DE TTK

1949

Rekurziós eljárások, Monte Carlo módszerek és aszimptotikus eredmények oktatási célú összehasonlító elemzése

Doktori (PhD) értekezés

Szerző: Libor Józsefné dr.

Témavezető: Dr. Fazekas István

Debreceni Egyetem
Természettudományi Doktori Tanács
Matematika- és számítástudományok Doktori Iskola
Debrecen, 2011.

DE TTK

1949

Rekurziós eljárások, Monte Carlo módszerek és aszimptotikus eredmények oktatási célú összehasonlító elemzése

Doktori (PhD) értekezés

Szerző: Libor Józsefné dr.

Témavezető: Dr. Fazekas István

Debreceni Egyetem
Természettudományi Doktori Tanács
Matematika- és számítástudományok Doktori Iskola
Debrecen, 2011.

Ezen értekezést a Debreceni Egyetem Természettudományi Doktori Tanács *Matematika- és számítástudományok* Doktori Iskola *Didaktika* programja keretében készítettem a Debreceni Egyetem természettudományi doktori (PhD) fokozatának elnyerése céljából.

Debrecen, 2011.

a jelölt aláírása

Tanúsítom, hogy *Libor Józsefné dr.* doktorjelölt 2003 – 2011 között a fent megnevezett Doktori Iskola *Didaktika* programjának keretében irányításommal végezte munkáját. Az értekezésben foglalt eredményekhez a jelölt önálló alkotó tevékenységével meghatározóan hozzájárult. Az értekezés elfogadását javasolom.

Debrecen, 2011.

a témavezető aláírása

Rekurziós eljárások, Monte Carlo módszerek és aszimptotikus eredmények oktatási célú összehasonlító elemzése

Értekezés a doktori (PhD) fokozat megszerzése érdekében
a Matematika tudományágban

írta: Libor Józsefné, okleveles matematika-fizika szakos középiskolai tanár, szakközgazdász, dr. univ. (Operációkutatás)

Készült a Debreceni Egyetem Matematika- és számítástudományok Doktori Iskolája (Didaktika programja) keretében

Témavezető: Dr. Fazekas István

A doktori szigorlati bizottság:

elnök:	Dr. Páles Zsolt (DE-TTK)
tagok:	Dr. Bácsó Sándor (DE-TTK)
	Dr. Csendes Tibor (SzE-TTK)

A doktori szigorlat időpontja: 2010. február 12.

Az értekezés bírálói:

Dr. ....
Dr. ....
Dr. ....

A bírálóbizottság:

elnök:	Dr. ....
tagok:	Dr. ....
	Dr. ....
	Dr. ....
	Dr. ....

Az értekezés védésének időpontja: 20 . . ..

Köszönetnyilvánítás

Szeretném köszönetemet kifejezni Dr. Fazekas István Professzor Úrnak a támogatásáért, a konzultációkért és a követelmények teljesítésében való segítségért. Külön köszönet a türelméért és megértéséért, mellyel tolerálta a munka és család miatti elmaradásaimat.

Karácsony Zsoltnak szeretném megköszönni a programozásban, a Latex program megismerésében nyújtott segítségét, valamint a közös publikációkban végzett munkát.

Kollégáimnak hálás vagyok a bíztatásért és az esetleges helyettesítésekért.

Különös köszönet illeti férjemet, aki sokat segített a házimunkában és köszönöm gyermekeimnek, hogy türelemmel viselték az időnkénti "anyahiányt".

Tartalomjegyzék

Bevezetés

Dolgozatom fő részében a címben említett fogalmak, eljárások pontos megértését segítő módszert, eljárást mutatok be, mely a felsőoktatásban tanító kollégák számára nyújthat hasznos didaktikai eszközt. A felsőfokú oktatásban hosszú ideje folytatott munkám tapasztalatai alapján elmondhatom, amit oly sok kollégám is észlel és jelez nap mint nap, hogy a diákok egyre nagyobb számban küszködnek az egyes definíciók pontos elsajátításával. Ez nyilvánvalóan több okkal is magyarázható, melyek között olyanok is szerepelnek, melyek nem mindig a hallgatók hanyagságára vezethetők vissza. Gondolok itt például a közoktatásban, és hasonlóan a felsőoktatási alapképzésben is felmerülő problémákra (pl. óraszámcsökkentések, kreditrendszer problémái, stb.), vagy akár pl. az internet-használat néha káros következményeire is. (Nézzük például a [25] cikket, mely szerint angol kutatók arra a megállapításra jutottak, hogy az internet-használattal – az információk gyors váltakozásával és váltakoztatásával – az agyi tevékenységek is átalakulnak, és a diákok többsége képtelen lesz lineáris – hosszabb időt, egymást követő gondolatláncok megértését igénylő – ismeretelsajátításra.) Több tényező is szerepet játszhat tehát ebben a sajnálatos folyamatban, melyek vizsgálatára jelen dolgozat keretei között nem térek ki. A ténnyel viszont szembe kell néznünk, és a rendelkezésre álló eszközökkel a hallgatók számára meg kell adni minél több lehetőséget a tananyag megfelelő elsajátításához.
Fontosnak tartom a felsőoktatásban is a szemléltetést, kísérletezést, a hallgatók általi felfedeztetést – még a rendelkezésre álló, egyre szűkülő órakeret ellenére is – , hiszen az ősi kínai mondás szerint is: "Hallom és elfelejtem, látom és emlékszem rá, csinálom és megértem." ([2], 142. oldal) A címben említett téma vizsgálatához ezért egy olyan problémakört választottam a valószínűségszámítás területéről, mely a hallgatók számára viszonylag könnyen feldolgozható, hétköznapi tapasztalataikkal a (néha meghökkentő) eredmények összevethetők. Vizsgálva a leghosszabb szériák hosszának alakulását a pénzdobás kísérletekben, lehetősége van a hallgatónak önállóan végrehajtani ezeket manuálisan, illetve számítógéppel. Ahogyan Brenyó Mihály is említi [10] cikkében

a felsőoktatási valószínűségszámítás-tanítási tapasztalatairól, a felnőtt fiataloknak is ugyanolyan örömet, nagy élményt jelent a játékos kísérletezés a pénzérmékkel, kockákkal, mint a kisiskolás diákoknak. A másik ok, amiért ezt a problémakört választottam, az az, hogy a leghosszabb szériák hosszára felírt eloszlásfüggvényre nincs pontos és zárt formula. Így ezen probléma tárgyalásakor még szembetűnőbbek az egyes eljárások alkalmazhatóságának feltételei, eltérései. A rekurziók pontos értéket adnak ugyan, de nem zártak, az értékek meghatározása a sokadik elem (nagy n) esetén már problémás lehet még számítógéppel is. Az aszimptotikus tételek az n növelésével egyre pontosabb, de csak közelítő értékeket adnak, míg a szimulációval a kísérletek sokszori elvégzése alapján kapott eredményekből számított átlagértékek adódnak. Ezen különbözőségek megfigyelésével az egyes fogalmak mélyebb megértést nyernek, az egyes módszerek alkalmazásai az említett problémakör (leghosszabb széria) tárgyalásával jól szemléltethetők. Témaválasztásomat az is indokolja, hogy míg az általános és középiskolai oktatáshoz örvendetesen sok didaktikai segédanyag készült és készül napjainkban is, addig a felsőoktatás ezen a területen elmaradást mutat. Míg az általános és középiskolákban már csak elvétve találkozunk az ún. "poroszos" oktatási formákkal, addig a felsőoktatásban a mai napig bevett gyakorlat, hogy a tanár a katedráról magyaráz, a diák pedig azt megpróbálja megérteni és azután elsajátítani. Természetesen vannak egyedi kivételek, de az egyre csökkenő órakeret is a minél gyorsabb, rövid, csak a legszükségesebb verbális ismeretátadásra kényszeríti az előadókat. Egyre kevesebb idő jut az egyes definíciók alapos átbeszélésére, több szempontból való vizsgálatára és így azok megértetésére is. Még a szorgalmasabb hallgatóknál is tapasztalható, hogy bár megtanulja az adott fogalmat, de a jelentésével, értelmezésével már gondok adódnak. Enélkül pedig a feladatmegoldások is kudarcra vannak ítélve. A pontos elméleti tudással több önálló, otthoni feladatmegoldást lehet elvárni a hallgatóktól, míg pontatlan ismeretekkel kevés feladat megoldása is csak gyötrődéssel, hosszabb időráfordítással valósítható meg. Rendelkezésre állnak ugyan – főleg angol nyelvű – oktatási segédanyagokat tartalmazó programok, oldalak az interneten a felsőfokú matematikatanításhoz is, (az ismertebb Maple, Derive, Mat-

lab szoftverek mellett néhány jól használható segédanyagot felsorolok a Függelék 1. sz. Táblázatában), de egyrészt ezek használatára nincs, vagy csak nagyon kevés idő jut, másrészt, a már említett kínai mondás szerint is sokkal hatékonyabb, ha a hallgató saját maga végzi a kísérletet, és nem csak látja a bemutatását egy képernyőn. Természetesen a kísérletek elvégzéséhez felhasználjuk a számítástechnika nyújtotta lehetőségeket is, mely néhány hallgatónál motivációs tényezőként sem elhanyagolható. A valószínűségszámítás oktatásakor a véletlen jelenségek tárgyalásához egyébként is nélkülözhetetlen segédeszközünk a számítógép, hiszen a kísérletek sokszori megismétlése manuálisan időigényes és unalmas is lehet. Jól alkalmazható matematikai szoftverek listája található még például a következő oldalon:
http://www.math.psu.edu/MathLists/Software.html. Dolgozatomban a valószínűségszámítás oktatásával kapcsolatos néhány fő gondolat tárgyalása mellett külön-külön tárgyalom a három, címben említett fogalommal, illetve ezek tanításával kapcsolatos ismereteket, problémákat. Ezután a leghosszabb széria problémakör bevezetését, az eddig elért eredményeket tárgyalom különböző esetekben, majd a kapott értékek összevetéséből, a szemléletes grafikonok elemzéséből adódó oktatási tapasztalatokat összegzem. Végül, néhány gyakorlati alkalmazási lehetőség megemlítése után a problémakör egy olyan területét tekintem, nevezetesen a Szentpétervári paradoxont, mely különösen a gazdasági felsőoktatásban (saját munkaterületemen) lehet hasznos és érdekes.

1. fejezet

A matematika tanításáról

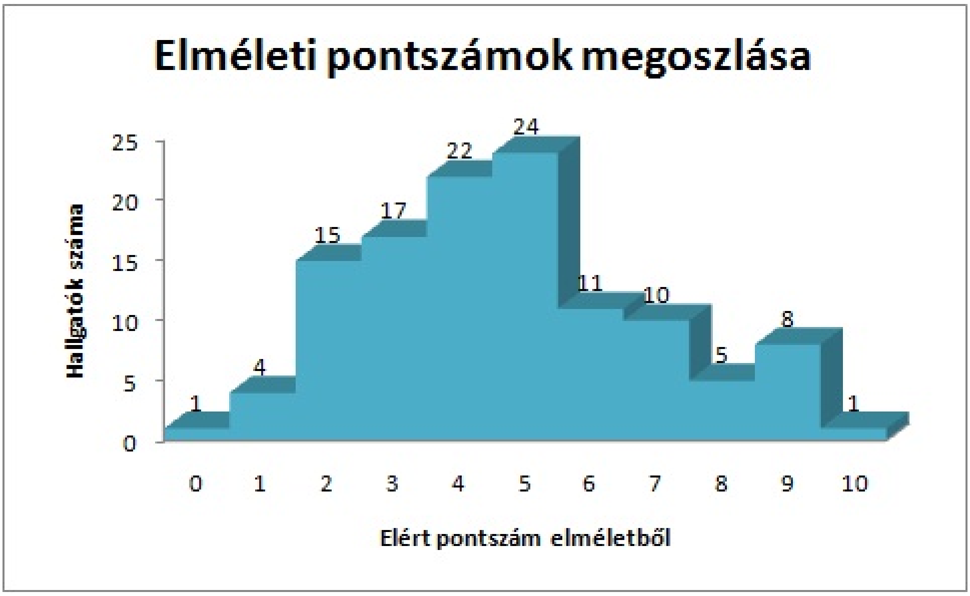
1.1. Összefoglaló áttekintés

Mivel a felsőoktatás az általános és középiskolai ismeretekre épül, először nézzük röviden milyen változások történtek matematikatanításunkban a képzés ezen szintjein. Vizsgálva az elmúlt 50 év matematikatanítási programjait és kísérleteit, az alábbi főbb állomások emelhetők ki. Az 1960-as évek végén indult el az ún. Forrainé-féle kísérlet és program, melynek lényege az önálló munka és értékelés kialakítása volt. A tanárok rendelkezésére álló "mankó", feladatgyűjtemény – mely tanórákra lebontva tartalmazta a megoldandó feladatokat a rájuk szánható idővel együtt – kevés lehetőséget adott a differenciálás kialakítására. A megoldások megbeszélése sokszor csak eredményellenőrzésre terjedt ki. Mégis nagy volt a jelentősége, hiszen bizonyította, hogy önálló munkával is meg lehet valósítani az új ismeretek elsajátítását egy jól átgondolt, fokozatos felépítésű feladatsor tervezésével és felhasználásával. Az 1970-es évek elejétől Varga Tamás nevével fémjelezve bevezetésre került a komplex matematikatanítási program, mely tartalmi és módszertani változásokat is hozott. A számtan-mértan elnevezés helyett a matematika lett a tantárgynév. A tananyag öt fő tárgykörre lett osztva, melynek egyik eleme a Kombinatorika - Valószínűség - Statisztika. (Tárgykörök: Halmazok-Logika, Számok - Műveletek - Algebra, Relációk - Függvények - Sorozatok, Geometria

- Mérések és végül Kombinatorika - Valószínűség - Statisztika) [58] A módszertant tekintve újdonság volt, hogy lehetőség szerint mind az öt tárgykör szerepelt minden órán, hiszen Varga szerint a matematikát, mint egészet kell tekinteni, Császár Ákos szavait idézve [11] "nem szabad sem a tanár, sem a tanuló fejében olyan képnek kialakulnia, hogy a matematika egymással össze nem függő fejezeteknek a – nem is tudjuk, hogy egy kalap alá miként kerülő – szövedéke." Az oktatási programban az ismeretek spirálisan bővültek (a témák magasabb szinten többször visszatérnek), az interaktív közös munka dominált. A kísérletezés, felfedeztetés fő szerepet kapott a tanítási folyamatban. Ekkor kerültek bevezetésre a színes rudak, logikai készletek és egyéb, a manipulációs kísérletekhez szükséges segédeszközök. Ahogyan Császár Ákos [11] cikkében írja, Varga Tamás úgy igyekezett felépíteni a tantervet, "hogy mód nyíljék arra, hogy egy fogalomnak a tapasztalatból, a gyakorlatban szerzett tapasztalatokból való elvonásával absztrakt fogalomig lehessen eljutni." A figyelem olyan alapelvekre irányult, mint a legjobb motiváltság elve, a próbálgatás elve, a tévedés szabadságának elve vagy a differenciálás elve. Kissé kevesebb figyelem fordítódott az önálló munkáltatásra, mint a Forrainé-féle programban, bár sok tanár sikeresen ötvözte a két program előnyeit. A Peller József vezette ELTE Matematikai Szakmódszertani Csoport programja már szisztematikusan próbálta az előző két program előnyeit egy új kísérletben kamatoztatni. Részben közös, részben önálló munkában történt az új ismeretek elsajátítása és az "önálló munka - közös megbeszélés" munkamódszerre építő alkalmazást, gyakorlást helyezte a középpontba. Főleg adminisztratív nehézségek miatt a program országos szinten nem tudott elterjedni. Az 1980-as években bevezetésre került a Hajdú Sándor - Czeglédy István - féle "feladatrendszeres" program, mely a korábbi programok eredményeit felhasználva, hibáit elvetve, egy differenciálásra jobban ügyelő tankönyv és feladatrendszer összeállítását eredményezte. Ezután, az 1990-es években a NAT (Nemzeti Alaptanterv) került bevezetésre. Több hibája ellenére – melyek főként a drasztikus óraszám, s így a követelménycsökkenés miatt keletkeztek – előnye, hogy az általános fejlesztési követelmények jól kidolgozottak. A NAT mellett 2001-ben bevezetett kerettanterv sem hozott sok pozitív változást, hiszen az óraszámok tovább csökkentek. Napjainkban a különböző iskolatípusokban is néhány azonos probléma tapasztalható. Ezek között talán első helyen szerepelhet a tanulók értő olvasási képességének átlagos romlása. Igaz, ez főleg nem matematikatanítási hiányosság, mégis problémát jelent akár a definíciók, fogalmak, tulajdonságok, de akár a szöveges feladatok megértésében is. Szintén gyengült a tanulók szóbeli és írásbeli kommunikációs készsége is. Ezért is kiemelt fontosságú az alapfogalmak, definíciók megértését segítő módszerek, eljárások minél szélesebb körű alkalmazása a felsőoktatásban is. Jelen munkámmal remélem hozzájárulok ezen célkitűzés megvalósításához.

Míg a matematika nagyon sok területén az alapfogalmak, definíciók, műveletek bevezetése a mindennapi szemléletre, tapasztalatra nagymértékben támaszkodhat, addig a valószínűségszámításban kicsit nehezebb a helyzetünk. Nemetz Tibor [38] cikkének bevezetőjében írja: " A tanulók többnyire legfeljebb homályos fogalmakkal rendelkeznek arra nézve, mit is értsenek véletlen jelenségen, stb., nem ritkán kifejezetten hamisan ítélik meg a tömegjelenségekre vonatkozó törvényszerűségeket, vagy éppenséggel el sem tudják képzelni ilyen törvények létét vagy felhasználhatóságát." Ráadásul, mint ahogyan Rényi Alfréd, a magyar valószínűségszámítási iskola megalapítója írja [43]-ben, sokszor a tanár maga is ódzkodik az ilyen jellegű kísérletek végzésétől. "Statisztikai törvényszerűségeket lehet szemléltetni könyvekből, újságokból vett adatokkal, azonban nagyobb hatással van a tanulókra, ha szemük előtt, – sőt ha lehet, saját kezűleg – elvégzett kísérletekből nyerik a vizsgált adatokat. Néhány tanár nem ért ezzel egyet, mert fél, hogy a kísérletek nem vezetnek pontosan olyan eredményekre, mint amit várnak, amint ez az ilyen kísérletek természeténél fogva valóban bekövetkezhet. Szerintem ez a félelem nem indokolt, és ha a tanár jól érti a valószínűségszámítást, nem kerülhet kényelmetlen helyzetbe. Természetesen a tanárnak gyorsan kell reagálnia, hiszen olyan eredmények értékelése, amelyeket a tanár maga sem láthatott előre, nehezebb, mint olyan példák tárgyalása, amelyeknek eredményét a tanár előre kidolgozhatta." Természetesen ezekkel a kísérletekkel nemcsak a diák, de a tanár tapasztalatai is gyarapodnak, mely főleg a véletlen jelenségek tárgyalásánál szintén nagyon fontos szempont lehet.

Annak bizonyítására, hogy tapasztalatom szerint nagy problémák vannak az elméleti tananyagrészek elsajátításával (is!), vizsgálatokat folytattam hallgatóim körében. A zárthelyi dolgozatokban az elméleti kérdésekből elérhető pontszám 50 %-át teljesítették átlagosan. 118 fő eredményét vizsgáltam, az alábbi grafikon az elméleti részből megszerzett pontszámok alakulását mutatja:



1.1. ábra. Elméleti kérdésekből elért pontszámok megoszlása

A zárthelyi dolgozatokban bizonyítások nem, csak definíciók, tételek kimondása szerepelt. Valószínűleg még siralmasabb lenne a kép, ha bizonyítást is kértünk volna. Ezek után nem csodálkozhatunk azon, hogy a feladatmegoldásban is romlanak évről-évre az eredmények. Hiszen biztos elméleti tudás nélkül nem lehet siker a pontos, magabiztos feladatmegoldásban sem. A két területen (elmélet-feladatmegoldás) elért pontszámok szoros, pozitív korrelációban ($r = 0{,}82$) vannak, mely eredmény igazolja az előbbi kijelentést. (Az adatok a Függelék 2. Táblázatában találhatóak.) Ezek alapján jogosan várhatjuk, hogy egy pontosabb elméleti tudás megszerzésével a hallgatók jobb eredményt érnek el a feladatmegoldás területén is, mely természetesen a motiváltságra is pozitívan fog visszahatni. A különböző szakmai konferenciák alkalmával, más felsőoktatási intézménybeli kollégákkal beszélgetve, hasonló problémákról számoltak be saját intézményüknél is. Ezt igazolta számomra a néhány helyről visszaérkezett, kérdéseimre adott válaszokból adódó eredmény is. Mivel a számonkérés formája intézményenként, szakonként nagyon eltérő, így a ponteredményeket nem volt értelme összehasonlítani, de a kollégák általános véleménye megegyezik ebben a kérdésben. A Függelék 3. Táblázata ezekből a véleményekből mutat néhányat példaként.

A probléma tehát általános, és nem lehet egyszerűen azzal elintézni, hogy egyre gyengébb a középiskolát végzett fiatalok matematikatudásbeli színvonala, és visszadobjuk a "labdát" a középfokú képzésnek, ők pedig az alapfokú képzésre mutogatnak. Természetesen sok megoldandó feladat, probléma van ezeken a képzési területeken is, de nekünk az adott szemeszterekben a "hozott anyagból kell dolgoznunk", vagyis az éppen felvett hallgatókkal kell elsajátíttatni a szükséges ismereteket. Több intézményben előkészítőkkel, felzárkóztatókkal próbálják a tudásbeli hiányosságokat pótolni, de legalább ilyen fontos az alapképzésben is a fogalmak, definíciók még pontosabb megértetése, azok magabiztos használatának elérése. Dolgozatom 3. fejezetében ehhez kívánok módszertani segítséget nyújtani egy konkrét (leghosszabb szériák vizsgálata) problémakör tárgyalásán keresztül.

1.2. Rekurziók, aszimptotika, szimuláció

Mit is értünk rekurzión? Az idegen szavak és kifejezések szótára szerint a "rekurzió valamilyen algoritmus szerint ismétlődő lépésekből álló műveletsorozat, ahol az eredmény a további műveletek kiindulópontjaként visszatér". Pontosítsuk ezt a matematika területére vonatkoztatva. Rekurzióval egy sorozatot úgy definiálunk, hogy megadjuk a kezdőértéket (vagy értékeket), majd általában egy értéket az előző(ek)-ből határozunk meg különböző műveletekkel. Vagyis az eljárásnak két fontos eleme van. Az első, hogy meg kell adni az indulóértéket (vagy értékeket), amellyel a rekurziónk kezdődik. Ezután kell megadni azt a hozzárendelést, mely megmutatja, hogy a következő elemek milyen módon származnak az előző(ek)ből. (Ez a számítástechnikában egy olyan eljárást jelent, amely a végrehajtása során önmagát hívja meg és hajtja végre.) Sorozatok esetén tehát a hozzárendelési utasítást egy olyan képlettel adjuk meg, mely megmutatja, hogy a sorozat egy tetszőleges tagja - bizonyos tagtól kezdve - hogyan kapható az előző tag(ok)ból.

Rekurzióval tulajdonképpen már az általános iskola első osztályában találkozik a kisdiák – csak természetesen nem nevezik így –, amikor is a tanító néni (vagy bácsi) sorban azt kéri a gyerekektől, hogy mindenki adjon hozzá pl. 2-t az előtte elhangzó számhoz. Úgynevezett számláncokat képeznek a gyerekek. Példánknál maradva az $a_n = a_{n-1} + 2$ rekurziót hajtják végre a kisdiákok, ahol az a_1 a tanító által elsőnek megadott szám. Ambrus András [2] szerint, Piaget fejlődési szakaszait tekintve ez a korcsoport a műveletek előtti és a konkrét műveletek szakaszának határán van, így az egyszerű rekurziós műveletek általánosítása, explicit formában való megadása meg sem valósítható. Miután, 7 éves kor körül, a gyerek a konkrét műveletek, majd 11 éves kor körül a formális műveletek fejlődési szakaszba lép, egyre ritkábban történik számolás rekurzív módon. Ekkor a számláncokra, és a "Mit csinál a gép?" típusú feladatokra explicit összefüggéseket, képleteket állítanak fel a tanulók. Olyannyira, hogy amikor középiskolában megemlítésre kerül a Fibonacci-sorozat, a rekurzió már idegenül hat a diák számára. Több tanárkolléga is megemlíti az adott tanórán, hogy az említett sorozat elemeinek a megadása rekurzív módon történik, de mivel többnyire ez az egyetlen olyan eset, amikor rekurzióval találkozik a diák a középiskolában, hamar el is felejti. Viszont (nagyon hasznosan) ezen nevezetes (Fibonacci) sorozat néhány elemének kiszámoltatása során automatikusan merül fel a diákokban az igény a számítógép alkalmazására. Érdekes tapasztalat, hogy míg kb. 20 évvel ezelőtt a diákok akár a 15. elemig is fejben vagy írásban készséggel számolták az elemeket, addig napjainkban (a számoló- és számítógépek korában) a 4., 5. elemnél már mondják, hogy számoltassuk a rekurziót inkább számítógéppel. (Vizsgálataink során, majd ki is használjuk ezt a természetesen felmerülő igényt a számítógép használatára.) Miért is fontosak a rekurzív képletek és ezek tanítása? Először is, mert találkozunk olyan problémákkal, melyek nem írhatók le explicit formulával. Ilyen pl. a már említett Fibonacci-sorozat, de nagyon jó példa erre az általunk vizsgált problémakör is. Hiszen a pénzdobás kísérletet tekintve a leghosszabb széria hosszát leíró eloszlásfüggvényre nincs pontos és egyben zárt formula. Másrészt fontos tudni és tudatosítani, hogy rekurzióval mindig pontos eredményt kapunk, nem közelítő vagy átlagértéket. A rekurziós képletek alkalmazásának egyetlen hátránya és egyben akadálya van, a sokadik tag meghatározása sokszor nehézségbe ütközik még számítógép használatával is. Erre a problémára külön kitérek a 3. fejezetben.

Az aszimptotikus tulajdonsággal először a középiskolában a függvények tulajdonságainak tárgyalásakor találkozik a diák, amikor néhány függvény grafikonjához ún. aszimptotákat adnak meg. Ekkor aszimptotán olyan egyenest értünk, amelyet valamely görbe végtelenbe nyúló része megközelít, de soha el nem ér. Így általánosan az aszimptotikusság olyan tulajdonságot jelent, amellyel akkor rendelkezik valamely matematikai kifejezés, ha az egymást követő értékei egyre inkább megközelítik egy adott függvény értékeit. Nagy n esetén az aszimptotikus értékek tehát már olyan közel esnek a tényleges értékekhez, hogy jól használhatjuk azokat, ha az eredeti értékeket nem (vagy csak nehezen, bonyolultan) tudjuk meghatározni. Kifejezetten aszimptotikus tételek csak a felsőoktatásban szerepelnek. Az általam a 3. fejezetben vizsgált tételek bizonyításainak ismertetésétől eltekintek, az érdeklődő a hivatkozott szakirodalomban megtalálhatja azokat. Annak a rögzítése viszont, hogy ilyen tételek léteznek, fontos és hangsúlyozandó. Hiszen mint említettem és majd be is mutatom a 3. fejezetben, nagy elemszám (n) esetén a rekurzív algoritmus már nehézkesen alkalmazható még számítógéppel is, viszont ebben az esetben a közelítő eredmények egyre közelebb esnek a valós értékekhez, s így jól használhatóak.

A köznapi nyelvben a szimuláción többféle dolgot is érthetünk. Talán az első, ami az átlagembernek először eszébe jut, a betegség szimulálása. Kevés olyan diák van, aki ne akart volna megúszni pl. egy dolgozatírást valamilyen "súlyos betegség" eljátszásával. Természetesen mi a jelen keretek között nem egy adott folyamat eljátszását fogjuk érteni szimuláción, hanem az ún. Monte Carlo szimulációt fogjuk tárgyalni. Az általunk vizsgált folyamat többszöri ismételt "lejátszása" során kapott eredményekből átlagértékeket számolhatunk (vagy számoltathatunk), melyek az adott folyamatot jellemzik. Ez utóbbinak a hangsúlyozása azért fontos, mert sok diák szimuláción csak azt érti, hogy egy folyamatot vagy kísérletet lejátszunk, vagy lejátszatjuk számítógéppel (akár csak egy alkalommal is!) és a lejátszás eredménye adja a keresett érték várható eredményét. A számítógép alkalmazása jó lehetőséget teremt arra – hiszen gyorsan lejátszathatók többször, ugyanolyan körülmények között a folyamatok – , hogy megmutassuk az eredményekben adódó különbségeket eltérő ismétlésszámok esetén.

A szimuláció alkalmazása az oktatásban számos területen hoz jó eredményeket. Rochowicz [48] cikkében – konkrét valószínűségszámítástanításbeli alkalmazások mellett – tárgyalja a számítógépes szimulációs technikák előnyeit is, melyek közül kiemelném néhányat. A véletlen tömegjelenségek megértését, az egyes fogalmak jelentésének az elmélyülését nagymértékben segíti a szimuláció, hiszen akár a bonyolult matematikai formulák ismerete nélkül is lehet vizsgálni a különböző folyamatokat és a hozzájuk kapcsolódó értékeket. A hallgató akár egyedül is megismételheti, elvégezheti akárhányszor a kísérleteket, a folyamatok lejátszását. Összevethetik egymással az egyedi, hallgatónként kapott eredményeket, ezekből újabb összefüggéseket lehet vizsgálni.

A matematikai szimuláció Monte Carlo módszer néven vált ismertté, segítségével egy véletlen változó átlagértékét tudjuk meghatározni. Alkalmazása főleg akkor célravezető, ha létezik ugyan analitikus megoldás, de az túlságosan bonyolult, illetve ha nem is létezik analitikus megoldás. Tehát ha nem tudunk vagy nem akarunk bonyolult számításokat végezni. A nagy számok törvénye alapján elegendő számú minta vétele esetén a kapott átlagérték közel fog esni az általunk nem ismert valódi értékhez. A szimuláció segítségével így ezen említett törvény is érthetőbb lesz a hallgatók számára. Könnyen be tudjuk mutatni, hogy a kevés számú ismétlés esetén nem kaphatunk jó megoldásokat. Ha viszont nagy számú (akár több ezres) ismétlést végzünk (végeztetünk a számítógéppel), a kapott átlageredményeink nagyon jól megközelítik a valós eredményeket. Ez azért is nagyon hasznos, hiszen mint látni fogjuk a 3. fejezetben, nagy n esetén a pontos eredményt szolgáltató rekurzió már alkalmazhatatlan a hosszú futásidő és egyéb kapacitásproblémák miatt (még modern számítógéppel is). Tehát ha például a pénzdobás kísérletben egy n hosszúságú dobássorozatot vizsgálunk úgy, hogy N-szer megismételjük a kísérletet, (ahol $N = 1000$ például vagy még nagyobb) akkor minden n esetére egy elfogadható értéket kapunk. A Monte Carlo módszer elnevezés onnan ered, hogy Monaco fővárosa mint a szerencsejáték fellegvára ismert, és a rulettkerék tekinthető egy egyszerű véletlenszámgenerátornak is. A névadás és a módszer szisztematikus kifejlesztésének időpontja 1944-re tehető, amikor is az atombomba megalkotásával kapcsolatos kísérletek során, a számítástechnika fejlődésével lehetőség adódott a szimulációs technikák megalkotására. Bár korábban is léteztek örvendetes próbálkozások, de ezek egyedi példák maradtak. Például [41]-ben olvashatjuk, hogy már 1873-ban A. Hall a Π szám meghatározására, vagy Student (W.S. Gosset) 1908-ban a t-eloszlás kísérleti leírására használt szimulációnak nevezhető eljárást. Tudományos kutatási módszerré azonban csak Neumann és Ulam 1944-ben folytatott munkássága révén vált. 1948-ban Fermi, Metropolis és Ulam már a Schrödinger egyenlet sajátértékeinek becslésére használta a módszert, és napjainkra elmondható, hogy minden tudományterület alkalmazza kutatásában ezt a hatékony eljárást. A Monte Carlo módszer születésének történetéről olvashatunk N. Metropolis [34], és Ulam-mal közös [35] cikkében, melyben előrevetíti a módszer fejlődésének, alkalmazásának azt a jövőbeli képét, amikor is az emberi elmét, valamint az intelligenciát is lehet majd szimulálni megfelelő technikai és elméleti háttér segítségével.

A módszer megismertetése, oktatása - éppen az alkalmazhatóság sokrétűsége miatt - minden tudományterületen folyó képzés során nélkülözhetetlen. Nálunk, Magyarországon főleg az informatikát hallgatók számára létezik (kidolgozott tematikával) ezen téma oktatása. Néhány előadó megemlít ugyan eseteket 1-1 terület tárgyalásánál, amikor is szimulációval jó eredményeket lehet elérni, de a nem informatika szakos hallgatók nem sokat hallanak a módszerről.

A külföldi tapasztalatok is azt mutatják, hogy ezen a területen még sok pótolnivaló van. Ingolf Stahl többek között a [55], és [56]-ben írt tanulmányaiban kifejti több mint 30 éves oktatási tapasztalata alapján levont következtetéseit a szimuláció oktatásával kapcsolatban.

Nálunk a mérnökképzésben alkalmazzák a MATLAB alatt futtatható SIMULINK programot – mely dinamikus rendszerek szimulációjára alkalmas – , de a gazdasági képzés területén is nagy szükség lenne megfelelő szinten, megfelelő szoftverrel alkalmazni a Monte Carlo szimulációs eljárást.

1.3. Az alkalmazásokról

A nem matematika szakos hallgatók matematika óráin gyakran találkozunk a következő hallgatói kérdéssel: Minek tanuljuk ezt vagy azt a részt (illetve általában a matematikát), mire tudom ezt használni? Válaszolhatnánk persze fennkölten, Rényi által [44]-ban, Hieron szájába adott gondolattal is: "Állítólag egyik tanítványa, akit geometriára oktatott, azt kérdezte Euklidésztől: Mi hasznom lesz abból, ha ezeket a dolgokat megtanulom? Erre Euklidész odahívta a szolgáját, és azt mondta neki: Adj ennek az embernek egy obulust, mert ő hasznot akar húzni abból, amit tanul." Szintén ebben a műben Arkhimédész szavaival Rényi ezt úgy értelmezi, hogy bár Euklidész a matematika eredményeinek hasznosságával való foglalkozást nem tartotta tudóshoz méltatlannak (sőt, rengeteg gyakorlati alkalmazást ismertető munkája maradt ránk), mégis úgy gondolja, hogy a matematikában csak azok képesek elmélyedni, akik önmagáért érdeklődnek iránta, és nem csak a hasznosságát keresik. Mivel a mi főiskolánkon nem matematikus hallgatók képzése folyik, így a számukra még fontosabb, hogy találkozzanak olyan valós problémákkal, ahol a tanult tételeket alkalmazni is tudják. Egyrészt ezek jó motivációs tényezők lehetnek, fenntartják az érdeklődést, hiszen sok hallgató csak a problémák megismerése után kezd el foglalkozni a megoldáshoz szükséges elméleti anyaggal. Másrészt a különböző szakterületeken a szakmaspecifikus alkalmazásai az elsajátított alapozó ismereteknek minden végzett hallgató számára hasznos a munkába kikerülve is. Az intézményünkben végzett (TÁMOP Munkaerő-piaci alkalmazkodás fejlesztése című) felmérésből is az derült ki, hogy a cégek, vállalkozások is a tanult ismeretek alkalmazását várják el a hozzájuk szakmai gyakorlatra vagy később alkalmazásba felvett hallgatóktól. Az alábbi 1.1 táblázat alapján látható, hogy a problémamegoldás milyen fontos szerepet játszik a munkáltatók kompetenciarangsorában – legmagasabb pontszám, legkisebb szórással – , valamint a végzett hallgatók visszajelzéséből (1.2 táblázat) is az derül ki, hogy az alapozó ismereteket tudják az évközi, szakmai gyakorlat után a leghasznosabban alkalmazni. A 3. fejezetben említett problémakörhöz kapcsolódóan ezért ott megemlítek néhány alkalmazási lehetőséget, melyek tárgyalásával a tanár színesítheti a száraznak tartott matematikaórát.

Kompetencia	Átlagos értékelés	Szórás
Idegen nyelvű kommunikáció	4,74	2,25
Alapvetős szoftverek használata	5,75	1,73
Szakmai szoftverek használata	3,69	2,36
Munkatársakkal, ügyfelekkel való kommunikáció	6,12	1,33
Problémamegoldó készség	**6,18**	**1,26**
Prezentációs, előadói képesség	4,60	2,00
Team munka, kooperáció	5,47	1,63

1.1. táblázat. A munkáltatók véleménye szerinti kompetencia értékelése, skála: 1-7

Tudáselem megnevezése	Átlag	Szórás
alapozó ismeretek	**3,01**	**1,09**
szakmai ismeretek	2,64	1,7
szakirány	2,84	1,3
évközi gyakorlat	3,47	1,6
15 hetes gyakorlat	2,71	1,7

1.2. táblázat. Az egyes tudáselemek hasznosíthatósága, a végzett hallgatók véleménye szerint, skála: 1-5

2. fejezet

A valószínűségszámítás tanítása

A valószínűségszámítás oktatásának célját, tartalmát és módszerét tekintve az alábbi, Rényi által pl. [43]-ben lefektetett alapelveket tekintem irányadónak. Miért is fontos valószínűségszámítást tanítani? Három fő célt lehet kiemelni, az első, hogy fontos szerepe van a gondolkodás fejlesztésében. Hiszen tanulmányaik során tapasztalhatják a hallgatók, hogy a világos, logikus gondolkodás alkalmas a bizonytalansággal bíró esetek vizsgálatára is. Ezzel szorosan összefügg a második cél, miszerint a tudomány, technika és a mindennapi élet különböző területein való hasznossága miatt kell foglalkoznunk a valószínűségszámítással. Modern korunkban szinte minden munkaterületen szükség van bizonyos fokú valószínűségszámítási ismeretekre. Végül azért is fontos a tanítása, mert nélkülözhetetlen szerepe van a matematikai nevelésben is, sőt a hallgatók jellemformálásában is. Hiszen segítségével könnyebb a valóság matematikai modelljének megértése, egyáltalán annak természetessé válása, hogy ilyen modellek léteznek.

Ha a tartalmi oldalt nézzük, leszögezhető, hogy a valószínűségszámítás a véletlen tömegjelenségekkel és ezek törvényszerűségeivel foglalkozik. A tárgy bevezetésekor fontos tudatosítani ezen két tulajdonság jelentését, elkerülve ezzel a gyakran előforduló félreértéseket a tárgyban megismert tételek alkalmazhatóságait illetően. Szemléletes példákkal egyértelművé tehetjük, hogy milyen jellegű problémákkal foglalkozik a tárgy. (Lásd például [18] Véletlen tömegjelenségek fejezetében említett példákat.) A tanítandó konkrét témákat nézve, nyilvánvalóan iskolatípusonként változó lehet ezek köre, azonban mindenféleképpen és mindenhol először is a szükséges matematikai elméletet kell pontosan elsajátítani. Ezután legalább ilyen fontos az alkalmazások megismerése, a véletlen tömegjelenségek leírása, vizsgálata különböző problémákban. Pedagógiailag is nagyon fontos, hogy a hallgató össze tudja kapcsolni az elméleti ismereteket az alkalmazásokkal. Rényi az említett írásában megemlíti még a valószínűségszámítás tudománytörténeti, illetve filozófiai kérdéseinek tárgyalását is, erre azonban a szűkülő órakeretek miatt egyre kevesebb lehetősége van az oktatóknak. Pedig ezen terület tárgyalása egyrészt motiválhatná a matematika iránt kevésbé érdeklődő hallgatókat is, másrészt segítené a tanulókat abban, hogy megismerjék a valószínűségszámítás sajátos gondolkodásmódját.

Végül nézzük a módszertan kérdését. A fő hangsúly (a különböző fokú képzésekben egyaránt) a kísérletezésen, szemléltetésen van (kellene, hogy legyen!). Ezek fontosságáról különösen a valószínűségszámítás tanításában, már írtam a fejezet elején. Itt most azt emelném ki, hogy a jól megválasztott példák, kísérletek, segítenek beláttatni a hallgatókkal, hogy a matematikai szigorúságra szükség van és a hanyag tárgyalás hamis eredményre vezet. "A matematikatanítás alapját általában jól választott példáknak kellene képezniük, és sehol sincs olyan nagy választék izgalmas és mégis elemi példákban, mint a valószínűségszámítás területén." [43] Itt természetesen nemcsak a jól ismert szerencsejátékos feladatokra gondolhatunk. Révész professzor úr például etiópiai előadásain nem is említhetett ilyeneket, hiszen ott ezek ismeretlenek és tiltottak is. A különböző feladatok, problémák vizsgálata viszont nélkülözhetetlen a tanítás folyamán, így szükség szerint más és más területről, de a hallgatók számára ismert környezetből kell a kísérleteket kiválasztani.

2.1. Fontosabb határérték tételek

A valószínűségszámítás talán legfontosabb törvénye a Nagy számok törvénye(i). Megértésük jelentőségét elsődlegesen az adja, hogy a valószínűség tapasztalati fogalmát köti össze az axiómákból felépített elmélettel. Másrészt a Monte Carlo szimulációval kapott eredmények elfogadásának elméleti megalapozását adják, végül, de nem utolsó sorban a statisztikai elemzésekben is kiemelkedő szerepet játszanak.

A már remélhetőleg korábban (legalább a középiskolában) elkezdett kísérleteket folytatva, a diákokban kialakul a véletlen fogalma, és már ekkor tudatosulhat bennük, hogy a véletlen törvényszerűségei csak nagy számú ismétlés esetére vonatkoznak. A valószínűségszámítás kialakulásának a kezdetén még a matematikusok körében is, de manapság is gyakori hiba a hallgatóknál, hogy a törvényszerűségekből egy adott, következő esemény bekövetkezésére szeretnének következtetni. Az egyszerű érmedobás vagy kockadobás kísérleteket érdemes először gondolatban lejátszatni a hallgatókkal (legalább 100 dobással), hiszen a 3. fejezet bevezetőjében említett Varga Tamás féle kísérlet alapján várható és tapasztalható a diákok által is, hogy ők kevésbé várják a több azonos jel egymásutániságát. A gondolati kísérletek a kiegyenlítődésre törekednek, míg a valóságban hosszabb azonos jelsorozatok is adódnak. A kísérletek számát növelve tapasztalható, hogy a relatív gyakoriságok egyre közelebb esnek az elméleti valószínűségértékhez, az ingadozások egyre kisebbek. A 100-as dobássorozatig célszerű ténylegesen elvégeztetni manuálisan a kísérletet a hallgatókkal, de nagyobb dobásszám esetén már számítógéppel végeztetjük el. Egyrészt a kísérlet időigényessége miatt, másrészt a számítógéppel rögtön kirajzoltathatjuk a megfelelő grafikont (akár folyamatában is).

Nézzük először a **Nagy számok törvényének gyenge alakját**.

2.1.1. Tétel. *Ha a ξ_i valószínűségi változók páronként függetlenek, azonos eloszlásúak, és $E\xi_i^2 < \infty$, akkor a közös várható értéket m-mel jelölve ($m = E\xi_i$), kapjuk, hogy $\frac{S_n}{n}$ sztochasztikusan konvergál m-hez.*

2.1.2. Megjegyzés. Hincsin bebizonyította, hogy elegendő a $E|\xi_i| < \infty$ feltétel is.

Ha most egy $P(A) = p$ valószínűségű A esemény bekövetkezésének vizsgálatára n kísérletet végzünk egymástól függetlenül, akkor az esemény relatív gyakorisága $(\frac{k_A}{n})$ éppen $\frac{S_n}{n}$ alakban írható. (Ahol $S_n = \sum_{i=1}^{n} \xi_i$ és ahol ξ_i jelenti az A bekövetkezéseinek a számát – gyakoriságát – a kísérlet i-edik végrehajtásában.) Így tehát azt kapjuk, hogy egymástól független kísérletek sorozatában az A esemény relatív gyakorisága sztochasztikusan konvergál az A esemény $P(A)$ valószínűségéhez – elméleti értékhez – ha a kísérletek száma minden határon túl nő. Ezzel a nagy számok törvényének Bernoulli- féle gyenge alakját kapjuk:

2.1.3. Tétel. *Tetszőleges kis $\varepsilon, \delta > 0$ számokhoz található olyan $N(\varepsilon, \delta)$, hogy $n \geq N$ esetén $P(|\frac{k_A}{n} - P(A)| < \varepsilon) \geq 1 - \delta$.*

A gyenge jelző sztochasztikus konvergenciára utal, ami azt fejezi ki, hogy nagy n esetén kicsi a valószínűsége annak, hogy az eltérés nagy lesz. (De ritkán, vagyis kis valószínűséggel azért előfordulhat!) A tétel jelentőségét az adja, hogy törvényszerűségben látjuk a tapasztalati eredmények és az elmélet összhangját. Hiszen Kolmogorov a három axiómáját a konkrét relatív gyakorisági adatokra alapozva írta le, és ezek segítségével felépült a valószínűségszámítás tételrendszere. Ebben a rendszerben egy bizonyítható állítás a Nagy számok gyenge törvénye, mely törvény teljesen összhangban van a tapasztalatból származó eredményekkel. A tételt magát nem szemléltetjük, hiszen a konvergencia nem trajektóriánkénti. Viszont a relatív gyakoriság vizsgálatára végezzünk a hallgatókkal ténylegesen kísérleteket, például az egyszerű érmedobás kísérletet. Ez azért nagyon fontos, mert egyrészt ez mutatja a valóság tényleges (néha meglepő) viselkedését, másrészt a számítógépen generált véletlen számok elméletileg nem tekinthetők független, azonos eloszlású valószínűségi változók realizációjának. Rényi [42]-ban leírja, hogy már a XVIII. században végeztek hosszú dobássorozatokra vonatkozó megfigyeléseket, például Buffon 4040 dobást vizsgált, míg Pearson a XX. század elején 24000 dobást hajtott végre ténylegesen.

A **Nagy számok törvényének Kolmogorov féle "erős"** megfogalmazása szerint:

2.1.4. Tétel. *Teljesen független, azonos eloszlású valószínűségi változók* $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ *esetén, ahol* $E|\xi_i| < \infty$, $\frac{\xi_1+\xi_2+\ldots+\xi_n}{n} \to m$, *vagyis* $\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{n} = m$ *majdnem biztosan.*

2.1.5. Megjegyzés. Etemadi belátta, hogy az erős tétel is érvényes nemcsak teljes, hanem páronkénti függetlenség esetén is, a gyenge törvényhez hasonlóan.

A majdnem biztos, vagy 1 valószínűséggel való konvergenciából következik a sztochasztikus konvergencia. Innen ered az "erős" elnevezés, hiszen a "gyenge", sztochasztikus konvergenciánál erősebb konvergenciáról beszélünk az ilyen tételeknél. A "gyenge" törvényhez képest tehát most már nemcsak az mondható el, hogy egy kísérlet során kapott átlagérték és az elméleti érték eltérése nagy n esetén, nagy valószínűséggel kicsi lesz, hanem kicsi is marad ez az eltérés. Pontosabban szólva: majdnem minden trajektória a várható értékhez konvergál. Feller ([23], 201. oldal) szavait idézve: "Ily módon a két törvény együttesen leírja a véletlen alapvető tulajdonságait, amelyek a valószínűségek szemléletes fogalmának hátterében rejlenek."

A hallgatók által elvégzett valódi kísérletekben kapott relatív gyakorisági eredményeket rögzíthetjük pl. Excel táblában, így egy csoporton belül is össze tudjuk hasonlítani a hallgatók egyedi eredményeit, de a többi csoport hallgatóinak eredményeivel is elvégezhető az összehasonlítás. Mivel a szűk órakeretben kevés az idő a tényleges kísérletek elvégzésére, azért otthoni feladatként végezték el a hallgatók az érmedobálást és rögzítették a kapott eredményeket. (A jól ismert, Rényi-féle összefüggés alapján, mely szerint nagy n esetén n dobásból körülbelül $\log_2 n$ a leghosszabb tiszta fej sorozat hossza, könnyen kiszűrhető az esetleges "hamis" sorozat, vagyis az, hogy a hallgató ténylegesen végre hajtotta-e a kísérletet, vagy csak leírt egy általa elképzelt véletlen sorozatot. A tanári "bravúron" a hallgatók kellőképpen meg is döbbennek. Részletesebben erről a 3. fejezetben írok.)

Az alábbi táblázat 3 tanulócsoportom (23-23-23 fő) által kapott eredmények közül az egyik csoport eredményeit mutatja, ahol az 1-es a fej eredményt, míg a 0 az írást szimbolizálja. Hallgatónként szerepel a 100 elemű dobássorozatuk által kapott fejdobás relatív gyakoriságának eredménye is. A másik két csoport eredményei a Függelék 4.a/1, 4.a/2 illetve 4.b/1 és 4.b/2 táblázatában találhatóak. A táblázatban minden oszlopnál feltüntettem a leghosszabb fejszéria, illetve alatta a leghosszabb bármilyen széria hosszát. A leghosszabb fejszériákat kékszínnel jelöltem, ahol a leghosszabb széria írásból (vagy írásból is) alakult ki, azt sárgával színeztem. Egy-egy oszlopon belül többször is szerepelhet ugyanakkora hosszúságú jelölés, hiszen a leghosszabb széria nem biztos, hogy csak egyszer szerepel a sorozatban. A táblázat nagy mérete miatt 50-nél kettéosztottam a sorozatokat az ábrázoláshoz.

	1. tanulócsoport egyedi eredményei																						
dobás sz.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23
1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	1	0	0	0	1	0	1	0	0	1	1	1	0	0
2	1	0	1	1	1	1	1	0	1	0	0	1	0	0	1	1	1	1	1	1	1	0	0
3	1	0	1	1	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0
4	0	1	1	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	1	1	1	0
5	1	1	0	0	1	1	0	0	0	0	1	0	1	1	0	1	1	1	0	0	0	0	1
6	0	1	1	1	1	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0
7	1	1	0	1	0	1	0	0	0	1	0	0	1	0	1	0	0	1	0	0	1	1	0
8	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	1	0	0	0	0	1	1	0	0	0	1	1	1
9	1	0	1	1	0	0	1	0	1	1	0	0	0	0	1	1	0	1	1	0	1	1	0
10	0	1	0	0	0	1	0	1	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	1	1	0	0	1
11	1	1	1	1	1	0	1	1	0	1	1	1	0	0	0	1	0	1	1	0	1	0	0
12	0	1	0	0	0	0	0	1	1	1	0	1	0	1	1	0	1	1	1	0	1	0	0
13	0	1	1	0	1	0	1	0	1	1	0	0	0	0	0	0	1	1	0	1	0	0	0
14	0	0	0	1	1	1	0	0	1	1	1	1	1	0	0	1	1	0	0	1	0	1	0
15	0	1	1	1	1	1	1	0	0	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	1	0	0	1
16	0	0	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	0	0	1	0	0
17	1	0	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	0	1	1	0	0	0	0	0	0
18	0	1	1	0	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1
19	0	1	1	0	0	1	1	0	1	0	0	1	1	0	1	1	0	1	0	0	0	0	0
20	1	0	1	0	0	0	0	1	0	0	1	1	1	1	0	0	1	1	1	0	1	1	0
21	0	0	0	1	1	1	1	1	0	0	1	0	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1
22	1	1	0	1	0	0	1	1	0	1	0	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	1
23	0	0	1	0	0	1	0	1	0	1	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	1
24	1	1	1	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	1	0	1	1	1	0	1	0	1
25	0	1	1	0	0	1	0	0	0	0	0	1	1	0	1	0	0	1	1	1	1	0	0
26	1	0	1	0	0	1	0	0	1	1	0	1	0	1	1	1	0	1	0	0	0	0	1
27	1	0	0	0	1	0	0	1	0	1	1	1	0	1	0	0	1	0	0	0	1	1	0
28	1	0	1	1	1	0	0	0	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	0
29	1	0	0	0	1	1	1	1	0	1	1	1	0	0	0	0	1	0	0	1	1	1	0
30	1	1	0	1	1	1	0	1	1	0	0	0	0	1	1	0	0	1	1	1	1	0	0
31	1	0	0	1	0	1	1	0	0	1	1	1	1	1	0	0	1	0	1	0	0	1	1
32	1	1	1	0	1	1	1	0	0	0	1	1	1	0	0	0	1	1	0	1	1	0	0
33	1	1	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	1	1	1	0	0	0	1	1	1	1
34	1	0	1	0	1	1	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	1	1	1	1	1	1	0
35	1	0	1	1	0	1	0	0	1	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1
36	0	1	1	1	1	0	0	0	1	1	1	1	0	1	1	1	0	1	0	1	1	1	1
37	1	0	1	1	0	1	1	0	1	1	1	0	0	0	1	1	0	0	0	0	1	0	0
38	0	0	0	1	0	0	1	0	1	1	1	0	0	0	1	1	0	0	0	1	1	1	1
39	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	1	1	0	0	0	1	1	1	0	0	1	0	1
40	1	0	0	1	0	0	0	0	1	1	0	1	1	0	0	1	0	1	0	1	0	1	0
41	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	1	1	1	1	1	1	0	1	0	1	0
42	1	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	1	1	0	1	1	1
43	0	0	1	1	0	0	1	1	0	1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	1	0	0
44	0	0	1	1	1	1	0	1	1	0	0	0	0	1	0	1	0	1	0	0	1	1	0
45	0	1	0	0	0	0	0	0	1	1	0	1	0	0	0	1	1	0	1	1	0	1	1
46	0	1	1	0	0	1	0	1	0	0	1	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
47	1	1	1	0	0	0	0	1	0	1	1	1	0	0	1	0	0	1	1	0	1	1	0
48	0	1	0	1	0	0	1	0	0	1	1	1	0	0	1	0	1	0	1	1	1	1	1
49	0	1	1	1	1	0	1	0	1	0	0	0	0	1	1	0	0	0	1	0	1	1	0
50	0	0	0	1	1	0	1	1	1	1	0	1	0	0	0	0	0	1	1	1	0	0	0

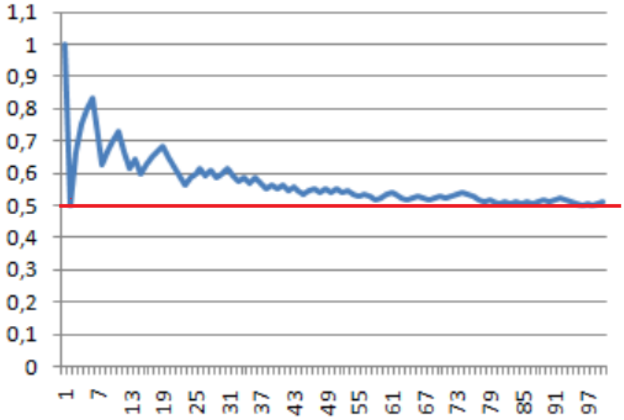
2.1. táblázat. Az 1. tanulócsoport 100 érmedobás eredménye, első 50 dobás

51	1	0	0	0	0	1	1	0	0	0	1	0	1	0	1	0	0	0	1	0	1	1	0
52	0	0	0	1	1	1	0	0	1	1	0	0	0	1	0	0	0	1	1	0	1	1	0
53	1	0	0	0	1	1	1	1	1	0	1	1	0	0	1	1	1	1	0	0	0	1	0
54	1	0	0	0	1	0	0	1	1	1	1	0	1	1	1	1	0	0	1	1	1	0	0
55	0	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1	1	0	0	1	1	1	0	1	0	1	1	0
56	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	1	1	1	0	0	0	1	1	0	0	0
57	1	1	0	1	0	1	1	1	1	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
58	0	1	1	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	1	1	1	1	1	0	0	1	1
59	1	0	0	1	1	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	1	0	1	0	1	0	0	0
60	0	1	1	1	1	0	1	1	1	0	0	1	0	1	1	0	1	0	1	1	1	0	0
61	0	1	1	0	1	0	0	1	1	1	1	0	0	1	1	1	1	1	0	0	0	1	1
62	1	0	0	0	0	1	1	0	1	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	1	1
63	0	1	1	1	1	1	0	1	0	1	1	0	0	1	1	1	1	1	0	0	0	1	1
64	1	0	1	1	1	1	0	0	0	1	1	1	0	0	1	1	1	1	0	0	0	1	0
65	0	1	1	0	0	1	0	1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	0	0	0	1	0	0
66	0	1	0	0	0	0	0	1	1	0	1	0	1	0	1	1	0	1	1	1	0	1	0
67	0	0	0	1	0	1	0	1	0	0	1	0	0	1	1	0	0	0	1	0	1	0	1
68	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	0	0	0
69	1	1	1	0	1	1	1	0	0	0	1	0	1	0	0	1	1	0	0	1	0	0	0
70	1	0	0	0	1	0	0	1	1	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	0	0	0	1
71	0	0	1	1	0	1	0	0	0	1	1	1	0	0	1	1	1	0	0	1	0	0	1
72	1	0	1	0	1	0	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	1	0	1	0	1	1	0
73	0	1	0	1	0	1	1	0	0	1	1	0	0	0	1	0	1	1	1	0	0	0	1
74	0	0	1	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	1	1	1	1	0	0	1
75	1	1	1	0	0	1	0	0	1	1	1	1	0	0	1	1	1	0	0	1	0	1	0
76	0	0	0	0	0	0	1	0	1	1	0	1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	1
77	0	1	1	1	1	0	1	1	1	0	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1
78	1	1	0	1	0	1	1	1	0	1	0	0	1	0	1	0	1	0	1	1	0	1	0
79	1	0	0	1	1	0	0	0	1	1	1	0	0	1	1	1	0	0	0	1	0	1	0
80	0	0	1	0	1	0	1	1	1	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	1
81	1	1	0	1	1	1	1	1	1	0	1	1	0	1	1	0	1	1	0	1	1	1	1
82	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	1	0	0	0	0	1	0	1	0	1
83	0	0	1	0	1	0	1	0	0	1	1	0	0	0	1	0	0	1	1	0	0	1	0
84	1	0	0	1	1	0	1	0	0	1	0	0	1	1	0	0	0	0	1	0	0	0	1
85	0	0	1	0	1	0	1	1	1	1	1	0	1	0	1	1	1	1	0	0	1	1	0
86	1	1	1	0	0	1	1	1	0	0	1	1	1	1	0	1	0	1	1	1	0	0	0
87	1	0	0	1	1	1	0	0	1	1	1	0	1	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1
88	0	1	1	0	0	1	1	1	1	0	0	1	0	1	0	1	1	0	1	1	0	0	1
89	0	1	0	0	1	1	1	0	1	1	1	1	1	0	0	0	1	1	0	1	1	1	0
90	0	1	0	1	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	1	0	0
91	0	1	1	0	0	0	1	0	0	1	1	1	0	0	1	1	1	1	0	1	0	1	1
92	1	1	0	1	1	0	0	1	0	0	0	0	0	1	1	0	0	1	1	1	1	0	1
93	1	1	1	0	0	0	0	0	1	1	1	0	0	0	0	1	0	1	0	1	1	1	0
94	0	1	0	0	1	1	1	1	1	1	0	1	1	0	1	0	1	1	1	1	0	1	1
95	1	1	1	1	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	1	1	0	0	0	1	0	0	0
96	1	1	0	0	0	0	1	0	1	1	1	1	0	0	1	0	1	1	1	1	1	0	1
97	0	1	1	1	0	1	1	0	1	1	0	1	1	0	1	0	1	0	1	1	0	0	0
98	1	1	0	0	0	1	0	1	0	1	1	1	0	0	1	0	1	1	1	0	1	0	1
99	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	1	1	1	1	0	0	1
100	0	1	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	1	1	0	1	1	0	1	0	0	1
fejek (1) sz.	47	52	52	47	46	52	47	45	48	60	54	51	35	41	60	52	57	58	51	53	54	49	44
fejek rel.gy.	0,47	0,52	0,52	0,47	0,46	0,52	0,47	0,45	0,48	0,6	0,54	0,51	0,35	0,41	0,6	0,52	0,57	0,58	0,51	0,53	0,54	0,49	0,44

legh. fej	10	13	6	6	4	7	4	4	6	9	7	5	5	4	6	6	11	6	8	7	4	6	4
lh. bárm.	10	13	6	6	6	7	5	5	6	9	7	8	9	7	6	6	11	6	8	7	4	6	9

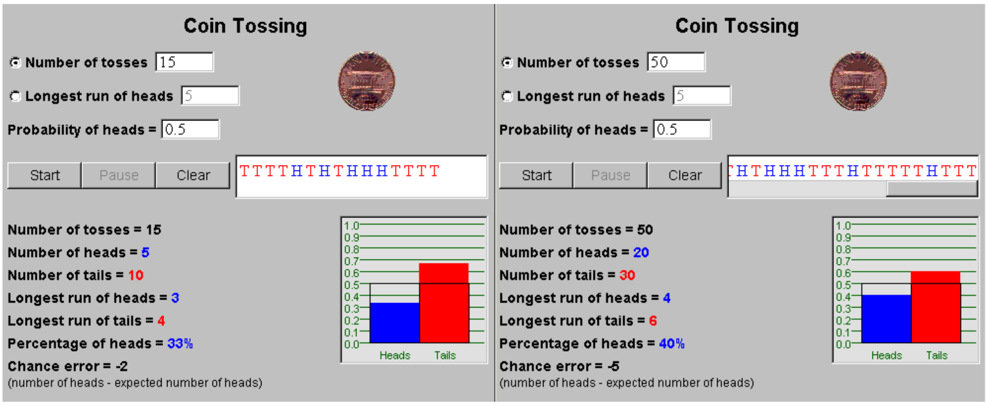
2.2. táblázat. Az 1. tanulócsoport 100 érmedobás eredménye, második 50 dobás

Sokszor tapasztaljuk a hallgatók körében is, hogy olyan tényeket is megpróbálnak a nagy számok törvényeinek tulajdonítani, vele magyarázni, melyeket az nem is tartalmaz. Ha egy hosszú, kétszemélyes pénzdobás-játék előtt megkérdezzük a hallgatókat, hogy szerintük melyik játékos hányszor fog vezetni, általában azt a választ kapjuk, hogy egyik is, másik is az esetek kb. felében. Ez azonban nem lesz igaz. Meglepő módon azt tapasztaltuk, a játékot megnyerő játékos a játék során majdnem végig vezetett. Tehát egy adott játék során minden időpillanatban vett átlagoknak semmi köze a sok játék során minden időpillanatban tekintett együttes átlagokhoz. Az ehhez hasonló, sokszor paradoxnak tűnő tulajdonságok vizsgálatával a bolyongások területe foglalkozik, ebből néhány fontosabb eredményt később még megemlítek. A hallgatóim eredményei közül egyet kiválasztva, a következő ábrán látható ez az érdekes tulajdonság is. A relatív gyakoriság értékeket pontonként ábrázolva, majd azokat összekötve (egy trajektóriát kapunk), ez a törött vonal a $0,5$-ös valószínűség körül ingadozik. Az is látható, hogy minél nagyobb az n, annál kisebb az ingadozás mértéke. Az ábrázolt kísérletben érdekes módon szinte végig $0,5$-nél nagyobb értéket kaptunk fejdobás relatív gyakoriságára. (Míg később látunk olyan eseteket is, ahol a p érték alatt halad a relatív gyakoriság majdnem végig.) Látható, hogy a fele-fele arányú vezetés gondolata nem helytálló.



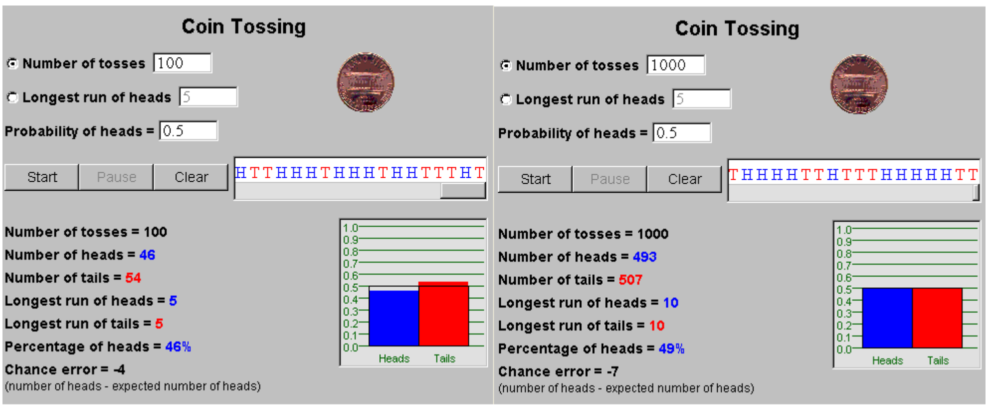
2.1. ábra. Egy hallgató érmedobás-kísérletének eredménye $n = 100$-ra

Az oktatásban sok előnye van a számítógépen realizált (tehát nem igazi) véletlen kísérletek végzésének is.
A *http://nlvm.usu.edu/en/nav/frames_asid_305_g_4_t_5.html* oldalról indítható program segítségével először kevés dobásszám esetén nézzük, majd egyre nagyobb dobássorozatokra a relatív gyakoriság eltérését az eseményünk konkrét valószínűségétől (szabályos érme esetén ez 0,5). Az említett animációnak több előnye is van, változtatható az érmedobások száma, numerikusan is kiírja a dobás-eredményeket és grafikonon is kirajzolja a relatív gyakoriság értékeket. Változtatható az érme "szabályossága", tehát szabálytalan érmével is elvégezhetjük a kísérletsorozatokat, valamint a "csuszka" segítségével végigkövethető a dobássorozat minden eleme, látható az egész dobássorozat (a 3. fejezet kísérletéhez is jól használható ez a lehetőség, illetve hogy kiírja a program a leghosszabb sorozatok hosszát).
Az alábbiakban egy-egy kísérlet során kapott eredménytáblát mutatok be szabályos és szabálytalan (fejdobás valószínűsége legyen 0,7) érme esetén, 15, 50, 100, és 1000 dobássorozatra. A számítógépes animálás nagy előnye még, hogy hosszú sorozatokat is le tudunk futtatni többször egymás után, így lehetőség van a viselkedés alaposabb megismerésére.



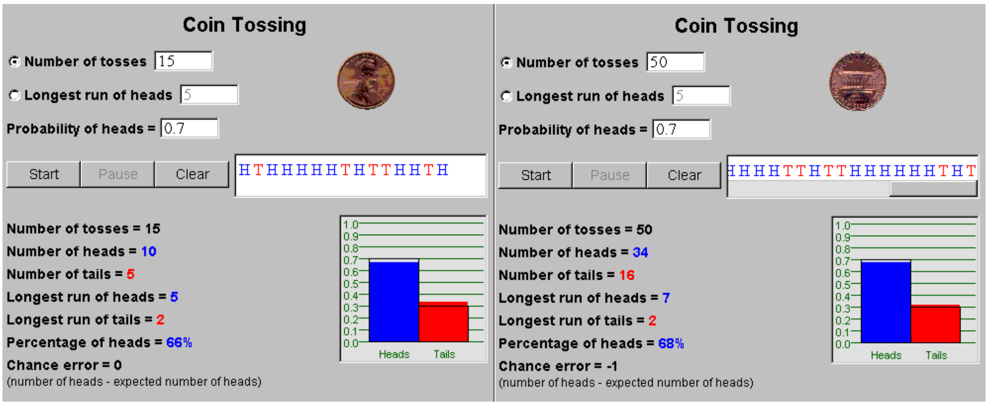
Nagyon rövid sorozat $p = 0.5, n = 15.$ Rövid sorozat $p = 0.5, n = 50.$

2.2. ábra. Animáció rövid sorozat, szabályos érme esetén



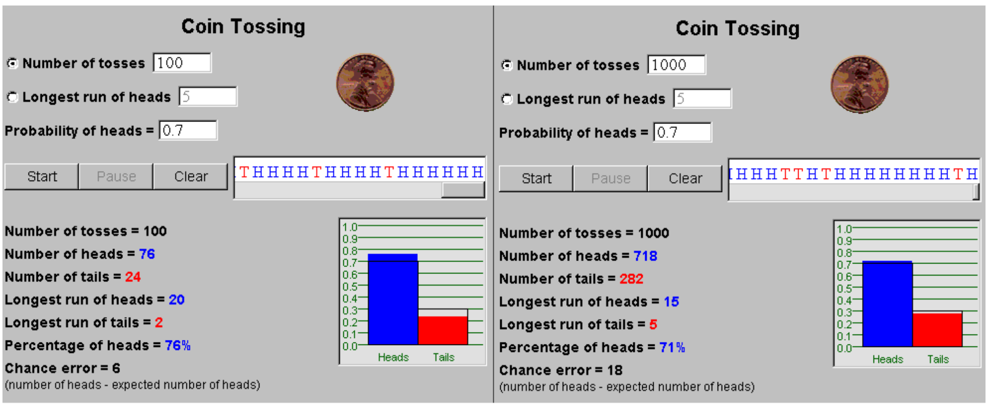
Hosszú sorozat $p = 0.5, n = 100.$ Nagyon hosszú sorozat $p = 0.5, n = 1000.$

2.3. ábra. Animáció hosszú sorozat, szabályos érme esetén



Nagyon rövid sorozat $p = 0.7, n = 15.$ Rövid sorozat $p = 0.7, n = 50.$

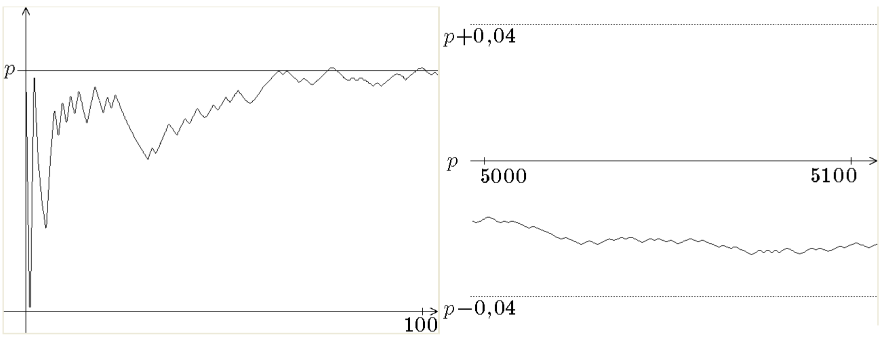
2.4. ábra. Animáció rövid sorozat, szabálytalan érme esetén



Hosszú sorozat $p = 0.7, n = 100.$ Nagyon hosszú sorozat $p = 0.7, n = 1000.$

2.5. ábra. Animáció hosszú sorozat, szabálytalan érme esetén

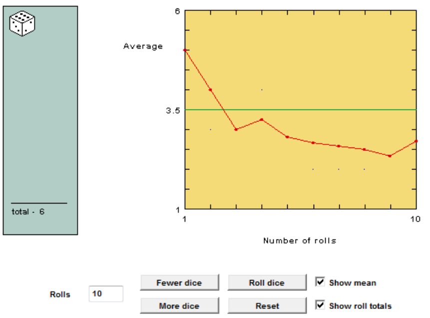
Grafikonon ábrázolva a kapott eredményeket, már viszonylag kis n esetén is jól látszik, hogy a relatív gyakoriság a p értéke körül ingadozik. Az alábbi (2.6) baloldali ábra, $n = 100$ esetén mutatja egy kísérlet eredményét. (Érdemes megfigyelni, hogy ebben az esetben – ellentétben a 2.1 ábra grafikonjával – szinte végig a p alatt maradnak a relatív gyakoriság értékek.) A jobboldalin pedig egy hosszabb sorozat esetén látható, hogy a relatív gyakoriság a p érték $0,04$ sugarú környezetében halad az 5000. és 5100. közötti dobásokat nézve. Mindkét ábra a [21] cikkben szerepel.

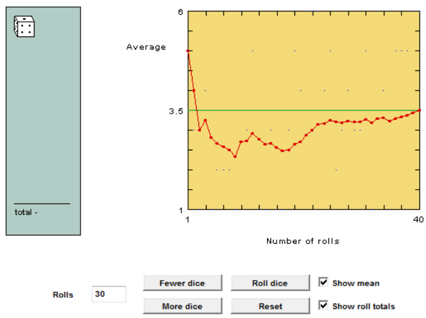


2.6. ábra. Érmedobás $n = 100$ esetén és egy 100-as szakasz hosszabb ($n > 5100$) sorozatnál

A nagy számok erős törvényét (mivel trajektóriánkénti konvergenciát tartalmaz) tudjuk szemléltetni egyedileg elvégzett kísérletekkel, illetve be tudjuk mutatni számítógépes programok segítségével is. Az egyedileg végzett kísérletekkel célszerű kezdeni, majd a hosszabb kísérletsorozatokat számítógép segítségével állítjuk elő. A változatosság kedvéért vegyük most a kockadobást. A várható érték 3,5 $(= 1\frac{1}{6} + 2\frac{1}{6} + 3\frac{1}{6} + 4\frac{1}{6} + 5\frac{1}{6} + 6\frac{1}{6})$.
A *http://bcs.whfreeman.com/ips4e/cat_010/applets/expectedvalue.html* oldalon lévő animációban beállítható, hogy látszódjon ez az (elméleti) érték, az esetenkénti dobások pontonként és ezek átlagai egy törött vonallal összekötve egy grafikonon. Több kocka is választható, kicsit

összetettebb feladatot is vizsgálhatunk a program segítségével. Az alábbiakban 10, 40,(előzőhöz még 30 dobás) 140 (előzőhöz még 100 dobás) és 300 (előzőhöz még 60 és 100 dobás, mert csak 100-as léptékkel tudunk maximálisan haladni) dobáshosszt mutatok be 1 és 3 kocka esetére. Az is látható a grafikonról, hogy vannak hosszabb szakaszok, amikor az átlag végig a várható érték alatt vagy felett van (hasonlóan az érmedobásnál említett jelenséghez).

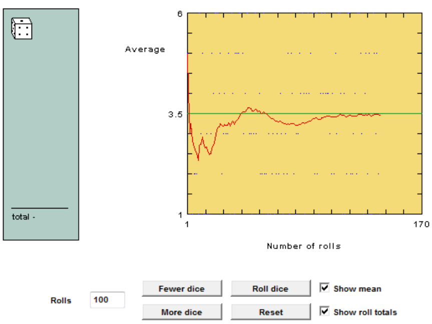


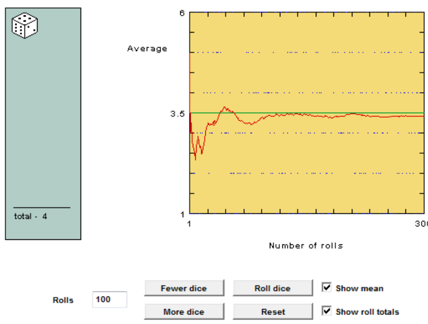


Nagyon rövid sorozat
egy kocka, $n = 10$.

Rövid sorozat
egy kocka, $n = 40$.

2.7. ábra. Animáció rövid sorozat, 1 kocka esetén

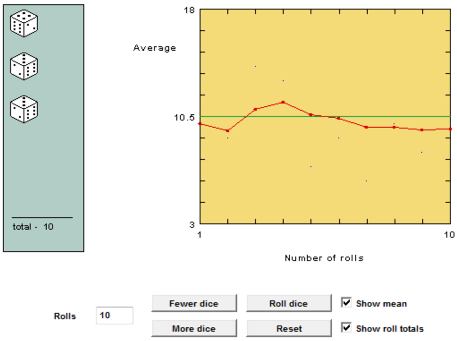


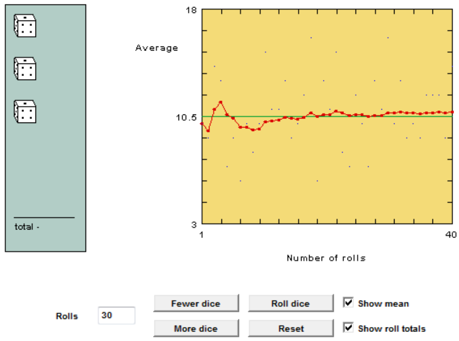


Hosszú sorozat
egy kocka, $n = 140$.

Nagyon hosszú sorozat
egy kocka, $n = 300$.

2.8. ábra. Animáció hosszú sorozat, 1 kocka esetén

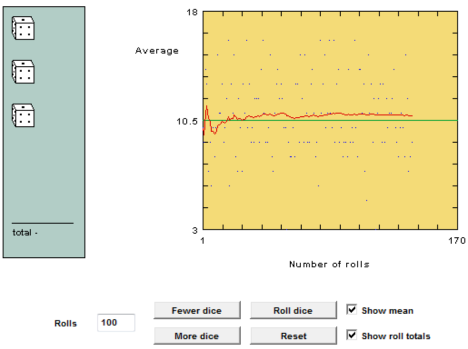


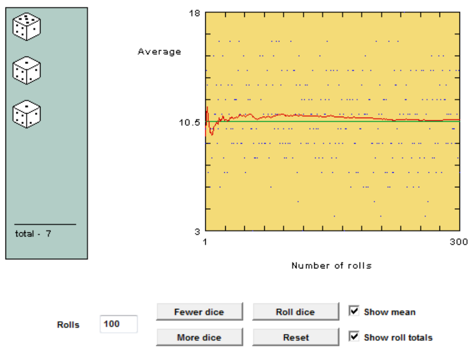


Nagyon rövid sorozat
három kocka, $n = 10$.

Rövid sorozat
három kocka, $n = 40$.

2.9. ábra. Animáció rövid sorozat, 3 kocka esetén





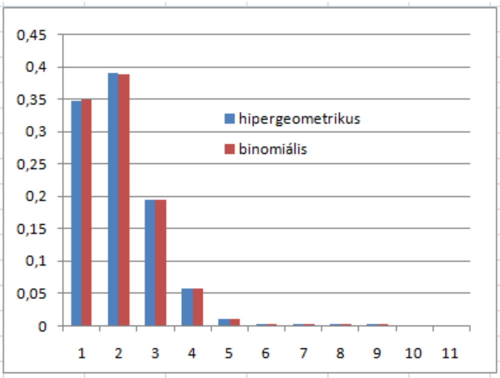
Hosszú sorozat
három kocka, $n = 140$.

Nagyon hosszú sorozat
három kocka, $n = 300$.

2.10. ábra. Animáció hosszú sorozat, 3 kocka esetén

A következő, a statisztikában is jelentős szerepet játszó törvény, a centrális (vagy központi) határeloszlás tétel. A szemléltetése előtt célszerű néhány nevezetes eloszlást (legalább a hipergeometrikus, binomiális, Poisson eloszlásokat) vizsgálni különböző n és p értékek esetén. A következő adattábla és grafikon jól szemlélteti, hogy ha az összes elemszám (N) és az azonos, számunkra fontos tulajdonságú elemek száma (M) nagy a minta elemszámához (n) képest, akkor a hipergeometrikus eloszlás jól közelíthető a binomiális eloszlással. (Ez konkrét feladatoknál a számolást is megkönnyíti.) Példánkban legyen $N = 1000, M = 100, n = 10$.

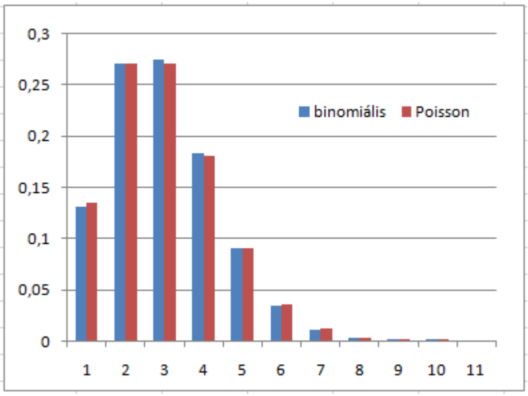
N=1000	M=100	n=10	p=0,1
hipergeo	binom	k=	
0,3469277	0,348678	0	
0,3893689	0,38742	1	
0,1944662	0,19371	2	
0,0569099	0,057396	3	
0,0108059	0,01116	4	
0,0013909	0,001488	5	
0,0001229	0,000138	6	
7,359E-06	8,75E-06	7	
2,858E-07	3,65E-07	8	
6,499E-09	9E-09	9	
6,572E-11	1E-10	10	



2.11. ábra. Hipergeometrikus eloszlás közelítése binomiális eloszlással

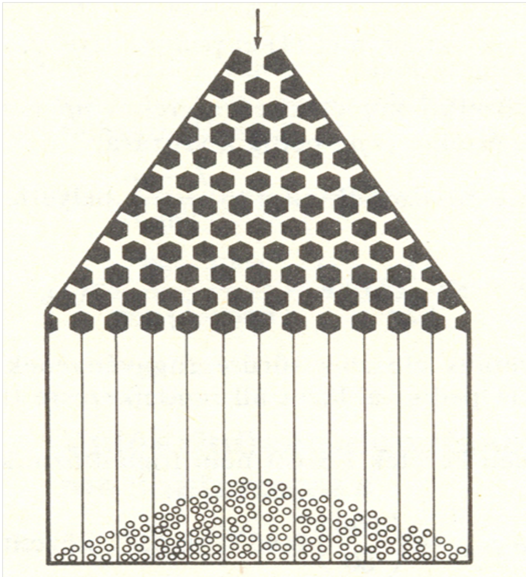
Ha a minta elemszáma n viszonylag nagy, de a p értéke kicsi (azért úgy, hogy az np szorzat sem 0-hoz sem a végtelenhez nem tart), akkor a binomiális eloszlás a Poisson eloszlással közelíthető. Az alábbi táblázat $n = 64$ és $p = 1/32$ esetén mutatja az első 10 értéket binomiális és Poisson eloszlás ($\lambda = np = 2$) esetén.

n=64	p=1/32	
binom	Poisson	k=
0,131084	0,135335283	0
0,2706251	0,270670566	1
0,27499	0,270670566	2
0,1833267	0,180447044	3
0,0901849	0,090223522	4
0,0349103	0,036089409	5
0,0110737	0,012029803	6
0,0029598	0,003437087	7
0,0006803	0,000859272	8
0,0001365	0,000190949	9



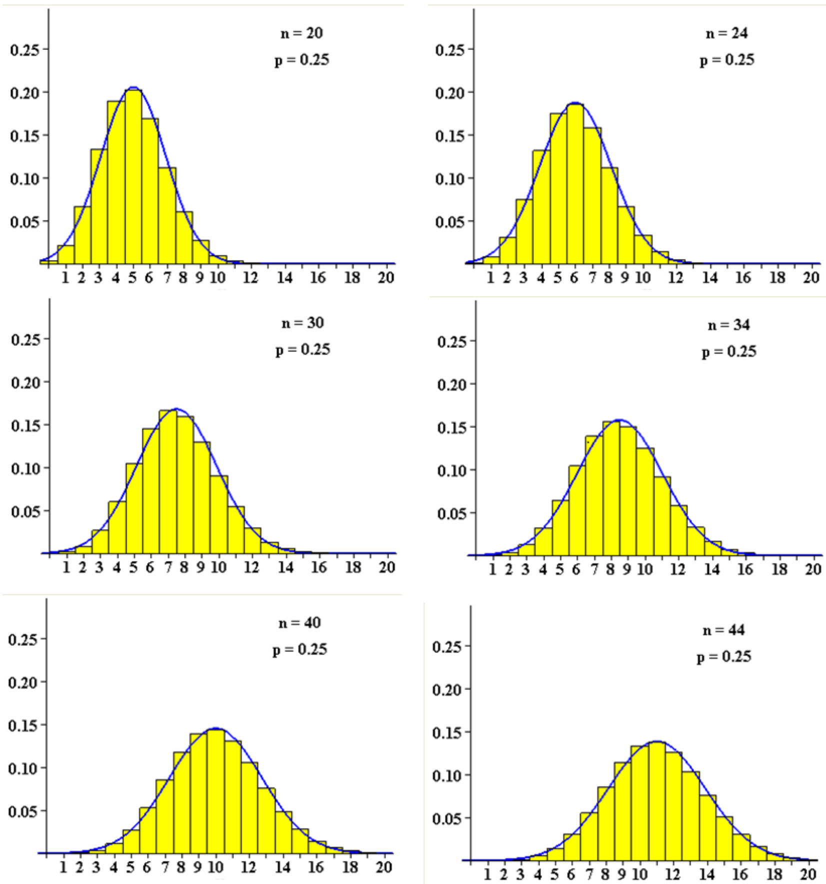
2.12. ábra. Binomiális eloszlás közelítése Poisson eloszlással

A Moivre-Laplace tétel a binomiális és normális eloszlás kapcsolatát írja le, miszerint nagy n mintaelemszám esetén a binomiális eloszlás közelíthető a normális eloszlással a következő módon: rögzített p mellett n növekedésével a binomiális eloszlást jól közelíti az $m = np$ és $\sigma = \sqrt{npq}$ paraméterű normális eloszlás, azaz
$\binom{n}{k} p^k q^{n-k} \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}} e^{-\frac{(k-np)^2}{2npq}}$ (lokális alak).
A tétel szemléltetésére az ún. Galton deszkát használhatjuk. Ez egy olyan szerkezet, melyben szabályos ékek szerepelnek n sorban, minden sorban eggyel több. A k-adik sorban k db ék van. A szerkezet tetején egy golyót bedobva, (mivel az ékek szabályosak) az ékeknél mindig 0,5 valószínűséggel megy a golyó jobbra illetve balra. A szerkezet alján tartály van, melybe a golyók leesnek az útjuk végén. A balról számított k-adik tartályba esik a golyó, ha k sornál jobbra, $n - k$ sornál pedig balra térítődik el. Ha sok golyót dobunk egymás után a szerkezetbe, a tartályokba potyogott golyók kirajzolják a normális eloszlás Gauss-görbéjét, melyet az alakja miatt haranggörbének is nevezünk. Az alábbi ábra a Galton-deszkát és a kísérlet eredményét mutatja.



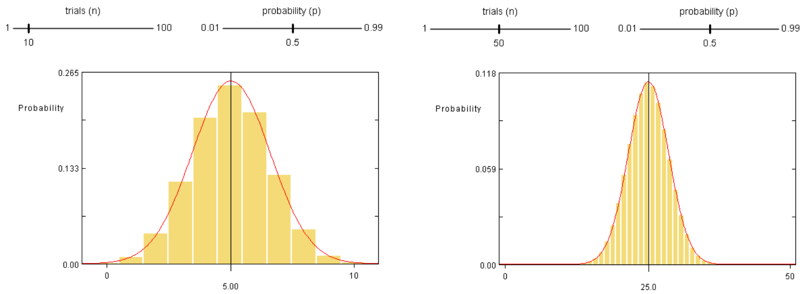
2.13. ábra. Galton-deszka

A valóságban természetesen nehéz megvalósítani egy tökéletes ékekkel ellátott szerkezetet, éppen ezért jól használhatóak a számítógépes animációk. Egy ilyet találunk például a
http://www.stattucino.com/berrie/dsl/Galton.html oldalon.
Az előzőek alapján nézzük rögzített p (pl. $p = 0,25$) mellett, növekvő n értékek (n = 20-tól 44-ig) esetén a binomiális eloszlás és az azt közelítő normális eloszlás grafikonját.



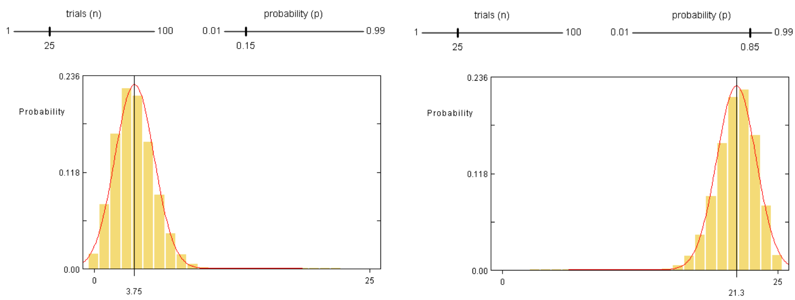
2.14. ábra. Binomiális eloszlás közelítése normálissal

Az alábbi oldalról indítható animáción változtatható az n és a p értéke is:
http://bcs.whfreeman.com/ips4e/cat_010/applets/CLT-Binomial.html
Ha a $p = 0,5$ (pl. szabályos érme esete), szimmetrikus binomiális eloszlást vizsgálunk, az n növelésével egyre inkább követi a hisztogram a normális eloszlás harang-görbéjét. Az alábbi (2.15) ábrákon $n = 10$ és $n = 50$ esetére mutatom a kapott grafikonokat, majd az azt követő (2.16) ábrán pedig az látszik, hogy minél jobban eltérünk a p=0,5 értéktől ($p = 0,15$, illetve $p = 0,85$), annál "eltoltabb" a görbénk.



Szimmetrikus eset $p = 0, 5, n = 10.$ Szimmetrikus eset $p = 0, 5, n = 50.$

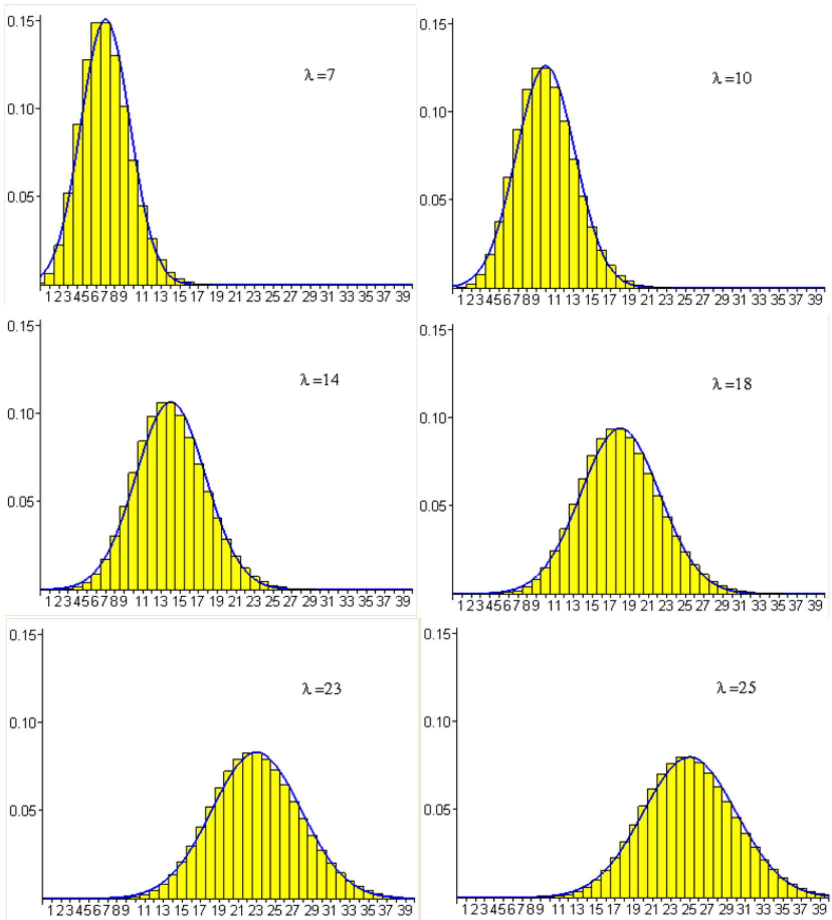
2.15. ábra. Animáció, binomiális eloszlás közelítése normálissal (1)



Nem szimmetrikus eset $p = 0, 15, n = 25.$ Nem szimmetrikus eset $p = 0, 85, n = 25.$

2.16. ábra. Animáció, binomiális eloszlás közelítése normálissal (2)

Amint láttuk, ha a $\lambda = np$ érték rögzített és kicsi, akkor a binomiális eloszlás csak a Poisson eloszlással közelíthető. Ha p rögzített és $n \to \infty$, akkor a binomiális eloszlás a normálissal közelíthető. Tehát ha a $\lambda = np$ nagy, akkor Poisson-nal és normálissal is közelíthető a binomiális eloszlás. Ebből azonban az következik, hogy nagy λ esetén a Poisson eloszlás is közelíthető normálissal. A normális eloszlással való közelítését nézzük különböző λ-k esetén (λ = 7-től 25-ig) az alábbi ábrákon.

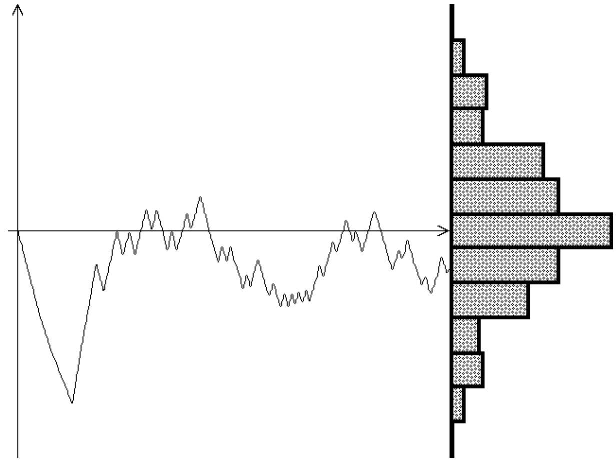


2.17. ábra. Poisson eloszlás közelítése normálissal

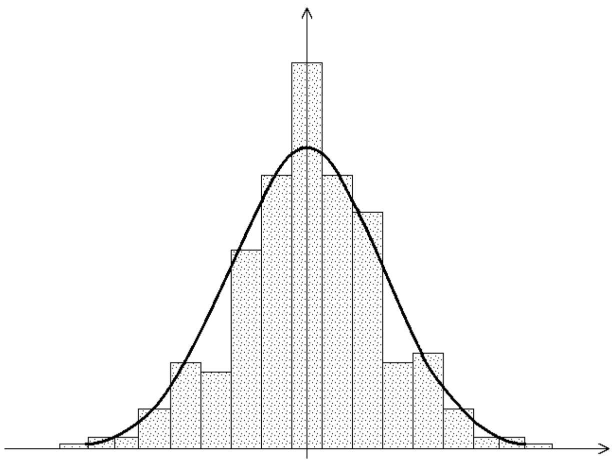
Most térjünk vissza a **centrális határeloszlás tételhez**, mely a már említett Moivre-Laplace tétel általánosítása. Statisztikai vizsgálatokban gyakran tekintjük a megfigyelt mennyiségünket normális eloszlásúnak. Ez a feltevés a tapasztalati eredményekből származik, de elméleti megalapozását a központi (vagy centrális) határeloszlás tétele adja.

2.1.6. Tétel. *Teljesen független, azonos eloszlású valószínűségi változók esetén, ahol $E(\xi_i) = m$ és $0 < \sigma^2 = D^2(\xi_i) < \infty$, a standardizált részletösszegek sorozata tart a normális eloszláshoz, vagyis:* $\frac{\xi_1+\xi_2+\ldots+\xi_n-nm}{\sqrt{n}\sigma}$ *eloszlása tart a standard normális eloszláshoz:*
$\lim_{n\to\infty} P(\frac{S_n-nm}{\sigma\sqrt{n}} < x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-t^2}{2}} dt.$

Általánosan is elmondható, hogy a részletösszegek (nagy n esetén) a normális eloszláshoz tartanak, ami tételszerűen is igazolja a statisztikai vizsgálatoknál is tapasztalt tényt. Vagyis tetszőleges eloszlású valószínűségi változó esetén, melynek a várható értéke μ és szórása σ, ha elég nagy elemű mintákat veszünk (általában $n \geq 30$), akkor az empirikus közép eloszlása közelítőleg normális lesz szintén μ várható értékkel és $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ szórással. Mivel eloszlásban való konvergenciáról van szó, fontos a nagyszámú, hosszú sorozatok vizsgálata, szemléltetése, hiszen a tétel nem valósul meg trajektóriánként. A [21]-ben szereplő szemléltetés jól mutatja a leírtakat. Vegyünk egy 200 trajektóriából kialakult hisztogramot, melyet úgy kapunk, hogy az egyes trajektóriák "becsapódásának" gyakoriságait egy megfelelő részintervallumokra osztott és normált "falon" ábrázoljuk. Megfelelő normálással a kapott sűrűséghisztogramunk az elméleti haranggörbével összehasonlítható. Az alábbi (2.18) ábrán látható egy trajektória és a becsapódási falon kapott hisztogram, a következőn (2.19) pedig a sűrűséghisztogram és az elméleti Gauss-görbe (vagy haranggörbe).

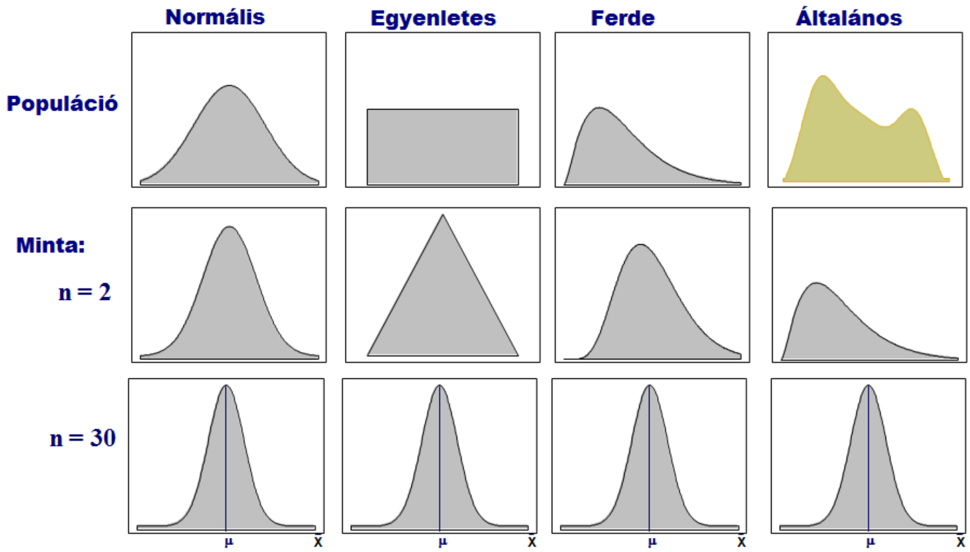


2.18. ábra. A központi határeloszlás tétel szemléltetése 1.



2.19. ábra. A központi határeloszlás tétel szemléltetése 2.

Az alábbi, [1]-ből vett ábrán az látható, hogy kis n esetén az empirikus közép (vagy minta átlagok) eloszlása csak akkor lesz normális, ha a változónk (vagy a teljes populáció) is normális eloszlású. Nagy n esetén azonban tetszőleges eloszlású lehet a valószínűségi változónk, az empirikus közepek eloszlása normális lesz. (Az ábrákon az egységek nem azonosak, feltételezzük, hogy mindegyik sűrűségfüggvény görbe alatti területe 1 egység.)



2.20. ábra. Az általános központi határeloszlás tétel jelentése

A továbbiakban nézzünk néhány (időhiány miatt) ritkábban megemlített, de fontos határérték-tételt. A nagy számok törvényéből tudjuk, hogy ha ξ_i-k függetlenek és azonos eloszlásúak, $E|\xi_i| < \infty, E\xi_i = 0$ esetén az $\frac{S_n}{n}$ értékek 0-hoz tartanak, a központi határeloszlás tételéből pedig azt látjuk, hogy nagy n esetén az $\frac{S_n}{\sqrt{n}}$ értékek sűrűségét a haranggörbe írja le. A következő tétel alapján azt tudjuk szemléltetni, hogy mi történik ezen két eset "között". Az **Iterált logaritmus tétele** azt állítja, hogy megfelelően normálva, az S_n értékek egy intervallumot töltenek ki (vagyis nem húzódnak össze a 0-ra, de nem is távolodnak el nagyon az x tengelytől).

2.1.7. Tétel. *Ha $\xi_1, \xi_2, \ldots$ független, azonos eloszlású valószínűségi változók, $0 < \sigma^2 = E\xi_1^2 < \infty, E\xi_1 = 0$ és $S_n = \xi_1 + \ldots + \xi_n$, ak-*

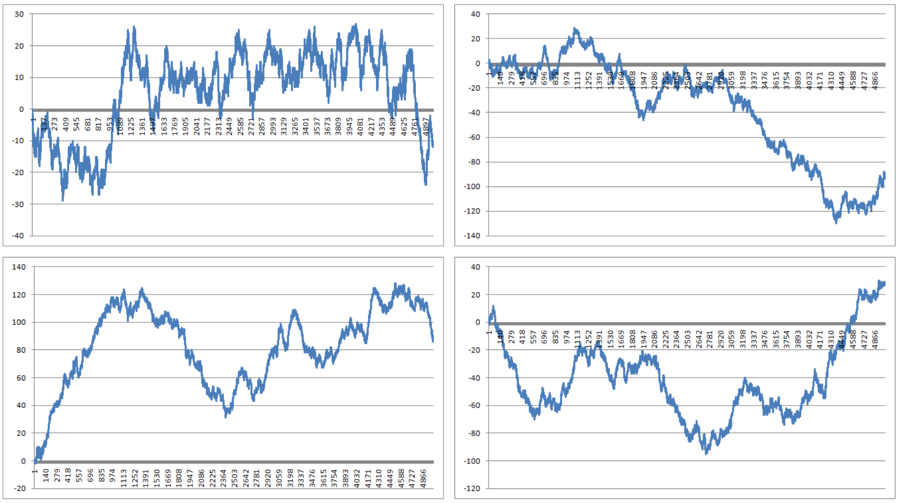
kor $P(\limsup_{n\to\infty} \frac{S_n}{\sqrt{2\sigma^2 n \log\log n}} = 1) = 1$. *Hasonlóan igaz az is, hogy* $P(\liminf_{n\to\infty} \frac{S_n}{\sqrt{2\sigma^2 n \log\log n}} = -1) = 1$.

Vagyis az $\frac{S_n}{\sqrt{2\sigma^2 n \log\log n}}$ értékek végtelen sokszor jutnak 1-től -1-ig és fordítva [18]. A tétel ismerete a tanár számára fontos, de tárgyalni csak matematika szakos hallgatókkal lehet.

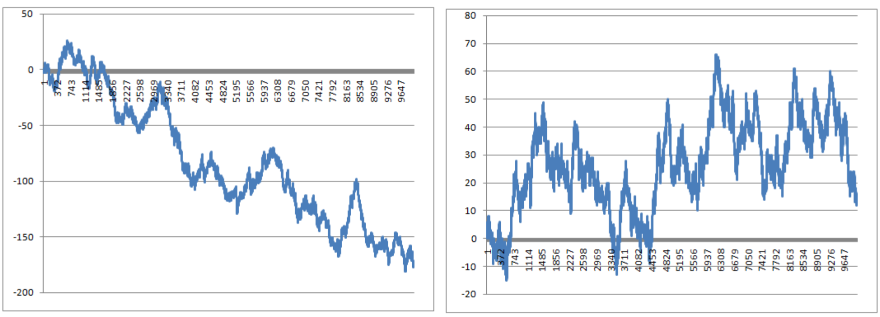
Előző és a következő tételünk vizsgálata elvezet a véletlen bolyongások témakörhöz. A bolyongás tekinthető egy olyan sorozatnak, mely csupa 1-es és -1-es lépésből áll. Érthetjük ezen például azt, hogy egy pont az x tengelytől felfelé (1) vagy lefelé (-1) mozdul el egy egységet, de érthetjük azt is, hogy érmedobásnál a fejdobás eredményhez 1-et, míg az íráshoz -1-et rendelünk, annak megfelelően, hogy játékosunk (illetve az ellenfele) 1 pénzegységet nyer vagy veszít. A hallgatók többsége úgy gondolja, hogy a játékosaink fele-fele időben állnak nyerésre, és a vezetés gyakran ingadozik. A tapasztalat azonban mást mutat, azt látjuk (például a már ábrázolt, 100-as dobáshoz tartozó két trajektóriánál is), hogy a kiegyenlítődési valószínűségek a végpontoknál a legnagyobbak. Feller már említett [23] könyvében, a 87. oldalon olvashatunk konkrét pédákat is ennek szemléltetésére, melynek leírására az **Arcus sinus törvény** használható. A tételt *hosszú vezetés tételé*nek (vagy más megfogalmazással *utolsó visszatérés tételé*nek) is nevezhetjük és állítása a következő.

2.1.8. Tétel. *Annak a valószínűsége, hogy* $2n$ *esetből* $2k$*-szor az egyik, míg* $2n-2k$*-szor a másik vezet a következő lesz:* $P(S_{2k} = 0, S_{2k-1} \neq 0, \ldots, S_{2n} \neq 0) = \binom{2k}{k}\binom{2n-2k}{n-k}2^{-2n}$, *ahol* $k = 0, 1, \ldots, n$. *Ugyanez a valószínűség tartozik az utolsó döntetlen eseményhez is.*

Vagyis ezek a tételek azt fejezik ki, hogy "két, egyformán erős játékos esetén az, hogy az utolsó egyenlítés a játék közepe körül következzék be, illetve az, hogy a játék folyamán mindkét játékos nagyjából egyforma ideig vezessen, viszonylag kicsi" [21]. Az alábbi ábrák 5000-es és 10000-es dobássorozat esetén mutatnak 4, illetve 2 véletlen esetet az előzőek szemléltetésére. A fejdobáshoz 1-et, az íráshoz -1-et rendelve, látható, hogy az egyenlőség (0 érték elérése) korántsem olyan gyakorisággal következik be, mint várnánk. (Az első 5000-es sorozatot úgy kaptam, hogy a hallgatók 100-as sorozataiból kivettem a "nagyon gyanúsakat", a maradékot pedig "összefűztem" – mivel függetlenek a kísérletek, így ezt elvégezhettem – , a másik hármat a gyerekeimmel végeztettem el, játékot kitalálva hozzá. A két 10000-es sorozat pedig 2-2 db 5000-esnek az összefűzéséből keletkezett.)

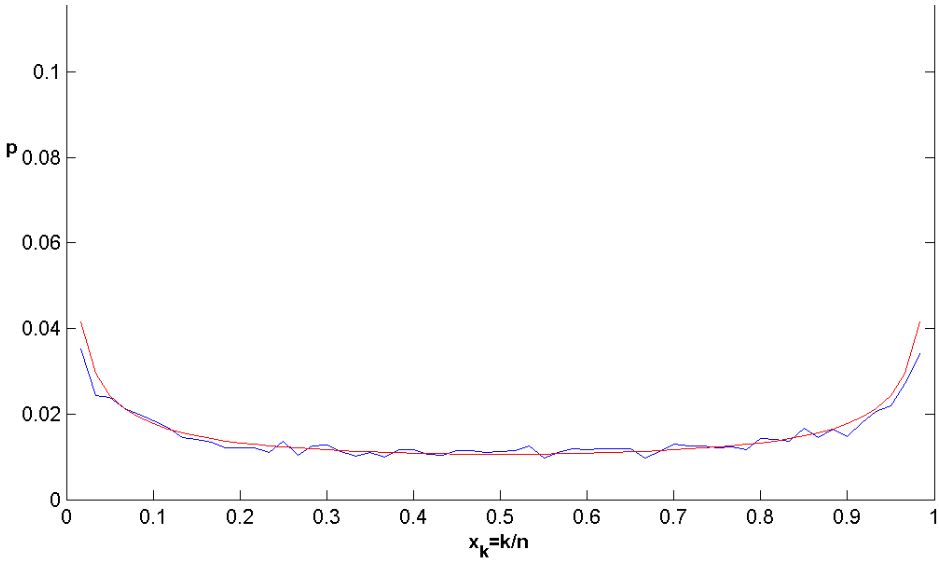


2.21. ábra. 5000-es dobássorozatok ábrázolása



2.22. ábra. 10000-es dobássorozatok ábrázolása

Szimulációt végeztem a MATLAB programmal $n = 60$ esetére (vagyis $2n = 120$-as dobáshosszra). A relatív gyakoriság értékek összekötésével kapott törött vonal jól közelíti az ábrázolt, elméleti arc sin görbét.



2.23. ábra. Szimuláció arc sin törvényre, $n = 60$ esetére

Így az arc sin törvénnyel magyarázható pl. az a gyakran tapasztalt eset, hogy sportmérkőzéseken (pl. kézilabdameccseken) a győztes csapat szinte végig vezet. A kiegyenlített, fej-fej melletti, váltakozó játék elég ritka. Ezen, például sportvonatkozású esetek tárgyalása motiválhatja a kevésbé érdeklődő hallgatót is.

3. fejezet

A leghosszabb szériák vizsgálata

Bevezetésként tisztázzuk, hogy mit is értsünk leghosszabb szérián, hiszen ezen a téren nem alakult ki egységes szóhasználat. Vannak szerzők, akik leghosszabb futamnak vagy siker-sorozatnak, vagy egyszerűen leghosszabb sorozatnak nevezik egy adott véletlen kísérletsorozatban az egymást követő azonos jelek leghosszabb előfordulását. Jelen dolgozat az érmedobás kísérletben az egymás után következő – vagyis írással meg nem szakított – fejdobások számának a maximumát leghosszabb fejszériának fogja nevezni. Hasonlóan leghosszabb bármilyen szérián az akár fejből, akár írásból előálló, a másik jellel meg nem szakított jelsorozat hosszának a maximumát értem. Ebben a néhány alfejezetben ismert rekurziós és aszimptotikus tételeket, valamint a szimuláció szolgáltatta eredményeket fogom összehasonlítani. Így Erdős-Révész [17] és Földes [24] aszimptotikus eredményeit fogom összevetni Schilling [51], Bloom [8] és Kopocinski [29] általam esetenként kiegészített és bizonyított rekurzív formuláival, valamint a szimulációs eredményekkel. Ebben a fejezetben a rekurziós eljárásokat hangsúlyozom – hiszen ezek adják a pontos eredményeket – ezért ezeket részletesen bizonyítom. Az aszimptotikus eredmények csak hosszú dobássorozat esetén adnak jó közelítést. A szimulációs eredmények pedig véletlenszerűek, és a dobássorozat nagyon sokszori számítógépes legenerálása esetén közelítik a pontos értéket. Jelen dolgozat kiterjed a szabályos és szabálytalan érme esetére is, valamint mindkétféle érménél vizsgálom a leghosszabb fejszéria és a leghosszabb bármilyen (tiszta fej vagy tiszta írás) széria hosszát is. A szimulációk a MATLAB programmal történtek 20.000 ismétlést alkalmazva, rövid ($n = 30, 50$), közepesen hosszú ($n = 250$), hosszú ($n = 1000, 3100$), illetve szabályos érme esetén nagyon hosszú ($n = 50000$) sorozatok esetén. Munkám során vizsgáltam a visszatevés nélküli (nem független) eseteket is, melyet például a kártyalap-húzás kísérlettel lehet szemléltetni. A kérdés itt is ugyanaz, hogyan alakul a leghosszabb azonos jelsorozat hossza (például a leghosszabb tiszta piros lap-széria hossza a francia kártyacsomagból történt húzások során). Megemlítek néhány matematikatörténeti, didaktikai érdekességet is, melyek segítenek az egyetemi, főiskolai hallgatók érdeklődését felkelteni a téma iránt. A felsőfokú képzés területén ez legalább olyan fontos, mint az általános és középfokú oktatás területén, mégis sokszor elhanyagoljuk ezt a szempontot. Különösen a valószínűségszámítás oktatása szenved ezen a területen is hiányosságokkal, hiszen viszonylag kevés az a terület, melyet látványosan lehet a hallgatók elé tárni. A matematika egyik "legszárazabb" részének tartják a hallgatók és szükséges rosszként kezelik sokan, amin át kell esni. Az alábbiakban tárgyalt problémakör segít közelebb vinni a hallgatóhoz a véletlen tömegjelenségeket és a hozzájuk kapcsolódó törvényszerűségek megértését.

3.1. Visszatevéses kísérlet

A figyelem felkeltésére, motiválásul tekintsük Varga Tamás egy érdekes kísérletét, melyet Révész Pál 1978-ban ismertetett Helsinkiben egy nemzetközi matematikai konferencián [46], majd Schilling [51] cikkének bevezetéseként is szolgált. (Természetesen több más szerző is hivatkozik erre a híres példára.) Varga a tanulócsoportját két részre osztotta, majd az egyik csoportnak azt adta feladatul, hogy mindenki dobjon fel 200-szor egy pénzérmét, és jegyezze le a kapott fej-írás eredményeket. A csoport másik részének pedig a kísérletet csak gondolatban kellett elvégezni, és a gondolati eredményeket lejegyezni. Vagyis nekik olyan 200 elemű fej-írás sorozatot kellett írniuk, mely szerintük egy 200 elemű dobássorozatot jól reprezentálna. A munka végeztével összekeverték a lejegyzett eredményeket tartalmazó lapokat, majd átadták Vargának, aki majdnem 100% -os biztonsággal megmondta, hogy az adott lap valós eredményt tükröz-e, vagy kitaláltat. Hiszen míg a valós sorozatokban nem volt ritka a 7 (esetleg 8) egymást követő fej (vagy írás) – Rényi Alfréd jól ismert $\log_2 200$-as eredményével összhangban –, addig a képzelt sorozatokban maximum 5 egyforma elemet mertek a tanulók egymás után leírni. (Érdekes lehet a kérdés pszichológiai oldalát is vizsgálni.)

Amikor volt szerencsém Révész professzor úrral találkozni és beszélgetni erről, elmondta a kísérlet általa történt folytatását is. Ő, miután elvégezték a hallgatókkal a Varga-féle kísérletet, és az eredményt is megbeszélték az okokkal együtt, újra elvégeztette az eredeti kísérletet. Vagyis a hallgatók fele újra valós kísérletet végzett az érme 200-szori feldobásával, míg a csoport másik fele a gondolati eredményeit írta le. Az összegyűjtött papírlapokat újra sikerült majdnem teljes pontossággal szétválogatnia Révésznek. A magyarázat nagyon egyszerű. A hallgatók többsége csak az egyikféle, például a leghosszabb fejszériára koncentrált, de már nem figyelt a leghosszabb írásszériára, vagy például a fej-írás párok előfordulásának gyakoriságára. A kísérleteket elvégez(tet)hetjük mi is a hallgatóinkkal, így egy ilyen bevezetés után automatikusan vetődik fel a hallgatókban is az alábbi két kérdés.

i. Egy n hosszúságú dobássorozat esetén hogyan alakul a *leghosszabb fejszéria hossza*?

ii. Egy n hosszúságú dobássorozat esetén hogyan alakul a *leghosszabb bármilyen széria (akár fej, akár írás) hossza*?

3.1.1. Szabályos pénzérme esete

Mivel a gyakorlatban, az életben a szokásos, szabályos pénzérmével találkozunk gyakrabban (már kisgyermekkorban játszott mindenki pénzérme dobálást) és a probléma matematikai tárgyalása is ebben az esetben az egyszerűbb, ezért célszerű először ezt vizsgálni. Szabályosnak nevezzük a pénzérmét (a mindenki számára ismert módon), ha a fejdobás és az írásdobás valószínűsége is ugyanannyi, vagyis $50-50\%$. A fejdobás eredményt F-fel, míg az írást I-vel fogom jelölni a dolgozat további részében. Dobjuk fel az érménket n-szer és vizsgáljuk a leghosszabb fejszéria és a leghosszabb bármilyen (akár fej, akár írás) széria hosszát.

Leghosszabb fejszéria hossza

Mint már említettem, fejszériának nevezzük az egymást követő (tehát írással meg nem szakított) fejek sorozatát. Jelölje R_n a leghosszabb fejszéria nagyságát. Az eloszlásfüggvényünk az ismert definíció alapján: $F_n(x) = P(R_n \leq x)$. Megjegyzem, hogy $F_n(x)$-et elegendő nemnegatív egész x-ekre megadni (hiszen $F_n(x) = 0$, ha $x < 0$; így tehát $F_n(x) = F_n([x])$, ha $x \geq 0$).) Legyen $A_n(x)$ azon n hosszúságú sorozatok száma, amelyekben a leghosszabb fejszéria nem haladja meg x-et. Szabályos érme esetén egy n elemű sorozatot vizsgálva kapjuk:

$$F_n(x) = P(R_n \leq x) = \frac{A_n(x)}{2^n}. \tag{3.1}$$

A feladatunk tehát az $A_n(x)$ értékének meghatározása.

Vegyük először azt az esetet, amikor a leghosszabb fejszéria legfeljebb 3 elemű ($x = 3$). Ha az $n \leq 3$, akkor $A_n(3) = 2^n$, hiszen minden lehetséges eset megfelel annak a kritériumnak, hogy az egymás utáni fejek száma maximum 3. (Megjegyzés: ezen esetek összeszámlálása még a gyengébb képességű hallgatók számára is sikerélményt jelenthet, ezért érdemes önálló munkaként mindenkivel elvégeztetni a számításokat.) Az említett esetek a következők: Ha $n = 0$, akkor a 0 hosszúságú sorozatban 0 a leghosszabb fejszéria hossza, ez 1 eset. Ha $n = 1$, akkor a lehetséges mindkét "sorozat" olyan, hogy a leghosszabb fejszéria legfeljebb 3. Amikor írást dobunk, akkor 0 a fejszéria hossza, illetve ha fejet dobunk, akkor 1 a fejszéria hossza. Ha $n = 2$, akkor a lehetséges sorozatunk 4 féle lehet (IF, II, FF, FI), mindegyik esetben a leghosszabb fejszéria hossza kevesebb, mint 3. Végül, ha $n = 3$, akkor szintén a lehetséges sorozatok mindegyike olyan, hogy benne legfeljebb 3 lehet a leghosszabb fejszéria hossza (III, IFF, IFI, IIF, FFF, FII, FIF, FFI).

Ha viszont az $n > 3$, akkor a számunkra kedvező sorozatok kezdődhetnek a következőképpen: I, FI, FFI, FFFI, és utánuk csak olyan jelsorozat van, amelyben nincs háromnál hosszabb fejszéria. Kapjuk tehát a következő rekurzív formulát:

$A_n(3) = A_{n-1}(3) + A_{n-2}(3) + A_{n-3}(3) + A_{n-4}(3)$, ha az $n > 3$.
Ugyanezzel a gondolatmenettel adódik az általános rekurziós képlet.

3.1.1. Állítás. *(Schilling [51], 198. o.)*

$$A_n(x) = \begin{cases} \sum_{j=0}^{x} A_{n-1-j}(x), & ha\ n > x, \\ 2^n, & ha\ 0 \le n \le x. \end{cases} \tag{3.2}$$

3.1.2. Megjegyzés. Ha megnézzük $A_n(1)$ értékeit, vagyis azon n elemű sorozatok számát, melyekben legfeljebb 1 hosszúságú fejszéria van, éppen a Fibonacci-sorozat (azaz $a_0 = 0$, $a_1 = 1$, és $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$, ha $n \geq 2$) 2-vel eltolt elemeit kapjuk.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	...
$A_n(1)$	1	2	3	5	8	13	21	34	55	...
Fibonacci	0	1	1	2	3	5	8	13	21	...

3.1. táblázat. Az $A_n(1)$ és a Fibonacci sorozat elemei

A k-rendű Fibonacci-számok segítségével pedig kifejezhető $A_n(k)$, sőt a k-rendű Fibonacci-polinomok felhasználásával a szabálytalan pénzérme esete is kezelhető, lásd [39].

A leghosszabb fejszéria nagyságának, R_n-nek aszimptotikus viselkedését Földes Antónia [24]-ben publikált alábbi tétele (dolgozatomban a tétel [7]-ben leírt formája) alapján írhatjuk le:

3.1.3. Tétel. *(Földes [24].) Valamennyi egész k esetén*

$$P\left(R_n - \left[\frac{\ln n}{\ln 2}\right] < k\right) = \exp\left(-2^{-\left(k+1-\left\{\frac{\ln n}{\ln 2}\right\}\right)}\right) + o(1), \tag{3.3}$$

ahol $[a]$ jelöli az egészrészét a-nak és $\{a\} = a - [a]$, a törtrésze. (Nyilvánvalóan $\frac{\ln n}{\ln 2}$ helyett írható $\log_2 n$ is.) $\square$

Leghosszabb bármilyen széria hossza

Dobjunk fel egy szabályos pénzérmét n-szer, és jelölje R'_n a leghosszabb bármilyen széria (akár a tiszta fej, akár a tiszta írás) nagyságát. Legyen $B_n(x)$ azon n hosszúságú sorozatok száma, amelyekben a leghosszabb (tetszőleges) széria nem haladja meg x-et. Szabályos érme esetén egy n elemű sorozatot vizsgálva, kapjuk az eloszlásfüggvényt:

$$F'_n(x) = P(R'_n \leq x) = \frac{B_n(x)}{2^n}. \tag{3.4}$$

Most Schilling [51], 199. oldalon leírt ötletét használjuk fel a mi esetünkre. A fej-írás sorozat minden elempárja alatt jelölje A azt, hogy az elempár azonos jelekből áll, illetve K azt, hogy különböző a két jel. Például:

F F F I F I F I I I I F F

A A K K K K K A A A K A

Az alsó A, K elemekből álló sorozatban a leghosszabb tiszta A sorozat akkor és csak akkor $k-1$ hosszúságú, ha fölötte a leghosszabb tiszta széria (fej vagy írás) k hosszúságú. Ha a felső sorozat n hosszú, és ebben a leghosszabb széria k elemű, akkor az alsó sorozat $n-1$ hosszú, és a leghosszabb A széria $k-1$ elemű. Vagyis

$$B_n(x) = 2A_{n-1}(x-1) \tag{3.5}$$

(A 2-es szorzó azért kell, mert minden alsó sorozat pontosan 2 (egy eredeti és egy fej-írás cserével kapott második) felső sorozathoz tartozhat.) Ennek felhasználásával kapjuk:

(3.6)
$$F'_n(x) = P(R'_n \leq x) = \frac{B_n(x)}{2^n} = \frac{2A_{n-1}(x-1)}{2^n} = \frac{A_{n-1}(x-1)}{2^{n-1}} =$$

$$= P(R_{n-1} \leq x-1) = F_{n-1}(x-1).$$

Beláttuk tehát, hogy

$$F'_n(x) = F_{n-1}(x-1), \tag{3.7}$$

vagyis visszavezettük esetünket a tiszta fejszéria esetére. Eloszlásfüggvényünk a tiszta fejszériára felírt eloszlásfüggvényből 1-gyel jobbra történő eltolással adódik. A fenti levezetés megtalálható a [28] publikációban.

A leghosszabb bármilyen széria nagyságának, R'_n-nek aszimptotikus viselkedésének vizsgálatához Földes [24] már idézett eredményét használjuk. (3.3) és (3.7) alapján kapjuk:

3.1.4. Tétel. *Valamennyi egész k esetén*

$$P\left(R'_n - \left[\frac{\ln(n-1)}{\ln 2}\right] < k\right) = \exp\left(-2^{-\left(k-\left\{\frac{\ln(n-1)}{\ln 2}\right\}\right)}\right) + o(1), \tag{3.8}$$

ahol $[a]$ jelöli az egészrészét a-nak és $\{a\} = a - [a]$, a törtrésze. (Nyilvánvalóan itt is $\frac{\ln(n-1)}{\ln 2}$ helyett írható $\log_2(n-1)$.) □

Most pedig nézzük ezeket az eredményeket összehasonlítva a szimulációval kapott értékekkel. Az alábbi, 3.1 és 3.2 ábrán lévő grafikonok egymás mellett mutatják a tiszta fejszéria és a tiszta bármilyen széria eseteket különböző dobáshosszak esetén.

Vizsgálatunkhoz a MATLAB programot használtuk 20.000 ismétlésszámmal. Az alkalmazott számítógép paraméterei pedig a következők: INTEL Core Quad Q9550 processzor, 4Gb, DDR3 memória.

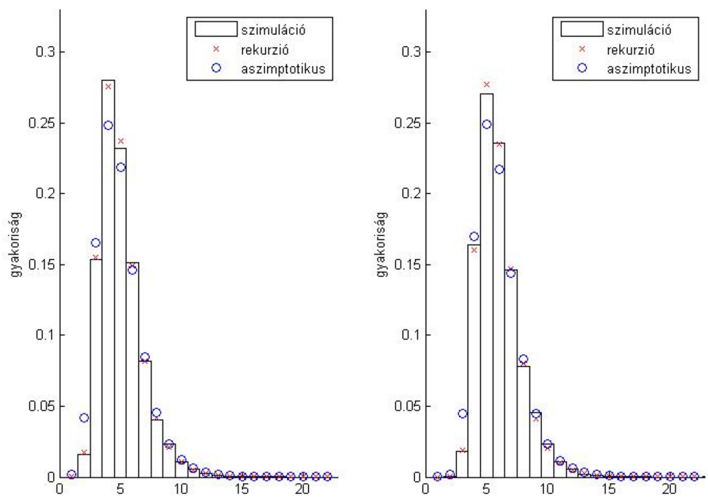
A következő (3.1 és 3.2) ábrákon "x" jelöli a rekurzióval kapott eredményeket, "o" az aszimptotikus tételek eredményeit és az oszlopdiagram pedig a szimulációval kapott eredményeket mutatja. Az első grafikonpár a rövid ($n = 50$) sorozat eredményeit mutatja a leghosszabb fej (bal oldali) és a leghosszabb bármilyen (jobb oldali) széria esetén, majd a következő grafikonpár ugyanezt a két esetet mutatja hosszú ($n = 1000$) dobás-sorozatra vonatkozóan.

Mindkét esetre (leghosszabb fej, illetve leghosszabb bármilyen széria vizsgálatára) elmondható, hogy kis n esetén a szimulációs eredmények vannak közelebb a rekurzív eredményekhez, az aszimptotikus tételek n növelésével adják a rekurzióhoz közeli, pontosabb eredményeket. $n \geq 3000$ esetén a rekurziós, a szimulációs és az aszimptotikus értékek gyakorlatilag egybeesnek. Elmondható, hogy kis n esetén a rekurziós algoritmus gyors, n növelésével azonban rohamosan lassul a számítási eljárás. A futási időket tekintve csak példaként néhányat megemlítve:

n	ism.sz.	futási idő
100,000	20,000	773.575832 s.
10,000	20,000	31.795056 s.
3,100	20,000	9.009479 s.
1,000	20,000	3.984981 s.
50	20,000	2.092010 s.

3.2. táblázat. Futási idők alakulása

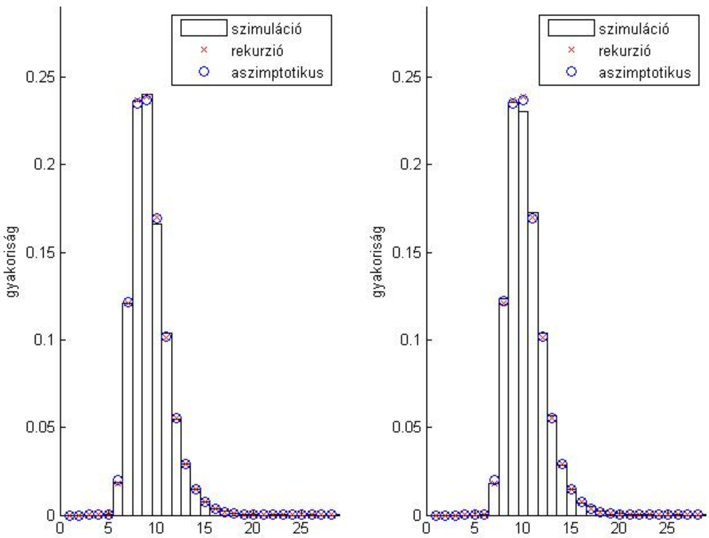
Jól látható tehát, hogy bár a rekurzió adja a pontos eredményt, nagy n esetén gyakorlatilag nem tudjuk használni, hiszen a futási idők rohamos növekedése gátat szab az alkalmazhatóságnak. Ezekben az esetekben az aszimptotikus tételek fogják szolgáltatni a jól közelítő eredményeket. A hallgatók számára is szemléletesen bemutatható, hogy a 20000-szer ismételt kísérletsorozat (szimuláció) eredményei milyen jól megközelítik a pontos (rekurzív) illetve nagy n esetén a közelítő (aszimptotikus) értékeket. Az egymás mellett párbaállított grafikonokon jól látszik a 3.6-ban leírt eredmény, miszerint R'_n az R_n-ből 1 egységgel jobbra való eltolással adódik. Tehát a leghosszabb bármilyen széria esete kezelhető, vizsgálható a leghosszabb fejszériára megismert összefüggésekkel a megfelelő transzformációval. A következőkben csak a kis és a nagy n ($n = 50$ és $n = 1000$) esetére mutatom a grafikonokat, a többi vizsgált esetre ($n = 30$, $n = 250$, $n = 3100$ és $n = 50000$) a Függelék 5.a, 5.b, 5.c és 5.d ábráján, illetve a [28] publikációban találhatóak az elkészített grafikonok.



Leghosszabb fejszéria
$p = 0.5, n = 50.$

Leghosszabb széria
$p = 0.5, n = 50.$

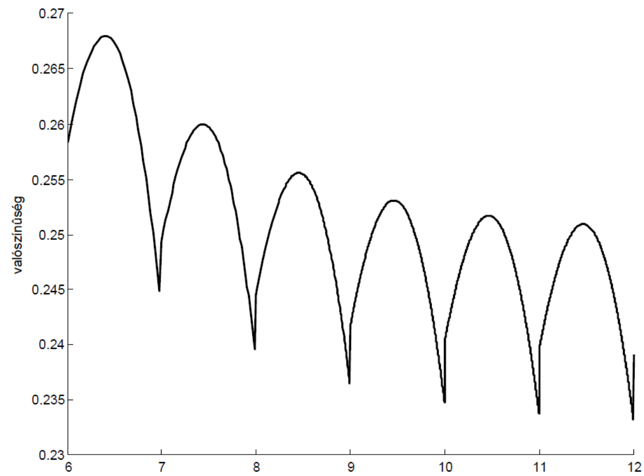
3.1. ábra. Leghosszabb szériák, szabályos érme, rövid sorozat esetén



Leghosszabb fejszéria $p = 0.5, n = 1000.$ Leghosszabb széria $p = 0.5, n = 1000.$

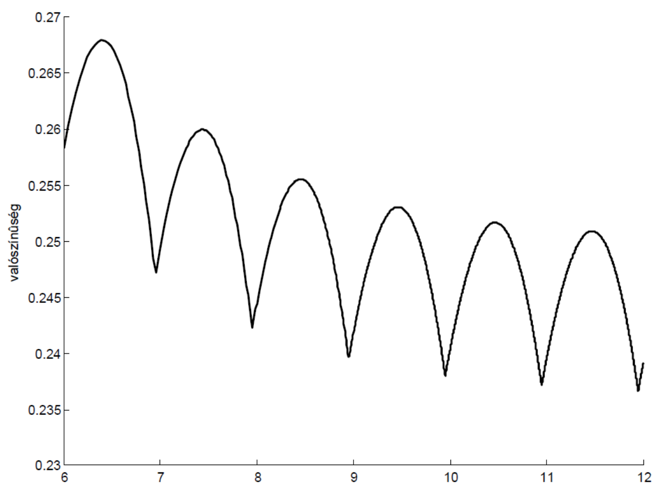
3.2. ábra. Leghosszabb szériák, szabályos érme, hosszú sorozat esetén

A következő ábrákról R_n periodikus jellegű viselkedése olvasható le, ahol a vízszintes tengelyen logaritmikus skála van, a függőleges tengelyen pedig a $P(R_n = [\log_2 n] - 1)$ értékek szerepelnek. Látható, hogy a P értékek ábrázolásakor 2 minden egész kitevős hatványa helyeken ugrás van (a rekurziós képlettel számolva). A következő két ábra alapján
$\max_k P(R_n = k)$ értékei eltérnek $P(R_n = [\log_2 n] - 1)$-től, azaz R_n módusza nem minden n-re lesz $[\log_2 n] - 1$. Ezen viselkedés értelmezése, magyarázata további vizsgálatokat igényel, melyre jelen dolgozat nem terjed ki.



$$P\left(R_n = [\log_2 n] - 1\right), \ n = 2^6, \ldots, 2^{12}, \ p = 0.5$$

3.3. ábra. R_n viselkedésének ábrázolása 1.



$$\max_k P\left(R_n = k\right), \ n = 2^6, \ldots, 2^{12}, \ p = 0.5$$

3.4. ábra. R_n viselkedésének ábrázolása 2.

Érdekességként most vizsgáljuk azt az esetet, amikor a leghosszabb széria pontosan k hosszúságú.
Jelöléseink legyenek az alábbiak:

$b_n(k)$: n dobásból hányszor lesz a leghosszabb bármilyen széria (akár fej, akár írás) *pontosan* k hosszúságú,

$a_n(k)$: n dobásból hányszor lesz a leghosszabb fejszéria *pontosan* k hosszúságú.

A $b_n(k)$-ra Szászné Simon Judit is ad [59] doktori értekezésében rekurzív képletet, melyet kétféleképpen – az ott közölttől eltérő módon – bizonyítok. Először a (3.15) képletből (lásd később) vezetjük le, majd teljes eseményrendszerre bontással kapjuk meg az adott képletet. Mindkét bizonyítás megtalálható a [28] publikációban.

3.1.5. Tétel. *(Szászné [59].)* $b_n(1) = b_n(n) = 2$, *ahol* $n = 1, 2, \ldots,$ $b_n(r) = 0$, *ha* $r > n$ *vagy* $r \leq 0$

$$b_n(r) = \sum_{h=1}^{r-1} b_{n-h}(r) + \sum_{i=1}^{r} b_{n-r}(i), ha \quad 1 < r < n. \tag{3.9}$$

Első bizonyítás. Tekintsük (3.15)-ben a $p = q = 0,5$ esetet, ahol $p(n,k)$ annak a valószínűsége, hogy n dobásból a leghosszabb fejszéria pontosan k hosszúságú. Mivel az összes elemi esemény száma 2^n, ezért a $p(n,k)$ kifejezés 2^n-nel való beszorzásával adódik a számunkra kedvező esetek száma, vagyis $a_n(k)$. Azaz (3.15)-ből

$$\underbrace{2^n p(n,k)}_{a_n(k)} = \sum_{j=0}^{k-1} \underbrace{2^{n-j-1} p(n-j-1,k)}_{a_{n-j-1}(k)} + \underbrace{2^{n-k-1} F_{n-k-1}(k)}_{A_{n-k-1}(k)} \tag{3.10}$$

Alkalmazzuk újra Schilling ötletét, vagyis: a fej-írás sorozat minden eleme alatt jelölje A azt, hogy az utána következő elem vele azonos, és K pedig azt, hogy különböző. Ahogyan adódott $B_n(k) = 2A_{n-1}(k-1)$ a (3.6)-ban, ugyanúgy adódik most $b_n(k) = 2a_{n-1}(k-1)$. Ennek felhasználásával (3.10) képletünk a következőképpen alakul:

$$\frac{b_{n+1}(k+1)}{2} = \sum_{j=0}^{k-1} \frac{b_{n-j}(k+1)}{2} + \frac{B_{n-k}(k+1)}{2}$$

Végezzük el a 2-vel való beszorzást és alkalmazzuk a következő átindexelést:
$k+1 \to r, \;\; n+1 \to n, \;\; j+1 \to h$. Ebből pedig kapjuk a bizonyítandó formulát.

Második bizonyítás. Nézzük meg, hogy mit is fejez ki a (3.9) jobb oldalán lévő két összeg. Bontsuk fel az eseményterünket aszerint, hogy milyen hosszú széria van elől.

Ha a sorozatunk h ($h = 1,\ 2,\ \dots,\ r-1$) hosszúságú szériával kezdődik, akkor a maradék $n-h$ dobásból kell a leghosszabb szériának r hosszúságúnak lenni. Ha a kezdő h széria fej, akkor a $(h+1)$-edik elem írás kell hogy legyen. Ha a kezdő h széria írás, akkor a $(h+1)$-edik elem fej kell hogy legyen.

$$\underbrace{\text{F} \dots \ \text{F}}_{\substack{h \text{ db fej} \\ (1 \le h \le r)}} \ \underbrace{\text{I} \dots \text{F} \ \dots \text{F} \ \dots}_{\substack{n-h \text{ elem között} \\ r \text{ hosszú széria}}}$$

vagy:

$$\underbrace{\text{I} \dots \ \text{I}}_{\substack{h \text{ db írás} \\ (1 \le h \le r)}} \ \underbrace{\text{F} \dots \text{I} \ \dots \text{I} \ \dots}_{\substack{n-h \text{ elem között} \\ r \text{ hosszú széria}}}$$

De ennek a kettőnek a száma megegyezik és az összegük éppen: $b_{n-h}(r)$. Ha r hosszúságú szériával kezdődik a sorozat, akkor a maradék $n-r$ elemből $i = 1,\ 2,\ \dots,\ r$ hosszú széria lehet. Ha az első r elem fej, akkor az $(r+1)$-edik írás kell, hogy legyen, míg ha az első r elem írás, akkor az $(r+1)$-edik fej kell hogy legyen.

$$\underbrace{\text{F} \dots \ \text{F}}_{r \text{ db fej}} \ \underbrace{\text{I} \dots \text{F} \ \dots \text{F} \ \dots}_{\substack{n-r \text{ elem között} \\ \text{legfeljebb } r \text{ hosszú széria}}}$$

vagy:

$$\underbrace{\text{I} \dots \ \text{I}}_{r \text{ db írás}} \ \underbrace{\text{F} \dots \text{I} \ \dots \text{I} \ \dots}_{\substack{n-r \text{ elem között} \\ \text{legfeljebb } r \text{ hosszú széria}}}$$

Ezen két részeset száma egyenlő, összegük pedig $b_{n-r}(i)$. $\square$

A $b_n(r)$-rel tehát megadtuk azon sorozatok számát, melyekben az n dobás során a leghosszabb bármilyen széria (akár fej, akár írás) pontosan r hosszúságú. Így a fenti tételnek, a [59]-ben közölttől eltérő bizonyításait adtam, melyek a [20] publikációban szerepelnek.

3.1.2. Szabálytalan pénzérme esete

Ebben az esetben a fejdobás valószínűsége, p értéke bármilyen valós szám lehet a $(0,1)$ intervallumból. (Speciális esetként magában foglalhatja a szabályos érme esetét is, amikor is $p = 0,5$.) Kérdés azonban, hogy a szabálytalanság ténye milyen hatással van a leghosszabb fej-, illetve leghosszabb bármilyen széria alakulására. Most nyilván nem számolhatunk a klasszikus képlettel, hiszen elemi eseményeink nem azonos valószínűségűek. A továbbiakban jelölje p a fejdobás valószínűségét és $q(=1-p)$ az írás valószínűségét, ahol tehát mindkettő lehet $0,5$-től eltérő is.

Leghosszabb fejszéria hossza

Ebben az esetben is vizsgáljuk először a leghosszabb fejszéria alakulását. Schilling [51] alapján tekintsük azon n hosszúságú fej-írás sorozatokat, amelyekben k db fej van. Ezek közül jelentse $C_n^{(k)}(x)$ azon sorozatok számát, amelyekben legfeljebb x fej következik egymás után. (Azaz a leghosszabb fejszéria legfeljebb x hosszúságú.) Az adott jelölésekkel az eloszlásfüggvényünk a következő lesz:

$$F_n(x) = P(R_n \leq x) = \sum_{k=0}^{n} C_n^{(k)}(x) p^k q^{n-k}. \tag{3.11}$$

$C_n^{(k)}(x)$ értékeire Schilling az alábbi rekurzív formulát adja.

3.1.6. Állítás. *(Schilling [51], 200.o.)*

$$C_n^{(k)}(x) = \begin{cases} \sum_{j=0}^{x} C_{n-1-j}^{(k-j)}(x), & ha \quad x < k < n, \\ \binom{n}{k}, & ha \quad 0 \leq k \leq x, \\ 0, & ha \quad x < k = n. \end{cases} \tag{3.12}$$

Bizonyítás. (A bizonyítás a [19] publikációban szerepel.) Ha $x < k = n$, akkor nyilvánvalóan $C_n^k(x) = 0$, hiszen ekkor az összes (x-nél több) elem fej, így nincs olyan sorozat, ahol legfeljebb x fej van egymás után. Ha $0 \leq k \leq x$, akkor $C_n^k(x)$ éppen a binomiális együtthatókat adja, hiszen ez az az eset, amikor az n elem között legfeljebb x fej van, és azon eseteket kell összeszámlálni, amikor a leghosszabb fejszéria legfeljebb x. Márpedig ekkor az összes lehetséges sorrend ilyen tulajdonságú. Az összes n elemű sorozat száma pedig, melyben k db fej és $n-k$ db írás van: $\binom{n}{k}$. Ha $x < k < n$, akkor a (3.12) képlet helyességének belátásához (melyet Schilling [51]-ban nem közöl) elegendő átgondolnunk a következőket. A sorozatunk kezdődhet $j = 0, 1, 2, \ldots, x$ fejjel, utána biztosan van 1 írás, majd olyan sorozat következik, ahol a maradék $n - j - 1$ elem között $k - j$ db fej van úgy, hogy a leghosszabb fejszéria legfeljebb x hosszúságú.

$$\underbrace{\text{F} \ \ldots \ \text{F}}_{j \text{ db fej}} \quad \text{I} \quad \underbrace{\ \ldots \quad \text{F} \quad \ldots \quad \text{I} \quad \ldots\ }_{\substack{n-j-1 \text{ elem, melyben } k-j \text{ db fej van úgy,} \\ \text{hogy legfeljebb } x \text{ hosszú a fejszéria}}}$$

Ezek száma pedig éppen $C_{n-1-j}^{(k-j)}(x)$. Ezzel (3.12) helyességét beláttuk. □

A hallgatókkal együtt kiszámolva $C_n^{(k)}(3)$ értékeit $n \leq 8$ esetre az alábbi, 3.3 táblázatban szereplő értékek adódnak. Észrevehetjük, hogy az alsó négy sor ($k = 0, 1, 2, 3$ esetben $\binom{n}{k}$ értékek) a Pascal-háromszög részletét adja, $3 < k = n$ esetben pedig beírva a 0-kat, a táblázat többi adata a rekurziós képlet alapján számítható. Látható, hogy a fenti (3.12) képletet jól mutatja az ún. „hokiütő” forma. Hiszen pl.

8									0
7								0	0
6							0	1	10
5						0	*2*	**12**	40
4					0	*3*	12	31	65
3				1	*4*	10	20	35	56
2			1	*3*	6	10	15	21	28
1		1	2	3	4	5	6	7	8
0	1	1	1	1	1	1	1	1	1
k/n	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**

3.3. táblázat. $C_n^{(k)}(3)$ értékei $n \leq 8$ esetre

$C_7^{(5)}(3) = 2+3+4+3 = 12$. (Táblázatban dőlt, illetve vastag számmal jelölve.)

Az aszimptotikus viselkedés leírását Gordon-Schilling-Waterman [26] adja a következő tétellel, melynek jelen formája [7]-ben szerepel.

3.1.7. Tétel. *(Gordon-Schilling-Waterman [26].)*
Legyen $\mu(n) = -\frac{\ln n}{\ln p}, q = 1 - p$ és legyen W eloszlása a következő: $P(W \leq t) = \exp(-\exp(-t))$. Ekkor t-ben egyenletesen:
(3.13)

$$P\left(R_n - \mu(qn) \leq t\right) - P\left(\left[\frac{W}{-\ln p} + \{\mu(qn)\}\right] - \{\mu(qn)\} \leq t\right) \to 0,$$

ha $n \to \infty$ és ahol $[a]$ jelenti az egészrészét a-nak és $\{a\} = a - [a]$ az a törtrésze. $\square$

Ebben az esetben (nem szabályos pénzérme esetében) is érdekességként nézzük most, hogy mi lesz annak a valószínűsége, hogy n dobásból a leghosszabb fejszéria pontosan k hosszúságú? Jelöljük ezt $p(n,k)$-val, melyre Kopocinski [29]-ban két formulát is ad. Az alábbi (3.15) és

(3.16) képlet alkalmazhatóságához megjegyezzük, hogy a (3.11)-beli F függvényre:

$$F_n(k) = \begin{cases} 0, & \text{ha} \quad k < 0, \\ 1, & \text{ha} \quad k \geq n, \\ \sum_{i=0}^{k} p(n,i) & \text{egyébként.} \end{cases} \tag{3.14}$$

3.1.8. Tétel. *(Kopocinski [29], Theorem 1, (2), (3).) Legyen* $p(n,k) = 0$*, ha* $k < 0$*, vagy* $k > n$*,*
$p(k,k) = p^k$*, ha* $k = 0, 1, 2, \dots$*, ekkor*

$$p(n,k) = \sum_{j=0}^{k-1} p^j q p(n-j-1,k) + p^k q F_{n-k-1}(k), \tag{3.15}$$

$$p(n,k) = p^k q F_{n-k-1}(k) + \tag{3.16}$$

$$+ \sum_{j=0}^{n-k-2} F_j(k-1) q^2 p^k F_{n-j-k-2}(k) + F_{n-k-1}(k-1) q p^k,$$

ha $n = k+1, k+2, \dots$*, valamint* $k = 0, 1, 2, \dots$*, és* $F_n(k)$ *jelöli annak a valószínűségét – az eloszlásfüggvény definíciójának megfelelően –, hogy* n *esetből legfeljebb* k *hosszúságú fejszéria adódik.*

Bizonyítás. (A bizonyítás a [19] publikációban szerepel.) Az (3.15) képlet helyességét vizsgáljuk teljes eseményrendszer szerinti részekre bontással aszerint, hogy az első helyeken lehet $0, 1, 2, \dots, k$ db fej. Lehet olyan, hogy az első j helyen fejet kapunk, $(0 \leq j < k)$, majd jön 1 írás és az utána lévőkben van pontosan k hosszú fejszéria:

$$\underbrace{\mathrm{F} \ \dots \ \mathrm{F}}_{\substack{j \text{ db fej} \\ 0 \leq j \leq k-1}} \quad \mathrm{I} \quad \underbrace{\quad \dots \quad \mathrm{F} \quad \dots \quad \mathrm{I} \quad \dots \quad}_{\substack{\text{az } n-j-1 \text{ elem között} \\ \text{pontosan } k \text{ hosszú fejszéria van}}}$$

Ebből az esetből adódik az (3.15) összeg első k tagja, azaz $\sum_{j=0}^{k-1} p^j q p(n-j-1,k)$.

Vagy pedig lehet az az eset, hogy rögtön az elején adódik k hosszúságú fejszéria, utána 1 írás, majd legfeljebb k hosszúságú fejszéria:

$$\underbrace{\mathrm{F} \ldots \mathrm{F}}_{k \text{ db fej}} \quad \mathrm{I} \quad \underbrace{\ldots \quad \mathrm{F} \quad \ldots \quad \mathrm{I} \quad \ldots}_{\substack{n-k-1 \text{ elem melyben} \\ \text{legfeljebb } k \text{ hosszú fejszéria van}}}$$

Ebből pedig éppen az (3.15) összefüggés utolsó tagja adódik, amivel a képlet helyességét beláttuk.

A (3.16) bizonyításához bontsuk fel az eseményterünket aszerint, hogy az első k hosszúságú fejszéria hol kezdődik. Lehet olyan eset, hogy rögtön az első k dobás fej, utána 1 írás, majd legfeljebb k hosszú fejszéria következik:

$$\underbrace{\mathrm{F} \ldots \mathrm{F}}_{k \text{ db fej}} \quad \mathrm{I} \quad \underbrace{\ldots \quad \mathrm{F} \quad \ldots \quad \mathrm{I} \quad \ldots}_{n-k-1 \text{ elem között legfeljebb } k \text{ hosszú fejszéria van}}$$

Ez éppen az összeg első tagját adja: $p^k q F_{n-k-1}(k)$.

Lehet még olyan, hogy legfeljebb $k-1$ fej van az elején, utána 1 írás kell, hogy legyen, majd következik a k db fej, utána megint 1 írás és végül legfeljebb k db fej:

$$\underbrace{\ldots \quad \mathrm{F} \quad \ldots \quad \mathrm{I} \quad \ldots}_{\text{legfeljebb } k-1 \text{ db fej}} \quad \mathrm{I} \quad \underbrace{\mathrm{F} \ldots \mathrm{F}}_{k \text{ db fej}} \quad \mathrm{I} \quad \underbrace{\ldots \quad \mathrm{F} \quad \ldots \quad \mathrm{I} \quad \ldots}_{\substack{\text{az } n-j-k-2 \text{ elem között} \\ \text{legfeljebb } k \text{ db fej van}}}$$

Ebből adódik az összeg második része: $\sum_{j=0}^{n-k-2} F_j(k-1) q^2 p^k F_{n-j-k-2}(k)$.

Vagy lehet az az eset, amikor az utolsó k db lesz fej, előtte 1 írás és a kezdőszériában legfeljebb $k-1$ fej van:

$$\underbrace{\ldots \quad \mathrm{F} \quad \ldots \quad \mathrm{I} \quad \ldots}_{\text{legfeljebb } k-1 \text{ fej}} \quad \mathrm{I} \quad \underbrace{\mathrm{F} \ldots \mathrm{F}}_{k \text{ db fej}}$$

Ez éppen az összeg utolsó tagját adja: $F_{n-k-1}(k-1)qp^k$.

Így a (3.16) formula helyességét is beláttuk. (A (3.15) és (3.16) bizonyítását Kopocinski nem végzi el, csak [29] 5. oldalán útmutatást ad.) □

Leghosszabb bármilyen széria hossza

A szabályos pénzérme esetéhez hasonlóan vizsgáljuk most is a leghosszabb bármilyen széria hosszának alakulását. Egy szabálytalan pénzérmét feldobva n-szer, jelölje R'_n a leghosszabb bármilyen széria (akár fej, akár írás) nagyságát. A (3.11) képlethez hasonlóan:

3.1.9. Állítás. *(Schilling [51] 200. oldal.)*

$$F'_n(x) = P(R'_n \le x) = \sum_{k=0}^{n} \overline{C}_n^{(k)}(x) p^k q^{n-k},$$

ahol $\overline{C}_n^{(k)}(x)$ jelenti azon n hosszúságú sorozatok számát, amelyben k db fej van, a leghosszabb bármilyen széria hossza legfeljebb x, és ahol alkalmazva az alábbi átjelölést,

$$\overline{C}_{m+k}^{(k)}(x) = C_{x+1}(m,k),$$

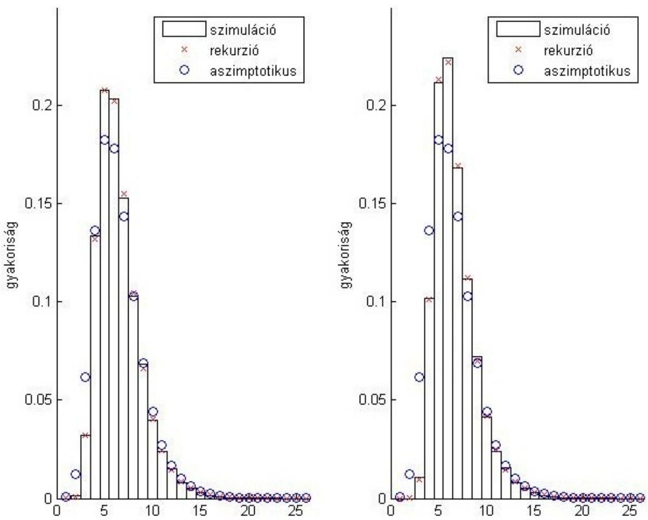
a $C_x(m,k)$ mennyiségek pedig kielégítik a (3.17) *és* (3.18) *rekurziókat.*

Itt $C_x(m,k)$ jelöli azon esetek számát, hogy m egyik és k másik féle tulajdonságú elemet visszatevés nélkül kihúzva nem lesz x hosszúságú széria. $C_x(m,k)$ értékeire Bloom [8] adott két rekurzív képletet, melyek bizonyításait a következő fejezetben adom meg ((3.17) és (3.18)).

A leghosszabb bármilyen széria nagyságának, az R'_n-nek az aszimptotikus viselkedését vizsgálva Muselli [37] tételét használhatjuk, melyben $V_n(p)$ jelöli annak a valószínűségét, hogy a leghosszabb széria n dobás esetén a fejekből adódik:

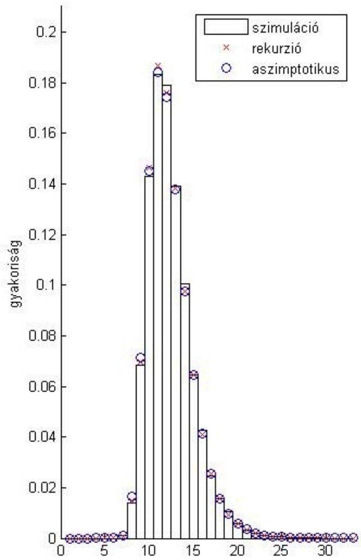
$$\lim_{n\to\infty} V_n(p) = \begin{cases} 0, & \text{ha} \quad 0 \le p < 1/2, \\ 1, & \text{ha} \quad 1/2 < p \le 1. \end{cases}$$

A kapott eredményeinket újra szemléltethetjük grafikonon, hasonlóan a szabályos érme esetéhez. A szimulációk ugyanolyan tárgyi és szoftver eszközökkel történtek, mint azt a 3.1.1-ben leírtam. Ugyanazokat a jelöléseket alkalmaztam és ismét 20.000 ismétlést végeztem. A következő grafikonokon szabálytalan érme ($p = 0,6$) esetén mutatom a leghosszabb fej (bal oldali) és a leghosszabb bármilyen (jobb oldali) szériák esetét, rövid ($n = 50$) és hosszú ($n = 1000$) dobássorozatra. Látható, hogy kis n esetén az aszimptotikus eredmények távol esnek a pontos (rekurziós) értékektől. Ekkor a rekurzió még rövid futásidővel jól számolható. Nagy n esetén a rekurziós algoritmus egyre lassul, számolásra nem használható. Az aszimptotikus eredmények viszont n növelésével egyre közelebb kerülnek hozzájuk. Muselli tételének numerikus alátámasztását adja, hogy nagy n esetén ($n = 1000$) az R_n és R'_n eloszlása közel azonos.

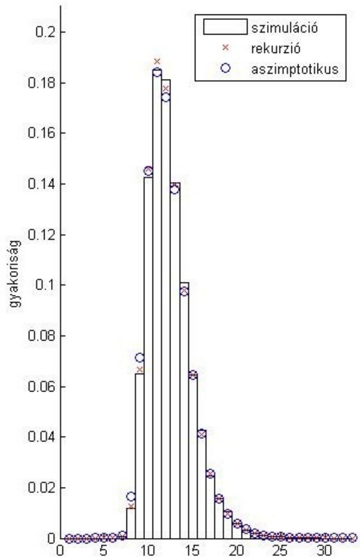


Leghosszabb fejszéria $p = 0.6, n = 50.$ Leghosszabb széria $p = 0.6, n = 50.$

3.5. ábra. Leghosszabb szériák, szabálytalan érme, rövid sorozat esetén



Leghosszabb fejszéria
$p = 0.6, n = 1000.$



Leghosszabb széria
$p = 0.6, n = 1000.$

3.6. ábra. Leghosszabb szériák, szabálytalan érme, hosszú sorozat esetén

A Függelék 6.a, 6.b és 6.c ábráin $n = 30$, $n = 250$ és $n = 3100$ esetére is bemutatom a megfelelő grafikonokat, illetve megtalálhatóak a [19] publikációban. Az alábbi táblázat néhány futásidőt mutat, melyből látható, hogy nagy n esetén az algoritmus még gyors számítógéppel sem végezhető el ésszerű időn belül (ezért is lett az utolsó, legnagyobb n érték "csak" 3100).

n	ism.sz.	futási idő
3,100	20,000	1.466.793045 s.
1,000	20,000	138.653237 s.
50	20,000	2.338183 s.

3.4. táblázat. Néhány futási idő

3.2. Visszatevés nélküli kísérlet

Az előző fejezetben már hivatkoztam a visszatevés nélküli eset tárgyalására. A téma teljes vizsgálatának igénye indokolja, hogy részletesebben foglalkozzunk a nem független esettel is. Motivációs példaként vegyük például a Bloom által [8]-ban közölt, Gardnertől származó alábbi állítást: "Az 52 lapos összekevert kártyacsomagban majdnem mindig lesz 6 egyforma színű egymás után." Elvégezve többször is ezt a kísérletet, Bloom sem és a gyerekekkel "piros papucsot" játszva, én sem tapasztaltam ezt az eredményt. 6-nál általában kevesebb elemű szériák adódtak. Csak nem volt szerencsénk, vagy Gardner tévedett? Vagy vegyük a következő érdekes észrevételt. Dolgozatíratásnál általában kétféle változatot készítek (A és B) és miután a hallgatók leültek (tetszőleges helyekre) ezeket szétosztom úgy, hogy az egymás mellett ülők különbözőt írjanak. Az összesítéskor, amikor az ABC-rendben lévő hallgatói névsorba bejegyzem az eredményeket, azt a meglepő esetet tapasztalom, hogy egymás után a legritkább esetben következik háromnál több azonos változatú dolgozat.

Felvetődik az alábbi kérdés. Ha egy halmaz kétféle tulajdonságú elemet tartalmaz, az egyikből m, a másikból k db-ot, mi a valószínűsége annak, hogy az $m+k$ elemet sorban egymás után kihúzva visszatevés nélkül, lesz t hosszúságú széria, vagyis akármelyik tulajdonságú elemből legalább t következik egymás után?
Az egyszerűség kedvéért a két tulajdonságú elem legyen piros (m db) és fekete (k db), és jelöljük a keresett valószínűséget $P_t(m,k)$-val. Meghatározásához vizsgáljuk az esemény komplementerének, vagyis annak a valószínűségét, hogy nincs t hosszúságú széria az $m+k$ elem sorozatában. Ez legyen: $\overline{P_t}(m,k)$, aminek a segítségével a $P_t(m,k) = 1-\overline{P_t}(m,k)$ képlet alapján adódik kérdésünkre a válasz. $\overline{P_t}(m,k)$-nek klasszikus képlettel való kiszámításához vizsgáljuk először az összes elemi esemény számát: az $m+k$ elemet kell sorbarendezni, melyek között az m db és a k db azonos típusúak. Az ilyen sorozatok száma nem más mint: $\binom{m+k}{m}$. (Vagy $\binom{m+k}{k}$, ami a binomiális együtthatók szimmetria-tulajdonsága miatt ugyanaz, mint $\binom{m+k}{m}$.)

Ezek után a keresett hányados számlálójának meghatározásához össze kell számlálnunk azon sorozatok számát, amelyben nincs t hosszúságú széria. Jelöljük ezt $C_t(m,k)$-val.

3.2.1. Állítás. *(Bloom [8], 369.o.) Ha $m = k = 0$, akkor definíció szerint legyen $C_t(0,0) = 1$. Ha m vagy k negatív, akkor pedig definíció szerint $C_t(m,k) = 0$.*

$$C_t(m,k) = \sum_{i=0}^{t-1} C_t(m-1,k-i) - \tag{3.17}$$

$$-\sum_{i=1}^{t-1} C_t(m-t,k-i) + e_t(m,k),$$

ahol tehát $C_t(m,k)$ jelenti az m db piros és k db fekete elem olyan sorbarendezéseinek a számát, ahol nincs t hosszúságú széria ($t \geq 2$), *valamint* $e_t(m,k) = \begin{cases} 1, & \text{ha } m = 0 \text{ és } 0 \leq k < t, \\ -1, & ha\ m = t\ és\ 0 \leq k < t, \\ 0, & \text{különben.} \end{cases}$

Nézzük (3.17) igazolását, melyet Bloom [8]-ben nem végzett el.

Bizonyítás. (A bizonyítás megtalálható a [20] publikációban.)

$m = 0$ eset.

Ha $0 \leq k < t$, akkor $C_t(0,k) = 1$, hiszen ez azt jelenti, hogy csak egyféle elem van, de kevesebb, mint a szériahossz. Ezeket akárhogyan is húzom, nem lehet t hosszúságú széria, és mivel az azonos elemek egymás között nem megkülönböztethetők, ezért ez egyféle sorrendet jelent. Így a (3.17) képletünk a következő alakú: 1 = 0 - 0 + 1. Például: $C_3(0,2) = C_3(-1,2) + C_3(-1,1) + C_3(-1,0) - [C_3(-3,1) + C_3(-3,0)] + 1 = 0 + 0 + 0 - [0 + 0] + 1 = 1$.

Ha $k \geq t$, akkor $C_t(0,k) = 0$, hiszen ekkor is csak egyféle elem van, de legalább annyi, mint a szériahossz. Ekkor nyilván egyetlen olyan sorozat sincs, melyben ne lenne t hosszúságú széria. A (3.17) a következő: 0 = 0 - 0 + 0. Például: $C_3(0,4) = C_3(-1,4) + C_3(-1,3) + C_3(-1,2) - [C_3(-3,3) + C_3(-3,2)] + 0 = 0 + 0 + 0 - [0 + 0] + 0 = 0$.

$0 < m < t$ esetén (3.17) alakja:

$$C_t(m,k) = \sum_{i=0}^{t-1} C_t(m-1,k-i) - 0 + 0.$$

Hiszen ez a következő eset:

$$\underbrace{\text{F} \dots \text{F}}_{i \text{ db fekete}} \quad \text{P} \quad \underbrace{\quad \dots \quad \text{F} \quad \dots \quad \text{P} \quad \dots \quad}_{\substack{k-i \text{ db fekete, } m-1 \text{ db piros,} \\ \text{és közöttük nincs } t \text{ széria}}}$$

Ezek száma $C_t(m-1,k-i)$. Mivel $m < t$, így pirosból t széria nem lehet, azaz a fenti összegből nem kell levonni semmit. Példaként tekintsük: $C_3(2,2) = C_3(1,2) + C_3(1,1) + C_3(1,0) - [C_3(-1,1) + C_3(-1,0)] + 0 = 3 + 2 + 1 - [0+0] + 0 = 6$.

Ha $m = t$ és $0 \leq k < t$, ez azt jelenti, hogy az egyik fajta elemből (feketéből) kevesebb, a másikból (pirosból) pedig pontosan annyi áll rendelkezésre, mint a szériahossz. Ekkor (3.17) alakja a következő: $C_t(m,k) = \sum_{i=0}^{t-1} C_t(m-1,k-i) - \sum_{i=1}^{t-1} C_t(0,k-i) - 1$. Az első szumma nem t, hanem csupán $k+1$ részesetet jelent, melyek i-edik tagja olyan, hogy i db feketével kezdődik, utána 1 piros, majd $m-1$ piros és $k-i$ fekete úgy, hogy nincs t széria.

$$\underbrace{\text{F} \dots \text{F}}_{i \text{ db fekete}} \quad \text{P} \quad \underbrace{\quad \dots \quad \text{F} \quad \dots \quad \text{P} \quad \dots \quad}_{\substack{k-i \text{ db fekete, } m-1 \text{ db piros,} \\ \text{és közöttük nincs } t \text{ széria}}}$$

Ebben egy „rossz" elem van, amikor az $m = t$ piros egymás után helyezkedik el. Mivel a második szumma értéke k, így összesen $k+1$ levonása történik. Például: $C_3(3,2) = C_3(2,2) + C_3(2,1) + C_3(2,0) - [C_3(0,1) + C_3(0,0)] - 1 = 6 + 3 + 1 - [1+1] - 1 = 7$.

Ha $m = t$ és $k \geq t$, akkor (3.17) a következő:

$$C_t(m,k) = \sum_{i=0}^{t-1} C_t(m-1,k-i) - \sum_{i=1}^{t-1} C_t(0,k-i) + 0.$$

Ebben $i = 0$ esetén:

$$\text{P} \quad \underbrace{\ldots \;\text{P}\; \ldots \;\text{F}\; \ldots}_{\substack{k \text{ db fekete, } m-1 \text{ piros} \\ \text{és nincs közöttük } t \text{ széria}}}$$

Ezek száma $C_t(m-1, k)$. Ebben lehetne egy „rossz” is, amikor az $m-1$ piros van elől és a legelső pirossal t szériát alkot. De ekkor a k fekete a végén állva t szériát alkotna, vagyis ez a rossz szituáció már nincs benne $C_t(m-1, k)$-ban.
Illetve $i = 1, 2, \ldots, t-1$ esetén:

$$\underbrace{\text{F} \ldots \text{F}}_{i \text{ db fekete}} \quad \text{P} \quad \underbrace{\ldots \quad \text{F} \quad \ldots \quad \text{P} \quad \ldots}_{\substack{k-i \text{ db fekete, } m-1 \text{ db piros,} \\ \text{és közöttük nincs } t \text{ széria}}}$$

Ezek száma $C_t(m-1, k-i)$. De ebben lehet egy „rossz” eset, amikor mind a $t = m$ piros egymás mellett van, így le kell vonni $C_t(0, k-i)$ mennyiséget, ami lehet 0 is. Nézzük például: $C_3(3,4) = C_3(2,4) + C_3(2,3) + C_3(2,2) - [C_3(0,3) + C_3(0,2)] + 0 = 6 + 7 + 6 - [0 + 1] + 0 = 18$.

Ha $m > 0$ és $m > t$, akkor a következőképpen kaphatunk olyan sorozatokat, melyekben nincs t hosszúságú széria. Kezdődhet i db (t-nél kevesebb, vagyis $1 \le i \le t-1$) azonos elemmel (mondjuk feketével), utána egy másmilyen (piros), majd ezután sincs t széria:

$$\underbrace{\text{F} \ldots \text{F}}_{i \text{ db fekete}} \quad \text{P} \quad \underbrace{\ldots \quad \text{F} \quad \ldots \quad \text{P} \quad \ldots}_{\substack{k-i \text{ db fekete, } m-1 \text{ db piros,} \\ \text{és közöttük nincs } t \text{ széria}}}$$

Ezen sorozatok száma: $\sum_{i=1}^{t-1} C_t(m-1, k-i)$.
De ebben lehetnek olyanok is, ahol az 1 db piros után is pirosak vannak úgy, hogy t db piros van egymás után, és utána nincs t széria:

$$\underbrace{\text{F} \ldots \text{F}}_{i \text{ db fekete}} \; \underbrace{\text{P} \ldots \text{P}}_{t \text{ db piros}} \underbrace{\ldots \quad \text{F} \quad \ldots \quad \text{P} \quad \ldots}_{\substack{k-i \text{ db fekete, } m-t \text{ db piros és} \\ \text{nincs közöttük } t \text{ széria}}}$$

Ezek száma: $\sum_{i=1}^{t-1} C_t(m-t, k-i)$, amit az előző összegből le kell vonni. De ezekben lehet olyan is, hogy a t hosszú piros után is piros következik, vagyis „eltoltan” is lehet t széria. Ezek számát jelöljük: $\sum_{i=1}^{t-1} C_t^*(m-t, k-i)$, vagyis a $C_t^*(m-t, k-i)$ a pirossal kezdődő, $m-t$ pirosat és $k-i$ feketét tartalmazó olyan sorozatok száma, melyekben nincs t széria.
Nem számítottuk még be azokat az eseteket, amikor $i = 0$, vagyis pirossal kezdődik a sorozat. Ekkor az első elem piros és utána nincs t széria:

$$\mathrm{P} \quad \underbrace{\ldots\ \mathrm{P}\ \ldots\ \mathrm{F}\ \ldots}_{\substack{k \text{ db fekete, } m-1 \text{ piros} \\ \text{és nincs közöttük } t \text{ széria}}}$$

Ezek száma: $C_t(m-1, k)$. De ebben lehetnek olyanok is, melyek t szériával kezdődnek és utána nincs t széria:

$$\underbrace{\mathrm{P}\ \ldots\ \mathrm{P}}_{t \text{ db piros,}}\underbrace{\mathrm{F}\ \ldots\ \mathrm{F}}_{i \text{ db fekete}} \qquad \underbrace{\mathrm{P}\ \ldots\ \mathrm{F}\ \ldots\ \mathrm{P}\ \ldots}_{\substack{m-t \text{ piros, } k-i \text{ db fekete, pirossal kezdődik és} \\ \text{nincs közöttük } t \text{ széria } (1 \le i \le t-1)}}$$

Ezek száma: $\sum_{i=1}^{t-1} C_t^*(m-t, k-i)$, amit előző mennyiségből ($C_t(m-1, k)$-ból) le kell vonni.
Összesítve tehát kapjuk a következőt:
$C_t(m, k) = \sum_{i=1}^{t-1} C_t(m-1, k-i) -$
$- \left\{\sum_{i=1}^{t-1} C_t(m-t, k-i) - \sum_{i=1}^{t-1} C_t^*(m-t, k-i)\right\} +$
$+ \left\{C_t(m-1, k) - \sum_{i=1}^{t-1} C_t^*(m-t, k-i)\right\} + e_t(m, k)$.
Ami az eredeti (3.17) képletünket adja.

Példaként vegyük: $C_3(5,2) = C_3(4,2) + C_3(4,1) + C_3(4,0) - [C_3(2,1) + C_3(2,0)] + 0 = 6 + 1 + 0 - [3 + 1] + 0 = 3$. Így tehát azon $m + k$ elemű sorozatok számát, melyben m db piros és k db fekete elemet rakunk visszatevés nélkül sorba úgy, hogy nincs t széria, valóban a (3.17)-es képlet szolgáltatja. □

Számoljuk ki $C_t(m, k)$ értékeit $t = 3$ és nem túl nagy (legfeljebb 9) m és k esetén. (Adatok a 3.5 táblázatban találhatók.) Képletünk alapján vegyük például a $C_3(6,5)$ érték meghatározását. $C_3(6,5) = (84+45+16)-(18+14) = 113$. (Táblázatban kiemelten szerepelnek.) Vagyis például annak a valószínűsége, hogy 6 piros és 5 fekete kártyát tartalmazó csomagból kihúzva egymás után a kártyákat, lesz benne legalább 3 egyforma színű egymás után: $p = 1 - \frac{C_3(6,5)}{\binom{11}{5}} = 1 - \frac{113}{462} = 0,756$.

m\k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0
1	1	2	3	2	1	0	0	0	0	0
2	1	3	6	7	6	3	1	0	0	0
3	0	2	7	***14***	***18***	16	10	4	1	0
4	0	1	6	18	34	45	43	30	15	5
5	0	0	3	***16***	***45***	***84***	113	114	87	50
6	0	0	1	10	43	***113***	208	285	300	246
7	0	0	0	4	30	114	285	518	720	786
8	0	0	0	1	15	87	300	720	1296	1823
9	0	0	0	0	5	50	246	786	1823	3254

3.5. táblázat. $C_t(m,k)$ értékei $t = 3$ és legfeljebb 9 m és k esetén

Ezek után az alapkérdésünkre tehát a választ a $P_t(m,k) = 1 - \frac{C_t(m,k)}{\binom{m+k}{k}}$ képletbe való behelyettesítéssel kapjuk.

A $C_t(m,k)$ értékeire Bloom [8] 371. oldalán egy olyan formulát is ad, mely az m, k és t értékétől függetlenül mindig 6 tagból áll:

3.2.2. Állítás. *(Bloom [8] 371.o.) $t \geq 2$ esetén*

$$C_t(m,k) = C_t(m-1,k) + C_t(m,k-1) - C_t(m-t,k-1)- \\ -C_t(m-1,k-t) + C_t(m-t,k-t) + e_t^*(m,k), \tag{3.18}$$

ahol $e_t^*(m,k) = \begin{cases} 1, & \text{ha } m=k=0, \text{ vagy } m=k=t, \\ -1, & \text{ha } m=0 \text{ és } k=t \text{ vagy } m=t \text{ és } k=0, \\ 0, & \text{különben.} \end{cases}$

Peremfeltételeink pedig ugyanazok, mint (3.17) *-nál, vagyis: Ha* $m = k = 0$*, akkor definíció szerint legyen* $C_t(0,0) = 1$*. Ha* m *vagy* k *negatív, akkor pedig definíció szerint* $C_t(m,k) = 0$*.*

A (3.18) képlet helyességét (Bloom [8] 371. oldalon közölttől eltérő módon) az alábbiakból látom be, mely megtalálható a [20] publikációban.

Bizonyítás. Kezdődhet a sorozatunk 1 piros vagy 1 fekete elemmel:

$$\left.\mathrm{P}\underbrace{\ldots\ \mathrm{P}\ldots\mathrm{F}\ldots}_{m-1 \text{ piros és } k \text{ fekete}}\right\}\text{ezek száma: } C_t(m-1,k);$$

$$\left.\mathrm{F}\underbrace{\ldots\ \mathrm{P}\ldots\mathrm{F}\ldots}_{m \text{ piros és } k-1 \text{ fekete}}\right\}\text{ezek száma: } C_t(m,k-1).$$

Ezekből le kell vonni azokat, melyekben az első jel után is ugyanolyan következik összesen t hosszon, utána 1 másmilyen és utána nincs t széria:

$$\left.\underbrace{\mathrm{P}\ldots\ \mathrm{P}}_{t \text{ piros}}\quad \mathrm{F}\quad \underbrace{\ldots\ \mathrm{P}\ldots\mathrm{F}\ldots}_{m-t \text{ piros és } k-1 \text{ fekete}}\right\}\text{ezek száma: } C_t(m-t,k-1);$$

$$\left.\underbrace{\mathrm{F}\ldots\ \mathrm{F}}_{t \text{ fekete}}\quad \mathrm{P}\quad \underbrace{\ldots\ \mathrm{P}\ldots\mathrm{F}\ldots}_{m-1 \text{ piros és } k-t \text{ fekete}}\right\}\text{ezek száma: } C_t(m-1,k-t).$$

De ezekben benne szerepelnek a következő sorozatok is:

A t piros, t fekete, utána pirossal kezdődően olyan $m-t$ piros és $k-t$ fekete elemű sorozat, melyben nincs t széria és pirossal kezdődik. Ezek száma $C_t^{(p)}(m-t,k-t)$. Illetve – fordítva – t fekete, t piros, utána feketével kezdődő olyan sorozat, melyben nincs t széria. Ezek száma $C_t^{(f)}(m-t,k-t)$. De összegük pedig éppen $C_t^{(p)}(m-t,k-t)+C_t^{(f)}(m-t,k-t)=C_t(m-t,k-t)$.

Összegezve tehát:

$$C_t(m,k)=C_t(m-1,k)+C_t(m,k-1)-$$

$$-\{C_t(m-t,k-1)+C_t(m-1,k-t)-C_t(m-t,k-t)\}+e_t^*(m,k).$$

Vagyis valóban a (3.18) képletet kapjuk. □

Visszatérhetünk a fejezet bevezetőjében leírt két esethez. Mi is a helyzet a dolgozatokkal? Ha pl. 16 db A és 15 db B típusú dolgozatot osztok ki, akkor annak a valószínűsége, hogy 3-nál kevesebb azonos lesz egymás után: $0,9958$, vagyis valóban majdnem mindig ez történik. A kártyás esetet nézve azt találjuk, hogy míg $P_6(26,26)=0,464$, (annak a valószínűsége, hogy az 52 lapos kártyacsomag lapjait egymás után kirakva lesz benne egymás után 6 egyforma színű csak $0,464$), addig például $P_4(26,26)=0,974$. (Vagyis sokkal valószínűbb a 4-es széria.) Így tehát Gardner tévedett, amikor azt állította, hogy majdnem mindig kapunk 6-os szériát.

Az alkalmazások ismertetésének fontosságáról már írtam az 1. fejezetben. Most a leghosszabb szériák témakörhöz kapcsolódóan felsorolok néhány olyan területet, melyekben az említett problémakör szerepel és a sokféle lehetőség közül a tanár mindig az adott csoport érdeklődésének megfelelően tud választani szemléltető, motiváló példát. A tárgyalt leghosszabb szériák vizsgálatával kapcsolatos eredmények felhasználhatók a különböző gazdasági, sorbanállási problémák, Markov-láncok (lásd pl. Samarova [49], Schuster [52] vagy Schwager [53] cikkét), tőzsdei eseménysorok vizsgálatában (lásd pl. Binswanger és Embrechts [7] cikkének 4.2 fejezetét). De a gazdaságin kívül az alkalmazásnak jelentős szerepe van a műszaki, pl. hidrológiai folyamatokban (lásd pl. Sen [54] cikkét) és a biológiai, (pl. molekuláris biológiában) a DNS sorozatok vizsgálatában (lásd pl. Schilling [51] cikkét). Sok egyéb, a természettudományoktól távolabb eső területen is, így például a grafológiában is felhasználhatóak az eredmények (lásd pl. Arazi [3] cikkét). Révész [47] a számítástechnikában felmerülő, véletlen számsorozat számítógép általi létrehozását említi hasznos alkalmazási területként. Cikkében leírja, hogy már több módszert is kidolgoztak, melyek véletlen fej-írás sorozatokat generálnak valamilyen módon. Nehéz azonban eldönteni, hogy a kapott véletlen sorozat valóban olyan-e, mintha igazi dobássorozatot írtunk volna. A legtöbbször attól kell tartani, hogy valamilyen – számunkra esetleg ismeretlen – periódus van a felírt sorozatban. A legtöbb statisztikai módszer nem alkalmas ennek a hibának a kiszűrésére. Egy, a leghosszabb fejszéria hosszán alapuló próba alkalmas arra, hogy a sorozatnak a periodicitás okozta nem véletlen voltát kimutassa.

4. fejezet

A Szentpétervári paradoxon

Mivel gazdasági képzési területen (Szolnoki Főiskola) tanítok, ezért részletesebben egy olyan problémát és a hozzá kapcsolódó alkalmazásokat szeretném ismertetni, melyek ezen a szakterületen lehetnek különösen hasznosak és a hallgatók számára is érdekesek, ugyanakkor szorosan kapcsolódnak az előző fejezetben tárgyalt problémakörhöz.

A Szentpétervári paradoxon egy játékból, illetve annak vizsgálatából született. Ezzel kapcsolatban azonban felvetődhet a Rényi által is feltett kérdés, miszerint érdemes-e a szerencsejátékokkal tudományos alapon foglalkozni? "Erre a kérdésre véleményem szerint feltétlenül igennel kell válaszolni. Nemcsak azért érdemes, mert ez segít a kombinatorika és a valószínűségszámítás megértésében, hanem azért is, mert e problémák tudománytörténeti érdekességűek, hiszen a valószínűségszámítás kialakulásában a szerencsejátékokra vonatkozó feladatok közismerten igen nagy szerepet játszottak. Végül a modern tudomány és technika számos fontos fogalmának kialakulásában a szerencsejátékokkal kapcsolatos tapasztalatoknak, és az ezekre vonatkozó matematikai ismereteknek igen nagy szerepük volt." [45]

Az úgynevezett szentpétervári játék a következő, melynek leírása minden, a paradoxonnal foglalkozó cikkben szerepel, így például [12]-ben is. Két játékos – nevezzük őket Péternek és Pálnak (Pál a bankár szerepét játsza) – az alábbiakban állapodnak meg. Péter elkezd dobálni egy pénzérmét. Ha első dobásra fej jön ki, akkor kap Páltól 2 forintot (vagy dukátot, vagy dollárt, vagy eurót, kinek mi tetszik). Ha csak a második dobásra kapja az első fejet, akkor 4 forintot kap, ha a harmadik dobásnál lesz először fej, akkor 8 forintot és így tovább. Vagyis ha az első fej a k-adik dobásra jön ki, akkor 2^k forintot kap Páltól. Mivel Pál sem rendelkezik korlátlan mennyiségű pénzzel, így Péternek valamekkora részvételi díjat kell fizetnie a játékért. A kérdés az, hogy mekkora legyen ez a "beszálló tőke" Péter részéről, hogy a játék igazságos legyen? Igazságos játékon azt értjük, hogy egyik játékos sem gazdagodhat a másik rovására. (Átlagos nyereménye, illetve a másik játékos átlagos vesztesége 0 forint kell, hogy legyen.) Foglaljuk az adatokat táblázatba, ahol x_i jelöli azt a nyereményt, melyet Péter akkor kap, ha az i-edik dobásnál lesz először fej, illetve p_i ezen eseménynek a valószínűségét:

x_i	2	4	8	16	32	...	2^k	...
p_i	$1/2$	$(1/2)^2$	$(1/2)^3$	$(1/2)^4$	$(1/2)^5$	...	$(1/2)^k$	...

4.1. táblázat. Péter nyereményének eloszlása

Mivel szabályos érmét dobunk, így 0.5 a fej-(és írás)dobás valószínűsége is, vagyis 0.5 annak a valószínűsége, hogy rögtön elsőre fejet dobunk, vagyis 2 forintot kapunk. Ha csak a második dobásra kapunk fejet, az úgy lehet, hogy elsőre írást dobunk (0.5 valószínűséggel) és utána fejet, szintén $0,5$ valószínűséggel. Mivel a két dobás (esemény) egymástól független, így ezen esemény valószínűsége $0,5 \cdot 0,5 = (1/2)^2$. Hasonlóan ha például azt az általános esetet nézzük, hogy a k-adik dobásra kapunk először fejet, az azt jelenti, hogy előtte $(k-1)$-szer írást dobunk ($(1/2)^{k-1}$ valószínűséggel) és utána fejet $1/2$ valószínűséggel. Tehát az eseményünk valószínűsége $(1/2)^{k-1} \cdot (1/2) = (1/2)^k$. Folytatva és vizsgálva a p_i-k összegét, a végtelen mértani sor összegképlete alapján kapjuk: $\sum_{k=1}^{\infty}(1/2)^k = 1$, ami egyébként azt jelenti, hogy a játék véges számú lépésben véget fog érni majdnem biztosan (1 valószínűséggel). Vagyis Péter nyereménye majdnem biztosan véges lesz. Pálnak (a bankárnak) azonban az a véleménye, hogy Péternek végtelen nagy összeget kell befizetnie, hiszen végtelen nagy a várható nyereményösszege is. Valóban, ha kiszámoljuk a várható értéket, az eredmény végtelen lesz.

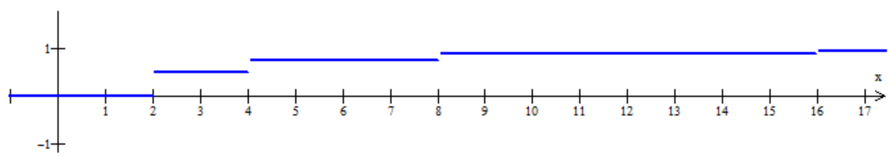
(4.1)
$$E(x) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i = 2 \cdot 1/2 + 4 \cdot (1/2)^2 + \ldots + 2^k \cdot (1/2)^k + \ldots = \sum_{i=1}^{\infty} 1 = \infty$$

Péter nyilvánvalóan úgy gondolja, hogy ez azért túlzás lenne, hiszen tetszőleges $x \geq 2$ esetén annak a valószínűsége, hogy a nyereménye legfeljebb x lesz:

$$P(X \leq x) = \sum_{k:2^k \leq x} (1/2)^k = \sum_{k=1}^{[\log_2 x]} (1/2)^k = 1 - (1/2)^{[\log_2 x]}$$

Ahol $[a]$ jelenti az a szám egészrészét. Ez alapján felírhatjuk és ábrázolhatjuk a nyeremények eloszlásfüggvényét:

$$F(x) = P(X \leq x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x < 2, \\ 1 - 2^{-[log_2 x]}, & \text{ha } x \geq 2. \end{cases} \qquad (4.2)$$



4.1. ábra. A nyeremények eloszlásfüggvénye

Így, mivel $P(X > x) = 2^{-[\log_2 x]}$, így a nyeremény csak kis esélyel fog túllépni az $x \geq 2$ összegnél csak egy kicsivel is nagyobb összeget. Például egy 40 forintnál nagyobb nyeremény valószínűsége: $P(X > 40) = 1/32 \approx 0,03125$, egy "sokkal" nagyobb, mondjuk 32000 forintnál nagyobb nyeremény valószínűsége $0,00006$ körüli érték. Így aztán még egy nem túl nagy véges összeget is félve kockáztatna Péter, nem még végtelen nagyot (ha egyáltalán lenne neki ekkora összege). Ahogyan Nicolaus Bernoulli 1728. augusztus 27.-én unokaöccsének Danielnek írta: "még a féleszű ember is eladná a játékhoz való jogát 40 dukátért" [12]. Ez tehát a nagy dilemma, mely évszázadokon át foglalkoztatta nemcsak a matematika tudósait, hanem később a közgazdászokat, pszichológusokat és egyéb más tudományterület művelőit is. Vizsgáljuk most egy kicsit a paradoxonnak és megoldási módjainak történeti fejlődését, hiszen oly sok érdekességet tartalmaz, hogy már ezek felkelthetik az érdeklődést a téma iránt. A matematikai ismeretekben gyengébb hallgatók is szívesen megismerkednek az egyes matematikai összefüggések kialakulásának történeti hátterével és találgatják a mindkét játékos számára elfogadható játék-díjat.

4.1. A paradoxon története

A több híres tudóssal is büszkélkedő Bernoulli családnak nagy szerepe volt a paradoxon felismerésében, a megoldáskeresésben és ezek másokkal való megismertetésében. A probléma gyökerei azonban korábbra nyúlnak vissza. A tudománytörténészek úgy tartják, hogy a valószínűségszámítás Blaise Pascal és Pierre de Fermat híres levelezésével született meg 1654-ben, melyben szerencsejátékok tárgyalása során a tudományos alapokat is sikerült lefektetni. Ezekre, illetve ezek kiegészítéseire épült Huygens appendixe, mely az első nyomtatott munka volt ebben a tárgykörben. (1657-ben latin, 1660-ban holland nyelven jelent meg.) A tárgy e kezdeti korszakában a várható érték sokkal nagyobb jelentőségű fogalom volt, mint a legfeljebb intuitív szinten jelen lévő valószínűség fogalma. Szövegkörnyezettől függően az "aequitas" szó jelenthetett egyenlőséget, igazságosságot vagy részrehajlás nélküli részesedést is. Ahogyan a korabeli klasszikus matematikai kérdéseket általában a fizikai problémák motiválták, úgy a valószínűségszámítással kapcsolatos kérdéseknek is alapvetően hétköznapi emberi oldala volt, bár sokszor nem a fizika, hanem inkább a szerencsejáték területéről. A valószínűségszámítás fejlődésében a Bernoulliak neve kiemelkedő szerepet játszik. Jacob és öccse Johann az egymástól való tanulás során egymás riválisáivá is váltak. Jacobnak az Ars Conjectandi című könyve csak halála után 8 évvel, 1713-ban jelent meg, nem kis részben Johann ellenállása miatt. Kettőjük között született Nicolaus testvérük, aki festőművész volt, és az ő fia (szintén Nicolaus), a közös unokaöccs adta ki végül is a könyvet. Ez a Nicolaus (II.) Bernoulli az, – matematika, jogi és filozófia professzor is volt – , akinek a nevéhez a paradoxon felvetése fűződik. Először 1713. szeptember 9.-én, de Montmort-nak írott levelében szól a paradoxonról, bár akkor még nem a ma ismert alakjában közli azt. A következő megfogalmazást adja: "A fizet B-nek 1 koronát, ha a szabályos kockával dobva, az első dobásra 6-ost sikerül dobni. 2 koronát fizet, ha a második dobásra jön ki a 6-os, 3 koronát, ha a harmadikra, és így tovább. Kérdése, mekkora lesz B várható nyereménye? Mi történik akkor ha az A által fizetett összegek rendre nem 1, 2, 3, ... korona, hanem mondjuk 1, 2, 4, 8, ... vagy 1, 3, 9, 27, ... vagy mondjuk 1, 4, 9, 16, ... korona?" [16] Montmort azonban nem igazán foglalkozott a felvetett ellentmondások megoldásával (talán meg sem értette igazán a problémát), diplomatikusan a következőt írta: " Senki sincs, aki nagyobb szakértelemmel tudna a problémával foglalkozni, mint Nicolaus." [16] Viszont a levelezésüket megjelenteti az Essay d'Analyse sur les Jeux de Hazard című könyvének 1713-ban megjelent második kiadásában, így a kor tudósai értesülhettek a feladatról. (Angol fordítását lásd [36]-ban.) Így tud Cramer is bekapcsolódni a kutatásba. Az eredeti problémát átfogalmazza kockadobásról érmedobásra, így tulajdonképpen a paradoxon jelenlegi megfogalmazása tőle származik. A megoldást tekintve két ötlettel áll elő. Az első szerint bármilyen jóérzésű embernek ugyanannyi örömet okoz egy kb. 20 milliós összeg megnyerése, mint egy ennél nagyobb összegé. Mivel $2^{24} = 16.777.216$, így a játék értéke szerinte

$$\sum_{k=1}^{24} \frac{2^k}{2^k} + \sum_{k=25}^{\infty} \frac{2^{24}}{2^k} = 24 + 1 = 25$$

Általánosabban megfogalmazva, nagy k esetén egy 2^k-nál nagyobb összeg sem okoz nagyobb örömet, mint a 2^k, így a méltányos összeg a következő formulával adódik

$$\sum_{j=1}^{k} \frac{2^j}{2^j} + \sum_{j=k+1}^{\infty} \frac{2^k}{2^j} = k + \frac{1}{2} \sum_{m=0}^{\infty} (\frac{1}{2})^m = k + 1$$

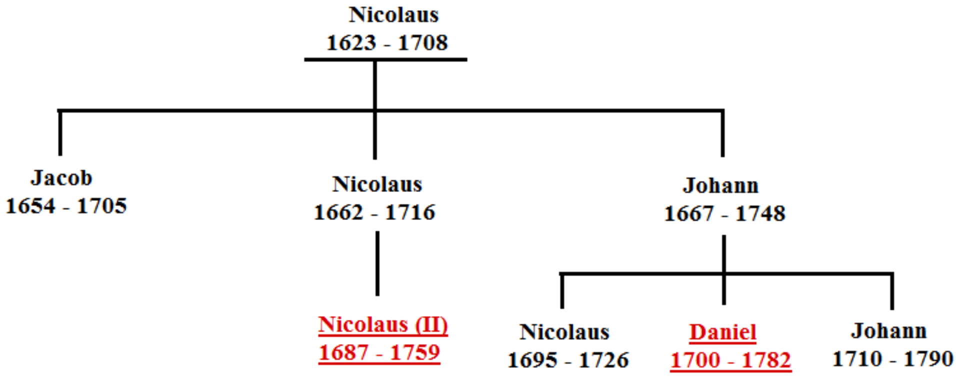
A másik ötletében is szerepel, hogy nagy nyereménynél az összeg növekedésével nem egyenesen arányos az általa okozott örömérzet. Ő négyzetgyökös összefüggést feltételezett, vagyis egy x összeg örömértéke egyenlő az x négyzetgyökével. Másrészt "a játék értékének olyan összegnek kell lenni, amelynek elvesztésével okozott fájdalom ugyanannyi, mint az elnyerésével szerzett öröm morális várható értéke" [12]. Így tehát a játék értéke az alábbi kifejezéssel adható meg:

$$[E(\sqrt{X})]^2 = [\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{2^k}}{2^k}]^2 = [\frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{j=0}^{\infty} (\frac{1}{\sqrt{2}})^j]^2 = [\frac{1}{\sqrt{2}-1}]^2 = [\sqrt{2}+1]^2$$

Ezek alapján a Cramer által meghatározott összeg a játékba való belépéshez $5,8$ vagy kerekítve 6 forint lenne.

Ezek az ötletek nem tetszettek Nicolaus Bernoullinak, így írt Szentpétervárra unokaöccsének, Danielnek, aki Johann fia volt. (A Bernoulli családfa részletét a 4.2. ábra mutatja.) Levelezéseik után Daniel a szentpétervári akadémiára benyújtott dolgozatában (a Commentarii 1730-31-es kötetében, mely csak 1738-ban jelent meg) a Craméréhez hasonló megoldást ad, melyhez megjegyzésként hozzáteszi Nicolaus kritikáit is. (Többen tévesen innen eredeztetik a paradoxon nevét, melyre később visszatérek. Akkoriban sem volt és napjainkban sem jellemző, hogy egy probléma a nevét a probléma közlésének helyéről kapta volna.)

Daniel Bernoulli, továbbfejlesztve Cramer gondolatait, bevezeti a "utilitas", hasznosság fogalmát, mellyel a közgazdaságtan és a pszichológia is elkezd foglalkozni. Véleménye szerint egy x összeg dx-szel való növekedése csak $du = b \cdot dx/x$ hasznosság (örömérzet) növekedéssel jár, ahol $b > 0$ valamilyen konstans. (Minél több pénze van a játékosnak, annál kisebb egy kis növekedés feletti öröme.) Így ha a játékosnak eredetileg α forintja van, egy x nyeremény morális haszna (hasznossága) $u(x) = b \cdot ln([\alpha + x]/\alpha)$. Így Péter morálisan várható haszna nem $E(X) = \infty$, hanem $M(X) = E(u(X)) = b \cdot E(ln([\alpha + x]/\alpha))$. Ez az átlagos haszon viszont a következőképpen számolható. Az x nyeremény 2^k alakú összegeket jelent, melyekhez 2^{-k} valószínűségek



4.2. ábra. Táblázat: A Bernoulli családfa részlete

tartoznak. Felhasználva a logaritmus azonosságait, valamint, hogy $\sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} = 1$, kapjuk, hogy az átlagos haszon a következő alakban írható.

$$M(X) = b\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\ln(\alpha+2^k)-\ln\alpha}{2^k} = b\ln(\prod_{k=1}^{\infty}(\alpha+2^k)^{2^{-k}}) - b\ln\alpha.$$

Ez viszont egyenlő a morális haszonnal, ($u(x) = b \cdot ln([\alpha + x]/\alpha)$ kifejezéssel) amiből rendezéssel azt kapjuk, hogy

$$x(\alpha) = \prod_{k=1}^{\infty}(\alpha+2^k)^{2^{-k}} - \alpha$$

ahol tehát $x(\alpha)$ az eredeti α tőke, morális értékének játékból hozzáadódó növekedését jelenti.
Néhány kezdőtőke-nagyságra így például az alábbi értékek adódnak. Ha a kezdőtőke $\alpha = 0$, akkor 4 forint (kérdés persze, hogy miből fizetné be a 4 forintot, ha nincs semmi kezdőtőkéje), míg például 1000 forint kezdőtőke esetén is csak 11 forint a játék díja. Így Daniel Bernoulli a matematikai problémát pszichológiai és gazdasági síkra is átvitte, felvetve, hogy a különböző gazdasági és pszichológiai magatartásokban szintén törvények uralkodnak, melyek esetleg különböznek a matematikában megfogalmazottaktól. (Bővebben lásd [5]-ben L. Sommer fordításában.) Hasonló megoldást adott Euler is, de mivel nem akart a

Bernoulliak ügyeibe beavatkozni, – hiszen Daniel apja volt a tanára és Daniel szerezte neki a szentpétervári munkahelyét – eredményeit nem hozta nyilvánosságra. Halála után 81 évvel jelent csak meg a témáról szóló dolgozata. Nicolausnak nem tetszett Daniel megközelítése, amint írja, a morális várhatóság "nem az egyenlőségnek és igazságosságnak megfelelően értékeli ki minden játékos esélyét egyaránt". Szerinte mindenki számára egyformán k forintot kell, hogy érjen a játék, a játékos általános diszpozíciójától függetlenül. De mekkora legyen ez a k? Elfogadhatóbbnak tartja, ha azt mondjuk, hogy nagy k esetén már olyan kicsi a hozzá tartozó valószínűség, hogy gyakorlatilag 0-nak tekinthető. De ki mondja meg, hogy mekkora ez a kis valószínűség, amitől már nem foglalkozunk vele? Tippelgethetünk, javasolgathatunk, mondhatjuk, hogy pl. a $k = 200$-hoz akkora pénzösszeg és olyan kicsi valószínűség tartozik, ami már szinte elképzelhetetlen, de ez nem tűnik igazán egzakt megoldásnak. A Bernoulliak részéről további eredmények nem születtek a probléma megoldására.

A kérdés csak 1754-ben került újra elő d'Alembert Fej vagy írás című, az Enciklopédiában megjelent cikkében. Ezután hosszú ideig és legalább hat alkalommal tárgyalja a problémát. Mivel Daniel Bernoullival finoman szólva sem voltak jó viszonyban, a paradoxonról írott munkáiban egyetlen egyszer sem említi a Bernoulli nevet. A problémát először elég körülményesen: "probleme proposé dans le Tome V des Mémoires de l'académie de Petersbourg" néven említi, majd a továbbiakban elhagy egy-egy szót, míg végül kialakul a "probleme de Petersbourg" elnevezés. Így a paradoxon elnevezése sokkal valószínűbben innen eredeztethető. A megoldással kapcsolatban Lagrange-nak írott levelében sajnálattal vallja be, hogy "a pétervári probléma megoldása számomra a jelenleg ismert fogalomkörben lehetetlennek tűnik". Többek érdeklődését is felkeltik munkái, de érdemleges eredmény nem születik. Megemlíthetjük például Whitworth érdekes elgondolását a probléma megoldásával kapcsolatban. Szerinte nem egy állandó összeget, hanem minden játékban az adott, aktuális tőkének egy fix hányadát kell kifizetni. Szintén saját maga belátja, hogy megoldása nem tökéletes. A különböző megoldások legfőbb hibáit az okozta, hogy a valószínűség matematikai törvényeit megpróbálták egyedi véletlen eseményekre alkalmazni. A törvényekből arra akartak következtetni, hogy mi fog történni legközelebb, egy teljesen konkrét egyedi esetben. (Ez a mai hallgatók körében is gyakori hiba, ennek kiküszöbölésében is segít a téma tárgyalása.) A nagy számok törvényének intuitív jelentése nem volt jelen még a matematikusok gondolkodásában sem. Egyedül a francia de Condorcet márki az, aki ráérez erre a problémára. Szerinte Péternek végtelen sok játékot kellene játszania ahhoz, hogy végtelen várható értéke realizálódjon. "A probléma maga nem értelmes, hanem hasonnemű még értelmes kérdések limesze." [12] Amikor n játékot játszunk, a válaszunk függni fog n-től, így a kérdés az, hogy milyen n-re lehet a két játékos egyenlőségét elérni. Ez volt az egyedüli jó vonal, kortársai mégis figyelmen kívül hagyták.

A következő matematikus, aki érdemben foglalkozott a kérdéssel, Buffon. Ő az első, aki (lejegyzetten) a játékot ténylegesen lejátszatta egy gyerekkel 2048-szor. Ekkor Péter összes nyereménye 20104 forint volt, vagyis egy játékra átlagosan $20104/2048 = 9,82$ vagyis körülbelül 10 forint jutott. Ez szerinte "érvényes és jó, mivel nagyszámú kísérletre alapul, továbbá megegyezik egy olyan gondolatmenet eredményével is, amely matematikai és kikezdhetetlen" [12]. A 2048 játék során észlelt eredményeket mutatja az alábbi táblázat:

Az első fej (k)	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A gyakorisága	1061	494	232	137	56	29	25	8	6
A nyeremény (2^k)	2	4	8	16	32	64	128	256	512

4.2. táblázat. Buffon által lejátszatott játék adatai

Az adatainkat szemlélve jól látszik, hogy annak a bekövetkezése, hogy csak a sokadik dobásra kapunk először fejet, egyre kevésbé várható. Buffon matematikai levezetésével arra a következtetésre jutott, hogy n játékért $nlog_2n$ forint jár, vagyis, ha n játékot játszunk, játékonként log_2n díjat kell fizetnünk. Gondolatmenete a következő volt. Ha $n = 2^k$ játékot játszunk, akkor az esetek felében (vagyis 2^{k-1})

esetben lesz elsőre fej. A nyeremény minden esetben 2 forint, így ez összesen $2 \cdot 2^{k-1} = 2^k$ forintot eredményez. 2^{k-2} esetben a második dobásra lesz az első fej, ez 4 forintjával $2^2 \cdot 2^{k-2} = 2^k$ forintot ad szintén. Folytatva a gondolatmenetet, és felhasználva, hogy $2^{k-1} + 2^{k-2} + \ldots + 2 + 1 = 2^k - 1$, marad még egy játék, ami folytatódhat, de ennek már kicsi a valószínűsége (főleg, ha n nagy). Összesen tehát n játék lejátszása után kapunk $k \cdot 2^k$ forintot, ami (felhasználva az $n = 2^k$ kifejezést,) egyenlő $n \cdot \log_2 n$. Ez azt jelenti, hogy játékonként $\log_2 n$ forint nyeremény lesz. Méltányos játéknál tehát tekinthető ez az összeg a játék játékonkénti díjának is. Eszerint a 2048 játék játszásakor $log_2 2048 = 11$ forint fizetendő játékonként, ami a kísérletével 1/11 pontossággal megegyezik. Saját maga észreveszi, hogy ha sok, pl. 1048575 játékot játszunk, akkor az összeg már 20 körülire jön ki, de mivel ennyi játék lejátszása kb. 30 évig tartana, így szerinte ezzel már a realitás szintjén nem kell foglalkozni. Szerinte tehát 10 forint az az ár, melyet játékonként fizetni kell, ha igazságosak akarunk lenni.

Laplace a paradoxon megoldásához nem jutott közelebb, de egyéb eredményei, melyet *A valószínűségek analitikus elmélete* című művében közölt, nagy technikai előrelépést jelentettek. Összegezte mindazt, amit a tárgyban tudott arról, hogy adott feltételek mellett valószínűségeket, várható értékeket és eloszlásokat hogyan lehet számolni és közelíteni. A paradoxon tekintetében számottevő, új eredmény sokáig nem születik, a már meglévő eredményeket próbálják fejlesztgetni, bizonyítani. Többen is valamilyen ésszerű, emberi léptékű határok közé próbálják szorítani a megnyerhető összeget pl. úgy hogy feltételezhetjük, hogy a banknak nincs végtelen sok pénze. Módosítsuk pl. a játékszabályt úgy, hogy a megnyerhető összeg maximum 1 millió forint (akárhányadik dobásra is kapjuk az első fejet, vagyis még ha több járna a játékosnak akkor is csak ennyit kap). Mivel 2^{20} már több, mint 1 millió, így a nyeremény várható értéke a következő lesz.

$$\tfrac{1}{2} \cdot 2 + \tfrac{1}{4} \cdot 4 + \ldots \tfrac{1}{2^{19}} \cdot 2^{19} + (\tfrac{1}{2^{20}} + \tfrac{1}{2^{21}} + \ldots) \cdot 10^6 \approx 21, \ldots$$

Vagyis 22 forintos árral még kicsit jól is jár a bank. 1872-ben *A Budget of Paradoxes* című könyvében de Morgan beszámol arról, hogy ő is lejátszatta a játékot (Buffonhoz hasonlóan) és mint írja, arra a megállapításra jutott, hogy "Ha Buffon ezerszer többször próbálta volna, akkor az eredmény nemcsak több lett volna, de játékonként több. A nagyobb háló nem csak több halat, hanem több fajta halat fogott volna, és kétmillió játékban azt is várhatnánk, hogy néhány esetben a fej a huszadik dobásig sem mutatkozik." Többen is a Buffon féle gondolatmenetet követik, például Lupton [32]-ben szintén az n játékért $n \log_2 n$ forint megoldást tartja helyesnek. A Daniel Bernoulli-féle utilitási vonal (főleg Laplace népszerűsítő munkájának köszönhetően) két ágra szakad. Az egyik Fechner, a kísérleti pszichológia megalapítója nevéhez fűződik. Felállította az ún. Weber-Fechner féle empirikus törvényt, mely szerint az S stimulus által kiváltott R reakció nagysága $R = C \cdot \ln S$, ahol C a vizsgált érzékeléstől függő pozitív konstans. A másik vonal az elméleti közgazdaságtan területén hozott új eredményeket. Menger vizsgálatai az $u(x)$ hasznosság-függvényre vonatkozóan – melyben belátta, hogy az $u(x) = C \cdot \ln x$ nem jó – vezették el Neumann Jánost a hasznosság axiomatizálásáig, mely a modern közgazdaságelmélet egyik pilléréhez vezetett. Számos kísérlet születik az $u(x)$ ésszerű megválasztására. Nagyon sok népszerű-tudományos mű is megjelenik, boncolgatva a paradoxont különböző oldalairól. Ahogy Samuelson írja: "A szentpétervári paradoxon megbecsülésnek örvendő sarok a kultúrált analitikus elme memóriabankjában." [50]

A következő nagy áttörést Feller 1945-ös eredményei jelentették. Az már korábban is egyértelmű volt, hogy a játszmánként fix összeg nem lehet jó, hiszen akármilyen nagy is ez az összeg, a bank mindig rosszul járna, hiszen a nyeremények várható értéke végtelen nagy. A részvételi díj tehát nem egy konstans, hanem n növekedésével nő, mégpedig a már többek által megadott $\log_2 n$ kapcsolat szerint. Feller szintén erre az összefüggésre jut vizsgálatában. Ha $X_1, X_2, \ldots$ Péter nyereményei az első, második, ... pétervári játékban, és $S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$ Péter össznyereménye az n játék során, akkor az X várható értékének végességét feltételezve, egy játékot akkor nevezünk igazságosnak, ha nagy n esetén az S_n össznyeremény a várható érték n-szerese körüli lesz. Vagyis $nE(X) \approx S_n$, amiből azt kapjuk, hogy a játékonkénti nyeremény a várható érték körüli lesz, vagyis nagy n-re $\frac{S_n}{n} \approx E(X)$, illetve $\frac{S_n}{n} \to E(X)$ majdnem biztosan. Feller belátja [22] és [23]-ben, hogy ha még X szórása is véges, akkor a centrális határeloszlás tétel miatt:

$$P(S_n - nE(X) > 0) \to 1/2 \leftarrow P(S_n - nE(X) < 0) \tag{4.3}$$

vagyis nagy n esetén az esetek kb. felében az egyik játékos, míg a másik felében a másik nyer és a nyeremények is körülbelül szimmetrikusan oszlanának el. Feller belátja, hogy $Sn/nlog_2n$ sztochasztikusan tart 1-hez, amiből következik, hogy n játékért $nlog_2n$ összeg a méltányos. Sajnos azonban a problémában sem a szórás, de még a várható érték sem véges, éppen ez volt a gond eddig is.

Az előző tétel és Feller dolgozata alapján Steinhaus teszi meg a következő nagy lépést. Ahogyan írja: "a paradoxon feloldásához nem egy egyedi játékot, hanem játékok egy sorozatát kell nézni" [57]. Egy determinisztikus sorozattal próbálja imitálni Péter véletlen nyereményeit. Ehhez vegyünk először 2-eseknek és üres helyeknek egy alternáló sorozatát:

2_2_2_2_2_2_2_2_2_2_2_2_2_2_2_ ...

Most írjunk az első, majd minden második üres helyre 4-est:

242_242_242_242_242_242_242_24...

Majd hasonlóan írjunk 8-asokat, aztán 16-osokat és így tovább:

242824216242824232242824216242824...

Ezt azért gondolhatjuk helyesnek, mert a játékban az esetek felében (mondjuk minden második esetben) 2 forint a nyeremény, a megmaradtak felében 4, az ezután megmaradtak felében 8, és így tovább. Felírva ezen sorozat n-edik empirikus eloszlásfüggvényét, kiderül, hogy ez igen gyorsan (egyenletesen) tart a szentpétervári eloszlásfüggvényhez. Ha $\sharp A$-val jelöljük az A halmaz elemeinek a számát, akkor a Steinhaus sorozat n-edik eloszlásfüggvénye a következő.

$$F_n(x) = \frac{\sharp\{x_j \leq x | 1 \leq j \leq n\}}{n}$$

Ez a függvény tehát azt fogja megmutatni minden valós x-nél, hogy a sorozat első n elemének hányad része nem nagyobb, mint x. Ha $F(x)$ a szentpétervári játékban szereplő nyeremények eloszlásfügvénye, akkor Steinhaus törvénye a következő alakú lesz

$$D_n^* = \sup_{x \epsilon R} |F_n(x) - F(x)| \to 0. \tag{4.4}$$

Vagyis Steinhaus szerint a játék akkor lesz igazságos, ha az egyes játszmákért a fenti sorozat elemei szerinti összegeket fizetjük. Ez azt jelenti, hogy ha $F_n(x)$ jelöli a legfeljebb x nagyságú befizetések relatív gyakoriságait, akkor $F_n(x)$ annak a valószínűségéhez konvergál, hogy Pál (a bank) legfeljebb x nagyságú összeget fizet ki.

A további eredmények tekintetében meg kell említenünk, hogy Csörgő Sándor, és lelkes csapata dolgozott tovább a kérdésen sikerrel. Az alábbi tételeket sikerült bebizonyítaniuk:

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{S_n}{n \cdot \log_2 n} = 1; \limsup_{n\to\infty} \frac{S_n}{n \cdot \log_2 n} = \infty \tag{4.5}$$

majdnem biztosan.

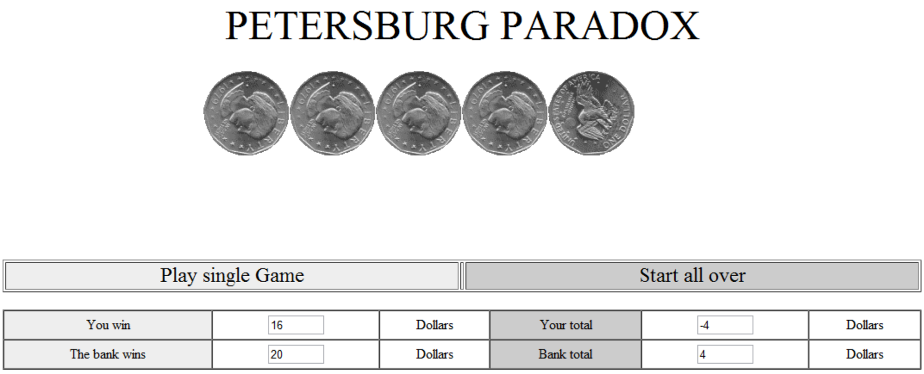
Ez azt jelenti, hogy Péter halmozott nyereményeinek S_n sorozata determinisztikus sorozatokkal nem egyensúlyozható ki úgy, hogy véges pozitív határértéket kapjunk majdnem biztosan. Eszerint egyik díjsorozat sem lehet elég nagy. Ennek oka az időnként (nagyon kis valószínűséggel ugyan, de mégis) előforduló nagyon nagy nyeremény. (Részletesebb vizsgálatokat lásd [13]-ban.) Tekintsük n játék esetén Péter nyereményeinek nagyság szerinti sorbarendezését (rendezett mintáját) $X_{n,1} \leq \ldots \leq X_{n,n}$. Rögzített m esetén $n > m$ játékot játszva Péter nyereménye legyen $S_n(m) = \sum_{j=1}^{n-m} X_{n,j}$ vagyis Péter lemond az elvileg létező m legnagyobb nyereményéről ($X_{n,n} + \ldots + X_{n,n-m+1}$ forintról) és így az eddigi S_n forint helyett $S_n(m)$ forintot kap n játszmáért. Azt gondolnánk, hogy minél nagyobb az m, annál kevesebbet kell fizetnie $S_n(m)$-ért, mint korábban S_n-ért. Azonban Csörgő és Simons [14]-ben bebizonyítják, hogy

$\frac{S_n(m)}{n \log_2 n} \to 1$ majdnem biztosan minden rögzített $m \epsilon N$ esetén.

Tehát a nagy számok törvényei csak annyit mondanak, hogy az S_n és az $S_n(m)$ véletlen nyeremények értéke is $n \log_2 n$ körül lesz. A megoldáshoz tehát S_n eloszlásának a megismerése fog közelebb vinni. Csörgőék belátják, hogy határeloszlás nincs. [12] Akárhogyan is választunk $C_n, A_n > 0$ konstansokat, a $P(S_n - C_n/A_n \leq x)$ sorozat nem konvergál egy olyan $G(x)$ eloszlásfüggvényhez, (annak minden folytonossági pontjában) amely nem egy konstans eloszlásfüggvénye. A szentpétervári eloszlás tehát nem tartozik bele semmilyen eloszlás vonzástartományába. Martin-Löf [33]-ban $\{2^k\}_{k=1}^{\infty} \subset N$ részsorozat esetére megad egy határeloszlástételt. Bebizonyítja, hogy ha $k \to \infty$, akkor a $P\{\frac{S_{2^k}}{2^k} \leq x + k\}$ valószínűségek konvergálnak egy $G_1(x)$ nemdegenerált eloszlásfüggvény értékeihez. Közelítőformulát is megad, miszerint nagy k és nagy m esetén $P\{S_{2^k} > 2^k(2^m + k)\} \approx 1 - G_1(2^m) \approx \frac{1,8}{2^m}$. Tehát ha Péter 2^k játékért $2^k(2^m + k)$ forintot fizet, akkor Pál nagy valószínűséggel (közelítőleg $1 - \frac{1,8}{2^m}$) nem megy csődbe. (A dolgozat szerint is a modell alkalmazható nagyon kockázatos biztosítások díjtételeinek meghatározásánál, például tűzkár vagy üzleti csőd elleni biztosításoknál.) [13] és [14]-ben tárgyaltak szerint, független, egyforma eloszlású véletlen változók részletösszegeinek létezhet határeloszlása a természetes számok végtelenbe tartó részsorozatai mentén úgy, hogy minden $n \epsilon N$ számot érintve ilyen nincs. Azt mondjuk, hogy az illető eloszlás benne van a részsorozat mentén nyert határeloszlás parciális vonzástartományában. Vagyis Martin-Löf tétele szerint a szentpétervári eloszlásfüggvény benne van a G_1 eloszlásfüggvény parciális vonzástartományában. Egy eloszlásfüggvényre három állítás valamelyike teljesülhet:

- semmilyen eloszlás parciális vonzástartományában nincs benne (még részsorozatok mentén sincs határeloszlás),
- pontosan egy típus parciális vonzástartományában van benne (ez a típus szükségképpen stabilis),
- benne van egy nem stabilis eloszlás parciális vonzástartományában, mely esetben szükségképpen benne kell legyen eloszlások kontinuum számosságú különböző típusának parciális vonzástartományában.

Mivel a G_1 függvény nem stabilis, így a szentpétervári eloszlásfüggvény a harmadik kategóriába esik. Ebből viszont az következik, hogy kontinuum számosságú határeloszlás létezik. Vagyis azért nincs határeloszlás, mert végtelenül sok van. Ezekre viszont megfogalmazható ún. összetartás tétel, melyre vonatkozóan további vizsgálatokat végzett főként Csörgő Sándor [12], Pap Gyula [40]-ban, illetve [62]. Megjegyezzük, hogy n játéknál átlagosan $\log_2 n$ forint játékonként még akkor is kevés, ha Péter lemond a legnagyobb nyereményéről, de már túl sok, ha a legnagyobb kettőről mond le. A Szentpétervári játékhoz és az érmedobálásokhoz is készültek számítógépes programok, pl. a Mathematik.com. A paradoxonnal kapcsolatos részben játékonként 20 dollárt fizetünk a banknak, tapasztalhatjuk, hogy igen ritkán fogunk nyerni. Az alábbi, 4.3. ábra egy játék végeredményét mutatja.



4.3. ábra. Egy szentpétervári játék lejátszása, animáció

4.2. Szimulációs vizsgálat

Érdekességként nézzük kicsit "fordítva" a problémát Buffon nyomán, melyet (gazdasági és pénzügyi vonatkozásokkal együtt) a [30] publikációban tárgyalok. Tegyük fel, hogy csak véges sok játékot játszunk, mondjuk $n = 2^k$ játszmát. Ekkor várhatóan a játszmák fele az első dobás után véget ér. A megmaradó játszmákra ugyanez igaz, vagyis a fele véget ér az első dobás után. Ez azt jelenti, hogy az eredeti játszmák negyedében a játék a második dobásra véget ér. Hasonlóan a játszmák nyolcada a harmadik dobásra ér véget, és így tovább, csak az utolsó játék folytatódna a k. dobáson túl. Adatainkat foglaljuk táblázatba, ahol legyen először a játszmák száma például $2^{10} = 1024$. Ez az eset a gyengébb hallgatókkal is könnyen tárgyalható és belőle az általános eset vizsgálata is érthetőbb lesz.

Az első fej:	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Befejeződik:	512	256	128	64	32	16	8	4	2	1
A kifizetés:	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024

4.3. táblázat. A Szentpétervári játék lejátszása 1024-szer

Az első sor tartalmazza, hogy hányadik dobásra kaptuk az első fejet. Ha rögtön az első dobás fej, ez $0,5$ valószínűséggel következik be, vagyis az összes (2^{10}) játszmának a fele be is fejeződik. Hasonlóan, a megmaradt játszmák fele a második dobás után fejeződik be és így tovább. A második sora a táblázatnak a befejezett játékok számát mutatja. Ha összeadjuk ezen (befejezett) játszmák számait, az eredmény $512+256+\ldots+2+1=1023$, vagyis egy játék folytatódik a 10. dobás után. Ez az egy játék $0,5$ valószínűséggel a következő dobással ér véget, $0,25$ valószínűséggel a második plusz dobással, és így tovább. Ha nézzük a teljes kifizetés átlagát a játék során, a következő összeget kapjuk: $\frac{512\cdot 2+256\cdot 2^2+\ldots+1\cdot 2^{10}+\textit{végső játék kifizetése}}{2^{10}}=10(\frac{1024}{1024})+c=10+c$, ahol $c=\frac{\textit{végső játék kifizetése}}{1024}$. Vizsgáljuk most ezt a c értéket. A játék a 11. dobásra érne véget $0,5$ valószínűséggel, a hozzá tartozó kifizetés 2^{11} lenne, vagyis $c=\frac{2^{11}}{2^{10}}=2$. Viszont $0,25$ valószínűséggel még két dobás kellene a befejezéshez, a c ekkor $\frac{2^{12}}{2^{10}}=4$ lenne és így tovább. Vagyis a kifizetések átlaga $0,5$ valószínűséggel $10+2=12$, valamint $0,25$ valószínűséggel $10+4=14$, és így tovább.

Ha általánosítjuk a problémát és feltesszük, hogy $n=2^k$ játékot játszunk, akkor táblázatunk a következő lesz:

Az első fej (k)	1	2	3	...	k-1	k
Befejezett játszmák száma	2^{k-1}	2^{k-2}	2^{k-3}	...	2	1
A kifizetés (2^k)	2	4	8	...	2^{k-1}	2^k

4.4. táblázat. Szentpétervári játék általánosan

Az első dobás után befejeződik a fele, vagyis 2^{k-1} játék, a második dobás után 2^{k-2} játék és így tovább, a k. dobásra 1 játék ér véget. Ezen játszmák összege $2^{k-1}+2^{k-2}+\ldots+2+1=2^k-1$, vagyis 1 játszma folytatódna a k. dobás után is. De ez $0,5$ valószínűséggel befejeződik a következő dobásnál, $0,25$ valószínűséggel a $k+2$. dobásnál, $0,125$ valószínűséggel a $k+3$. dobásnál, és így tovább. A kifizetések átlagát nézve a következőt kapjuk: $\frac{2^{k-1}2+2^{k-2}4+\ldots+2^0 2^k+\textit{végső játék kifizetése}}{2^k}=k\frac{2^k}{2^k}+c=k+c$, ahol ez a c az előző példa alapján számolva 2 lesz

$0,5$ valószínűséggel, 4 lesz $0,25$ valószínűséggel és így tovább. Ezek alapján a kifizetések átlagai (amit nevezhetünk belépési díjnak is a másik résztvevő oldaláról, ha igazságos játékot vizsgálunk), a következő egyenes-sereget határozzák meg: $0,5$ valószínűséggel $k+2$, $0,25$ valószínűséggel $k+4$; $0,125$ valószínűséggel $k+8$, és így tovább.

A játékot szimuláljuk mondjuk $k = 20$ esetig, vagyis $2^{20} = 1048576$ játszmáig a MATLAB program segítségével. A kapott értékeket a törött vonal szemlélteti, valamint ábrázolva van az első négy egyenes a különböző valószínűségi szinteknek megfelelően. Jól látható, hogy a szimulált értékek a $c = 2$-höz tartozó egyenes mentén haladnak. Elmondhatjuk, hogy a szimulált értékek teljes összhangban vannak a számított értékekkel.

		kifizetés:											
k	N=2^k	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024	2048	4096
0	1		1										
1	2	1	1										
2	4	1		3									
3	8	6	1		0	1							
4	16	9	2	4	1								
5	32	16	8	3	3	1	1						
6	64	32	14	7	3	5	2	1					
7	128	63	30	18	9	3	3	2					
8	256	99	90	39	16	5	5	1	1				
9	512	270	96	83	31	15	8	8	1				
10	1024	544	233	129	56	33	11	9	3	2	4		
11	2048	1040	495	242	115	76	44	24	4	3	4		
12	4096	2051	993	518	264	125	74	33	17	9	6	3	1
13	8192	4026	2083	1037	528	261	123	71	32	14	13	3	
14	16384	8213	4055	2071	1008	510	267	135	73	28	16	4	2
15	32768	16480	8108	4033	2079	1067	488	259	128	69	28	14	8
16	65536	32716	16474	8092	4034	2091	1048	511	299	139	68	39	12
17	131072	65637	32712	16502	7993	4128	2089	990	491	267	131	67	31
18	262144	130491	65756	33096	16436	8156	4130	2061	1044	491	257	109	58
19	524288	261835	131346	65356	32866	16459	8187	4140	2131	985	494	247	123
20	1048576	525514	261500	130798	65274	32614	16431	8232	4088	2010	1050	524	261

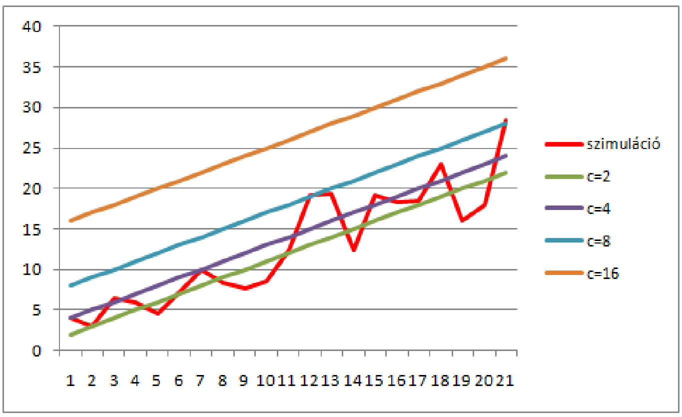
4.5. táblázat. A játék értékének szimulált és számított értékei (1)

k	N=2^k	8192	16384	32768	65536	131072	262144	524288	1048576	2097152	4194304	8388608	16777216
0	1												
1	2												
2	4												
3	8												
4	16												
5	32												
6	64												
7	128												
8	256												
9	512												
10	1024												
11	2048		1										
12	4096	1	1										
13	8192	1											
14	16384				2								
15	32768	4	1	1		1							
16	65536	5	2	4	1	1							
17	131072	17	7	4	2	3		1					
18	262144	29	17	9	3	1							
19	524288	51	40	15	5	6		1					
20	1048576	132	71	40	23	8	2	2	1			1	

4.6. táblázat. A játék értékének szimulált és számított értékei (2)

		játék	játék ára számított			
k	N=2^k	ára (szim)	c=2	c=4	c=8	c=16
0	1	4	2	4	8	16
1	2	3	3	5	9	17
2	4	6,5	4	6	10	18
3	8	6	5	7	11	19
4	16	4,625	6	8	12	20
5	32	7,25	7	9	13	21
6	64	10	8	10	14	22
7	128	8,421875	9	11	15	23
8	256	7,773438	10	12	16	24
9	512	8,507813	11	13	17	25
10	1024	12,44922	12	14	18	26
11	2048	19,13867	13	15	19	27
12	4096	19,36572	14	16	20	28
13	8192	12,38379	15	17	21	29
14	16384	19,09753	16	18	22	30
15	32768	18,33032	17	19	23	31
16	65536	18,4292	18	20	24	32
17	131072	22,95589	19	21	25	33
18	262144	16,10635	20	22	26	34
19	524288	18,01831	21	23	27	35
20	1048576	28,37282	22	24	28	36

4.7. táblázat. A játék értékének szimulált és számított értékei (3)



4.4. ábra. A játék szimulált és számított értékeinek ábrázolása

4.3. A paradoxon néhány módosítása

Csörgő és Simons [15] cikke alapján vizsgáljuk azt az esetet, amikor több játékos is játszik a bankkal szemben. Legyen először két játékos (mondjuk Péter$_1$ és Péter$_2$), akik megegyeznek abban, hogy az általuk nyert összeget fele-fele arányban osztják el a játék végén. Vagyis, ha Péter$_1$ nyer X_1 forintot, Péter$_2$ pedig X_2 forintot, akkor a játék végén a nyereményük mindegyiküknek külön-külön $\frac{1}{2}X_1 + \frac{1}{2}X_2$ forint lesz. Meglepő, de belátható, hogy az együttes stratégia mindkettőjüknek nagyobb nyereményt eredményez, mintha az X_1 és X_2 összeget kapnák. Ezt az esetet ezért nevezhetjük "két-Péteres paradoxonnak". Érdekes vizsgálni, hogy mégis mennyivel jobb az "átlagoló" stratégia? Kiderül, hogy a várható érték mindkettőjüknek 1-1 forinttal lesz nagyobb, mintha külön-külön játszanának. Ez az alábbiak miatt lesz így.

$P\{X_1 \geq 2^k \mid X_2 = 2^k\} = P\{X_1 \geq 2^k\} = 1 - \sum_{j=1}^{k-1}(\frac{1}{2})^j =$
$1 - [1 - \frac{1}{2^{k-1}}] = \frac{2}{2^k}$ minden természetes k esetén, ezért viszont $P\{X_1 \geq X_2 \mid X_2\} = \frac{2}{X_2}$ amivel pedig a várható érték a következő lesz.

$$E(X_2 I\{X_2 \leq X_1\}) = E(X_2 P\{X_1 \geq X_2 \mid X_2\}) = E(X_2 \tfrac{2}{X_2}) = 2$$

Vagyis ezt megfelezve, 1-1 forinttal lesz jobb az "átlagoló" stratégia, összevetve a külön-külön elért nyereménnyel.

Mi történik, ha hárman játszanak a bank ellen? Akkor is jó lesz ez a stratégia? Ha azt a stratégiát követik, mint az előbb, akkor azt az érdekes eredményt kapjuk, hogy nem összehasonlíthatóak a várható értékek. (Lásd [15]) Vegyük viszont a következő egyezséget a játékosok között. Mindegyik átadja a nyereményét a másik kettőnek fele-fele arányban. Ekkor Péter$_1$ nyereménye $\frac{1}{2}X_2 + \frac{1}{2}X_3$ forint lesz, Péter$_2$-é $\frac{1}{2}X_1 + \frac{1}{2}X_3$ forint és Péter$_3$-é pedig $\frac{1}{2}X_1 + \frac{1}{2}X_2$ forint lesz. Ekkor szintén 1-1 forint lesz a többletük fejenként. Vagy, ha azt a stratégiát nézzük, hogy mindenki a nyereménye felét osztja szét fele-fele arányban a másik kettőnek, akkor Péter$_1$ nyereménye $\frac{1}{2}X_1 + \frac{1}{4}X_2 + \frac{1}{4}X_3$

forint, Péter$_2$-é $\frac{1}{2}X_2 + \frac{1}{4}X_1 + \frac{1}{4}X_3$ forint, és végül Péter$_3$ nyereménye $\frac{1}{2}X_3 + \frac{1}{4}X_1 + \frac{1}{4}X_2$ forint lesz. Ez a játékmód 1,5 forinttal jelent többet mindegyiküknek külön-külön. Általánosan legyen $\mathbf{p} = (p_1, p_2, p_3)$ úgy, hogy $p_1 + p_2 + p_3 = 1$. Az osztozkodó stratégiával Péter$_1$ nyereménye $p_1X_1 + p_2X_2 + p_3X_3$, Péter$_2$-é $p_3X_1 + p_1X_2 + p_2X_3$ és végül Péter$_3$ nyereménye $p_2X_1 + p_3X_2 + p_1X_3$ forint lesz. Mint láttuk nem minden esetben lesznek összehasonlíthatóak a várható értékek (pl. $p_1 = p_2 = p_3 = \frac{1}{3}$ eset), így érdekes kérdés az összehasonlító operátor ($A(\mathbf{p}) = E[p_1X_1 + p_2X_2 + p_3X_3, X_1]$) vizsgálata, melyre jelen dolgozat nem terjed ki.

Természetesen a játékot kiterjeszthetjük háromnál több "Péterre" is. Ha speciálisan $n = 2^k$ Péter játszik, a nyereményük külön-külön (egymástól függetlenül) $X_1, X_2, \ldots, X_n$ forint, vagyis az átlag, amit a végén külön-külön mindegyikük kap $\frac{X_1+X_2+\ldots+X_n}{n}$. Az "átlagoló" stratégiával minden $k \epsilon N$ esetén $E[\frac{S_{2^k}}{2^k}, X_1] = k$ adódik. Ha a "Péterek" száma bármilyen pozitív egész $n \epsilon N$, akkor a következőket mondhatjuk. A háromjátékos esethez hasonlóan legyen $\mathbf{p}_n = (p_{1,n}, p_{2,n}, \ldots, p_{n,n})$ ami a játékosok közötti osztozkodási arányokat jelenti, vagyis, hogy mindegyik játékos külön-külön a többinek hányad részét adja a saját nyereményének. Ezt akkor tekintjük *elfogadható*nak, ha minden komponense vagy 0 vagy 2 negatív egész hatványa. Ilyen $\mathbf{p}_n$ esetén kimondható, hogy a hozzáadott érték egyenlő lesz $\mathbf{p}_n$ entrópiájával, vagyis

$$H(\mathbf{p}_n) = -\{p_{1,n} \log_2 p_{1,n} + \ldots + p_{n,n} \log_2 p_{n,n}\}$$

Belátható továbbá, hogy ezen entrópia felső határát adja a következő kifejezés, ahol $[a]$ jelenti az egészrészét, $\{a\}$ pedig a törtrészét a-nak.

$$H_n = [\log_2 n] + 2^{\{\log_2 n\}} - 1$$

Ha például a már tárgyalt háromjátékos esetet nézzük, azt kapjuk, hogy $H_n = 1,5$, vagyis akkor járnak legjobban, ha úgy osztozkodnak, hogy mindegyik a fele nyereményét adja oda fele-fele arányban a másik kettőnek. Azt nyilvánvalóan minden játékos tudja, hogy az összes nyeremény az változatlan $(X_1 + X_2 \ldots + X_n)$ akármilyen stratégiát is követnek a játékosok. Mégis a leírt "bűvészmutatvány" alapján elmondhatjuk, hogy összehangolt működéssel minden résztvevőnek "édesebb" a mikrogazdasági helyzete azonos makrogazdasági körülmények között is. Érdekességként nézzük 11 "Péter"-ig a maximálisan elérhető többletet és a hozzájuk tartozó maximalizáló stratégiákat.

$H_2 = 1$	$p_2^* = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$
$H_3 = 1\frac{1}{2}$	$p_3^* = (\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4})$
$H_4 = 2$	$p_4^* = (\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4})$
$H_5 = 2\frac{1}{4}$	$p_5^* = (\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8})$
$H_6 = 2\frac{2}{4}$	$p_6^* = (\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8})$
$H_7 = 2\frac{3}{4}$	$p_7^* = (\frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8})$
$H_8 = 3$	$p_8^* = (\frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8})$
$H_9 = 3\frac{1}{8}$	$p_9^* = (\frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{16})$
$H_{10} = 3\frac{2}{8}$	$p_{10}^* = (\frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{16}, \frac{1}{16}, \frac{1}{16})$
$H_{11} = 3\frac{3}{8}$	$p_{11}^* = (\frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{16}, \frac{1}{16}, \frac{1}{16}, \frac{1}{16}, \frac{1}{16})$

4.8. táblázat. Maximalizáló stratégiák és a velük elérhető többletek

Ezzel el is jutottunk a paradoxon különböző gazdasági alkalmazásaihoz.

4.4. További alkalmazások

Ha a játékok körében folytatunk vizsgálatokat, kiderül, hogy pl. a jól ismert "Legyen Ön is milliomos!" tv-s játék is egy módosított szentpétervári paradoxon alkalmazásának tekinthető. Itt minden kérdésnél négy válaszlehetőség közül kell az egyedüli helyeset kiválasztani, és a játékos dönthet, hogy helyes válasz esetén tovább játszik-e vagy eltávozik az addig megnyert összeggel. Ha tovább játszik és veszít, akkor az összes addigi nyereményét elveszíti, viszont ha nyer, a pénze megduplázódik. De szintén a paradoxonnal áll szoros kapcsolatban az ún. martingál (halmozási) stratégia, melyben mindmáig sok szerencsejátékos hisz (és megy is tönkre). Itt a bank ellen játszunk egy olyan játékot, melyben $50 - 50\%$ az esélye a nyerésnek és a vesztésnek is. Ha az első játszmában veszítünk, megkétszerezzük a tétünket. Ha a másodikban is veszítünk, akkor újra megkétszerezzük az előző tétet, és így tovább, amíg ki nem jön a tippünk és nyerünk. Ha a legelső tétünk A forint és az első $n-1$ játszmában nem nyertünk, de az n.-ben már igen, akkor összesen kifizettünk $A(1+2+4+\ldots+2^{n-1}) = A(2^n-1)$ forintot, míg a nyeremény összege $A2^n$. Így tehát összesen A forint nyereségre tettünk szert. Minthogy 1 valószínűséggel valamikor csak bejön a tippünk, ez a stratégia biztosnak látszik, azonban ez itt is csak látszat. Hiszen egyrészt mielőtt bármit is nyernénk, már rég elveszítettük az összes pénzünket. (Hiszen lehet, hogy csak a sokadik játszmában nyerünk, addig viszont rengeteg pénzt kell befektetnünk.) Ha meg korlátlan sok pénzünk van, akkor ahhoz képest elenyésző az A forintnyi nyereség. Nem utolsó sorban pedig a kaszinók is ismerik ezt a stratégiát, ezért maximalizálják a tétek nagyságát (tehát akármeddig nem folytatható ez a stratégia) és bár ez a maximumösszeg nagyon nagy, mégis teljesen hatástalanná teszi a martingál stratégiát. [60]

A paradoxon gazdasági (főleg pénzügyi) alkalmazásai talán még érdekesebbek és nyilvánvalóan fontosabbak, mint a szerencsejátékok. Amint már említettem, a mai mikroökonómiai hasznosságfogalom előfutárának Daniel Bernoulli 1738-as tanulmánya tekinthető. Ő a szentpétervári paradoxból kiindulva jutott el a hasznosság következő formulájához: $U = k \cdot \ln(\frac{x}{c})$ ahol k egy pozitív konstans, c pedig a létezéshez minimálisan szükséges vagyon nagysága. Bernoullinak a paradoxonnal kapcsolatos munkája két alapgondolatot tartalmazott. Az egyik szerint az egyén vagyonának fokozatos, azonos összegű növelésével egyre kisebb mértékben javul az illető jóléti helyzete. Ezt az összefüggést ma a csökkenő határhaszon törvénye elnevezéssel illetjük. A másik gondolat, mely a Neumann-Morgenstern féle hasznossági függvény alapötletével rokon, arra vonatkozott, hogy bizonytalan vagyoni körülmények között az egyén várható helyzetét nem a várható vagyonhoz tartozó egyéni értékelés, hanem az egyes vagyoni helyzetekhez tartozó egyéni értékelések várható nagysága határozza meg. Bernoulli ezen felfedezései a közgazdászok számára több mint 100 évig ismeretlenek maradtak, feltehetően annak matematikai jellege miatt. Bernoulli hasznossággal kapcsolatos elképzeléseit röviden úgy fogalmazhatjuk meg, hogy egyrészt egy nagyobb tőke esetén már nem okoz akkora örömet ugyanazon összeg megnyerése, mint kisebb alaptőke esetén, másrészt egy adott összeg elvesztése okozta bosszúság nagyobb, mint ugyanakkora összeg megszerzése feletti öröm. Ezt a pszichológusok "kockázatkerülő" magatartásunkkal magyarázzák. [4] Képzeljük el, hogy vagyonunk egy téglahalom, ahol alul vannak a nagyobb téglák és minden újabb sorban egyre kisebb téglák vannak. Minden tégla, melyet a halom tetejéről leemelünk, nagyobb annál, mint amit rátennénk. Egy tégla elvesztése feletti bosszúság nagyobb, mint egy újabb tégla megszerzése feletti öröm. Bernoulli egy másik új fogalmat is megalkotott a hasznosságon kívül az említett munkában, melyet a mai közgazdászok a gazdasági fejlődés hajtóerejének tekintenek, ez pedig az emberi tőke. Ennek tárgyalásától most eltekintünk. (Egyébként lásd [6])

Szintén a pétervári paradoxon volt az alapja több olyan pénzügyi ötletnek is, mely szinte minden esetben csődbe, sokszor tragédiába fulladt. Gondoljunk csak egy gazdasági társaság nagy arányú (a gazdaság egészére jellemző átlagnál nagyobb) növekedésére, melynek olyan ragyogó kilátásai vannak, hogy szinte végtelennek tűnnek az elérhető nyereségek. Még ha abszurd módon fel is tesszük, hogy képesek vagyunk időben korlátlanul előre jelezni egy vállalat bevételeit, mennyit érhet e vállalat részvénye? Talán végtelen összeget? Voltak pillanatok, amikor profi befektetők ilyen őrült álmokat kergettek. Az 1960-as évek végén, 70-es évek elején számos komoly befektetési menedzsert annyira megszédített általában a növekedés, de különösen az ún. "Nifty-Fifty" módjára növekvő részvények eszméje, hogy készek voltak bármi árat fizetni, hogy birtokába jussanak például a Xerox, a Coca-Cola vagy az IBM részvényeinek. 1972 decemberében a Polaroid az 1972-es évi nyereségének 96-szorosáért, a McDonald's 80-szorosáért adta el részvényeit. A befektetők úgy gondolták, hogy a jövendő (állandóan növekvő) nyereség és osztalék igazolni fogja a befektetést, bármekkora is

a vételár. A valóságban azonban a szédítő nyereség, melynek határa látszólag a csillagos ég volt, a valóságban jóval kisebbnek bizonyult, mint a várt végtelenül nagy összeg. A közelmúlt gazdasági válságának is egyik oka ilyen, hasonló tényezőkre vezethető vissza. Ahogyan Székely Gábor és Richards írja [61]-ben, az 1990-es évek végén a high-tech cégek részvényárai példátlan módon emelkedtek. 2000 elején viszont az árak hanyatlása hatalmas veszteségekkel járt a befektetők számára. Ezek elkerülhetőek lettek volna, a szentpétervári paradoxon eredményeinek alkalmazásával, elemzésével. Nézzük ezt egy kicsit részletesebben.
Képzeljük el, hogy Péter egy növekvő részvénytársaság, Pál pedig Péter részvényeinek a vásárlója. Valamint legyen egy szabálytalan pénzérménk, ami azt jelenti, hogy a fejdobás valószínűsége legyen $\frac{i}{1+i}$, ekkor az írás valószínűsége nyilvánvalóan $\frac{1}{1+i}$, ahol $i > 0$. Tegyük fel továbbá, hogy Péter rendre fizet Pálnak D forintot, ha az első dobás eredménye írás, $D(1+g)$ forintot, ha a második dobás írás, $D(1+g)^2$ forintot, ha harmadszorra lesz az első írás, és így tovább. A játék akkor ér véget, ha fejet dobunk. Ha a játék a k. dobásra ér véget (ekkor lesz az első fej), akkor a Pálnak kifizetett teljes összeg:

$$\sum_{j=0}^{k-2} D(1+g)^j = \frac{D[(1+g)^{k-1}-1]}{g}$$

Ez a kifizetés $\frac{i}{(1+i)^k}$ valószínűséggel történik, így Pál várható nyereményére a következő kettős összeg adódik:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{i}{(i+1)^k} \sum_{j=0}^{k-2} D(1+g)^j$$

ami az előző formula felhasználásával és az összegzés sorrendjének felcserélésével a következő eredményt szolgáltatja Pál várható nyereményére:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{D(1+g)^{k-1}}{(1+i)^k} = \begin{cases} \frac{D}{i-g}, & \text{ha} \quad g < i, \\ \infty, & \text{ha} \quad g \geq i. \end{cases}$$

Ha most i jelenti az effektív kamatlábat, g pedig a cég növekedési arányát, akkor a következőket mondhatjuk el: egy D összeggel kezdődő és állandó g arányú növekedéssel emelt összeg, mely i-vel van diszkontálva, a fenti összegeket adja. (Péter részvényének valós értékét a jövőbeli osztalékok jelenértékével becsüljük.) Röviden összefoglalva, ha $g < i$, akkor Pál várható nyereménye $\frac{D}{i-g}$. Másrészt, ha $g \geq i$, akkor a végtelen sorozat a végtelenbe divergál és Pál várható nyereménye végtelen. Ebben az esetben a racionális Pál bölcsen visszautasítja a játékban való részvétel díját. A pénzügyi befektetések értékének becslésére vonatkozóan az i paraméter reprezentálja az effektív kamatlábat. Ennek megfelelően egy 1 forint összegű kölcsönnek, amit egy év múlva fizetnek vissza, a jelenértéke pontosan $\frac{1}{1+i}$. Egy részvény valós értékének becslése során g reprezentálja a társaság növekedésének ütemét, amit a részvényenkénti nyereség éves növekedéseként mérünk.

Ha meg akarjuk becsülni Péter részvényének valós értékét, akkor alkalmazhatjuk azt a széles körben elfogadott módszert, mely szerint a jövőbeli osztalékokat életjáradékként diszkontáljuk. Így Péter részvényének valós értékét a jövőbeli osztalékok jelenértékével becsüljük. Jelölje E_n Péter részvényenkénti nyereségét (profitját) az n-edik évben. Továbbá jelölje B_n Péter részvényenkénti könyv szerinti értékét, azaz nettó eszközértékét az adott évben. Jelölje D_n Péter részvények után fizetett összes osztalékát az n-edik évben. Rövid megfontolás után egyértelművé válik, hogy a könyv szerinti érték éves változása megegyezik a nyereség és a kifizetett osztalékok különbségével, vagyis minden $n \geq 1$ esetén

$$B_{n+1} - B_n = E_n - D_n.$$

Péter részvényének valós értékének becslése során Pál az általános gyakorlat szerint felteheti, hogy az $r = E_n/B_n$ és a $p = D_n/E_n$ hányadosok n-től függetlenek. Ez a feltételezés magában foglalja azt is, hogy a könyv szerinti érték éves változása, vagyis a $B_{n+1} - B_n$ különbség E_n konstans-szorosa:

$$B_{n+1} - B_n = E_n - D_n = (1-p)E_n = (1-p)rB_n$$

Ez alapján Péter osztaléka, könyv szerinti értéke és nyeresége a konstans $g = (1-p)r$ mértékben nő. Ebben az összefüggésben a kapott összegformulánk az osztalékok alkotta mértani sorozat összegét jelöli, ami D dukáttal kezdődik, konstans g mértékben nő és egyidejűleg i mértékben csökken. Ha $i > g$, akkor az összeg a $\frac{D_1}{i-g} = \frac{pE_1}{i-g}$ értékhez konvergál, ami egy a Péter részvényének valós értékére vonatkozó becslésnek tekinthető.

Ha $i \leq g$, akkor az összegünk a végtelenbe divergál, ami a szentpétervári paradoxon egy olyan példája, ahol a jövőbeli osztalékok egyenletes hozammal történő diszkontálásának módszere paradox eredményhez vezet. Az 1990-es évek végéről elmondható, hogy az i nagyon kicsi volt, a g pedig magas a már említett high-tech vállalatoknál. Vagyis az i jóval kisebb volt, mint g, úgy hogy i/g közelítőleg 0 volt. A befektetők mohón vásárolták a részvényeket (a végtelen nyereség reményében), melyben nagy szerepe volt Durand cikkének egy elemzésében megjelent megjegyzésnek, mely szerint: "eddig még sosem láttuk, hogy egyes részvények végtelen haszonnal járnának, de miért ne lehetne ez?" Ennyi is elég volt, hogy nagyon sokan túlértékeljék a vállalatok várt nyereségeit és a vége ugyanaz lett, mint az 1950-es években, sok befektető csődbe jutott. 2000 végére a részvényárak soha addig nem látott mélységbe zuhantak, ezzel tönkretéve sok-sok befektetőt. Mark Twain szavai talán megfontolásra intenek mindannyiunkat ma is. A Pudd'nhead Wilson's Calendar-ban szerepel az alábbi gondolata: "Október. Ez az egyik olyan hónap, amikor különösen veszélyes a tőzsdével foglalkozni. A többi ilyen a Július, Január, Szeptember, Április, November, Május, Március, Június, December, Augusztus és Február."

A paradoxon pénzügyi vonatkozású vizsgálata azóta is tart, többek között meg kell említenünk, hogy Győrfi László és Kevei Péter a paradoxont átfogalmazzák és nemcsak egy, hanem többkomponensű szentpétervári játékot vizsgálnak [27]-ben. Nézzük most egy kicsit részletesebben. Tegyük fel, hogy van egy befektető, aki d pénzügyi lehetőség közül választhat. A portfólió vektor legyen $\mathbf{b} = (b^{(1)}, \ldots, b^{(d)})$, ahol $b^{(j)}$ jelenti a j. befektetési lehetőségbe invesztált tőkearányt. Természetesen ezen komponensek összege 1. Így a portfólióvektorok halmazát jelöljük következőképpen: $\Delta_d = \{\mathbf{b} = (b^{(1)}, \ldots, b^{(d)}); b^{(j)} \geq 0, \sum_{j=1}^{d} b^{(j)} = 1\}$. A piac viselkedését a megtérülési vektorsorozattal jellemezhetjük, $\{\mathbf{x}_n\}, \mathbf{x}_n = (x_n^{(1)}, \ldots, x_n^{(d)})$ ahol tehát $x_n^{(j)}$ jelenti az n. körben a j. befektetési lehetőségbe befektetett egységnyi tőke hozadékát. Legyen továbbá S_0 a befektető kezdőtőkéje. Az első körben a j. lehetőségbe $S_0 b_1^{(j)}$ összeget invesztál és ez $S_0 b_1^{(j)} x_1^{(j)}$ megtérülést realizál. Az első kör után tehát a befektető vagyona $S_1 = S_0 \sum_{j=1}^{d} b_1^{(j)} x_1^{(j)} = S_0 \langle \mathbf{b}_1, \mathbf{x}_1 \rangle$ lesz, ahol a $\langle\rangle$ zárójel belső szorzatot jelent. A második körben $\mathbf{b}_2$ az új portfólió és S_1 az új befektetési tőke. Így $S_2 = S_1 \langle \mathbf{b}_2, \mathbf{x}_2 \rangle = S_0 \langle \mathbf{b}_1, \mathbf{x}_1 \rangle \langle \mathbf{b}_2, \mathbf{x}_2 \rangle$. Folytatva ezt, az n. körben $S_n = S_0 \prod_{i=1}^{n} \langle \mathbf{b}_i, \mathbf{x}_i \rangle$. A cél nyilvánvalóan egy optimális befektetési stratégia megtalálása, amely hosszú időre (nagy n-re) maximalizálja S_n-t. A legjobb stratégia természetesen függ az optimalitási kritériumtól. A különböző kritériumok közül a Breiman-féle [9] ún. log-optimális tűnik a leghatékonyabbnak, melyben az $E \ln \langle \mathbf{b}, \mathbf{X}_n \rangle$ várható értéket maximalizáljuk minden körben. A folyamatosan kiegyensúlyozott portfólió esetében rögzítsük a $\mathbf{b} \epsilon \Delta_d$ portfólióvektort. Ekkor (mivel $S_n = S_0 \prod_{i=1}^{n} \langle \mathbf{b}, \mathbf{x}_i \rangle$) az átlagos növekedési rátája ennek a portfólió választásnak $\frac{1}{n} \ln S_n$, melyről a nagy számok törvényének felhasználásával belátható, hogy $\frac{1}{n} \ln S_n \to E\{\ln \langle \mathbf{b}, \mathbf{X}_1 \rangle\}$ majdnem biztosan.

Szintén [27] alapján egymás utáni szentpétervári játékokról beszélünk akkor, ha a játékos kezdőtőkéje 1 forint és minden játékban befekteti az aktuális tőkéjét. Ha c-vel jelöljük a jutalék-tényezőt ($0 < c < 1$), akkor az n. kör után a tőke a következő lesz. $S_n^{(c)} = S_{n-1}^{(c)}(1-c)X_n = S_0(1-c)^n \prod_{i=1}^{n} X_i = (1-c)^n \prod_{i=1}^{n} X_i$. Ezen multiplikatív definíció miatt az $S_n^c = 2^{nW_n^{(c)}} \approx 2^{nW^{(c)}}$, ahol az átlagos növekedési ráta: $W_n^{(c)} := \frac{1}{n} \log_2 S_n^{(c)}$. Az aszimptotikus átlagos növekedési ráta pedig $W^{(c)} := \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log_2 S_n^{(c)}$. A nagy számok törvényéből belátható, hogy $W^{(c)} = \log_2(1-c) + E\{\log_2 X_1\}$. Igazságos a játék, ha ez a $W^{(c)} = 0$, amiből a c értéke meghatározható: $\log_2(1-c) = -E\{\log_2 X_1\} = -\sum_{k=1}^{\infty} k \cdot 2^{-k} = -2$, ebből pedig $c = \frac{3}{4}$ adódik.

Látható tehát, hogy úgy az alkalmazások, mint az elméleti kutatások területén vannak még feltáratlan területek. Ebben a fejezetben csak néhány, főleg gazdálkodási szakos hallgatók számára érdekes problémát vetettem fel, melyekkel a motiváció növelhető eziránt a nem túlságosan kedvelt téma iránt is. További tárgyalások a [31] publikációban találhatóak. Egy-egy tanulóközösségben más és más lehet az a terület, ami felkelti az érdeklődést, de bőséges a választási lehetőség, így a tanár igazodhat az aktuális hallgatócsoporthoz.

Összefoglaló/Summary

Összefoglaló

Ezen didaktikai témájú dolgozattal a felsőfokú valószínűségszámítás hatékonyabb tanításához kívántam hozzájárulni. A témaválasztást indokolja egyrészt az évek óta tapasztalható hallgatói eredmények folyamatos romlása, mely általános jelenség a felsőoktatásban, de ott is főleg a természettudományos tárgyak elsajátításában. Másrészt a csökkenő óraszámok és egyéb, jelen dolgozatban nem részletezett okok miatt kevés idő és lehetőség van - főleg a valószínűségszámítás tanításához - megfelelő minőségű és mennyiségű oktatási kísérletet végezni vagy legalább bemutatni. Ezért az olyan eljárások, módszerek, melyek segítségével több fogalmat is elmélyíthet a hallgató és a gyakorlati alkalmazásokat is látja, nagy mértékben segítheti az elméleti ismeretek pontos elsajátítását. A dolgozat Bevezetőjében a témaválasztást részletesebben is indokolom. A disszertáció következő fejezetében a matematika tanításának általános kérdéseiről írok néhány gondolatot, majd a címben említett fogalmak oktatásának kérdéseit tárgyalom. Bár ezek a fogalmak a matematika más (nemcsak valószínűségszámítás) területein is szükségesek, mégis elmélyítésükben a leghosszabb sorozatok problémakör tárgyalása több szempontból is előnyös. Mivel az érmedobás kísérletben a leghosszabb azonos jelből álló sorozat (leghosszabb széria) hosszára vonatkozóan nincs pontos és zárt formula, ezért a felírt rekurziós formulák és aszimptotikus tételek közötti különbségek, az alkalmazhatóság lehetőségei jól szemléltethetőek. A Monte Carlo szimuláció segítségével megint csak nem pontos eredményeket kapunk, de ha a kísérletet sokszor (jelen dolgozatban 20000-szer) végezzük el, akkor az ebből számított átlagérték (a nagy számok törvénye alapján) jól meg fogja közelíteni a valódi értéket. Ebben a dolgozatban a rekurziós eljárásokat hangsúlyozom - hiszen ezek adják a pontos eredményeket - ezért ezeket részletesen bizonyítom. Az aszimptotikus eredmények csak hosszú dobássorozat esetén adnak jó közelítést. A szimulációs eredmények pedig véletlenszerűek és a dobássorozat nagyon sokszori számítógépes legenerálása esetén közelítik a pontos értéket. A dol-

gozat harmadik részében ezért a leghosszabb szériák problémakörrel foglakozom. Az utolsó fejezet pedig egy főleg gazdasági szakos hallgatók számára érdekes alkalmazásról, problémáról, a Szentpétervári paradoxonról szól.

A valószínűségszámítás fontosabb határérték tételeinek szemléltetése

A valószínűségszámítás talán legfontosabb törvénye a Nagy számok törvénye(i). Megértésük jelentőségét elsődlegesen az adja, hogy a valószínűség tapasztalati fogalmát köti össze az axiómákból felépített elmélettel. Másrészt a Monte Carlo szimulációval kapott eredmények elfogadásának elméleti megalapozását adják, végül, de nem utolsó sorban a statisztikai elemzésekben is kiemelkedő szerepet játszanak.
A nagy számok gyenge törvényét nem szemléltetjük, hiszen a konvergencia nem trajektóriánkénti. Viszont a relatív gyakoriság vizsgálatára végezzünk a hallgatókkal ténylegesen kísérleteket, például az egyszerű érmedobás kísérletet. Ez azért nagyon fontos, mert egyrészt ez mutatja a valóság tényleges (néha meglepő) viselkedését, másrészt a számítógépen generált véletlen számok elméletileg nem tekinthetők független, azonos eloszlású valószínűségi változók realizációjának. Hallgatóimmal a szűkös órakeret miatt házi feladatként vizsgáltattam 100-as dobássorozatokat, így 3-szor 23 db 100-as sorozat állt rendelkezésre. A jól ismert, Rényi-féle összefüggés alapján, mely szerint nagy n esetén n dobásból körülbelül $\log_2 n$ a leghosszabb tiszta fej sorozat hossza, könnyen kiszűrhető az esetleges "hamis" sorozat, ezzel nagy megdöbbenést kiváltva a hallgatókból. A nagy számok erős törvénye trajektóriánkénti konvergenciát tartalmaz, így szemléltetésük a hallgatók által elvégzett, illetve jó néhány, rendelkezésre álló számítógépes program segítségével történhet. A központi határeloszlás tétel szemléltetésénél szintén figyelni kell arra, hogy nem trajektóriánkénti a konvergencia, így szemléltetésére a [21]-ban leírt eljárást lehet követni. A tétel ismertetése előtt célszerű közelítő eljárásokat vizsgálni a hallgatókkal, különböző esetekre. Ezek közül néhányat, konkrét ér-

tékekkel be is mutatok. Sokszor tapasztaljuk a hallgatók körében is, hogy olyan tényeket is megpróbálnak a nagy számok törvényeinek tulajdonítani, vele magyarázni, melyeket az nem is tartalmaz. Ha egy hosszú, kétszemélyes pénzdobás-játék előtt megkérdezzük a hallgatókat, hogy szerintük melyik játékos hányszor fog vezetni, általában azt a választ kapjuk, hogy egyik is, másik is az esetek kb. felében. Ez azonban nem lesz igaz. Ezen, sokak számára megdöbbentő eredmény bemutatására a szimulációt hívtam segítségül. A hosszú vezetésre, illetve az utolsó kiegyenlítődésre vonatkozó ún. arc sin törvény szemléltetését a MATLAB program segítségével, $n = 60$ esetre végeztem el.

Eredmények a leghosszabb széria témakörben

A 3. fejezetben a vizsgálatok kiterjednek a független (ezen belül a leghosszabb fejszéria és a leghosszabb bármilyen széria esetére is, szabályos és nem szabályos érmét vizsgálva) valamint a nem független (visszatevés nélküli) esetre is. Így Erdős-Révész [17] és Földes [24] aszimptotikus eredményeit vetem össze Schilling [51], Bloom [8] és Kopocinski [29] általam esetenként kiegészített és bizonyított rekurzív formuláival, valamint a szimulációs eredményekkel.
Mivel a rekurzív képletekkel kapjuk a pontos eredményeket, ezért ezeket részletesen tárgyalom, bizonyítom, számpéldákkal szemléltetem.

Független kísérlet, szabályos érme esete

Ha a leghosszabb fejszéria nagyságát vizsgáljuk, az eloszlásfüggvényünk a következő, ahol $A_n(x)$ azon n hosszúságú sorozatok száma, amelyekben a leghosszabb fejszéria nem haladja meg x-et.

$$F_n(x) = P(R_n \leq x) = \frac{A_n(x)}{2^n}.$$

A feladat tehát az $A_n(x)$ értékeinek a meghatározása. Schilling [51] nyomán kapjuk az alábbi rekurzív formulát

$$A_n(x) = \begin{cases} \sum_{j=0}^{x} A_{n-1-j}(x), & \text{ha } n > x, \\ 2^n, & \text{ha } 0 \leq n \leq x. \end{cases}$$

A leghosszabb fejszéria nagyságának, R_n-nek aszimptotikus viselkedését Földes Antónia [24] alábbi tétele alapján írhatjuk le:

Tétel: Valamennyi egész k esetén

$$P\left(R_n - \left[\frac{\ln n}{\ln 2}\right] < k\right) = \exp\left(-2^{-\left(k+1-\left\{\frac{\ln n}{\ln 2}\right\}\right)}\right) + o(1),$$

ahol $[a]$ jelöli az egészrészét a-nak és $\{a\} = a - [a]$, a törtrésze. □

A leghosszabb bármilyen (akár írás, akár fej) széria hosszának alakulását vizsgálva azt kapjuk, hogy az eloszlásfüggvényünk az előző esetből egy egységgel jobbra való eltolással adódik, vagyis $F'_n(x) = F_{n-1}(x-1)$. A bizonyításhoz Schilling [51]-ben közölt egyik ötletét alkalmaztam, mely szerepel a [28] publikációban. Az összefüggés felhasználásával az aszimptotikus tétel a következőre módosul:

Tétel: Valamennyi egész k esetén

$$P\left(R'_n - \left[\frac{\ln(n-1)}{\ln 2}\right] < k\right) = \exp\left(-2^{-\left(k-\left\{\frac{\ln(n-1)}{\ln 2}\right\}\right)}\right) + o(1),$$

ahol $[a]$ jelöli az egészrészét a-nak és $\{a\} = a - [a]$, a törtrésze. □

A dolgozatban bemutatott ábrákon jól látható, hogy a 20000-szer ismételt kísérletsorozat (szimuláció) eredményei milyen jól megközelítik a pontos (rekurzív) illetve nagy n esetén a közelítő (aszimptotikus) értékeket. Az egymás mellett párbaállított grafikonokon jól látszik a 3.6-ban leírt eredmény, miszerint R'_n az R_n-ből 1 egységgel jobbra való eltolással adódik. Tehát a leghosszabb bármilyen széria esete kezelhető, vizsgálható a leghosszabb fejszériára megismert összefüggésekkel a megfelelő transzformációval. A szimuláció a MATLAB programmal történt, 20.000 ismétlésszámmal. Az alkalmazott számítógép paraméterei pedig a következők: INTEL Core Quad Q9550 processzor, 4Gb, DDR3 memória. Tapasztaljuk, hogy bár a rekurzió adja a pontos eredményt, nagy n esetén gyakorlatilag nem tudjuk használni, hiszen a futási idők rohamos növekedése gátat szab az alkalmazhatóságnak. Ezekben az esetekben az aszimptotikus tételek fogják szolgáltatni a jól közelítő eredményeket.

Speciális esetként kétféle módon is bizonyítom a [59]-ban $b_n(k)$-ra felírt rekurzív formulát, ahol $b_n(k)$ jelenti azt, hogy n dobásból hányszor lesz a leghosszabb bármilyen széria (akár fej, akár írás) pontosan k hosszúságú. Ezen bizonyítások a [28] publikációban szerepelnek.

Független kísérlet, nem szabályos érme esete

Most a fejdobás valószínűsége, p értéke bármilyen valós szám lehet a $(0,1)$ intervallumból. (Speciális esetként magában foglalhatja a szabályos érme esetét is.) Kérdés, hogy a szabálytalanság ténye milyen hatással van a leghosszabb fej-, illetve leghosszabb bármilyen széria alakulására. Ebben az esetben is vizsgálom először a leghosszabb fejszéria alakulását. Schilling [51] alapján tekintsük azon n hosszúságú fej-írás sorozatokat, amelyekben k db fej van. Ezek közül jelentse $C_n^{(k)}(x)$ azon sorozatok számát, amelyekben legfeljebb x fej következik egymás után. Az adott jelölésekkel az eloszlásfüggvény a következő lesz:

$$F_n(x) = P(R_n \leq x) = \sum_{k=0}^{n} C_n^{(k)}(x) p^k q^{n-k}.$$

A feladat tehát a $C_n^{(k)}(x)$-re rekurzív formula megadása. Schilling nyomán ez a következő lesz, melynek bizonyítását is elvégeztem és a [19] publikációban szerepel. Segítségével a hallgatókkal számtáblázat készíttethető nem túl nagy n és k értékekre.

$$C_n^{(k)}(x) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{j=0}^{x} C_{n-1-j}^{(k-j)}(x), & \text{ha } \; x < k < n, \\ \binom{n}{k}, & \text{ha } \; 0 \leq k \leq x, \\ 0, & \text{ha } \; x < k = n. \end{cases}$$

Az aszimptotikus viselkedés leírását Gordon-Schilling-Waterman [26] adja a következő tétellel.

Tétel: Legyen $\mu(n) = -\frac{\ln n}{\ln p}, q = 1 - p$ és legyen W eloszlása a következő: $P(W \leq t) = \exp(-\exp(-t))$, ekkor t-ben egyenletesen:

$$P\left(R_n - \mu(qn) \leq t\right) - P\left(\left[\frac{W}{-\ln p} + \{\mu(qn)\}\right] - \{\mu(qn)\} \leq t\right) \to 0,$$

ha $n \to \infty$ és ahol $[a]$ jelenti az egészrészét a-nak és $\{a\} = a - [a]$ az a törtrésze. $\square$

Speciálisan, ha $p(n,k)$ annak a valószínűsége, hogy n dobásból a leghosszabb fejszéria pontosan k hosszúságú, erre Kopocinski [29]-ban két formulát is ad, melyek bizonyításait a dolgozatban elvégzem és a [19] publikációban szerepel.

A leghosszabb bármilyen széria esetét vizsgálva, a nem független kísérletnél kapott eredményeket tudom felhasználni a rekurzió felírásához. Az aszimptotikus viselkedést vizsgálva Muselli [37] tételét használhatjuk, melyben $V_n(p)$ jelöli annak a valószínűségét, hogy a leghosszabb széria n dobás esetén a fejekből adódik:

Tétel:

$$\lim_{n\to\infty} V_n(p) = \begin{cases} 0, & \text{ha} \quad 0 \leq p < 1/2, \\ 1, & \text{ha} \quad 1/2 < p \leq 1. \end{cases}$$

A szemléltetést a szabályos esethez hasonlóan végeztem a megfelelően párba állított grafikonokkal. A szimulációkat is ugyanolyan tárgyi és szoftver eszközökkel végeztem, a p értéke (fejdobás valószínűsége) pedig $0,6$. Látható, hogy kis n esetén az aszimptotikus eredmények távol esnek a pontos (rekurziós) értékektől. Ekkor a rekurzió még rövid futásidővel jól számolható. Nagy n esetén a rekurziós algoritmus egyre lassul, számolásra nem használható. Az aszimptotikus eredmények viszont n növelésével egyre közelebb kerülnek hozzájuk. Muselli tételének numerikus alátámasztását adja, hogy nagy n esetén ($n = 1000$) az R_n és R'_n eloszlása közel azonos.

Nem független kísérlet

Ha egy halmaz kétféle tulajdonságú elemet tartalmaz, az egyikből m, a másikból k db-ot, mi a valószínűsége annak, hogy az $m+k$ elemet sorban egymás után kihúzva visszatevés nélkül, lesz t hosszúságú széria, vagyis akármelyik tulajdonságú elemből legalább t következik egymás után?
Az egyszerűség kedvéért a két tulajdonságú elem legyen piros (m db) és fekete (k db), és jelöljük a keresett valószínűséget $P_t(m,k)$-val. Meghatározásához vizsgáljuk az esemény komplementerének, vagyis annak a valószínűségét, hogy nincs t hosszúságú széria az $m+k$ elem sorozatában. $\overline{P_t}(m,k)$-nek klasszikus képlettel való kiszámításához vizsgáljuk először az összes elemi esemény számát: az $m+k$ elemet kell sorbarendezni, melyek között az m db és a k db azonos típusúak. Az ilyen sorozatok száma nem más mint: $\binom{m+k}{m}$. (Vagy $\binom{m+k}{k}$, ami a binomiális együtthatók szimmetria-tulajdonsága miatt ugyanaz, mint $\binom{m+k}{m}$.)
Ezek után a keresett hányados számlálójának meghatározásához össze kell számlálnunk azon sorozatok számát, amelyben nincs t hosszúságú széria. Jelöljük ezt $C_t(m,k)$-val, melyre Bloom vizsgálatai nyomán az alábbi rekurzív formulát kapjuk

Állítás: Ha $m=k=0$, akkor definíció szerint legyen $C_t(0,0)=1$. Ha m vagy k negatív, akkor pedig definíció szerint $C_t(m,k)=0$.

$$C_t(m,k)=\sum_{i=0}^{t-1} C_t(m-1,k-i)-\sum_{i=1}^{t-1} C_t(m-t,k-i)+e_t(m,k),$$

ahol tehát $C_t(m,k)$ jelenti az m db piros és k db fekete elem olyan sorbarendezéseinek a számát, ahol nincs t hosszúságú széria ($t \geq 2$),
valamint $e_t(m,k)=\begin{cases} 1, & \textit{ha } m=0 \textit{ és } 0 \leq k < t, \\ -1, & \text{ha } m=t \text{ és } 0 \leq k < t, \\ 0, & \textit{különben.} \end{cases}$

A $C_t(m,k)$ értékeire Bloom egy olyan formulát is ad, mely az m,k és t értékétől függetlenül mindig 6 tagból áll:

Állítás: $t \geq 2$ esetén

$$C_t(m,k)=C_t(m-1,k)+C_t(m,k-1)-C_t(m-t,k-1)-$$

$$-C_t(m-1,k-t)+C_t(m-t,k-t)+e_t^*(m,k),$$

$$\textit{ahol } e_t^*(m,k)=\begin{cases} 1, & \textit{ha } m=k=0, \textit{ vagy } m=k=t,\\ -1, & \textit{ha } m=0 \textit{ és } k=t \textit{ vagy } m=t \textit{ és } k=0,\\ 0, & \textit{különben.}\end{cases}$$

Peremfeltételeink pedig ugyanazok, mint (3.17) -nál, vagyis: Ha $m = k = 0$, akkor definíció szerint legyen $C_t(0,0) = 1$. Ha m vagy k negatív, akkor pedig definíció szerint $C_t(m,k) = 0$.

Mindkét formula helyességét a dolgozatban bizonyítom és megtalálható a [20] publikációban. A kapott összefüggés felhasználásával (szintén nem túl nagy m és k esetére) készíthető táblázat, konkrét számítások végezhetők a hallgatókkal.

Szentpétervári paradoxon

A dolgozat utolsó fejezetében részletesen tárgyalom a Szentpétervári Paradoxon problémakört a történeti fejlődésével együtt, melyben kiegészítéseket teszek Csörgő Sándor [12] alapműnek tekinthető munkájához. Ezt azért tartom fontosnak, mert egyrészt a diákjaim körében a pénzügyi, gazdasági alkalmazások megismerése a későbbi szakmai életükben is hasznos lehet (hiszen a Szolnoki Főiskola hallgatóiként gazdasági képzésben vesznek részt), másrészt a történeti háttér megismerése - a benne lévő tudománytörténeti érdekességekkel - a matematika iránt kevésbé érdeklődő hallgató számára is izgalmas lehet, felkeltheti az érdeklődést a téma szakmai része iránt is. A napjainkban oly sokat emlegetett gazdasági válsággal is összefüggésbe hozhatóak az eredmények, így a téma aktualitása is vitathatatlan. A kérdés elemzésére szintén szimulációt végeztem, mellyel az elméleti eredmények jól alátámaszthatóak. A témával a [30]-ban is foglalkozom.

Comparative analysis of recursive formulas, asymptotic results and Monte Carlo simulation for Education

Summary

With this didactic work I would like to help for the more effective teaching probability in higher education. My choice of topic partly originates from the continuous decline in the results of college students that can be observed for several years by now, and is a general trend in higher education but is especially true for mastering scientific disciplines. On the other hand because of the continuously decreasing number of class hours and other reasons not mentioned in the current study there is little time and opportunity available – especially in terms of teaching of probability – to carry out or at least to demonstrate teaching experiments of acceptable quantity and quality. Therefore those methods and techniques allowing the students to get familiar with more concepts and see their practical application can have a positive effect on mastering the theoretical concepts. The other reasons behind the choice of topic can be found in the introduction of the study. In the second section I write about my opinion, experience of the general problems of teaching mathematics. In my study I present a method that helps to understand the concepts and techniques mentioned in the title, which can be a useful didactic tool for colleagues teaching in academic institutions. For the analysis of this topic my work focuses on a field from probability theory (the analysis of the longest runs), which can be easily understood by the students and can be linked to their everyday experiences and thus provide a way for easy comparison. There is no exact and closed expression for the distribution function describing the length of the longest runs. Thus for the discussion of this particular topic the differences and the applicability between the various methods becomes more obvious. The recursive expressions give exact values but they are not closed expressions and calculating the exact values after a greater number of

elements can sometimes be problematic even when calculating with a computer. The asymptotic values become more accurate with the increase in the number of constituents (with an increasing n) however they only provide approximate values, whereas repeated studies of simulation experiments provide average results. Observing these differences provides a deeper understanding of the different terms, the applications of the different techniques for the topic (the longest runs) can be demonstrated appropriately. The new terms and definitions can be applied in other fields of mathematics by the students. In the last section I study the St Petersburg paradox, which is very useful mainly for the economic university students.

Illustrations of main limit theorems of probability

Probably the two most important asymptotic theorems of probability are the law of large numbers and the Central limit theorem. We do not demonstrate the weak theorem of the law of large numbers as the convergence is not based upon trajectories. However in order to demonstrate the relative frequency we should have the students to carry out some experiments, such as tossing a coin. This is very important as from one point it demonstrates reality's "real" (sometimes surprising) behavior and on the other hand random numbers generated by the computer theoretically cannot be treated as the manifestation of independent probability variables with the same distribution. The understanding of the laws of large numbers is important from many aspects. The primary significance of this understanding comes from the fact that it provides a link between the experimental concept of probability and the theories constructed from axioms. Also they provide a theoretical foundation to accept the results of a Monte Carlo simulation and, lastly, they have an exceptional role in statistical analysis. Therefore the demonstration of these and the related theorems, their understanding and demonstration is essential to provide good overall understanding.

Results in the study of longest run

In Chapter 3. the analysis is extended to independent (and with this to the case of the longest runs of heads and to the longest runs of any kind, studying both fair and non-fair coins) and related cases both. Thus I am going to compare the asymptotic results of Erdős-Révész [17] and Földes [24] with the results of Schilling [51], Bloom [8] and Kopocinski [29], which contain recursive formulas sometimes extended and proven by me and with the results of the performed simulations.

Independent experiment, fair coin case

If we analyze the magnitude of the longest runs of heads, our distribution function is the following, where $A_n(x)$ represents the series with n members in which the longest runs of heads does not exceed x.

$$F_n(x) = P(R_n \leq x) = \frac{A_n(x)}{2^n}.$$

Therefore our goal is to identify the values of $A_n(x)$. According to Schilling [51] we get the following recursive formula:

$$A_n(x) = \begin{cases} \sum_{j=0}^{x} A_{n-1-j}(x), & \text{if } n > x, \\ 2^n, & \text{if } 0 \leq n \leq x. \end{cases}$$

We can describe the asymptotic behavior of the magnitude of the longest runs of heads, Rn according to the following theorem by Antónia Földes [24]:

Theorem: For each integer k

$$P\left(R_n - \left[\frac{\log n}{\log 2}\right] < k\right) = \exp\left(-2^{-\left(k+1-\left\{\frac{\log n}{\log 2}\right\}\right)}\right) + o(1),$$

where $[a]$ denotes the integer part of a and $\{a\} = a - [a]$ the fractional part of a. $\square$

Studying the longest runs of any kind (either head or tails) we find that the distribution function compared to the previous case has shifted one unit to the right, or in other words $F_n'(x) = F_{n-1}(x-1)$. (I prove this in this publication [28].) Using this our asymptotic theorem can be modified to yield the following:

Theorem: For each integer k

$$P\left(R_n' - \left[\frac{\log(n-1)}{\log 2}\right] < k\right) = \exp\left(-2^{-\left(k - \left\{\frac{\log(n-1)}{\log 2}\right\}\right)}\right) + o(1),$$

where $[a]$ denotes the integer part of a and $\{a\} = a - [a]$ the fractional part of a. $\square$

In the figures displayed in the study it can be clearly seen that how well the results of an experiment repeated (simulated) 20000 times approximate the accurate (recursive) and in case of a large n the approximate (asymptotic) values. The figures presented next to each other clearly demonstrate the results described in 3.6, according to which R_n' can be derived from R_n with offsetting them by 1 unit to the right. Therefore the problem of the longest runs of any kind can be treated and analyzed with the same expressions used for studying the longest runs of heads with applying the appropriate transformation. The simulation was done with MATLAB software repeated for 20000 times. The parameters of the computer applied are the follow: INTEL Core Quad Q9550 processor, 4Gb, DDR3 RAM. We have noticed that although the recursive formula does provide the accurate result, in case of a large n we practical application is limited as the rapid increase of the run time limits the application. In these cases the asymptotic theorems will provide the approximate results.

As a special case I prove the recursive expression describing $b_n(k)$ with two methods in [59], where $b_n(k)$ represents that out of n tosses how many times is either longest runs (either heads or tails) going to be exactly k long. These are described in the [28] publication.

Independent experiment, non-fair coin case

In this case the probability of heads, p, can any real number from the $(0, 1)$ interval. (As a special case this includes the case of a fair coin also.) The question is that what is the effect of non-fairness on the longest runs of heads or series of any kind. Let us first look at the analysis of the longest runs of heads. According to Schilling [51] let us study those series of heads and tails which have n members, out of which k are heads. From among these let $C_n^{(k)}(x)$ represent the number of those series having maximum number x of heads following each other. With the given notations our distribution function will take the following form:

$$F_n(x) = P(R_n \leq x) = \sum_{k=0}^{n} C_n^{(k)}(x) p^k q^{n-k}.$$

Our goal is to provide a recursive formula for $C_n^{(k)}(x)$. According to Schilling the result will be the following, which I have proven and is available in the following publication [19].

$$C_n^{(k)}(x) = \begin{cases} \sum_{j=0}^{x} C_{n-1-j}^{(k-j)}(x), & \text{ha } x < k < n, \\ \binom{n}{k}, & \text{ha } 0 \leq k \leq x, \\ 0, & \text{ha } x < k = n. \end{cases}$$

The description of the asymptotic behavior is provided by Gordon-Schilling-Waterman [26] with the following theorem.

Theorem: Let $\mu(n) = -\frac{\log n}{\log p}, q = 1 - p$ and let W such that, $(P(W \leq t) = \exp(-\exp(-t)))$, and thus in $t$uniformly:

$$P\left(R_n - \mu(qn) \leq t\right) - P\left(\left[\frac{W}{-\log p} + \{\mu(qn)\}\right] - \{\mu(qn)\} \leq t\right) \to 0,$$

if $n \to \infty$. $\square$

As a special case if $p(n,k)$ is the probability that from n tosses the length of the longest runs of heads is exactly k, then Kopocinski in [29] provides two expressions, which I have already proven in the study and in the [19] publication.

Studying the longest runs of any kind we can use the results obtained in the non-independent case to describe the recursion. To study the asymptotic behavior we can use the theorem of Muselli [37], where $V_n(p)$ notes the probability that the longest runs out of n tosses can be derived from the heads:

Theorem:

$$\lim_{n\to\infty} V_n(p) = \begin{cases} 0, & \text{if} \quad 0 \le p < 1/2, \\ 1, & \text{if} \quad 1/2 < p \le 1. \end{cases}$$

I provide the demonstration similarly to the fair cases with the respective figures organized in pairs. I performed the simulations with the same parameters and software, with 0.6 as the value of p (the probability of heads) . It can be seen that for small values of n the asymptotic results are far from the accurate (recursive) values. For these cases the recursion can be calculated with short run times accurately. For large values of n the recursive algorithm becomes slower and cannot be used for computations. However the asymptotic results approach results obtained from recursive calculations with the increase of n. The numerical proof of Muselli's theorem provides that for large n ($n = 1000$) the distribution of R_n and R'_n is almost identical, which can be also concluded from the graphs.

Not independent experiment

If a set has members from two different kind, m pieces from the one and k pieces from the other kind, then pulling a series of $m + k$ pieces without replacement what is the probability of having series of length t, or in other words, having at least t pieces from the same kind following each other? To keep thing simple let us mark the elements from two different kinds with red (m pieces) and black (k pieces) and let us represent the studies probability with $P_t(m, k)$. To find out the value let us study the complementary event, the probability that there is no series of length t in the series of $m+k$ pieces. To calculate $\overline{P_t}(m, k)$ with a classic expression let us study the total number of simple events: we have to arrange $m + k$ pieces in order where m pieces and k pieces are from the same kind respectively. The number of such series equals: $\binom{m+k}{m}$. Following this to identify the numerator of the fraction in question we need to sum the number of those series, which do not contain any series of length t. Let us represent this with $C_t(m,k)$, where according to the results of Bloom the following recursive formula is obtained that I have proven in [20] publication.

Statement: If $m = k = 0$ then let us define $C_t(0,0) = 1$. If either m or k is negative then let us define $C_t(m,k) = 0$.

$$C_t(m,k) = \sum_{i=0}^{t-1} C_t(m-1,k-i) - \sum_{i=1}^{t-1} C_t(m-t,k-i) + e_t(m,k),$$

where $C_t(m,k)$ denotes the number of permutations of m red and k black members without having series of length t $(t \geq 2)$, and

$$e_t(m,k) = \begin{cases} 1, & \textit{if } m = 0 \textit{ and } 0 \leq k < t, \\ -1, & \text{if } m = t \text{ and } 0 \leq k < t, \\ 0, & \textit{elsewhere.} \end{cases}$$

For the values of $C_t(m,k)$ Bloom has provided a formula (that I have proven and published in [20]) that always consists of 6 terms independent of the values of m, k and t.:

Statement: where $t \geq 2$

$$C_t(m,k) = C_t(m-1,k) + C_t(m,k-1) - C_t(m-t,k-1) - C_t(m-1,k-t) + \\ + C_t(m-t,k-t) + e_t^*(m,k),$$

$$\textit{where } e_t^*(m,k) = \begin{cases} 1, & \textit{if } m = k = 0, \textit{ or } m = k = t, \\ -1, & \textit{if } m = 0 \textit{ and } k = t \textit{ or } m = t \textit{ and } k = 0, \\ 0, & \textit{elsewhere.} \end{cases}$$

Our limit values are identical to those mentioned in the previous Statement.

4. The Saint Petersburg Paradox

In the last chapter of the study I would like to draw the attention to the practical problems related to the field of the longest runs and the importance of introducing them to the students. I provide a detailed analysis of the problems related to the Saint Petersburg Paradox with its historical development where I add to the fundamental work of Sándor Csörgő [12]. I find this very important as from one point getting my students acquainted with the financial and economical applications can be important in their following careers (as part of the Szolnoki Főiskola their education includes economical training also) and from another point getting to know the historical background - including the historical curiosities included - can be exciting for students less interested in mathematics, it can draw the attention to the topic's professional part also. The results can also be related to the nowadays frequently mentioned economical crisis and thus the topic's relevance is inevitable. In more details for example [27], [61] and [15] analyzes interesting economical applications. The comparison of the paradox' simulation results with calculated results can also be found in the study. I deal in more details with the topic in [30] and [31] publication.

Irodalomjegyzék

[1] Aczel, A., Sounderpandian, J.: Complete Business Statistics. *McGraw Hill International Edition* (2006)

[2] Ambrus András: Bevezetés a matematikadidaktikába, *Egyetemi Jegyzet, ELTE Eötvös Kiadó, Budapest* (1995)

[3] Arazi, B.: Handwriting identification by means of run-length measurements. *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics,* **7,** *12* (1977) pp. 878-881.

[4] Berde, É.; Petró K.: A különféle hasznosságfogalmak szerepe a közgazdaságtanban. *Közgazdasági Szemle, XLII. évf.* (1995) 5. sz. pp. 511-529.

[5] Bernoulli, D.: Exposition of a New Theory on the Measurement of Risk. (L. Sommer fordítása) *Econometrica, Vol. 22, No. 1* (1954) pp. 23-36.

[6] Bernstein, P.: Against the Gods: The Remarkable Story of Risk. *Wiley* (1998)

[7] Binswanger, K.; Embrechts, P.: Longest runs in coin tossing. *Insurance Math. Econom.* **15**, *no. 2-3* (1994) pp. 139-149.

[8] Bloom, D.M.: Probabilities of Clumps in a Binary Sequence. *Mathematics Magazine,* **69**, *no.5* (1996)

[9] Breiman, L.: Optimal gambling systems for favorable games. *Proc. Fourth Berkeley Symp. Math.Statist. Prob., Vol, 1* (1961) pp. 65-78.

[10] Brenyó, M.: Valószínűleg nem véletlen. *A matematika tanítása* (2000. Január) pp. 3-6.

[11] Császár, Á.: Varga Tamás élő matematikája. *Matematikatanár-képzés - matematikatanár-továbbképzés I.* (1993) pp. 7-15.

[12] Csörgő, S.: A szentpétervári paradoxon. *Polygon, V. kötet 1. szám* (1995) pp. 19-79.

[13] Csörgő, S.; Simons, G.: On Steinhaus' Resolution of the St. Petersburg Paradox. *Probability and Mathematical Statistics, Vol. 14, Fasc. 2* (1993) pp. 157-172.

[14] Csörgő, S.; Simons, G.: A strong law of large numbers for trimmed sums, with applications to generalized St. Petersburg games. *Statistics & Probability Letters Vol. 26, issue 1* (1996) pp. 65-73.

[15] Csörgő, S.; Simons, G.: Pooling strategies for St. Petersburg gamblers. *Bernoulli 12, 6* (2006) pp. 971-1002.

[16] Dutka, J.: On the St. petersburg Paradox. *Archive for History of Exact Sciences, Vol. 39, Number 1.* pp. 13-39.

[17] Erdős, P.; Révész, P.: On the length of the longest head-run. *Topics in information theory Second Colloq., Keszthely* 1975. pp. 219-228. *Colloq. Math. Soc. Janos Bolyai, 16* (1977)

[18] Fazekas, I.: Valószínűségszámítás. *Kossuth Egyetemi Kiadó, Debrecen* (2003)

[19] Fazekas, I.; Karácsony, Zs.; Libor, J-né.: Longest run in coin tossing. Comparison of recursive formulae, asymptotic theorems, computer simulations. *Acta Universitatis Sapientiae, Mathematica 2, 2* (2010) pp. 215-228. MathSciNet (MR2748470) által referált

[20] Fazekas, I.; Karácsony, Zs.; Libor, J-né.: A leghosszabb szériák vizsgálata. *Alkalmazott Matematikai Lapok, 27 Budapest* (2010) pp. 135-156. MathSciNet által referált

[21] Fazekas, I.; Tómács, T.: A valószínűségszámítás szemléletes oktatásáról. *A matematika tanítása* (1996. Szeptember)

[22] Feller, W.: Note on the Law of Large Numbers and "Fair" Games. *Annals of Mathematical Statistics, Vol. 16, Num. 3* (1945) pp. 301-304.

[23] Feller, W.: Bevezetés a valószínűségszámításba és alkalmazásaiba. *Műszaki Könyvkiadó, Budapest* (1978)

[24] Földes, A.: The limit distribution of the length of the longest head-run. *Period. Math. Hungar.* **10**, *no. 4,* (1979) pp. 301-310.

[25] Gergely, M.: A diákok már nem tudnak tankönyvet olvasni - nincs benne egy link sem. *http://nol.hu/tud-tech/a diakok mar nem tudnak tankonyvet olvasni - nincs benne egy link sem* (2010. február 13.)

[26] Gordon, L.; Schilling, M. F.; Waterman, M. S.: An extreme value theory for long head runs. *Probab. Theory Relat. Fields,* **72**, *no. 2* (1986) pp. 279-287.

[27] Györfi, L.; Kevei, P.: St. Petersburg Portfolio Games. *Proceedings of Algorithmic Learning Theory 2009, R. Gavaldľa et al. (Eds.), Lecture Notes in Artificial Intelligence 5809* (2009) pp. 83-96.

[28] Karácsony, Zs.; Libor, J-né.: Longest run in coin tossing. Teaching recursive formulae, asymptotic theorems and computer simulations. *Teaching Mathematics and Computer Science, Debrecen* (megjelenésre elfogadva) Zentralblatt für Didaktik der Mathematik által referált folyóirat

[29] Kopocinski, B.: On the distribution of the longest succes-run in Bernoulli trials. *Roczniki Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Seria III, Matematyka Stosowana XX-XIV* (1991)

[30] Libor, J-né.: Financial and economic aspects of St. Petersburg Paradox. *Journal of Informatics and Mathematical Sciences Vol. 3 Number 3* (2011) pp. 211-220.

[31] Libor, J-né.: Some useful financial aspects of St Petersburg paradox. *Journal of Global Awareness (Bloomsburg University)* (Lektorálva, megjelenésre elfogadva) Cabell's Directory of Publishing Opportunities in Management and Marketing által referált folyóirat

[32] Lupton: The St. Petersburg Problem *Nature, Vol. 41, issue 1051, 1889.* pp. 165-166.

[33] Martin-Löf, A.: A limit theorem which clarifies the 'Petersburg paradox'. *Journal of Applied Probability 22* (1985) pp. 634-643.

[34] Metropolis, N.: The beginning of the Monte Carlo Method. *Los Alamos Science Special Issue* (1987) pp. 125-130.

[35] Metropolis, N.; Ulam, S.: The Monte Carlo Method. *Journal of the American Statistical Association, Vol. 44, No. 247* (1949. Szept.) pp. 335-341.

[36] de Montmort, P. R.: Essai d'Analyse. *(F.N. David fordítása) JOC/EFR August* (2007) (http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Extras/Montmort_essai.html)

[37] Muselli, M.: Useful inequalities for the longest run distribution. *Statist. Probab. Lett.* **46***, no. 3* (2000) pp. 239-249.

[38] Nemetz, T.: Egy lehetőség valószínűségszámítási fogalmak bevezető szemléltetésére. *A matematika tanítása* (1970) pp. 143-149.

[39] Philippou, A. N.; Makri, F.S.: Longest success runs and Fibonacci-type polynomials. *The Fibonacci Quarterly* **23***, Nov.* (1985) pp. 338-346.

[40] Pap, Gy.: The accuracy of merging approximation in generalized St.Petersburg games *Journal of Theoretical Probability, Vol.24, Number 1* (2009) pp. 240-270.

[41] Pllana, S.: History of Monte Carlo Method. *http://stud2.tuwien.ac.at/ e9527412/*

[42] Rényi, A.: Valószínűségszámítás. *Tankönyvkiadó, Budapest* (1968)

[43] Rényi, A.: Ars Mathematica. *Typotex, Budapest* (2005) pp. 269-279. (Gondolatok a valószínűségszámítás tanításáról)

[44] Rényi, A.: Ars Mathematica. *Typotex, Budapest* (2005) pp. 46-64. (Dialógus a matematika alkalmazásairól)

[45] Rényi, A.: Ars Mathematica. *Typotex, Budapest* (2005) pp. 245-268. (A szerencsejátékok és a valószínűségszámítás)

[46] Révész, P.: Strong theorems on coin tossing. *Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Helsinki* (1978)

[47] Révész, P.: Mennyire véletlen a véletlen? *Akadémiai székfoglaló, Akadémiai Kiadó, Budapest* (1982)

[48] Rochowicz, J. A.: Learning Binomial Probability Concepts with Simulation, Random Numbers and a Spreadsheet. *Mathematics Department, Alvernia College, online submiision* (2005)

[49] Samarova, S. S.: On the asymptotic behaviour of the maximal sojourn time of an ergodic Markov chain in a fixed state. *Russian Math Surveys* **35** *(6)* (1980) pp. 103-104.

[50] Samuelson, P. A.: St. Petersburg Paradoxes: Defanged, Dissected, and Historically Described. *Journal of Economic Literature, Vol. XV* (1977) pp.24-55.

[51] Schilling, M. F.: The Longest Run of Heads. *The College Mathematics Journal, Vol. 21, no. 3* (1990) pp. 196-207.

[52] Schuster, E. F.: On overwhelming numerical evidence in the settling of Kinney's waiting time conjecture. *SIAM Journal of Statistical Computing,* **6** *(4)* (1985) pp. 977-982.

[53] Schwager, S. J.: Run probabilities in sequences of Markov-dependent trials. *Journal of the American Statistical Association,* **78** (1983) pp. 168-175.

[54] Sen, Z.: Statistical analysis of hydrologic critical droughts. *Journal of the Hydraulics Division* **106** *(HY1)* (1980) pp. 99-115.

[55] Stahl, I.: Teaching the Classics of Simulation to beginners. *Proceedings of the 2003 Winter Simulation Conference* (2003) pp. 1941-1951.

[56] Stahl, I.: Teaching Simulation to Business Students Summary of 30 Years' Experience *Proceedings of the 2007 Winter Simulation Conference* (2007) pp. 2327-2335.

[57] Steinhaus, H.: The so-called Petersburg Paradox. *Colloquium Mathematicum 2* (1949) pp. 56-58.

[58] Szalontai, T.: A matematika-didaktika időszerű kérdései. *http://zeus.nyf.hu/ szalonta/* (2008)

[59] Szászné Simon, J.: A sztochasztika középiskolai oktatása. *PhD értekezés, Debreceni Egyetem* (2005)

[60] Székely, J. G.: Paradoxonok a véletlen matematikájában. *Typotex, Budapest* (2004)

[61] Székely, J. G.; Richards, P.: The St. Petersburg Paradox and the Crash of High-Tech Stocks in 2000. *The American Statistician, August 2004. Vol. 58, No. 3* pp. 225-231.

[62] Vardi, I.: The Limiting Distribution of the St. Petersburg Game. *Proceedings of the American Mathematical Society Vol. 123, Number 9* (September 1995) pp. 2875-2882.

http://matek.fazekas.hu/

http://www.math.hmc.edu/funfacts/

http://nrich.maths.org/public/index.php

http://mathworld.wolfram.com/topics/ProbabilityandStatistics.html

http://www.mathsay.com/example.htm

http://www.khanacademy.org/

http://mathforum.org/probstat/probstat.software.html

http://www.mathkalusa.com/probability_1.html

http://saliu.com/content/probability.html

http://www.mathematik.com/Petersburg/Petersburg.html

http://www.stat.berkeley.edu/~stark/Java/Html/lln.htm

http://nlvm.usu.edu/en/nav/frames_asid_305_g_4_t_5.html

http://animation.yihui.name/prob:law_of_large_numbers

http://www.stat.sc.edu/~west/javahtml/CLT.html

http://www.math.csusb.edu/faculty/stanton/probstat/clt.html

http://www.chem.uoa.gr/applets/appletcentrallimit/appl_centrallimit2.html

http://www.aiaccess.net/English/Glossaries/GlosMod/e_gm_central.htm#swf_clt

http://bcs.whfreeman.com/ips4e/cat_010/applets/CLT-Binomial.html

http://www.stat.wvu.edu/SRS/Modules/CLT/clt.html

http://www.sjsu.edu/faculty/watkins/randovar.htm

http://elonen.iki.fi/articles/centrallimit/index.en.html#demo

http://www.cs.uic.edu/~wilkinson/Applets/clt.html

http://demonstrations.wolfram.com/TheLawOfTheIteratedLogarithmInProbabilityTheory/

http://www.math.uah.edu/stat/applets/RandomWalkExperiment.xhtml

http://www.ds.unifi.it/VL/VL_EN/applets/DiceExperiment.html

http://www.math.bme.hu/~nandori/Virtual_lab/stat/prob/index.xhtml

Visual Stats, Visual Probability

1. Táblázat: A valószínűségszámítás oktatásában használható néhány számítógépes program

		1.csop.			2.csop.			3.csop.			4.csop.			5.csop.	
	max 10 elmélet	max 30 feladat	max 40 össz.	max 10 elmélet	max 30 feladat	max 40 össz.	max 10 elmélet	max 30 feladat	max 40 össz.	max 10 elmélet	max 30 feladat	max 40 össz.	max 10 elmélet	max 30 feladat	max 40 össz.
1	8	28	36	6	11	17	2	10	12	4	11	15	5	18	23
2	6	22	28	5	8	13	8	26	34	6	6	12	4	27	31
3	5	16	21	7	15	22	7	24	31	4	11	15	6	21	27
4	5	14	19	3	3	6	2	3	5	5	16	21	5	14	19
5	5	13	18	9	23	32	4	10	14	4	14	18	5	10	15
6	7	26	33	4	9	13	7	19	26	4	9	13	2	6	8
7	8	22	30	5	11	16	4	7	11	6	17	23	6	23	29
8	2	13	15	7	25	32	2	3	5	4	13	17	2	8	10
9	4	7	11	7	25	32	9	20	29	7	26	33	7	28	35
10	7	20	27	3	14	17	6	22	28	6	17	23	4	7	11
11	5	11	16	5	21	26	7	26	33	9	26	35	4	10	14
12	7	24	31	3	9	12	5	26	31	2	1	3	1	1	2
13	7	23	30	9	23	32	7	21	28	2	4	6	2	7	9
14	2	5	7	5	12	17	2	2	4	5	13	18	4	17	21
15	5	12	17	7	26	33	4	5	9	5	14	19	7	24	31
16	3	10	13	8	28	36	3	8	11	2	4	6	4	14	18
17	6	11	17	4	7	11	5	20	25	5	8	13	4	17	21
18	4	7	11	3	9	12	2	8	10	5	11	16	4	10	14
19	5	12	17	7	17	24	2	11	13	5	8	13	3	9	12
20	4	9	13	6	19	25	9	26	35	10	28	38	9	29	38
21	7	20	27	5	10	15	6	18	24	5	13	18	7	18	25
22	9	27	36	3	0	3	9	22	31	7	8	15	4	10	14
23	4	6	10	2	5	7	3	4	7	8	18	26	6	16	22
24	5	13	18	1	5	6							7	17	24
átlagpont	5,416667	15,45833	20,875	5,166667	13,95833	19,125	5	14,82609	19,82609	5,217391	12,86957	18,08696	4,666667	15,04167	19,70833
átlag %	54,16667	51,52778	52,1875	51,66667	46,52778	47,8125	50	49,42029	49,56522	52,17391	42,89855	45,21739	46,66667	50,13889	49,27083
korreláció															
elm. és fel.		0,864856			0,831201			0,851768			0,811373			0,807192	
között															
korreláció a teljes adattáblára az elmélet és feladat között:							0,818688								

2. Táblázat: Zárthelyi dolgozaton elért pontszámok
(5 csoportban összesen 118 fő)

Mindig vannak elmeleti kerdesek, kb 30-40%. Az atlag: ZH1=45%, ZH2=55%.
Az elmeleti kerdesek atlaga 5-10 szazalekkal jobb, pontos statisztikat errol nem csinaltam.

Az összpontszám 17 %-át adja az elméleti kérdéskör pontszáma. A hallgatók átlagos teljesítménye kb. 35 %-os eredményt mutat. Csak az elméleti részbo"l külön is kb. 35% lehet a hallgatók teljesítménye.

A hallgatók átlagos teljesítménye nagy szórást mutat; pár jeles, jó mindig van . Legtöbb közepes, elégséges. Kb 40 % a bukási arány . Az összpontszám kb. 20 %-át adja az elméleti kérdéskör pontszáma.

3. Táblázat: Néhány oktatói megjegyzés a számonkérés eredményeivel kapcsolatban

									2. tanulócsoport egyedi eredményei														
dobás sz.	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46
1	0	1	0	1	0	1	1	1	1	0	0	1	1	1	1	0	0	1	0	0	0	0	1
2	1	0	0	0	0	0	1	1	0	1	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	1	1
3	0	1	0	1	1	1	1	0	0	0	1	1	1	1	1	1	0	0	0	1	0	0	0
4	0	1	0	0	1	0	0	1	1	0	0	0	0	1	1	1	0	1	1	0	1	0	0
5	0	1	1	1	0	0	1	1	1	0	1	0	1	0	0	1	1	1	0	1	0	0	1
6	0	1	1	1	0	1	0	0	1	0	1	0	1	0	1	1	0	0	1	0	1	1	1
7	1	0	1	0	1	0	0	1	1	0	1	1	0	1	1	0	0	1	0	0	0	0	1
8	1	0	1	1	1	0	0	1	0	1	0	1	1	1	0	0	1	0	1	0	0	0	0
9	1	0	0	0	0	1	0	1	0	1	1	0	0	1	1	1	0	0	0	0	1	1	0
10	0	0	1	1	0	1	0	0	1	0	0	0	1	1	1	0	0	1	1	0	0	0	1
11	0	0	1	0	1	1	0	0	1	0	1	0	0	1	0	0	1	1	0	1	1	0	1
12	0	0	1	0	1	1	0	1	1	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	1	1	0	1
13	0	1	1	0	0	1	1	0	1	1	0	1	1	0	1	1	1	0	1	0	1	1	1
14	1	0	1	0	0	0	1	0	1	1	1	1	1	1	0	1	1	0	0	1	0	0	0
15	1	1	1	0	1	1	1	1	0	0	1	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
16	0	1	1	1	0	1	0	1	1	1	0	1	1	1	0	1	1	1	0	0	1	0	1
17	0	1	1	1	0	1	1	1	0	1	0	0	0	0	1	0	1	0	0	1	0	0	1
18	1	1	1	0	1	1	0	0	0	1	1	1	1	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0
19	1	0	1	1	1	1	0	1	0	1	1	1	0	1	0	1	1	0	1	0	0	1	0
20	1	1	1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	0	1	0	1	1	0	0	0	0	0	1
21	0	1	1	1	0	0	0	1	0	1	0	0	1	1	0	0	0	1	0	0	1	0	1
22	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	1	1	0	1	1	1	0	1	1	1
23	1	0	0	1	0	1	0	1	1	0	0	0	0	0	1	1	0	1	1	0	0	0	0
24	0	1	1	0	1	1	1	1	1	1	0	1	1	0	0	1	0	1	0	1	1	1	0
25	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	0	1	0	0	0	1	0	0
26	0	0	1	1	0	0	1	0	1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	1	1	0	1	1
27	1	0	0	0	1	0	0	1	0	1	1	0	0	1	1	1	1	0	1	0	1	0	1
28	0	1	0	1	0	1	0	1	1	1	0	0	1	1	0	0	1	0	0	1	1	0	0
29	0	1	0	0	0	1	0	1	1	0	1	1	1	1	1	0	0	1	1	1	1	1	0
30	1	0	0	1	0	1	1	0	0	1	0	0	0	0	0	1	1	0	1	0	1	1	1
31	1	1	1	0	1	1	0	0	1	0	1	0	1	1	1	1	0	1	0	0	1	1	1
32	0	1	1	1	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	1	0	1	1	0
33	1	0	0	1	1	0	1	0	0	1	1	0	0	0	1	1	1	1	0	1	0	0	1
34	1	1	0	1	0	0	1	0	1	1	1	0	1	1	1	0	0	0	0	1	0	0	1
35	1	0	1	0	1	0	0	0	1	0	0	1	1	0	1	0	0	1	1	1	0	1	1
36	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	1	1	0	0	0	1	0	1	0	1	1	1	1
37	1	1	0	0	0	0	0	1	1	1	0	0	0	0	1	0	1	1	0	1	1	0	1
38	1	1	0	1	0	0	0	1	1	1	1	0	1	0	0	1	1	0	0	1	0	0	1
39	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	0	0	1	0	1	1	1	0	0	1	0	1	0
40	0	1	0	0	0	1	1	0	0	0	0	1	1	1	0	0	1	1	0	0	1	0	1
41	0	1	1	0	1	0	1	0	1	1	0	1	1	1	1	0	1	0	0	1	1	1	0
42	1	1	1	0	0	1	0	0	0	1	1	0	1	0	1	0	0	0	1	0	1	0	0
43	1	1	0	1	1	0	0	0	1	1	1	1	1	0	1	0	1	1	0	0	1	0	1
44	1	0	1	0	0	1	0	1	0	1	1	1	0	0	1	0	1	1	0	0	0	1	0
45	1	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	1	1	0	1	0	1	1	1	1	0
46	1	1	1	1	0	1	1	1	1	0	1	0	0	0	1	0	1	1	1	1	0	0	1
47	0	0	0	1	1	1	0	1	0	0	0	1	0	1	1	1	0	1	0	1	0	0	1
48	0	1	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	1	0	1	0	0	1	1	0
49	1	1	0	0	0	1	0	0	1	1	0	1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	1	0
50	1	0	1	0	1	0	1	0	0	1	1	0	0	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1

4.a/1. Táblázat: 2. tanulócsoport érmedobás-eredményei 100 dobás esetén (első 50 dobás)

51	1	0	1	0	1	1	0	1	1	1	0	0	1	0	0	1	1	1	0	0	1	0	0
52	0	0	1	0	0	0	1	1	0	0	0	1	0	1	0	1	1	0	1	0	0	1	0
53	0	0	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	0	1	0	0	0	1	1	1
54	0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	1	0
55	1	1	0	1	0	1	0	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	1	1	1	0	0	1
56	0	1	1	1	1	1	1	0	0	1	0	0	1	1	0	0	1	1	1	1	1	1	0
57	0	1	0	0	0	1	0	1	0	0	1	1	0	1	0	1	1	1	0	0	0	0	0
58	1	0	1	1	0	0	0	0	1	0	1	0	0	1	1	0	1	0	0	0	1	0	1
59	1	1	0	0	1	0	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1
60	1	0	1	1	1	1	0	0	1	1	0	0	1	0	1	0	1	0	1	1	0	0	0
61	1	1	1	1	0	1	1	0	1	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
62	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	1	1	1	0	1	1	0	1	1	0	0	0	0
63	1	1	1	1	1	0	1	1	0	1	0	1	1	1	1	1	0	1	0	0	0	1	0
64	0	1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	1	0	1	0	0	0	0	0	0	1	1	0
65	1	1	1	1	0	0	1	0	1	1	1	1	1	1	0	0	1	0	0	1	1	0	0
66	1	0	1	1	0	0	0	1	0	0	1	0	1	1	0	1	0	0	0	1	1	1	0
67	0	1	0	0	0	1	0	1	1	1	1	1	0	1	0	1	0	1	1	0	1	1	0
68	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	1	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	1
69	1	0	1	0	0	1	1	0	0	1	0	0	1	1	1	1	1	1	1	0	0	1	0
70	1	1	1	1	0	0	1	0	1	1	1	1	0	1	1	1	0	1	1	1	0	0	0
71	1	0	0	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	0	1	1	0	1	1	0
72	0	0	1	1	0	1	0	0	0	1	0	1	0	1	0	1	1	0	1	0	1	0	0
73	0	0	0	1	0	1	0	0	0	1	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	1
74	1	1	1	0	0	1	1	0	1	0	1	0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1
75	0	1	1	1	1	0	0	1	1	0	1	1	1	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0
76	1	1	0	0	1	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	1
77	0	0	0	0	1	1	1	0	1	1	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
78	0	1	1	0	0	1	0	1	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	1	1	0	1	1
79	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	1	1	0	0	0	1	1	0	0	0	0	1	1
80	1	1	1	1	1	1	0	0	1	1	1	0	0	1	1	1	1	0	1	1	0	0	1
81	0	1	1	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	0	1	0	1	1	1	1	1	1
82	0	0	1	1	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	1	1	0	0	1	1	0	0	0
83	1	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	1	1	0	1	0	1	1	1	1	0	1
84	1	0	0	1	0	0	0	0	0	1	1	0	1	1	1	0	1	1	1	1	1	0	0
85	0	1	1	1	1	1	0	1	0	1	1	1	0	1	0	1	1	1	1	1	0	1	0
86	0	1	0	1	0	1	0	1	1	0	0	0	1	1	1	1	1	0	0	1	0	0	1
87	0	1	1	1	1	1	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	1	1	1
88	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	0	0	0
89	1	1	0	1	0	0	0	0	1	0	1	1	1	0	0	0	1	0	1	1	1	0	1
90	1	1	0	0	1	1	0	1	0	0	0	1	1	1	0	1	0	1	0	0	1	1	0
91	1	1	1	0	1	0	1	1	0	1	1	1	0	0	1	0	1	1	0	0	1	0	1
92	0	1	0	1	0	1	0	1	1	0	0	0	1	0	0	1	0	0	1	1	1	1	0
93	1	1	0	1	0	1	1	1	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0
94	0	1	0	0	0	1	0	1	1	0	1	0	0	0	0	0	1	1	0	0	1	1	1
95	0	0	1	1	0	1	1	1	0	1	0	1	1	0	1	0	0	1	1	0	1	1	1
96	0	0	0	1	0	0	1	1	0	0	1	0	0	0	1	1	1	0	1	1	1	1	1
97	1	1	1	1	1	0	0	1	1	0	0	0	0	1	0	1	0	0	1	0	0	1	1
98	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	0	0	1	1	0	0	0	1	0
99	1	0	1	0	1	0	0	0	1	0	0	1	0	1	0	0	1	0	0	0	1	0	0
100	0	0	1	1	1	0	1	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	1	0	1	1	1
fejek (1) sz.	49	59	54	51	41	56	44	55	51	55	50	44	50	51	50	52	49	52	44	47	52	48	51
fejek rel.gy.	0,49	0,59	0,54	0,51	0,41	0,56	0,44	0,55	0,51	0,55	0,5	0,44	0,5	0,51	0,5	0,52	0,49	0,52	0,44	0,47	0,52	0,48	0,51
legh. fej	5	10	12	4	3	6	3	8	5	7	5	4	6	5	10	8	5	4	6	10	6	5	6
lh. bárm.	5	10	12	5	6	7	7	8	5	7	6	5	6	7	10	8	6	4	6	10	6	6	8

4.a/2. Táblázat: 2. tanulócsoport érmedobás-eredményei 100 dobás esetén (második 50 dobás)

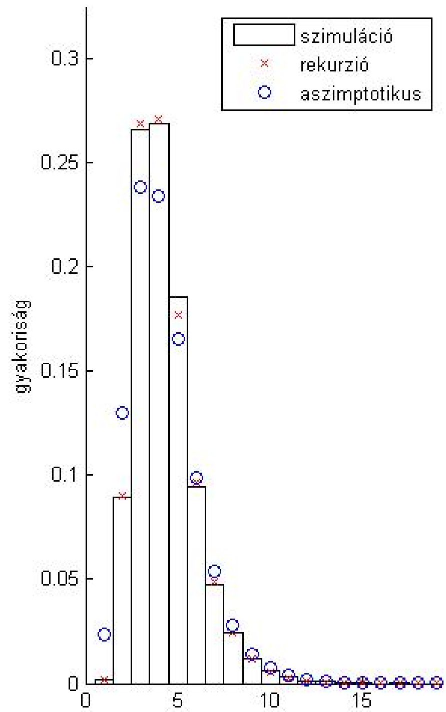
									3. tanulócsoport egyedi eredményei														
dobás sz.	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60	61	62	63	64	65	66	67	68	69
1	1	0	1	1	0	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	1	0	0
2	1	0	1	0	1	0	0	1	0	0	0	0	1	1	1	0	1	0	1	0	0	1	0
3	1	1	1	0	1	0	0	0	1	1	1	0	1	0	1	0	0	0	1	0	1	1	0
4	0	1	1	1	0	1	1	1	1	1	0	0	1	0	1	0	1	1	0	0	0	1	0
5	0	0	0	0	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	1	1	0	1	1	1	0	0
6	1	1	0	1	0	1	0	0	0	1	1	0	0	1	0	1	1	0	0	0	1	1	1
7	1	1	1	1	0	0	0	0	0	1	1	1	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0
8	0	0	1	0	0	1	0	1	1	1	1	0	0	0	0	0	1	1	0	1	1	0	1
9	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	1	1	0	1	0	1	0	0	1	0	0	0	1
10	1	0	1	1	1	0	1	0	1	1	1	0	1	0	1	1	0	1	0	0	1	1	1
11	0	1	1	1	1	1	0	0	0	1	0	0	1	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1
12	1	1	0	1	1	1	0	0	0	0	0	0	1	0	1	1	1	0	1	0	1	0	1
13	1	1	1	0	0	1	1	0	1	1	0	1	1	0	0	0	0	1	0	1	1	1	0
14	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	1	1	1	0	1
15	0	0	1	0	1	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	1	1	0
16	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1
17	1	1	0	1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
18	1	0	0	0	0	1	1	0	1	0	0	0	1	0	0	1	1	0	0	1	0	1	0
19	1	1	1	0	1	1	1	0	1	1	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	0	1	1
20	1	0	0	0	1	0	1	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0
21	0	1	1	0	0	0	0	1	0	1	0	0	1	1	0	1	0	0	1	1	1	1	0
22	0	1	1	1	1	1	1	0	0	0	1	0	1	1	0	0	0	1	1	1	1	1	1
23	0	1	0	0	1	0	0	0	1	1	1	0	1	1	0	1	1	0	1	1	1	1	1
24	1	0	1	0	0	1	1	0	1	0	0	1	0	0	0	1	1	0	1	0	1	0	1
25	0	0	0	1	1	0	0	1	1	1	1	1	0	0	1	1	1	1	0	0	1	0	1
26	0	1	1	1	0	1	0	1	0	0	0	1	1	0	1	1	0	1	0	1	0	1	0
27	1	1	0	1	0	1	1	0	0	1	1	1	0	1	1	1	0	1	1	1	1	1	0
28	1	0	0	0	1	0	0	1	0	1	1	1	1	0	1	0	1	0	0	1	1	0	0
29	0	1	0	1	0	0	0	1	0	1	0	1	1	0	1	1	1	1	0	1	0	1	0
30	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	0	1	1	1	1	1	1	0	1
31	1	1	0	0	1	1	1	0	0	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	1	0	0	0
32	0	1	0	1	0	1	1	0	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1
33	0	1	1	0	0	0	1	0	1	0	1	0	0	1	0	0	1	0	1	0	0	0	0
34	0	1	1	0	1	1	0	1	0	0	0	1	1	0	0	1	0	1	0	1	0	0	1
35	0	1	1	1	0	1	1	0	0	1	0	1	0	1	1	1	1	1	1	0	0	0	1
36	1	1	1	1	0	0	1	1	1	0	1	1	0	0	0	0	1	0	1	0	0	1	0
37	0	0	1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	1	1	1	0	1	0	0	1	1	0	1
38	0	0	0	1	1	0	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	1	1	0
39	0	1	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	1	0	0	0	1	1	0	0	1	0	0
40	0	1	0	0	1	0	1	1	0	0	1	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	1	0
41	1	1	0	0	1	0	1	1	0	1	1	0	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0
42	1	0	0	0	0	0	1	1	0	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	0	1	0
43	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	0	0	0	1	1	0	1	0	1	1	0	0	0
44	1	0	0	1	1	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	1	0	0	1	0	1	0
45	1	1	1	0	1	1	0	1	1	0	1	1	1	1	1	1	0	1	0	1	1	0	1
46	0	1	1	1	0	0	1	1	1	1	0	1	1	1	0	1	1	0	0	0	1	1	0
47	1	0	0	1	0	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	1	0	1
48	1	0	1	1	1	0	1	1	0	0	1	0	1	0	0	0	1	1	0	1	1	0	1
49	1	0	1	0	1	0	0	1	0	0	0	1	0	1	1	0	0	1	1	1	0	0	1
50	1	0	1	0	1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	1	0	1	0	1	1	0	1	0

4.b/1. Táblázat: 3. tanulócsoport érmedobás-eredményei
100 dobás esetén (első 50 dobás)

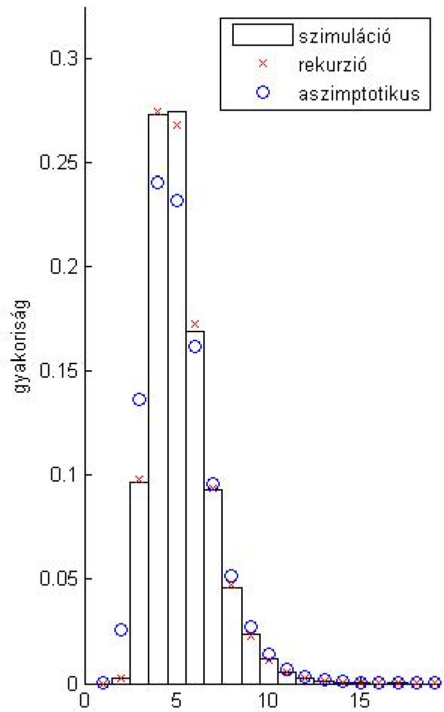
51	0	1	1	0	0	0	1	1	1	0	1	0	0	1	0	1	0	0	0	1	1	1	0
52	1	0	0	1	0	0	1	1	1	0	0	1	0	1	1	0	1	1	1	0	0	1	0
53	1	0	1	1	1	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	1	1	0	1	0	0
54	0	1	1	0	1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	1	0	0	1	1	0	1	0	1
55	1	1	1	1	1	1	0	0	0	1	0	1	1	0	1	0	1	1	1	1	0	1	0
56	0	1	1	0	0	0	1	1	1	0	1	1	0	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1
57	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	0	1	1	0	1	1	1	1	0	0	1	1
58	1	1	0	0	1	1	1	0	1	1	1	0	1	1	0	1	1	0	1	1	1	1	1
59	1	0	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1	1	0	1	1	0	0	0	1	1	0	0
60	1	1	1	0	0	1	0	1	0	1	0	1	0	0	1	0	1	1	0	0	1	0	1
61	1	1	0	1	1	0	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	0	0	0	1	1	1	1
62	1	0	0	1	1	0	1	1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	1
63	0	0	0	0	0	0	1	1	1	0	0	0	1	1	0	0	0	1	1	0	1	0	1
64	1	0	1	1	0	0	1	1	1	0	1	0	1	0	1	1	0	1	0	0	1	0	0
65	1	1	0	0	1	1	1	1	0	1	0	1	0	0	0	1	1	0	1	1	0	1	0
66	1	1	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	1	1	1	0	1	0	0	0	0
67	0	1	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	1	0	1	0	1	0
68	0	1	1	1	0	0	1	0	1	0	1	0	0	0	1	0	1	1	1	1	1	0	0
69	1	0	1	1	1	0	1	1	0	1	0	1	1	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0
70	1	1	1	1	1	0	1	0	1	1	0	0	1	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1
71	0	0	0	0	1	1	1	1	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	1	1	1
72	0	0	0	1	1	1	1	0	1	1	1	0	0	0	1	0	1	1	1	0	0	1	0
73	1	1	0	1	1	1	0	0	1	0	1	1	1	1	0	1	1	0	0	1	1	0	1
74	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0
75	0	1	1	0	0	1	0	1	0	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1
76	0	1	0	0	0	0	0	1	0	1	1	0	1	0	0	1	1	1	1	0	1	1	1
77	1	0	0	1	0	1	1	0	1	0	1	1	0	0	0	0	1	0	1	0	1	1	1
78	0	0	1	0	0	1	1	1	0	0	0	1	0	1	0	0	0	1	0	1	0	1	0
79	0	1	0	0	0	1	1	0	1	0	0	0	0	1	1	0	0	1	0	0	1	1	1
80	0	0	0	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	0	1	0	1	0
81	0	0	1	1	1	0	1	1	1	1	0	1	1	0	0	1	0	1	0	1	0	1	1
82	0	0	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	1	0	0	1	1	1
83	0	0	0	1	1	0	0	1	1	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	1
84	0	0	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	1	0	1	0	1	1	0	0	1	1	1
85	0	1	1	1	1	1	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	1	1
86	1	0	0	0	1	0	0	1	0	0	1	1	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0
87	0	0	1	0	0	0	0	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	1	1
88	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	0	1	1	0	0	1	0	1	1	0	0	0	1
89	1	0	0	1	0	1	0	1	1	1	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	1	0
90	0	1	0	0	1	0	1	1	0	1	0	1	1	0	1	1	1	0	0	1	1	1	0
91	1	1	0	0	0	1	0	1	0	1	1	0	1	0	0	1	1	0	0	1	1	1	1
92	0	1	1	1	0	1	0	0	1	1	0	1	1	1	0	1	1	1	0	1	1	0	1
93	1	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	1	1	0	1	1	0	0	0
94	1	0	0	0	1	0	0	1	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	0	1	1	1	1
95	0	1	0	1	0	1	1	1	0	1	0	0	0	1	1	0	1	1	1	1	0	1	0
96	0	1	0	0	0	1	1	1	1	0	1	0	1	0	0	0	0	0	1	1	1	0	1
97	1	0	1	1	0	1	0	1	0	1	1	1	0	1	1	1	1	1	0	1	0	0	0
98	1	1	1	0	0	0	1	0	0	1	0	1	1	0	1	0	1	1	1	0	0	0	0
99	1	0	1	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	1	0	1	0	1	1	1	1	0
100	1	1	0	0	1	1	0	1	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	1	1	0	0	0
fejek (1) sz.	53	53	53	46	52	46	56	58	48	49	45	44	55	45	47	46	54	51	51	50	58	55	48
fejek rel.gy.	0,53	0,53	0,53	0,46	0,52	0,46	0,56	0,58	0,48	0,49	0,45	0,44	0,55	0,45	0,47	0,46	0,54	0,51	0,51	0,5	0,58	0,55	0,48

legh. fej	6	6	5	6	7	4	10	9	4	6	6	6	5	6	5	7	5	6	7	8	7	11	5
lh. bárm.	8	6	6	6	7	9	10	9	6	6	8	7	5	9	6	8	5	8	9	8	7	11	7

4.b/2. Táblázat: 3. tanulócsoport érmedobás-eredményei 100 dobás esetén (második 50 dobás)

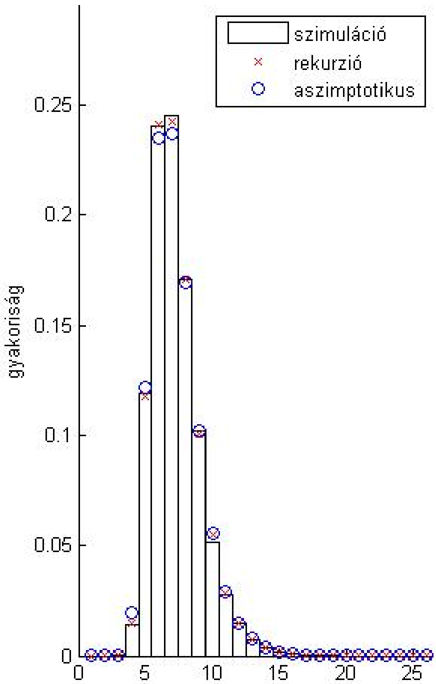


Leghosszabb fejszéria
$p = 0.5, n = 30.$

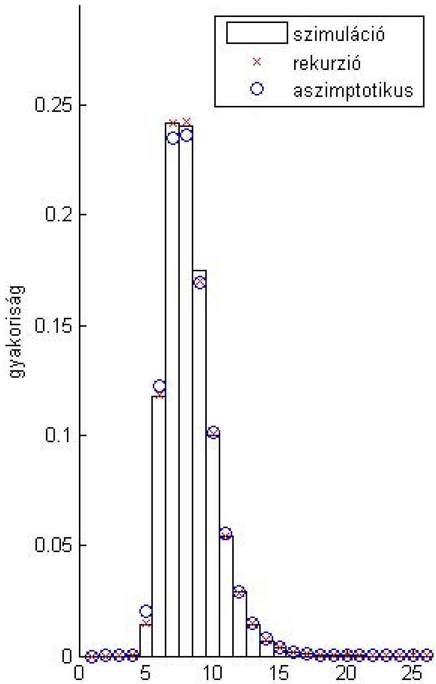


Leghosszabb széria
$p = 0.5, n = 30.$

5.a Táblázat: Grafikonok szabályos érme, kis n esetén

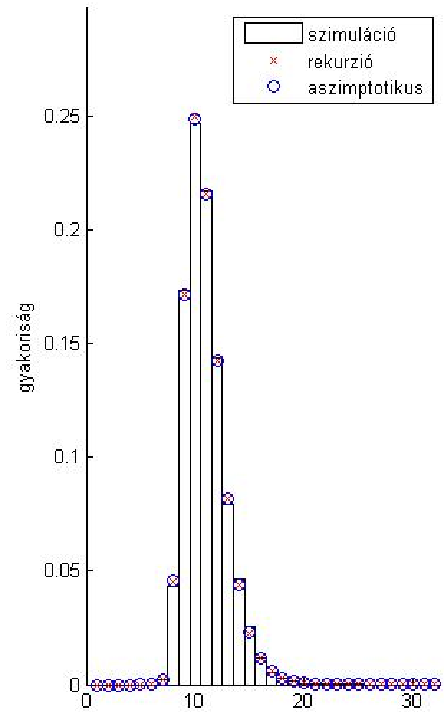


Leghosszabb fejszéria
$p = 0.5, n = 250.$

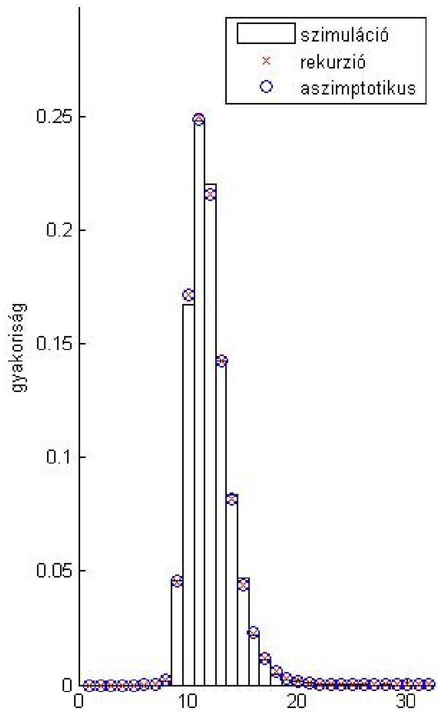


Leghosszabb széria
$p = 0.5, n = 250.$

5.b Táblázat: Grafikonok szabályos érme, közepes n esetén

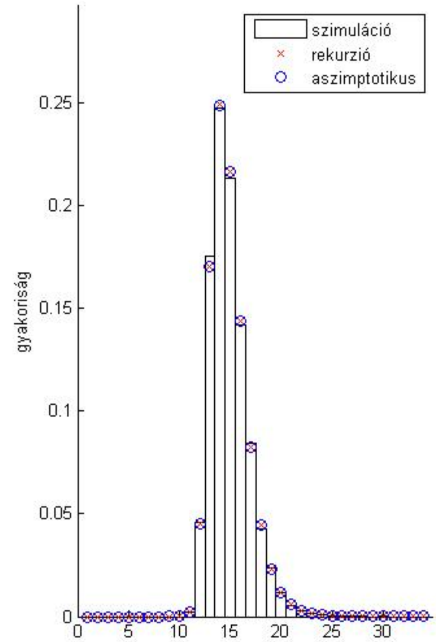


Leghosszabb fejszéria
$p = 0.5, n = 3100.$

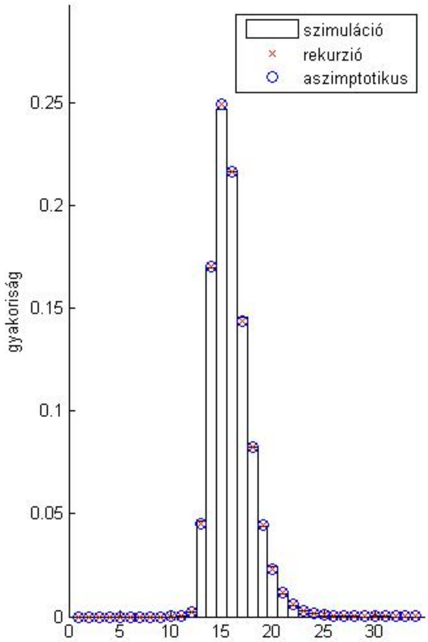


Leghosszabb széria
$p = 0.5, n = 3100.$

5.c Táblázat: Grafikonok szabályos érme, nagy n esetén

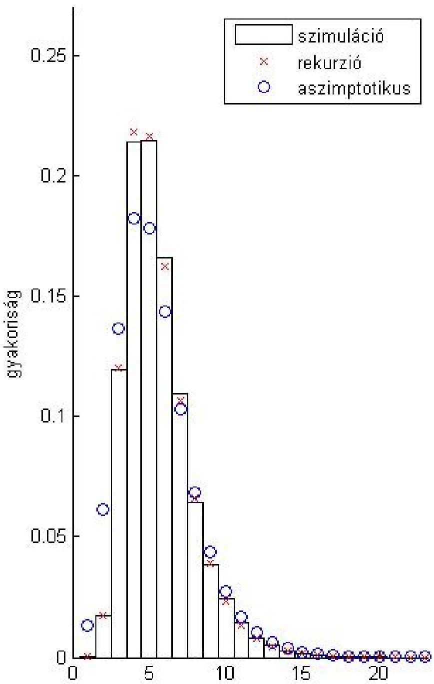


Leghosszabb fejszéria
$p = 0.5, n = 50000.$

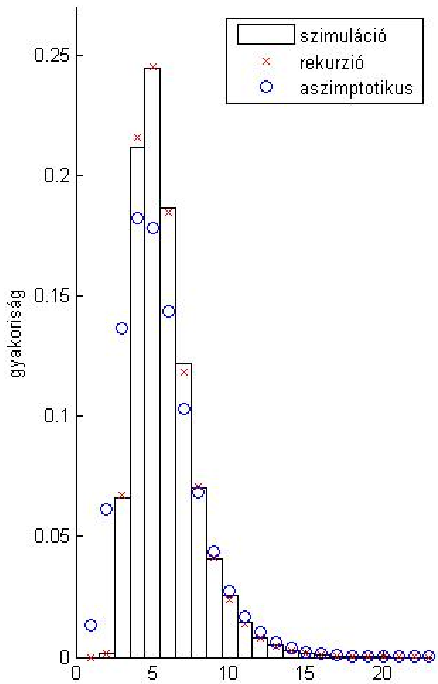


Leghosszabb széria
$p = 0.5, n = 50000.$

5.d Táblázat: Grafikonok szabályos érme, nagyon nagy n esetén

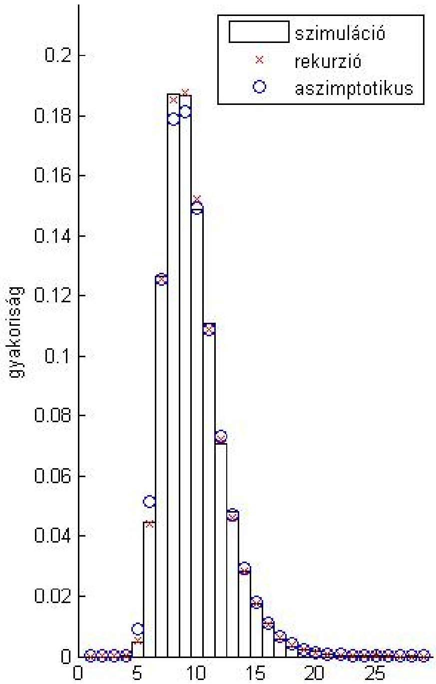


Leghosszabb fejszéria
$p = 0.6, n = 30.$

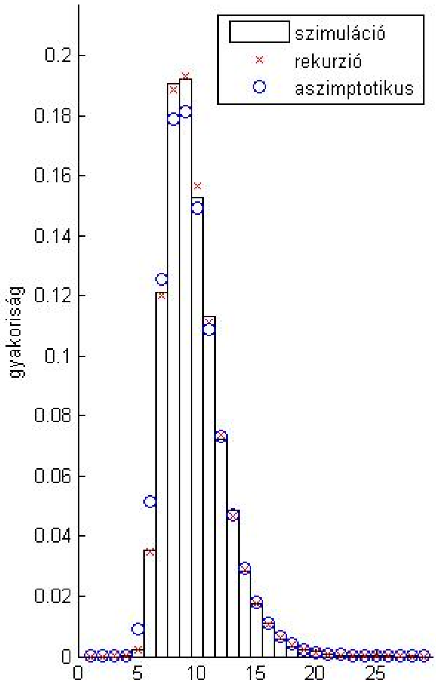


Leghosszabb széria
$p = 0.6, n = 30.$

6.a Táblázat: Grafikonok szabálytalan érme, kis n esetén

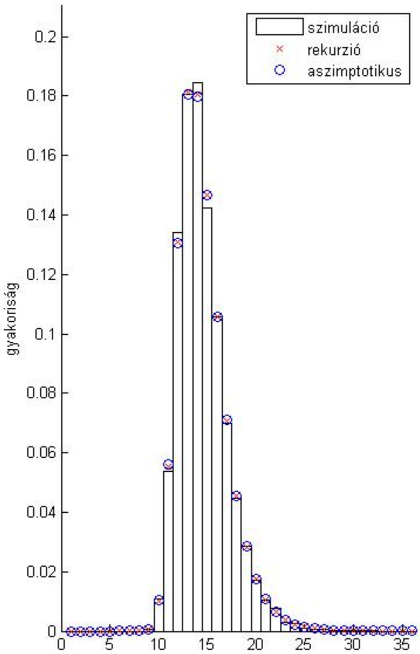


Leghosszabb fejszéria
$p = 0.6, n = 250.$

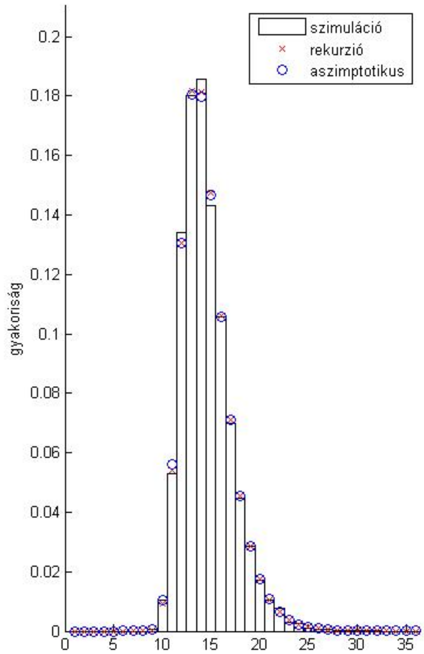


Leghosszabb széria
$p = 0.6, n = 250.$

6.b Táblázat: Grafikonok szabálytalan érme, közepes n esetén



Leghosszabb fejszéria
$p = 0.6, n = 3100.$



Leghosszabb széria
$p = 0.6, n = 3100.$

6.c Táblázat: Grafikonok szabálytalan érme, nagy n esetén

A szerző publikációi/Publications

A szerző referált publikációi/ Refereed publications

1. Libor Józsefné, Tómács Tibor: Rényi-Hajek inequality and its applications. *Annales Mathematicae et Informaticae, 33. Eger* (2006) pp. 141-149. Zentralblatt für Didaktik der Mathematik (Zbl 1135.60311) és a MathSciNet (MR2385473) által referált

2. Libor Józsefné: Megemlékezés Kőnig Dénesről. *Alkalmazott Matematikai Lapok 23, Budapest 2006/1* pp. 191-201. MathSciNet (MR2208225) által referált

3. Fazekas István; Karácsony Zsolt; Libor Józsefné: Longest run in coin tossing. Comparison of recursive formulae, asymptotic theorems, computer simulations. *Acta Universitatis Sapientiae, Mathematica 2, 2* (2010) pp. 215-228. MathSciNet (MR2748470) által referált

4. Fazekas István, Karácsony Zsolt, Libor Józsefné: A leghosszabb szériák vizsgálata. *Alkalmazott Matematikai Lapok, 27 Budapest* (2010) pp. 135-156. MathSciNet által referált

5. Karácsony Zsolt; Libor Józsefné: Longest run in coin tossing. Teaching recursive formulae, asymptotic theorems and computer simulations. *Teaching Mathematics and Computer Science, Debrecen* (2011) (Lektorálva, megjelenésre elfogadva) Zentralblatt für Didaktik der Mathematik által referált folyóirat

6. Libor Józsefné: Some Economic aspects of St Petersburg paradox. *Journal of Global Awareness (Bloomsburg University)* (Lektorálva, megjelenésre elfogadva) Cabell's Directory of Publishing Opportunities in Management and Marketing által referált folyóirat

Angol nyelvű, lektorált publikációk/ Peer-reviewed publications in English

1. Libor Józsefné: A brief history of probability. *Alföldi Tudományos Tájgazdálkodási Napok, Mezőtúr* (2006) ISBN 963 0608 17 0

2. Libor Józsefné; Madaras Lászlóné: Commemoration of Jenő Egerváry. *Alföldi Tudományos Tájgazdálkodási Napok, Mezőtúr* (2008) ISBN 963 0608 16 2

3. Libor Józsefné: Interesting questions in coin-tossing. *Budapest Business School Conference Volume, Budapest* (2009) pp. 119-225. ISBN 978 963 7159 31 2

4. Libor Józsefné: The St. Petersburg paradox and its economic aspects. *Tudomány Határok Nélkül, Szolnok* (2010) ISBN 978 963 87874 77

5. Libor Józsefné: Financial and economic aspects of St. Petersburg Paradox. *Journal of Informatics and Mathematical Sciences Vol. 3 Number 3*, (2011) pp. 211-220.(University of Delhi) ISSN 0975 5748

Magyar nyelvű, lektorált publikációk/ Peer-reviewed publications in Hungarian

1. Csák Zsuzsanna: Nonprofit szervezetek és marketing tevékenységük. *"Korszerű Kereskedelemért" Alapítvány évkönyve Szolnok* (1993) pp. 59-65.

2. Csák Zsuzsanna: A vezetői döntéshozatal és támogató rendszerei. *"Korszerű Kereskedelemért" Alapítvány évkönyve Szolnok* (1993) pp. 66-68.

3. Libor Józsefné: A vezetői döntéshozatal és az operációkutatás. *Szolnoki Főiskola Tudományos Közleményei, Economica II. Szolnok* (2000) pp. 259-265. ISSN 1585-6216

4. Libor Józsefné: Bevezetés az operációkutatásba. *Matlap, VII. Kolozsvár* (2003. február) pp. 43-48. ISSN 1224-3140

5. Libor Józsefné; Madaras Lászlóné: Az alkotó matematika nagy tudósa. *Szolnoki Főiskola Tudományos Közleményei, Economica Szolnok, 2008/2* pp. 112-118. ISSN 1585-6216

6. Libor Józsefné: Megemlékezés Gyires Béláról születésének 100. évfordulóján. *Műszaki Tudomány az észak-Alföldi régióban, Debrecen* (2009) pp. 191-194. ISBN 978 963 7064 21 0

7. Libor Józsefné: Az operációkutatás oktatásának szükségessége. *Magyar- és a Világ Tudománynapja Konferencia, Szolnoki Tudományos Közlemények VI. Szolnok* (2002) ISSN 1419-256X

8. Libor Józsefné: Mióta kiszámítható a kiszámíthatatlan? *Magyar- és a Világ Tudománynapja Konferencia, Szolnoki Tudományos Közlemények IX. Szolnok* (2005) ISSN 1419-256X

9. Libor Józsefné: A leghosszabb "szériák" vizsgálata. *Magyar- és a Világ Tudománynapja Konferencia, Szolnoki Tudományos Közlemények X. Szolnok* (2006) ISSN 1419-256X

10. Libor Józsefné: "Fényes Elek a magyar Marat" Megemlékezés születésének 200. évfordulóján. *Magyar- és a Világ Tudománynapja Konferencia, Szolnoki Tudományos Közlemények XI. Szolnok* (2007) ISSN 1419-256X

11. Libor Józsefné: Valószínűségszámítás és művészet?! *Magyar- és a Világ Tudománynapja Konferencia, Szolnoki Tudományos Közlemények XII. Szolnok* (2008) HU ISSN 2060-3002

12. Libor Józsefné; Madaras Lászlóné: A papíron tollal készített megoldás győzelme az elektronikus számítógép felett. *Magyar- és a Világ Tudománynapja Konferencia, Szolnoki Tudományos Közlemények XII. Szolnok* (2008) HU ISSN 2060-3002

13. Libor Józsefné: Megemlékezés Gyires Béláról születésének 100. évfordulóján. *Műszaki tudomány az Észak-Alföldi régióban, Mezőtúr* (2009) ISBN 978 963 7064 21 0

14. Libor Józsefné: A Szentpétervári Paradoxon és gazdasági vonatkozásai. *Magyar- és a Világ Tudománynapja Konferencia, Szolnoki Tudományos Közlemények XIV. Szolnok* (2010) HU ISSN 2060-3002

15. Libor Józsefné: Az automata, aki kávéból matematikai tételeket gyártott. *Magyar- és a Világ Tudománynapja Konferencia, Szolnoki Tudományos Közlemények XV. Szolnok* (2011) HU ISSN 2060-3002 (Plenáris előadás)

Angol nyelvű konferencia-előadások/ List of conference talks in English

1. Libor Józsefné; Madaras Lászlóné: Dénes Kőnig. *Applied Mathematical Programming and Modelling, London* (2004)

2. Libor Józsefné: Dénes Kőnig, the father of the "Hungarian Method". *Veszprém Optimization Conference: Advanced Algorithms, Veszprém* (2004)

3. Libor Józsefné; Madaras Lászlóné: Alfréd Rényi. *Applied Mathematical Programming and Modelling, Madrid* (2006)

4. Fazekas István; Karácsony Zsolt; Libor Józsefné: Longest runs in coin tossing. Recursive formulae, asymptotic theorems, computer simulations. *Probability and Statistics with Applications, Debrecen* (2009)

5. Karácsony Zsolt; Libor Józsefné: Longest runs in coin tossing. Recursive formulae, asymptotic theorems, computer simulations. *8th International Conference on Applied Informatics, Eger* (2010)

6. Libor Józsefné: Using the longest run for the teaching of recursive formulae, asymptotic theorem and simulation. *History of Mathematics and Teaching of Mathematics, Szeged* (2010)

7. Libor Józsefné: Teaching foreign students in English in Hungary. *American Hungarian Educators Association 35th annual conference, Szeged* (2010)

8. Libor Józsefné: Longest runs in the teaching of recursive formula, asymptotic theorem and simulation. *73rd Annual Meeting of Institute of Mathematical Statistics, Göteborg* (2010)

Magyar nyelvű konferencia-előadások/ List of conference talks in Hungarian

1. Libor Józsefné; Madaras Lászlóné: Megemlékezés Kőnig Dénesről születésének 120. és halálának 60. évfordulóján. *Matematikát, fizikát és informatikát oktatók konferenciája (MAFIOK), Nyíregyháza* (2004)

2. Libor Józsefné; Madaras Lászlóné: Rényi Alfréd, a széles látókörű tudós. *Matematikát, fizikát és informatikát oktatók konferenciája (MAFIOK), Pécs* (2006)

3. Libor Józsefné: Összegző eredmények, kiegészítések a leghosszabb "sorozatok" témához. *Magyar Operációkutatási Társaság Országos konferenciája, Balatonőszöd* (2007)

4. Libor Józsefné; Madaras Lászlóné: A papírral és tollal történő megoldás versenye az elektronikus számítógéppel. *Matematikát, fizikát és informatikát oktatók konferenciája (MAFIOK), Kecskemét* (2008)

5. Libor Józsefné: 90 éve született Rényi Alfréd, a magyar valószínűségszámítási iskola megalapítója. *Matematikát, fizikát és informatikát oktatók konferenciája (MAFIOK,) Szolnok* (2011)

Angol nyelvű oktatási segédanyagok, Szolnoki Főiskola kiadásában/Teaching materials in English, published by College of Szolnok

1. Libor Józsefné: Business Mathematics II. *Szolnok, 2008. (108 oldal)*

2. Libor Józsefné: Statistics II. *Szolnok, elfogadott jegyzetterv, várható kiadás 2012.*

Magyar nyelvű oktatási segédanyagok, Szolnoki Főiskola illetve jogelődjei kiadásában/ Teaching materials in Hungarian, published by College of Szolnok

1. Libor Józsefné; Madaras Lászlóné: Matematika távoktatási tanulási útmutató a 0. évfolyam számára. *Szolnok, 1994. 5-7., 11-13., 17-20., 24-25. oldalak*

2. Libor Józsefné: Távoktatási segédanyag a számítástechnika oktatásához, Norton Commander. *Szolnok, 1994. (18 oldal)*

3. Horváth Jenőné; Libor Józsefné; Madaras Lászlóné; Veres Dénes: Gazdasági Matematika I. feladatgyűjtemény. *Szolnok, 1997. 5-18., 145-147., 121- 144. és 209.-217. oldalak*

4. Horváth Jenőné; Libor Józsefné; Madaras Lászlóné: Tanulási útmutató a Gazdasági matematika I. c. tárgyhoz. *Szolnok, 1997. 5-12., 73-80., oldalak*

5. Horváth Jenőné; Libor Józsefné; Madaras Lászlóné: Tanulási útmutató a Gazdasági matematika II. c. tárgyhoz. *Szolnok, 1998. 9-13., 55-59., oldalak*

6. Bősz Ivett; Dudás Péter; Hanich József; Libor Józsefné; Madaras Lászlóné: Operációkutatási esettanulmányok. *Szolnok, 1998. 81 oldal a kötet 5 fejezetében*

7. Hanich József; Libor Józsefné: Operációkutatás főiskolai jegyzet. *Szolnok, 2000. 6-35., 102-215., oldalak*

8. Hanich József; Libor Józsefné: Operációkutatás feladatgyűjtemény. *Szolnok, 2000. 5-20., 59-124., 125-129., 140-166. oldalak*

9. Hanich József; Libor Józsefné; Operációkutatás tanulási útmutató. *Szolnok, 2000. 6-18., 57-100., 125-129., 140-166. oldalak*

10. Hanich József; Libor Józsefné; Madaras Lászlóné; Nagy Tamás: Gazdasági Matematika II. feladatgyűjtemény. *Szolnok, 2005. 32-45., 98-136. oldalak*

11. Libor Józsefné: Operációkutatás tantárgyi kalauz. *Szolnok, 2006. (72 oldal)*

12. Libor Józsefné: Operációkutatás tutori kalauz. *Szolnok, 2006. (19 oldal)*

13. Fehér Mária; Hanich József; Libor Józsefné; Madaras Lászlóné; Nagy Tamás: Gazdasági Matematika I. feladatgyűjtemény. *Szolnok, 2006. 1-30., 226-267. oldalak*