Egyetemi doktori (PhD) értekezés tézisei

GEOMETRIA MOZGÁSBAN

AZ EGYBEVÁGÓSÁGI TRANSZFORMÁCIÓK TANÍTÁSÁNAK EGY ÚJ MÓDSZERE

PhD Thesis

GEOMETRY IN MOTION

NEW METHOD OF TEACHING ISOMETRIES

Szeredi Éva

Témavezető: Dr. Vásárhelyi Éva

DEBRECENI EGYETEM

Matematika és Számítástudományok Doktori Iskola

Debrecen, 2011.

A témaválasztás indoklása

"... a geometria tanításában, komoly nézeteltérések vannak a célok, a tartalom és a módszerek tekintetében ...". (Villani et al. 1996)

A geometriai transzformációk tanításának szükségessége és mikéntje fontos és vitatott kérdés, ami több ország tantervelőkészítő munkájában és nemzetközi didaktikai fórumokon is megjelenik, esetenként szélsőséges formában. Egyike azoknak a kérdéseknek, melyeket Villani (1996) felvetett 1996-os ICMI konferencia előtt. Válaszként többen is érveltek a transzformációtanítás bevezetése, megerősítése mellett, például a Cseh Köztársaságban Frantisek Kurina (1995), Olaszországban Nicolina Malara (1995), Finnországban George Malaty (1995), az Egyesült Államokban Gary Martin (1995) – elképzeléseik azonban jó néhány dologban homlokegyenest ellenkeztek egymással.

Dolgozatom az egybevágósági transzformációk tanításával foglalkozik, elsősorban annak magyarországi helyzetével.

Magyarországon a középiskolai tankönyvekben majd száz éve – igen különböző mélységben – szerepel a transzformációk tanítása. Az 1970-es évek tantervreformjában az általános iskolai tananyagnak is része lett ez a témakör. A reformban a transzformációkkal való mélyebb foglalkozásnak a geometriai szemlélet fejlesztése mellett fontos célja volt a függvényszemlélet fejlesztése is.

A témával azért kezdtem el foglalkozni, mert a tanárképző főiskola hallgatóival dolgozva a transzformációk alapjait érintő, nehezen megragadható, és még nehezebben javítható hibákkal találkoztam. Néhány jellegzetes példát részletesen is ismertetek a 3.1 szakaszban (Fogalomalkotási yavarok 25. o.) Ezeknek a hibáknak a megértését és okait kutatva arra a feltételezésre jutottam, hogy a fogalmi zavarok eredete az egybevágósági transzformációk szemléltetésével kapcsolatos módszertani problémákban kereshető.

Az általam megvizsgált tananyagok mindegyikében megjelenik az a dilemma, hogy az egymásra mozgathatóság szemléletes, ám pontatlan fogalmára, vagy pedig absztrakt definíciókra, alapvető tételekre alapozzuk az egybevágóság, illetve az egybevágósági transzformációk tanítását. Általános iskolás szinten egyik felépítés sem hagyhatja el az egymásra mozgathatóságot, mert az egybevágósági transzformációk invariáns tulajdonságait – szögtartás, távolságtartás, stb.– csak így tudja érzékeltetni. Van, aki a szemléletes bevezetést fokozatosan összeépíti a matematikai megalapozással, de van olyan is, aki egyszerűen (vagy túl gyorsan) elhagyja a szemléltetést. Több olyan felépítés is létezik, melyben a transzformált kép előállítására szinte kizárólagosan körzős-vonalzós szerkesztéseket használnak.

A főiskolai és egyetemi tanárképzésben egy eléggé általánosan használt könyv Hajós György: Bevezetés a geometriába című műve. Ez a könyv a mozgást egzakt, axiomatikusan megalapozott fogalomként használja. Ám az a mozgásfogalom, amivel a hallgató a korábbi években találkozott, távol van a Hajós-féle axiómákban leírt mozgásfogalomtól.

Ezekből a tapasztalatokból kiindulva kezdtem gondolkodni egy olyan módszertani feldolgozáson, mely megfelel az általános- és középiskolás diákok gondolkodási szintjének, mindennapi tapasztatainak, s mindeközben összhangban áll a geometria axiomatikus felépítésével.

Kutatás közben P. Collier: Geometry for teachers c. könyvében az egybevágósági transzformációk szemléltetésének egy olyan módjával találkoztam, amely egy lényeges ponton különbözött az általam korábban megismert eljárásoktól. Ezt a szemléltetési módot részletesebben is bemutatom a 4.4 fejezetben (Egy angol transzformációtanítási módszer 38. o.).

A kutatás közvetlen előzményei

Az új módszer megalkotásának talán első lépése az volt, amikor rájöttem, hogy Collier módszere összeegyeztethető a Hajós-féle mozgási axiómákkal. Ez a felfedezés lehetővé tette, hogy a módszert kiindulásként használjam. Többéves fejlesztés és kipróbálás eredményeként olyan eljárást dolgoztam ki, amely matematikai elvárásaimnak (a később bevezetendő absztrakt fogalommal való összhang) és didaktikai célkitűzéseimnek (egyszerűen végrehajtható) is megfelel.

Az eljárás matematikai alapja, hogy a sík egybevágósági transzformációi tekinthetők térmozgások megszorításainak. A tér mozgásait Hajós két egymásnak megfeleltetett „zászlóval" (egy félsík határán egy félegyenessel) adja meg. A síkbeli egybevágósági transzformációk szemléletes értelmezésének alapötlete az, hogy egy (fehér) zászlót egy vele alakra és méretre egyforma (fekete) zászlóba mozgatunk. A mozgatás tényleges elvégzéséhez és a „referencia" megőrzéséhez meg kell kettőzni a mozgatandó síkot (zászlót). Tehát egy alakzat képének előállításához először egy átlátszó papírra átmásoljuk az alakzatot a fehér zászlóval együtt (megkettőzzük), majd az átlátszó papírt felemeljük, és (tetszőleges közbülső állapotokon keresztül mozgatva) úgy helyezzük le, hogy a fehér zászló a fekete zászlóra kerüljön. Erre az eljárásra a továbbiakban a „zászlós módszer" elnevezéssel fogok hivatkozni.

Az elméleti és gyakorlati kutatás első eredménye egy kísérleti középiskolás tankönyv (Szeredi, Török, 1981), mely a középiskolai tanárok meglehetősen egységes elutasításával találkozott. Néhány általános-iskolai tanárnak azonban felkeltette az érdeklődését, és elkezdték ezt a módszert használni felső- sőt alsó tagozaton is. A munkámat sok tapasztalattal és új ötletekkel gazdagította Kovács Csongorné, aki elsők között kezdett ennek alapján tanítani. Sok éves csiszolgatás után vele együtt két tankönyvben és tanári segédkönyvekben (Kovács, 1996; Csahóczi, 2002) is ennek a programnak a szellemében készítettük el a transzformációtanításhoz kapcsolódó fejezeteket.

Az Apáczai Kiadónál megjelent Matematika 5-8. oszt. tankönyvsorozatot 100 tanár rendszeres továbbképzés mellett kipróbálta és részletesen véleményezte. A végleges változat az ő visszajelzéseik alapján készült el, a tankönyvekhez részletes tanári útmutatók készültek. A 3.2.2 szakaszban (Kísérleti kipróbálás 30. o.) kitérek a tankönyvek kipróbálásakor összegyűjtött tapasztalatokra. A tankönyvet jelenleg a felsőtagozatos tanárok 15-20%-a használja.

A Sulinova Kht. fejlesztésében készült kompetencia alapú programcsomagokban a felsőtagozatos és a középiskolás anyagokban is erre a módszerre alapoztuk a transzformációk tanítását.

Kutatási célok

Dolgozatom elsődleges célja a „zászlós módszer" átfogó elemzése a didaktikai kutatások legújabb eredményeinek tükrében.

Ez az elemzés többféle – egymással összeszövődő – szempont figyelembe vételét kívánja.

- Szükséges hozzá a transzformáció-tanítással kapcsolatos dokumentumok alapos áttekintése. Annak pontos tisztázása, hogy a vizsgált módszer hol és miben tér el a korábban kidolgozott módszerektől. Elemzéseim fókuszában a téma tanításában használt tárgyi tevékenységek és egyéb szemléltetési módszerek állnak.
- Szükséges továbbá hozzá a tanuláspszichológia fogalomépítéssel, fogalomreprezentációval, szemléltetéssel kapcsolatos tudományos elméleteinek, valamint a matematika egybevágósággal és transzformációkkal kapcsolatos területeinek átgondolása. Célom az, hogy az egybevágósági transzformációk tanításának különféle koncepcióit összevessem ezekkel az elméletekkel, különös tekintettel a különböző szemléltetési módoknak a fogalomalkotásban játszott szerepére.

Kutatási módszerek

A fent vázolt célok elérése érdekében a következő módszereket alkalmaztam:

- Számos geometriai felépítést elemeztem az egybevágóság, illetve az egybevágósági transzformációk szempontjából. Az iskolai tananyag háttéraxiómáiként szolgáló felépítések közül három rendszerre ki is térek az elméleti háttér ismertetésekor.
- Tanulmányoztam az elvont (elsősorban geometriai) fogalmak kialakításával, a fogalmi zavarok kezelésével kapcsolatos szakirodalmat.
- Tantervek, taneszközök és szakmódszertani tanulmányok alapján áttekintettem a transzformációtanítás magyarországi történetét.
- Behatóan tanulmányoztam a közelmúlt és a jelen transzformáció-tanítási koncepcióit, különös tekintettel a zászlós módszerre.
- Gyűjtöttem és elemeztem a főiskolai és egyetemi hallgatóim körében tapasztalt – egybevágósággal, transzformációkkal kapcsolatos – fogalomalkotási zavarokat.

Főbb kutatási kérdések

Dolgozatom központi kérdése a sík egybevágósági transzformációinak a tér mozgásaként való kezelése és az azt szemléltető mozgatás didaktikai szerepének vizsgálata az egybevágóság- és általánosabban a transzformációfogalom tanításában. Ez az általános kérdés sok kisebb kérdést foglal magába:

- Melyek azok az élmények, tapasztalatok, matematikai fogalomcsírák, amelyekre az egybevágósági transzformációk tanítása során építhetünk?
- Milyen szerepe van a szemléltetésnek az egybevágósági transzformációkkal kapcsolatos fogalmak alakulásában?
- Mi a szerepük a transzformált kép előállítására szolgáló eljárásoknak (mozgatás illetve körzős vonalzós szerkesztés)?
- Milyen hibák keletkezhetnek az érintett fogalmakról alkotott, nem-verbális, „belső” képekben?
- Melyek ezek közül azok, amelyeket a szemléltetés, illetve a szerkesztési eljárás megválasztása különösen érint?
- Eredményes-e a „zászlós módszer”, és miben ragadhatóak meg az eredményei?
- Milyen általánosabb didaktikai elvek állnak a „zászlós módszer” eredményeinek hátterében?
- Hogyan változik a tanár szerepe, feladata a „zászlós módszer” bevezetésével?
- Milyen konzekvenciákat fogalmazhatunk meg a tanárképzéssel kapcsolatban?

A kutatás hipotézisei

Alaphipotézis

- Az egybevágóság, illetve az egybevágósági transzformációk szemléltetésére, a transzformált kép előállítására, valamint bizonyos, az őskép rekonstrukciójára szolgáló eljárások zavarokat okozhatnak néhány alapvető geometriai fogalom, például az „egybevágóság”, „szimmetria”, „transzformáció” fogalmak kialakulásában.

- A „zászlós módszer” egy olyan szemléltetés, illetve eljárás, amely gyerekek által is könnyen végrehajtható; matematikailag legitim, tehát az általa indukált fogalomképzet semmilyen részletében nincs ellentmondásban a matematikai (háttér-) elmélettel; ugyanakkor összhangban áll a tanuláspszichológia fogalomépítésre, fogalomreprezentációra, szemléltetésre vonatkozó elméleteivel is.

Részhipotézisek

A „zászlós módszer” segítségével

- folyamatosan, törés nélkül építhetjük (többek között) a transzformáció, egybevágóság, szimmetria, függvény, halmaz fogalmát;
- párhuzamosan fejleszthetjük ezeknek a fogalmaknak a jobb és bal agyféltekés komponenseit;
- kiküszöbölhetünk néhány gondolkodási hibát, amit a pontatlan szemléltetés és a körzős-vonalzós szerkesztések túlsúlya a nem verbális szinten eredményez;
- komoly segítséget adunk a tanulóknak a deduktív gondolkodás felé vezető úton;
- egyaránt hatékonyan fejleszthetjük a tehetséges és kevésbé tehetséges gyerekeket;
- átjárhatóbbá válik a kapcsolat az egyetemi és az iskolai geometria között, könnyebbé válik az ismeretek transzferálása.

A kutatás folyamata

A kutatásom az alábbi fő irányokban folyt és folyik:

- a transzformációtanítás irodalmának megismerése

Itt elsősorban a magyarországi vonatkozások érdekeltek. Utánanéztem, hogyan jelent meg a transzformációk tanítása a tantervekben, tankönyvekben, didaktikai tanulmányokban. A transzformációtanítás csíráit sikerült még egészen korai, az 1900-as évek elején készült, tankönyvrészletekben is megtalálni. A téma szempontjából az 1960-as évek fordulata különösen érdekes volt, amikor a transzformációkra alapozott geometria-tanítás gondolata nemzetközi szinten aktuális témává vált (Jaglom, 1962; Jaeger, 1966), ugyanakkor kiváló magyar matematikusok, didaktikai szakemberek és gyakorló pedagógusok egész sora foglalkozott nagyon komolyan ezzel a témával, és alakította ki a máig élő „magyar hagyományt” ezen a területen. Ezekkel a kérdésekkel a dolgozat 4. fejezetében (Transzformáció-tanítási módszerek32. o.) foglalkozom részletesen.

- a transzformációtanítás iskolai gyakorlata és a megfelelő matematikai elmélet közötti kapcsolat átgondolása

A taneszközöket vizsgálva úgy találtam, hogy egy bizonyos szint felett ez a kapcsolat nagyon gondosan át lett gondolva, ki lett dolgozva. Az alapvető fogalmak szintjén azonban – itt elsősorban az egybevágóság és transzformáció-fogalomra, valamint az egybevágósági transzformációk invariáns tulajdonságaira gondolok – nem sikerült olyan megoldást találni, ami ideális lenne mind a matematika, mind a didaktika szempontjából.

Engem a dolgozatomban éppen ez a kevéssé kidolgozott szint érdekel, az itt keletkező szemléletes, nem verbális, nem definiált fogalomak, ezek kapcsolata a tiszta matematikai fogalommal.

Mivel az egybevágóság fogalma a geometria különböző axiomatikus felépítéseinek középponti kérdése, ezért utánajártam a különféle módszertani megközelítések mögött meghúzódó axiomatikus vagy axióma-közeli elméleti állításoknak. Hajós axiómarendszerét az iskolai tanítás szemszögéből különösen fontosnak találtam.

A 2.1 szakaszban (Matematikai háttér 9. o.) összefoglalást adok mindarról, amit ebben a témakörben a témám szempontjából fontosnak gondoltam.

- a tanuláselméletek fogalomalkotással kapcsolatos eredményeinek a megismerése

Bár ezeknek a kutatásoknak jelentős része a – a duál-kód elmélet, a concept image, a procept fogalma, stb. – az 1900-as évek első kétharmadában nem volt ismert, a cselekvés, a szemléltetés fontossága elfogadott didaktikai alapelv volt a korszak minden haladó szellemű pedagógusa és didaktikatudósa számára. Fontos eszköznek gondolták a fogalomépítés kezdeti stádiumaiban, annak a célnak az elérése érdekében, hogy segítse a diákokat eljutni egy tiszta, absztrakt fogalomig. Azt azonban csupán a későbbi vizsgálatok világították meg, hogy fogalmainknak a „tiszta, absztrakt tudás", – a logogenek (Paivio, 2006) – csak egyik komponense, emellett rejtve, ott van egy másik oldal is, – az imagenek világa – mely nem tudatosul, de hat a gondolkodásunkra. Segíti, ha összhangban van a formális ismeretekkel, súlyosan gátolja, ha ellentmondásban van velük. Ami azt jelenti, hogy a cselekvéshez, szemléltetéshez használt eszközök jelentősége sokkal nagyobb, mint korábban gondoltuk. Megválasztásuk perdöntő hatással lehet a matematikai gondolkodás alakulására.

A 2.2 szakaszban (Tanuláspszichológiai és didaktikai háttér 15. o.) összefoglalom a dolgozatom szempontjából alapvetőnek gondolt elméleti didaktikai és módszertani elveket.

- az előbb felsorolt vizsgálati eredmények összevetése a „zászlós módszerrel" és a rá épülő transzformációtanítási koncepcióval.

Dolgozatom elsődleges célja annak megvizsgálása, hogy indokolt-e a szemléltetés szokásos módszereinek megváltoztatása, és hogy mennyiben támasztja alá a matematikai és didaktikai elmélet a zászlós módszer alkalmasságát.

A vizsgálatok eredményei

- A különböző transzformációtanítási módszerek összevetése a fogalomalkotás pszichológiájának újabb eredményeivel:

Az elméleti eredmények sokoldalúan igazolják, hogy a tanulás nem verbális, jobb agyféltekés gondolkodást erősen érintő elemei, a tárgyi tevékenységek és a szemléletes tapasztalatok nagyon fontos részét képezik a fogalomalkotásnak. Így döntő jelentősége van annak, hogy az általuk közvetített nem verbális képek támogatják-e az absztrakt fogalmat és ezen keresztül az elvont matematikai gondolkodást, vagy éppen ellenkezőleg, tartalmaznak-e ellentmondást a szabatosan definiált fogalommal. Ez utóbbi esetben a fogalomcsírák konfliktus-faktorokká válnak és blokkolják az érintett fogalmak helyes kialakulását.

Ezen eredmények szem előtt tartásával elemeztem a transzformált kép előállítására szolgáló eljárásokat és megállapítottam, hogy a módszertanilag nem következetesen átgondolt szemléltetés, illetve a körzős-vonalzós szerkesztések életkornak és fogalmi fejlettségnek nem megfelelő egyeduralma kiindulópontja lehet a hibás fogalomképzetek kialakulásának.

Egyik fő hibaforrás, hogy a mozgatással való szemléltetés hagyományos módjaiban a mozgás pályája kötött (a tengelyes tükrözésnél rögzített a tengely, forgatásnál a forgáscentrum, stb.). A sík egybevágóságairól kialakított szemléletes képzet ezért elsősorban az egyes pontoknak a mozgatás során leírt pályájához kötődik. Ez azonban ellentmondásban van a szabatos definícióval, miszerint két transzformáció ekvivalenciája csupán a pontok kezdő és véghelyzetének megegyezésén múlik.

Másik fontos és gyakori hibaforrás a transzformált képnek szinte kizárólagos körzős-vonalzós szerkesztése. Ez egyrészt nehézkes, pontatlan és korlátozott eljárás, amellyel csak néhány speciális alakzat képe állítható elő, másrészt egyes pontok kitüntetett szerepet kapnak az eljárásban, például a szakaszok végpontjai, sokszögek csúcsai, körök középpontja, stb. Emiatt sok esetben nem az összetartozó pontokra, egymásnak megfeleltetett, illetve szimmetrikus alakzatok összetartozó részleteire irányul a figyelem. Ennek következtében nem alakul ki globális szemléletes kép az egybevágóságról (a transzformációról).

Az elmélettel történő összevetés azt mutatta, hogy a zászlós módszer nem indukál sem kompromisszumokat, sem potenciális konfliktusfaktorokat. Olyan eszközt ad a tanár és a gyerek kezébe, mely egyszerre összhangban van a bennük élő intuitív egybevágóság-fogalommal és a szabatos matematikai felépítéssel. Az eszközt mindaddig érdemes használniuk, amíg az egybevágósággal kapcsolatos matematikai elmélet annyira kiépül a gondolkodásukban, hogy ezt szükségtelenné teszi, de a később is kényelmesen visszanyúlhatnak hozzá, ha valamilyen zavar támad a fogalomépítésben.

A matematikai elmélettel összhangban, „zászlós módszer"alkalmazása során, mind a térbeli mozgás, mind az azt szemléltető mozgatás megadásában csupán a kezdő és véghelyzet számít. A mozgatás során nincs korlátozás, a sík egybevágóságait a térbe beágyazva, elemi mozgásélményként érzékelik a gyerekek.

Paivio duál-kód elmélete szerint az eljárások – tárgyi tevékenységek, szemléltetések – kettős kódja akkor segíti hatékonyan a tanulást (különösen gyengébben teljesítő gyerekek esetében), ha azok megismerésére, begyakorlására és alkalmazására elegendő időt biztosítunk. A „zászlós módszer"-ben a transzformált képet előállító eljárás, egyszerű és nem korlátozódik diszkrét pontokból, egyenesekből és körökből felépíthető alakzatokra. Így nincs akadálya, hogy a gyerekek annyit használják az eszközt, és olyan helyzetekben, amennyire és amikor annak szükségét érzik. Így bőséges – nem verbális – tapasztalatanyagot szerezhetnek a különböző egybevágósági transzformációk működéséről, tulajdonságairól, a szimmetrikus alakzatokról, azok összetartozó részleteiről.

- A deduktív gondolkodás fejlesztése

A szemléletnek és az elméleti ismereteknek ez a szoros összekapcsolása lehetővé teszi egyszerű érvelések alkotását, szimmetrián alapuló következtetések levonását. Így a gyengébb képességű gyerekeknek is komoly segítséget adunk a deduktív gondolkodás felé vezető úton, őket is el tudjuk juttatni a geometriai gondolkodás magasabb szintjeire. Ugyanakkor a szemlélettel is megalapozott egybevágóságfogalom – mint például otthonosság a szimmetrián alapuló okoskodásokban – jelentős szerepet játszhat a tehetséges gyerekek feladatmegoldó készségének fejlesztésében.

- Kapcsolat a matematika elmélettel:

A „zászlós módszer" Hajós mozgási axiómáinak közvetlen implementációja az iskolai matematika számára. Az erre alapozott egybevágóság-, illetve transzformációfogalom törés nélkül építhető az iskolától az egyetemig.

Konzekvenciák

A téma irodalmának átfogó elemzése egybehangzóan igazolja azt, hogy a transzformáció-tanításban a transzformált kép szemléltetésére és előállítására használt eljárások megválasztása erős – kedvező vagy káros – hatással van a fogalomalkotásra. A matematikai és didaktikai elmélet alátámasztotta, hogy a mozgással való szemléltetésnek lehetnek veszélyei. Az elemzés azt is alátámasztotta, hogy a geometriai mozgás zászlókkal való megadása olyan, nem-verbális fogalomképzetek kialakítását eredményezi, amelyek összhangban vannak az absztrakt fogalmakkal, s amelyekre alapozva a gyerekek tudása és geometriai szemlélete is hatékonyan fejleszthető.

Az ismertetett eredmények felvetik annak szükségességét, hogy a pedagógusok és a tanárjelöltek mélyebben megismerkedjenek a mozgásfogalomnak a transzformációtanításban betöltött szerepével, matematikai és didaktikai hátterével.

A problémák egy másik típusa a pedagógusok beállítódása, a konkrét-manipulatív szintű fogalomépítéstől és a tartós eszközhasználattól való, gyakran tapasztalható idegenkedés. A másolópapírt sokan nem tekintik igazi matematikai eszköznek, legfeljebb motivációs értéket tulajdonítanak neki, használatát időpazarlásnak, játéknak tartják, a transzformált kép előállítására csupán a körzőt és a vonalzót fogadják el legitim eszközöknek. A zászlós módszerre épülő tananyagot kipróbáló tanáraink körében ez a nézet – néhány elszórt kivételtől eltekintve – megváltozott, amint a függelékben idézett vélemények ezt híven tükrözik.

A vizsgálatok során fontos problémaként jelentkezett a sík szerepének túlságos hangsúlya. Ezen a területen szükség van a tananyag, tanterv és a szemléltetés további finomítására, a síkbeli és térbeli egybevágóságok összekapcsolásának szemléletes, a gyerekek számára megközelíthető feldolgozására.

A módszernek magának is vannak továbbfejlesztendő részletei.

Célszerű lenne olyan oktatást segítő programok kidolgozása, melyek egy síkbeli zászlópárral megadott mozgás esetén lehetővé tennék a síkban elhelyezkedő alakzatok térbeli mozgatásának számítógépes szimulálását is.

Fontos lenne többet foglalkozni a tér egybevágóságainak a szemléltetésével. Mélyebben rávilágítani a sík és tér egybevágóságai között az analógiákra és a különbözőségekre.

Ehhez szükséges lenne a síkbeli eszközök megfelelő térbeli változatainak kidolgozása. Például helyettesíthetnénk a zászlóval ellátott átlátszó papírt, mely az elmozgatandó alakzatot magával viszi, egy merev, átlátszó lappal, melyhez hozzáerősíthetjük az elmozgatandó térbeli alakzatot.

Ennek hátránya, hogy csak olyan alakzatok mozgatására alkalmas, mely a mozgást megadó zászló síkjához van rögzítve.

Ezt a problémát kiküszöbölhetnénk a számítógép segítségével. Az előbb vázolt oktatóprogramot alkalmassá lehetne tenni térbeli alakzatok mozgatásának szimulálására is. Természetesen, ekkor a mozgatható félegyenest és határolt félsíkot – vagyis a mozgatható zászlót – ki kellene bővítenünk egy, valamelyik határolt félteret is jelző egyszerű objektummá.

Kulcsfogalmak

geometriai transzformációk; egybevágóság; szemléltetés, reprezentáció; procept; fogalomépítés; fogalomképzet; axiómarendszer; szimmetria; tanuláselméletek; tankönyvírás; tanárképzés.

Reasons behind the choice of the topic

There is "strong disagreement about the aims, contents and methods for the teaching of geometry ...".(Villani et al. 1996)

Why and how should we teach geometric transformations? – this is a question which appears quite frequently on international didactic forums, sometimes in extreme forms. It was one of the questions posed by Villani (1996) before the 1966 ICMI conference. Answering that question quite a few authors argue for the introduction or for the strengthening of teaching transformation in the schools – for example Frantisek Kurina (1995) in Czech Republic, Nicolina Malara (1995) in Italy, George Malaty (1995) in Finnland, Gary Martin (1995) in the US. However their conceptions strongly disagree with each other in many ways.

My dissertation deals with the situation in Hungarian schools – the different opinions about these questions and the different methods of teaching isometric transformations.

Transformations were taught in the secondary schools in Hungary since the beginning of the 20th century. From that time we can find some details of this topic in the secondary textbooks. In the reform of the 1970's this topic became part of the elementary education as well.

I started to investigate this topic because, while teaching geometry to college students, I frequently met some mistakes connected to the foundations of the concept of transformations. The nature of these mistakes was quite unclear for me and, although it was easy to correct them superficially, I found it hard to set them really right. I describe some such examples in Section 3.1 Disturbances in

concept building p. 25)

Trying to understand these mistakes and looking for the reasons behind them I found that these types of misconceptions probably originate in the methods used for the demonstration of the isometric transformations.

In all of the investigated teaching materials there seems to appear a dilemma about the foundation of the concept of congruence and the isometries: whether to base them on the notion of moving – which is not precise enough but natural for the children – or on abstract definitions and correct theorems. On the elementary level demonstrating the isometries by moving is unavoidable in order to show the invariance of distances, angles, etc. There are some methods where these demonstrations are gradually connected with a correct mathematical foundation and there are some others as well, where demonstrating is absent or stops very soon. In most of the teaching methods only ruler-and-compass constructions are used for creating the transformed shape.

In Hungarian teacher training, the book of György Hajós: "Introduction into geometry" is quite generally used both in colleges and at universities. In this book motion is an exact concept, based directly on axioms. Unfortunately the notion of moving, the students met earlier is usually very far from the concept given in the axiomatisation of Hajós.

These experiences were the main starting points in the decision trying to find a method which is in accordance with the everyday experiences and with the thinking level of children in the elementary and secondary schools and at the same time with the abstract theory of geometry.

Previous work

During my investigations I came across the book of P. Collier: Geometry for teachers. In this book I found a technique for demonstrating axial reflection which was in one little detail essentially different from any other ones I had met earlier. I present this method in detail in the Secction 4.4 (An English method of teaching transformations p.38)

The first step in the solution of the problem described above was when I realised that the method used by Collier for the construction of the reflected image can be reconciled with the axioms of move in Hajós's axiom-system. This finding made me able to use Collier's method as a starting point and after years of developing it further and experimenting with it in schools I managed to work out a process which was in accordance both with my mathematical expectations and with my didactic aims.

The mathematical basis of this process is that we can view the isometries of the plane as special cases of geometric moves in the space. In György Hajós's axiom-system the geometric moves of the space are specified using two corresponding "flags" (a half-plane with a given ray on its boundary). In the process used for the demonstration of the isometries of the plane we move one (white) flag into another (black) flag which is of the same size and shape. During the practical implementation of this procedure the original plane (the flag) has to be duplicated in order to save the "reference". Therefore in the process of producing the transformed image of a shape first we make a copy of the shape together with the white flag (duplicating both of these) on a tracing paper, lift the tracing paper and (moving it along an arbitrary route) lay it down so that the white and black flags match. I will refer to this process as the "flag-method".

An experimental textbook for secondary schools (Szeredi, Török, 1981) was the first printed result of the theoretical and practical investigations. This book was rejected by most of the secondary school teachers. But some elementary school teachers became interested in it and started to use the method on primary and comprehensive level as well. For example Kovács Csongorné was one of the first teachers who started to teach the isometries with the "flag-method" and enriched my previous work with a lot of new experiences and ideas. I wrote with her – after many years of polishing the original version – the chapters about geometric transformations in two textbooks and in the corresponding teacher guides (Kovács, 1996; Csahóczi, 2002).

Draft versions of these books were the subject of an experimentak evaluation by 100 teachers participating in an in-service course. Their opinion was built into the final version of the material. In the Section 3.2.2 (School experiment p. 30) I give more details about this experiment. Currently the book is used by 15-20% of the age group concerned.

More recently in the materials developed in the framework of Sulinova orihect the teaching of isometries of the plane is based on the "flag method", both in the elementary and in the secondary program packages.

Aims of research

The primary aim of my dissertation is a broad analysis of the "flag-method" taking into account the latest results of the didactic theories.

To perform this analysis several interlinked tasks have to be carried out.

- A detailed survey of documents dealing with the teaching of transformations, in order to clarify where and in what way is the "flag-method" different from the methods used earlier. The manipulative activities and other ways of demonstration are in the focus of these studies.
- The investigation of the literature of the psychology of learning about concept building, concept representation, demonstration, and consideration of the mathematical areas connected to the notion of congruence and generally to transformations. My aim is to confront the different conceptions of the teaching of transformations with these

theoretical findings, with special emphasis on the role of different kind of representations played in concept building.

Methods of research

To achieve the aims described above I applied the following methods:

- I analyzed several ways of building up synthetic geometry, especially the concept of congruence and of transformation. In the Chapter 2 I describe in detail three axiom-systems in the 2nd chapter, which, I believe, are implicitly present in the background of the school-geometry in Hungary.
- I studied the psychological and didactical literature of concept building and of handling potential disturbances in the development of these concepts.
- I made a survey of the history of teaching transformations in Hungary by investigating curricula, teaching materials and methodological and didactic studies of the last 100 years.
- I studied in details the recently used conceptions of teaching transformations with special emphasis on the "flag method".
- I collected and analysed the mistakes – made by my college and university students – connected to the concepts of congruence and of transformation.

Main research questions

The central question of my work is on one hand the didactic investigation of handling of the isometries of the plane as moves of the space and on the other hand the methodological investigation of the role different kinds of demonstrations of movement play in the teaching of isometries. This general question contains many more special questions:

- Which are those early, everyday experiences, mental images, we can build on later while teaching isometries?
- What is the role of demonstration in the building of the concepts connected to the isometries?
- What is the role of the processes used for the creation of transformed images (movements, ruler and compass constructions)?
- What kind of misconceptions can occur in the process of building the non-verbal, mental images of these concepts?
- From these mistakes which ones are especially affected by the way of demonstration or by the choice of the method of construction?
- Can the "flag method" be used successfully in teaching isometries and transformations?
- What kind of general didactic theories stand in the background of its success?
- How the role and the task of the teachers changes with the introduction of the "method of flags"?
- What are the consequences of the above issues with respect to teacher education?

The hypotheses of the research

The main hypothesis

- Certain kind of processes – used for demonstration of the isometries, for creation of transformed, congruent images and for reconstruction of the original shape – may cause disturbances in the building of some concepts, like “congruence”, “symmetry”, “transformation”.
- The “flag-method” is a kind of demonstration and a kind of process that can be carried out easily by children and is mathematically legitimate at the same time. It is in all details in accordance both with the mathematical (background) theory and with the theories of the psychology of learning concerning concept building, concept representation, demonstration.

Smaller hypotheses

With the help of the „flag method”

1. a lot of important concepts – such as transformation, congruence, symmetry, function, set, etc. – can be developed continually;
2. the left and the right hemisphere components of these concepts can be developed in parallel;
3. some misconceptions, created in the non-verbal part of concept images by inappropriate demonstrations and by the overwhelming use of the ruler-compass constructions, can be eliminated;
4. we can give a substantial support to the students on their way towards deductive thinking;
5. we can efficiently develop both the talented and the less able students;
6. the connection between mathematics on university level and school mathematics becomes more permeable, transfer of the mathematical knowledge made easier.

Process of research

The main components of the process of my research are the following:

- studying the school materials of teaching transformations

It is the Hungarian teaching I am mainly interested in. I looked up curricula, textbooks, didactic studies to see how they deal with the teaching of transformations.

I could find the seeds of teaching transformations in quite old textbooks, used at the beginning of the 1900's as well. There was a revolutionary time period in the years around 1960, which was especially interesting for me. At that time the idea to build geometry teaching on transformations became topical on international level (Jaglom, 1962; Jaeger, 1966), and in Hungary a lot of excellent didactic experts and practising teachers were deeply engaged in this topic, and generated the “Hungarian tradition” in that area, still strong in the teaching practice. Chapter 4 deals in detail with these findings.

- comparing the teaching practice and the mathematical theory of congruence and of geometric transformations.

Inspecting the teaching materials I found that above a certain level the mathematical theory of geometric transformations is taken very seriously into account. At the same time on the level of basic concepts – like the concept of congruence, geometric transformations and the invariance properties of isometries – in most of the cases the connection between the theory and the practice is far from ideal.

This is the level which I was mainly interested in during my research, the non-verbal, non-defined concepts created on that level and their connection with the pure mathematical concepts.

Because the concept of congruence is a central element in different axiom systems I tried to investigate the implicit theorems – axioms or basic statements standing behind it. From the viewpoint of geometry teaching I found Hajós's axiom system particularly relevant.

In Section 2.1 (Mathematical background … p) I summarize the topics that I found relevant to my research.

- summing up the results of the theorems of learning, connected to the building concepts

Although a substantial part of these results – the theory of dual-coding, the notions of concept image, procept, etc. – have not existed yet in the first two-thirds of the last century, the importance of action and demonstration were well known and accepted principles amongst teachers and researchers of didactics. They thought them to be important tools in the introductory phase of the concept-building to help students to create clear, abstract concepts. However it was not clarified yet, that "clear, abstract knowledge" – the logogens (Paivio, 2006) – is only one component of our concepts, there exists a hidden part of them – the world of imagens – which is not concious, but have great effect on our thinking. Imagens help a lot, if they are in agreement with the formal knowledge, and they can become huge obstacles if they are in conflict with it. That means that the importance of the materials used in activities and demonstrations is much greater than we thought before, they can play a crucial role in the formation of mathematical thinking.

In Section 2.2 (Psychological and didactic background … p) I give a summary of these didactic and methodological principles.

- evaluating the "flag method", and the approach to teaching transformations based on the "flag method", against the mathematical and didactic results listed above.

The most important goal of the present work is to prove that it is reasonable to change the customary methods of demonstrating isometries, that both the mathematical and didactic theories support the suitability of the „method of flags".

Results

The literature justifies that suggestive experiences, such as manipulations and other activities (affecting the non-verbal elements of learning and thinking) constitute a very important part of concept building. Therefore it is a crucial point whether the non-verbal images produced by them support the abstract notion or, quite on the contrary, they contain elements inconsistent with the correct, verbal definition of the abstract notion. In the latter case these may become conflict-factors, and hinder the proper building of connected concepts.

Keeping these results in mind I analysed the methods of demonstrating the isometries and the processes used for the creation of transformed images and ascertained that they may become sources of incorrect concept images.

In the traditional ways of demonstrating isometries by moving, the track of movement is restricted (the axis is fixed in case of axial reflection, the centre is fixed in case of rotation, etc. Therefore the image of the isometries of the plane becomes closely connected to the track the points follow during the movement. This is in contradiction with the correct definition, as the equivalence of two transformations depends only onstarting and final positions of the points being the same.

Creating the transformed image by ruler and compass is an inconvenient, incorrect and limited process: usable only in case of a few, special shapes at the same time certain points are handled in a distinctive way (for example end points of line segments, vertices of polygons, centres of circles, etc.). As a consequence in many cases very little or no attention is paid to the corresponding details of the shape and the image, restraining the creation of a global image of the congruence (the isometries).

Confrontation of the “flag method” with the relevant theory of learning shows that it does not induce neither compromises nor potential conflict-factors.

The “flag method” gives a tool to the teachers and to the students which is in accordance both with the intuitive congruence concept of young children and with the correct congruence concept of mathematics. This tool can be conveniently used until the establishment of the exact congruence concept moreover it is easy to come back to it in case of any disturbance in the concept building.

The spatial move and the movement demonstrating a transformation is defined only by giving the starting and the final positions – this in full accordance with the precise mathematical theory. There is no limitation in carrying out the movement of a shape into its transformed image. The children perceive the isometries of the plane embedded into the space, as elementary experiences of movement.

According to the theory of Paivio dual-code of processes – manipulations, activities, demonstrations – help efficiently the learning only (especially with low ability children), if there is enough time for getting acquainted with these, exercising and practising them.

In case of the “flag-method” the process used for the creation of the transformed image is simple, not limited to shapes consisting of line- and circle-segments. So the children can use this tool in all cases and at any time wherever or whenever they need it. This way they can get abundant – non-verbal – experiences about the working and the properties of the isometries of the plane, about symmetrical shapes and about their corresponding details.

The close connection between the practical experiences and the theoretical knowledge makes possible the creation of simple deductive symmetry based reasonings. So we can give efficient help in the creation of deductive reasoning, in achieving higher levels of spatial thinking – to the less able children as well – and at the same time efficiently develop the problem-solving abilities of the more able ones.

The “flag-method” is a straight implementation of the axioms of move in Hajós's axiom-system for school-teaching purposes. The congruence concept, based on this method can be built further from the elementary school up to the university level.

Perspectives

The importance of the concept of moves and the role they play in the teaching of transformations is not always accepted amongst teachers. The results described above raise the necessity of making teachers and trainee teachers acquainted with the deeper mathematical and didactical background of geometric moves.

A different kind of problem is the negative attitude of quite a lot of teachers towards using activities, or manipulative tools in teaching for a longer time. Many of them does not accept tracing paper as a legitimate mathematical tool, in the best case they value it as a motivating tool, for them it is rather a toy, they feel that using it for a longer period is a waste of time. Only the ruler and the compass are accepted by them as legitimate tools. (This opinion changed – with a few exception – amongst the teachers in a teaching experiment where the transformations were taught using „flag method”.) Working out software where the computer would simulate the moves of planar shapes given by a pair of flags could be a help in changing this negative attitude.

An important problem of the “flag-method” itself is that it puts excessive emphasis on the plane. There is a need of further refinement of the content of teaching and the methods of demonstration.

It would be important to deal more with the demonstration of the spatial isometries, to create a closer connection between the isometries of the plane and the space, to give more attention to the analogies and to the differences between them.

It would be very useful to create somehow the spatial version of the "flag method".

Keywords

geometric transformations; congruence; demonstration; representation; precept; concept-building; concept-image; axiom-system; symmetry; theory of learning; textbook-writing; teacher training.

Közlemények – List of publications

Referált publikációk – Refereed publications

1. Szeredi, É., Török, J. (2007): Teaching polygons in secondary school: A four country comparative study. TMCS 5, No. 1, 29-65. Debrecen. (ME 2007e.00156)

   Hivatkozások:

   - Paul Andrews: Comparative studies of mathematics teachers' observable learning objectives: validating low inference codes. Educational Studies, Volume 71, Number 2, 97-122, DOI: 10.1007/s10649-008-9165-x

   - Paul Andrews: Mathematics Teachers' Didactic Strategies: Examining the Comparative Potential of Low Inference Generic Descriptors. Comparative Education Review, 2009. The University of Chicago Press

   - Values and variables: Mathematics Education in High-Performing Countries. Review For the Nuffield Foundation by Mike Askew, Jeremy Hodgen, Sarmin Hossain and Nicola Bretscher Kings College London

2. Szeredi, É., Török, J. (1999): Some tools to compare students performances and interpret their difficulties in algebraic tasks. in. Schwank, Inge, European research in mathematics education I: II. Vol 2., 198-212 (ME 2001c.02101)

   Hivatkozás:

   - Douek, N. (1999): Argumentative aspects of proving of some undergraduate mathematics students' performances. Haifa, Israel. Volume 2, pp. 273-280.

3. Fried, K., Jakucs, E., Szeredi, É. (2000): A proof of Escher's (only?) theorem. Ann. Univ. Sci. Budap. Rolando Eőtvős, Sect. Math. 43, 159-163 . (Zbl 0981.51024)

4. Szeredi, É. (2010): *Teaching the concept of congruence* I. 12p. TMCS, Debrecen. Közlésre elfogadott cikk.

5. Szeredi, É. (2010): *Teaching the concept of congruence* II. 13p. TMCS, Debrecen. Közlésre elfogadott cikk.

Konferencia kiadványok - Conference proceedings

6. Andrews, P., Carillo, J., Clement, N., De Corte, E., Depaepe, F., Fried, K., Hatch, G., Malaty, G., Op't Eynde, P., Pálfalvi, S., Sayers, J., Sorvali, T., Szeredi, É., Török, J., Verschaffel, L. (2004) *International comparisons of mathematics teaching: searching for consensus in describing opportunities for learning*, paper presented to discussion group 11, international comparisons of mathematics education, of the 10th International Congress on Mathematics Education (ICME-10) Copenhagen, Denmark

   Hivatkozások:

   - Fenna van Nes: Young Children's Spatial Structuring Ability and Emerging Number Sense. Utrecht: Freudenthal Institute for Science and Mathematics Education , Dissertation Utrecht University

   - Fenna van Nes: Spatial structuring and the development of number sense: A case study with young children woring with blocks. The Journal of Mathematical Behavior, Volume 29, Issue 3. September 2010.145-159

7. Fried Katalin, Szeredi Éva: Non-verbal arithmetic. Proceedings of the Ninth Internaitonal Conference, „Mathematics Education in a Global Community”, Charlotte, North-Carolina, US. 2007

Konferencia előadások – Conference lectures

Magyarországon – In Hungary

8. Kutatások matematikaórákon. BJMT Rátz László vándorgyűlés, Szeged, 1983
9. Feladatmegoldó szemináriumsorozat. BJMT Rátz László Vándorgyűlés, Tatabánya, 1984.
10. Kutatások az alsótagozaton. BJMT Rátz László Vándorgyűlés, Tatabánya, 1984.
11. A geometria tanítása. BJMT Tanárok Nyári Egyeteme, Sárospatak, 1985.
12. Geometriai kutatások. TIT Általános Iskolai Tanárok Nyári Egyetem, Budapest, 1985.
13. Érdemes-e Játszani a matematikaórákon? BJMT Rátz László Vándorgyűlés, 1986.
14. Tanítás kutatási problémákon keresztül. TIT Általános Iskolai Tanárok Nyári Egyetem, Budapest, 1987.
15. Műhelymorzsák. Előadás néhány hallgatóval együtt. BJMT Rátz László Vándorgyűlés, Szeged, 1991.
16. Edison ciszternája. BJMT Varga Tamás Napok, Budapest ELTE TFK, 1992.
17. Szöveges feladatok diszkussziója. BJMT Rátz László Vándorgyűlés, Szolnok, 1993.
18. Kutatás az elemi matematika szemináriumokon. BJMT Varga Tamás Napok, Budapest ELTE TFK, 1994.
19. Miért szép a diszkusszió? BJMT Varga Tamás Napok, Budapest ELTE TFK, 1995.
20. BJMT Rátz László Vándorgyűlés, Sopron, 1996
21. Alsótagozatos munka felsős szemmel, folytatás. BJMT Rátz László Vándorgyűlés, Eger. 1997.
22. Próbáljuk meg másképpen! BJMT Varga Tamás Napok, Budapest ELTE TFK, 1998.
23. Jakucs Erika, Szeredi Éva: Próbáljuk meg másképpen. Calibra Kiadó Bp. 1999. 16p. in: Matematikatanárképzés matematikatanár-továbbképzés 5, 63-78. (ME2001f.05059)
24. Kapcsolatok a matematika és más tudományterületek között. Matematikatörténeti konferencia, Budapest, ELTE TFK, 2000.
25. A számolástanítás szerepe az algebratanítás előkészítésében. BJMT Rátz László Vándorgyűlés, Szeged, 2000.
26. Számolástanítás és algebratanítás. OXI tanártovábbképzés. Kossuth Klub, 2001.
27. Környezeti nevelés lehetőségei a matematikaórán. BJMT Varga Tamás Napok, Budapest ELTE TFK, 2003.
28. METE Project. BJMT Varga Tamás Napok, Budapest ELTE TFK, 2004
29. Játék és a Sulinova. BJMT Varga Tamás Napok, Budapest ELTE TTK, 2007

Külföldön - Abroad

30. „Dog geometry”. SNM Conference, Poznan, Lengyelország, 1994.
31. Colorful geometry. MAOL Conference, Lappenranta, Finnország, 1997

32. Some tools to compare students' performances and interpret tehir difficulties in algebraic tasks. CERME 1. Conference, Osnabrück, Németország, 1998.

33. Teaching polygons in the secondary school: a comparative sudy on five European coutries. Symposium: The mathematics education traditions of Europe (METE) project: Principles and outcomes. EARLI Conference, Nicosia, Cyprus, 2005.

34. Non-verbal arithmetic. 9th International Conference of "Mathematics Education in a Global Community", Charlotte, North Carolina, USA, 2007.

Egyéb publikációk – Other publications

35. Dimény Judit, Szeredi Éva, Vargha Balázs: Nyelv Zene Matematika. RTV – Minerva Bp. 1977. 220p.

36. Dimény Judit, Szeredi Éva, Vargha Balázs: Jazik Muzik Matematika. Izdatyelsztvo Mir Moszkva 1981. 247p.

37. Dimény Judit, Szeredi Éva, Vargha Balázs: Nyelv Zene Matematika. 15 részes rádiósorozat,. Iskolarádió Bp. 1970-72.

38. Szeredi Éva: Matematika. Tankönyvkiadó Bp. 1986. 15p. in: Módszertani összefoglaló szakkörökhöz

39. Szeredi Éva: Kutyageometria. Háttér 14, 2. szám 1987 2p.

Hivatkozás:

- Szendrei, Julianna: Gondolod, hogy egyre megy. Tipotex, 2005

40. Szeredi Éva, Török Judit: Kutyakombinatorika. Háttér 14, 3. szám 1987 3p.

Hivatkozás:

- Szendrei, Julianna: Gondolod, hogy egyre megy. Tipotex, 2005

41. Szeredi Éva, Török Judit: The experiences of two Hungarians in Didsbury Manchester Polytechnic 1992. 7p. in: Didsbury Ideas.

42. Szeredi Éva: Edison ciszternája. Calibra Kiadó Bp. 1993. 8p. in: Matematikatanárképzés matematikatanár-továbbképzés.

43. Szeredi Éva, Sztókayné Földvári Vera, Török Judit: Elemi matematika és módszertan. Calibra Kiadó Bp. 1994. 7p. in: Matematikatanárképzés matematikatanár-továbbképzés.

44. Szeredi Éva: Kutatás az elemi matematika szemináriumokon. Calibra Kiadó Bp. 1994. 20p. in: Matematikatanárképzés matematikatanár-továbbképzés.

45. Szeredi Éva: Környezeti nevelés a matematikaórákon. Magyar Környezeti Nevelési Egyesület, 2002. 9p. in: Iskolánk zöldítése, Módszertani segédanyag iskolák számára

46. Pálfalvi Józsefné dr., Szeredi Éva, Török Judit: Matematika – in Tanuljunk, de hogyan? Nemzeti Tankönyvkiadó. 2005. 31p.

Tankönyv - Textbook

47. Kovács Csongorné, Szeredi Éva, Sz. Földvári Vera: Matematika tankönyv 7. osztály. Tankönyvkiadó Bp. 1980. 278p.

48. Kovács Csongorné, Szeredi Éva, Sz. Földvári Vera: Tanári kézikönyv Matematika 7. osztály. Tankönyvkiadó Bp. 1984. 436p.

49. Imrecze Zoltánné. Kovács Csongorné, Szeredi Éva, Sz. Földvári Vera: Matematika tankönyv 8. osztály. Tankönyvkiadó Bp. 1981. 319p.

50. Imrecze Zoltánné. Kovács Csongorné, Szeredi Éva, Sz. Földvári Vera: Tanári kézikönyv Matematika 8. osztály. Tankönyvkiadó Bp. 1981. 468p.

51. Szeredi Éva, Török Judit: Geometria I. osztály. OPI Bp. 1984. 178p.

52. Kovács Csongorné, Szeredi Éva, Sz. Földvári Vera: Matematika a hatosztályos gimnáziumok I. osztálya számára. Tankönyvkiadó Bp. 1996. 368p.

53. Csahóczi Erzsébet, Csatár Katalin, Kovács Csongorné, Morvai Éva, Szeredi Éva, Széplaki Györgyné: Matematika 5. osztály. Matematikatankönyv és feladatgyűjtemény I. és II. kötet. Apáczai Kiadó Celldömölk. 1999.

54. Csahóczi Erzsébet, Csatár Katalin, Kovács Csongorné, Morvai Éva, Szeredi Éva, Széplaki Györgyné: Matematika 5. osztály. Tanári Kézikönyv. Apáczai Kiadó Celldömölk. 2000.

55. Csahóczi Erzsébet, Csatár Katalin, Kovács Csongorné, Morvai Éva, Szeredi Éva, Széplaki Györgyné: Matematika 6. osztály. Matematikatankönyv és feladatgyűjtemény I. és II. kötet. Apáczai Kiadó Celldömölk. 2000.

56. Csahóczi Erzsébet, Csatár Katalin, Kovács Csongorné, Morvai Éva, Szeredi Éva, Széplaki Györgyné: Matematika 6. osztály. Tanári Kézikönyv. Apáczai Kiadó Celldömölk. 2001.

57. Csahóczi Erzsébet, Csatár Katalin, Kovács Csongorné, Morvai Éva, Szeredi Éva, Széplaki Györgyné: Matematika 7. osztály. Matematikatankönyv és feladatgyűjtemény I. és II. kötet. Apáczai Kiadó Celldömölk. 2001.

58. Csahóczi Erzsébet, Csatár Katalin, Kovács Csongorné, Morvai Éva, Szeredi Éva, Széplaki Györgyné: Matematika 7. osztály. Tanári Kézikönyv. Apáczai Kiadó Celldömölk. 2002.

59. Csahóczi Erzsébet, Csatár Katalin, Kovács Csongorné, Morvai Éva, Szeredi Éva, Széplaki Györgyné: Matematika 8. osztály. Matematikatankönyv és feladatgyűjtemény I. és II. kötet. Apáczai Kiadó Celldömölk. 2002.

60. Csahóczi Erzsébet, Csatár Katalin, Kovács Csongorné, Morvai Éva, Szeredi Éva, Széplaki Györgyné: Matematika 8. osztály. Tanári Kézikönyv. Apáczai Kiadó Celldömölk. 2003.

61. Sulinova Educatio Kht (2008): Matematika programcsomagok. (Packages of materials for teaching mathematics.) http://www.sulinovadatbank.hu/index.php