Egyetemi doktori (PhD) értekezés tézisei

Rekurziós eljárások, Monte Carlo módszerek és aszimptotikus eredmények oktatási célú összehasonlító elemzése

Libor Józsefné dr.

Témavezető: Dr. Fazekas István

Debreceni Egyetem
Matematika- és számítástudományok Doktori Iskola
Debrecen, 2011.

Egyetemi doktori (PhD) értekezés tézisei

Rekurziós eljárások, Monte Carlo módszerek és aszimptotikus eredmények oktatási célú összehasonlító elemzése

Libor Józsefné dr.

Témavezető: Dr. Fazekas István

Debreceni Egyetem
Matematika- és számítástudományok Doktori Iskola
Debrecen, 2011.

Bevezetés

A témaválasztásomat indokolja egyrészt az évek óta tapasztalható hallgatói eredmények folyamatos romlása, mely általános jelenség a felsőoktatásban, de ott is főleg a természettudományos tárgyak elsajátításában. Másrészt a csökkenő óraszámok és egyéb, jelen dolgozatban nem részletezett okok miatt kevés idő és lehetőség van - főleg a valószínűségszámítás tanításához - megfelelő minőségű és mennyiségű oktatási kísérletet végezni vagy legalább bemutatni. Ezért az olyan eljárások, módszerek, melyek segítségével több fogalmat is elmélyíthet a hallgató és a gyakorlati alkalmazásokat is látja, nagy mértékben segítheti az elméleti ismeretek pontos elsajátítását.

Dolgozatomban a címben említett fogalmak, eljárások pontos megértését segítő módszert, eljárást mutatok be, mely a felsőoktatásban tanító kollégák számára nyújthat hasznos didaktikai eszközt. A téma vizsgálatához olyan problémakört választottam a valószínűségszámítás területéről (a leghosszabb szériák vizsgálatát), mely a hallgatók számára viszonylag könnyen feldolgozható, hétköznapi tapasztalataikkal az eredmények összevethetők. A leghosszabb szériák hosszára felírt eloszlásfüggvényre nincs pontos és zárt formula. Így ezen probléma tárgyalásakor még szembetűnőbbek az egyes eljárások alkalmazhatóságának feltételei, eltérései. A rekurziók pontos értéket adnak ugyan, de nem zártak, az értékek meghatározása a sokadik elem esetén már problémás lehet még számítógéppel is. Az aszimptotikus tételek az n növelésével egyre pontosabb, de csak közelítő értékeket adnak, míg a szimulációval a kísérletek sokszori elvégzése alapján kapott eredményekből számított átlagértékek adódnak. Ezen különbözőségek megfigyelésével az egyes fogalmak mélyebb megértést nyernek, az egyes módszerek alkalmazásai az említett problémakör (leghosszabb széria) tárgyalásával jól szemléltethetők. Az elsajátított fogalmakat, definíciókat a matematika egyéb területein is tudják majd alkalmazni a hallgatók. A téma választásának további indokai a dolgozat bevezetőjében szerepelnek.

1. fejezet

A matematika tanításáról

Mivel a felsőoktatás az általános és középiskolai ismeretekre épül, dolgozatomban először röviden ismertetem a főbb változásokat a matematika tanításában a képzés ezen szintjein az elmúlt 50 évben. Míg a matematika nagyon sok területén az alapfogalmak, definíciók, műveletek bevezetése a mindennapi szemléletre, tapasztalatra nagymértékben támaszkodhat, addig a valószínűségszámításban kicsit nehezebb a helyzetünk. Nemetz Tibor [38] cikkének bevezetőjében írja: "A tanulók többnyire legfeljebb homályos fogalmakkal rendelkeznek arra nézve, mit is értsenek véletlen jelenségen, stb., nem ritkán kifejezetten hamisan ítélik meg a tömegjelenségekre vonatkozó törvényszerűségeket, vagy éppenséggel el sem tudják képzelni ilyen törvények létét vagy felhasználhatóságát." Ráadásul, mint ahogyan Rényi Alfréd, a magyar valószínűségszámítási iskola megalapítója írja [42]-ben, sokszor a tanár maga is ódzkodik az ilyen jellegű kísérletek végzésétől. "Statisztikai törvényszerűségeket lehet szemléltetni könyvekből, újságokból vett adatokkal, azonban nagyobb hatással van a tanulókra, ha szemük előtt, – sőt ha lehet, saját kezűleg – elvégzett kísérletekből nyerik a vizsgált adatokat. Néhány tanár nem ért ezzel egyet, mert fél, hogy a kísérletek nem vezetnek pontosan olyan eredményekre, mint amit várnak, amint ez az ilyen kísérletek természeténél fogva valóban bekövetkezhet. Szerintem ez a félelem nem indokolt, és ha a tanár jól érti a valószínűségszámítást, nem kerülhet kényelmetlen helyzetbe. Természetesen a tanárnak gyorsan kell reagálnia, hiszen olyan eredmények értékelése, amelyeket a tanár maga sem láthatott előre, nehezebb, mint olyan példák tárgyalása, amelyeknek eredményét a tanár előre kidolgozhatta." Természetesen ezekkel a kísérletekkel nemcsak a diák, de a tanár tapasztalatai is gyarapodnak, mely főleg a véletlen jelenségek tárgyalásánál szintén nagyon fontos szempont lehet.

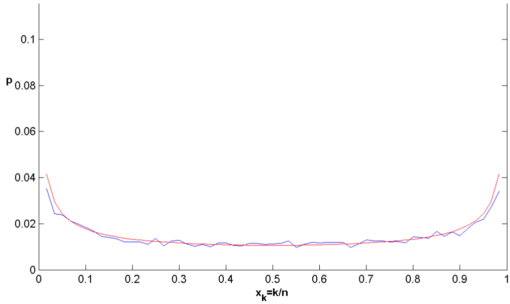
A felsőoktatásban oktatók általános véleménye, hogy a hallgatók tudása egyre nagyobb hiányosságokat mutat, a színvonal évről évre esik. Több intézményben előkészítőkkel, felzárkóztatókkal próbálják a problémát orvosolni, de szerintem legalább ilyen fontos az alapképzésben is a fogalmak, definíciók még pontosabb megértetése, azok magabiztos használatának elérése. Mivel számításaim is igazolják azt az egyértelmű tényt, hogy az elméleti ismeretek és a feladatmegoldás között szoros kapcsolat van, így joggal várhatjuk az eredmények javulását a definíciók pontosabb ismeretével.

Rekurzióval egy függvényt vagy speciálisan egy sorozatot úgy definiálunk, hogy megadjuk a kezdőértéket (vagy értékeket), majd általában egy értéket az előző(ek)ből határozunk meg különböző műveletekkel. Vagyis az eljárásnak két fontos eleme van. Az első, hogy meg kell adni az indulóértéket (vagy értékeket), amellyel a rekurziónk kezdődik. Ezután meg kell adni azt a hozzárendelést, amely megmutatja, hogy a következő elemek milyen módon származnak az előző(ek)ből. Fontos tudni azt, hogy a rekurzióval mindig pontos eredményt kapunk, nem közelítő vagy átlagértéket. A rekurziós képletek alkalmazásának egyetlen hátránya és egyben akadálya van: a sokadik tag meghatározása sokszor nehézségbe ütközik még számítógép használatával is. Az aszimptotikusság olyan tulajdonságot jelent, amellyel akkor rendelkezik valamely matematikai kifejezés, ha az egymást követő értékei egyre inkább megközelítik egy adott függvény értékeit, de azokat sosem érik el, még végtelen számú lépésben sem. Nagy n esetén az aszimptotikus értékek tehát már olyan közel esnek a valós értékekhez, hogy jól használhatjuk azokat, ha az eredeti értékeket nem (vagy csak nehezen, bonyolultan) tudjuk meghatározni. A matematikai szimuláció Monte Carlo módszer néven vált ismertté. Egy véletlen változó átlagértékét tudjuk meghatározni, ha nem ismerjük, vagy esetleg nem tudunk vagy nem akarunk bonyolult számításokat végezni az eloszlásfüggvény megadására vonatkozóan. A nagy számok törvénye alapján elegendő számú minta vétele esetén a kapott átlagérték közel fog esni az általunk nem ismert valós értékhez. A szimuláció segítségével így ezen említett törvény is érthetőbb lesz a hallgatók számára. Könnyen be tudjuk mutatni, hogy a kevés számú ismétlés esetén nem kaphatunk jó megoldásokat. Ha viszont nagy számú (legalább több ezres) ismétlést végzünk (végeztetünk a számítógéppel), a kapott átlageredményeink nagyon jól megközelítik a valós eredményeket.

2. fejezet

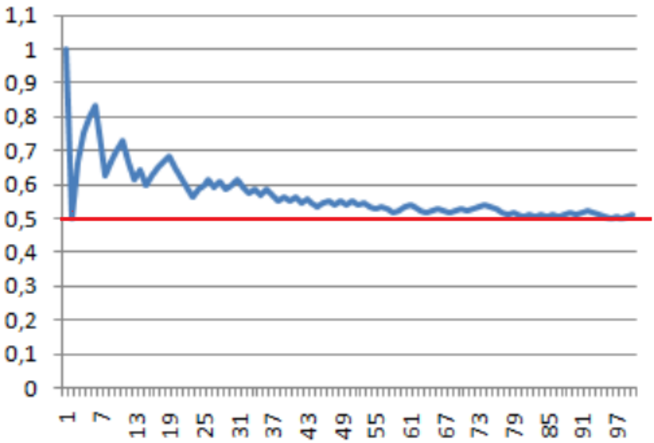
A valószínűségszámítás tanítása

A fejezetben Rényi szemléletét követve, először a valószínűségszámítás tanításának célját, tartalmát és módszerét tárgyalom. Ezek után a fontosabb határérték tételek tanításáról, szemléltetéséről fejtem ki gondolataimat, konkrét hallgatói kísérletekkel alátámasztva véleményemet. A hallgatókkal manuálisan elvégeztetve a kísérleteket, sokszor számukra is meglepő, nemvárt eredmények adódnak, melyek magyarázata viszont adódik a megismert törvények alapján. (Például a hosszú vezetésre vagy az utolsó visszatérésre vonatkozó arcus sinus törvények, melyek szimulációs eredménye az alábbi ábrán látszik.)



2.1. ábra. Szimuláció arc sin törvényre, $n = 60$ esetére

A valószínűségszámítás talán két legfontosabb aszimptotikus tétele a Nagy számok törvénye(i) és a Centrális határeloszlás tétele. A nagy számok gyenge törvényét nem szemléltetjük, hiszen a konvergencia nem trajektóriánkénti. Viszont a relatív gyakoriság vizsgálatára végezzünk a hallgatókkal ténylegesen kísérleteket, például az egyszerű érmedobás kísérletet. Ez azért nagyon fontos, mert egyrészt ez mutatja a valóság tényleges (néha meglepő) viselkedését, másrészt a számítógépen generált véletlen számok elméletileg nem tekinthetők független, azonos eloszlású valószínűségi változók realizációjának. A nagy számok törvényeinek megértése több okból is nagyon fontos. Megértésük jelentőségét elsődlegesen az adja, hogy a valószínűség tapasztalati fogalmát köti össze az axiómákból felépített elmélettel. Másrészt a Monte Carlo szimulációval kapott eredmények elfogadásának elméleti megalapozását adják, végül, de nem utolsó sorban a statisztikai elemzésekben is kiemelkedő szerepet játszanak. Ezért ezen tételek és a hozzájuk kapcsolódó, megértésüket segítő egyéb tételek szemléltetése elengedhetetlen a jobb megértéshez. Az alábbi ábrán egy 100-as dobássorozat eredménye látható, továbbiak pedig (hosszabb sorozatok is) a dolgozatban.



2.2. ábra. Egy hallgató érmedobás-kísérletének eredménye $n = 100$-ra

3. fejezet

A leghosszabb szériák vizsgálata

A 3. fejezetben a vizsgálatok kiterjednek a független (ezen belül a leghosszabb fejszéria és a leghosszabb bármilyen széria esetére is, szabályos és nem szabályos érmét vizsgálva) valamint a nem független esetre is. Így Erdős-Révész [17] és Földes [24] aszimptotikus eredményeit fogom összevetni Schilling [50], Bloom [8] és Kopocinski [29] általam esetenként kiegészített és bizonyított rekurzív formuláival, valamint az elvégzett szimulációk eredményeivel.

Független kísérlet, szabályos érme esete

Ha a leghosszabb fejszéria nagyságát vizsgáljuk, az eloszlásfüggvényünk a következő, ahol $A_n(x)$ azon n hosszúságú sorozatok száma, amelyekben a leghosszabb fejszéria nem haladja meg x-et.

$$F_n(x) = P(R_n \leq x) = \frac{A_n(x)}{2^n}.$$

A feladat tehát az $A_n(x)$ értékeinek a meghatározása. Schilling [50] nyomán kapjuk az alábbi rekurzív formulát

$$A_n(x) = \begin{cases} \sum_{j=0}^{x} A_{n-1-j}(x), & \text{ha } n > x, \\ \\ 2^n, & \text{ha } 0 \leq n \leq x. \end{cases}$$

A leghosszabb fejszéria nagyságának, R_n-nek aszimptotikus viselkedését Földes Antónia [24] alábbi tétele alapján írhatjuk le:

Tétel: Valamennyi egész k esetén

$$P\left(R_n - \left[\frac{\log n}{\log 2}\right] < k\right) = \exp\left(-2^{-\left(k+1-\left\{\frac{\log n}{\log 2}\right\}\right)}\right) + o(1),$$

ahol $[a]$ jelöli az egészrészét a-nak és $\{a\} = a - [a]$, a törtrésze. $\square$

A leghosszabb bármilyen (akár írás, akár fej) széria hosszának alakulását vizsgálva azt kapjuk, hogy az eloszlásfüggvényünk az előző esetből egy egységgel jobbra való eltolással adódik, vagyis $F_n'(x) = F_{n-1}(x-1)$. (Ezt a [28] publikációban bizonyítom.) Ennek felhasználásával az aszimptotikus tételünk pedig a következőre módosul

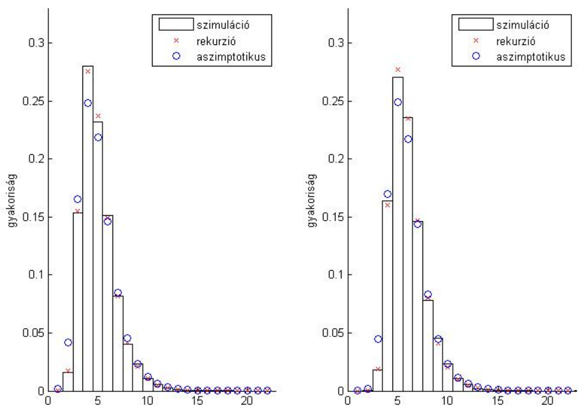
Tétel: Valamennyi egész k esetén

$$P\left(R_n' - \left[\frac{\log(n-1)}{\log 2}\right] < k\right) = \exp\left(-2^{-\left(k-\left\{\frac{\log(n-1)}{\log 2}\right\}\right)}\right) + o(1),$$

ahol $[a]$ jelöli az egészrészét a-nak és $\{a\} = a-[a]$, a törtrésze. $\square$

A dolgozatban bemutatott ábrákon jól látható, hogy a 20000-szer ismételt kísérletsorozat (szimuláció) eredményei milyen jól megközelítik a pontos (rekurzív) illetve nagy n esetén a közelítő (aszimptotikus) értékeket. Az egymás mellett párbaállított grafikonokon jól látszik a már említett eredmény, miszerint

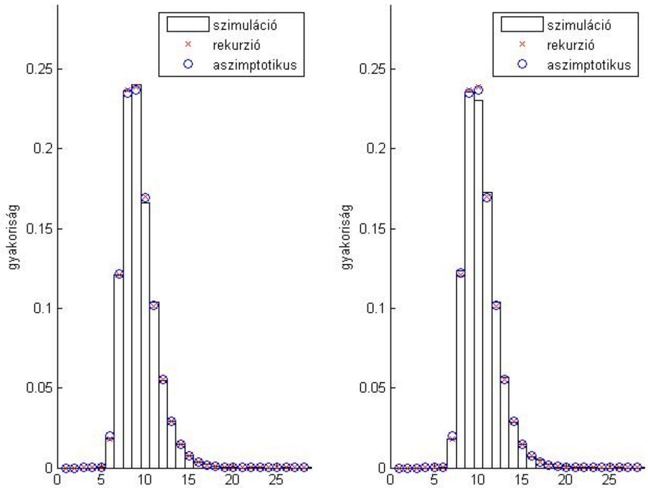
R'_n az R_n-ből 1 egységgel jobbra való eltolással adódik. Tehát a leghosszabb bármilyen széria esete kezelhető, vizsgálható a leghosszabb fejszériára megismert összefüggésekkel a megfelelő transzformációval. A szimuláció a MATLAB programmal készült 20.000 ismétlésszámmal. Az alkalmazott számítógép paraméterei pedig a következők: INTEL Core Quad Q9550 processzor, 4Gb, DDR3 memória. Tapasztaljuk, hogy bár a rekurzió adja a pontos eredményt, nagy n esetén gyakorlatilag nem tudjuk használni, hiszen a futási idők rohamos növekedése gátat szab az alkalmazhatóságnak. Ezekben az esetekben az aszimptotikus tételek fogják szolgáltatni a jól közelítő eredményeket.



Leghosszabb fejszéria
$p = 0.5, n = 50.$

Leghosszabb széria
$p = 0.5, n = 50.$

3.1. ábra. Leghosszabb szériák, szabályos érme, rövid sorozat esetén



Leghosszabb fejszéria $p = 0.5, n = 1000.$

Leghosszabb széria $p = 0.5, n = 1000.$

3.2. ábra. Leghosszabb szériák, szabályos érme, hosszú sorozat esetén

Speciális esetként kétféle módon is bizonyítom az [58]-ban $b_n(k)$-ra felírt rekurzív formulát, ahol $b_n(k)$ jelenti azt, hogy n dobásból hányszor lesz a leghosszabb bármilyen széria (akár fej, akár írás) pontosan k hosszúságú. Ezek a [28] publikációban szerepelnek.

Független kísérlet, nem szabályos érme esete

Most a fejdobás valószínűsége, p értéke bármilyen valós szám lehet a $(0, 1)$ intervallumból. (Speciális esetként magában foglalhatja a szabályos érme esetét is.) Kérdés, hogy a szabálytalanság ténye milyen hatással van a leghosszabb fej-, illetve leghosszabb bármilyen széria alakulására. Ebben az esetben is vizsgáljuk először a leghosszabb fejszéria alakulását. Schilling [50] alapján tekintsük azon n hosszúságú fej-írás sorozatokat, amelyekben k db fej van. Ezek közül jelentse $C_n^{(k)}(x)$ azon sorozatok számát, amelyekben legfeljebb x fej következik egymás után. Az adott jelölésekkel az eloszlásfüggvényünk a következő lesz:

$$F_n(x) = P(R_n \leq x) = \sum_{k=0}^{n} C_n^{(k)}(x) p^k q^{n-k}.$$

Feladatunk tehát a $C_n^{(k)}(x)$-re rekurzív formula megadása. Schilling nyomán ez a következő lesz, melynek bizonyítását is elvégeztem és szerepel a [19] publikációban.

$$C_n^{(k)}(x) = \begin{cases} \sum_{j=0}^{x} C_{n-1-j}^{(k-j)}(x), & \text{ha} \quad x < k < n, \\ \binom{n}{k}, & \text{ha} \quad 0 \leq k \leq x, \\ 0, & \text{ha} \quad x < k = n. \end{cases}$$

Az aszimptotikus viselkedés leírását Gordon-Schilling-Waterman [26] adja a következő tétellel.

Tétel: Legyen $\mu(n) = -\frac{\log n}{\log p}, q = 1 - p$ és legyen W olyan, hogy teljesüljön rá: $(P(W \leq t) = \exp(-\exp(-t)))$, ekkor t-ben egyenletesen:

$$P\left(R_n - \mu(qn) \leq t\right) - P\left(\left[\frac{W}{-\log p} + \{\mu(qn)\}\right] - \{\mu(qn)\} \leq t\right) \to 0,$$

ha $n \to \infty$ és ahol $[a]$ jelenti az egészrészét a-nak és $\{a\} = a - [a]$ az a törtrésze. $\square$

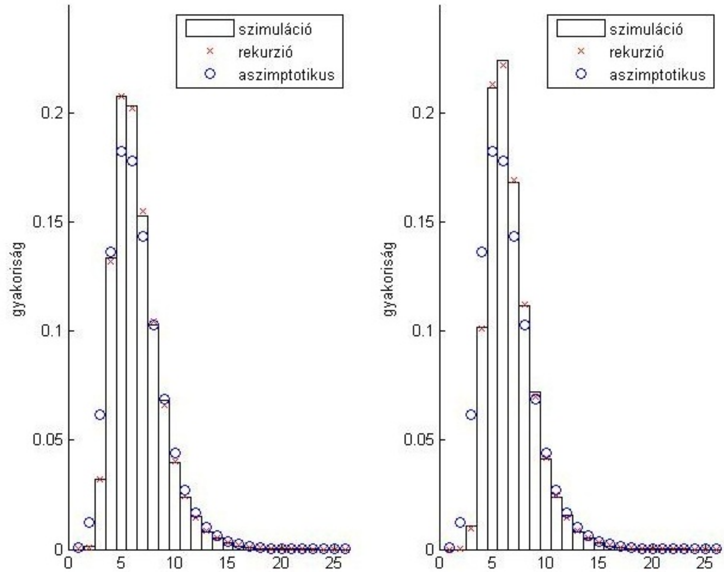
Speciálisan, ha $p(n,k)$ annak a valószínűsége, hogy n dobásból a leghosszabb fejszéria pontosan k hosszúságú, erre Kopocinski [29]-ban két formulát is ad, melyek bizonyításait a dolgozatban és a [19] publikációban elvégeztem.

A leghosszabb bármilyen széria esetét vizsgálva, a nem független kísérletnél kapott eredményeket tudjuk felhasználni a rekurzió felírásához. Az aszimptotikus viselkedést vizsgálva Muselli [37] tételét használhatjuk, melyben $V_n(p)$ jelöli annak a valószínűségét, hogy a leghosszabb széria n dobás esetén a fejekből adódik:

Tétel:

$$\lim_{n\to\infty} V_n(p) = \begin{cases} 0, & \text{ha} \quad 0 \le p < 1/2, \\ 1, & \text{ha} \quad 1/2 < p \le 1. \end{cases}$$

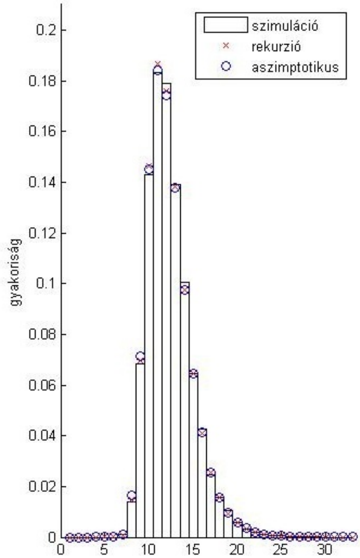
A szemléltetést a szabályos esethez hasonlóan végeztem a megfelelően párba állított grafikonokkal. A szimulációkat is ugyanolyan tárgyi és szoftver eszközökkel végeztem, a p értéke (fejdobás valószínűsége) pedig $0,6$. Látható, hogy kis n esetén az aszimptotikus eredmények távol esnek a pontos (rekurziós) értékektől. Ekkor a rekurzió még rövid futásidővel jól számolható. Nagy n esetén a rekurziós algoritmus egyre lassul, számolásra nem használható. Az aszimptotikus eredmények viszont n növelésével egyre közelebb kerülnek hozzájuk. Muselli tételének numerikus alátámasztását adja, hogy nagy n esetén ($n = 1000$) az R_n és R'_n eloszlása közel azonos, mely szintén leolvasható az ábrákról.



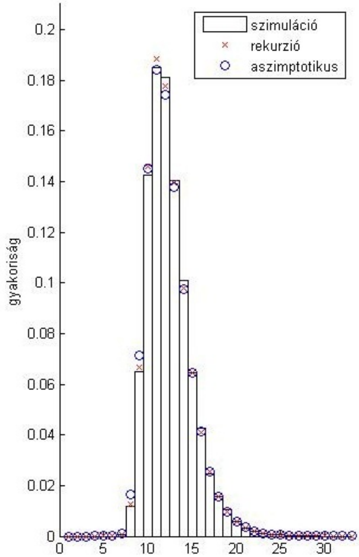
Leghosszabb fejszéria $p = 0.6, n = 50.$

Leghosszabb széria $p = 0.6, n = 50.$

3.3. ábra. Leghosszabb szériák, szabálytalan érme, rövid sorozat esetén



Leghosszabb fejszéria
$p = 0.6, n = 1000.$



Leghosszabb széria
$p = 0.6, n = 1000.$

3.4. ábra. Leghosszabb szériák, szabálytalan érme, hosszú sorozat esetén

Nem független kísérlet

Ha egy halmaz kétféle tulajdonságú elemet tartalmaz, az egyikből m, a másikból k db-ot, mi a valószínűsége annak, hogy az $m+k$ elemet sorban egymás után kihúzva visszatevés nélkül, lesz t hosszúságú széria, vagyis akármelyik tulajdonságú elemből legalább t következik egymás után?
Az egyszerűség kedvéért a két tulajdonságú elem legyen piros (m db) és fekete (k db), és jelöljük a keresett valószínűséget $P_t(m,k)$-val. Meghatározásához vizsgáljuk az esemény komplementerének, vagyis annak a valószínűségét, hogy nincs t hosszúságú széria az $m+k$ elem sorozatában. $\overline{P_t}(m,k)$-nek klasszikus képlettel való kiszámításához vizsgáljuk először az összes elemi esemény számát: az $m+k$ elemet kell sorbarendezni, melyek között az m db és a k db azonos típusúak. Az ilyen sorozatok száma nem más mint: $\binom{m+k}{m}$.
Ezek után a keresett hányados számlálójának meghatározásához össze kell számlálnunk azon sorozatok számát, amelyben nincs t hosszúságú széria. Jelöljük ezt $C_t(m,k)$-val, melyre Bloom vizsgálatai nyomán az alábbi, általam bizonyított és a [20] publikációban közölt rekurzív formulát kapjuk.

Állítás: Ha $m = k = 0$, akkor definíció szerint legyen $C_t(0,0) = 1$. Ha m vagy k negatív, akkor pedig definíció szerint $C_t(m,k) = 0$.

$$C_t(m,k) = \sum_{i=0}^{t-1} C_t(m-1,k-i) - \sum_{i=1}^{t-1} C_t(m-t,k-i) + e_t(m,k),$$

ahol tehát $C_t(m,k)$ jelenti az m db piros és k db fekete elem olyan sorbarendezéseinek a számát, ahol nincs t hosszúságú széria ($t \geq 2$),

valamint $e_t(m,k) = \begin{cases} 1, & \textit{ha } m=0 \textit{ és } 0 \leq k < t, \\ -1, & \text{ha } m=t \text{ és } 0 \leq k < t, \\ 0, & \textit{különben.} \end{cases}$

A $C_t(m,k)$ értékeire Bloom egy olyan (szintén általam bizonyított és [20] publikációban közölt) formulát is ad, mely az

m, k és t értékétől függetlenül mindig 6 tagból áll:

Állítás: $t \geq 2$ esetén

$$C_t(m,k) = C_t(m-1,k) + C_t(m,k-1) - C_t(m-t,k-1) - \\ -C_t(m-1,k-t) + C_t(m-t,k-t) + e_t^*(m,k),$$

$$\textit{ahol } e_t^*(m,k) = \begin{cases} 1, & \textit{ha } m = k = 0, \textit{ vagy } m = k = t, \\ -1, & \textit{ha } m = 0 \textit{ és } k = t \textit{ vagy } m = t \textit{ és } k = 0, \\ 0, & \textit{különben.} \end{cases}$$

Peremfeltételeink pedig ugyanazok, mint az előző Állításnál.

4. fejezet

A Szentpétervári paradoxon

A dolgozat utolsó fejezetében a leghosszabb szériák témakörrel kapcsolatos gyakorlati alkalmazásokra, illetve ezek hallgatókkal történő megismertetésének szükségességére hívom fel a figyelmet. Részletesen tárgyalom a Szentpétervári Paradoxon problémakört a történeti fejlődésével együtt, melyben kiegészítéseket teszek Csörgő Sándor [12] alapmunkájához. Ezt azért tartom fontosnak, mert egyrészt a diákjaim körében a pénzügyi, gazdasági alkalmazások megismerése a későbbi szakmai életükben is hasznos lehet (hiszen a Szolnoki Főiskola hallgatóiként gazdasági képzésben vesznek részt), másrészt a történeti háttér megismerése - a benne lévő tudománytörténeti érdekességekkel - a matematika iránt kevésbé érdeklődő hallgató számára is izgalmas lehet, felkeltheti az érdeklődést a téma szakmai része iránt is. A napjainkban oly sokat emlegetett gazdasági válsággal is összefüggésbe hozhatóak az eredmények, így a téma aktualitása is vitathatatlan. Részletesebben például [27], [60] és [15] tárgyal érdekes pénzügyi alkalmazásokat. A paradoxon szimulációs eredményeinek összevetése a számított értékekkel szintén a dolgozatban megtalálható. A témával a [30] és a [31] publikációban foglalkozom.

PhD Thesis

Comparative analysis of recursive formulas, asymptotic results and Monte Carlo simulation for Education

Józsefné Libor dr.

Supervisor: Dr. István Fazekas

University of Debrecen
Doctoral School of Mathematics and Computational Sciences
Debrecen, 2011.

Introduction

My choice of topic partly originates from the continuous decline in the results of college students that can be observed for several years by now, and is a general trend in higher education but is especially true for mastering scientific disciplines. On the other hand because of the continuously decreasing number of class hours and other reasons not mentioned in the current study there is little time and opportunity available – especially in terms of teaching of probability – to carry out or at least to demonstrate teaching experiments of acceptable quantity and quality. Therefore those methods and techniques allowing the students to get familiar with more concepts and see their practical application can have a positive effect on mastering the theoretical concepts.

In my study I present a method that helps to understand the concepts and techniques mentioned in the title, which can be a useful didactic tool for colleagues teaching in academic institutions. For the analysis of this topic my work focuses on a field from probability theory (the analysis of the longest runs), which can be easily understood by the students and can be linked to their everyday experiences and thus provide a way for easy comparison. There is no exact and closed expression for the distribution function describing the length of the longest runs. Thus for the discussion of this particular topic the differences and the applicability between the various methods becomes more obvious. The recursive expressions give exact values but they are not closed expressions and calculating the exact values after a greater number of elements can sometimes be problematic even when calculating with a computer. The asymptotic values become more accurate with the increase in the number of constituents (with an increasing n) however they only provide approximate values, whereas repeated studies of simulation experiments provide average results. Observing these differences provides a deeper understanding of the different terms, the applications of the different techniques for the topic (the longest runs) can be demonstrated appropriately. The new terms and definitions can be applied in other fields of mathematics by the students. The other reasons behind the choice of topic can be found in the introduction of the study.

1. Teaching Mathematics

As college education is based upon the knowledge gained in elementary and secondary schools I am going to briefly address the major changes in the teaching of mathematics on these levels of education during the last 50 years in my study. Although in various fields of mathematics the basic terminology, definitions, the introduction of computations can be based upon everyday observations and experiences to a great extent, however in the case of probably calculations our situation is a little more difficult. In the introduction of the article by Tibor Nemetz [38] the author writes the following: "Most of the time the students have vague understanding how to interpret an uncertain event, etc.; quite frequently their judgment on random, large scale phenomena is wrong or rather they cannot comprehend the existence or application of such laws." Furthermore, as Alfréd Rényi, [42] the founder of the Hungarian school of probability writes [?] in many cases even the instructors are reluctant to present these experiments. "Statistical principles can be demonstrated by data take from books and newspapers; however it has a greater effect on students if they obtain these results presented to them or, even better if the results originate from experiments performed by them. Some instructors do not agree with this as they fear that the experiments will not yield results that they expect as it can happen from the nature of these experiments. I don't think that this fear is justified and if the instructor understands probability calculus well, then he or she cannot end up in an uncomfortable situation. Naturally the instructor has

to react quickly as the evaluation of results, which even the instructor could not foresee is more difficult than the analysis of examples which were evaluated in advance by the instructor." Of course these experiments will provide further experiences not only to the students but to the instructor as well, which can be a very important point of view especially for the discussion of random events.
In higher education the general opinion of the instructors is that the knowledge of students' displays greater lack of knowledge and the general performance is dropping every year. Many institutions provide preparation courses and additional coaching courses to treat the problem; however I find that it is also just as important to understand the terms, definitions and get proficient with their application during preliminary education. My calculations clearly demonstrate the obvious fact that there is a direct relationship between theoretical knowledge and problem solving skills it is justified to expect that results will improve with the better understanding of definitions. We define a function or a special series with a recursive formula with defining the starting value (or values) and generally we provide a formula for calculating the subsequent values using the previous value(s) with various operations. Thus the process has two important components. First we need to define the starting value (values) which are the first elements of our recursive series. Then we need to supply the correspondence which demonstrates how the subsequent members are derived from the previous members of the series. It is important to keep in mind that recursive formulas always yield accurate results and they are not average or approximate values. The application of recursive formulas has one disadvantage and barrier at the same time: the calculation of the n^{th} element with an increasing name becomes complicated even with the application of a computer. Asymptotic behavior is a property that certain mathematical expressions demonstrate if the subsequent values of a series approach the values of a function closer and closer, but they never actually

reach it, even in an infinite number of steps. Therefore in case of large n the asymptotic values are so close to the real values that we can apply them with confidence if the real values cannot be defined accurately, or can only be defined in a difficult and complicated manner. The mathematical simulation is known as the Monte Carlo method. We can identify the average value of a random variable if we do not know, or if cannot or are not willing to perform complex calculations to define the distribution function. According to the law of large numbers if we supply a sufficient number of samples the resulting average value is going to be close to the unknown real value. Using simulation the quoted law can also be more comprehensible for the students. We can easily show that if we do not perform a sufficient number of repeated measurements we cannot obtain good results. However if we perform a sufficiently large (at least in the order of thousands) repeated measurement (or we perform them using a computer) then the resulting average values will be a really good approximation of the real values.

2. Teaching Probability

In this chapter following the approach of Rényi first I am going to identify the goals, contents and methods of the teaching of probability. Later I will express my views on the teaching of more important limit theorems, their demonstration supporting my point of view with well-defined student experiments. Having the students manually perform the experiments often yields surprising, unexpected results, which can be explained by the laws that we are already familiar with. (For example the arcus sinus laws which are relevant for long tracking and the last return, where the simulation results can be observed in the figure below.)

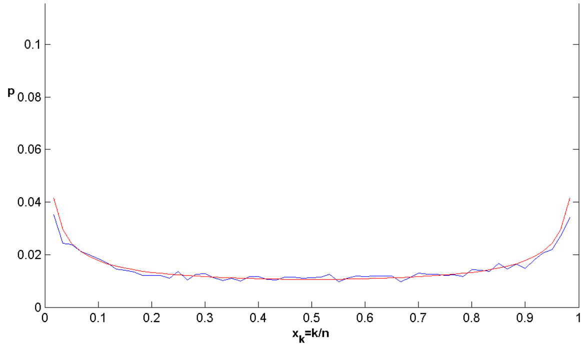


Figure 4.1: Simulation of arc sin law, if $n = 60$

Probably the two most important asymptotic theorems of probability are the law of large numbers and the Central limit theorem. We do not demonstrate the weak theorem of the law of large numbers as the convergence is not based upon trajectories. However in order to demonstrate the relative frequency we should have the students to carry out some experiments, such as tossing a coin. This is very important as from one point it demonstrates reality's "real" (sometimes surprising) behavior and on the other hand random numbers generated by the computer theoretically cannot be treated as the manifestation of independent probability variables with the same distribution. The understanding of the laws of large numbers is important from many aspects. The primary significance of this understanding comes from the fact that it provides a link between the experimental concept of probability and the theories constructed from axioms. Also they provide a theoretical foundation to accept the results of a Monte Carlo simulation and, lastly, they have an exceptional role in statistical analysis. Therefore the demonstration of these and the related theorems, their understanding and demonstration is essential to provide good overall understanding. The figure below shows the result of coin tossing if $n = 100$ and other (longer series) will be provided in the study.

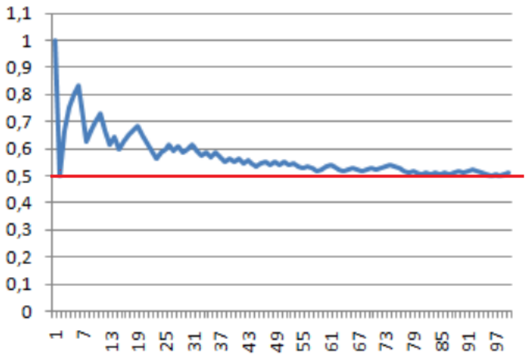


Figure 4.2: Result of coin tossing if $n = 100$

3. The study of the longest runs

In Chapter 3. the analysis is extended to independent (and with this to the case of the longest runs of heads and to the longest runs of any kind, studying both fair and non-fair coins) and related cases both. Thus I am going to compare the asymptotic results of Erdős-Révész [17] and Földes [24] with the results of Schilling [50], Bloom [8] and Kopocinski [29], which contain recursive formulas sometimes extended and proven by me and with the results of the performed simulations.

Independent experiment, fair coin case

If we analyze the magnitude of the longest runs of heads, our distribution function is the following, where $A_n(x)$ represents the series with n members in which the longest runs of heads does not exceed x.

$$F_n(x) = P(R_n \leq x) = \frac{A_n(x)}{2^n}.$$

Therefore our goal is to identify the values of $A_n(x)$. According to Schilling [50] we get the following recursive formula:

$$A_n(x) = \begin{cases} \sum_{j=0}^{x} A_{n-1-j}(x), & \text{if } n > x, \\ 2^n, & \text{if } 0 \leq n \leq x. \end{cases}$$

We can describe the asymptotic behavior of the magnitude of the longest runs of heads, Rn according to the following theorem by Antónia Földes [24]:

Theorem: For each integer k

$$P\left(R_n - \left[\frac{\log n}{\log 2}\right] < k\right) = \exp\left(-2^{-\left(k+1-\left\{\frac{\log n}{\log 2}\right\}\right)}\right) + o(1),$$

where $[a]$ denotes the integer part of a and $\{a\} = a - [a]$ the fractional part of a. $\square$

Studying the longest runs of any kind (either head or tails) we find that the distribution function compared to the previous case has shifted one unit to the right, or in other words $F'_n(x) = F_{n-1}(x-1)$. (I prove this in this publication [28].) Using this our asymptotic theorem can be modified to yield the following:

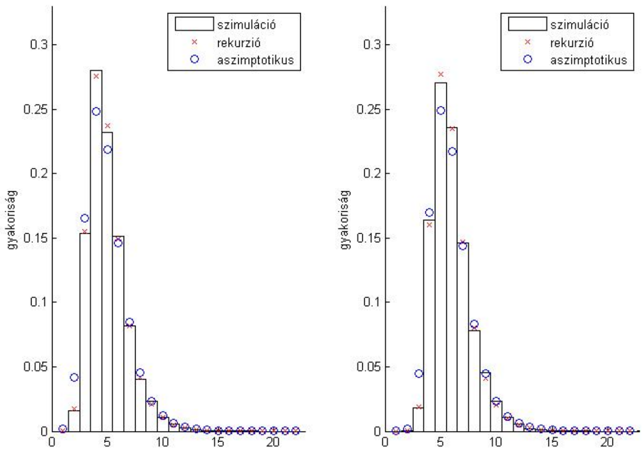
Theorem: For each integer k

$$P\left(R'_n - \left[\frac{\log(n-1)}{\log 2}\right] < k\right) = \exp\left(-2^{-\left(k-\left\{\frac{\log(n-1)}{\log 2}\right\}\right)}\right) + o(1),$$

where $[a]$ denotes the integer part of a and $\{a\} = a - [a]$ the fractional part of a. $\square$

In the figures displayed in the study it can be clearly seen that how well the results of an experiment repeated (simulated) 20000 times approximate the accurate (recursive) and in case of a large n the approximate (asymptotic) values. The figures presented next to each other clearly demonstrate the results described earlier, according to which R'_n can be derived from R_n

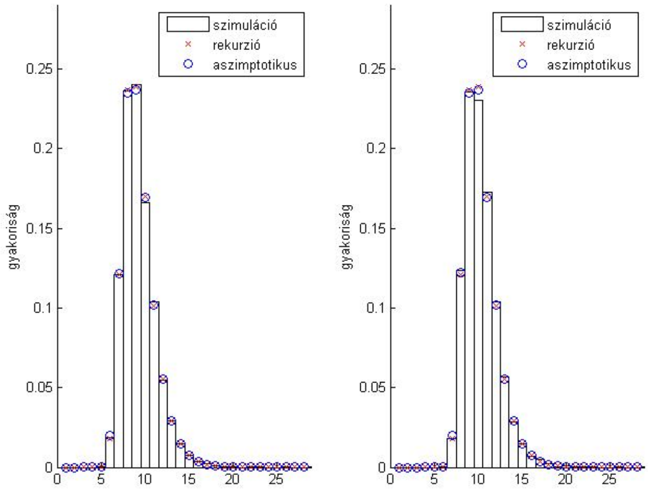
with offsetting them by 1 unit to the right. Therefore the problem of the longest runs of any kind can be treated and analyzed with the same expressions used for studying the longest runs of heads with applying the appropriate transformation. The simulation was done with MATLAB software repeated for 20000 times. The parameters of the computer applied are the follow: INTEL Core Quad Q9550 processor, 4Gb, DDR3 RAM. We have noticed that although the recursive formula does provide the accurate result, in case of a large n we practical application is limited as the rapid increase of the run time limits the application. In these cases the asymptotic theorems will provide the approximate results.



Longest head run $p = 0.5, n = 50.$

Longest run (whatever) $p = 0.5, n = 50.$

Figure 4.3: Longest runs in case of fair coins, short series



Longest head run $p = 0.5, n = 1000.$ Longest run (whatever) $p = 0.5, n = 1000.$

Figure 4.4: Longest runs in case of fair coins, long series

As a special case I prove the recursive expression describing $b_n(k)$ with two methods in [58], where $b_n(k)$ represents that out of n tosses how many times is either longest runs (either heads or tails) going to be exactly k long. These are described in the [28] publication.

Independent experiment, non-fair coin case

In this case the probability of heads, p, can any real number from the $(0, 1)$ interval. (As a special case this includes the case of a fair coin also.) The question is that what is the effect of non-fairness on the longest runs of heads or series of any kind. Let us first look at the analysis of the longest runs of heads.

According to Schilling [50] let us study those series of heads and tails which have n members, out of which k are heads. From among these let $C_n^{(k)}(x)$ represent the number of those series having maximum number x of heads following each other. With the given notations our distribution function will take the following form:

$$F_n(x) = P(R_n \leq x) = \sum_{k=0}^{n} C_n^{(k)}(x) p^k q^{n-k}.$$

Our goal is to provide a recursive formula for $C_n^{(k)}(x)$. According to Schilling the result will be the following, which I have proven and is available in the following publication [19].

$$C_n^{(k)}(x) = \begin{cases} \sum_{j=0}^{x} C_{n-1-j}^{(k-j)}(x), & \text{ha} \quad x < k < n, \\ \binom{n}{k}, & \text{ha} \quad 0 \leq k \leq x, \\ 0, & \text{ha} \quad x < k = n. \end{cases}$$

The description of the asymptotic behavior is provided by Gordon-Schilling-Waterman [26] with the following theorem.

Theorem: Let $\mu(n) = -\frac{\log n}{\log p}, q = 1 - p$ and let W such that, $(P(W \leq t) = \exp(-\exp(-t)))$, and thus in $t$uniformly:

$$P\left(R_n - \mu(qn) \leq t\right) - P\left(\left[\frac{W}{-\log p} + \{\mu(qn)\}\right] - \{\mu(qn)\} \leq t\right) \to 0,$$

if $n \to \infty$. $\square$

As a special case if $p(n, k)$ is the probability that from n tosses the length of the longest runs of heads is exactly k, then Kopocinski in [29] provides two expressions, which I have already proven in the study and in the [19] publication.

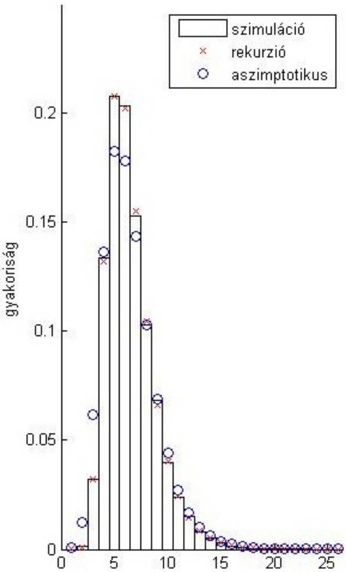
Studying the longest runs of any kind we can use the results obtained in the non-independent case to describe the recursion.

To study the asymptotic behavior we can use the theorem of Muselli [37], where $V_n(p)$ notes the probability that the longest runs out of n tosses can be derived from the heads:

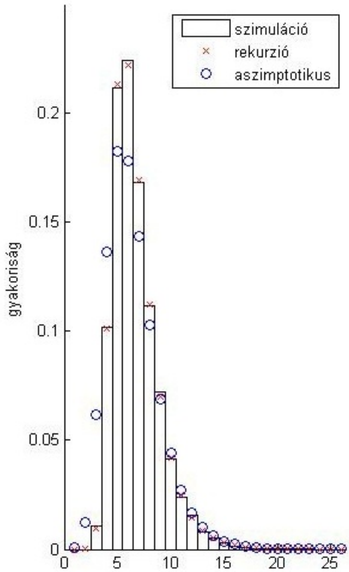
Theorem:

$$\lim_{n\to\infty} V_n(p) = \begin{cases} 0, & \text{if} \quad 0 \le p < 1/2, \\ 1, & \text{if} \quad 1/2 < p \le 1. \end{cases}$$

I provide the demonstration similarly to the fair cases with the respective figures organized in pairs. I performed the simulations with the same parameters and software, with 0.6 as the value of p (the probability of heads) . It can be seen that for small values of n the asymptotic results are far from the accurate (recursive) values. For these cases the recursion can be calculated with short run times accurately. For large values of n the recursive algorithm becomes slower and cannot be used for computations. However the asymptotic results approach results obtained from recursive calculations with the increase of n. The numerical proof of Muselli's theorem provides that for large n ($n = 1000$) the distribution of R_n and R'_n is almost identical, which can be also concluded from the graphs.

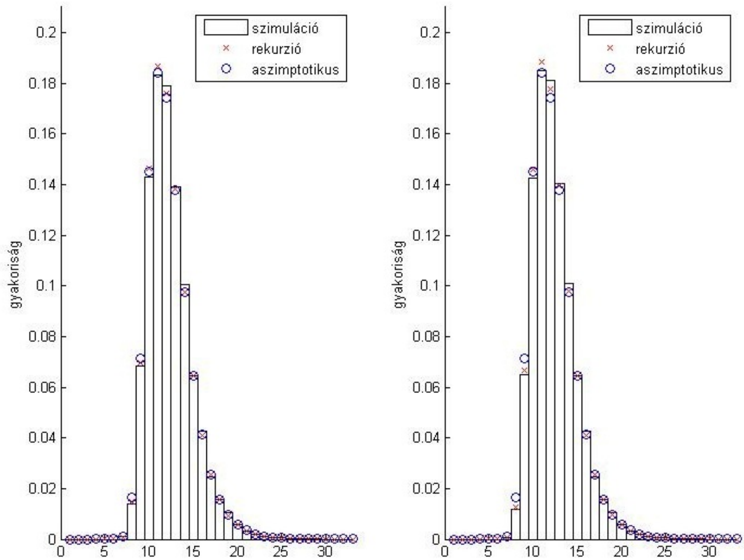


Longest head run
$p = 0.6, n = 50.$



Longest run (whatever)
$p = 0.6, n = 50.$

Figure 4.5: Longest run, in case of biased coin and short series



Longest head run
$p = 0.6, n = 1000.$

Longest run (whatever)
$p = 0.6, n = 1000.$

Figure 4.6: Longest run, in case of biased coin and long series

Not independent experiment

If a set has members from two different kind, m pieces from the one and k pieces from the other kind, then pulling a series of $m+k$ pieces without replacement what is the probability of having series of length t, or in other words, having at least t pieces from the same kind following each other? To keep thing simple let us mark the elements from two different kinds with red (m pieces) and black (k pieces) and let us represent the studies probability with $P_t(m,k)$. To find out the value let us study the complementary event, the probability that there is no series of length t in the series of $m+k$ pieces. To calculate $\overline{P_t}(m,k)$ with a classic expression let us study the total number of simple events: we have to arrange $m+k$ pieces in order where m pieces and k pieces are from the same kind respectively. The number of such series equals: $\binom{m+k}{m}$. Following this to identify the numerator of the fraction in question we need to sum the number of those series, which do not contain any series of length t. Let us represent this with $C_t(m,k)$, where according to the results of Bloom the following recursive formula is obtained that I have proven in [20] publication.

Statement: If $m=k=0$ then let us define $C_t(0,0)=1$. If either m or k is negative then let us define $C_t(m,k)=0$.

$$C_t(m,k)=\sum_{i=0}^{t-1}C_t(m-1,k-i)-\sum_{i=1}^{t-1}C_t(m-t,k-i)+e_t(m,k),$$

where $C_t(m,k)$ denotes the number of permutations of m red and k black members without having series of length t ($t\geq 2$), and

$$e_t(m,k)=\begin{cases}1, & \textit{if } m=0 \textit{ and } 0\leq k<t,\\ -1, & \text{if } m=t \text{ and } 0\leq k<t,\\ 0, & \textit{elsewhere.}\end{cases}$$

For the values of $C_t(m,k)$ Bloom has provided a formula (that I have proven and published in [20]) that always consists of 6 terms independent of the values of m, k and t.:

Statement: where $t \geq 2$

$$C_t(m,k) = C_t(m-1,k) + C_t(m,k-1) - C_t(m-t,k-1) - \\ -C_t(m-1,k-t) + C_t(m-t,k-t) + e_t^*(m,k),$$

$$\textit{where } e_t^*(m,k) = \begin{cases} 1, & \textit{if } m=k=0, \textit{ or } m=k=t, \\ -1, & \textit{if } m=0 \textit{ and } k=t \textit{ or } m=t \textit{ and } k=0, \\ 0, & \textit{elsewhere.} \end{cases}$$

Our limit values are identical to those mentioned in the previous Statement.

4. The Saint Petersburg Paradox

In the last chapter of the study I would like to draw the attention to the practical problems related to the field of the longest runs and the importance of introducing them to the students. I provide a detailed analysis of the problems related to the Saint Petersburg Paradox with its historical development where I add to the fundamental work of Sándor Csörgő [12]. I find this very important as from one point getting my students acquainted with the financial and economical applications can be important in their following careers (as part of the Szolnoki Főiskola their education includes economical training also) and from another point getting to know the historical background - including the historical curiosities included - can be exciting for students less interested in mathematics, it can draw the attention to the topic's professional part also. The results can also be related to the nowadays frequently mentioned economical crisis and thus the topic's relevance is inevitable. In more details for example [27], [60] and [15] analyzes interesting economical applications. The comparison of the paradox' simulation results with calculated results can also be found in the study. I deal in more details with the topic in [30] and [31] publication.

Bibliography

[1] Aczel, A., Sounderpandian, J.: Complete Business Statistics. *McGraw Hill International Edition* (2006)

[2] Ambrus András: Bevezetés a matematikadidaktikába, *Egyetemi Jegyzet, ELTE Eötvös Kiadó, Budapest* (1995)

[3] Arazi, B.: Handwriting identification by means of run-length measurements. *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics,* **7**, *12* (1977) pp. 878-881.

[4] Berde, É.; Petró K.: A különféle hasznosságfogalmak szerepe a közgazdaságtanban. *Közgazdasági Szemle, XLII. évf.* (1995) 5. sz. pp. 511-529.

[5] Bernoulli, D.: Exposition of a New Theory on the Measurement of Risk. (L. Sommer fordítása) *Econometrica, Vol. 22, No. 1* (1954) pp. 23-36.

[6] Bernstein, P.: Against the Gods: The Remarkable Story of Risk. *Wiley* (1998)

[7] Binswanger, K.; Embrechts, P.: Longest runs in coin tossing. *Insurance Math. Econom.* **15**, *no. 2-3* (1994) pp. 139-149.

[8] Bloom, D.M.: Probabilities of Clumps in a Binary Sequence. *Mathematics Magazine,* **69**, *no.5* (1996)

[9] Breiman, L.: Optimal gambling systems for favorable games. *Proc. Fourth Berkeley Symp. Math.Statist. Prob., Vol, 1* (1961) pp. 65-78.

[10] Brenyó, M.: Valószínűleg nem véletlen. *A matematika tanítása* (2000. Január) pp. 3-6.

[11] Császár, Á.: Varga Tamás élő matematikája. *Matematikatanár-képzés - matematikatanár-továbbképzés I.* (1993) pp. 7-15.

[12] Csörgő, S.: A szentpétervári paradoxon. *Polygon, V. kötet 1. szám* (1995) pp. 19-79.

[13] Csörgő, S.; Simons, G.: On Steinhaus' Resolution of the St. Petersburg Paradox. *Probability and Mathematical Statistics, Vol. 14, Fasc. 2* (1993) pp. 157-172.

[14] Csörgő, S.; Simons, G.: A strong law of large numbers for trimmed sums, with applications to generalized St. Petersburg games. *Statistics & Probability Letters Vol. 26, issue 1* (1996) pp. 65-73.

[15] Csörgő, S.; Simons, G.: Pooling strategies for St. Petersburg gamblers. *Bernoulli 12, 6* (2006) pp. 971-1002.

[16] Dutka, J.: On the St. petersburg Paradox. *Archive for History of Exact Sciences, Vol. 39, Number 1.* pp. 13-39.

[17] Erdős, P.; Révész, P.: On the length of the longest head-run. *Topics in information theory Second Colloq., Keszthely* 1975. pp. 219-228. *Colloq. Math. Soc. Janos Bolyai, 16* (1977)

[18] Fazekas, I.: Valószínűségszámítás. *Kossuth Egyetemi Kiadó, Debrecen* (2003)

[19] Fazekas, I.; Karácsony, Zs.; Libor, J-né.: Longest run in coin tossing. Comparison of recursive formulae, asymptotic theorems, computer simulations. *Acta Universitatis Sapientiae, Mathematica 2, 2* (2010) pp. 215-228. MathSciNet (MR2748470) által referált

[20] Fazekas, I.; Karácsony, Zs.; Libor, J-né.: A leghosszabb szériák vizsgálata. *Alkalmazott Matematikai Lapok, 27 Budapest* (2010) pp. 135-156. MathSciNet által referált

[21] Fazekas, I.; Tómács, T.: A valószínűségszámítás szemléletes oktatásáról. *A matematika tanítása* (1996. Szeptember)

[22] Feller, W.: Note on the Law of Large Numbers and "Fair" Games. *Annals of Mathematical Statistics, Vol. 16, Num. 3* (1945) pp. 301-304.

[23] Feller, W.: Bevezetés a valószínűségszámításba és alkalmazásaiba. *Műszaki Könyvkiadó, Budapest* (1978)

[24] Földes, A.: The limit distribution of the length of the longest head-run. *Period. Math. Hungar.* **10**, *no. 4,* (1979) pp. 301-310.

[25] Gergely, M.: A diákok már nem tudnak tankönyvet olvasni - nincs benne egy link sem. *http://nol.hu/tud-tech/a diakok mar nem tudnak tankonyvet olvasni - nincs benne egy link sem* (2010. február 13.)

[26] Gordon, L.; Schilling, M. F.; Waterman, M. S.: An extreme value theory for long head runs. *Probab. Theory Relat. Fields,* **72***, no. 2* (1986) pp. 279-287.

[27] Györfi, L.; Kevei, P.: St. Petersburg Portfolio Games. *Proceedings of Algorithmic Learning Theory 2009, R. Gavaldľa et al. (Eds.), Lecture Notes in Artificial Intelligence 5809* (2009) pp. 83-96.

[28] Karácsony, Zs.; Libor, J-né.: Longest run in coin tossing. Teaching recursive formulae, asymptotic theorems and computer simulations. *Teaching Mathematics and Computer Science, Debrecen* (megjelenésre elfogadva)

[29] Kopocinski, B.: On the distribution of the longest succes-run in Bernoulli trials. *Roczniki Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Seria III, Matematyka Stosowana XXXIV* (1991)

[30] Libor, J-né.: Financial and economic aspects of St. Petersburg Paradox. *Journal of Informatics and Mathematical Sciences Vol. 3 Number 3* (2011) pp. 211-220.

[31] Libor, J-né.: Some useful financial aspects of St Petersburg paradox. *Journal of Global Awareness (Bloomsburg University)* (Lektorálva, megjelenésre elfogadva) Cabell's Directory of Publishing Opportunities in Management and Marketing által referált folyóirat

[32] Lupton: The St. Petersburg Problem *Nature, Vol. 41, issue 1051, 1889.* pp. 165-166.

[33] Martin-Löf, A.: A limit theorem which clarifies the 'Petersburg paradox'. *Journal of Applied Probability 22* (1985) pp. 634-643.

[34] Metropolis, N.: The beginning of the Monte Carlo Method. *Los Alamos Science Special Issue* (1987) pp. 125-130.

[35] Metropolis, N.; Ulam, S.: The Monte Carlo Method. *Journal of the American Statistical Association, Vol. 44, No. 247* (1949. Szept.) pp. 335-341.

[36] de Montmort, P. R.: Essai d'Analyse. *(F.N. David fordítása) JOC/EFR August* (2007) (http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Extras/Montmort_essai.html)

[37] Muselli, M.: Useful inequalities for the longest run distribution. *Statist. Probab. Lett.* **46**, *no. 3* (2000) pp. 239-249.

[38] Nemetz, T.: Egy lehetőség valószínűségszámítási fogalmak bevezető szemléltetésére. *A matematika tanítása* (1970) pp. 143-149.

[39] Philippou, A. N.; Makri, F.S.: Longest success runs and Fibonacci-type polynomials. *The Fibonacci Quarterly* **23**, *Nov.* (1985) pp. 338-346.

[40] Pllana, S.: History of Monte Carlo Method. *http://stud2.tuwien.ac.at/ e9527412/*

[41] Rényi, A.: Valószínűségszámítás. *Tankönyvkiadó, Budapest* (1968)

[42] Rényi, A.: Ars Mathematica. *Typotex, Budapest* (2005) pp. 269-279. (Gondolatok a valószínűségszámítás tanításáról)

[43] Rényi, A.: Ars Mathematica. *Typotex, Budapest* (2005) pp. 46-64. (Dialógus a matematika alkalmazásairól)

[44] Rényi, A.: Ars Mathematica. *Typotex, Budapest* (2005) pp. 245-268. (A szerencsejátékok és a valószínűségszámítás)

[45] Révész, P.: Strong theorems on coin tossing. *Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Helsinki* (1978)

[46] Révész, P.: Mennyire véletlen a véletlen? *Akadémiai székfoglaló, Akadémiai Kiadó, Budapest* (1982)

[47] Rochowicz, J. A.: Learning Binomial Probability Concepts with Simulation, Random Numbers and a Spreadsheet. *Mathematics Department, Alvernia College, online submiision* (2005)

[48] Samarova, S. S.: On the asymptotic behaviour of the maximal sojourn time of an ergodic Markov chain in a fixed state. *Russian Math Surveys* **35** *(6)* (1980) pp. 103-104.

[49] Samuelson, P. A.: St. Petersburg Paradoxes: Defanged, Dissected, and Historically Described. *Journal of Economic Literature, Vol. XV* (1977) pp.24-55.

[50] Schilling, M. F.: The Longest Run of Heads. *The College Mathematics Journal, Vol. 21, no. 3* (1990) pp. 196-207.

[51] Schuster, E. F.: On overwhelming numerical evidence in the settling of Kinney's waiting time conjecture. *SIAM Journal of Statistical Computing,* **6** *(4)* (1985) pp. 977-982.

[52] Schwager, S. J.: Run probabilities in sequences of Markov-dependent trials. *Journal of the American Statistical Association,* **78** (1983) pp. 168-175.

[53] Sen, Z.: Statistical analysis of hydrologic critical droughts. *Journal of the Hydraulics Division* **106** *(HY1)* (1980) pp. 99-115.

[54] Stahl, I.: Teaching the Classics of Simulation to beginners. *Proceedings of the 2003 Winter Simulation Conference* (2003) pp. 1941-1951.

[55] Stahl, I.: Teaching Simulation to Business Students Summary of 30 Years' Experience *Proceedings of the 2007 Winter Simulation Conference* (2007) pp. 2327-2335.

[56] Steinhaus, H.: The so-called Petersburg Paradox. *Colloquium Mathematicum 2* (1949) pp. 56-58.

[57] Szalontai, T.: A matematika-didaktika időszerű kérdései. *http://zeus.nyf.hu/ szalonta/* (2008)

[58] Szászné Simon, J.: A sztochasztika középiskolai oktatása. *PhD értekezés, Debreceni Egyetem* (2005)

[59] Székely, J. G.: Paradoxonok a véletlen matematikájában. *Typotex, Budapest* (2004)

[60] Székely, J. G.; Richards, P.: The St. Petersburg Paradox and the Crash of High-Tech Stocks in 2000. *The American Statistician, August 2004. Vol. 58, No. 3* pp. 225-231.

[61] Vardi, I.: The Limiting Distribution of the St. Petersburg Game. *Proceedings of the American Mathematical Society Vol. 123, Number 9* (September 1995) pp. 2875-2882.

A szerző publikációi/Publications

A szerző referált publikációi/ Refereed publications

1. Libor Józsefné, Tómács Tibor: Rényi-Hajek inequality and its applications. *Annales Mathematicae et Informaticae, 33. Eger* (2006) pp. 141-149. Zentralblatt für Didaktik der Mathematik (Zbl 1135.60311) és a MathSciNet (MR2385473) által referált

2. Libor Józsefné: Megemlékezés Kőnig Dénesről. *Alkalmazott Matematikai Lapok 23, Budapest 2006/1* pp. 191-201. MathSciNet (MR2208225) által referált

3. Fazekas István; Karácsony Zsolt; Libor Józsefné: Longest run in coin tossing. Comparison of recursive formulae, asymptotic theorems, computer simulations. *Acta Universitatis Sapientiae, Mathematica 2, 2* (2010) pp. 215-228. MathSciNet (MR2748470) által referált

4. Fazekas István, Karácsony Zsolt, Libor Józsefné: A leghosszabb szériák vizsgálata. *Alkalmazott Matematikai Lapok, 27 Budapest* (2010) pp. 135-156. MathSciNet által referált

5. Karácsony Zsolt; Libor Józsefné: Longest run in coin tossing. Teaching recursive formulae, asymptotic theorems and computer simulations. *Teaching Mathematics and Computer Science, Debrecen* (2011) (Lektorálva, megjelenésre elfogadva) Zentralblatt für Didaktik der Mathematik által referált folyóirat

6. Libor Józsefné: Some Economic aspects of St Petersburg paradox. *Journal of Global Awareness (Bloomsburg University)* (Lektorálva, megjelenésre elfogadva) Cabell's Directory of Publishing Opportunities in Management and Marketing által referált folyóirat

Angol nyelvű, lektorált publikációk/ Peer-reviewed publications in English

1. Libor Józsefné: A brief history of probability. *Alföldi Tudományos Tájgazdálkodási Napok, Mezőtúr* (2006) ISBN 963 0608 17 0

2. Libor Józsefné; Madaras Lászlóné: Commemoration of Jenő Egerváry. *Alföldi Tudományos Tájgazdálkodási Napok, Mezőtúr* (2008) ISBN 963 0608 16 2

3. Libor Józsefné: Interesting questions in coin-tossing. *Budapest Business School Conference Volume, Budapest* (2009) pp. 119-225. ISBN 978 963 7159 31 2

4. Libor Józsefné: The St. Petersburg paradox and its economic aspects. *Tudomány Határok Nélkül, Szolnok* (2010) ISBN 978 963 87874 77

5. Libor Józsefné: Financial and economic aspects of St. Petersburg Paradox. *Journal of Informatics and Mathematical Sciences Vol. 3 Number 3*, (2011) pp. 211-220.(University of Delhi) ISSN 0975 5748

Magyar nyelvű, lektorált publikációk/ Peer-reviewed publications in Hungarian

1. Csák Zsuzsanna: Nonprofit szervezetek és marketing tevékenységük. *"Korszerű Kereskedelemért" Alapítvány évkönyve Szolnok* (1993) pp. 59-65.

2. Csák Zsuzsanna: A vezetői döntéshozatal és támogató rendszerei. *"Korszerű Kereskedelemért" Alapítvány évkönyve Szolnok* (1993) pp. 66-68.

3. Libor Józsefné: A vezetői döntéshozatal és az operációkutatás. *Szolnoki Főiskola Tudományos Közleményei, Economica II. Szolnok* (2000) pp. 259-265. ISSN 1585-6216

4. Libor Józsefné: Bevezetés az operációkutatásba. *Matlap, VII. Kolozsvár* (2003. február) pp. 43-48. ISSN 1224-3140

5. Libor Józsefné; Madaras Lászlóné: Az alkotó matematika nagy tudósa. *Szolnoki Főiskola Tudományos Közleményei, Economica Szolnok, 2008/2* pp. 112-118. ISSN 1585-6216

6. Libor Józsefné: Megemlékezés Gyires Béláról születésének 100. évfordulóján. *Műszaki Tudomány az észak-Alföldi régióban, Debrecen* (2009) pp. 191-194. ISBN 978 963 7064 21 0

7. Libor Józsefné: Az operációkutatás oktatásának szükségessége. *Magyar- és a Világ Tudománynapja Konferencia, Szolnoki Tudományos Közlemények VI. Szolnok* (2002) ISSN 1419-256X

8. Libor Józsefné: Mióta kiszámítható a kiszámíthatatlan? *Magyar- és a Világ Tudománynapja Konferencia, Szolnoki Tudományos Közlemények IX. Szolnok* (2005) ISSN 1419-256X

9. Libor Józsefné: A leghosszabb "szériák" vizsgálata. *Magyar- és a Világ Tudománynapja Konferencia, Szolnoki Tudományos Közlemények X. Szolnok* (2006) ISSN 1419-256X

10. Libor Józsefné: "Fényes Elek a magyar Marat" Megemlékezés születésének 200. évfordulóján. *Magyar- és a Világ Tudománynapja Konferencia, Szolnoki Tudományos Közlemények XI. Szolnok* (2007) ISSN 1419-256X

11. Libor Józsefné: Valószínűségszámítás és művészet?! *Magyar- és a Világ Tudománynapja Konferencia, Szolnoki Tudományos Közlemények XII. Szolnok* (2008) HU ISSN 2060-3002

12. Libor Józsefné; Madaras Lászlóné: A papíron tollal készített megoldás győzelme az elektronikus számítógép felett. *Magyar- és a Világ Tudománynapja Konferencia, Szolnoki Tudományos Közlemények XII. Szolnok* (2008) HU ISSN 2060-3002

13. Libor Józsefné: Megemlékezés Gyires Béláról születésének 100. évfordulóján. *Műszaki tudomány az Észak-Alföldi régióban, Mezőtúr* (2009) ISBN 978 963 7064 21 0

14. Libor Józsefné: A Szentpétervári Paradoxon és gazdasági vonatkozásai. *Magyar- és a Világ Tudománynapja Konferencia, Szolnoki Tudományos Közlemények XIV. Szolnok* (2010) HU ISSN 2060-3002

15. Libor Józsefné: Az automata, aki kávéból matematikai tételeket gyártott. *Magyar- és a Világ Tudománynapja Konferencia, Szolnoki Tudományos Közlemények XV. Szolnok* (2011) HU ISSN 2060-3002

Angol nyelvű konferencia-előadások/ List of conference talks in English

1. Libor Józsefné; Madaras Lászlóné: Dénes Kőnig. *Applied Mathematical Programming and Modelling, London* (2004)

2. Libor Józsefné: Dénes Kőnig, the father of the "Hungarian Method". *Veszprém Optimization Conference: Advanced Algorithms, Veszprém* (2004)

3. Libor Józsefné; Madaras Lászlóné: Alfréd Rényi. *Applied Mathematical Programming and Modelling, Madrid* (2006)

4. Fazekas István; Karácsony Zsolt; Libor Józsefné: Longest runs in coin tossing. Recursive formulae, asymptotic theorems, computer simulations. *Probability and Statistics with Applications, Debrecen* (2009)

5. Karácsony Zsolt; Libor Józsefné: Longest runs in coin tossing. Recursive formulae, asymptotic theorems, computer simulations. *8th International Conference on Applied Informatics, Eger* (2010)

6. Libor Józsefné: Using the longest run for the teaching of recursive formulae, asymptotic theorem and simulation. *History of Mathematics and Teaching of Mathematics, Szeged* (2010)

7. Libor Józsefné: Teaching foreign students in English in Hungary. *American Hungarian Educators Association 35th annual conference, Szeged* (2010)

8. Libor Józsefné: Longest runs in the teaching of recursive formula, asymptotic theorem and simulation. *73rd Annual Meeting of Institute of Mathematical Statistics, Göteborg* (2010)

Magyar nyelvű konferencia-előadások/ List of conference talks in Hungarian

1. Libor Józsefné; Madaras Lászlóné: Megemlékezés Kőnig Dénesről születésének 120. és halálának 60. évfordulóján. *Matematikát, fizikát és informatikát oktatók konferenciája (MAFIOK), Nyíregyháza* (2004)

2. Libor Józsefné; Madaras Lászlóné: Rényi Alfréd, a széles látókörű tudós. *Matematikát, fizikát és informatikát oktatók konferenciája (MAFIOK), Pécs* (2006)

3. Libor Józsefné: Összegző eredmények, kiegészítések a leghosszabb "sorozatok" témához. *Magyar Operációkutatási Társaság Országos konferenciája, Balatonőszöd* (2007)

4. Libor Józsefné; Madaras Lászlóné: A papírral és tollal történő megoldás versenye az elektronikus számítógéppel.

Matematikát, fizikát és informatikát oktatók konferenciája (MAFIOK), Kecskemét (2008)

5. Libor Józsefné: 90 éve született Rényi Alfréd, a magyar valószínűségszámítási iskola megalapítója. *Matematikát, fizikát és informatikát oktatók konferenciája (MAFIOK,) Szolnok* (2011)

Angol nyelvű oktatási segédanyagok, Szolnoki Főiskola kiadásában/ Teaching materials in English, published by College of Szolnok

1. Libor Józsefné: Business Mathematics II. *Szolnok, 2008. (108 oldal)*

2. Libor Józsefné: Statistics II. *Szolnok, elfogadott jegyzetterv, várható kiadás 2012.*

Magyar nyelvű oktatási segédanyagok, Szolnoki Főiskola kiadásában/ Teaching materials in Hungarian, published by College of Szolnok

1. Libor Józsefné; Madaras Lászlóné: Matematika távoktatási tanulási útmutató a 0. évfolyam számára. *Szolnok, 1994. 5-7., 11-13., 17-20., 24-25. oldalak*

2. Libor Józsefné: Távoktatási segédanyag a számítástechnika oktatásához, Norton Commander. *Szolnok, 1994. (18 oldal)*

3. Horváth Jenőné; Libor Józsefné; Madaras Lászlóné; Veres Dénes: Gazdasági Matematika I. feladatgyűjtemény. *Szolnok, 1997. 5-18., 145-147., 121- 144. és 209.-217. oldalak*

4. Horváth Jenőné; Libor Józsefné; Madaras Lászlóné: Tanulási útmutató a Gazdasági matematika I. c. tárgyhoz. *Szolnok, 1997. 5-12., 73-80., oldalak*

5. Horváth Jenőné; Libor Józsefné; Madaras Lászlóné: Tanulási útmutató a Gazdasági matematika II. c. tárgyhoz. *Szolnok, 1998. 9-13., 55-59., oldalak*

6. Bősz Ivett; Dudás Péter; Hanich József; Libor Józsefné; Madaras Lászlóné: Operációkutatási esettanulmányok. *Szolnok, 1998. 81 oldal a kötet 5 fejezetében*

7. Hanich József; Libor Józsefné: Operációkutatás főiskolai jegyzet. *Szolnok, 2000. 6-35., 102-215., oldalak*

8. Hanich József; Libor Józsefné: Operációkutatás feladatgyűjtemény. *Szolnok, 2000. 5-20., 59-124., 125-129., 140-166. oldalak*

9. Hanich József; Libor Józsefné; Operációkutatás tanulási útmutató. *Szolnok, 2000. 6-18., 57-100., 125-129., 140-166. oldalak*

10. Hanich József; Libor Józsefné; Madaras Lászlóné; Nagy Tamás: Gazdasági Matematika II. feladatgyűjtemény. *Szolnok, 2005. 32-45., 98-136. oldalak*

11. Libor Józsefné: Operációkutatás tantárgyi kalauz. *Szolnok, 2006. (72 oldal)*

12. Libor Józsefné: Operációkutatás tutori kalauz. *Szolnok, 2006. (19 oldal)*

13. Fehér Mária; Hanich József; Libor Józsefné; Madaras Lászlóné; Nagy Tamás: Gazdasági Matematika I. feladatgyűjtemény. *Szolnok, 2006. 1-30., 226-267. oldalak*