) \leq 5$. Ekkor a $z_0, \ldots, z_{t-1}$ számtani sorozat z_0 kezdőtagja és $z_1 - z_0$ differenciája a $t = 4, 5, 6, 7, 8$ értékek esetén szimmetriától eltekintve az alábbiak közül való:
$t = 4 : (-9, 7), (-6, 7), (-6, 11), (-5, 7);$

$t = 5 : (-32, 17), (-25, 13), (-20, 11), (-16, 13), (-12, 7), (-12, 11),$
$(-12, 13), (-10, 7), (-8, 7), (-8, 11), (-4, 7), (-3, 7), (-1, 7), (2, 7),$
$(4, 7), (4, 23);$

$t = 6 : (-125, 61), (-81, 17), (-30, 31), (-25, 8), (-25, 11), (-25, 13),$
$(-25, 17), (-20, 9), (-20, 13), (-20, 19), (-20, 29), (-15, 7), (-15, 11),$
$(-15, 13), (-15, 23), (-10, 7), (-10, 11), (-8, 7), (-5, 7), (-3, 7),$
$(-1, 11), (-1, 13), (1, 7), (5, 11);$

$t = 7 : (-54, 19), (-54, 29), (-48, 23), (-30, 11), (-30, 13), (-27, 17),$
$(-24, 13), (-18, 7), (-18, 11), (-18, 13), (-18, 19), (-16, 11), (-15, 7),$
$(-12, 7), (-12, 11), (-10, 7), (-6, 7), (-6, 11), (-4, 9), (-3, 13), (-2, 7),$
$(-2, 17), (2, 13), (3, 7), (6, 7), (8, 7), (9, 11), (18, 7);$

$t = 8 : (-405, 131), (-125, 41), (-100, 49), (-32, 11), (-27, 11),$
$(-27, 13), (-25, 19), (-24, 7), (-16, 13), (-10, 13), (-9, 7), (-5, 11),$
$(-4, 7), (-2, 11), (-1, 13), (-1, 7), (1, 7), (3, 11), (4, 11), (5, 7), (6, 17).$

Az ötödik fejezet eredményeit a [21] cikk tartalmazza.

References/Irodalomjegyzék

[1] E. T. Avanesov, *Solution of a problem on figurate numbers*, Acta Arith. **12** (1966/1967), 409–420.

[2] E. T. Avanesov, *The Diophantine equation* $3y(y+1) = x(x+1)(2x+1)$, Volz. Mat. Sb. Vyp. **8** (1971), 3–6.

[3] A. Baker, *The Diophantine equation* $y^2 = ax^3 + bx^2 + cx + d$, J. London Math. Soc. **43** (1968), 1–9.

[4] A. Behera, G. K. Panda, *On the square roots of triangular numbers*, Fibonacci Quart. **37** (1999), 98–105.

[5] M. A. Bennett, *Rational approximation to algebraic numbers of small height: the Diophantine equation* $|ax^n - by^n| = 1$, J. Reine Angew. Math. **535** (2001), 1–49.

[6] M. A Bennett, N. Bruin, K. Győry and L. Hajdu, *Powers from products of consecutive terms in arithmetic progression*, Proc. London Math. Soc. **92** (2006), 273–306.

[7] A. Bérczes, K. Liptai, I. Pink, *On generalized balancing sequences*, Fibonacci Quart. **48** (2010), 121–128.

[8] W. Bosma, J. Cannon and C. Playoust, *The Magma algebra system. I. The user language*, J. Symbolic Comput. **24** (1997), 235–265.

[9] D. W. Boyd, H. H. Kisilevsky, *The diophantine equation* $u(u+1)(u+2)(u+3) = v(v+1)(v+2)$, Pacific J. Math. **40** (1972), 23–32.

[10] B. Brindza, *On S-integral solutions of the equation* $y^m = f(x)$, Acta. Math. Hungar. **44** (1984), 133–139.

[11] S. David, *Minorations de formes linéaires de logarithmes elliptiques*, Soc. Math. France, Mémoire 62 (Suppl. Bull. S. M. F.) 123, 1995, pp. 143.

[12] P. Erdős and J. L. Selfridge, *The product of consecutive integers is never a power*, Illinois J. Math. **19** (1975), 292–301.

[13] R. P. Finkelstein, *The House Problem*, American Math. Monthly **72** (1965), 1082–1088.

[14] J. Gebel, A. Pethő, H. G. Zimmer, *Computing integral points on elliptic curves*, Acta Arith. **68** (1994), 171–192.

[15] R. K. Guy, *Unsolved Problems in Number Theory*, Springer, New York, 3rd edition, 2004, pp. XVIII+437.

[16] K. Győry, *On the diophantine equation* $n(n+1)\dots(n+k-1) = bx^l$, Acta Arith. **83** (1998), 87–92.

[17] K. Győry, *Power values of products of consecutive integers and binomial coefficients*, Number Theory and Its Applications, Kluwer Acad. Publ. 1999, 145–156.

[18] K. Győry, L. Hajdu and N. Saradha, *On the Diophantine equation* $n(n+d)\dots(n+(k-1)d) = by^l$, Canad. Math. Bull. **47** (2004), 373–388. Correction: Canad. Math. Bull. **48** (2005), 636.

[19] K. Győry, L. Hajdu and Á. Pintér, *Perfect powers from products of consecutive terms in arithmetic progression*, Compositio Math. **145** (2009), 845–864.

[20] L. Hajdu, T. Kovács, *Parallel LLL reduction for bounding the integral solutions of elliptic equations*, Math. Comp. **78** (2009), 1201–1210.

[21] L. Hajdu, T. Kovács, *Almost fifth powers in arithmetic progression*, J. Number Theory **131** (2011), 1912–1923.

[22] L. Hajdu, Á. Pintér, *Combinatorial diophantine equations*, Publ. Math. Debrecen **56** (2000), 391–403.

[23] L. Hajdu, Sz. Tengely and R. Tijdeman, *Cubes in products of terms in arithmetic progression*, Publ. Math. Debrecen **74** (2009), 215–232.

[24] N. Hirata-Kohno, S. Laishram, T. Shorey and R. Tijdeman, *An extension of a theorem of Euler*, Acta Arith. **129** (2007), 71–102.

[25] T. Kovács, *Combinatorial Diophantine equations - the genus 1 case*, Publ. Math. Debrecen **72** (2008) 243–255.

[26] T. Kovács, *Combinatorial numbers in binary recurrences*, Period. Math. Hungar. **58** (2009) 83–98.

[27] T. Kovács, K. Liptai, P. Olajos, *On* $(a,b)-$*balancing numbers*, Publ. Math. Debrecen **77** (2010) 485–498.

[28] K. Liptai, *Fibonacci balancing numbers*, Fibonacci Quart. **42** (2004), 330–340.

[29] K. Liptai, *Lucas balancing numbers*, Acta Math. Univ. Ostrav. **14** (2006), 43–47.

[30] K. Liptai, F. Luca, Á. Pintér, L. Szalay, *Generalized balancing numbers*, Indag. Math. N. S. **20** (2009), 87–100.

[31] R. A. MacLeod, I. Barrodale, *On equal products of consecutive integers*, Canad. Math. Bulletin **13** (1970), 255–259.

[32] W. L. McDaniel, *Triangular numbers in the Pell sequence*, Fibonacci Quart. **34** (1996), 105–107.

[33] L. Ming, *On triangular Fibonacci numbers*, Fibonacci Quart. **27** (1989), 98–108.

[34] L. Ming, *On triangular Lucas numbers*, Applications of Fibonacci numbers **4** (1991), 231–240.

[35] L. J. Mordell, *On the integer solutions of* $y\,(y+1) = x\,(x+1)\,(x+2)$, Pacific J. Math. **13** (1963), 1347–1351.

[36] I. Nemes, A. Pethő, *Polynomial values in linear recurrences II*, J. Number Theory **24** (1986), 47–53.

[37] A. Pethő, *On the Solution of the Equation* $G_n = P(x)$, in Fibonacci Numbers and Their Applications, D. Reidel Publ. Comp., 1986, 193–201.

[38] A. Pethő, *Diofantoszi egyenletek effektív és explicit megoldása* (in Hungarian), Academic doctoral dissertation, Hungarian Academy of Sciences, 1990, 114 pp.

[39] Y. Ping-Zhi, *On a special diophantine equation* $a\binom{x}{n} = by^r + c$, Publ. Math. Debrecen **44** (1994), 137–143.

[40] Á. Pintér, *The diophantine equation* $\binom{x}{2} = y(y+1)(y+2)(y+3)$, unpublished manuscript.

[41] Á. Pintér, *A note on the Diophantine equation* $\binom{x}{4} = \binom{y}{2}$, Publ. Math. Debrecen **47** (1995), 411–415.

[42] Á. Pintér, Cs. Rakaczki, *On the zeros of shifted Bernoulli polynomials*, Appl. Math. Comput. **187** (2007), 379–383.

[43] Á. Pintér, B. M. M. de Weger, $210 = 14 \times 15 = 5 \times 6 \times 7 = \binom{21}{2} = \binom{10}{4}$, Publ. Math. Debrecen **51** (1997), 175–189.

[44] Cs. Rakaczki, *On some Diophantine results related to Euler polynomials*, Period. Math. Hungar. **56** (2008), 247–257.

[45] N. Saradha, *On perfect powers in products with terms from arithmetic progressions*, Acta Arith. **82** (1997), 147–172.

[46] C. L. Siegel, *Über einige Anwendungen Diophantischer Approximationen*, Abh. Preuss. Akad. Wiss. Phys. Math. Kl. (1929), 1–41. Reprinted as pp. 209-266 of his Gesammelte Abhandlungen I, Springer, Berlin, 1966.

[47] R. J. Stroeker, N. Tzanakis, *Solving elliptic diophantine equations by estimating linear forms in elliptic logarithms*, Acta Arith. **67** (1994), 177–196.

[48] R. J. Stroeker, N. Tzanakis, *On the Elliptic Logarithm Method for Elliptic Diophantine Equations: Reflections and an Improvement*, Experimental Math. **8** (1999), 135–149.

[49] R. J. Stroeker, N. Tzanakis, *Computing all integer solutions of a genus 1 equation*, Math. Comp. **72** (2003), 1935–1946.

[50] R. J. Stroeker, B. M. M. de Weger, *Solving elliptic diophantine equations: the general cubic case*, Acta Arith. **87** (1999), 339–365.

[51] R. J. Stroeker, B. M. M. de Weger, *Elliptic binomial diophantine equations*, Math. Comp. **68** (1999), 1257–1281.

[52] L. Szalay, *Some polynomial values in binary recurrences*, Revista Colombiana de Matemáticas **35** (2001), 99–106.

[53] L. Szalay, *On the resolution of the equation $U_n = \binom{x}{3}$ and $V_n = \binom{x}{3}$*, Fibonacci Quart. **40** (2002), 9–12.

[54] L. Szalay, *On the resolution of simultaneous Pell equations*, Ann. Math. Info. **34** (2007), 77–87.

[55] Sz. Tengely, *Note on the paper "An extension of a theorem of Euler" by Hirata-Kohno et al.*, Acta Arith. **134** (2008), 329–335.

[56] N. Tzanakis, *Solving Elliptic Diophantine Equations by estimating Linear Forms in Elliptic Logarithms. The case of Quartic Equations*, Acta Arith. **75** (1996), 165–190.

[57] N. Tzanakis, B. M. M. de Weger, *On the practical solution of the Thue equation*, J. Number Theory **31** (1989), 99–132.

[58] S. Uchiyama, *Solution of a Diophantine problem*, Tsukuba J. Math. **8** (1984), 131–157.

[59] B. M. M. de Weger, *Algorithms for diophantine equations*, CWI Tract 65, Stichting Mathematisch Centrum, Amsterdam, 1989.

[60] B. M. M. de Weger, *A binomial Diophantine equation*, Quart. J. Math. Oxford Ser. (2) **47** (1996), 221–231.

[61] B. M. M. de Weger, *Equal binomial coefficients: some elementary considerations*, J. Number Theory **63** (1997), 373–386.

[62] A. Wiles, *Modular elliptic curves and Fermat's Last Theorem*, Ann. Math. **141** (1995), 443–551.

Publications of the author/A szerző publikációi

1. T. Kovács, *Combinatorial Diophantine equations - the genus 1 case*, Publ. Math. Debrecen **72** (2008), 243–255.

2. L. Hajdu, T. Kovács, *Parallel LLL-reduction for bounding the integral solutions of elliptic equations*, Math. Comp. **78** (2009), 1201–1210.

3. T. Kovács, *Combinatorial numbers in binary recurrences*, Periodica Mathematica Hungarica, **58** (2009), 83–98.

4. T. Kovács, K. Liptai, P. Olajos, *On (a,b)-balancing numbers*, Publ. Math. Debrecen **77** (2010), 485–498.

5. L. Hajdu, T. Kovács, *Almost fifth powers in arithmetic progression*, J. Number Theory **131** (2011), 1912–1923.

6. L. Aszalós, N. Bátfai, L. Csirmaz, J. Folláth, E. Hajdúné Pocsai, T. Herendi, T. Kovács, Z. Matolcsy, A. Pethő, P. Varga, *Secure utilization of local and regional data assets through mobile environments*, to appear in Conference Proceedings for ICAI 2010 - 8th International Conference on Applied Informatics.

Talks of the author/A szerző konferencia-előadásai

1. *Kombinatorikus diofantikus egyenletek*, Berekfürdői Diofantikus és Kriptográfiai Napok, 2006. április 22., Berekfürdő.

2. *Combinatorial Diophantine equations - the genus 1 case*, 18th Czech and Slovak International Conference on Number Theory, 2007. augusztus 28., Smolenice (Szlovákia).

3. *Kombinatorikus számok rekurzív sorozatokban*, Soproni Diofantikus és Kriptográfiai Napok, 2008. október 11., Sopron.

4. *Parallel LLL-reduction for elliptic Diophantine equations*, Winter School on Explicit Methods in Number Theory, 2009. január 28., Debrecen.

5. *Combinatorial numbers in binary recurrences*, XXVIémes Journées Arithmétiques, 2009. július 7., Saint-Étienne (Franciaország).

6. *Elliptikus, 1 és 2 génuszú görbék*, Számelméleti szeminárium, 2010. március 18., Eger.

7. *On* (a,b)*-balancing numbers*, ALANT Joint conferences on Algebra, Logic and Number Theory, 2010. június 22., Bukowina Tatrzańska (Lengyelország).

8. *Almost fifth powers in arithmetic progression*, Number Theory and its Applications, An international conference dedicated to Kálmán Győry, Attila Pethő, János Pintz and András Sárközy, 2010. október 5., Debrecen.