DE TTK

1949

A diszkrét matematika és lineáris algebra számítógéppel támogatott oktatása

Egyetemi doktori (PhD) értekezés

Szerző: Vajda István

Témavezető: Dr. Hortobágyi István

Debreceni Egyetem
Természettudományi Doktori Tanács
Matematika- és Számítástudományok Doktori Iskola
Debrecen, 2012.

Ezen értekezést a Debreceni Egyetem Természettudományi Doktori Tanács Matematika és Számítástudományok Doktori Iskola Matematika-didaktika programja keretében készítettem a Debreceni Egyetem természettudományi doktori (PhD) fokozatának elnyerése céljából.

Debrecen, 2012. 04. 26.

Vajda István
jelölt

Tanúsítom, hogy Vajda István doktorjelölt 2010-2012. között a fent megnevezett Doktori Iskola Matematika-didaktika programjának keretében irányításommal végezte munkáját. Az értekezésben foglalt eredményekhez a jelölt önálló alkotó tevékenységével meghatározóan hozzájárult. Az értekezés elfogadását javasolom.

Debrecen, 2012. 04. 26.

Dr. Hortobágyi István
témavezető

A diszkrét matematika és lineáris algebra számítógéppel támogatott oktatása

Értekezés a doktori (PhD) fokozat megszerzése érdekében a matematika-didaktika tudományágban

Írta: Vajda István okleveles matematika-fizika-számítástechnika szakos tanár

Készült a Debreceni Egyetem Matematika- és Számítástudományok Doktori Iskolája (Matematika-didaktika programja) keretében.

Témavezető: Dr. Hortobágyi István

A doktori szigorlati bizottság:

elnök: Dr. ....

tagok: Dr. ....

Dr. ....

A doktori szigorlat időpontja:

Az értekezés bírálói:

Dr. ....

Dr. ....

Dr. ....

A bírálóbizottság:

elnök: Dr. ....

tagok: Dr. ....

Dr. ....

Dr. ....

Dr. ....

Az értekezés védésének időpontja:

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés

A matematikát általában nehéz tantárgynak tartják, tanulásával és tanításával kapcsolatosan sokféle hiedelemmel találkozhatunk. Sokan úgy gondolják, hogy ha valakinek nincs tehetsége a matematikához, akkor ezen nem lehet segíteni. A matematika módszertannal, illetve a matematikai gondolkodás pszichológiájával foglalkozó szakemberek viszont rendületlenül keresik azokat a módszereket, amelyekkel a tárgy tanulását, oktatását hatékonyabbá lehetne tenni. Ennek a célnak az elérése érdekében az oktatási folyamat komplex, átfogó elemzésére és gondos megtervezésére van szükség, ugyanakkor az alkalmazott módszerek, eszközök között vannak olyanok, amelyeket önmagukban is érdemes vizsgálni. Az egyik fontos eszköz a számítógép, amely az utóbbi évtizedek rohamos informatikai fejlődésének következtében könnyen elérhetővé és sokféleképpen felhasználhatóvá vált az oktatási folyamatban.

Bár a számítógép és az internet használata más tantárgyak oktatásában is növekvő szerepet tölt be, ez a tendencia a matematikai és az informatikai tudományok közötti számos kapcsolat miatt a matematika oktatásában még inkább érvényesül. Egyrészt az informatika számos matematikai problémát vet fel, amelyek felhasználhatók a matematika oktatásában az érdeklődés felkeltésére és a gyakorlati problémák előtérbe helyezésére, másrészt a számítógép megkönnyíti a mechanikus számítási feladatok elvégzését, számos szemléltetési lehetőséget biztosít a matematikai fogalmak megértéséhez.

A felsőoktatásban különösen gyorsan elterjedt az informatikai és média eszközök használata, különösen az előadásokon. A gyakorlatokon sokkal kevésbé elterjedt a nagyobb anyagi ráfordítás miatt, pedig a számítógép kiváló eszköz lehetne az önálló tanulói munka elősegítéséhez, illetve a hallgatók munkájának, tudásának értékeléséhez. Az egyetemi, főiskolai matematika oktatásában különösen gyakran használnak számítógépes eszközöket az analízis, illetve a statisztika tantárgy keretén belül.

1.1. A témaválasztás indoklása

Az Óbudai Egyetemen, illetve annak jogelőd intézményeiben kb. 20 éve tanítjuk a Diszkrét matematika és lineáris algebra (DMLA) tárgyat,[1] mérnök informatikus hallgatóknak. A tárgy az átlagos képességű és felkészültségű hallgatóknak általában száraz, nehezen érthető és tanulható, de elsősorban ez a tárgy tartalmazza azokat a matematikai ismereteket, amelyek az informatikus képzésben a legfontosabbak.

Témaválasztásomat ennek a tárgynak a tanítása során szerzett – részben negatív – tapasztalataim, illetve a számítógépes módszerek más tárgyakban – elsősorban analízisben – látott alkalmazásai motiválták. Célom az volt, hogy a számítógépes eszközöket felhasználva olyan módszereket keressek, amelyek a DMLA tárgy tanulását és oktatását hatékonyabbá teszik. Ezzel kapcsolatosan a következő kérdésekre kerestem a választ:

[1] A tárgy neve időnként változott, tartalma azonban csak kis mértékben, ami a lényegét nem érintette.

- A tárgy mely témaköreinél előnyös alkalmazni a számítógéppel támogatott oktatást?
- Milyen szoftverek állnak rendelkezésre, és milyen szempontok alapján válasszunk ezek közül?
- Milyen feladatok, feladatsorok segítik a hallgatók tanulási folyamatát? Mely feladatok válnak feleslegessé számítógépes módszerek használata esetén és milyen új feladatok felhasználására nyílik lehetőség?
- Milyen feladatok megoldása jelent nehézséget a hallgatók számára és miért? Hogyan befolyásolja a feladat nehézségét az alkalmazott szoftver használata?
- Milyen hatással van az informatikai eszközök használata az oktatás módszertanra?
- Hogyan szervezzük az órai munkát?
- Milyen számonkérési és ellenőrzési módszereket alkalmazzunk?
- Hogyan használjuk a számítógép által adott lehetőségeket a tanulói tudás ellenőrzésére?
- Mi a hallgatók véleménye az alkalmazott módszerekről, és azok hogyan hatnak tanulási módszereikre, szokásaikra?

1.2. Az értekezéshez kapcsolódó munkák és célkitűzések

A matematika számítógéppel támogatott oktatása túlságosan nagy területnek bizonyult, ezért vizsgálataimat két kisebb területre szűkítettem. Ezek egyike a DMLA tárgy számítógép algebrai rendszerrel (CAS) támogatott oktatása, a másik pedig új számítógépes vizsgáztatási lehetőségek keresése, az eMax rendszer matematikai moduljának fejlesztése.

1.2.1. CAS felhasználása a Diszkrét matematika és lineáris algebra tárgy oktatásában

A CAS rendszerek sokoldalú matematikai szoftverek, amelyek egyaránt alkalmasak numerikus és szimbolikus számítások elvégzésére, általában sokféle grafikus szemléltetési lehetőséget tesznek lehetővé, és többségük programozási lehetőséget is biztosít. Vannak közöttük speciális célúak, amelyek a matematika egy bizonyos területére koncentrálnak, és vannak általános célúak. Választásom a Sage rendszerre esett, amelyet kifejezetten oktatási célra fejlesztettek ki 2005-ben. A kijelentés- és predikátumlogika kivételével a Diszkrét matematika és lineáris algebra tárgy minden fejezetében jól használhatónak bizonyult.

Demonstrációs célokra már korábban is használtam a programot, de a 2009/10 tanévben lehetőségem nyílt arra, hogy szemeszterenként két-két tankörnek számítógépes laborban tartsam a DMLA tárgyhoz tartozó gyakorlatot. Az évfolyam nagy része továbbra is a megszokott táblás gyakorlaton vett részt. A következő évtől választható tárgyként[2] hirdettem meg a számítógéppel támogatott gyakorlatot, továbbra is két-két tankör számára félévenként. Az új tárgy keretében feldolgozott témakörök

[2] Matematikai problémák megoldása számítógéppel (MP)

elsősorban a DMLA tárgy anyagához kapcsolódtak, de emellett előkerült a függvényábrázolás, a függvényvizsgálat és az egyenletmegoldás is.

A gyakorlatokon a hallgatóknak egy-egy feladatsort kellett megoldaniuk – lehetőség szerint a Sage rendszer felhasználásával, de akkor is elfogadtam a megoldást, ha a hallgató nem használta a számítógép által nyújtott lehetőségeket. Ezen kívül a hallgatók házi feladatot is kaptak, amelynek megoldását a következő gyakorlatig kellett beadniuk.[3]

A házi feladatok beadása mellett a 2010/11 tanévtől a hallgatóknak a kurzus során két zárthelyi dolgozatot is kellett írniuk és elektronikus formában beadniuk az évközi jegy megszerzéséhez.[4] Azok a hallgatók, akik párhuzamosan a DMLA tárgyat is felvették, annak hagyományos zárthelyi dolgozatot is megírták.

Az MP tárgy tanítása és az eredmények vizsgálata során a következő hipotézisekkel éltem:

1. Az informatikus hallgatók számára nem okoz gondot a CAS kezelése, a használat alapvető elemeit gyorsan elsajátítják.
2. A Sage használata a reprezentációs lehetőségek kiszélesítésével elősegíti a matematikai fogalmak mélyebb megértését.
3. Mivel más témakörökkel kapcsolatosan a kutatások gyakran számolnak be a CAS használatának sikerességéről, a kísérleti csoportokban jobb eredményekre lehet számítani a DMLA tárgyból, mint a kontrollcsoportokban.
4. A rendszer használata bővíti a feldolgozható feladatok és témák körét.
5. A számítógép használata elősegíti a hallgatók önállóbb munkavégzését az órákon és a házi feladatok elkészítése során.
6. A rendszer használata mellett a hallgatók szívesebben foglalkoznak matematikai feladatokkal, mint a hagyományos oktatási forma esetén.
7. A kitűzött feladatok nehézsége összefüggésben van a felhasználás célja szerinti típusával.
8. A CAS használatának engedélyezése a feladatok nehézségi sorrendjét jelentősen megváltoztatja.

1.2.2. Az eMax számítógépes vizsgáztató rendszer

Az eMax rendszer fejlesztése az Óbudai Egyetem jogelőd intézményében a Budapesti Műszaki Főiskolán indult 2005-ben. A cél egy számítógépes tudásellenőrző rendszer létrehozása volt, amely a szokásos tesztfeladatok mellett olyan aktív feladatokat (62. oldal) is képes vizsgálni, ahol a hallgató maga fogalmazza meg a kérdésre adott választ, és amely értékes részleteket tartalmazó, de nem teljes választ is képes arányos részpontszámmal értékelni. A rendszer a következő két aktív feladattípust támogatja:

[3] Mivel a Sage rendszer ingyenes, sőt szabad forráskódú szoftver, ezért otthoni használata nem okozott problémát.

[4] A 2009/10 tanévben a DMLA tárgy hagyományos zárthelyi dolgozatait számítógép felhasználása nélkül kellett kötelezően megírniuk, de ekkor is lehetőséget kaptak egy számítógépen megírt zárthelyi beadására javítás céljából.

- rövid szöveges feladat;
- matematika feladatok egy speciális fajtája.

Értekezésemben csak a rendszer matematikai moduljáról írok, aminek a tervezésével, és tesztelésével járó munka egyenlő mértékben oszlott meg dr. György Anna kolléganőm és közöttem, míg az implementációt Szénási Sándor végezte. A végrehajtandó feladatok a következők voltak:

- a matematikai modul hallgatói felületének tervezése;
- a matematikai modul oktatói felületének tervezése;
- a támogatott feladattípusok kiválasztása;
- az értékelő algoritmusok tervezése;
- feladatok bevitele mintamegoldásokkal, tesztesetekkel és pontozással a feladatbankba;
- feladatsorok létrehozása a rendszerben levő feladatok felhasználásával;
- próbavizsgák lebonyolítása;
- a számítógépes értékelés összehasonlítása a kézi értékelés eredményével.

A feladatmegoldások bevitelének formája, a feladatok és megoldásaik MathML[5] formában való tárolása, a 7.3.3. fejezetben leírt tesztalgoritmus és megoldási fák összeépítésének gondolata tőlem származott, a szűrőalgoritmusok kidolgozása dr. György Anna nevéhez fűződik, míg a többi feladathoz mindketten hozzájárultunk ötleteinkkel és munkánkkal.

A rendszer matematikai moduljával kapcsolatos elvárások a következők voltak:

- Áttekinthető felhasználói felület biztosítása, ami egyszerű és kényelmes kezelési lehetőséget biztosít.
- Aktív feladatok támogatása.
- A megoldások gyors, kvázi automatikus értékelése.
- A kézi értékelésre utalt megoldások aránya legyen alacsony, lehetőleg ne haladja meg a megoldások 5%-át!
- A rendszer által értékelt feladatok esetén a program által adott pontszám ne térjen el jelentősen (10%-nál nagyobb mértékben) a tanár által kézi javítás során adott pontszámtól!
- Adjon pontos, részletes, információt az egyes hallgatók eredményeiről, tegye lehetővé az elkövetett hibák megtekintését!
- Adjon áttekinthető, összefoglaló jellegű információt a vizsga eredményeiről hallgatónként, feladatonként és összességében!

[5] Mathematical Markup Language (matematikai leíró nyelv) [26].

2. Matematikadidaktikai megalapozás

2.1. A matematika tanulásának néhány pszichológiai kérdése

A matematika tanulásának három alappillére az adott tárgykörhöz tartozó fogalmak, tételek és algoritmusok megismerése, amelyek alapul szolgálnak az alkalmazásokhoz szükséges modellek felállítására és a problémák megoldásához.

2.1.1. Fogalmak

Skemp szerint a matematika tanulása és tanítása során felmerülő nehézségek elsősorban pszichológiai természetűek. Kutatásaiban hangsúlyos szerepet kap a fogalmak megértése, amelyekkel kapcsolatosan könyvében két egyszerű, de fontos alapelvet fogalmaz meg:

1. „Definíció segítségével senkinek nem közvetíthetünk az általa ismerteknél magasabb rendű fogalmakat, ez csak megfelelő példák sokaságának bemutatásával lehetséges.”
2. „Mivel a matematikában az előző pontban említett példák ugyancsak fogalmak, ezért mindenekelőtt meg kell győződnünk arról, hogy a tanuló már rendelkezik ezekkel a fogalmakkal [46].”

A felsőfokú matematikaoktatásban mindkét alapelvet rendszeresen megsértik, hiszen az új fogalmak bevezetése általában az előadásokon a definíció kimondásával történik – szerencsés esetben az előadó utólag példát is mond a bevezetett fogalmakra – és nincs lehetőség a hallgatók tudásának átfogó felmérésére, illetve a fogalmi hiányok pótlására.

Skemp véleményével más a matematikatanulás pszichológiájával foglalkozó szerzők is egyetértenek. Vinner a következőt írja: „A definíció súlyos problémát eredményez a matematika tanulásában. Talán mindennél jobban képviseli a matematika professzionális matematikusok által elgondolt struktúrája és a fogalmak megértésének kognitív folyamata közötti ellentmondást [59].”

Amikor egy fogalom nevét látjuk vagy halljuk, az felidéz valamit a memóriánkban. Ez általában akkor sem a fogalom definíciója, ha az számunkra ismert, hanem a fogalomképzet [49] [60]. Ez a fogalomnak egy nem szöveges formájú megjelenése a fejünkben, hanem valamilyen vizuális reprezentációja, illetve tapasztalatok vagy benyomások összessége is. Általában szöveges formában is le tudjuk írni, de nem szabad elfelejteni, hogy nem az az elsődleges, amikor a fogalomra gondolunk.

Ezek a vélemények sok igazságot tartalmaznak, amit az oktatók mindennapi tapasztalatai is alátámasztanak. A hallgatók számára szokatlan, összetett fogalmak – amelyek definíciója esetleg bonyolultabb megfogalmazású a megszokottnál[6] – bevezetésekor, az oktatók többsége azonnal példákkal illusztrálja a fogalmat. Ugyanakkor sokan hangsúlyozzák, hogy a definíciónak is fontos szerepe van a fogalom megértésében. Pitt részletes választ ír Fodor és szerzőtársai 1980-ban megjelent cikkére, amelyben „védelmébe veszi” a definíciókat [15] [40].

[6] Határérték, algebrai struktúrák, relációk, ...

A fogalomra adott példák sok olyan információt hordozhatnak, ami nem tartozik a fogalomhoz (zaj) ezzel megnehezítve a fogalom pontos megértését [46]. Tipikus példa erre a függvény, amelynek általános fogalma sokáig nem alakul ki, hiszen a tanulók csak egyváltozós, valós függvényekre látnak példát, és a függvény megadása szinte mindig képlet segítségével történik.[7] A tanuló számára hosszú folyamat, amíg a különböző példák sokaságából ki tudja szűrni a lényeges információt, és eljut a fogalom lényegéhez. Ebben segítséget nyújthat a szöveges definíció, ha az a teljesség követelményének eleget tesz [1], hiszen konkrét példák vizsgálatával lehetőséget nyújt a formálódó fogalomképzet ellenőrzésére, és támpontot nyújt annak esetleges módosításához. A példák mellett fontos szerepet töltenek be az ellenpéldák is, amelyek még világosabban mutatják, hogy a definíció minden követelménye fontos a fogalom meghatározásában.

Vollrath szerint egy tanuló akkor sajátított el egy fogalmat, ha a következő ellenőrizhető képességekkel rendelkezik [61]:

1. Képes megadni a fogalom definícióját.
2. El tudja dönteni, hogy egy adott objektum példa-e egy bizonyos fogalomra. (fogalomazonosítás)
3. Tud példákat felsorolni, illetve konstruálni az adott fogalomra. (fogalomrealizálás)
4. Ismeri a fogalom tulajdonságait.
5. Képes a fogalmat felhasználni szituációk leírására, illetve problémák megoldására.
6. El tudja helyezni a fogalmat a fogalmak hierarchikus rendszerében. (Ismeri az alá-, illetve fölérendelt fogalmakat.)

Bár ebben a felsorolásban a fogalom definíciójának ismerete első helyen szerepel, a fogalom megértése Vollrath szerint sem jelenti csupán a definíció ismeretét. Bár a kritériumok között nem mindegyik teljesen egyértelmű – a fogalom minden tulajdonságának ismerete aligha lehet követelmény, hiszen újabb és újabb tulajdonságokat fedezhetünk fel – kiváló támpontot nyújtanak ahhoz, hogy milyen jellegű feladatok gyakorlásával lehet a fogalmat világossá és egyre kidolgozottabbá tenni a tanuló számára.

Megfigyelhetjük, hogy a példák szerepe itt is nagy hangsúlyt kap (2-3. pont), legalább ilyen fontos azonban, hogy a fogalmat nem elszigetelt ismeretként kell elsajátítani, hanem az egyéb matematikai ismeretekkel összefüggésben (4-6. pont). Ez nemcsak az egyéb fogalmakkal való kapcsolatok feltérképezését jelenti, hanem a kapcsolódó tételek ismeretét is, hiszen a fogalom tulajdonságait és az egyéb fogalmakkal

[7] A fenti kijelentés nem teljesen igaz, hiszen találkoznak a tanulók többváltozós függvényekkel (téglalap területe), látnak példát táblázattal való megadásra és tanulnak a geometriai transzformációkról is. A többváltozós függvények esetében azonban általában el sem hangzik, hogy függvényekről van szó, a nem képlettel megadott függvényekre pedig kevés példát látnak, és nem használják őket semmire. A geometriai transzformációkkal kapcsolatosan éppen csak meg szokták említeni, hogy ezek is függvények, ráadásul a tanulók itt is csak speciális példákkal (egybevágósági és hasonlósági transzformációk) találkoznak.

való kapcsolatokat ezek segítségével fogalmazzuk meg, és ezek alapján alkalmazhatjuk a fogalmakat a modellalkotásban.

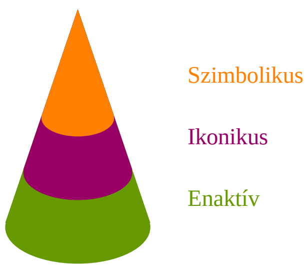
Mindez összhangban van a Skemp által használt szkéma (séma) fogalmával, amit ő szellemi struktúraként határoz meg. Bár erre pontos definíciót nem ad, önmagához hűen megpróbálja példákkal illusztrálni és körülírni. A leírásból kiderül, hogy a szkéma egy adott fogalomhoz valamilyen szempont, tulajdonság szerint kapcsolódó fogalmak rendszere. Nyilvánvaló az is, hogy egy fogalom több szkémának is része lehet [46]. A szerző szerint a szkémáknak két funkciója van:

- integrálja a meglévő tudást,
- szellemi eszközként szolgál az új tudás elsajátításához.

A szkémák szerepe a matematikatanulásban nagyon jelentős, mind az ismeretanyag memorizálása, mind az új ismeretek megtanulása szempontjából. A matematikai nehézségekkel küszködő tanulók legtöbbjének éppen az a problémája, hogy szkémái nem, vagy nem megfelelően alakultak ki.

A Skemp által javasolt példák sokaságát alkalmas reprezentációk segítségével tudjuk megjeleníteni. A reprezentáció jelentése szövegkörnyezettől függően változhat. Létezik külső és belső reprezentáció. Az utóbbi az egyénre jellemző, nem tudjuk pontosan, hogy egy másik ember belső reprezentációja milyen. Más a helyzet a külső reprezentációval, amely rajtunk kívül jelenik meg és az érzékszerveinkkel veszünk róla tudomást. A pszichológiában gyakran azt értik reprezentáción, hogy a konkrét anyagi világ jelenségeit elvont fogalmak és szimbólumok segítségével modellezzük [29]. Bruner szerint a tudást háromféle síkon lehet reprezentálni [7]:

- materiális (enaktív) sík:
  Az ismeretszerzés konkrét tárgyi tevékenységek révén megy végbe.
- ikonikus sík:
  Az ismeretszerzés szemléletes képek, illetve elképzelt szituációk segítségével történik.
- szimbolikus sík:
  Ismeretszerzés matematikai szimbólumok és a nyelv segítségével (1. ábra).



1. ábra.

Az egyes matematikai objektumok reprezentációja ugyanazon a síkon is sokféleképpen valósulhat meg, pl. egy egész szám kifejezhető sokféle számrendszerben, prímtényezős alakban, egy valós-valós függvény megadható Descartes-féle koordinátarendszerben a grafikonjával, de nyíldiagrammal is.

A reprezentációknak másféle osztályozásai is léteznek [36]. Az egyes reprezentációk segítségével az objektumok további tulajdonságaira következtethetünk, azonban ezek vizsgálatára nem minden reprezentáció egyformán alkalmas. A matematikai vizsgálatok kulcsfontosságú eleme a megfelelő reprezentáció megtalálása. Alkalmas számítógépes program megkönnyíti a váltást az egyes reprezentációk között, elősegítve ezzel a probléma megoldását [52].

2.1.2. Tételek

A tételek a matematikai fogalmak tulajdonságaira, illetve a közöttük levő összefüggésekre vonatkozó állításokat mondanak ki. Ezek némelyike egyszerű, más esetben ezeknek az állításoknak a megértése is nehéz. A kimondott állítások helyességéről alkalmas bizonyítás segítségével győződhetünk meg. Stein a matematikai bizonyítási koncepciók négy szintjét különbözteti meg [1]:

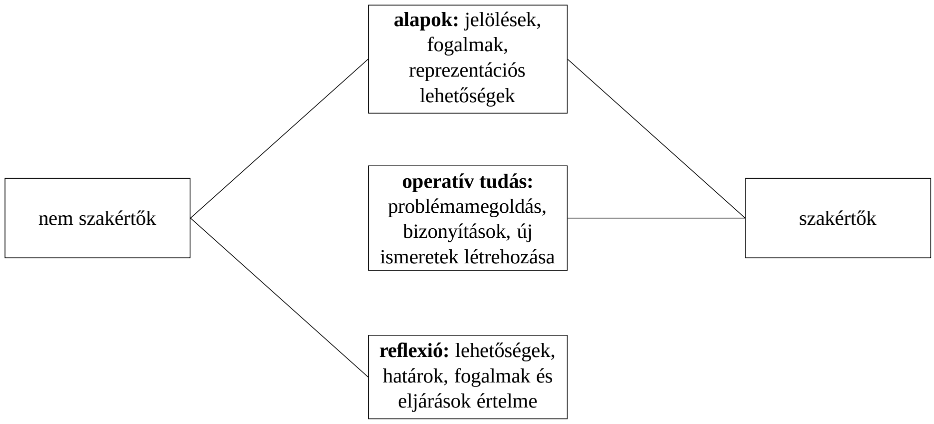
- matematikai-logikai elmélet;
- matematikai elmélet;
- lokálisan rendezett elmélet;
- mindennapi okoskodások.

A minden részletében rögzített matematikai-logikai elmélet szintjét még az egyetemi matematika oktatásában is ritkán használják, helyette a matematikai elmélet szintje a jellemző, közép és általános iskolában pedig a lokálisan rendezett elmélet, illetve a mindennapi okoskodások szintje dominál. Az 1980-as évek óta a matematikaoktatásban a formalizmus és a matematikai szigorúság némileg enyhült és inkább a matematikai tartalom került előtérbe. Ebben a folyamatban a „mindent bizonyítsunk" hagyománya még az egyetemi oktatás egyes területein is megkérdőjeleződött. Fischer a kompetencia három összetevőjét a következőképpen határozza meg:

- *alapismeretek és alapkészségek*
  jelölések, fogalmak, reprezentációs lehetőségek;
- *operatív tudás*
  problémamegoldás, bizonyítások, új ismeretek felfedezése;
- *reflexió*
  lehetőségek, a jelölések, fogalmak és eljárások értelmezése és korlátaik.

Fischer a hallgatókat két csoportba osztja: a szakértők és a nem szakértők. Míg a szakértőknek elsősorban az első két területen kell kompetensnek lenniük, a nem szakértők esetében úgy véli, hogy az első és a harmadik területre kell helyezni a hangsúlyt (2. ábra), mivel az ő esetükben olyan tudás elérése a cél, amely munkájukban eszközül szolgál és lehetővé teszi a megfelelő kommunikációt a szakértőkkel, amennyiben a feladatuk ezt szükségessé teszi [14].

Amennyiben Fischer elméletét elfogadjuk, akkor nem utasíthatjuk el az egyetemi matematikaoktatás reformjának szükségességét sem. Az ellentmondásmentesség, a



2. ábra. A kompetenciák Fischer szerint

kifogástalan logikai felépítés igénye a matematikusok számára magától értetődő követelmény, ugyanakkor a társtudományok művelőinek az esetek többségében nem a matematika felépítésére, hanem annak eredményeire van szüksége.

2.1.3. Algoritmusok

Bár az algoritmusok minden tudományban – és a mindennapi életben is – fontos szerepet játszanak, a matematika és az informatika tudományokkal kapcsolatosan szoktuk őket leggyakrabban emlegetni. Szinte minden – elméleti és gyakorlati – probléma megoldásához nélkülözhetetlenek, ezért fontos, hogy az iskolai tanulmányok során is hangsúlyt kapjanak. Az algoritmusok tanítása a közoktatásban – és gyakran a felsőoktatásban is – legnagyobb mértékben a matematikára hárul. A matematikai feladatok megoldása során a tanulók sokféle algoritmust alkalmaznak, de ezek elemzésére nem minden esetben kerül sor, különösen az alsóbb osztályokban. A későbbiekben szó lesz arról, hogy az eljárások használata segíti az azzal kapcsolatos fogalmak megértését, de ehhez a tanulónak meg kell értenie az egyes lépések szerepét és szükségességét. Az algoritmus fogalma általában a programozással kapcsolatosan szokott előtérbe kerülni, tehát elsősorban a felsőoktatásban és ott is az informatikus, illetve programozó szakon. Az informatika tárgyak oktatása során a hallgatók sok matematikai problémával találkozhatnak.

2.1.4. A matematikai készségek öt összetevője

A National Research Council (Washington) kiadványában a matematikai készségek következő öt öszetevőjét különböztetik meg [32].

- *fogalmi megértés*
  A matematikai elgondolások integrált és funkcionális megértése, ami lehetővé teszi, hogy a tanulók új fogalmakat tanuljanak meg azáltal, hogy azokat a

már ismert fogalmakhoz kapcsolják. A fogalmi megértés elősegíti az ismeretek hosszú távú megjegyzését és megvéd szokványos hibáktól.

- *eljárások rutinos végrehajtása*
  Olyan képesség, amely lehetővé teszi az eljárások rugalmas, hatékony, pontos és helyes végrehajtását.
- *stratégiai készség*
  A formalizálás, a reprezentálás és a problémák megoldásának képessége.
- *adaptív indoklási készség*
  A logikai gondolkodás, elemzés, magyarázat és döntés képessége.
- *a tárgyhoz való pozitív viszony*
  A tanuló a matematikát ésszerűnek, hasznosnak, értékesnek látja és hisz a szorgalomban, illetve a saját képességeiben.

A szerzők az összetevőket mint szálakat képzelik el, amelyek egymásba fonódásával épül fel a matematikai tudás (3. ábra).

3. ábra. A matematikai készségek öt összetevője

Az oktatók és az matematikatanítás módszertanával foglalkozó szakemberek az egyes összetevők szerepét nem tekintik egyenrangúnak. A vita, hogy melyik összetevőre helyezzük a nagyobb hangsúlyt, általában a fogalmi megértés és az eljárások területén való gyakorlottság viszonylatában szokott leginkább előtérbe kerülni. A módszertannal foglalkozó szakemberek többsége a fogalmi megértés fontosságát hangsúlyozza, mert véleményük szerint az eljárások értelem nélküli megtanulása általában nem eredményez a későbbiekben jól használható, hosszan tartó ismeretet. Ugyanakkor a tanárok és oktatók esetén nagy a csábítás, hogy az eljárások végrehajtásának gyakorlásával töltsék a tanítási idő nagy részét, mivel így az írásbeli számonkéréseken – ha azok eljárás centrikusak – jobb eredményeket tudnak elérni.

Skemp megállapítja, hogy a mindennapi társalgás során kétfajta megértésről szoktak beszélni. Az egyiket relációs megértésnek nevezi – ez lényegében ugyanaz, mint a fogalmi megértés – a másikat instrumentális megértésnek, ami annyit jelent, hogy tudjuk, hogy egy eljárás során milyen lépéseket kell végrehajtanunk. A tanulók gyakran az utóbbit értik megértésen, sőt előfordul, hogy a tanár is. Bár Skemp a fogalmi (relációs) megértést tekinti fontosabbnak és eredetileg csak erre gondolt, elfogadta, hogy létezik egy másik értelemben vett megértés is [47].

Más szerzők a fogalmi megértés és a procedurális képességek közötti kölcsönhatást vizsgálják. Wu szerint a fogalmi megértés és az eljárások végrehajtásában való jártasság szembeállítása értelmetlen, és azt a hamis képet tükrözi, amely szerint e két dolog egymás ellen hat. Ezzel szemben Wu úgy látja, hogy szoros összefonódás van köztük és a legtöbb esetben éppen az eljárások végrehajtásában való jártasság és precizitás teszi lehetővé, hogy a tanuló eljusson a fogalmi megértés szintjére [63].

Rittle-Johnson és Alibali ennél árnyaltabb képet fogalmaznak meg. Megállapítják, hogy a fogalmi megértés fontos szerepet játszik az eljárások megtanulásában és a fogalmak általánosításában, azonban úgy gondolják, hogy a két összetevő között kétirányú kapcsolat van. Ők is egyetértenek abban, hogy az eljárások végrehajtása során szerzett tudás pozitívan befolyásolhatja a fogalmi megértést. Példaként hozzák fel, hogy a 3-4 éves gyermekek gyakran helyesen számolnak, anélkül, hogy matematikaoktatásban részesültek volna, ezért feltételezik, hogy a számfogalmat a számolási eljárások alkalmazása során alakították ki magukban. Megemlítik azonban, hogy több olyan tanulmány is született, amelyek szerint bizonyos témakörökben, mint pl. a többjegyű számok kivonása, illetve a törtek szorzása, az eljárások végrehajtása nem szükségszerűen vezet a fogalmi megértéshez. Sok tanuló megtanulja, hogyan kell ezeket a műveleteket helyesen elvégezni, anélkül, hogy valaha is megértenék az eljárások mögött rejlő okokat. A szerzők tanulmányukban egy olyan kísérletet ismertettek, amelyben az egyenlőség fogalmának kialakulását vizsgálták. Az eredmény egyértelműen azt mutatta, hogy azoknál a tanulóknál, akiknél a tanítás során hangsúlyt fektettek a fogalom kialakítására, a fogalmi megértés és a problémamegoldási készség egy magasabb szintjét lehetett kialakítani [44].

Megállapíthatjuk tehát, hogy a procedurális készségek fejlesztése fontos része a tanítási folyamatnak és megfelelő módon és körülmények között alkalmazva segíti a fogalmi megértést. Tanításuk akkor válhat károssá, ha a tanuló – és esetleg a tanár is – csak a végrehajtandó lépések megjegyzésére koncentrál, anélkül, hogy ezeket kapcsolatba hozná a már meglévő ismereteivel, azaz integrálná a meglévő fogalmak és eljárások rendszerébe. Az ilyen módon megtanult ismereteket a tanulók könnyen elfelejtik, illetve pontatlanul emlékeznek rájuk és önkényes szabályokkal egészítik ki, amelyek hibás alkalmazásokhoz vezetnek [37]. Ezekre a jelenségekre a tanítási gyakorlatban számos példát láthatunk. A tanulók gyakran követnek el pl. az (1)-hez hasonló hibás egyszerűsítést, mert a pontos szabályra már nem emlékeznek.

$$\frac{3\cancel{a}+2b}{5\cancel{a}}=\frac{3+2b}{5} \tag{1}$$

Ilyenfajta tanulás mellett a matematikai készségek további összetevői, mint a stratégiai- és adaptív indoklási készség nem alakulnak ki, a feladatmegoldás során tapasztalt kudarcok pedig a tárgyhoz való pozitív viszonyt is lehetetlenné teszik.

Van azonban olyan nézet is amely szerint a fogalmi megértés túlzott előtérbe helyezése is káros lehet. Devlin ezzel kapcsolatosan a következőket írja [11]. „Annak, hogy a matematikát főtárgyként tanuló hallgatók előrehaladása lassú, sokkal lassúbb, mint a matematikát alkalmazott tárgyként tanulók, pl. fizikus vagy mérnökhallgatóké, az az alapvető oka, hogy a matematika tanszékek az előbbieknél teljes fogalmi megértésre törekednek, míg a leendő fizikusoknak és mérnököknek elsősorban funkcionális megértésre van szükségük.” Devlin tehát úgy gondolja, hogy a matematikát alkalmazó szakembereknek a szakterületükhöz kapcsolódó matematikai számításokat, eljárásokat kell alaposan ismerniük, hogy azokat könnyedén el tudják végezni, illetve végre tudják hajtani, míg az elméleti háttér tisztázása számukra túlságosan nagy és felesleges terhet jelent. Hozzáteszi azonban, hogy az oktatás felelőssége nyitva hagyni azt a lehetőséget, hogy a hallgató később tovább tudja fejleszteni, illetve módosítani a benne kialakult fogalomképet, ha ez szükségessé válik. Könnyű észrevenni, hogy Devlin véleménye némi rokonságot mutat Fischer korábban említett elméletével, de míg Fischer a bizonyítások és a problémamegoldó gondolkodás területén tartja szükségesnek, hogy engedjünk a felépítés szigorúságából, addig Devlin szerint a fogalmak pontos kialakítása terén is engedményeket kell tennünk.

Bár a fenti elméletek különféleképpen közelítik meg a matematikaoktatást és más-más módszert, illetve alapelvet helyeznek előtérbe, mindegyikben van olyan elem, amit érdemes lehet figyelembe venni. A választott módszer azonban erősen függ attól, hogy milyen életkorú tanulókról van szó, milyen előismeretekkel, képességekkel rendelkeznek, és milyen célból tanulnak matematikát. A „funkcionális megértésre” való törekvés nemcsak a felsőoktatás bizonyos kurzusain lehet indokolt, hanem gyakran az általános iskola alsóbb osztályaiban is. Az írásbeli szorzás vagy osztás algoritmusa mögött pl. olyan matematikai elmélet áll, amelyet az általános iskolás tanulók még nem képesek teljes egészében megérteni, képesek viszont ezen algoritmusok végrehajtására. Mégis, már ezen a szinten is szükség van a számfogalom, illetve a művelet fogalmának fejlesztésére, mert szükség lesz rájuk a későbbi tanulmányok során, illetve ezek hiányában a fenti algoritmusok sem taníthatók megfelelő szinten. Ez azonban egy hosszú folyamat, a számfogalom fejlesztése a középiskolában, sőt az egyetemen is folytatódik. Érdemes megfigyelni, hogy a tanítás célja is kettős ezen a szinten, mert egyrészt olyan ismereteket ad a tanulóknak, amelyekre a mindennapi életben is gyakran szükség van (számolási módszerek)[8], másrészt olyan fogalmakat alakít ki, amelyek a későbbi tanulmányok alapját képezik.

Az általános iskola felsőbb osztályaiban és a középiskolában a gondolkodás fejlesztésére és a további tanulmányok előkészítésére tevődik a hangsúly, így természetes, hogy – szerencsés esetben – a fogalmi megértésre törekvés kerül előtérbe. Bár a deklarált tanítási célok között mindig kiemelik a gyakorlati példák szerepét és a min-

[8]Még akkor is, ha a számológépek elterjedése miatt, nincs szükség olyan szintű számolási készségre, mint korábban.

dennapi élettel való kapcsolatot, kevés olyan tanuló van, aki a középiskolában tanult matematikai ismereteket később a mindennapi életben valóban használja.

Miközben egyes matematikatanítással foglalkozó szakemberek a matematikai képességek és készségek szétválasztására és külön-külön való elemzésére törekszenek, addig mások éppen ezek összefonódását és elválaszthatatlanságát vizsgálják. Gray és Tall megállapították, hogy a matematikai szimbólumok természete kettős, egyszerre utalnak egy eljárásra és egy fogalomra is. Észrevételüket számos példával támasztották alá és ennek alapján bevezették a procept[9] fogalmát. Cikkükben amellett érvelnek, hogy a szimbólumot a tanulók többsége először mint eljárást (folyamatot) értelmezi, de később el kell jutniuk a szimbólum fogalomként való értelmezéséhez is, mert anélkül nem tudják azt a későbbi tanulmányaikban felhasználni [18].

[9] A nevet a *process* (folyamat) és a *concept* (fogalom) szavakból alkották.

3. Számítógépes módszerek a matematika tanulásában és oktatásában

Az informatika rohamos fejlődése a XX. század második felének és a XXI. század elejének leglátványosabb folyamatai közé tartozik. A számítógép az életünk részévé vált, gyakorlatilag mindenütt megtalálható és nélkülözhetetlenné vált. Ebből a folyamatból nem maradt ki az oktatás sem, az informatika eszközeinek felhasználási lehetőségei az oktatásban a módszertani kutatások középpontjába kerültek.

A matematika oktatását befolyásoló számítógépes módszerek két fő csoportra bonthatók. Az egyik elsősorban az ismeretszerzés folyamatát támogatja, a másik pedig a tudásellenőrzést segíti. Ez a szétválasztás nem éles, hiszen a tudásellenőrzés egyik legfontosabb célja éppen a tanulási- és tanítási folyamat segítése.

3.1. Az ismeretszerzés folyamatát támogató számítógépes eszközök

A matematikai ismeretszerzés folyamatát támogató számítógépes eszközök egy lehetséges csoportosítása a következő:

- információs és ismeretanyagok;
- szemléltető eszközök;
- számítások és algoritmusok végrehajtását támogató eszközök;
- feladatmegoldást támogató eszközök;
- hálózati eszközök.

A számítógépes információs és ismeretanyagok (pl. az *elektronikus tankönyvek*), hasonlóak a megfelelő hagyományos változataikhoz. Előnyük az olcsóbb előállítás, könnyű sokszorozhatóság, továbbá hogy számítógépes hálózaton keresztül bárhol elérhetők és hogy gyorsan lehet bennük információt keresni. Szerencsés esetben megfelelő szemléltető eszközöket, ábrákat, animációkat tartalmaznak. Ebbe a kategóriába esnek a komplex rendszerek súgói, definíció-, illetve tételgyűjteményei, továbbá a Wikipédia oldalai is. Míg a hagyományos könyvek jegyzetek tárolása helyigényes, számítógépes változataik szinte korlátlan számban érhetők el az interneten.

A szemléltető eszközökhöz tartoznak az *ábrák, grafikonok, képek, videók, animációk*. Ezek számítógép nélkül is létező eszközök, azonban a számítógép közös technikai hátteret biztosít számukra, ami a használatukat egyszerűbbé teszi. Ide sorolható továbbá néhány szoftver is, mint a függvényábrázoló programok, a dinamikus geometriai rendszerek és más programok, amelyek matematikai objektumok – geometriai alakzatok, gráfok – grafikus megjelenítését teszik lehetővé. Ezen szoftverek egy része persze nemcsak ábrázolásra, hanem az ábrázolt objektumokkal kapcsolatos numerikus adatok előállítására is alkalmas.

A feladatmegoldást támogató eszközök egyik fajtáját a *mintapéldák* alkotják. Ezek ugyancsak léteztek és használatosak voltak a hagyományos oktatás során is, számítógépes formájuk azonban rugalmasabb, ezeknél ugyanis csak feladat típusa rögzített, az adatokat a tanuló maga választhatja. Jó példák ezekre a lineáris algebra tárgykörében az Old Dominium University honlapján található mintafeladatok [4].

A számítógépes *tesztfeladatok* többsége egyszerű feleletválasztás, tehát a kérdésre megadott néhány – általában négy vagy öt – válaszlehetőségből ki kell választani az egyetlen helyeset. Gyakorlásra is és vizsgáztatásra is alkalmazzák őket, de mindkét esetben egy korábban tanult anyagrészből megszerzett tudást lehet velük ellenőrizni. Népszerűségük oka elsősorban az, hogy a válaszok helyességét könnyű ellenőrizni [48]. A tesztfeladatok egy speciális esetének tekinthetjük az eldöntendő kérdéseket, ahol csak az igen és a nem válasz között kell választanunk.

A számítások elvégzését támogató eszközök egy része olyan szoftver, ami a zsebszámológépek működését szimulálja. Sokféle változata van, pl. hagyományos, tudományos, illetve különféle számrendszerekben való számítás elvégzésére alkalmas. Részben ide tartoznak a számítógép algebrai rendszerek (szimbolikus algebra rendszerek, CAS) is, amelyek a numerikus számítások mellett a szimbolikus számolásokat is támogatják. Ezek azonban már részben a negyedik típushoz tartoznak, hiszen a feladatmegoldást támogató eszközök rendszerint használnak egy ilyen rendszert a háttérben. A számítógépes eszközöknek ez a fajtája hasonlít a mintafeladatokhoz, hiszen ebben az esetben is a felhasználó adja meg a feladat bemenő adatait, és a megoldást a rendszer generálja. Amíg azonban a mintafeladatok esetén egy részletes lépésekre bontott megoldási folyamatot követhetünk végig, ebben az esetben csak a végeredményt kapjuk meg, az ahhoz vezető út rejtve marad. Ezeket az eszközöket a hallgatók használhatják önellenőrzésre, illetve összetett problémák esetén a számolások megkönnyítésére, részfeladatok végrehajtására.

Felhasználhatók még a feladatmegoldás megkönnyítésére az ismert táblázatkezelő programok is, amelyek elsősorban a számítások elvégzésében nyújtanak segítséget, de különféle grafikonok, diagramok előállítására is alkalmasak. Sokan használják a matematika oktatásában az Excel programot, mert azt az intézmények más célokra ugyan, de megvásárolják [33].

A hálózati eszközök sokféle szerepet töltenek be az oktatásban. Ezek segítségével lehet a tanuláshoz szükséges anyagokat, segédanyagokat, instrukciókat a tanulóhoz eljuttatni, biztosíthatják az oktató és a hallgatók közötti kommunikációt, lehetőséget nyújtanak a házi feladatok beadására, a hallgatói munka értékelésére és az értékelés megtekintésére.

A fenti eszközök nem mindig választhatók szét egymástól. Az információs és ismeretanyagok gyakran tartalmaznak szemléltető eszközöket, illetve feladatmegoldást támogató eszközöket. A gyakorlatban előforduló oktató rendszerek a fenti eszközöket kapcsolják össze, illetve építik egymásba. Ehhez keretrendszereket használnak, mint pl. a Moodle, WebCT, ALEKS.

3.2. Számítógéppel támogatott matematikaoktatás és az oktatási célok

Az oktatás tervezésének egyik első és legfontosabb része a célok megfogalmazása. Érdekes kérdés, hogy a számítógépek használata ezeket milyen módon és mértékben befolyásolja. Új eszközök alkalmazása feleslegessé tehet bizonyos ismereteket és készségeket. Ma már nem tanítják – legfeljebb érdekességként megmutatják – a négyzetgyökvonás algoritmusát és a hosszabb számolásokat nem logaritmusok segítségével tesszük egyszerűbbé, hiszen ez a zsebszámológépek elterjedésével feleslegessé vált. Mivel a legtöbb helyen még a hagyományos keretek között oktatják a matematikát, ezért nehéz lenne megmondani, hogy a számítógépekhez és a matematikai szoftverekhez való könnyű hozzáférés milyen most használatos módszereket fog feleslegessé tenni.

Másrészt a számítógép olyan módszerek alkalmazását is lehetővé teszi, ami korábban nem volt elérhető, vagy nagyon fáradságos munkát igényelt volna. Ezen módszerek közül ki kell választanunk azokat, amelyek a későbbi tananyag részét fogják képezni, gyakorlati fontosságuk vagy sokrétű alkalmazhatóságuk miatt. Példaként említhetjük a numerikus módszereket és a statisztikát, amelyek megfelelő számítógépes háttér esetén részletesebben és a szokásosnál sokkal korábban taníthatók lennének.

A jelenleg tanított ismeretek nagy része valószínűleg továbbra is a tananyag része marad, de tanításának módszertana kisebb-nagyobb mértékben megváltozik, felhasználva a számítógép által nyújtott lehetőségeket.

A matematikai készségek korábban említett öt összetevője megmarad, de jelentése némileg módosul. Különösen igaz ez az eljárások rutinos végrehajtására vonatkozóan, de a megoldási stratégiák is igazodnak az új lehetőségekhez. A témában folytatott oktatási kísérletek általában megállapítják, hogy a számítógép használata pozitív hatást gyakorol a tanulók tárgyhoz való viszonyára és vizsgálják a fogalmi megértés elősegítésének új lehetőségeit.

3.3. Eljárások tanítása

A számítógéppel támogatott matematikaoktatás lehetőségeit és előnyeit hangsúlyozó vélemények mellett, olyanokkal is találkozhatunk, amelyek a hagyományos oktatást preferálják és tartanak attól, hogy a számítógép használata hátrányosan befolyásolja a tanulói ismeretszerzést. Sok tanár fejezte ki aggodalmát, hogy tanítványaik nem fogják megérteni, hogy mit csinálnak, ha az átalakításokat a szokásos kézi módszer helyett számítógép segítségével végzik [6].

Nemcsak a tanároknak vannak hasonló fenntartásaik. Povey és Ransom hasonló nehézségekről számoltak be hallgatóikkal kapcsolatosan [43]. Ezek a nézetek azt képviselik, hogy mivel nem tudjuk, hogy a számítógép hogyan dolgozik, ezért nem értjük és „nem tartjuk kézben” a folyamatot (black-box használat). Az aggodalmakat azok a kutatások is megerősítik, amelyek szerint az eljárások végrehajtása elősegíti annak és a hozzá kapcsolódó fogalmaknak a megértését [44]. Érdekes azonban, hogy a zsebszámológép használatával kapcsolatban már kevésbé vetődik fel ugyanez a probléma, pedig általában arról sem tudjuk, hogy hogyan dolgozik a háttérben. Igaz, az alapműveletek tanításakor sok tanító ragaszkodik ahhoz, hogy a tanulók ne használhassanak számológépet, de a gyökvonást ma már senki nem akarja papíron elvégeztetni, nem is beszélve a transzcendens függvények értékeinek kiszámításáról.[10]

[10]Néha előfordul a számológép használatának korlátozása a felsőoktatásban is. Van olyan oktató, aki nem engedi meg a számológép használatát a vizsgákon, mert úgy érzi, hogy a fejlettebb – grafikus ábrázolásra, illetve szimbolikus számításokra alkalmas – kalkulátorok tisztességtelen előnyhöz juttatják

Akik a számítógép matematikaoktatásban való használata mellett érvelnek, számos példát hoznak fel olyan alkalmazásokra, amelyek segítik a tananyag feldolgozását és jobb megértését. A példák egy része valamilyen megoldási módszer – algoritmus – részletes bemutatására szolgál. Ennek a fajta használatnak éppen az a lényege, hogy nem kapjuk meg az eredményt azonnal, hanem olyan lépésekben közelítünk hozzá, amely a felhasználó számára érthető módon követi a megoldás logikáját (white-box használat). Sokan mutatják be pl. a lineáris egyenletek megoldásának tanítását mérlegelv segítségével [6] [38] (4. ábra).

```
3*x+4==x-2
    3*x + 4 == x - 2
_-4
    3*x == x - 6
_-x
    2*x == -6
_/2
    x == -3
```

4. ábra. Egyenlet megoldása lépésekre bontva.

Ennek a használati módnak az előnyét általában abban látják, hogy a tanuló egy magasabb szintű folyamatra – az ekvivalens átalakítás kiválasztására – tud koncentrálni, annak végrehajtását a gépre bízhatja [35].

Természetesen ebben a témában is gyakori a black-box alkalmazás, amikor a szoftver azonnal a végeredményt adja meg a közbülső lépések bemutatása nélkül (5. ábra).

```
solve(3*x+4==x-2,x)
    [x == -3]
```

5. ábra. Egyenlet megoldása a solve() függvénnyel.

A black-box használattal kapcsolatos aggodalmak természetesen nem alaptalanok, hiszen kritika nélküli használatuk valóban nem segíti a tanulók képességeinek fejlődését, és könnyen eredményez hibás feladatmegoldásokat. Vannak azonban előnyei is. Ezek egyike, hogy átgondolt használat esetén, a rendszer által produkált hibák vagy meglepő eredmények felkelthetik a hallgatók érdeklődését [5] [27]. Másrészt, ez a használat a gyakorlott felhasználónak segítséget nyújt olyan problémák megoldásához, ami hagyományos eszközökkel csak nagyon hosszadalmasan vagy egyáltalán nem volna megoldható.

tulajdonosaikat azokkal szemben, akik ilyennel nem rendelkeznek.

A matematikában használatos eljárások tanításának egy sajátos módszere, amikor a hallgatónak meg kell valósítania az eljárás egy számítógépes implementációját. Ez szükségessé teszi az eljárás lépéseinek, feltételektől függő elágazásainak és a lehetséges hibáknak az alapos végiggondolását, az eljárás lényegének mélyebb megértését.

3.4. A számítógép algebrai rendszerek

A számítógép algebrai rendszerek (CAS)[11] az 1960-as években jelentek meg, de csak az utolsó két évtizedben kezdték el őket szélesebb körben használni a matematika oktatására. Jelenleg a legnépszerűbbek a Maple, a Mathematica és a Sage, de sok helyen használják a Derive, Mathlab és az Axiom programokat is. Ezen rendszerek egy része általános-, más része speciális célú, de az általános célúak sem fedik le a matematika minden területét. Az általános célú rendszerek mindegyike alkalmas numerikus és szimbolikus algebrai számítások elvégzésére, függvények ábrázolására, differenciálására, integrálására, de több olyan is van köztük, amely a számelmélet, geometria, gráfelmélet, algebrai struktúrák és egyéb matematikai témakörök tanulmányozásához is segítséget nyújt. Alkalmazhatóságukat növeli, hogy általában programkódok írását is lehetővé teszik, amelyek segítségével egyéni igényeket kielégítő algoritmusokat építhetünk be a rendszerbe.

Bár a CAS nagyon sokoldalú, sokféleképpen felhasználható, az oktatásban való hatékonyságukkal kapcsolatosan sokan kételkednek. A bizalmatlanság oka lényegében ugyanaz, mint amit a 3.3. fejezetben láttunk: ha a szükséges szintaktikát megtanultuk, a modern CAS képes mindenfajta szimbolikus átalakítást végrehajtani, amit egy átlagos tanulótól elvárunk. Ha azonban az átalakításokat a tanuló helyett a gép végzi, akkor félő, hogy a tanulás a megfelelő parancsok szintaktikájának megjegyzésére fog korlátozódni és elvész a matematikai tartalom. A rendszer használatának ilyen formáját Kovács Zoltán „vak”-nak nevezi szemben a „bölcs” felhasználással [34]. A „bölcs” felhasználáshoz a következő – példákkal illusztrált – javaslatokat teszi:

- Ne higgyük el automatikusan, amit a CAS eredményként produkál!
- Magyarázzuk meg az eredményt!
- Szükség esetén nyújtsunk alkalmas segítséget a rendszernek!

A CAS oktatásban való egyik helyes felhasználására az a tulajdonsága ad lehetőséget, hogy rövid idő alatt példák sokaságát tudja biztosítani egy adott fogalomra vagy jelenségre. Ez elősegíti ezekben a közös tulajdonságok felismerését. Erre az alkalmazásra mutat néhány érdekes példát Arnold [2].

[11] Computer algebrai rendszerek, szimbolikus algebrai rendszerek

Feladat: Oldjuk meg a következő egyenleteket! (Adjunk egzakt és/vagy numerikus megoldást a lehetőségektől függően.)

1. $x = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cdots}}}$
2. $x = \sqrt{1 + x}$
3. $x = 1 + \dfrac{1}{x}$
4. $x = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \cdots}}}}$
5. Miért?
6. Milyen más számokat lehet ezekkel a módszerekkel reprezentálni?

Észrevehetjük, hogy az 5. pontban Arnold a hallgatóra bízza, hogy mit érdemes kérdezni (nyitott feladat). Ha a feladatok megoldására a Sage rendszert alkalmazzuk, a solve() függvény csak a 3. egyenlet megoldásait adja meg közvetlenül, de egyszerű négyzetre emelés után a második egyenlet is megoldható ugyanígy. A közelítő módszer mindkét esetben alkalmazható, de amikor olyan intervallumot adunk meg amelyben nincs gyök, a find_root() függvény hibás értéket ad (6. ábra).

Az eredményeket megvizsgálva megállapíthatjuk, hogy a gyökök megegyeznek, ha a komplex számok halmaza az alaphalmaz.[12] Ennek magyarázata nem nehéz, hiszen a két egyenlet egyszerű algebrai átalakítások után ugyanarra a másodfokú egyenletre vezethető vissza. Nagyobb kihívást jelent az 1. és a 4. pont, ahol valójában nem is egyenletet kell megoldani, hanem egy-egy nem zárt alakban levő kifejezés számértékét kell meghatározni. Mivel ezeknek a kifejezéseknek az egyszerűsítéséhez a Sage nem nyújt egzakt eljárást, ezért közelítő módszerrel érdemes próbálkozni. Az 1. kifejezésről könnyű megállapítani, hogy értéke az $[1, 2]$ intervallumba esik, hiszen a második tag pozitív, de nyilvánvalóan kisebb 1-nél.[13] A kifejezést közelíthetjük egy zárt formulával, ha valamelyik nevezőt egy alkalmas a számmal helyettesítjük.

$$1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{a}}}$$

Az eredeti kifejezésre alkalmazott meggondolással beláthatjuk, hogy $a \in [1, 2]$, és $a = 1$, illetve $a = 2$ helyettesítéssel kapunk egy alsó, illetve egy felső becslést a kifejezés értékére (7. ábra).

[12] Ha az alaphalmaz a valós számok halmaza, akkor a gyökös egyenletnek csak egy megoldása van, és ez megegyezik a másik pozitív gyökével.

[13] Amennyiben feltehetjük, hogy a kifejezésnek van egy jól meghatározott valós értéke, de ezt az elsőéves hallgatók általában természetesnek tekintik.

```
solve(x==1+1/x,x)
```

```
[x == -1/2*sqrt(5) + 1/2, x == 1/2*sqrt(5) + 1/2]
```

```
solve(x==sqrt(1+x),x)
```

```
[x == sqrt(x + 1)]
```

```
solve((x==sqrt(1+x))^2,x)
```

```
[x == -1/2*sqrt(5) + 1/2, x == 1/2*sqrt(5) + 1/2]
```

```
find_root(x==1+1/x,0,2)
```

```
1.6180339887498949
```

```
find_root(x==sqrt(1+x),0,2)
```

```
1.6180339887498949
```

```
find_root(x==1+1/x,-2,0)
```

```
-1.0668042820266318e-12
```

```
find_root(x==sqrt(1+x),-2,0)
```

```
0.0
```

6. ábra. Két egyenlet egzakt és közelítő megoldása.

```
a=var('a')
kif=a
for i in [1..30]:
    kif=1/kif+1
print kif.subs(a=1).n()
print kif.subs(a=2).n()
```

```
1.61803398874965
1.61803398874999
```

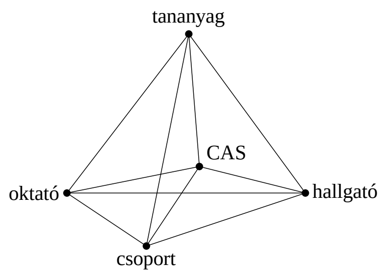
7. ábra. Két egyenlet egzakt és közelítő megoldása

A kapott alsó és felső becslés pontossága attól függ, hogy milyen mélységben helyettesítettük a lánctört további részét az intervallum határaival. A 7. ábrán látható becslések 12 tizedesjegyre megegyeznek a 2. és 3. pontbeli egyenletek pozitív megoldásával, ezért az a sejtés fogalmazódik meg, hogy a pontos érték meg is egyezik azzal. Hogy a sejtés igaz, nyilvánvalóvá válik, ha felismerjük, hogy a kifejezés második tagjának nevezője megegyezik az eredeti kifejezéssel, azaz x-szel, tehát értéke a 3. egyenlet (pozitív) megoldása. Ehhez hasonló gondolatmenettel megmutatható, hogy a 4. kifejezés értékének a 2. egyenlet (pozitív) megoldásával kell megegyeznie, így végül mind a négy esetben eljutunk az $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ számhoz. Ez a feladatcsoport kiváló példája a CAS olyan használatának, amely alkalmas a matematikai gondolkodásmód fejlesztésére.

A CAS ilyenfajta használatával kapcsolatosan sokan folytatnak kutatásokat. Ezek szinte mindig arra a következtetésre jutnak, hogy újra kellene a gondolni a tananyagot és a tanítási módszereket. Megfigyelhetjük, hogy Kovács és Arnold a számítógép és a CAS olyan felhasználását javasolja, amely inspirációt ad a tanulónak, támogatja a számítások elvégzésében, illetve a reprezentáció előállításában, de nem szabadítja meg a munka lényegi részétől, a hagyományos matematikai gondolkodástól, amelynek fejlesztése a matematika oktatás elsődleges célja. Az eljárásközpontú oktatás, ami általában a rutinfeladatok gyakorlásából áll, segíthető számítógép felhasználásával, de a közvetlen CAS felhasználás ennek a módszernek nem kedvez.

A kutatások egy másik része azt vizsgálta, hogy milyen hatással van a CAS használata a hallgatók egymás közötti kommunikációjára és órai aktivitására [20] [19] [50]. Ezek mindegyike arra az eredményre jutott, hogy a számítógéppel végzett munka elősegíti a hallgatók közötti dialógust. Ugyanezt olvashatjuk Pierce és Stacey cikkében, akik egy 30 főből álló ausztrál csoportot vizsgáltak egy kezdő analízis kurzuson, amelyen a Derive programot használták [41]. Arra a kérdésre, hogy a megbeszélik-e egymással a munkájukat, a hallgatók 74%-a úgy válaszolt, hogy „nagyon gyakran”, illetve „mindig”. Amikor a számítógépen történik valami, amire a hallgató nem számított, akkor ezt általában meg akarja beszélni a társaival. Guin és Trouche úgy kívánta elősegíteni a közös munkát, hogy minden alkalommal egy-egy tanuló gépét hozzákapcsolták egy kivetítőhöz, és ennek a tanulónak (sherpa) a munkáját az órán mindenki nyomon követhette. A kialakuló beszélgetés egyaránt érintett matematikai, szintaktikai és egyéb kérdéseket. A beszélgetés még akkor is kialakult, ha kivételesen az oktató munkája került kivetítésre.

Drouhard azt állítja, hogy a CAS a tanóra újabb szereplőjének tekinthető [12]. Kiegészíti Joshua és Dupin didaktikai tetraéderét egy piramissá, amely azt szemlélteti, hogy a résztvevők (az oktató, a csoport, a hallgató és a CAS) kommunikálnak egymással a tananyagról (8. ábra).



8. ábra. A Drouhard-féle piramis.

3.5. A megszerzett tudás, készségszint mérését támogató eszközök

A tanulói teljesítmény mérése hasznos információkat szolgáltat a további tanulmányokhoz, a tanulási folyamat közben és egy tanulási periódus végén egyaránt. A mérés megvalósításához a számítógép hasznos eszköz lehet. Ennek lehetőségeivel a 7. fejezetben foglalkozom.

4. A diszkrét matematika számítógéppel támogatott oktatása

A számítógép használata a matematika oktatásának nem minden területén egyformán népszerű. A geometria tanításában sok helyen alkalmazzák kiváló szemléltetési lehetőséget nyújtó dinamikus geometriai programokat, míg a statisztikában a sok számolás elvégzését könnyíti meg a gép használata. Az analízisben a számítógép-algebrai rendszerek nyújtanak segítséget, hiszen grafikus ábrázolásra is és az analízisben szokásos szimbolikus és numerikus számítások elvégzésére is alkalmasak. Ritkább a számítógép használata más matematikai diszciplínák esetén. Ez meglepő, ha arra gondolunk, hogy a fenti képességek más területeken is jól kamatoztathatók. A számelméletben, az absztrakt és a lineáris algebrában a számítások gyors és pontos elvégzésében lehet segítségünkre a számítógép, a gráfelméletben jól használhatjuk az ábrázolási lehetőségeit. A diszkrét matematika olyan tantárgy, amelyben sok matematikai tudományterület alapvető eredményeit kívánjuk összefoglalni, általában informatikus hallgatók számára. Ennek tanításában a számítógép által nyújtott előnyök nehezebben használhatók ki. Ennek egyik oka, hogy a diszkrét matematika bizonyos témaköreiben (pl. a kombinatorika, teljes indukció,...), a grafikus ábrázolási lehetőségek száma kevés. A számításokhoz sok témakörben segítséget nyújt a CAS, de a használatot szinte minden témakörben külön meg kell tanulni, mert mindegyikhez sok olyan fogalom tartozik, ami másutt ritkán vagy nem fordul elő, így az ezekhez tartozó hivatkozások is újak a hallgatók számára.

A fenti nehézségek ellenére több kísérlet is folyik a diszkrét matematika számítógéppel támogatott oktatására. Ezek közül az egyik a DISMAT program használata a Sevillai Egyetemen [16]. A programot Microsoft Visual Basic és C++ nyelven írták. A kísérletben öt témakörrel foglalkoztak (Fibonacci-sorozatok, euklideszi algoritmus, prímszámok és prímtényezőkre bontás, mod n maradékosztálygyűrűk, kriptográfia). Az egyes témakörök feldolgozása elméleti összefoglalással kezdődött, ezt követte néhány feladat.

Egy másik példa a Madridi Műszaki Egyetemen kifejlesztett interaktív program, amely a Diszkrét Matematika tantárgy részét képező Egész és Moduláris Aritmetika témakört dolgozza fel [30]. Az alkalmazásba épített hypertext tartalmazza a definíciókat, tételeket és a főbb eredményeket. A kitűzött feladatok megoldásához a rendszer grafikus felületet biztosít a hallgatók számára. A kísérletet vezető tanárok – miközben megállapítják, hogy a kutatások többsége nem lát szignifikáns különbséget az elearning és a hagyományos „face-to-face” oktatás hatékonyságában – hasznosnak tartják a számítógép grafikus és hypertext lehetőségeinek felhasználását az oktatásban kétféle módon. Egyrészt az oktató számára javasolják órai demonstrációra, másrészt a hallgatók számára otthoni felhasználásra. Véleményük szerint ez a következő didaktikai előnyökkel jár:

- Segíti a hallgatót a tárgy tanulásában.
- Segíti az oktatót az előadás megtartásában, azáltal, hogy végigvezeti a példák és alkalmazások sokaságán.
- Lehetőséget biztosít a hallgatók számára a kísérletezéshez az interaktivitás lehetőségeinek megnövelésével.

Hein a Portlandi Állami Egyetemen a Prolog program segítségével kívánja a matematikai logikát érthetőbbé tenni. Könyvében számos kidolgozott feladat található, a módszer eredményességéről azonban nem ír [28].

Ezeknek a kísérleteknek a közös vonása, hogy a diszkrét matematikának csak bizonyos részterületeire szorítkoznak.

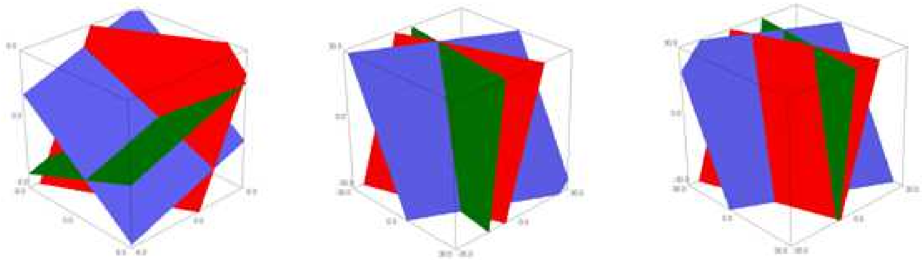
5. A lineáris algebra számítógéppel támogatott oktatása

A lineáris algebra más tárgyakban való széleskörű alkalmazási lehetőségei miatt általában a felsőfokú matematika tanulmányok elején kerül tárgyalásra. Szigorú felépítése, szokatlan jelölésrendszere, a magas absztrakciós szintje a hallgatók többségének nehézséget okoz. A tárgy tanításával foglalkozó tanulmányok egyetértenek abban, hogy a lineáris tér, altér, vektorok lineáris függetlensége, generátorrendszer fogalmát kevesen értik meg. Carlson ezt a következő négy okkal magyarázza [8]:

- A kurzus túl korai, a hallgatók gondolkozása még nem elég kifinomult.
- A nehézségeket a fogalmak okozzák, ezek tanulása a hallgatók számára szokatlan, szemben a kevésbé nehéz számolási algoritmusokkal.
- A hallgatóknak nincs gyakorlatuk a fogalomhoz kapcsolódó különböző algoritmusok eltérő körülmények között történő használatában, sőt felismerésében sem.
- A fogalmakat anélkül vezetjük be, hogy a hallgatók korábbi ismereteivel való kapcsolatukat alaposan megvilágítanánk.

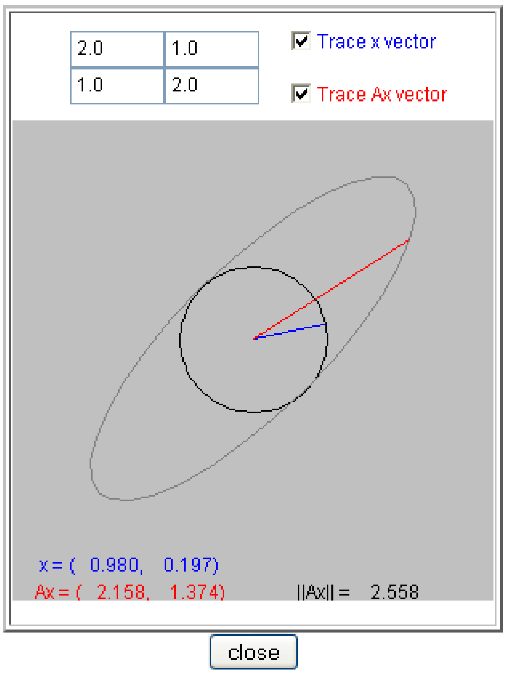
Dubinsky részben vitába száll Carlson megállapításaival, és rámutat, hogy azok a hallgatók, akik később veszik fel a kurzust, nem sikeresebbek a lineáris algebra elsajátításában azoknál, akik az első évben tanulják. Egyetért viszont abban, hogy a nehézségek elsősorban a fogalmak elsajátításában rejlenek. A megoldást abban látja, hogy a fogalmak és módszerek bemutatása helyett a hallgatókat olyan problémaszituációk elé kell állítani, amelyek segítségével tapasztalati úton kialakíthatják a saját fogalmi struktúráikat [13].

A lineáris algebrában a feladatok megoldása gyakran számolás- és időigényes. Ez lehet az egyik oka, hogy a lineáris algebra oktatásában a számítógép jelenleg nagyobb szerepet kap, mint a diszkrét matematikáéban. Egy másik ok, a grafikus szemléltetési lehetőség. Wu a lineáris egyenletrendszerek megoldásainak számát szemléltette az egyenleteknek megfelelő síkokkal három egyenlet, három ismeretlen esetén [64] (9. ábra).



9. ábra. Lineáris egyenletrendszerek megoldásainak száma.

Az interneten található Linear Algebra Visualization Assistant (LAVA) segítségével több lineáris algebrai fogalom is szemléltethető, az egyik pl. a sajátvektor fogalma, amit interaktív animáció segítségével ismerhetünk meg (10. ábra).



10. ábra. Sajátvektorok

A számítógép egy harmadik lehetséges felhasználása a lineáris algebrai fogalmak mélyebb megértéséhez a programkódok írása. Dubinsky ehhez az ISETL nyelvet használja, amelynek sajátossága, hogy a matematikai struktúrák leírása ebben a nyelvben közel áll a szokásos matematikai leíráshoz. A következő programkód egy $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ lineáris leképezés megadása ezen a nyelven (11. ábra).

```
v:=func(x); $ x egy vektor ℝ³-ban
      return x(1) + x(2) - 2*x(3);
   end;
```

11. ábra. Egy $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ lineáris leképezés.

A programkódok írása Dubinsky szerint alkalmas absztrakt fogalmak tulajdonságainak konkrét példákon való ellenőrzésére, és ezzel elérhető a tulajdonság alaposabb megértése. A következő programkód a skalárral való szorzás vektorösszeadás feletti disztributivitását ellenőrzi egy konkrét vektortérben (12. ábra).

```
Z3 := 0,1,2;
V := [a,b,c] : a,b,c in Z3;

va := func(x,y);
      return [(x(i)+y(i)) mod 3 : i in [1,2,3]];
   end;

sm := func(s,x);
      return [(s*x(i)) mod 3 : i in [1,2,3]];
   end;

forall s in Z3, x,y in V | s .sm (x .va y) =
(s .sm x) .va (s .sm y);
```

12. ábra. A skalárral való szorzás disztributív a vektorösszeadás felett.

6. Diszkrét matematika és lineáris algebra oktatása a Sage rendszer támogatásával

6.1. A kísérleti kurzusok

A 2009/10 tanévvel kezdődően az Óbudai egyetem Neumann János Informatikai Karán minden félévben indítottunk két kísérleti kurzust, amelyek a Diszkrét Matematika és Lineáris Algebra (DMLA) tárgy oktatását a Sage számítógép-algebrai rendszer használatával segítették. Ezek mindegyike heti kétórás, számítógépes laborban eltöltött foglalkozást jelentett. Az első évben ezek a hagyományos – ugyancsak kétórás – tantermi gyakorlat helyett kerültek bevezetésre, később választható tárgyként[14] vehették fel a kurzust az érdeklődő hallgatók. A feldolgozott tananyag az új tárgy esetében is elsősorban a DMLA tárgyhoz kapcsolódott, de nem volt feltétel annak párhuzamos felvétele, a hallgatók egy része már korábban elvégezte.

A tárgyhoz kapcsolódó témakörök a következők voltak:[15]

- Az alkalmazott számítógép-algebrai rendszer megismerése, használata.
- Függvények, grafikonok.
- Halmazok
- Relációk
- Teljes indukció.
- Kombinatorika
- Gráfelmélet
- Algebrai struktúrák
- Egyenletek, egyenletrendszerek.
- Vektorok
- Mátrixok
- Lineáris terek, bázistranszformáció
- Lineáris transzformációk, sajátérték, sajátvektor

A témák feldolgozása során szükségesnek bizonyult az óra elején egy rövid tanári magyarázat, amelyben részben az aktuális tananyag fontosabb fogalmainak, tételeinek átismétlése került sorra, részben pedig a rendszer fontosabb függvényeit ismertettem, amelyek az aktuális matematika témakörhöz kapcsolódtak. A magyarázat általában mintafeladatok bemutatását is magában foglalta. Az óra további része önálló hallgatói munkával telt, amelynek során megengedett volt a párokban vagy kisebb csoportokban történő munka is. Általában egy másik oktató is jelen volt rajtam kívül, hogy rendszeresen ellenőrizni tudjuk a munka előrehaladását és segítséget nyújtsunk a továbbhaladáshoz, ha a hallgató problémába ütközött.

A hallgatók minden órán kaptak házi feladatot, amit a következő óra elejéig kellett benyújtaniuk, illetve elküldeniük elektronikus formában. Az MP tárgy kurzusain a félév során két gépes zárthelyi dolgozatot is kellett írniuk, ezeknek eredménye, a

[14] Matematikai Problémák Megoldása Számítógéppel (MP)

[15] Az első két témakör, valamint az egyenletek, egyenletrendszerek csak részben tartoznak a DMLA tárgyhoz, de a felépítés során szükség volt rájuk.

házi feladatra és az órai munkára adott pontszám együttesen határozták meg a hallgató évközi jegyét. A 2009/10 tanév gépes DMLA gyakorlatain a gépes zárthelyi még nem volt kötelező, ennek a tárgynak a keretében két hagyományos formában megírt zárthelyi volt a követelmény, de a hallgatók javíthatták eredményüket egy gépes zárthelyi keretében.

A feladatok kitűzésénél fokozatosságra törekedtem. Egy részük csak az alapfogalmak, alapeljárások megértésén alapult, illetve a számítógépes rendszer használatának gyakorlására szolgált, a későbbiek általában összetettebbek voltak, illetve ötletet igényeltek és a matematikai felfedezést, problémamegoldást kívánták elősegíteni.

6.2. A munkával kapcsolatos hipotézisek

1. Az informatikus hallgatók számára nem okoz gondot a Sage kezelése, a használat alapvető elemeit gyorsan elsajátítják.
2. A Sage használata a reprezentációs lehetőségek kiszélesítésével elősegíti a matematikai fogalmak mélyebb megértését.
3. Mivel más témakörökkel kapcsolatosan a kutatások gyakran számolnak be a CAS használatának sikerességéről, a kísérleti csoportokban jobb eredményekre a DMLA tárgyból, mint a kontrollcsoportokban.
4. A rendszer használata bővíti a feldolgozható feladatok és témák körét.
5. A számítógép használata elősegíti a hallgatók önállóbb munkavégzését az órákon és a házi feladatok elkészítése során.
6. A rendszer használata mellett a hallgatók szívesebben foglalkoznak matematikai feladatokkal, mint a hagyományos oktatási forma esetén.
7. A kitűzött feladatok nehézsége összefüggésben van a felhasználás célja szerinti típusával.
8. CAS használata esetén a feladatok nehézségi sorrendje jelentősen megváltozik.

6.3. A Sage rendszer

A számítógép algebrai rendszerek széles választékából a Sage használata mellett döntöttem. Ennek egyik oka, hogy ez a szoftver ingyenes, így a hallgatók otthon is tudtak vele dolgozni. Sokan a Sage előnyének tartják azt is, hogy nyílt forráskódú, így a háttérben futó algoritmusok nyomon követhetők, elemezhetőek és ellenőrizhetők, de a rendszer ilyen mélységű ismerete nem volt – nem is lehetett – célja a kurzusnak. Fontos szempont volt az is, hogy a Sage dokumentációja részletes, és sok mintapéldát tartalmaz, és beépített súgó jelentősen megkönnyíti a használatát.

A Sage hátrányai között említendő, hogy jelenleg csak Linux operációs rendszer alatt futtatható, oktatásunk azonban alapvetően Windows rendszerre épül. Az otthoni gépeken történő futtatáshoz ezért megfelelő virtuális gépet javasoltam (ez jelenleg a VirtualBox alkalmazás, míg korábbi változatok esetén a WMware Player), illetve dolgozhattak a hallgatók a http://sagenb.org/ oldalon egy Sage szerver szolgáltatásait felhasználva. Az órákon az egyetem saját Sage szerverét használtuk, de az csak a belső hálózaton keresztül érhető el. A programnak létezik parancssoros és notebook változata. Mivel az utóbbi kezelése egyszerűbb ennek használata mellett döntöttem. Ez azért is előnyös, mert a szokásos másolási, beillesztési műveletek lehetővé teszik az adatcserét más (pl. szövegszerkesztő, táblázatkezelő) programokkal.

A notebook változat felhasználói felülete a Firefox böngészőn keresztül érhető el, egyébként más számítógép-algebrai rendszerekhez hasonló. A felhasználó az input adatokat a notebook celláiba gépelheti soros formában. Képletszerkesztőt a rendszer nem biztosít, az output azonban igény szerint megjeleníthető soros, illetve matematikai formában is. Az utóbbi azonban csak megtekintésre alkalmas, arra nem, hogy más alkalmazásokba átmásoljuk. Elő tudja viszont állítani a Sage a matematikai kifejezések LaTeXkódját, ami alkalmas szövegszerkesztő használata esetén egyszerűvé teszi az eredmények megjelenítését dokumentumban.

6.4. Példák anyagrészek feldolgozására

6.4.1. Részben rendezési relációk

A reláció fogalma általában túlságosan absztraktnak tűnik a hallgatók számára, annak ellenére, hogy a mindennapi életben is és tanulmányaikban is elég sok példát látnak rá. A DMLA tárgyban a bináris, homogén relációk két fajtájával, az ekvivalencia relációkkal és a részben rendezési relációkkal foglalkozunk részletesebben. Különösen az utóbbi jelent nehézséget, hiszen számukra a valós számok szokásos rendezésének tulajdonságai természetesnek, míg az egyéb ismert részben rendezések teljesen idegennek tűnnek számukra. Az egyetlen rendelkezésre álló példa nem elegendő a fogalom megalkotására, annak speciális tulajdonságaitól nehezen tudnak elvonatkoztatni. Skemp első alapelvét követve további példákat bemutatva tudjuk a fogalmat érthetővé tenni. A példák vizsgálatát segíti a vizuális reprezentáció, ami leggyakrabban a Hasse-féle diagram.

1. feladat:

Tekintsük a 60 pozitív osztóinak S halmazát, és az $(S; \preceq)$ relációt, ahol

$$\forall x \forall y\colon (x \preceq y) \Leftrightarrow (x \mid y).$$

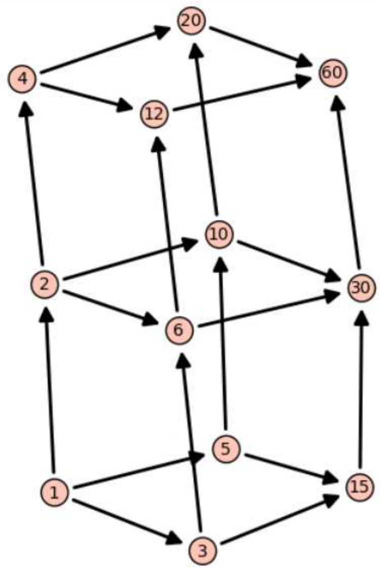
a) Állítsa elő a rendezés Hasse-féle diagramját!
b) Hogyan ellenőrizhető a Hasse-féle diagram ábráján, hogy az (x, y) pár eleme-e a relációnak?
c) Az a) pontban előállított ábra egy irányított, gráf. Létezik-e ebben a gráfban (irányított) kör? Milyen tulajdonságát fejezi ki a válasz a relációnak?
d) Van-e a (részben rendezett) halmaznak legkisebb, illetve legnagyobb eleme? Ha igen melyek ezek?
e) Határozza meg $\inf(3, 4)$ és $\sup(3, 4)$ értékét!

A Hasse-féle diagram előállítása egyszerűen megvalósítható a Sage segítségével, miután a rendezési relációt definiáltuk (13. ábra). A kapott gráf szemlélteti az elemek közötti kapcsolatokat, illetve a rendezés tulajdonságait. Célszerű a hallgatókat arra ösztönözni, hogy a feladat további kérdéseit ennek segítségével válaszolják meg, ne az R objektum további metódusaival, mert így jobban elősegítjük a fogalmak megértését.[16]

```
S=divisors(60)

def oszto(x,y):
    if x.divides(y):
        return True
    else:
        return False

R=Poset([S,oszto])
R.hasse_diagram().graphplot().show()
```



13. ábra. Részben rendezett halmaz

A Hasse-féle diagram nem a halmaz elemei közötti relációt ábrázolja közvetlenül, hanem csak a közvetlen rákövetkezéseket. Ezeket egy listában is meg tudjuk jeleníteni (14. ábra). Ez a részben rendezett halmaz egy másik reprezentációja, ami ugyan nem olyan szemléletes mint a Hasse-féle diagram, de a témakör fogalmainak megértését tovább mélyíti.

```
R.cover_relations()
```

```
[[1, 2], [1, 3], [1, 5], [2, 4], [2, 6], [2, 10], [4, 12], [4, 20], [3,
6], [3, 15], [6, 12], [6, 30], [12, 60], [5, 15], [5, 10], [15, 30],
[10, 20], [10, 30], [20, 60], [30, 60]]
```

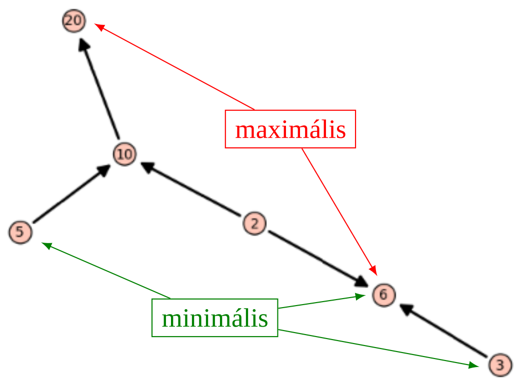
14. ábra. Közvetlen rákövetkezések

A számítógép segítségével könnyen állíthatunk elő egy részben rendezett halmazból újakat. Ennek legegyszerűbb módja a halmaz megszorítása annak egy valódi

[16] Az R metódusai viszont alkalmasak a megoldások gyors ellenőrzésére.

részhalmazára. Alkalmasan választott példák segítségével újabb fogalmak vizsgálatára nyílik lehetőség (15. ábra).

```
Su=R.subposet([2,3,5,6,10,20])
Su.hasse_diagram().graphplot().show()
```



15. ábra. Minimális, illetve maximális elemek

6.4.2. Kombinatorika

A Sage rendszer a kombinatorikus függvények gazdag választékával áll rendelkezésünkre, amik jól használhatók különböző kombinatorika feladatok megoldásában. Ebben a témakörben sok olyan feladattal találkozhatunk, amely a hallgató számára a problémamegoldás kategóriájában tartozik, és megoldása a CAS használata mellett is ötletességet igényel. A feladatok egy része könnyen módosítható, de ennek eredményeként gyakran olyan új feladatot kapunk, amelynek megoldása számítógép használata nélkül nehézkes, mert nagyon sok eset vizsgálatára és sok számolásra van szükség [51] [52].

2. feladat [58]:

Hányféleképpen lehet 5 beutalót úgy összekeverni, hogy senki ne kapja meg a sajátját?

Másképpen: Hány olyan ismétlés nélküli permutációja van öt elemnek, ahol egyik elem sem marad az eredeti helyén?[17] A feladat megértéséhez a hallgatóknak el kell szakadniuk a permutáció középiskolában tanult statikus értelmezésétől,[18] helyette a permutációt egy véges halmazon értelmezett bijektív függvényként kell felfogniuk [52]. Ennek a célnak az elérését segíthetjük, ha a fogalom többféle reprezentációját bemutatjuk (16. ábra).

[17] Hány fixpontmentes ismétlés nélküli permutációja van öt elemnek?
[18] Egymástól különböző elemek egy meghatározott sorrendje.

```
Pms=Permutations([1,2,3,4])
Pms.list()
```

```
[[1, 2, 3, 4], [1, 2, 4, 3], [1, 3, 2, 4], [1, 3, 4, 2], [1, 4, 2, 3],
[1, 4, 3, 2], [2, 1, 3, 4], [2, 1, 4, 3], [2, 3, 1, 4], [2, 3, 4, 1],
[2, 4, 1, 3], [2, 4, 3, 1], [3, 1, 2, 4], [3, 1, 4, 2], [3, 2, 1, 4],
[3, 2, 4, 1], [3, 4, 1, 2], [3, 4, 2, 1], [4, 1, 2, 3], [4, 1, 3, 2],
[4, 2, 1, 3], [4, 2, 3, 1], [4, 3, 1, 2], [4, 3, 2, 1]]
```

```
Pm=Permutation(Pms[6]);Pm
```

```
[2, 1, 3, 4]
```

```
for i in Pm:
    print Pm.index(i)+1,'->',i
```

```
1 -> 2
2 -> 1
3 -> 3
4 -> 4
```

```
matrix([[1,2,3,4],Pms[6]])
```

```
[1 2 3 4]
[2 1 3 4]
```

```
Pm.cycle_string()
```

```
'(1,2)'
```

16. ábra. Permutációk reprezentációi

Mivel a függvényeket gyakran szoktuk Venn-diagramok segítségével ábrázolni, még jobban hangsúlyozhatjuk, hogy a permutáció is függvény a 17. ábra segítségével. Ezt azonban csak tanári demonstráció céljára állítottam elő.

Vilenkin könyve [58] a logikai szita-formula felhasználásával oldja meg a kitűzött problémát:

$$N = 5! - \binom{5}{1}4! + \binom{5}{2}3! - \binom{5}{3}2! + \binom{5}{4}1! - \binom{5}{5}0! =$$
$$= 120 - 5 \cdot 24 + 10 \cdot 6 - 10 \cdot 2 + 5 \cdot 1 - 1 \cdot 1 = 44$$

Ez a megoldás matematikailag korrekt, de hallgatók többsége nehezen vagy nem tudja követni. A sage megfelelő függvényét ismerve egyszerűen előállíthatjuk az eredményt (18. ábra).

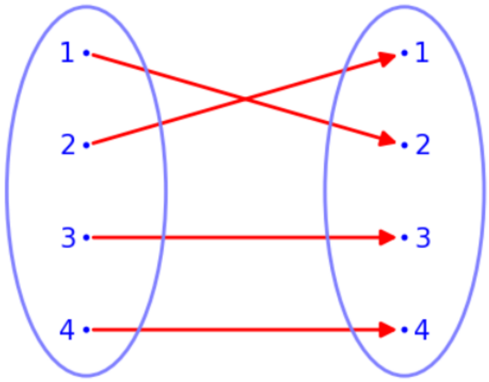
Ez a megoldás önmagában nem segíti a hallgatót a kombinatorikai fogalmak jobb megértésében, hiszen a végeredményt a hozzávezető út nélkül kaptuk meg, arra azonban alkalmas, hogy a hagyományos megoldás helyességét ellenőrizzük. Érdemes a feladat kapcsán arra kérni a hallgatókat, hogy állítsák elő a szóban forgó fixpontmentes permutációkat és ezek közül valamelyiket kiválasztva magyarázzák el, hogy az miért fixpontmentes (19. ábra).

Az egyes permutációk fixpontmentessége könnyebben láthatóvá válik a korábban bemutatott mátrix-reprezentáció alkalmazásával: (20. ábra)

A hallgatók egy része a fenti feladatot a fixpontmentes permutációk kiválogatásával oldotta meg (21. ábra).

```
ellipse((0,0),0.3,2,axes=0,rgbcolor=
(0.5,0.5,1),thickness=2,figsize=5)+ellipse((1.2,0),
0.3,2,axes=0,rgbcolor=
(0.5,0.5,1),thickness=2)+sum([point((0,2.5-i))
+point((1.2,2.5-i))+text(str(i),(-0.07,2.5-i),
fontsize=15)+text(str(i),(1.27,2.5-i),fontsize=15)
for i in [1..4]])+arrow((0,1.5),
(1.2,0.5),rgbcolor='red')+arrow((0,0.5),
(1.2,1.5),rgbcolor='red')+arrow((0,-0.5),
(1.2,-0.5),rgbcolor='red')+arrow((0,-1.5),
(1.2,-1.5),rgbcolor='red')
```

evaluate



17. ábra. Permutációk reprezentációi

```
number_of_derangements([1..5])
```

44

18. ábra. A fixpontmentes permutációk száma

```
derangements([1..5])
```

evaluate

```
[[2, 1, 4, 5, 3], [2, 1, 5, 3, 4], [2, 3, 1, 5, 4], [2, 3, 4, 5, 1], [2
3, 5, 1, 4], [2, 4, 1, 5, 3], [2, 4, 5, 1, 3], [2, 4, 5, 3, 1], [2, 5,
1, 3, 4], [2, 5, 4, 1, 3], [2, 5, 4, 3, 1], [3, 1, 2, 5, 4], [3, 1, 4,
5, 2], [3, 1, 5, 2, 4], [3, 4, 1, 5, 2], [3, 4, 2, 5, 1], [3, 4, 5, 1,
2], [3, 4, 5, 2, 1], [3, 5, 1, 2, 4], [3, 5, 2, 1, 4], [3, 5, 4, 1, 2],
[3, 5, 4, 2, 1], [4, 1, 2, 5, 3], [4, 1, 5, 2, 3], [4, 1, 5, 3, 2], [4,
3, 1, 5, 2], [4, 3, 2, 5, 1], [4, 3, 5, 1, 2], [4, 3, 5, 2, 1], [4, 5,
1, 2, 3], [4, 5, 1, 3, 2], [4, 5, 2, 1, 3], [4, 5, 2, 3, 1], [5, 1, 2,
3, 4], [5, 1, 4, 2, 3], [5, 1, 4, 3, 2], [5, 3, 1, 2, 4], [5, 3, 2, 1,
4], [5, 3, 4, 1, 2], [5, 3, 4, 2, 1], [5, 4, 1, 2, 3], [5, 4, 1, 3, 2],
[5, 4, 2, 1, 3], [5, 4, 2, 3, 1]]
```

19. ábra. A fixpontmentes permutációk

```
FmPerm=derangements([1..5])
matrix([[1..5],FmPerm[3]])
```

```
[1 2 3 4 5]
[2 3 4 5 1]
```

20. ábra. Egy fixpontmentes permutáció mátrix-reprezentációja

```
P5=Permutations([1..5])
L=[x for x in P5 if Permutation(x).number_of_fixed_points()==0]
L
```

evaluate

```
[[2, 1, 4, 5, 3], [2, 1, 5, 3, 4], [2, 3, 1, 5, 4], [2, 3, 4, 5, 1], [2,
3, 5, 1, 4], [2, 4, 1, 5, 3], [2, 4, 5, 1, 3], [2, 4, 5, 3, 1], [2, 5,
1, 3, 4], [2, 5, 4, 1, 3], [2, 5, 4, 3, 1], [3, 1, 2, 5, 4], [3, 1, 4,
5, 2], [3, 1, 5, 2, 4], [3, 4, 1, 5, 2], [3, 4, 2, 5, 1], [3, 4, 5, 1,
2], [3, 4, 5, 2, 1], [3, 5, 1, 2, 4], [3, 5, 2, 1, 4], [3, 5, 4, 1, 2],
[3, 5, 4, 2, 1], [4, 1, 2, 5, 3], [4, 1, 5, 2, 3], [4, 1, 5, 3, 2], [4,
3, 1, 5, 2], [4, 3, 2, 5, 1], [4, 3, 5, 1, 2], [4, 3, 5, 2, 1], [4, 5,
1, 2, 3], [4, 5, 1, 3, 2], [4, 5, 2, 1, 3], [4, 5, 2, 3, 1], [5, 1, 2,
3, 4], [5, 1, 4, 2, 3], [5, 1, 4, 3, 2], [5, 3, 1, 2, 4], [5, 3, 2, 1,
4], [5, 3, 4, 1, 2], [5, 3, 4, 2, 1], [5, 4, 1, 2, 3], [5, 4, 1, 3, 2],
[5, 4, 2, 1, 3], [5, 4, 2, 3, 1]]
```

```
len(L)
```

```
44
```

21. ábra. A feladat megoldása kiválogatással

6.4.3. Teljes indukció

A teljes indukciót gyakran alkalmazzák összegek zárt alakjának bizonyítására. Sok esetben a Sage a zárt alakot előállítja, így a teljes indukció már csak ennek az előállításnak a helyességét ellenőrzi.

3. feladat:

Határozzuk meg az $1^2 + 2^2 + \ldots + n^2$ összeg zárt alakját!

A Sage által előállított eredményt érdemes szorzattá bontani, hogy egy ismertebb formájához jussunk (22. ábra).

```
(n,k)=var('n,k')
sum(k^2,k,1,n)
```

```
1/3*n^3 + 1/2*n^2 + 1/6*n
```

```
factor(_).show()
```

$$\frac{1}{6}(n+1)(2n+1)n$$

22. ábra. Négyzetszámok összege

Az eredmény helyességét teljes indukcióval tudjuk ellenőrizni. Az $n = 1$ esetnek könnyen utána számolhatunk akár fejben is, annak bizonyítását pedig, hogy ha a képlet érvényes n-re, akkor érvényes $n + 1$-re is a 23. ábrán láthatjuk. Ezt a lépést a hallgatók először nehezen tudták alkalmazni, de miután megértették sokan papíron is hasonló formát követve kezdtek számolni.

```
no=sum(k^2,k,1,n)
no+(n+1)^2==no.subs(n=n+1)
```

evaluate

```
(n + 1)^2 + 1/3*n^3 + 1/2*n^2 + 1/6*n == 1/3*(n + 1)^3 + 1/2*(n + 1)^2 +
1/6*n + 1/6
```

```
bool(_)
```

```
True
```

23. ábra. Teljes indukció

4. feladat:
Határozzuk meg az

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

mátrix n-edik hatványát!

Nézzünk először $\mathbf{A}$ hatványaira néhány példát (24. ábra)!

```
A=matrix(3,[1,0,0,0,1,1,1,1,1]);A
```

```
[1 0 0]
[0 1 1]
[1 1 1]
```

```
for i in [2,3,4]:
    print A^i,'\n'
```

```
[1 0 0]
[1 2 2]
[2 2 2]

[1 0 0]
[3 4 4]
[4 4 4]

[1 0 0]
[7 8 8]
[8 8 8]
```

24. ábra. Az $\mathbf{A}$ mátrix hatványai

Ezek alapján a következő sejtést fogalmazhatjuk meg:

$$\mathbf{A}^n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2^{n-1}-1 & 2^{n-1} & 2^{n-1} \\ 2^{n-1} & 2^{n-1} & 2^{n-1} \end{bmatrix}$$

A sejtés teljes indukcióval történő bizonyítása a 25. ábrán látható. Ehhez hasonló bizonyítások a hagyományos oktatás során ritkán kerülnek elő, mivel a hozzá tartozó számolás a hallgatók számára időigényes.

```
n=var('n')
B=matrix(3,[1,0,0,2^(n-1)-1,2^(n-1),2^(n-1),2^(n-
1),2^(n-1),2^(n-1)]);B
```

```
[              1             0              0]
[2^(n - 1) - 1     2^(n - 1)      2^(n - 1)]
[    2^(n - 1)     2^(n - 1)      2^(n - 1)]
```

```
C=(A*B).simplify();C
```

```
[      1      0      0]
[2^n - 1    2^n    2^n]
[    2^n    2^n    2^n]
```

```
bool(C==B.subs(n=n+1))
```

```
True
```

25. ábra. Az $\mathbf{A}^n$ mátrixra adott képlet helyességének igazolása

6.4.4. Algebrai struktúrák

5. feladat:

Állítsuk elő azt a véges Abel-csoportot, amelyet egy másod- és egy harmadrendű elem segítségével generálhatunk!

a) Hány elemű a csoport?
b) Állítsuk elő a csoport Cayley-tábláját!
c) Ciklikus-e ez a csoport?
d) Milyen részcsoportjai vannak a csoportnak?

A megoldás egy részét a 26. ábrán láthatjuk. A csoportnak hat eleme van, ami nemcsak a rend lekérdezéséből látszik, hanem az elemek felsorolásából is. Érdemes észrevenni, hogy minden elem $u^\alpha v^\beta$ alakú, ahol α lehetséges értékei a 0 és az 1 (hiszen u^2 már az egységelem), β lehetséges értékei pedig 0, 1 vagy 2. Így a csoport elemszáma kombinatorikus módszerrel kiszámolva $2 \cdot 3 = 6$.

```
A.<u,v>=AbelianGroup(2,[2,3])
s=u*v^2
```

```
s^3
```

```
u
```

```
A.order()
```

```
6
```

```
A.list()
```

```
[1, v, v^2, u, u*v, u*v^2]
```

26. ábra. Egy véges hatelemű csoport

```
A.cayley_table()
```

```
*  a b c d e f
 +------------
a| a b c d e f
b| b c a e f d
c| c a b f d e
d| d e f a b c
e| e f d b c a
f| f d e c a b
```

```
A.cayley_table(names='elements')
```

```
     *      1     v   v^2     u   u*v u*v^2
      +------------------------------------
     1|     1     v   v^2     u   u*v u*v^2
     v|     v   v^2     1   u*v u*v^2     u
   v^2|   v^2     1     v u*v^2     u   u*v
     u|     u   u*v u*v^2     1     v   v^2
   u*v|   u*v u*v^2     u     v   v^2     1
 u*v^2| u*v^2     u   u*v   v^2     1     v
```

27. ábra. Csoport Cayley-táblája

A Cayley-táblát (27. ábra) kétféleképpen is előállítottuk, mert alapértelmezésben nem az u és v generáló elemekkel vannak kifejezve a csoport elemei.

A csoport ciklikus, némi kereséssel rátalálhatunk az uv elemre, amelynek hatványaiként mind a hat elem előáll. Némi számolással ellenőrizhető, hogy az uv^2 is generálja a csoportot. (28. ábra)

```
A.is_cyclic()
```

```
True
```

```
for i in range(6):
    print (u*v)^i
```

```
1
u*v
v^2
u
v
u*v^2
```

28. ábra. Ciklikus csoport generáló-eleme

A részcsoportokkal kapcsolatos kérdésre a 29. ábrán olvashatjuk le a választ. A két nemtriviális részcsoport az u, illetve a v elemmel generált részcsoport, melyek Cayley-tábláját is láthatjuk.

```
A.subgroups()
```

```
[Multiplicative Abelian Group isomorphic to C2 x C3, which is the
subgroup of
Multiplicative Abelian Group isomorphic to C2 x C3
generated by [u*v^2], Multiplicative Abelian Group isomorphic to C2,
which is the subgroup of
Multiplicative Abelian Group isomorphic to C2 x C3
generated by [u], Multiplicative Abelian Group isomorphic to C3, which
is the subgroup of
Multiplicative Abelian Group isomorphic to C2 x C3
generated by [v], Trivial Abelian Group, which is the subgroup of
Multiplicative Abelian Group isomorphic to C2 x C3
generated by []]
```

```
B=A.subgroup([u])
B.cayley_table(names='elements')
```

```
*  1 f
 +----
1| 1 f
f| f 1
```

```
C=A.subgroup([v])
C.cayley_table(names='elements')
```

```
  *    1   f f^2
   +------------
  1|   1   f f^2
  f|   f f^2   1
f^2| f^2   1   f
```

29. ábra. Részcsoportok

6.4.5. Vektorok

6. feladat:

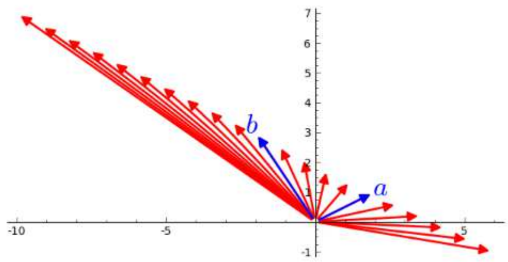
Legyen $\underline{a}$ és $\underline{b}$ az S sík két egymástól különböző vektora! Mi azon helyvektorok végpontjának mértani helye, amelyek $\underline{a}$ és $\underline{b}$ olyan lineáris kombinációjaként állnak elő, amelyben az együtthatók összege 1?

Ábrázoljunk először egy speciális esetet a rendszer grafikai lehetőségeinek felhasználásával (30. ábra)! Ennek alapján sejthető, hogy a keresett alakzat az $\underline{a}$ és $\underline{b}$ vektorok végpontjai által meghatározott, másképpen fogalmazva az $\underline{a}$ vektor végpontján átmenő $\underline{b}-\underline{a}$ irányvektorú egyenes.

A bizonyítás lényege egy egyszerű átalakítás, amit egyszerűbb papíron végezni:

$$\alpha\underline{a}+(1-\alpha)\underline{b}=\underline{a}+(1-\alpha)(\underline{b}-\underline{a})$$

```
a=vector([2,1]);b=vector([-2,3])
sum([arrow((0,0),t*a+(1-t)*b,color='red')for t in
srange(-2,2.2,0.2)])+arrow((0,0),a)+arrow((0,0),b)
+text('$a$',1.1*a,fontsize=25)+text('$b$',b+vector
([-0.1,0.3]),fontsize=25)
```



30. ábra. Két vektor speciális lineáris kombinációi

6.4.6. Lineáris algebra

7. feladat:

Adottak az

$$\underline{a}_1(4,1,8),\ \underline{a}_2(-2,3,-1),\ \underline{a}_3(58,32,131),\ \underline{b}(44,-3,76) \text{ és } \underline{c}(105,17,-42)$$

vektorok. Előállíthatók-e és ha igen milyen együtthatókkal a $\underline{b}$ és $\underline{c}$ vektorok az $\underline{a}_1$, $\underline{a}_2$, $\underline{a}_3$ vektorok lineáris kombinációjaként? Milyen következtetések vonhatók le az eredményből a vektorok elhelyezkedésére vonatkozóan?

A feladat többféleképpen megoldható, a 31. ábrán két lehetséges megoldást látunk. Mindkettőből leolvasható, hogy $\underline{b}=(9-17t)\underline{a}_1-(4+5t)\underline{a}_2+t\underline{a}_3$, ahol $t\in\mathbb{R}$, azaz $\underline{b}$ végtelen sokféleképpen előállítható az $\underline{a}_1$, $\underline{a}_2$ és $\underline{a}_3$ vektorok lineáris kombinációjaként. A megoldásból kiderül, hogy ez a négy vektor egy síkban (egy közös kétdimenziós altérben) van. A $\underline{c}$ vektor nem állítható elő a fenti vektorok lineáris kombinációjaként, tehát nincs benne az őket tartalmazó síkban.

```
(x,y,z)=var('x,y,z')
solve([4*x-2*y+58*z==44,x+3*y+32*z==-3,8*x-
y+131*z==76],[x,y,z])
```

```
[[x == -17*r1 + 9, y == -5*r1 - 4, z == r1]]
```

```
solve([4*x-2*y+58*z==105,x+3*y+32*z==17,8*x-
y+131*z==-42],[x,y,z])
```

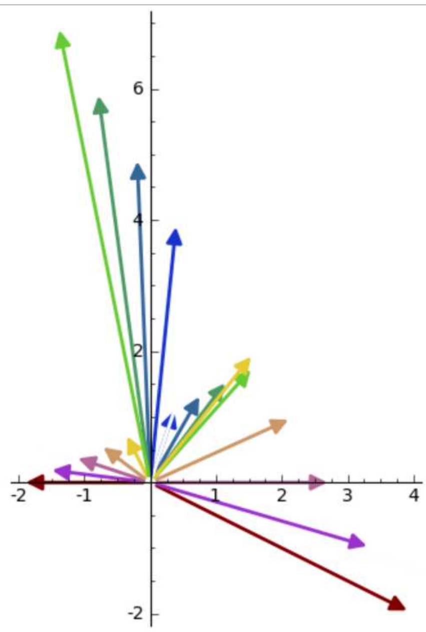
```
[]
```

```
M=matrix(QQ,3,5,
[4,-2,58,44,105,1,3,32,-3,17,8,-1,131,76,-42])
M.echelon_form()
```

```
[ 1  0 17  9  0]
[ 0  1  5 -4  0]
[ 0  0  0  0  1]
```

31. ábra. Lineáris kombinációk keresése

```
A=matrix(2,[-2,1,1,3])
sum([arrow((0,0),(2*t,1+t),rgbcolor=
(0.5*t,t,1-t)) for t in
srange(-1,1,0.2)])+sum([arrow((0,0),A*vector((2
*t,1+t)),rgbcolor=(0.5*t,t,1-
t),aspect_ratio=1) for t in srange(-1,1,0.2)])
```



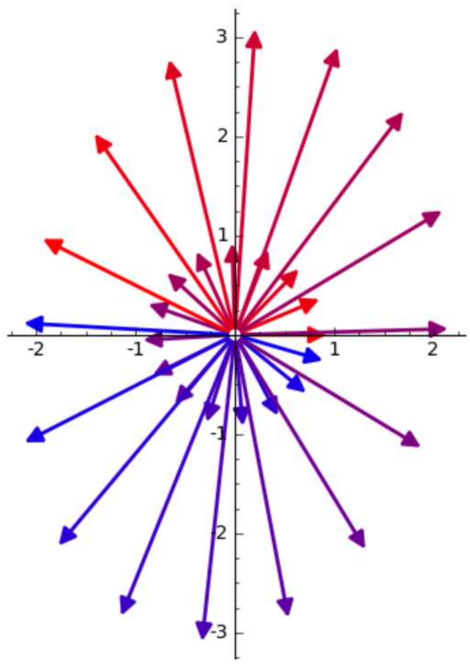
32. ábra. Lineáris transzformáció

8. feladat:

Tekintsük a kétdimenziós lineáris tér $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ mátrixszal megadott lineáris transzformációját! Ábrázoljuk a tér néhány vektorát a képével együtt! A transzformáció milyen tulajdonságait olvashatjuk le az ábráról?

Az ábrázolt vektorokat érdemes valamilyen rendszer szerint válogatni. A 32. ábra alapján megsejthető, hogy a transzformáció egyenestartó, ami egyébként minden lineáris transzformációra igaz. A 33. ábráról azonnal leolvasható, hogy a transzformáció a kétdimenziós teret önmagára képezi le és mivel a színezés alapján lehet tudni, hogy melyik vektor melyiknek a képe, hozzávetőlegesen be tudjuk rajzolni az ábrába a sajátvektorokat is.

```
A=matrix(2,[-2,1,1,3])
sum([arrow((0,0),(cos(t),sin(t)),rgbcolor=(1-t/2/pi,0,t
/2/pi)) for t in srange(0,2*pi,0.4)])
+sum([arrow((0,0),A*vector((cos(t),sin(t))),rgbcolor=(1-t/2
/pi,0,t/2/pi),aspect_ratio=1) for t in srange(0,2*pi,0.4)])
```



33. ábra. Lineáris transzformáció

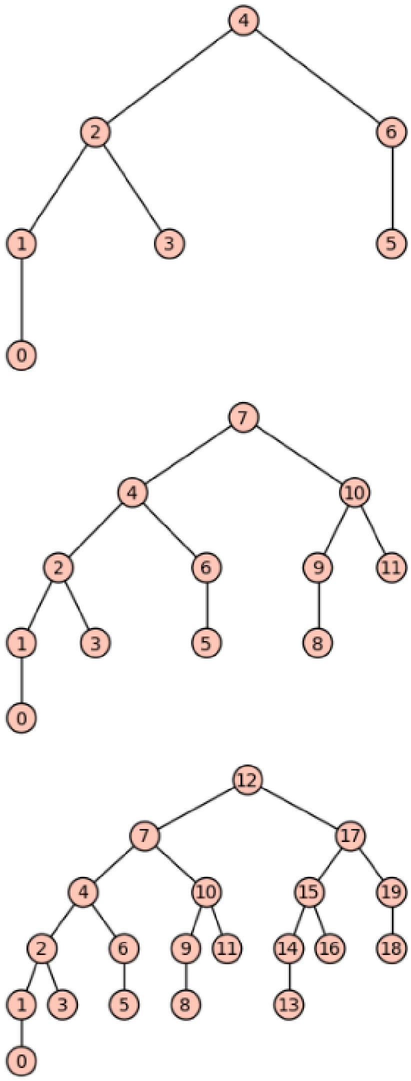
6.4.7. Gráfok

9. feladat:

Hány élből áll az n-edik Fibonacci-fa leghosszabb útja?

A Fibonacci fák a következő rekurzió segítségével értelmezett gráfok: F_0 az üres gráf, F_1 pedig egyetlen pontból áll. Az F_n Fibonacci fát úgy kapjuk, hogy egy ponthoz (a gyökérponthoz) egy-egy él segítségével hozzákapcsoljuk az F_{n-1} és az F_{n-2} fákat. Észrevehetjük, hogy a definíció nem mondja, hogy a Fibonacci-fa valóban fagráf, bár ennek igazolása egyszerű. Érdemes a definíció által leírt összefüggést néhány konkrét példán megfigyelni (34. ábra).

```
for i in [4,5,6]:
    show(graphs.FibonacciTree(i))
```



34. ábra. Néhány Fibonacci-fa

A példákat vizsgálva a feladat megoldása könnyen megsejthető. Az n-edik Fibonacci-fa gyökérpontjából a baloldali részfa legalsó szinten levő pontjába $n-1$, a jobboldali részfa legalsó szinten levő pontjába pedig $n-2$ élet tartalmazó út vezet. Ezek egyesítésével egy $2n-3$ élből álló utat kapunk, ami – sejtésünk szerint – a Fibonacci-fa leghosszabb útja.

Ez a sejtés igazolható teljes indukcióval. A kis sorszámú Fibonacci-fák esetén egyszerűen ellenőrizhetjük a sejtés helyességét. Pl. a negyedik Fibonacci-fa összesen 6 élet tartalmaz, és a fenti eljárással találtunk benne egy öt élet tartalmazó utat, amelyből csak egy él – a $(2,3)$ – marad ki (34. ábra). Nyilvánvaló, hogy ennél több éle csak akkor lehetne a leghosszabb útnak, ha a fa minden élét tartalmazná, ami lehetetlen, mert a 2-es pont harmadfokú. Még könnyebb az ellenőrzés a második és a harmadik Fibonacci-fa esetén, észrevehetjük azonban, hogy a nulladik és az első fa esetén az állítás nem teljesül. A továbbiak szempontjából fontos látni, hogy a második, harmadik és negyedik Fibonacci-fára az is teljesül, hogy a gyökérpontból induló leghosszabb út éleinek száma $n-1$.

A továbbiakban megmutatjuk, hogy ha az állítás igaz az n-edik Fibonacci-fára, akkor igaz az $n+1$-edikre is. Az $n+1$-edik fa gyökérpontjából egy-egy él vezet a két részfa gyökérpontjába. Az így kapott két élből álló út kiegészíthető az egyik oldalon az n-edik, a másik oldalon az $n-1$-edik Fibonacci-fa gyökérpontjából induló, az adott részfában a legalsó szinten levő pontig vezető úttal. Így egy $(n-1)+2+(n-2) = 2n-1 = 2(n+1)-3$ hosszúságú utat kapunk. Csak annyit kell megmutatnunk, hogy ez az $n+1$-edik Fibonacci-fa leghosszabb útja. A fa nem tartalmazhat olyan utat, ami átmegy a gyökérponton és az előbbinél hosszabb, hiszen a gyökérpontból mindkét irányba a lehető leghosszabb utat használtuk fel. Olyan út sem lehet, amely nem tartalmazza a gyökérpontot és a fentinél hosszabb, hiszen ekkor az út teljes egészében csak az egyik részfába esne, ahol a maximális hosszúságú út 2, illetve 4 éllel rövidebb, mint a fenti.

Látható, hogy bár a bizonyítás hagyományos matematikai módszerekkel történt, a sejtés megfogalmazásához elegendő számú és jól megjelenített példákra volt szükség, amit a Sage segítségével könnyű volt gyorsan és megfelelő minőségben előállítani.

6.5. A hallgatók eredményei

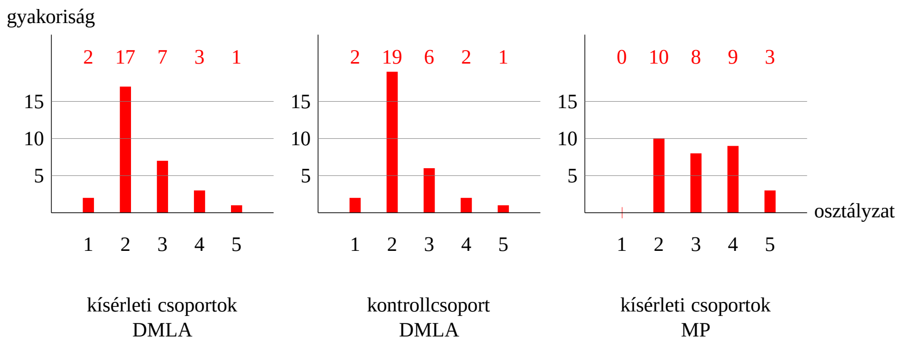
6.5.1. Vizsga és zárthelyi dolgozat eredmények

A 2010/11 tanév második félévében összesen 42 hallgató vett részt kísérleti kurzusainkon. Ezen hallgatók közül 30 vette fel párhuzamosan a DMLA tárgyat is.[19] Az ő vizsgaeredményeiket hasonlítottam össze az ugyancsak 30 főt tartalmazó kontrollcsoport ugyanezen tárgyból elért eredményével. A vizsga formája írásbeli volt, a hallgatók zsebszámológépet használhattak.

Az elért osztályzatok gyakoriságát a 35. ábrán láthatjuk. A kísérleti csoportok átlaga 2,47, míg a kontrollcsoporté 2,37. Az eltérés 0,1, az aktuális hallgatói létszá-

[19] A többiek ezt a tárgyat már korábban elvégezték.

mokkal 5%-os szignifikanciaszinten a kétmintás t-próba eredménye $t = 0{,}442$, így szignifikáns eltérés nem mutatható ki. A hagyományos eszközökkel folytatott vizsgára tehát a tárgy tanulása nem volt kimutatható hatással, viszont a kísérleti csoport 30 hallgatója lényegesen jobb eredményt ért el az MP (kísérleti) tárgyból. Ebben eredményük átlaga 3,23, az osztályzatok gyakorisága a 35. ábrán látható. A DMLA tárgyban elért eredménnyel összevetve a t-próba eredménye 5%-os szignifikanciaszinten $t = 3,3$, ami szignifikáns eltérést mutat. Ennek azonban nemcsak az az oka, hogy a hallgatók itt használhattak számítógépet a számonkérések során[20], hanem az is, hogy itt nem vizsga, hanem évközi jegy volt a követelmény, így az érdemjegy a két zárthelyi dolgozatra, az órai munkára és a házi feladatokra kapott pontszámok alapján alakult ki.



35. ábra. Eredmények a DMLA és a kísérleti tárgyból

6.5.2. A hallgatói eredményesség a kitűzött feladatok típusa szerint

A matematika tanulása során a hallgatók sok feladattal találkoznak, amelyek különböző mértékű kihívást jelentenek számukra. Bár a feladatok nehézségét nem tudjuk egzakt módon számszerűsíteni, hiszen az sok szubjektív elemet tartalmaz, mégis gyakran megpróbálkozunk vele amikor feladatsorokat állítunk össze és az egyes feladatokhoz pontszámot rendelünk. Ez általában heurisztikus módon történik – a tanár tudja, hogy általában mi szokott a tanulóknak nehézséget okozni.

Az, hogy a feladat milyen nehéznek bizonyul, bizonyos mértékig függ a feladat típusától. A feladatok egy lehetséges csoportosítása a következő [56]:

1. *Memória feladat*
   Olyan feladat, amelyben csak a tanult ismeretek felidézésére van szükség, mint pl. egy definíció vagy tétel kimondása, egy eljárás lépéseinek felsorolása.
2. *Direkt feladat*
   A feladatban megadott (ismert) módszerrel megoldandó feladat.

[20] A számonkérések során a hallgatók az internetet nem használhatták.

3. *Azonosítási feladat*

   Adott elemekből ki kell választani azokat, amelyek a kritériumoknak megfelelnek. (Adott fogalomra vonatkozó példák, egy halmaz adott tulajdonsággal bíró elemei, ...)
4. *Realizációs feladat*

   Tanult fogalomra konkrét példa vagy ellenpélda megadása, adott tulajdonságú objektum előállítása.
5. *Kombinált feladat*

   Adott problémához megfelelő módszer kiválasztása, majd annak alkalmazásával a megoldás előállítása.
6. *Bizonyítási feladat* A feladat kitűzője által megfogalmazott állítás igazolása.
7. *Összefüggés keresése*

   A tanult fogalmak közötti kapcsolatok felismerése és állításként való megfogalmazása megfelelő példák alapján. Gyakran része a feladatnak a kimondott állítás bizonyítása is.
8. *Probléma*

   A megoldáshoz a tanult ismeretek és módszerek szokatlan kombinációjára van szükség [1].

A feladatok egy jelentős része nem csak egy csoportba tartozhat a fentiek közül, hiszen egy azonosítási feladat igényelheti valamilyen ismert módszer alkalmazását, amellyel eldöntjük, hogy a vizsgált objektum megfelel-e a feltételeknek, egy realizációs feladat igényelhet olyan bonyolult konstrukciót, hogy annak előállítása már problémamegoldás. A feladat típusa függhet attól is, hogy a tanuló milyen ismeretekkel rendelkezik, illetve mennyire gyakorlott a különböző feladatmegoldási módszerekben. Ugyanaz a feladat lehet kombinált feladat az egyik, probléma a másik hallgató számára. Ennek ellenére a kurzusokon kitűzött feladatokról általában könnyű volt eldönteni, hogy a fentiek közül melyik kategóriába tartoznak leginkább.

Természetesen azt, hogy a feladat megoldása a hallgatók számára mennyire bizonyul nehéznek a feladat típusa mellett mást tényezőktől is függ. Ilyenek pl. a következők:

- *A megoldás összetettsége.*

  Ezt mérhetjük pl. a megoldás során végrehajtandó lépések számával. Ez sem teljesen egyértelmű, hiszen az egyes lépések esetleg további – még egyszerűbb – lépésekre bonthatók. Az, hogy mit tekintünk egy lépéseknek, a tanulók életkorától, korábbi tanulmányaiktól és az elvárt készségektől függnek.
- *A szükséges logikai döntések száma.*

  A megoldás során alkalmazott algoritmusban gyakran fordulnak elő elágazások és ciklusok, amelyekben logikai döntésre van szükség a folytatáshoz.
- *A felhasznált fogalmak megértéséhez szükséges absztrakciós szint.*

  Egy fogalom absztrakciós szintje függ a felhasznált fogalmak absztrakciós szintjétől és azok számától.

- *A megoldás iránya.*

  A hallgatók számára általában nagyobb nehézséget jelent a visszafelé okoskodással történő megoldás megértése és használata, mint a célirányos okoskodásé. Tovább nehezíti a feladatot, ha a megoldás során váltogatni kell a magoldás irányát.

Ha a hallgatók a feladatok megoldása során alkalmas számítógépes programot is használhatnak, akkor a feladatok megoldásának nehézsége jelentős mértékben módosulhat – általában könnyebbé válnak.[21] Gyakran megváltozik a feladatok nehézségi sorrendje is, ha az egyik megoldásához a számítógépes program nagyobb segítséget nyújt, mint a másikéhoz.

A feladatok nehézségét meghatározó tényezők közül a számítógép használata talán leglátványosabban a megoldás összetettségét befolyásolja, hiszen használatával egy hosszadalmasabb számítássorozat egyetlen lépéssé zsugorodhat. Papíron történő számítás esetén pl. jogosan tekinthetünk minden elemi bázistranszformációt egy külön lépésnek, míg számítógéppel a teljes bázistranszformáció egyetlen lépésben történik.

Fontos észrevenni azt is, hogy a számítógép felhasználása a feladatok fenti tipizálását is befolyásolja. Egy kombinált feladat pl. könnyen direkt feladattá válhat. Példa erre a 30. oldalon bemutatott feladat, amelyben a fixpontmentes permutációk számát keressük.

A továbbiakban a hallgatói eredményességet csak a feladatok típusával összefüggésben vizsgálom.

A számítógépes gyakorlatok során, illetve a házi feladatként megoldott feladatok nehézségét a hallgatók által beadott megoldások eredményessége alapján vizsgáltam. Ennek során 25 hallgató munkáját vettem figyelembe. A vizsgált feladatok kiválasztásánál arra törekedtem, hogy sok témakört érintsenek. A feladatok szövege a 9.1. mellékletben található.

A feladatokat a fenti csoportosításnak megfelelően osztályokba soroltam. Igyekeztem a legegyszerűbb, legkézenfekvőbb, illetve leggyakoribb megoldást figyelembe venni. A 40. feladatot pl. a logikai-szitával történő megoldás alapján a problémák közé sorolhatnánk, én mégis direkt feladatnak tekintettem, hiszen a fixpontmentes permutációk előállítását a Sage függvényével[22] a hallgatók már ismerték. Ha a feladat több lépésben oldható meg, akkor a megoldás egyes lépései más-más típusba tartozhatnak. Ilyenkor a legbonyolultabb lépés típusát vettem figyelembe. Pl. a 25. c) feladatban példát kell adni egy adott tulajdonságú mátrixra (realizációs feladat), ki kell számolni annak determinánsát (direkt feladat), és sejtést kell megfogalmazni az itt és korábban tapasztaltak alapján (összefüggés keresése). A feladatot végül az utóbbi csoportba soroltam. Egy több részből álló feladat gyakran több különálló feladatnak tekinthető. Ilyen esetben az osztályozást is minden részre külön végeztem el, volt azonban olyan eset is, amikor az egyes részfeladatok olyan szorosan összefügg-

[21] Hasonló kijelentést tehetünk persze a hallgató előismereteivel kapcsolatosan is. Megfelelő ismeretek birtokában a korábban nehéznek számító feladat egyszerű rutinpéldává válik.

[22] `derangement()`

tek, hogy ezt nem tartottam célszerűnek. Az osztályozás eredménye feladatonként a 9.2. mellékletben található.

Az egyes osztályok gyakoriságait a 1. táblázatban láthatjuk. A vizsgált feladatok között legnagyobb számban a direkt és a kombinált feladatok fordultak elő és viszonylag magas a probléma kategóriájába sorolt feladatok száma is. Egyáltalán nem fordult elő memória feladat, ami a számonkérések gyakori eleme, de nem alkalmas házi feladatnak, és a CAS nem segíti a megoldását. Nem fordult elő azonosítási és bizonyítási feladat sem, viszont volt néhány realizációs feladat és összefüggéskeresés.

1. táblázat. A feladattípusok gyakoriságai

feladattípus	**gyakoriság**
direkt feladat	34
kombinált feladat	28
realizációs feladat	8
összefüggés keresése	10
problémamegoldás	18

A realizációs feladatok kis száma azzal magyarázható, hogy azok a feladatok, amelyek ebbe a kategóriába tartozhatnának, gyakran kombinált feladatnak, illetve problémamegoldásnak minősülnek összetettségük miatt. Ezenkívül a CAS használata sok esetben lehetővé teszi, hogy az összes adott tulajdonságú objektumot felsoroljuk, ahelyett, hogy csak példát hoznánk rá:

- Adjunk példát az 1, 2, 3, 4, 5, 6 számok olyan permutációjára, amelyben az inverziók száma pontosan három!

A hagyományos oktatási forma esetén ez realizációs feladat lenne, de ha a Sage használata megengedett, akkor a hallgató valószínűleg egyszerűen meg fogja adni mind a 29 ilyen tulajdonságú permutációt, a 36. ábrán látható (vagy ahhoz hasonló) kód segítségével. Mivel az inverziók számának meghatározása egy beépített metódussal történik, direkt feladatot kaptunk.

```
for p in P6:
    if Permutation(p).number_of_inversions()==3:
        print p
```

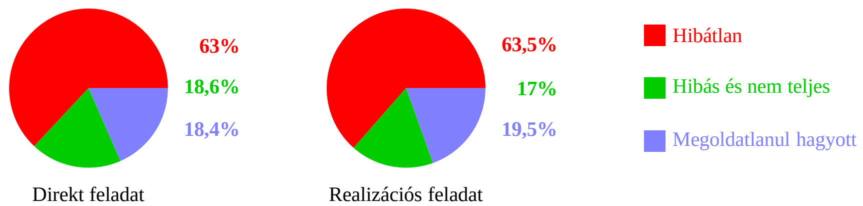
36. ábra. A 3 inverziót tartalmazó permutációk előállítása

A várt 2450 megoldás helyett összesen 1881 érkezett, mivel 569 esetben (23%) a hallgató nem foglalkozott a feladattal. A 2. táblázatban látható az egyes feladattípusok esetén és összességében elért átlagos eredmény, a hibátlan, a részben vagy teljesen hibás, és a nem megoldott feladatok száma. Látható, hogy a hallgatók a legsikeresebbek a direkt feladatok és a realizációs feladatok megoldásában voltak, ennél kissé gyengébben teljesítettek a kombinált feladatok és az összefüggés keresés esetében, és sokkal gyengébb eredményt értek el a problémamegoldás kategóriájába eső feladatok megoldásában.

2. táblázat. A feladatokra adott megoldások száma és eredménye

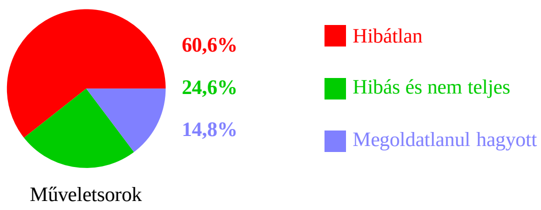
feladattípus	**hibátlan**	**hibás / nem teljes**	**megoldatlan**	**eredmény**
direkt feladat	536	158	156	83,6%
műveletsor végrehajtása	288	117	70	76,7%
realizációs feladat	127	34	39	84,8%
kombinált feladat	363	149	188	78,0%
összefüggés keresése	104	97	49	77,8%
problémamegoldás	140	173	137	48,4%
összesen	**1270**	**611**	**569**	**75,0%**

A direkt és a realizációs feladatok esetén nemcsak az elért százalékos eredmény áll közel egymáshoz, nagyon hasonló a hibátlanul, illetve hibásan megoldott, valamint a megoldatlanul hagyott feladatot aránya is (37. ábra). Azt, hogy ennél a két típusnál a megoldások eredményessége nem tér el egymástól lényegesen, statisztikai vizsgálattal is ellenőriztem. Egy adott feladat esetén a megszerzett pontok átlagát az elérhető maximális pontszámmal osztottam és az így kapott adatokat vetettem össze a két feladattípus esetén. Ha a hallgató nem adott megoldást a feladatra, akkor a feladatot 0 ponttal vettem figyelembe. Az elvégzett F-próba eredménye $f_1 = 33$ és $f_2 = 7$ mellett $F \approx 1,75$-nek adódott, tehát alkalmazható a kétmintás t-próba amelynek eredménye $f = 40$ szabadsági fok mellett $t_{40} \approx 0{,}126$, így az elért eredmény egyezőségét $p = 0{,}05$ szignifikanciaszinten elfogadhatjuk.



37. ábra. Direkt és realizációs feladatok megoldásai

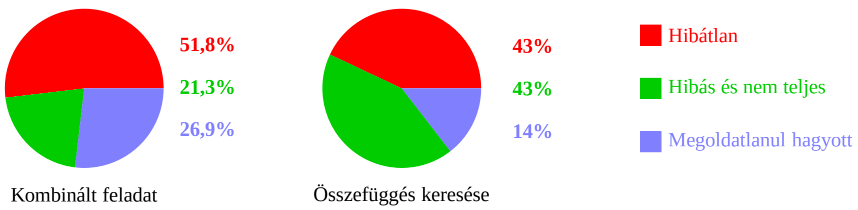
A direkt feladatok egy speciális esete az olyan számítási feladat, amikor egy adott műveletet vagy műveletsort kell végrehajtani. (Ilyen pl. az 9.1. mellékletben található 1. a) b) c) d) feladatok mindegyike.) Mivel ezek számítógépes megoldása a felhasználótól csak a műveletsor megadását igényli, arra számíthatnánk, hogy a hallgatók különösen könnyűnek találják őket, még a direkt feladatokon belül is. Az ilyen típusú feladatokra adott megoldások százalékos eredménye azonban csak 76,7%, ami gyengébb, mint az összes direkt feladat esetén elért 83,6%. Igaz, a hibátlanul megoldott feladatok aránya csak kevéssel marad el a direkt feladatok hasonló adatához képest, azonban a hibát tartalmazó megoldások aránya lényegesen magasabb. (38. ábra)



38. ábra. Műveletsorok végrehajtásának eredményessége

A kombinált feladatok és az összefüggéskeresés esetén az elért százalékos eredmény ugyancsak nagyon közel áll egymáshoz, azonban az utóbbiban jóval nagyobb (kb. kétszer annyi) a hibás vagy nem teljes, feladatok aránya (39. ábra). A látszólagos ellentmondás magyarázata, hogy az összefüggéskeresésként osztályozott feladatokra adott 85 hibás, illetve nem teljes megoldásból mindössze 11 ért 0 pontot, a többire több-kevesebb részpontszámot kaptak a hallgatók. Ezzel szemben a kombinált feladatok esetén a 149 nem teljes megoldásból 65 – tehát majdnem fele – csak 0 pontot ért. Mivel e két feladattípus esetén $F_{27;9} \approx 2{,}27$, a kétmintás t-próba itt is alkalmazható és a $t_{36} = 0{,}566$ érték alapján e két feladattípus hallgatói megoldásainak eredményei is sem mutatnak lényeges eltérést egymástól.

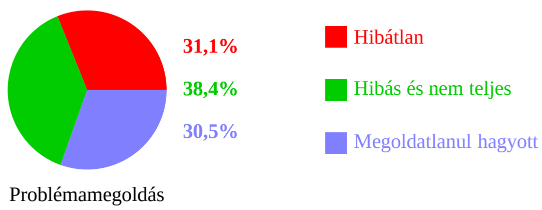
A 2. táblázatban látható százalékos eredmények alapján a kombinált feladatokra és az öszefüggéskeresésekre adott megoldások gyengébben sikerültek a direkt- és realizációs feladatokra adott megoldásoknál. Ezt hipotézisvizsgálattal is igazolhatjuk. Az F-próba eredménye $F_{41,37} \approx 0{,}608$, tehát ismét használható a kétmintás t-próba. A $t_{78} \approx 2{,}3$ eredmény mutatja, hogy az eltérés valóban szignifikáns $p = 0{,}05$ szignifikanciaszinten.



39. ábra. Kombinált feladatok és összefüggéskeresések megoldásai

Ha az összefüggéskeresés kategóriába sorolt feladatokat alaposabban megvizsgáljuk, akkor megfigyelhetjük, hogy ezek mindegyike két vagy több részből áll. Ezek közül csak az utolsó rész a tiszta összefüggéskeresés, azt mindig konkrét számítási feladatok előzik meg, amelyek eredményét megfigyelve kellene sejtést megfogalmazni és a feladatok egy részében igazolni is. Mivel a feladatok számítási része egyszerű, a hallgatók többségének sikerült ezekből részpontszámot szerezni, így érthető a 0 pontos megoldások viszonylag alacsony száma. A feladatok második része, ahol fel kell ismerni az összefüggést sok hallgató számára nehézséget jelent. Az ilyen feladatokra beadott 97 hibás vagy nem teljes megoldásból 69 esetben a hallgató ugyan helyesen végezte a számításokat, de ezek alapján nem jutott el a sejtésig.

A problémamegoldás kategóriába sorolt feladatok megoldásai – a várakozásnak megfelelően – kevésbé eredményesek, mint a többi feladattípus esetén. Ez a többi feladattípushoz képest sokkal alacsonyabb százalékos eredményben, és a hibás, illetve megoldatlan feladatok magas számában is megmutatkozik (40. ábra). Ennek ellenőrzéseként a problémamegoldásokat a kombinált feladatokkal és összefüggéskeresésekkel hasonlítottam össze. Az F-próba eredménye ($F_{37,17} \approx 1{,}52$) alkalmazható a t-próba. Mivel $t_{54} \approx 3{,}45$, a problémamegoldásokra adott megoldások eredményei valóban szignifikánsan gyengébbek.



40. ábra. Sikeresség a problémamegoldások esetén

A megoldás során a hallgatók által elkövetett hibák fajtáit és azok gyakoriságát a 3. táblázatban láthatjuk. A hibák jelentős része származott a feladat hibás értelmezéséből, és a matematikai ismeretek hiányából. Kevés volt a számolási hiba, ami nem meglepő, hiszen a numerikus számításokat nagyrészt a számítógép végezte, míg a hibás bizonyítások kis száma azzal magyarázható, hogy összességében is kevés volt a bizonyítást igénylő feladatok száma.

6.6. Hallgatói vélemények

A hallgatók véleménye az oktatási folyamatról másfajta nézőpontot képvisel, mint az oktatóké. Megismerésük fontos, még akkor is, ha a hallgatóknak nincs átfogó képük a megtanulandó ismeretekről és sokszor félreértik a tanulás célját. Sok esetben a tananyag szó szerinti megtanulásával próbálkoznak és nem értik, miért sikertelenek a zárthelyiken és a vizsgákon. Kérdéseinkre adott válaszaikból megismerhetjük problémáikat, ami az első lépés ezek orvoslása szempontjából.

A hallgatói vélemények megismerése céljából egy kérdőívet állítottam össze

3. táblázat. A megoldásokban előforduló hibák

a hiba típusa	gyakoriság
szintaktikai hiba	75
hibás adatbevitel	26
ötlet hiánya	77
rosszul értelmezett feladat	108
befejezetlen feladat	191
– nem válaszol a kérdésre	17
– numerikus eredmény hiánya	8
– sejtés hiánya	69
– egyéb	97
hibás matematikai összefüggés	93
speciális eset megoldása	34
bizonyítás hiánya	2
számolási hiba	5
összesen	**611**

(9.3. melléklet), amit a számítógépes kurzusok végén a kiosztottam hallgatóknak. A kitöltés nem volt kötelező, de minden alkalommal voltak vállalkozók, így mostanra 94 hallgató válaszait sikerült összegyűjteni és elemezni.

A kérdések egy része arra irányult, hogy a hallgatók milyen előzetes ismeretekkel, felkészültséggel érkeztek intézményünkbe, más részükkel a tanulási módszereikről és a tárgyhoz való viszonyukról szerettem volna képet kapni. A kérdések harmadik csoportja segítségével azt szerettem volna felmérni, hogy a hallgatók mennyire tartják sikeresnek számítógépes gyakorlatot.

A 94 hallgató közül csak négyen tettek emelt szintű érettségi vizsgát matematikából, tehát majdnem mindenki középszinten érettségizett. Érdemes ezzel összevetni, hogy 38 hallgató fakultációs tárgyként választotta a matematikát és hárman matematika tagozatos osztályba jártak. Érettségi eredményük átlagosan 81% volt, a leggyengébb eredmény 40%, a legjobb eredmény 100%.

Az informatika tárgyat csak 28 hallgató tanulta alapszinten a középiskolában, 31-en fakultáció keretében tanulták 35-en pedig informatikai szakközépiskolába jártak. Ebből a tárgyból 14-en egyáltalán nem érettségiztek, 56-an tettek alapszintű és 24-en emelt szintű érettségit. Az átlagos eredmény 82%, a leggyengébb 46%, a legjobb 100%. A 94 hallgató közül 21 vett részt valamilyen felsőfokú szakképzésben informatikából.

6.6.1. A hallgatói kérdőív kérdései és az összegyűjtött válaszok

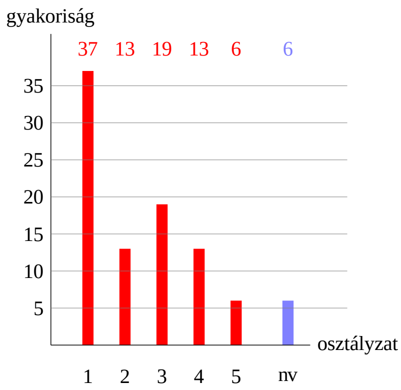
Kérdés: Az órákon megismert Sage rendszer mellett ismer-e valamilyen számítógép algebrai rendszert? (Ha igen melyiket?)

A kérdésre 78-an nemmel válaszoltak. A többiek a MathLab, Mathematica, Maple, Xaos, FreeMat, Microsoft Math rendszereket említették.

Kérdés: Mekkora segítséget jelentettek a diszkrét matematika tanulása során a következők? (Értékelje 1-től 5-ig, ahol az 1 azt jelenti, hogy nem jelentett segítséget, az 5 pedig azt, hogy hatékony segítségnek bizonyult.)

- a tankönyv;
- a példatár;
- az előadás;
- a személyes tanári segítség a gyakorlatokon;
- az interneten talált anyagok;
- a középiskolában megszerzett alapozó ismeretek;
- egyéb, mégpedig ...

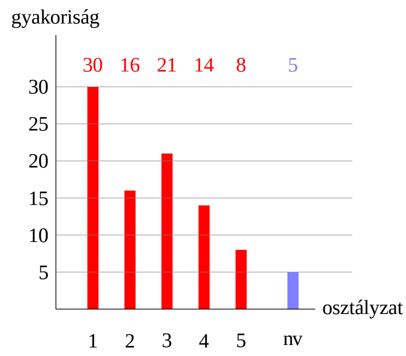
A hallgatók számára ajánlott tankönyvre [3] vonatkozóan a 41. ábrán láthatjuk az eredményt, ami valószínűleg összefügg az olvasási és szövegértési nehézségekkel. A válaszok azt jelzik, hogy a tankönyv, ami korábban a hallgatók számára a tudás egyik legfontosabb forrása volt, a mai hallgatók körülbelül felének szinte semmilyen segítséget nem nyújt, és csak 19-en tartották igazán értékes segédeszköznek a 94-ből. Érdekes, hogy hat hallgató nem is válaszolt a kérdésre.



41. ábra. A tankönyv haszna a hallgatók szerint

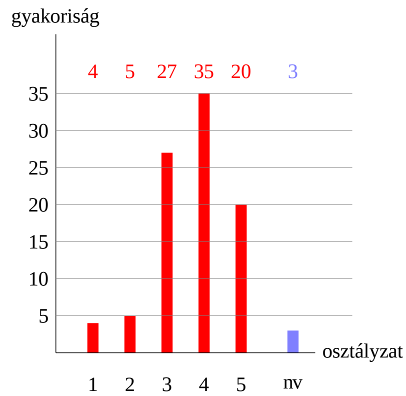
Nem sokkal jobb az eredmény a példatárral [21] kapcsolatosan sem (41. ábra), annak ellenére, hogy egy jól áttekinthető fogalomgyűjteményt, részletesen leírt megoldásokat és sok ábrát tartalmaz.

Lényegesen kedvezőbb a válasz az előadással kapcsolatosan. Itt mindössze 9-en adtak 1-es vagy 2-es osztályzatot, tehát a többség úgy gondolja, hogy az előadás segíti a tananyag megértésében (43. ábra). Ez az eredmény kicsit meglepő annak



42. ábra. A példatár haszna a hallgatók szerint

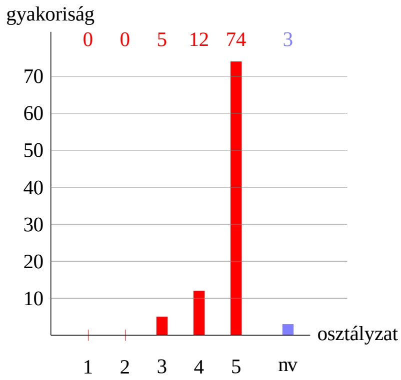
tükrében, hogy a hallgatók az előadást követő gyakorlatokon ritkán tudnak válaszolni a tananyaggal kapcsolatos kérdésekre, és igénylik a legfontosabb definíciók, tételek átismétlését a gyakorlatokon.



43. ábra. Az előadás haszna a hallgatók szerint

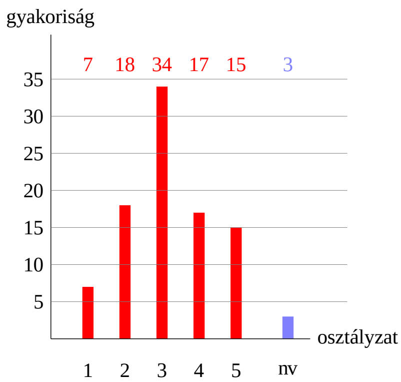
A hallgatók a személyes tanári segítséget találták legértékesebbnek. Ezt abból a 91 hallgatóból, akik válaszoltak a kérdésre 74-en 5-ösre értékelték, olyan hallgató pedig nem volt, aki 3-asnál gyengébb osztályzatot adott volna (44. ábra). Ilyenfajta segítségre éppen a számítógéppel támogatott kurzusokon van a legtöbb lehetőség, hiszen itt a hallgatók a gyakorlat nagy részében önállóan, illetve kisebb csoportokban dolgoznak a számítógép segítségével, ami lehetőséget ad az oktatónak, hogy figyelemmel kísérje, illetve tanácsaival segítse munkájukat.

A hallgatók mindegyikének volt otthoni internet elérése, ezen kívül az egyetemi WiFi hálózat és a nyílt labor is rendelkezésükre állt. Sokan hasznosnak tartják a matematika tanulásának internet által biztosított lehetőségeit és az ott található anyagokat, de a 3-as osztályzatok száma a legmagasabb és akadt jónéhány negatív vélemény is (45. ábra). A számítógépes gyakorlatokon ennél pozitívabbnak tűnt a helyzet, a hallgatók rendszeresen igénybe vették az internet segítségét, ha a feladatokban szereplő



44. ábra. A személyes tanári segítség haszna a hallgatók szerint

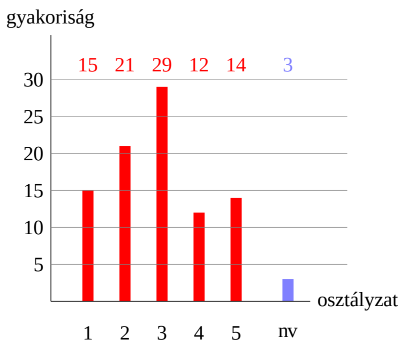
fogalmak ismeretével gondjuk volt.



45. ábra. Az internet haszna a hallgatók szerint

Az egyetemi matematika anyag megértéséhez nélkülözhetetlen a középiskolai anyag alapos ismerete, ezért tettem fel azt a kérdést, hogy mennyire érzik úgy a hallgatók, hogy a középiskolai alapozó ismereteik segítették egyetemi matematika tanulmányaikat. Az eredmény a 46. ábrán látható. Viszonylag sokan, 29-en értékelték a középiskolai alapozást közepesre, de még többen, 36-an csak 1-esre, illetve a 2-esre. A viszonylag gyenge eredmény nem meglepő, ha figyelembe vesszük annak a felmérő dolgozatnak az eredményét, amelyet a hallgatók a felsőfokú tanulmányaik kezdetén írnak a középiskolai matematika anyagból [10], viszont elgondolkodtató, hogy ez egyáltalán nincs összhangban a kérdőívet kitöltő hallgatók 81%-os érettségi átlagával.

A kérdéscsoport utolsó kérdésére – a felsoroltakon kívül volt-e valami, amit a tanulmányaik szempontjából hasznosnak, segítőnek bizonyult – mindössze 14-en válaszoltak. Ezek közül 6-an a csoport, illetve évfolyamtársakkal való közös tanulást emelték ki. Volt olyan hallgató, aki a saját jegyzetein kívül más hallgató jegyzeteit is felhasználta a készülésnél, és olyan is, aki más egyetem tankönyvét használta. Ket-

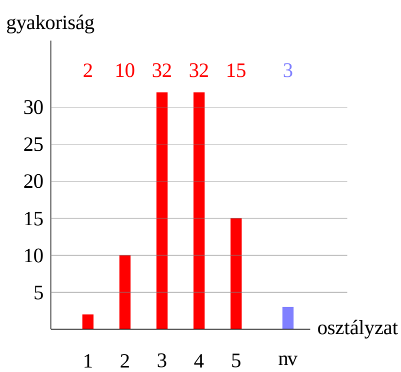


46. ábra. A középiskolában szerzett alapozó ismeretek haszna a hallgatók szerint

ten más csoportok (más tanár) gyakorlataira is bejártak, és két hallgató már korábban járt másik egyetemre, ahol hasonló tárgyat tanult. Néhányan magántanárhoz jártak. Érdemes megfigyelni, hogy itt is – összhangban az előzőekkel – a legtöbben egy másik személlyel való közvetlen kommunikációt tartottak hasznosnak tanulmányaik szempontjából.

Kérdés: Mennyire segítette a tananyag megértésében az órákon használt Sage rendszer? (Osztályozza 1-5-ös skálán, ahol az 1 azt jelenti, hogy nem segítette, az 5 pedig azt, hogy nagy segítséget jelentett.)

A kérdésre adott válaszok azt mutatják, hogy a hallgatók többsége a rendszer tanulmányaikra gyakorolt hatását legalább közepesen segítőnek találta (47. ábra). Összevetve az eredményt a hagyományos módszerekkel, láthatjuk, hogy a személyes tanári segítség és az előadás szerepét fontosabbnak tartják, míg a z egyéb tárgyi eszközök, a tankönyv, a példatár és az internet hatása lényegesen kisebb. Ez azt mutatja, hogy a CAS jól használható és fontos eszköze lehet az oktatási folyamatnak, különösen, ha figyelembe vesszük, hogy a személyes tanári segítség a magas hallgató/oktató arány miatt csak korlátozott mértékben alkalmazható.

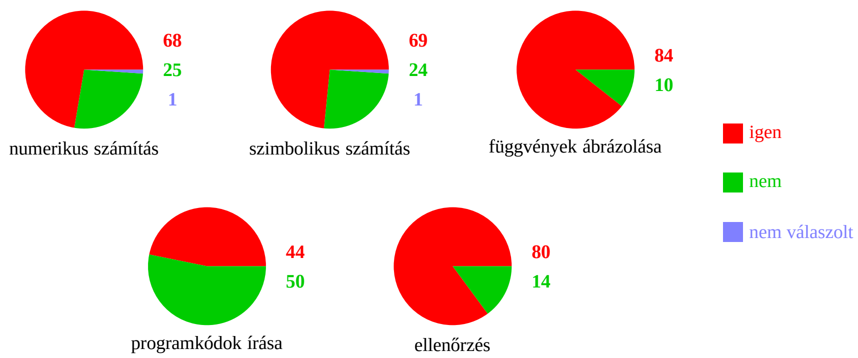


47. ábra. A Sage rendszer segítő hatása a matematika tanulása szempontjából

Kérdés: A következő állítások közül melyiket tartja igaznak? Válaszoljon igennel vagy nemmel! (I/N)

1. A Sage megkönnyíti a matematika tanulását, mert segítséget jelent a numerikus számítások elvégzésében.
2. A Sage megkönnyíti a matematika tanulását, mert segítséget jelent a szimbolikus számítások elvégzésében.
3. A Sage megkönnyíti a matematika tanulását, mert az összefüggések (függvények) könnyen ábrázolhatók a segítségével.
4. A Sage megkönnyíti a matematika tanulását, mert a programkódok írása során érthetőbbé válnak a matematika egyes algoritmusai.
5. A Sage megkönnyíti a matematika tanulását, mert lehetővé teszi a gondolatmenetem gyors ellenőrzését.

A válaszok gyakoriságát a 48. ábrán láthatjuk. Láthatjuk, hogy mindegyik kérdésre kaptunk pozitív válaszokat. A programkódok írását a válaszadók majdnem fele hasznosnak ítélte, az összes többi esetben pedig többségben vannak az igen válaszok. A 3. kérdésre adott válaszok mutatják, hogy a szemléletesség a hallgatók véleménye szerint is nagyon fontos a matematika megértésében. Figyelemre méltó az 5. kérdésre adott igen válaszok nagy száma is. A hallgatók gyakran bizonytalanok tudásukban és nem tudják, hogy az önálló munkára kitűzött feladatot helyesen oldották-e meg, ezért fontosnak számukra a visszajelzés.



48. ábra. Milyen formában segíti a Sage rendszer a matematika tanulását?

Kisebb meglepetést okozott, hogy a 4. kérdésre érkezett a legkevesebb igen válasz, hiszen informatikus hallgatókról van szó. Figyelembe kell azonban vennünk, hogy CAS alkalmazása során ritkán szükséges, hogy az algoritmus kódját magunk írjuk meg, legtöbbször elegendő a beépített eljárásokat, függvényeket alkalmazni,

A hallgatók által megoldott feladatok elemzése során kiderült, hogy viszonylag kevesen alkalmaztak programkódokat a számítások elvégzéséhez, ezek között viszont sokan szinte minden ilyen lehetőséget megragadtak. Az is megfigyelhető volt, hogy az ilyen jellegű megoldások szinte minden esetben helyesek voltak, és a felhasznált programrészletek az ismert programozási tételeket alkalmazták. (Erre példa a 33. oldalon bemutatott megoldás, amely a kiválogatás tételét alkalmazza a fixpontmentes permutációk előállítására.) A sikeresség titka tehát az volt, hogy a szükséges matematikai ismeretek egy részét a hallgatók olyan eszközök használatával helyettesítették, amelyek alkalmazásában nagy gyakorlattal és biztos tudással rendelkeztek.

Kérdés: Melyik témakör(ök) tanulmányozása során érezte hasznosnak a Sage felhasználását a félév során. Miért?

A kérdésre nem mindenki válaszolt, de a válaszadók között volt, aki több témakört is megjelölt. Sajnos az okot legtöbben nem adták meg. Az említett témakörök között vannak olyanok, amelyek átfedik egymást, pl. a mátrixok a lineáris algebra része, de nagyon sok hallgató említi külön. A témakörökre adott szavazatok gyakoriságát a 4. táblázatban foglaltuk össze. Kimagaslóan sok, összesen 43 hallgató érezte úgy, hogy a rendszer segítséget nyújtott a mátrixokkal kapcsolatos ismeretek tanulása során. Akik indoklást is írtak, a számolások megkönnyítését említették. A további témakörök közül a gráfokat, függvényeket, vektorokat és a lineáris algebrát érdemes megemlíteni. Ezek közül a lineáris algebra esetén nem tudjuk, hogy valóban a témakör minden feladatánál hasznosnak érezték-e a Sage alkalmazását, vagy egy kisebb területre gondoltak, mint pl. a bázistranszformációkra vagy a lineáris transzformációkra – ahol grafikus szemléltetésre is lehetőséget ad a rendszer. A gráfok és a függvények esetén sokan említették az indoklásban a szemléletes ábrázolás lehetőségét.

4. táblázat. Melyik témakör megértését segítette a Sage a legjobban?

témakör	**gyakoriság**
mátrixok	43
gráfok	27
függvények	23
vektorok	16
lineáris algebra	12
kombinatorika	7
halmazok	6
egyenletek, egyenletrendszerek	4
algebrai struktúrák	3
hálók	3
komplex számok	3
relációk	2
koordináta-geometria	2

Kérdés: Melyik volt a félév során tanult témakörök közül a legérthetőbb?

Ha összevetjük a válaszok alapján készült táblázatot (5. táblázat) az előző kérdésre adott válaszokkal (4. táblázat), láthatjuk, hogy nagyon hasonló eredményt kaptunk a két kérdésre vonatkozóan. A táblázat alján levő témakörökhöz tartozó gyakoriságok nagyon alacsonyak, ezért ezekről nem nyertünk értékelhető információt. A mátrixok és gráfok témaköre viszont egyértelműen a viszonylag könnyű fejezetek közé tartozott a magas szavazati arány alapján.

5. táblázat. A legérthetőbb témakör

témakör	**gyakoriság**
mátrixok	43
gráfok	20
kombinatorika	9
függvények	6
halmazok	5
hálók	5
teljes indukció	5
lineáris algebra	4
mindegyik	4
vektorok	4
algebrai struktúrák	3
komplex számok	3
relációk	2
egyenletek, egyenletrendszerek	2

Kérdés: Melyik témakör okozta a legnagyobb nehézséget a félév során? Mi ennek az oka?

A kérdésre adott válaszok összesítését a 6. táblázat tartalmazza. A válaszadók közül kevesen jelölték meg az okot. A kombinatorikával kapcsolatosan néhányan megemlítették, hogy nem tudják kiválasztani a megfelelő módszert, nem tudják ellenőrizni a kapott eredményt, és a témakör túlságosan absztrakt. A magas absztrakciós szint okozott problémát a vektorterek tanulmányozása során is. Olyan válasz is előfordult, ami a kevés órai gyakorlási lehetőséget, illetve a háttértudás hiányát említette.

6. táblázat. A legnehezebb témakör

témakör	**gyakoriság**
kombinatorika	30
lineáris transzformációk	9
vektorok	9
mátrixok	7
gráfok	4
komplex számok	4
függvények	3
halmazok	3
relációk	2
vektorterek	2
koordináta-geometria	1
teljes indukció	1

Kérdés: Mi tenné könnyebbé az Ön számára a diszkrét matematika és lineáris algebra tanulását? (Több javaslata is lehet.)

A kérdésre kevés válasz érkezett. Nyolc hallgató a gyakorlatok óraszámának emelését javasolta, míg négyen úgy gondolták, hogy több mintafeladat bemutatására lenne szükség.

7. Számítógépes tudásellenőrzés

7.1. Formatív és szummatív ellenőrzés

A tanulók tudásszintjének ellenőrzése a tanulási- és oktatási folyamat szerves részét képezi. A tanulók számára jó esetben fontos motivációs tényezőt jelent, illetve információval szolgál arra nézve, hogy melyek azok a témakörök, amelyekben az ismereteik hiányosak, melyek azok a készségek és képességek, amelyeket fejleszteni kell. Természetesen sokszor a tanár segítségére is szükség van az egyéni eredmények elemzéséhez és a célok megfogalmazásához, bár a felsőoktatásban ez kevésbé érvényesül, mint a közoktatásban. Mindenképpen fontos azonban, hogy az oktató nyomon kövesse tanulócsoportja eredményeit, lássa, hogy melyek azok a témakörök, fogalmak, eljárások, amelyek nehézséget okoznak a hallgatók számára, hiszen ennek alapján tudja – az eredmények helyes interpretációja esetén – az oktatási módszereket és ezzel együtt a tanulási folyamatot javítani.

Kellough a tudásellenőrzés hét célját fogalmazza meg [31]:

- Segítse a tanulót a tanulásban.
- Azonosítsa a tanuló erősségeit és gyengeségeit.
- Értékelje az alkalmazott oktatási stratégia hatékonyságát.
- Értékelje és javítsa a tanterv hatékonyságát.
- Értékelje és javítsa az oktatás hatékonyságát.
- Szolgáltasson olyan adatokat, amelyek segítenek a tanulási folyamat további részének tervezésében.
- Segítse elő a szülőkkel való kommunikációt.

Bár Kellough [31]-ben a középiskolai oktatás kérdéseivel foglalkozik, az általa megfogalmazott célok – a szülőkkel való kapcsolattartást kivéve – felsőoktatásban is érvényesek.

A tudásellenőrzésnek a pedagógiai szakirodalomban két fő típusát szokás megkülönböztetni, a *formatív-*, illetve *szummatív értékelést*:

A formatív értékelés célja, hogy a tanulási folyamat során visszajelzést szerezzünk a tanulók, illetve tanulócsoport előre haladásáról, amelynek segítségével javíthatjuk, korrigálhatjuk a tanulás folyamatát, a jobb eredmény elérése érdekében. Jellemzően a tanulási folyamat elején, illetve a tanulási folyamat közben alkalmazzuk. Szerencsés esetben a tanulási folyamat része, ami rendszeresen előkerül az újabb ismeretek és készségek ellenőrzése céljából. Lényegében egy folyamatszabályozásról van szó, amihez a formatív ellenőrzés biztosítja a visszacsatolást. Tiszta formájában a tanulók nem kapnak rá érdemjegyet, bár ebben a formában ritkán alkalmazzák.

A szummatív értékelés általában egy fejezet, szemeszter, tanév végén, illetve egy adott iskolatípus befejezésekor kerül sorra. Célja, hogy a tanuló sikerességét, illetve a tanulási folyamat során elért szakértelem szintjét mérje valamilyen előre meghatározott követelményrendszerhez viszonyítva. Az eredményt érdemjeggyel, pontszámmal, illetve százalékban szokás kifejezni. A felsőoktatásban ez a tipikus számonkérési forma.

Kellough tudásellenőrzésre vonatkozó követelményei a gyakorlatban nehezen kielégíthetők. A formatív értékelésnek gyakorlatilag folyamatosnak kell lennie ahhoz, hogy betöltse a szerepét. Ha a tanuló képességei lehetővé teszik az önálló munkát, és annak megfelelő szintű ellenőrizését is, akkor sikeres lesz a tanulmányaiban, feltéve, ha a kellő érdeklődése és kitartása is van hozzá. Ez előfordul az egyetemi hallgatók és a középiskolások között is, de nem elég általános. A nagy többségnek segítségre van szüksége az új ismeretek megszerzéséhez, sőt a gyakorláshoz is és többnyire nem ismerik elég jól az ellenőrzési módszereket ahhoz, hogy el tudják dönteni, jól oldották-e meg a feladatot vagy sem. Ugyanakkor az oktatók általában nem rendelkeznek elég kapacitással ahhoz, hogy egyéni segítséget tudjanak nyújtani minden hallgatónak, illetve hogy folyamatosan ellenőrizzék az előrehaladásukat. A számonkérések a felsőoktatásban gyakran félévente egy vagy két zárthelyi dolgozatot és/vagy egy vizsgát jelentenek. Ezek lehetővé teszik a hallgatók szummatív értékelését, de visszajelző szerepük a hallgatók számára későn érvényesül.

7.2. Számítógéppel támogatott tudásellenőrzés

A számítógéppel támogatott tudásellenőrzés egyik célja éppen a fenti problémák megoldása lenne. Bár az informatika az utóbbi évtizedekben hatalmas fejlődésen ment keresztül, ami sokféle tudáskiértékelő rendszer létrehozását lehetővé tette, ma sem könnyen érhető el olyan rendszer, ami egyaránt kielégítené azokat a gyakorlati és módszertani célokat, amelyeket az oktatók szükségesnek tartanak [53].

Pead sok olyan szempontot sorol fel cikkében, ami előnyösebbé teszi a számítógéppel történő tudásellenőrzést a hagyományosnál [39]. Ezeket két csoportba osztotta. Az első csoportba azok kerültek, amelyek a lebonyolítás hatékonyságával kapcsolatosak:

A számítógép lehetővé teszi, hogy a számonkérés logisztikáját nagymértékben egyszerűsítsük. Nincs szükség arra, hogy a feladatsorokat kinyomtassuk és megszűnik a biztonságos őrzés, illetve szállítás problémája. Ha a rendszer automatikusan értékeli a vizsgázók munkáját, akkor megtakarítható a javítókra, továbbá a javítást koordináló csapatra szánt költség. Az eredményeket a gép a vizsga befejezése után azonnal szolgáltatja. Mindez lehetővé teszi, hogy a tanulók bármikor vizsgát tehessenek, amikor felkészültnek érzik magukat.

A második csoportba a változatossággal és a megbízhatósággal kapcsolatos szempontok kerültek. A számítógép lehetővé teszi az adaptív tesztek alkalmazását és a multimédiás eszközök, szimulációk felhasználását a feladatokban. Biztosítja az egységes segédeszközöket (beépített számológépet, illetve segédanyagokat), továbbá az egyes kérdésekhez kapcsolódó adatokat. Az adatbevitelhez korszerű információtechnológiai eszközök használhatók.

Könnyen látható azonban, hogy a két szempontrendszer ellentmondásban van egymással. Az első akkor valósítható meg, ha olyan kérdéseket alkalmazunk, amelyekre a válasz automatikusan értékelhető. Ez akkor valósítható meg egyszerűen, ha a kérdésre igennel vagy nemmel lehet felelni, illetve feleletválasztós tesztet alkalmazunk. Ha a feladatok tartalmi szempontból egyszerűek, akkor csak előre meghatározott, jól körülhatárolt, kisebb anyagrészek ellenőrzésére alkalmasak, mert nagyobb témakör lefedéséhez sok egymástól elszigetelt apró kérdésre volna szükség, ami nem ösztönzi a hallgatókat a tananyag átfogó megértésére. Másrészt, ha a kérdések megválaszolásához komolyabb gondolkodásra van szükség, akkor az értékelés erősen torzított képet adhat a vizsgázók tudásáról, hiszen elképzelhető, hogy valaki majdnem teljesen jól gondolkodik, de valamilyen apró hiba, esetleg figyelmetlenség miatt rossz választ jelöl meg és az is lehetséges, hogy valaki teljesen véletlenül találja el a helyes választ. Ez éppen a jól felkészült hallgatóknak kedvezőtlen.

Azok a rendszerek, amelyek a második szempontrendszerre koncentrálnak, nem teljesítik az elsőben kitűzött takarékossági szempontokat, hiszen a multimédiás eszközök, szimulációk használata magasabb követelményeket támaszt a feladatok tervezése és az adatbevitel szempontjából, ami a feladatokat tartalmazó adatbázis előállításának idejét és költségeit jelentősen növeli.

Pead szempontrendszerét végiggondolva észrevehetjük, hogy ennek megfogalmazásakor csak a szummatív értékelésre, és nagy tömegeket megmozgató vizsgákra gondolt. Mások éppen a formatív ellenőrzést helyezték előtérbe. Wood és Burrow a TRIADS szoftver alkalmazásakor a következő célokat fogalmazta meg: „A CBA[23] használatával hallgatóinkat önálló tanulásra kívánjuk ösztönözni, elő kívánjuk segíteni a mélyrehatóbb tanulást, és közben fenn kívánjuk tartani a magas szintű oktatást az oktató/hallgató arány csökkentése mellett [62].” Mivel a formatív ellenőrzés helyes arányok esetén sokkal gyakoribb, mint a szummatív, ezért a számítógép használata ennél a formánál is indokolt.

Lényegében ugyanerre a következtetésre jutnak a Glasgow Caledonian University munkatársai is [9], akik úgy látják, hogy az első éves hallgatókat oktató kollégák reménytelenül próbálják fenntartani az oktatás színvonalát az inhomogén hallgatói csoportokban, a hallgatók magas hiányzási aránya és gyenge teljesítménye mellett. Megállapítják, hogy folyamatos segítő visszajelzés mellett a hallgatók teljesítménye és elégedettségi szintje javul és a számítógépes foglalkozásokat magasabb arányban látogatják, mint a hagyományos tantervi órákat.

7.2.1. A feladattípusok és a megoldások értékelése

A számítógépes tudásellenőrző rendszerek két fontos ismérve, hogy milyen a értékelés intelligenciája és milyen feladattípusokat támogat. A értékelés intelligenciája alapján a rendszerek három csoportba sorolhatók [22]:

- manuális értékelésű;
- kvázi automatikus értékelésű;[24]
- automatikus értékelésű.

A manuális értékelés azt jelenti, hogy bár a feladatokat a hallgatók a számítógépen keresztül kapják és a megoldásokat is a gépbe viszik be, a megoldások értékelése már emberi erőforrás alkalmazásával történik.

[23] Computer Based Assessment

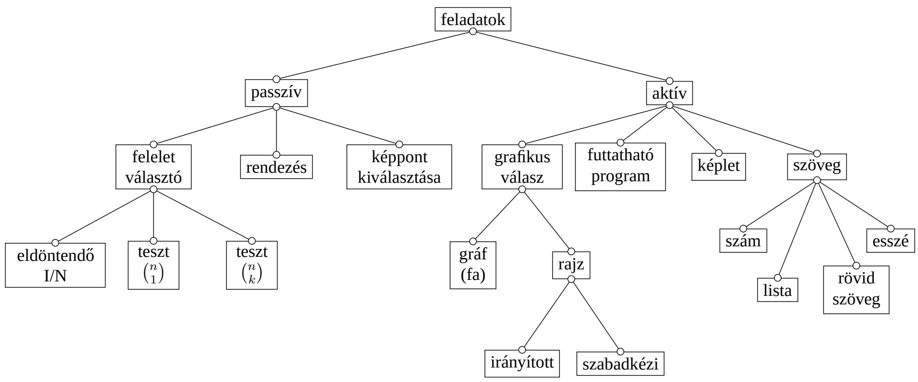
[24] Szokás szemi-automatikus értékelésnek is nevezni.

Kvázi automatikus értékelésről akkor beszélünk, ha a rendszer képes a megoldások döntő részét önállóan értékelni, míg egy kisebb részét az oktatóra bízza.

Automatikus az értékelés, ha a rendszer képes valamennyi választ teljes mértékben értékelni.

A támogatott feladatokat gyakran osztályozzák a válaszok bevitelének módja szerint. Ennek alapján megkülönböztetünk passzív és aktív feladattípusokat [24].

A feladat passzív, ha a a választ egy előre megadott válaszhalmazból kell kiválasztani, vagy egy képpontot kell megjelölni. Az aktív típusok esetében a választ a hallgatónak kell megalkotnia. Mindkét csoport alcsoportokra bontható. A passzív feladatok között találhatók a gyakran alkalmazott feleletválasztós tesztek és eldöntendő kérdések, az aktív feladatok között pedig a szöveges és grafikus válaszok. Részletesebben látható az osztályozás a 49. ábrán.



49. ábra. Feladattípusok a válasz bevitelének módja szerint

A támogatott feladattípusok azért fontosak, mert összefüggésben vannak az értékelés intelligenciájával [22] [55]. Ha csak passzív feladattípusokat alkalmazunk, akkor könnyen megvalósítható a megoldások automatikus értékelése. Mivel az aktív típusok esetén a vizsgázó maga alkotja meg a választ, előfordulhat, hogy az értékelő rendszer egy tartalmilag helyes megoldást hibásnak értékel, mert a hallgató a leírás során a szokásostól eltérő formát követett. Mivel az értékelő rendszer előnyei éppen az automatikus vagy legalább kvázi automatikus értékelésen alapulnak, a rendszerek többsége kizárólag passzív feladattípusokat alkalmaz.

Passzív feladattípusok alkalmazása természetesen a hagyományos vizsgáztatásban sem ritka. Feleletválasztós teszteket alkalmaznak a GRE vizsgákon[25] [17], nyelvvizsgákon, jó néhány matematika versenyen. Ha azonban kizárólag ezek fordulnak elő, akkor a számonkérés egyoldalúvá válik, és nem teszi lehetővé, hogy a tanulók gondolkodásmódjáról képet kapjunk.

[25] Graduate Record Examinations

7.3. Az eMax rendszer

Az eMax rendszer fejlesztése az Óbudai Egyetem jogelőd intézményében a Budapesti Műszaki Főiskolán indult 2005-ben. A cél egy számítógépes tudásellenőrző rendszer létrehozása volt, amely a passzív feladattípusok mellett két aktív feladattípust is támogat, mégpedig a rövid szöveges feladatokat és a matematika feladatok egy típusát.

Az aktív feladattípusok kezelését a rendszer egy-egy modulja végzi, amelyek neve a támogatott feladattípus alapján *rövid szöveges modul* [45], illetve *matematikai modul*. A továbbiakban csak a matematikai modult ismertetem.

7.3.1. A matematikai modul feladatai

A matematikai modul a következő feladatokat látja el:

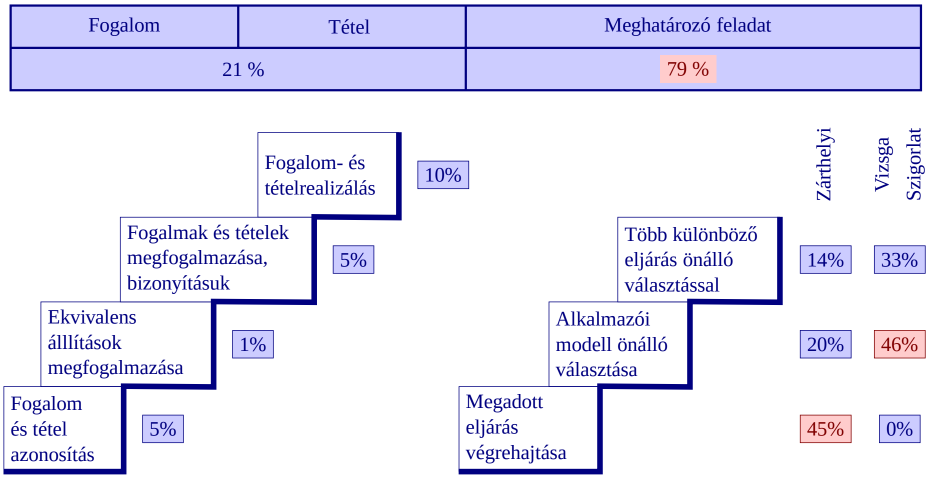
- Lehetővé teszi a feladatok és mintamegoldások rögzítését a rendszerbe.
- Felületet biztosít a hallgatói megoldások beviteléhez.
- Értékeli a bevitt hallgatói megoldásokat.
- Lehetővé teszi az oktató számára a hallgatói megoldások és az elért eredmények megtekintését, és szükség esetén az eredmény módosítását.

A modul célja olyan értékelő rendszer létrehozása volt, amely nemcsak a feladatra adott megoldás végeredményét, hanem – valamilyen mértékben – a megoldás menetét is képes értékelni. Ezt a nehezen elérhető célt két korlátozással sikerült megvalósítani. Az egyik, hogy a kiértékelés nem automatikus, hanem kvázi automatikus, a másik, hogy az értékelő rendszer csak bizonyos speciális matematikai feladatok esetén működik.

Pólya György a matematikai feladatok két nagy csoportját különbözteti meg: a bizonyítási feladatokat és a meghatározó feladatokat[26] [42]. A bizonyítási feladatoknál egy állítás helyességét kell megmutatni vagy cáfolni, míg a meghatározó feladatok esetén valamilyen adatok alapján meg kell határozni egy matematikai objektumot. Ez az objektum lehet például egy szám, vektor, mátrix, geometriai ábra. Az eMax matematikai modulja jelenleg csak olyan meghatározó feladatok értékelésére képes, amelyeknél a kiinduló adatok és a végeredmény is szám, vektor vagy mátrix, illetve az eredmény lehet még sík egyenlete és egyenes egyenletrendszere is [55].

A felhasználható feladatok köre a fentiek alapján nagyon szűknek tűnik, azonban alaposabb vizsgálat azt mutatja, hogy számonkéréseinken korábban is a meghatározó feladatok domináltak. Ennek bizonyítására összegyűjtöttük és kategorizáltuk a 2000/2008 közötti lineáris algebra tárgykörébe eső mérnök informatikus hallgatók számára kitűzött zárthelyi és vizsgafeladatainkat [25]. A feladatok egy része a tételek, definíciók ismeretét vizsgálja. Ezeket négy csoportba soroltuk, de együttvéve is csak az összes feladat 21%-át tették ki. A fennmaradó feladatok mindegyike a meghatározó feladat kategóriájába került, ezek összesen tehát az összes feladatok nagy többségét 79%-át alkották. Részletesebb információt láthatunk a 50. ábrán.

[26]Valójában Pólya György bizonyítási-, illetve meghatározó problémáról ír, mert könyvében olyan feladatokkal foglalkozik, amelyeket a matematika módszertan a problémák kategóriájába sorol.



50. ábra. Feladattípusok a lineáris algebra zárthelyi dolgozatokon és vizsgákon

A fenti állapot időközben a követelményrendszer megváltozása miatt módosult. Külön elméleti rész bevezetésével a fogalmak és tételek ismeretét ellenőrző feladatok összes feladat kb. 50%-át teszik ki, míg az ezekre adott pontszám az összpontszám 40%-a. A többi feladat továbbra is a meghatározó feladat kategóriájába esik, ezek szerepe tehát továbbra is jelentős.

7.3.2. A matematikai modul kezelőfelületei

A rendszer matematikai moduljához olyan hallgatói és oktatói szerkesztőfelületet alakítottunk ki, amelyek összhangban vannak a modul céljaival, így lehetővé teszik, hogy a vizsgázó a kérdésre adott választ alkalmas képletek sorozatával adja meg, amelyek logikusan vezetnek a megoldáshoz. Az oktatónak a helyes megoldásokon túl meg kell adnia azokat a feladatspecifikus adatokat is, amelyek segítséget nyújtanak az értékelő algoritmusok futtathatásához.

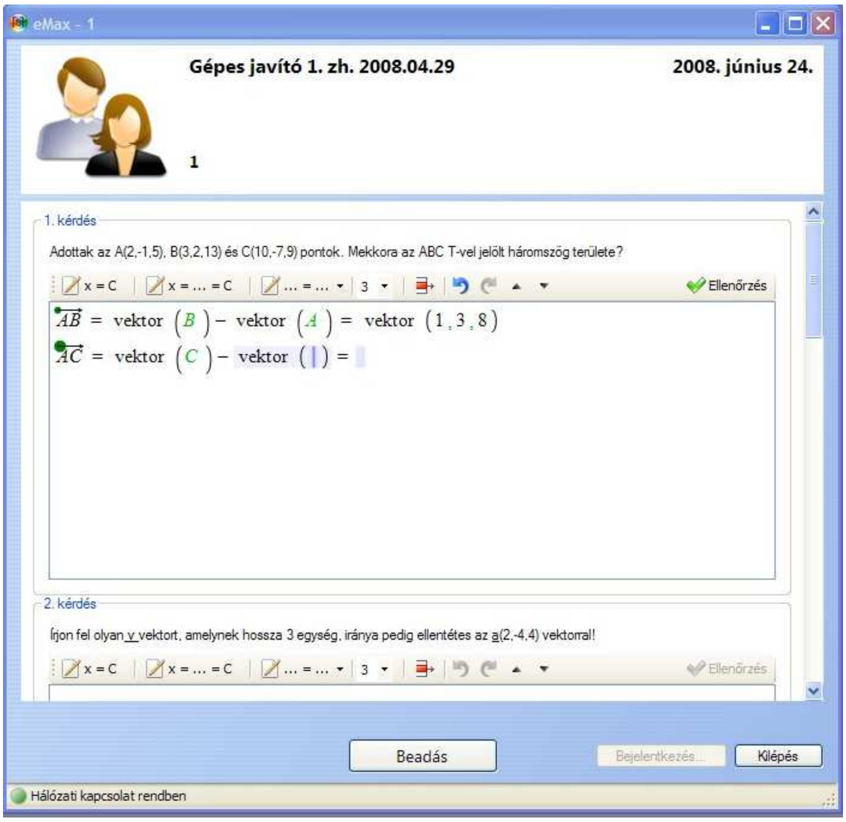
Egy feladathoz és értékeléséhez az alábbiak megadása szükséges:

- A feladat szövege – esetleg ábrával illusztrálva.
- Javítókulcs
- Kulcsműveletek
- Adatok, tesztesetek és értékelési módok

A javítókulcs a papíralapú vizsgákéhoz hasonlóan a feladat egy vagy több mintamegoldását tartalmazza, a megfelelő részpontszámokkal együtt. A kulcsműveletek megadásával, a hallgatói megoldáshoz a megfelelő oktatói megoldás kiválasztását biztosítjuk, amely esetenként lehetővé teszi a vizsgázó helyes részmegoldásainak értékelését. Az adatok, a tesztesetek az értékelés szűrőalgoritmusainak eredményes futtatását támogatják.

A hallgatói felület

Miután a hallgató bejelentkezett a rendszerbe és kiválasztotta a megfelelő feladatsort (vizsgát), a képernyőn megjelenik a hallgatói felület (51. ábra), amely tartalmazza a feladatok szövegét, az eszközsort és a munkaterületet. A feladatokat a hallgató tetszőleges sorrendben oldhatja meg, a vizsga időtartama alatt lehetősége van egy korábbi feladatra visszatérni. A feladat megoldását a munkaterületen adhatja meg. A megoldás sorokból áll, amelyeknek kötött szintaktikájuk van. A hallgatónak lehetősége a van új sorokat beszúrni, sorokat törölni, illetve a sorok sorrendjén változtatni. Az ellenőrzés gomb segítségével megtudhatja, hogy a megoldás szintaktikailag helyes-e. Ennek természetesen nincs köze a tartalmi helyességhez.



51. ábra. A hallgatói felület

A feladat szövege az adatokat és a keresett objektumot mindig valamilyen változónévvel jelöli, ezek használata a hallgató számára kötelező. Többnyire további jelölések (munkaváltozók) bevezetésére is szükség van, amelyeket mindig az eredeti adatok és a már korábban bevezetett munkaváltozók segítségével kell definiálni. Az új jelölés bevezetésének formája:

$$\langle \text{új változó} \rangle = \langle \text{képlet} \rangle = \langle \text{numerikus érték} \rangle$$

Ugyanígy néz ki a végeredmény megadása is:

$$\langle\text{eredmény}\rangle = \langle\text{képlet}\rangle = \langle\text{numerikus érték}\rangle$$

A megoldás menetét egy példán szemléltetjük:

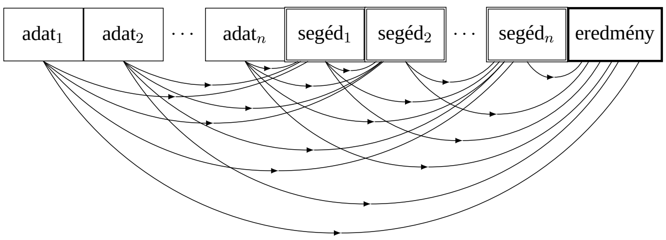
Feladat: Határozzuk meg az $ABC_\triangle$-ben az A csúcshoz tartozó $alfa$ szöget, ha $A(1,-2,2)$, $B(-3,0,1)$ és $C(2,2,-5)$.

Megoldás:

$$AB = \text{vektor}(B) - \text{vektor}(A) = (-4,2,-1)$$
$$AC = \text{vektor}(C) - \text{vektor}(A) = (1,4,-7)$$
$$c = \text{abs}(AB) = \sqrt{21}$$
$$b = \text{abs}(AC) = \sqrt{66}$$
$$skal = AB * AC = 11$$
$$h = \frac{skal}{b * c} = 0.295$$
$$alfa = \arccos(h) = 72.8$$

A megoldás értékeléséhez elengedhetetlen a középső rész, amelynek segítségével a megoldás gondolatmenete nyomon követhető. Teljes pontszámot csak akkor kap a hallgató, ha a numerikus értékeket is megadja. Itt a rendszer – beállítástól függően – eltűr néhány százalék pontatlanságot, hiszen a kerekítések miatt az eredmények kismértékben eltérhetnek egymástól.

Természetesen a megoldás a fentitől eltérő is lehet, könnyen megoldható a feladat kevesebb segédváltozó bevezetésével is. Ami lényeges, hogy eljusson a hallgató a végeredményig, és közben minden segédváltozót matematikailag helyesen és a már létező változókra visszavezetve definiáljon. Az adatoktól az eredményig vezető út a 52. ábrával szemléltethető. A nyilak azt jelzik, hogy egy adat felhasználható egy másik adat meghatározásához, de ez nem jelenti azt, hogy valóban fel is kell használni.



52. ábra. Az adatoktól a végeredményig

A hallgatók nem mindig értik meg elsőre a megoldás szintaktikáját, ezért születnek olyan megoldások, ahol nincs meg a folytonosság az adatok között. Az első megoldásoknál tipikus az olyan hiba, amikor egyszerűen megadják a végeredményt mindenféle magyarázat nélkül:

$$alfa = \boxed{} = 72.8$$

Természetesen ilyen esetben a rendszer a megoldást hibásnak fogja értékelni. Az előzőnél jobb próbálkozás, mégis hasonló hibát tartalmaz a következő, hiszen AB és AC nem szerepelt az adatok között:

$$alfa = \arccos\left(\frac{AB * AC}{\text{abs}(AB) * \text{abs}(AC)}\right) = 72.8$$

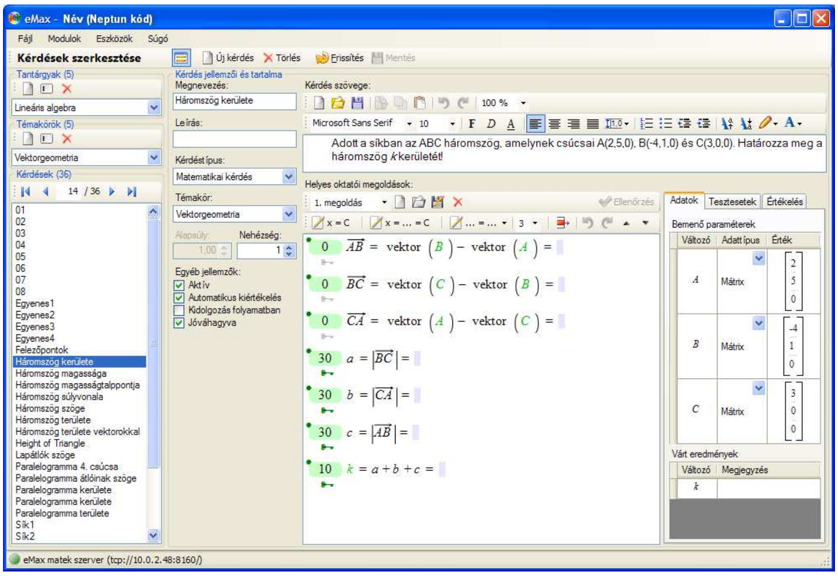
Elképzelhető olyan megoldás is, ami helyes, de eltér a fenti gondolatmenettől, pl. ha a hallgató – középiskolában szerzett ismereteit használva – az oldalak hosszát számítja ki, majd a koszinusz-tételt alkalmazza.

Az oktatói felület

Az oktatói felület szolgál a feladatok és a mintamegoldások bevitelére és az adminisztrációs feladatok ellátására (53. ábra). Minden feladathoz meg kell jelölni a tantárgyat és témakört, a kérdés típusát és az oktató értékelése szerinti nehézségét. Természetesen meg kell adni a feladat szövegét és a mintamegoldásokat. Az utóbbi hasonlóan történik, mint a hallgatói megoldás esetén, de itt az egyes lépésekhez az oktató egy részpontszámot is hozzárendel. Nem kell viszont foglalkozni a numerikus értékekkel, ezeket a rendszer automatikusan képes számolni az értékelés során. Külön meg kell adni a bemenő adatokat – amelyeknek a feladat szövegével összhangban kell lenniük értékben is és jelölésben is – a rendszer ugyanis ezeket nem képes a feladat szövegében felismerni. Az eredménynek csak a jelét kell megadni, ugyancsak a feladat szövegével összhangban. Megjegyzendő, hogy a rendszer érzékeny a kis- és nagybetű közötti különbségre. A feladat értékeléséhez szükség van még néhány tesztesetre, amelyek számát az oktató választhatja meg. Általában két-három tesztesettel dolgoztunk. Végül kiválaszthatjuk az értékelés módját. Erre azért van szükség, mert bizonyos esetekben érdemes beállítani, hogy az alapbeállítással ellentétben csak a végeredmény helyességét figyelje a rendszer. Ezt olyankor használtuk, amikor a feladat egyetlen számítás (pl. mátrixszorzás) végrehajtása volt.

A matematikai modul csak kvázi automatikus értékelésre alkalmas, így szükséges lehet bizonyos feladatok kézi értékelése. A hallgatóknak kérdéseik lehetnek a megoldásaik értékelésével kapcsolatosan, az oktatók pedig szükségesnek találhatják bizonyos feladatok megoldásainak ellenőrzését, akár a tipikus hibák felderítése, akár az automatikus értékelés ellenőrzése miatt. Ezek az igények kielégíthetők az oktatói felület segítségével, amely lehetővé teszi a hallgatói megoldások megtekintését. Az oktató választhat, hogy egy feladat összes hallgatói megoldását akarja megtekinteni, vagy egy hallgató összes feladatát (54. ábra). A felületen megjelenik a hallgatói megoldásra adott pontszám, továbbá az egyik oktatói mintamegoldás is.

Az oktatói felület lehetővé teszi a vizsga eredményeinek hallgatónkénti megjelenítését képernyőn, nyomtatott formában és diagramok segítségével, ezen kívül többféle statisztikai eredménnyel (pl. átlag, szórás) szolgál.



53. ábra. Az oktatói felület

7.3.3. A feladatok értékelését támogató algoritmusok

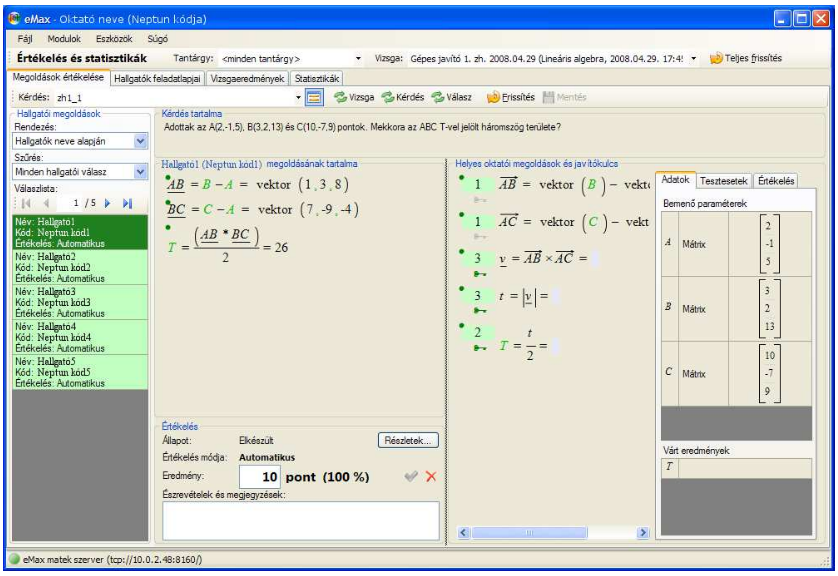
A hallgatói és oktatói megoldások rögzítése a MathML nyelv [26] segítségével történik, mivel ez alkalmas a matematikai tartalom pontos tárolására és precíz struktúrája megkönnyíti az adatok feldolgozását. Az így készült kódból a rendszer a megoldások értékelése előtt egy műveleti fát épít fel. Ennek célja a hallgatói leírásban mutatkozó eltérések megszüntetése, amennyiben ez lehetséges. Ezt a jól illusztrálja a következő példa:

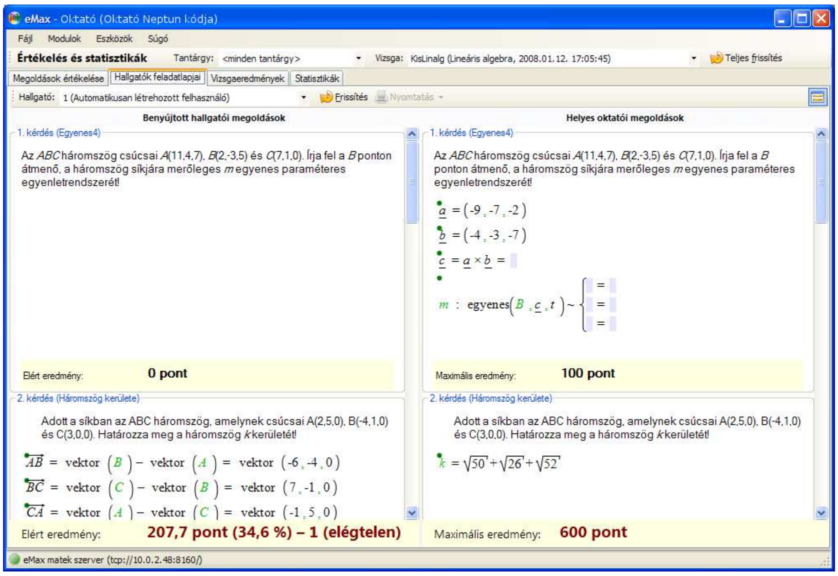
Feladat: Egy háromszög csúcsai $A(4,-1,0)$, $B(2,3,1)$ és $C(-1,2,2)$. Határozza meg a háromszög A csúcsához tartozó m magasságának hosszát!

Hasonlítsunk össze két helyes hallgatói megoldást, amelyek ugyanazon a gondolatmeneten alapulnak, de a leírás formája annak részletezésében és jelölésekben eltér egymástól:

Első hallgatói megoldás:

$$AB = \text{vector}(B) - \text{vector}(A) = (-2,4,1)$$
$$AC = \text{vector}(C) - \text{vector}(A) = (-5,3,2)$$
$$BC = \text{vector}(C) - \text{vector}(B) = (-3,-1,1)$$
$$T = \frac{\text{abs}(AB \times AC)}{2} = 7.45$$
$$m = \frac{2 * T}{\text{abs}(BC)} = 4.49$$





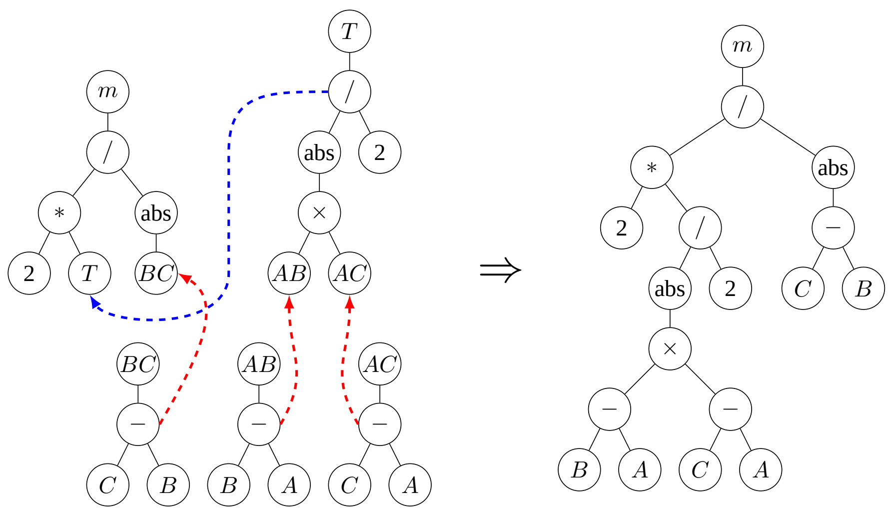
54. ábra. Az oktatói felület

Második hallgatói megoldás:

$$AB = \text{vector}(B) - \text{vector}(A) = (-2, 4, 1)$$
$$AC = \text{vector}(C) - \text{vector}(A) = (-5, 3, 2)$$
$$vsz = AB \times AC = (5, -1, 14)$$
$$T = \text{abs}(vsz) = 14.9$$
$$t = \frac{T}{2} = 7.45$$

$$BC = \text{vector}(C) - \text{vector}(B) = (-3, -1, 1)$$
$$old = \text{abs}(BC) = 3.32$$
$$m = \frac{2 * t}{old} = 4.49$$

A megoldási fa úgy készül, hogy először minden sorból készítünk egy fát, amelynek gyökere az adott sorban definiált mennyiség, amely az őt előállító műveleti fához kapcsolódik. Annak a sornak a fájából indulunk ki, amelyik az eredményt állítja elő. Ennek leveleit helyettesítjük rendre azokkal a fákkal, amelyek eredménye az adott levélben szereplő adat, kivéve, ha az a feladatban eleve adott volt. Az így kapott újabb fán megismételjük az eljárást, egészen addig, amíg olyan fát kapunk, amelynek a leveleiben csak a feladat szövegében megadott objektumok szerepelnek. Ezáltal a műveleti fából minden olyan segédadatot kiküszöbölünk, amit a hallgató vezetett be a megoldás során. A műveleti fa felépítését az első hallgatói megoldás alapján a 55. ábrán szemléltetjük. A fák levelei a rendszerben a jelölések mellett a numerikus adatokat is tartalmazzák, ezek azonban gondolatmenetünk szempontjából nem lényegesek, így az ábrán nem szerepelnek. Könnyen ellenőrizhető, hogy a második hallgatói megoldásból ugyanezt a műveleti fát kapjuk. Természetesen, ha két hallgatói megoldás más gondolatmeneten alapul, akkor a kapott műveleti fák különbözőek lesznek, ezért ha a fenti feladat megoldásában a területet a Heron-képlet segítségével számítjuk ki a vektoriális szorzás helyett, akkor másik fához jutunk.



55. ábra. A megoldási fa felépítése

Az eMax a matematikai feladatok értékelésére több algoritmust alkalmaz, amelyeket előre megadott sorrendben futtat [23] [57]. Az értékelés akkor fejeződik be, ha azt a rendszer kielégítőnek találja, vagy nincs több értékelő algoritmus.

A tesztalgoritmus:

A tesztalgoritmus célja a megoldás elvi helyességének ellenőrzése, illetve számolási hibák felderítése. Az elvi helyességen azt értjük, hogy a feladat által megadott adatokból kiindulva, helyes matematikai összefüggéseket felhasználva eljutunk a keresett értékhez (objektumhoz) úgy, hogy nem használunk fel olyan segédadatokat, amelyeket a rendszer számára nem definiáltunk. A fenti feladatra a következő (harmadik) megoldást nem tekintjük a fenti értelemben helyesnek. Bár a hallgató jól oldotta meg a feladatot, az oldalvektorokat nem adta meg a csúcsok segítségével. Ha papíron adta volna be a megoldást, a javító helyesnek értékelte volna, hiszen nyilvánvaló, hogy a hiányzó számítást fejben elvégezte. A vizsgáztató rendszer azonban ezt nem ismeri fel.

Harmadik megoldás:

$$\begin{gathered} vsz = AB \times AC = (5, -1, 14) \\ T = \text{abs}(vsz) = 14.9 \\ t = \frac{T}{2} = 7.45 \\ a = \text{abs}(BC) = 3.32 \\ m = \frac{2 * t}{a} = 4.49 \end{gathered}$$

A tesztalgoritmus úgy működik, hogy az oktató által megadott tesztesetekre vonatkozóan kiszámolja az eredményt a hallgatói és az oktatói műveletei fa alapján is. Ha mindkét műveleti fa helyes,[27] akkor minden tesztesetre vonatkozóan egyeznie kell a két végeredménynek a kerekítési hibáktól eltekintve.[28] A matematikai helyesség ilyen ellenőrzése elvileg nem korrekt, hiszen az, hogy bizonyos konkrét bemenő adatok esetén a helyes eredményt kapjuk, nem jelenti azt, hogy ez minden bemenő adathalmaz esetén teljesül. Ugyanakkor, ha a teszteseteket jól választjuk (nem mindegyik tartozik a lehetséges tesztesetek ugyanazon speciális részhalmazába), akkor az értékelési hiba valószínűsége kicsi.

Sajnos előfordulnak olyan hibák, amelyek végeredményt nem befolyásolják, így a tesztalgoritmus nem találja meg őket. Például ha a 68. oldalon leírt feladatban a $\overrightarrow{BC}$ vektor kiszámításánál a hallgató összekeveri a kezdő és a végpont szerepét, akkor helyes eredményt kap, mivel a megoldásban csak a vektor abszolút értékére van szükség. A tesztalgoritmus másik hibája, hogy ha a hallgató két olyan hibát vét, amelyek egymás hatását kiküszöbölik, akkor ez az ellenőrzésből nem derül ki. Erre példa, ha az ABC háromszög C csúcsnál levő szögét akarjuk kiszámítani és ehhez a hallgató az ismert skaláris szorzatot tartalmazó összefüggést használja:

$$\cos\gamma = \frac{\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}}{|\overrightarrow{CA}| \cdot |\overrightarrow{CB}|}$$

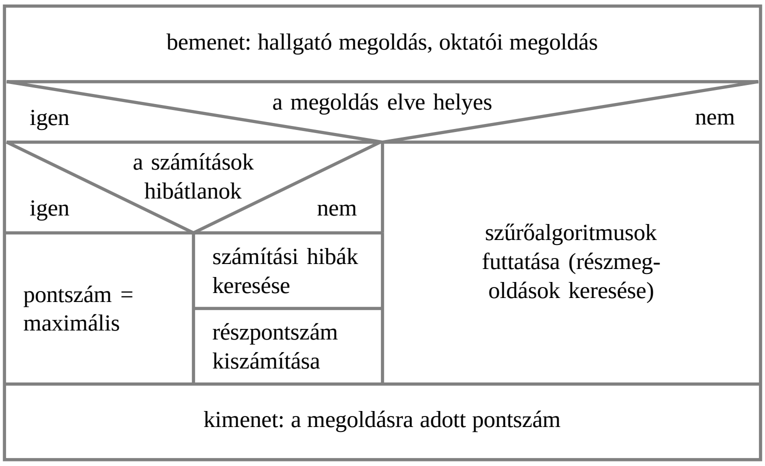
[27]Feltesszük, hogy az oktatói műveleti fa mindig helyes.

[28]A 0. teszteset a kitűzött feladatban megadott eredeti adatok felhasználását jelenti.

Ha a két vektor kiszámításánál csak az egyik esetben téveszti el a kezdő és a végpont sorrendjét, akkor hibás eredményt fog kapni, ha azonban mindegyiknél megcseréli a sorrendet, akkor a szög helyes értékét kapja.

A tesztalgoritmus a numerikus számítások helyességét is ellenőrzi és számolja, hogy a hallgató hány számolási hibát vétett. Ha hibás részeredményt talál, akkor ezt feljegyzi, és a további számításokat ennek alapján ellenőrzi, azaz nem fogja az összes további számítást hibásnak tekinteni.

Ha a rendszer a tesztalgoritmus alapján a megoldást elvileg helyesnek értékeli, akkor az esetleges számolási hibáknak megfelelően meghatározza a megoldásra adható pontszámot és az értékelést sikeresnek tekinti, azaz a szűrőalgoritmusok futtatására nem kerül sor. Az tesztalgoritmus működését a 56. ábra szemlélteti.



56. ábra. A tesztalgoritmus

A szűrőalgoritmusok:

Ha a hallgató megoldása nem elégíti ki az elvi helyesség fentiekben megfogalmazott követelményét, még lehetnek benne értékelhető részeredmények. Az eMax rendszer jelenleg a következő négy fajta részmegoldás felismerésére és értékelésére alkalmas [23] [57]:

- RHMOA[29]

  Ez valójában egy elvileg helyes megoldás, de a vizsgázó nem az előírt módon használja a feladat végeredményének jelölését. Ez legtöbbször azért fordul elő, mert a hallgató nem figyel a nagybetű és a kisbetű közötti különbségre. Az ilyen megoldások viszonylag könnyen értékelhetőek – a műveleti fa felépítése után annak gyökerében a jelölést megváltoztatjuk az eredmény jelére és a módosított fára alkalmazzuk a tesztalgoritmust.

[29] RészHallgatóiMegOldás A típus

- RHMOB

  Ennél a megoldásnál a hallgató szintén jól dolgozik, eltekintve attól, hogy nem vezeti vissza a feladatot az adatokig, hanem az adatokból – fejben vagy papíron – számolt helyes értékekből indul ki. Ilyen volt a mintafeladatra adott harmadik megoldás.

- RHMOC

  Olyan részmegoldást keres, amely alulról felfelé építkezik, a feladatban megadott adatokból helyesen vezeti le a feladat valamely részeredményét, amelynek felhasználásával a feladat megoldása folytatható.

- RHMOD

  Olyan részmegoldás értékelésére szolgál, amely fentről lefelé építkezik, és nem jut el az alapadatokig.

Észrevehetjük, hogy az RHMOA speciális esete az RHMOC típusú megoldásnak és hasonlóan az RHMOB speciális esete az RHMOD-nek.

A részmegoldások felismerése és értékelése egy-egy szűrőalgoritmus segítségével történik.[30] Ezek elnevezése a megfelelő részmegoldás típusának megfelelően ugyancsak RHMOA, RHMOB, RHMOC és RHMOD.

7.3.4. Eredmények

Az eMax rendszer működését egy hat feladatból álló vizsgadolgozat segítségével próbáltuk ki 2008 januárjában. A vizsgán 25 hallgató vett részt, a feladatokat a vektor- és mátrixalgebra témaköréből választottuk. A hallgatók összesen 133 feladatmegoldást adtak be. Elsőként azt vizsgáltuk, hogy rendszerünk milyen mértékben ismerte fel az egyes megoldástípusokat, ezért az oktatók minden egyes hallgatói megoldást végignéztek és besorolták őket az eMax által vizsgált típusok egyikébe, ha ez lehetséges volt. A 7. táblázat mutatja, hogy az egyes típusokat hány esetben ismerte fel a rendszer.

Az oktatók 118 megoldást azonosítottak az ismertetett típusok valamelyikeként. Az eMax rendszer ebből 104 esetben helyesen adta meg a megoldás típusát. Látható, hogy az RHMOB típus felismerésével van a legtöbb gond, hiszen ez csak az esetek kétharmad részében sikerült.

A legfontosabb kérdés a rendszer működésével kapcsolatosan, hogy a rendszer mennyire képes helyesen értékelni. Ennek eldöntéséhez a hallgatói megoldásokat kézileg is értékeltük, és ennek eredményét összehasonlítottuk az automatikus értékelés eredményével. Az utóbbit abban az esetben tekintettük helyesnek, ha az oktató és a rendszer által adott pontszám legfeljebb a feladatra adható összpontszám 10%-ával tért el egymástól. (Egy 10 pontos feladat esetén legfeljebb egy pont eltérést tartottunk elfogadhatónak.) Az eredményt a 8. táblázat mutatja. Az oktató és az eMax értékelésének összevetése szerint a megoldások 87%-ában a rendszer helyesen értékelt. Az

[30] Kiszűrik a feladatra adott megoldások közül azokat, amelyek a megfelelő típusba tartoznak.

7. táblázat. A felismert megoldástípusok gyakorisága

típus	oktatói osztályozás	az eMax felismeri
helyes megoldás	77	68
RHMOA	13	13
RHMOB	12	8
RHMOC	8	7
RHMOD	8	8
egyéb	15	–

értékelés jósága a feladattól függően eltért, az 5. és 6. feladat esetében csupán 80%-ban adott a rendszer megfelelő pontszámot. A rendszer a feladatok 5%-át utalta kézi javításra, 7%-át pedig hibásan értékelte. A hibás értékelés részben algoritmikus hibákból származott, amit a szűrőalgoritmusok fejlesztésével lehetne javítani, részben pedig abból, hogy a hallgató nem megfelelően használta az eMax képletszerkesztőjét. A helytelen használatból adódó hibák csökkennek a gyakorlattal, illetve tovább csökkenthetőek lennének a szintaktikai ellenőrzés javításával.

8. táblázat. Az oktató és az eMax értékelésének összevetése

feladat	helyes pontszám	kézi értékelés	algoritmikus probléma	helytelen használat
1.	96%	0%	0%	4%
2.	84%	4%	8%	4%
3.	88%	8%	0%	4%
4.	96%	0%	4%	0%
5.	80%	8%	12%	0%
6.	80%	12%	8%	0%
összesen	**88%**	**5%**	**5%**	**2%**

8. Összegzés

Az informatika fejlődése és a személyi számítógépek gyors elterjedése – az élet más területeihez hasonlóan – az oktatásban is új távlatokat nyitott. Dolgozatomban a sokféle felhasználási lehetőség közül kettőt vizsgáltam részletesen:

- A diszkrét matematika és lineáris algebra számítógép algebrai rendszerrel (CAS) támogatott oktatása mérnök informatikus hallgatók számára.
- Számítógépes tudásértékelés a matematika területén.

Bár a két vizsgált terület célját és módszereit tekintve is lényegesen különbözik egymástól, mindegyik esetben kiemelten fontos a támogatott témakörhöz tartozó matematika feladatok rendszerezése felhasználhatóságuk szempontjából.

8.1. Diszkrét matematika és lineáris algebra oktatása a Sage rendszer támogatásával

A Sage támogatását felhasználó matematika kurzusok csak részben váltották be a hozzájuk fűzött reményeket, hatásuk azonban minden vizsgált területen pozitív vagy semleges volt. A következőkben a 6. fejezetben leírtakat felhasználva összefoglalom a kezdeti feltevéseimmel kapcsolatos eredményeket és az órákon gyűjtött, illetve a beadott munkák javítása során szerzett tapasztalatokat.

1. *Az informatikus hallgatók számára nem okoz gondot a CAS kezelése, a használat alapvető elemeit gyorsan elsajátítják.*

   Az első egy-két órán még viszonylag sok hallgatónak kellett segítséget nyújtani a rendszerbe való belépésnél és a szintaktika használatával kapcsolatosan. Később már csak elvétve fordult elő, hogy egy-egy kérdés nem matematikai jellegű, hanem a rendszer használatával kapcsolatos volt. A leggyakoribb ilyen probléma a szimbolikus változók használatával kapcsolatos, mivel ilyennel más tantárgyakban nem találkoznak.[31]
2. *A CAS használata mellett a hallgatók jobb eredményeket érnek el a DMLA tárgyhoz kapcsolódó feladatok megoldásában, mint a hagyományos írásbeli vizsgák során.*

   A kísérleti munka során többször megpróbálkoztam a 42. oldalon leírt módon összevetni a kísérleti csoport írásbeli eredményét egy a kísérletben részt nem vevő kontrollcsoportéval. Az eredmény minden esetben hasonló volt, azaz a kísérleti csoport átlaga egy kicsit magasabbnak bizonyult, de szignifikáns eltérés nem volt kimutatható. Lényegesen jobbak voltak azonban a kísérleti csoportok gépes zárthelyi eredményei, illetve a MP tárgy félév végi eredményei. A két tárgy ellenőrző feladatsorai hasonló nehézségűek, és a megoldásra adott idő is azonos.

[31] Pl. a hallgató értéket ad az x változónak – esetleg nem egy explicit értékadó utasítással, hanem azt ciklusváltozóként használva – és egy későbbi feladatban differenciálni szeretne x szerint, vagy éppen egy egyenletet kíván megoldani, amelyben x az ismeretlen, a megfelelő deklaráció nélkül.

3. *A rendszer használata bővíti a feldolgozható feladatok és témák körét.*

   Bár a feldolgozott feladatok jelentős része a hagyományos oktatás során is előkerül, a mintapéldák és a házi feladatok között több olyan volt, amit számítógép nélkül nem lehetett volna feldolgozni a résztvevő hallgatókkal a rendelkezésre álló idő alatt, mivel a végrehajtandó algoritmus túlságosan hosszú. Példa erre a 9.1. melléklet 5-6. feladata.
4. *A számítógép használata elősegíti a hallgatók önállóbb munkavégzését az órákon és a házi feladatok elkészítése során.*

   Az órákon a hallgatók igényelték a tanári segítséget, de az idő nagy részében önállóan, illetve egymást segítve kisebb csoportokban vagy párokban dolgoztak. Szükség esetén a beépített súgót és az interneten található ismereteket is felhasználva folyamatosan dolgoztak, kitöltve a rendelkezésre álló időt. Ezzel szemben a hagyományos gyakorlatokon többségük a tábláról másolja a feladatok megoldásait.
5. *A rendszer használata mellett a hallgatók szívesebben foglalkoznak matematikai feladatokkal, mint a hagyományos oktatási forma esetén.*

   A hallgatók általában kedvező véleménnyel voltak a tárgyról. Sokan jelezték, hogy ha lenne a tárgyból következő félév, azon szívesen részt vennének. A hallgatói kérdőívre adott válaszok alapján is viszonylag kedvező kép alakult ki a hallgatóknak a tárgyhoz való hozzáállásáról, hiszen 94 hallgató közül csak három részesítette az oktatás hagyományos módját előnyben, a többiek szívesebben foglalkoztak a matematika feladatokkal a CAS támogatása mellett.
6. *A kitűzött feladatok nehézsége összefüggésben van a feladat didaktikai céljaival.*

   Bár a fenti kijelentés helyességének kérdése bármilyen matematikai feladattípus esetén felvethető, ezek közül nem mindegyiknél tudjuk felhasználni a CAS lehetőségeit. Mivel a munkám témája éppen egy ilyen rendszer alkalmazása a matematikaoktatásban, csak olyan feladatokkal kapcsolatban vizsgáltam a fenti állítást, amelyek itt előfordultak. A 6.5.2. fejezetben leírtaknak megfelelően a direkt- és a realizációs feladatok ugyanolyan nehézségűnek bizonyultak, és nem volt kimutatható különbség a kombinált feladatok és az összefüggéskeresések között sem. Az utóbbi két típus azonban szignifikánsan nehezebbnek bizonyult az előbbieknél. A statisztikai vizsgálat szerint a problémamegoldások a legnehezebbek.

   A fenti eredmény azonban tovább árnyalható az összefüggéskeresések esetében. Ebbe a csoportba olyan feladatokat soroltam, ahol fel kellett ismerni valamifajta összefüggést (logikai kapcsolatot), de ennek bizonyítása nem volt a feladat része, hiszen akkor már általában a problémamegoldás kategóriájába kerülnének. Ugyanakkor ezek a feladatok általában tartalmaznak egy direkt feladat kategóriájába tartozó bevezető részt, amelynek eredménye segít a hallgató figyelmét a kívánt összefüggésre irányítani. A bevezető részre kapott részpontszámok kedvezőbb színben tüntetik fel a feladattípus megoldásának sikerességét, de ha külön vizsgáljuk a tényleges szabályfelismerésre adott részpontszámokat, akkor lényegesen gyengébb eredményt kapunk.

7. *CAS használata esetén a feladatok nehézségi sorrendje jelentősen megváltozik.*

   Az állítás igazolására láttunk egy példát a 6.5.2. fejezetben, ahol a CAS használatának engedélyezése nemcsak a feladat nehézségét, hanem a típusát is megváltoztatja. A mellékletben felsorolt feladatok között több (pl. a 41. és 48.) is alkalmas ugyanennek az állításnak az illusztrálására.

8. *A tárgyi eszközök közül a CAS kiemelkedő segítséget nyújt a hallgatók számára a matematika tanulásában, de a személyes segítség és ezen belül az oktatók szerepe továbbra is a legfontosabb.*

   Ezt a kijelentést alátámasztják a 6.6. fejezetben ismertetett kérdőív alapján kapott hallgatói vélemények, amelyek megmutatják, hogy a rendelkezésre álló eszközök és szolgáltatások milyen mértékben segítették őket a tanulmányaik során. Az eredmények áttekinthetők a 9. táblázat segítségével.

9. táblázat. A tanári és tárgyi segítség hatása

	osztályzatok száma					**nem válaszolt**	**átlag**
	1	**2**	**3**	**4**	**5**		
tankönyv	37	13	19	13	6	6	2,30
példatár	30	16	21	14	8	5	2,48
alapozó i.	15	21	29	12	14	3	2,88
internet	7	18	34	17	15	3	3,16
Sage	2	10	32	32	15	3	3,53
előadás	4	5	27	35	20	3	3,68
személyes	0	0	5	12	74	3	4,76

8.2. Számítógépes tudásellenőrzés, az eMax rendszer

A számítógépes vizsgáztatás napjaink egyik divatos kutatási témája. Az utóbbi két évtizedben számos vizsgáztató rendszert hoztak létre,[32] de ezek közül sok csak a passzív kérdéstípusokat támogatja, mivel ezek automatikus értékelése könnyen megvalósítható. Nehezebb az olyan rendszerek kifejlesztése, amelyek valamilyen aktív feladattípus automatikus értékelését tűzik ki célul. Az utóbbiak megengedik, hogy a vizsgázó maga fogalmazza meg a megoldást. Az eMax vizsgáztató rendszer tervezésekor a passzív feladatok mellett két aktív feladattípus támogatását tűztük ki célul. Ezek egyike a rövid szöveges válasz, míg a másik a matematika feladatok egy speciális fajtája. A továbbiakban csak az utóbbi feladattípussal és a rendszer matematikai moduljával foglalkozom, mivel munkám ezekhez kapcsolódik.

[32] Néhány említésre kerül a [22] cikkben.

8.2.1. A matematikai modul tervezésekor megfogalmazott elvárások

- A modul biztosítson olyan áttekinthető és egyszerűen kezelhető felhasználói felületet, amely lehetővé teszi a feladatok megoldásainak bevitelét a rendszerbe a hallgatók számára.
- Biztosítson egy felhasználói felületet az oktatók számára, amely lehetővé teszi a feladatok és megoldások bevitelét, vizsgafeladatsorok készítését, vizsgák szervezését, a hallgatói eredmények egyéni és összesített megtekintését.
- Támogasson aktív matematikai feladatokat.
- Az értékelés során a rendszer ne csak a végeredményt vegye figyelembe, hanem a megoldás egészét és nem teljes megoldás esetén a sikeres részeket arányosan pontozza.
- Valósítson meg kvázi automatikus kiértékelést. A kézi értékelésre javasolt megoldások aránya ne haladja meg az összes megoldás 5%-át.
- A rendszer által értékelt feladatok esetén a program által adott pontszám ne térjen el jelentősen (10%-nál nagyobb mértékben) attól, amit kézi értékelés esetén a tanár adott volna.

8.2.2. A megvalósítás

Az eMax rendszer matematikai modulja a vizsgázók számára a hallgatói felületen keresztül érhető el. A feladatok megoldásának sorrendjét a hallgató tetszőlegesen választhatja. A megoldások beviteléhez a rendszer egy képletszerkesztőt biztosít, melynek segítségével a feladat megoldása soronként adható meg. A soroknak rendszerint az

$$\langle \text{új változó} \rangle = \langle \text{képlet} \rangle = \langle \text{numerikus érték} \rangle$$

formát kell követniük. A képletszerkesztő kezelése a hallgatók számára nem jelentett problémát, az előírt formát azonban néhányan nem tartották be, mert nem értették annak szerepét.

Az oktatói felület bonyolultabb a hallgatóinál, hiszen több funkciót lát el. A vizsga előtt az oktatónak a következő feladatokat kell elvégezni:

- A feladatok bevitele a hozzájuk tartozó esetleges ábrákkal, tesztesetekkel és mintamegoldásokkal
- A vizsga létrehozása:
  - A vizsgafeladatok kiválasztása.
  - Időtartam beállítása.
  - A vizsga engedélyezése.

A feladatok bevitele során gondot kell fordítani a bemenő adatok és az eredmény jelölésének megadására. A teszteseteket gondosan kell megválasztani, hogy az értékelés minden esetben helyesen működjön. A vizsgafeladatokat a rendszerbe korábban bevitt feladatok közül választhatjuk.

Az oktatói felület a vizsga lebonyolítása és az értékelés után az alábbi szolgáltatásokat nyújtja az oktatónak:

- Megtekintheti a hallgatók megoldásait és az arra kapott pontszámokat.
- A rendszer által kézi értékelésre utalt megoldások pontszámait beviheti, illetve a rendszer által adott pontszámokat szükség esetén módosíthatja.
- A vizsgaeredményeket és az ezzel kapcsolatos statisztikai adatokat megtekintheti.

A hallgatók megoldásainak megtekintése akkor szükséges, ha a rendszer a megoldást kézi értékelésre utalta, illetve ha az értékelés helyességével kapcsolatosan bármilyen kétely felmerül. Ilyenkor az elért pontszámot az oktató határozza meg. A vizsga eredményével kapcsolatos statisztikai adatok között a vizsgaátlag mellett megtalálhatók az egyes hallgatónkra, illetve feladatokra vonatkozó átlagok is. Ugyancsak hasznos információ az osztályzatok, illetve a feladatokra adott pontszámok eloszlása, ami grafikusan is megjeleníthető.

Az eMax rendszer matematikai modulja által támogatott aktív feladatok a Pólya György által meghatározó feladatként kategorizált típushoz tartoznak [42], ha két további feltételnek eleget tesznek:

- Bemenő adataik és eredményük egyaránt egy szám, vektor vagy mátrix.
- Megoldásukhoz nincs szükség olyan matematikai függvényre, amit a rendszer még nem támogat.

A rendszert olyan vektorgeometriai és mátrixalgebrai feladatokon teszteltük, amelyek ezeknek a feltételeknek eleget tesznek.

Mivel az eMax matematikai modulja a feladatmegoldások értékelését nemcsak a végeredmény, hanem a leírt megoldási lépések alapján végzi, figyelembe kell venni, hogy a feladatoknak több helyes megoldása lehet. Ez az oka annak, hogy az oktató általában több mintamegoldást ad a feladathoz. Bár az oktatók rendszerint ismerik a hallgatók által adott szokásos megoldásokat, mégis előfordulhat, hogy valamelyik hallgató olyan megoldást talál, amit a rendszer nem tartalmaz mintamegoldásként. A hiányzó mintamegoldás a vizsga után bevihető a rendszerbe. Azt, hogy a hallgatói megoldást melyik mintamegoldással kell összevetni, a rendszer a megoldás kulcsműveletéről ismeri fel. A kulcsművelet lehet egyetlen matematikai művelet, vagy esetleg több jellemző művelet együtt.

Az értékelési folyamat megvalósításához a rendszer először a megoldás sorai alapján egy megoldási fát készít. Ez egy olyan műveleti fa, amelynek levelei a feladatban megadott adatok, gyökere pedig a végeredmény. Ennek előnye, hogy ha két lényegét tekintve azonos megoldás csak a leírás részletességében tér el egymástól, akkor ugyanaz a megoldási fa épül fel belőlük (7.3.3. fejezet). A megoldás helyességének ellenőrzése során a rendszer a hallgatói és a megfelelő mintamegoldás alapján készített megoldási fákat hasonlítja össze.

Az értékelési folyamat következő fázisában kerül sor az értékelő algoritmusok futtatására. Ezek közül az első a tesztalgoritmus (71. oldal), amely eldönti, hogy a hallgató által adott megoldás eljut-e az adatokból a végeredményig a megoldás elvét tekintve helyes lépéseket alkalmazva. Egy lépés elvi helyességét az esetleges számolási hiba nem befolyásolja, ezért ha a tesztalgoritmus a megoldás elvét helyesnek találja, utána még a számolás helyességét is ellenőrzi és az esetleges számolási hibák számának függvényében pontozza a megoldást. Ha a tesztalgoritmus elvi hibát talál a megoldásban, illetve a hallgató megoldása nem teljes, akkor a rendszer a futtatni kezdi a szűrőalgoritmusokat (72. oldal). Ezek közül kettő alulról felfelé, kettő pedig felülről lefelé építkező részmegoldásokat keres. Ha valamelyik szűrőalgoritmus megtalálja a megfelelő részmegoldást, akkor az esetleges további szűrőalgoritmusok futtatására nem kerül sor.

A 7.3.4. fejezetben leírt próbavizsga eredményei azt mutatják, hogy a számítógépes értékelés sikeressége az aktuális feladattól is függ, de a választott feladatok esetén a matematikai modul tervezésekor megfogalmazott elvárások teljesültek. A rendszer által adott pontszám a megoldások 88%-a esetén legfeljebb 10%-kal tért el a kézi értékelés során adott pontszámtól és a megoldást a rendszer csak az esetek 5%-ában utalta kézi értékelésre.

Megállapíthatjuk tehát, hogy az eMax rendszer a 63. oldalon leírt feladattípusok mellett kielégítően működött, annak ellenére, hogy az értékelő algoritmusokban felhasznált informatikai módszerek egyszerűek voltak. Ahhoz, hogy a rendszert a matematika vizsgákon rendszeresen lehessen használni, még jelentős fejlesztésre van szükség.

8.2.3. Fontosabb fejlesztési lehetőségek

- A felhasználható feladatok körének bővítése.
- Új beépített függvények implementálása.
- A felhasználói felületeken használt képletszerkesztő felkészítése az új feladatokhoz és függvényekhez.
- Az értékelő algoritmusok fejlesztése.
- Egy alkalmas számítógép algebrai rendszerrel való összekapcsolás.

A felhasználható feladatok körét két módon bővíthetjük: új matematikai témakörök bevonásával, és új, a számítási feladatoktól eltérő, feladattípusok alkalmazásával. Az értékelő algoritmusok fejlesztése ugyancsak több irányban történhet. Egyrészt a meglévő algoritmusok hatékonyságának javításával, másrészt új algoritmusok kifejlesztésével. Az új algoritmusok célja lehet olyan részmegoldások keresése, amelyeket eddig nem vizsgáltunk, illetve az új feladattípusok megoldásainak ellenőrzése.

8 Summary

The development of Information Technology and the quick spread of personal computers opened up a new prospect in education – just as in other areas of life. In my dissertation I analysed two of the several possibilities of utilization in detail:

- Teaching Discrete Mathematics and Linear Algebra with the aid of a computer algebra system (CAS) for computer science and engineering students.
- Computer-aided knowledge assessment in the field of Mathematics.

Although the two areas are quite different from each other as regards their aims and methods, both of them are of high priority from the aspect of classification of supported Mathematical problems.

8.1 Teaching Discrete Mathematics and Linear Algebra with the aid of the Sage system

Our math courses aided by the Sage computer algebra system achieved their aim only partially, but their effects were positive or neutral in all the analysed areas. In the followings, using chapter 6, I will summarize the results related to my original assumptions, and the experiences gained on lessons and while checking students' submitted tasks.

1. *Computer science and engineering students have no difficulty with using computer algebra systems, they can acquire the necessary skills and knowledge of handling them quickly.*

   At the first lessons there were several students who needed help in signing in the system and using its syntax, however after some lessons their questions concerned mainly Maths, rather than the use of the system. The most frequent such problem was related to the use of symbolic variables, as students do not encounter these in other subjects.[33]
2. *Using CAS, students reach better results in solving problems of DMLA than in traditional written exams.*

   I compared the achievements of written exams of the experimental groups with the ones of the control groups several times in the last three years. The result was always similar to the one described on page 42. The average of the experimental groups was always slightly, but not significantly higher. However, the experimental groups had much better results at the computerised tests and their average course grade was significantly better too. The level of difficulty of computerised tests and written exams are similar to each other and students have the same amount of time for both.

[33] For example if a value is assigned to x, – maybe not explicitly but using x as a cyclic variable –, later x cannot be used in a function or as a variable of an equality without a suitable declaration.

3. *Using the system widens the range of problems and themes to be elaborated.*

   Although a notable part of the elaborated problems are used by the conventional teaching methods too, there are several problems among the presented exercises and homework problems, which need a lot of time and calculation, thus these cannot be dealt with at the traditional lessons. Problems 5-6. are good examples in appendix 9.1.
4. *Using computers promotes students' own work at seminars and while doing their homework.*

   Students needed teacher's assistance at seminars, but in the major part of the time they worked on their own, and also in smaller groups or pairs, helping each other. They worked continuously, filling their time available, and when it was necessary they used the program's 'help' function or information found on the internet. On the other hand, at conventional courses students copy the solutions of problems from the blackboard.
5. *Using the system, students are more willing to deal with mathematical problems than in case of traditional form of lessons.*

   Students' opinions were usually appreciative about the computer aided subject. Several of them would have liked another course to learn additional topics using the same methods. Among the 94 students who filled in the questionnaire there were only three who preferred the traditional form of teaching, the others were more inclined to solve mathematical problems with CAS support.
6. *The difficulty of the set problems is in connection with the didactic aims of the problems.*

   Although this statement could be examined in case of any type of mathematical questions, not all of them are suitable for using the possibilities of CAS. As the topic of my research is the application of such a system in Mathematics teaching, I confined myself to types that had occurred on the CAS aided courses. As it can be seen in chapter 6.5.2, the difficulties of direct- and realisation problems proved to be the same, and there was no significant difference between the difficulties of combined tasks and connection searching. However, the latter two types turned out to be significantly more difficult than the former two. According to the statistics, problem solving proved to be the most difficult type.

   In case of connection searching type the above result can be refined. This group contains questions, in which students have to recognize a logic connection between mathematical concepts, but they do not have to prove it, as in this case it would be a problem solving task. Questions of this type usually contain a first part, which is a direct problem in itself, and its result helps students to recognize the connection. The partial scores received for this first part raise the average result of problems of this type, so it is safe to assume, that the second part of the questions, which contains the real connection searching is more difficult for the students.

7. *Allowing the use of CAS significantly changes the order of difficulty of problems.*

   An example for this can be seen in chapter 6.5.2, where the usage of CAS changes not only the difficulty of the question, but its type as well. Some questions listed in the appendix (eg. problems 41. and 48.) are also suitable examples to illustrate this statement.
8. *Among objective tools CAS renders a superior help to students in learning Mathematics, but personal help, especially the role of the teacher is still the most important.*

   This statement is supported by the answers given to the questions of the questionnaire discussed in chapter 6.6, which reveal how much the applied tools and services help students' studies. Table 9 summarizes the results of this research.

Table 9: Effects of teacher's and objective help

	number of marks					**Did not answer**	**average**
	1	**2**	**3**	**4**	**5**		
manual	37	13	19	13	6	6	2,30
collection of exercises	30	16	21	14	8	5	2,48
base knowledge	15	21	29	12	14	3	2,88
internet	7	18	34	17	15	3	3,16
Sage	2	10	32	32	15	3	3,53
lecture	4	5	27	35	20	3	3,68
personal	0	0	5	12	74	3	4,76

8.2 Computer aided assessment, eMax system

Computer aided assessment is a popular research topic in our days. There have been many assessment systems developed in the last two decades,[34] however many of them use passive questions only, since they can be evaluated easily. Systems that can provide automatic assessment of active questions too, are more difficult to develop. The latter systems allow the examinee to create their answers. When designing the eMax assessment system, besides the passive ones, we aimed at supporting two kinds of active questions. One of them is the short textual answer, while the other is a special type of mathematical problem. In the followings I will discuss only the latter type of problem, as well as the mathematical module of eMax system, as my work is connected to these.

[34] Some of them are mentioned in article [22].

8.2.1 Requirements specified while designing the mathematical module

- The module should provide such a well-arranged and easy-to-handle user interface which makes it possible for students to enter the solutions of problems into the system.
- The module should provide such a user interface for teachers which makes it possible to enter problems and solutions, to set up test exercises, to organize tests, to survey the individual and global results of students.
- The module should support active mathematical problems.
- During evaluation, not only the final result is to be taken into consideration, but the whole solution, and in case of a partial solution, the parts solved correctly should be scored proportionally.
- The module should realize a quasi-automatic evaluation. Proportion of solutions sent to manual evaluation should not exceed 5% of all the solutions.
- Scores given to problems evaluated by the system should not differ more than 10% from scores given by manual evaluation of the teacher.

8.2.2 Realisation

The mathematical module of the eMax system can be reached by the examinees on the student interface. The student can choose the order of solution arbitrarily. The system provides an equation editor, with the help of which the solutions of the problems can be entered by rows. Rows are mainly in the following form:

$$\langle \text{new variable} \rangle = \langle \text{formula} \rangle = \langle \text{numerical value} \rangle \,.$$

Students did not meet difficulties in using the equation editor, however, some of them did not adhere to the specified form because they did not understand its role.

Teacher interface is more complicated than student interface, as it manages more functions. The following tasks have to be accomplished prior to the exam:

- Entering the questions together with figures, test cases, sample solutions if necessary.
- Compiling the exam:
  - Choosing test exercises.
  - Setting length of time.
  - Allowing exam.

During entering the questions, the notation of input data and results must be specified. Test cases must be chosen carefully in order that evaluation may work correctly in every case. Test exercises can be selected from questions taken in the system previously.

After completing the exam and evaluation, teacher interface provides the following possibilities for the teacher:

- Viewing students' solutions and scores.
- Entering scores of solutions evaluated manually, modifying scores given by the system.
- Viewing test results and relating statistical data.

Viewing students' solutions is necessary if the system has sent the solution to manual evaluation, or if there are any doubts as to the correctness of the assessment. In such cases the scores are determined by the teacher. Among the statistical data concerning the exam, the average score, as well as the averages of the scores of individual students and individual questions can be found. A similarly useful piece of information is the distribution of marks and scores given to different questions, which can be illustrated graphically too.

The active questions supported by the mathematical module of the eMax system belong to the type which was categorized by György Pólya as determination problems [42], provided that they satisfy two further conditions:

- Both their input data and result are numbers, vectors or matrices.
- There is no need of such a function in the course of solution which is not supported by the system yet.

The system was tested on such problems of vector geometry and matrix algebra, which satisfy these requirements.

As the mathematical module of eMax evaluates students' answers on the basis of partial solutions apart from the final result, it must be taken into consideration that there can be more than one correct solutions of the exercises. This is the reason why the teacher attaches more than one sample solutions to the problems. Although teachers are usually familiar with typical solutions given by students, it can happen that a student finds such a solution which is not among the included ones. The missing sample solution can be taken into the system after the examination. As to the sample solution that is to be used in case of a given answer, the system recognizes it by a key-operation. The key-operation can be a single mathematical operation, or it may as well be more than one typical operations.

To realize the course of evaluation, the system first creates a solution tree from the rows of the solution. The leaves of this operation tree are the given data, its root is the final result. Its advantage is that if two solutions are practically the same, only different in their minuteness of detail, their solution tree will be the same (chapter 7.3.3). To check its correctness, the system compares the student's solution tree with the appropriate sample solution.

The next stage in the course of assessment is to run evaluation algorithms. Among these the first is test algorithm (page 71) which decides whether the student gets to the final result from the given data, using theoretically correct steps. Calculation errors do not have an effect on the theoretic correctness, thus if the test algorithm finds the principles correct, it will check the calculation too, and scores the solution according to the number of calculation mistakes. If the test algorithm finds a theoretical mistake, or if the student's solution is incomplete, the system will run filter algorithms (page 72). Two of these search for partial solutions that build from bottom to top, two others look for top-to-bottom ones. If a filter algorithm finds the suitable partial solution, then there will be no further filter algorithms run.

The results of the test-examination described in chapter 7.3.4 show that the success of computer assessment depends on the actual exercise, but in case of the chosen problems, evaluation met the requirements drawn up at designing the mathematical module. In case of 88% of the solutions the difference between the scores given by the system and the ones given manually was at most 10%, and only 5% of the solutions were sent to manual evaluation.

Thus we can state that eMax system worked satisfyingly in case of problem types described on page 63, in spite of the fact, that the methods of informatics used in the evaluation algorithms were simple. Significant development is needed to be able to use the system regularly on Mathematics examinations.

8.2.3 Main development opportunities

- Widening the range of usable problems.
- Implementing new built-in functions.
- Preparing user interface equation editor for the new tasks and functions.
- Developing the evaluation algorithms.
- Connecting eMax to a suitable computer algebra system.

There are two ways to widen the range of usable problems: bringing in new mathematical topics and applying new types of problems that are different from calculation problems. There are also several ways to develop evaluation algorithms. On the one hand it can be done by improving the existing algorithms, on the other hand by developing new algorithms. The aim of new algorithms can be the search for such partial solutions, which have not be analysed so far, as well as checking the solutions of the new types of problems.

9. Melléklet

9.1. A házi feladatok szövege

1. Számítsa ki a következő összegek értékét!

   a) $1 + 2 + 3 + \ldots + 20$

   b) $1 + 3 + 5 + \ldots + 65$

   c) $2 + 5 + 8 + \ldots + 200$

   d) $\sum\limits_{k=1}^{50} (-1)^k \cdot k^2$

2. Adja meg a következő összegzések eredményét zárt formula segítségével!

   a) $\sum\limits_{k=1}^{n+1} k = 1 + 2 + 3 + \ldots + n + (n+1)$

   b) $\sum\limits_{k=1}^{2n} k = 1 + 2 + 3 + \ldots + (2n-1) + (2n)$

   c) $\sum\limits_{k=1}^{n+1} k^2$

   d) $\sum\limits_{k=1}^{2n+1} k^2$

   e) $\sum\limits_{k=0}^{2n} aq^k$

3. Vizsgálja meg a következő összeadást! Mit összegeztünk? Milyen állítást fogalmazhatunk meg a számítás alapján?

```
(n,k)=var('n,k')
sum((-1)^k*binomial(n,k),k,0,n)
```

   0

4. Adja meg az kifejezések eredményét zárt alakban! Melyik esetben érdemes a Sage rendszerrel számolni? Hogyan számolunk, amikor a Sage használata nem előnyös?

   a) $\dfrac{2! \cdot 4! \cdot \ldots \cdot 20!}{1! \cdot 3! \cdot \ldots \cdot 19!}$

   b) $\dfrac{2! \cdot 4! \cdot \ldots \cdot (2n)!}{1! \cdot 3! \cdot \ldots \cdot (2n-1)!}$

   c) $\binom{10}{0} + \binom{10}{2} + \ldots + \binom{10}{10}$

   d) $\binom{2n}{0} + \binom{2n}{2} + \ldots + \binom{2n}{2n}$

e) $\binom{2n}{1} + \binom{2n}{3} + \ldots + \binom{2n}{2n-1}$

5. Legyen a 8-cal osztva 3 maradékot adó legfeljebb négyjegyű pozitív egész számok halmaza A, a 11-gyel osztva 5 maradékot adó legfeljebb négyjegyű pozitív egész számok halmaza pedig B. Hány eleme van az A, B, $A \cup B$ és $A \cap B$ halmazoknak?
6. Hány olyan ötjegyű szám van, amely 3-mal osztva 2, 5-tel osztva 3, 7-tel osztva pedig 4 maradékot ad?
7. Sorolja fel a $H = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ halmaz azon a háromelemű részhalmazait, amelyek elemei között páros és páratlan szám is van! Hány ilyen részhalmaz létezik?
8. Állítsa elő az $A = \{1, 2, 3, 4\}$ halmaz $P(A)$ hatványhalmazát!

   a) Hány eleme van $P(A)$-nak?

   b) Hány olyan eleme van $P(A)$-nak amelyben két elem különbsége 3?
9. Állítsa elő a $H_1 = \{\emptyset\}$ és a $H_2 = \{\emptyset, H_1\}$ halmazokat! Hány eleme van H_1-nek, illetve H_2-nek? Írja fel a $P(H_1)$ és $P(H_2)$ halmazokat!
10. Milyen kapcsolatban áll egymással egy halmaz páros, illetve páratlan elemszámú részhalmazainak száma? Vizsgáljon konkrét példákat és fogalmazza meg a sejtését!
11. Írja fel az $A = \{a, b, c, d\}$ és $B = \{1, 2, 3\}$ halmazok $A \times B$ és $B \times A$ Descartes-féle szorzatait! A fenti Descartes-féle szorzatok közül melyiknek van több eleme?
12. Írja fel az $\underline{u}(4, 3, -2)$ és $\underline{v}(2, -3, 1)$ vektorok összegét, különbségét, abszolút értékeiket, $2\underline{u} + 5\underline{v}$ lineáris kombinációjukat!
13. Írja fel az $\underline{a}(6, 2, 3)$ és $\underline{b}(3, -1, -2)$ vektorok skaláris szorzatát! Határozza meg, hogy a két vektor mekkora szöget zár be (fokban mérve) egymással!
14. a) Határozza meg az $\underline{a}(6, 2, 3)$ és $\underline{b}(3, -1, -2)$ vektorok vektoriális szorzatát!

    b) Írja fel a két vektor által kifeszített síkra merőleges egységvektorokat!

    c) Mekkora területű háromszöget feszít ki a két vektor?
15. Ábrázolja a $\underline{c}(2, -1)$ és $\underline{d}(1, 3)$ vektorokat Descartes féle derékszögű koordinátarendszerben, néhány olyan $\gamma\underline{c} + \delta\underline{d}$ lineáris kombinációjukkal együtt, amelyben az együtthatók összege $\gamma + \delta = 2$. Mit alkotnak ezen lineáris kombinációk végpontjai, ha minden ábrázolt vektor kezdőpontja az origó?
16. Ábrázoljon néhány (kb. 15-20) olyan vektort, amelyek kezdőpontja az origó, végpontjaik pedig egy olyan ellipszisen helyezkednek el, amelynek fél nagytengelye 2, fél kistengelye 1 hosszúságú!
17. Ábrázoljon kb. 25-30 olyan vektort, amelynek kezdőpontja az origó és koordinátás alakja $(\cos(x), \sin(2x))$, ahol $x \in [0, \pi]$!
18. Az $ABCDEFGH$ téglatest A csúcsból kiinduló élei

$$AB = 3, \quad AD = 2 \quad \text{és} \quad AE = 1$$

hosszúságúak.

a) Határozza meg az AFH háromszög területét!

b) Mekkora szöget zár be az AF lapátló a BH testátlóval?

c) Mekkora szöget zár be a BH testátló az ACF síkkal?

19. Számítsa ki az $\underline{a}(2,7,3)$, $\underline{b}(-1,2,2)$ és $\underline{c}(5,-4,-1)$ vektorok által kifeszített tetraéder térfogatát!
20. Bontsa fel az $\underline{a}(18,-12,6)$ vektort a $\underline{b}(4,2,-1)$ vektorral párhuzamos és $\underline{b}$-re merőleges összetevőkre!
21. Bontsa fel az $\underline{a}(3,1,-2)$ vektort a $4x+3y+z=5$ síkkal párhuzamos és a síkra merőleges összetevőkre!
22. Az $ABCD$ szabályos tetraéder három csúcsát ismerjük:

$$A(0,0,0), \quad B(1,0,0), \quad C\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right).$$

Határozza meg a D csúcs koordinátáit!

23. Adottak a következő mátrixok:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 4 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 5 \\ 4 & 5 & -1 \\ 3 & 6 & 3 \end{bmatrix}$$

a) Számítsa ki az $\mathbf{A}+\mathbf{B}$, $\mathbf{A}-\mathbf{B}$, $3\mathbf{A}$, $3\mathbf{A}-2\mathbf{B}$, $\mathbf{AB}$, $\mathbf{BA}$ mátrixokat!

b) Írja fel $\mathbf{A}$ és $\mathbf{B}$ transzponáltját!

c) Számítsa ki $\mathbf{A}$ és $\mathbf{B}$, valamint $\mathbf{A}^\top$ és $\mathbf{B}^\top$ a transzponáltjaik determinánsát! Mit tapasztal? Fogalmazza meg sejtését! Hogyan lehetne ezt a sejtést igazolni?

24. Tekintsük az előző feladatban megadott $\mathbf{A}$ és $\mathbf{B}$ mátrixokat.

a) Számítsa ki $\mathbf{AB}$ és $\mathbf{BA}$ determinánsát! Mit tapasztal? Fogalmazza meg sejtését!

b) Az eddigiek alapján mit gondol, mi lesz $\mathbf{A}^{-1}$, illetve $\mathbf{B}^{-1}$ determinánsa? Ellenőrizze sejtését!

25. Tekintsük az 23. feladatbeli $\mathbf{A}$ és $\mathbf{B}$ mátrixokat!

a) Számítsa ki a $\mathbf{A}+\mathbf{A}^\top$, illetve $\mathbf{B}+\mathbf{B}^\top$ mátrixokat! Milyen speciális tulajdonsága van a két összegnek? Határozza meg mindkét összeg determinánsát!

b) Számítsa ki a $\mathbf{A}-\mathbf{A}^\top$, illetve $\mathbf{B}-\mathbf{B}^\top$ mátrixokat! Milyen speciális tulajdonsága van a két összegnek? Határozza meg mindkét összeg determinánsát! Mit tapasztal?

c) Írjon fel egy 4×4-es antiszimmetrikus mátrixot és számítsa ki a determinánsát! Összevetve az eredményt az előző pontokban tapasztaltakkal, milyen sejtést fogalmazhatunk meg?

26. Adott a $\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & -1 \end{bmatrix}$ és a $\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \frac{9}{11} & -\frac{8}{11} & \frac{2}{11} \\ -\frac{1}{11} & \frac{7}{11} & \frac{1}{11} \\ \frac{5}{11} & \frac{20}{11} & \frac{6}{11} \end{bmatrix}$ mátrix.

a) Határozza meg $\mathbf{C}$ determinánsát!

b) Számítsa ki $\mathbf{C}$ néhány hatványát ($\mathbf{C}^2$, $\mathbf{C}^3$, $\ldots$) és ezek determinánsát!

c) Számítsa ki $\mathbf{D}$ néhány hatványát ($\mathbf{D}^2$, $\mathbf{D}^3$, $\ldots$) és ezek determinánsát!

d) Ha egy négyzetes mátrix egyenlő valamely egész kitevős hatványával, akkor mit mondhatunk a mátrix determinánsáról?

27. a) Keressen olyan 3×3-as, illetve 4×4-es négyzetes mátrixokat, amellyel egy kompatibilis $\mathbf{A}$ mátrixot balról megszorozva $\mathbf{A}$ két sorának megcserélésével kapott mátrixhoz jutunk! A mátrix ezen tulajdonságát szemléltesse példákkal!

b) Keressen olyan 3×3-as, illetve 4×4-es négyzetes mátrixokat, amellyel egy kompatibilis $\mathbf{A}$ mátrixot balról megszorozva $\mathbf{A}$ egy sora konstansszorosára változik, a többi sora pedig nem változik! Szemléltessen példákkal!

c) Keressen olyan 3×3-as, illetve 4×4-es négyzetes mátrixokat, amellyel egy kompatibilis $\mathbf{A}$ mátrixot balról megszorozva az eredmény egy sora $\mathbf{A}$ megfelelő sorának és egy másik sornak az összege lesz, a többi sora megegyezik $\mathbf{A}$ megfelelő sorával! Szemléltessen példákkal!

28. Legyen

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} x & x-1 & 3 \\ -x+1 & x^2 & -2 \\ x+2 & -x & -x+3 \end{bmatrix}$$

a) Számítsa ki az $\mathbf{R}$ mátrix determinánsát! Hányadfokú polinomja az x-nek az eredmény?

b) Mennyi a determináns értéke, ha $x = 1$?

c) Melyek azok a valós számok, amelyeket x helyébe írva a determináns értéke a -155 értéket veszi fel?

29. Írjon fel egy olyan négyzetes mátrixot, amelynek determinánsa 6!

30. Adottak az

$$\underline{a}_1(4, 7, -12),\ \underline{a}_2(-2, 6, 5),\ \underline{a}_3(11, -3, 8) \text{ és } \underline{b}(404, -261, -105)$$

vektorok. Előállítható-e és ha igen milyen együtthatókkal a $\underline{b}$ vektor a másik három vektor lineáris kombinációjaként? Oldja meg a feladatot `solve()` függvénnyel és a vektorokból előállított mátrix lépcsős alakra hozásával is!

31. Adottak az

$$\underline{a}_1(4, 1, 8),\ \underline{a}_2(-2, 3, -1),\ \underline{a}_3(58, 32, 131),\ \underline{b}(44, -3, 76)$$

és $\underline{c}(105, 17, -42)$ vektorok.

Előállíthatók-e és ha igen milyen együtthatókkal a $\underline{b}$ és $\underline{c}$ vektorok az $\underline{a}_1$, $\underline{a}_2$, $\underline{a}_3$ vektorok lineáris kombinációjaként? Oldja meg a feladatot `solve()` függvénnyel és a vektorokból előállított mátrix lépcsős alakra hozásával is!

32. Oldja meg a következő egyenletrendszert `solve()` függvénnyel és lépcsős alakra hozással is:

$$\begin{aligned} 6x - 3y + 4z &= -5 \\ 3x + 4y - z &= 21 \\ -2x + 5y + 2z &= 16 \end{aligned}$$

33. Határozza meg az $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 6 \\ 1 & 3 & 2 & 5 \\ 4 & -2 & 1 & 13 \end{bmatrix}$ mátrix rangját!

34. Egy lineáris transzformáció mátrixa egy kétdimenziós lineáris térben

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ábrázoljon a derékszögű koordinátarendszerben néhány $[1 \quad t]^\top$ alakú vektort, ahol $t \in \mathbb{R}$! Ábrázolja ezeknek a transzformációval előállított képét is!

35. Egy háromdimenziós lineáris térben a bázisvektorok:

$$\underline{e}_1 = [1 \quad 0 \quad 0]^\top, \quad \underline{e}_2 = [0 \quad 1 \quad 0]^\top, \quad \underline{e}_3 = [0 \quad 0 \quad 1]^\top$$

A φ lineáris transzformáció ezeket rendre a következő vektorokba viszi:

$$\underline{a}_1 = [2 \quad 3 \quad -1]^\top, \quad \underline{a}_2 = [1 \quad 4 \quad 3]^\top, \quad \underline{a}_3 = [-1 \quad 1 \quad 2]^\top$$

a) Írja fel a transzformáció mátrixát!

b) Mi a $\underline{v} = [7 \quad 5 \quad 2]^\top$ vektor képe?

c) Van-e olyan vektor, amely az ötszörösébe képeződik le?

36. a) Sorolja fel négy elem összes (ismétlés nélküli) permutációját! Hány ilyen van?

b) Hány permutációja van öt elemnek?

c) Hány olyan permutációja van öt elemnek, amelynek pontosan egy fixpontja van?

37. a) Hány olyan permutációja van öt elemnek, amely öt egyelemű ciklusból áll?

b) Hány olyan permutációja van öt elemnek, amely egy kételemű és három egyelemű ciklusból áll?

c) Hány olyan permutációja van öt elemnek, amely egy ötelemű ciklusból áll?

d) Hány olyan permutációja van öt elemnek, amely egy kételemű és egy háromelemű ciklusból áll?

38. Álítsuk elő az 1,2,3,4,5,6 számok egy olyan permutációját, amelyben pontosan két fixpont van, és minden elem legfeljebb 1 távolságban van az inverziómentes esetben elfoglalt helyétől!

39. Keressük az

   a) 1,2,3,4,5
   b) 1,2,3,4,5,6
   c) 1,2,3,4,5,6,7
   d) 1,2,3,4,5,6,7,8
   e) 1,2,3,4,5,6,7,8,9

   számok néhány olyan permutációját, amelyben pontosan két fixpont van, és minden elem legfeljebb 1 távolságban van az inverziómentes esetben elfoglalt helyétől! Milyen sejtést fogalmazhatunk meg a tapasztalatok alapján?

40. Egy szórakozott postás öt különböző embernek kézbesített egy-egy levelet, de egyik levelet sem abba a postaládába dobta, ahová a címzés szerint kellett volna. Hányféleképpen történhetett ez?

41. a) Hányféle hétjegyű számot lehet felírni az 1, 1, 1, 2, 2, 3, 3, 3, 3 számjegyekből?
   b) Hányféle hétjegyű számot lehet felírni a 0, 0, 1, 2, 2, 3, 3, 3, 3 számjegyekből?

42. a) Írjuk fel a [3,2,4,1,5] permutációt ciklikus írásmóddal!
   b) Írjuk fel a [3,2,4,1,5] permutáció mátrixát!
   c) A [3,2,4,1,5] permutáció milyen hatványai azok, amelyek minden elemet helybenhagynak?

43. a) Hány 5 elemű részhalmaza van egy 8-elemű halmaznak?
   b) Egy üzletben 8-féle képeslap kapható. Hányféleképpen vásárolhatunk 15 képeslapot, ha mindegyik fajtából korlátlan mennyiség áll rendelkezésre?
   c) Egy üzletben 8-féle képeslap kapható. Hányféleképpen vásárolhatunk 15 képeslapot, ha mindegyik fajtából pontosan kettő darab van?

44. Állítson elő egy olyan gráfot, amelyben a fokszámok rendre 1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, és rajzoltassa fel számítógéppel!

45. a) Állítsa elő a 10 pontú teljes gráfot!
   b) Hány éle van a gráfnak?
   c) Síkgráf-e ez a gráf?
   d) Mennyi a gráf a kromatikus száma?

46. a) Állítsa elő a $K_{2,4}$ teljes páros gráfot!
   b) Síkgráf-e ez a gráf?
   c) Mennyi ennek a gráfnak a kromatikus száma?

d) Hány út vezet a 0. pontból a 3. pontba?

47. a) Állítsa elő a dodekaédergráfot!

b) Hány csúcsa és hány éle van a gráfnak?

c) Van-e a gráfnak zárt vagy nyílt Euler-bejárása? (Ha nincs, indokolja meg miért nincs, ha van mutasson egy példát!)

d) Van-e a gráfnak Hamilton köre? (Ha nincs, indokolja meg miért nincs, ha van mutasson egy példát!)

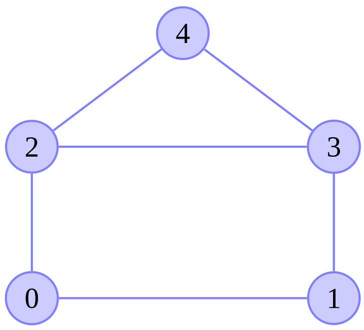
48. A Fibonacci fák a következő rekurzió segítségével értelmezett gráfok: F_0 az üres gráf, F_1 pedig egyetlen pontból áll. Az F_n Fibonacci fát úgy kapjuk, hogy egy ponthoz (a gyökérponthoz) egy-egy él segítségével hozzákapcsoljuk az F_{n-1} és az F_{n-2} fákat.

a) Ábrázoljuk az F_6 Fibonacci-fát!

b) Hány pontja van az F_n Fibonacci-fának?

c) Hány élből áll az F_n fában a leghosszabb út?

49. Hányféleképpen lehet a 57. ábrán látható „házgráfból” két élet eltávolítani úgy, hogy a megmaradó gráf összefüggő legyen?



57. ábra. Házgráf

50. Hány olyan ötpontú egyszerű gráf van, amelyben nincs sem izolált pont sem kör, ha

a) az izomorf gráfok nem számítanak különbözőnek,

b) az izomorf gráfok különbözőnek számítanak, ha a megfelelő pontok számozása eltér egymástól?

51. Legyen H 30 pozitív osztóinak halmaza. Értelmezzük H-n az O homogén bináris relációt a következőképpen: $\forall x, y \in H : xOy$ akkor és csak akkor, ha x osztója y-nak.

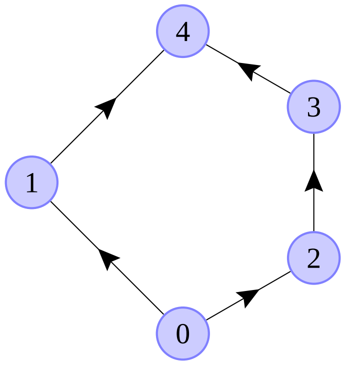
a) Ellenőrizza alkalmas algoritmus segítségével, hogy az O reláció tranzitív-e!

b) Adja meg az O részben-rendezési relációt rákövetkezések segítségével és állítsa elő a Hasse-féle diagramját.

52. A Birkhoff-tétel szerint az ábrán látható háló nem disztributív. Igazolja ezt úgy, hogy kiválasztja a háló három (a, b és c) elemét úgy hogy azokra nem teljesül a

$$\sup\bigl(a, \inf(b, c)\bigr) = \inf\bigl(\sup(a, b), \sup(a, c)\bigr)$$

összefüggés.



53. a) Oldja meg az előző feladatot a Birkhoff-tételben szereplő másik hálóra is!

b) Állítsa elő ennek a hálónak a Hasse-féle diagramját!

9.2. A házi feladatok osztályozása

Feladat	Direkt	Realizációs	Kombinált	Összefüggés keresése	Problémamegoldás
1. a)	√				
b)	√				
c)	√				
d)	√				
2. a)	√				
b)	√				
c)	√				
d)	√				
e)	√				
3.				√	
4. a)			√		
b)			√		
c)	√				
d)	√				
e)	√				
5.			√		
6.			√		
7.					√
8.			√		
9.	√				
10.				√	
11.	√				
12.	√				
13.			√		
14.			√		
15.					√

Feladat	Direkt	Realizációs	Kombinált	Összefüggés keresése	Problémamegoldás
16.		√			
17.		√			
18. a)					√
b)					√
c)					√
19.			√		
20.			√		
21.					√
22.					√
23. a)	√				
b)	√				
c)				√	
24. a)				√	
b)				√	
25. a)				√	
b)				√	
c)				√	
26.				√	
27. a)		√			
b)		√			
c)		√			
28.			√		
29.		√			
30.	√				
31.	√				
32.	√				

Feladat	Direkt	Realizációs	Kombinált	Összefüggés keresése	Problémamegoldás
33.	√				
34.	√				
35. a)			√		
b)			√		
c)			√		
36. a)			√		
b)	√				
c)					√
37. a)					√
b)					√
c)					√
d)					√
38.		√			
39.				√	
40.	√				
41. a)			√		
b)					√
42. a)	√				
b)	√				
c)					√
43. a)	√				
b)			√		
43. c)			√		

Feladat	Direkt	Realizációs	Kombinált	Összefüggés keresése	Problémamegoldás
44.		√			
45. a)			√		
b)	√				
c)	√				
d)	√				
46. a)			√		
b)	√				
c)	√				
d)			√		
47. a)			√		
b)	√				
c)			√		
d)			√		
48. a)			√		
b)					√
c)					√
49.					√
50.					√
51. a)			√		
b)			√		
52.			√		
53. a)			√		
b)	√				

9.3. Kérdőív a hallgatók számára

Tisztelt Hallgató!

Kérjük, hogy az alábbi kérdőív kitöltésével segítse munkánkat. Az így kapott információkat a matematika tantárgyak oktatásának korszerűsítése érdekében kívánjuk felhasználni.

1. Melyik évben érettségizett?
2. Milyen szintű matematika érettségit tett?

   KÖZÉP EMELT[35]

3. A matematika érettségi eredménye százalékban:
4. Milyen szinten tanulta az utolsó két évben a matematikát?

   ALAP FAKULTÁCIÓ TAGOZAT

5. Milyen formában tanult informatikát (számítástechnikát)?

   ALAP SZINT FAKULTÁCIÓ
   INFORMATIKAI SZAKKÖZÉPISKOLA

6. Informatika érettségije

   NEM VOLT KÖZÉP SZINTŰ EMELT SZINTŰ

7. Informatika érettségi eredménye százalékban (ha érettségizett a tárgyból):
8. Részt vett-e valamilyen felsőfokú szakképzésen informatikából?

   NEM IGEN

9. Ha az előző kérdésre igennel válaszolt, írja le, milyen képzésen vett részt!

10. Az órákon megismert *Sage* program mellett ismer-e valamilyen számítógép algebrai rendszert? (Ha igen melyiket?)

    NEM IGEN

11. Mennyire segítette-e a tananyag megértésében a Sage rendszer? (Osztályozza 1-5-ös skálán, ahol 1 azt jelenti, hogy nem segítette, 5 azt hogy nagy segítséget jelentett.)

[35] Ahol több válaszlehetőség van, húzza alá a megfelelőt!

12. A következő állítások közül melyiket tartja igaznak?
Válaszoljon igen/nem-mel! (I/N)

    - A Sage megkönnyíti a matematika tanulását, mert segítséget jelent a numerikus számítások elvégzésében. ☐
    - A Sage megkönnyíti a matematika tanulását, mert segítséget jelent a szimbolikus számítások elvégzésében. ☐
    - A Sage megkönnyíti a matematika tanulását, mert az összefüggések (függvények) könnyen ábrázolhatók a segítségével. ☐
    - A Sage megkönnyíti a matematika tanulását, mert a programkódok írása során érthetőbbé válnak a matematika egyes algoritmusai. ☐
    - A Sage megkönnyíti a matematika tanulását, mert sok esetben lehetővé teszi a gondolatmenetem gyors ellenőrzését. ☐

13. Melyik témakör(ök) tanulmányozása során érezte hasznosnak a Sage felhasználását a félév során. Miért?

14. Melyik témakör volt a félév során a legérthetőbb?

15. Melyik témakör okozott nehézséget a félév során? Mi ennek az oka?

16. Mekkora segítséget jelentettek a diszkrét matematika tanulása során a következők? (Értékelje 1-5-ig, ahol az 1 azt jelenti, hogy semmilyen segítséget nem jelentett, az 5 pedig, hogy hatékony segítségnek bizonyult.)

    - tankönyv . . . . ☐
    - példatár . . . . ☐
    - előadás . . . . ☐
    - személyes tanári segítség a gyakorlaton . . . . ☐
    - interneten talált anyagok . . . . ☐
    - középiskolában megszerzett alapozó ismeretek . . . . ☐
    - egyéb, mégpedig . . . . ☐

17. Mi tenné könnyebbé az Ön számára a diszkrét matematika tanulását? (Több javaslata is lehet.)

18. Milyen számítógépes feladatok megoldása segítené a tanult fogalmak jobb megértését?

19. Véleménye szerint fontos szerepe lesz-e a jövőben a számítógéppel támogatott oktatásnak a matematika területén?

20. Milyen Ön által ismert számítógépes programot javasolna a matematika tanulása során?

21. Egyéb a témával kapcsolatos megjegyzése:

Irodalomjegyzék

[1] A. Ambrus, *Bevezetés a matematika-didaktikába*, ELTE Eötvös Kiadó, 2004.

[2] S. Arnold, Classroom computer algebra: Some issues and approaches. *Australian Mathematics Teacher*, 60, no. 2, (2004), 17–21.

[3] J. Bagyinszki, A. György, *Diszkrét matematika főiskolásoknak*, Typotex Kiadó Budapest, 2001.

[4] P. Bogacki, Linear algebra toolkit, http://www.math.odu.edu/ bogacki/cgi-bin/lat.cgi

[5] W. E. Boyce, J. G. Ecker, The computer-oriented calculus course at rensselaer polytechnic institute. *The College Mathematics Journal*, 26, no. 1, (1995), 45–50.

[6] J. Bradley, M. Kemp, B. Kissane, Understanding what you are doing: A new angle on CAS, In *Communications of Remarkable Delta'03 Fourth Southern Hemisphere Symposium on Undergraduate Mathematics and Statistics Teaching and Learning*, (2003), 50–64.

[7] J. Bruner, *The Process of Education*, Harvard University Press, 1960.

[8] D. Carlson, Teaching linear algebra: Must the fog always roll in? *College mathematics Journal*, 24, no. 1, (1993), 29–40.

[9] J. Cook, J. Hornby, L. Scott L, Assessment driven learning, *Maths caa series*, 2001., [online] http://www.ltsn.gla.ac.uk/repository/mathscaa_dec2001.pdf

[10] Á. Cserjés, J. Csicsek, A felvételt nyert informatikus hallgatók matematikai tudásszintjének elemzése és ennek következménye: a felzárkóztató kurzus, *Informatika a Felsőoktatásban*, 2008.

[11] K. Devlin, What is conceptual understanding? *Mathematical Association of Amerika*, szept. 2007.

[12] J-Ph. Drouhard, Communication in the classroom with a CAS: The Double Didactic Pyramid Model. *The State of Computer Algebra in Mathematics Education*, (1996), 165–170.

[13] E. Dubinsky, Some thoughts on a first course in linear algebra at the college level. *Resources for Teaching Linear Algebra, Mathematical Association of America, MAA*, 42, no. 1, (1997), 85–105.

[14] R. Fischer, Universitäre allgemeinbildung. *Studium Integrale, Springer, Wien*, 2000.

[15] J. A. Fodor, M. F. Garrett, E. C. T. Walker, C. H. Parkes, *Against definitions*, Cognition, 8, (1980), 263–367.

[16] M. D. Frau, P Real, G. Valeiras, Dismat, a system for discrete mathematics teaching. *Matemática Aplicada I (Universidad de Sevilla)*, 1999.

[17] Graduate record examinations.
http://en.wikipedia.org/wiki/Graduate_Record_Examinations

[18] E. Gray, D Tall, Duality, ambiguity and flexibility in successful mathematical thinking. In *Proceedings of PME 15*, 2, (1991), 72–79.

[19] D Guin, L. Trouche, Mastering by the teacher of the instrumental genesis in CAS environments: Necessity of instrumental orchestrations. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 34, no. 5, (2002), 204–211.

[20] D. Guin, L. Trouche, The complex process of converting tools into mathematical instruments: The case of calculators. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 3, (1999), 195–227.

[21] A. György, P. Kárász, Sz. Sergyán, I. Vajda, Á. Záborszky, *Diszkrét matematika példatár*, BMF-NIK, 2003.

[22] A. György, V. Kos, B. Schmuck, D. Sima, S. Szöllősi, I. Vajda, Intelligens vizsgakiértékelő rendszer (előkészítő vizsgálódások), *IX. Országos Neumann Kongresszus Győr, Széchenyi Egyetem*, 2006.

[23] A. György, S. Szénási, I. Vajda, Szemi-automatikus tudáskiértékelés a vektoralgebrai feladatok példáján. *Informatika a felsőoktatásban*, 2008.

[24] A. György, I. Vajda, Elektronikus vizsgáztatás matematikából, *Matematika-, Fizika és Számítástechnika Oktatók XXX. Konferenciája*, 2006.

[25] A. György, I. Vajda, Intelligent mathematics assessment in eMax, *IEEE Africon*, 2007.

[26] H. Hagen, MathML,
http://www.pragma-ade.com/general/manuals/mmlprime.pdf

[27] M. K. Heid, K. F. Hollebrands, L. W. Iseri, Reasoning and justification with examples from technological environments, *Mathematics Teacher*, 95, no. 3, (2002), 210–216.

[28] J. L. Hein, *Prolog Experiments in Discrete Mathematics, Logic, and Computability*. Portland State University, 2009.

[29] W. Hwang, N. Chen, J. Dung, Y. Yang, Multiple representation skills and creativity effects on mathematical problem solving using a multimedia whiteboard system. *Educational Technology & Society*, 2007.

[30] C. E. Iglesias, A. G. Carbajo, M. A. S. Rosa, Interactive tools for discrete mathematics e-learning. *WSEAS TRANSACTIONS on ADVANCES in ENGINEERING EDUCATION*, 5, no. 2, (2008), 97–103.

[31] R. D. Kellough, N. G. Kellough, Secondary school teaching: A guide to methods and resources; planning for competence. *Prentice-Hall, Inc., Upper Saddle River, NJ*, 1999.

[32] J. Kilpatrick, J. Swafford, B Findell, *Adding it up: Helping children learn mathematics.* National Academy Press, 2001.

[33] L. Kiss, Gráf generálás és a kruskal algoritmus tanítása excel segítségével. *MAFIOK*, 2010.

[34] Z. Kovács, Blind versus wise use of CAS. *Teaching Mathematics and Computer Science*, 2, (2007), 407–417.

[35] B. Kutzler, Solving linear equations with the ti-92, *Hagenberg (Austria): bk teachware.*, 1997.

[36] R. Lesh, T. Post, M. Behr, *Representations and Translations among Representations in Mathematics Learning and Problem Solving*, Lawrence Erlbaum Associates, 1987.

[37] M. Majoros, *Oktassunk vagy buktassunk?* Calibra Kiadó, 1992.

[38] K. A. Nabb, CAS as a restructing tool in mathematics education. *Proceedings of the* 22^{nd} *International Conference on Technology in Collegiate Mathematics*, 2010.

[39] D. Pead, Computers in mathematics assessment, http://www.isdde.org/isdde/cairns/pdf/papers/isdde09_pead.pdf.

[40] D. Pitt, In defense of definitions, *Philosophical Psychology*, 12, no. 2, (1999) 139–159.

[41] R. Pierce, K. Stacey, Observations on students' responses to learning in a CAS environment, *Mathematics Education Research Journal*, 13, no. 1, (2001), 28–46.

[42] G. Pólya, *A problémamegoldás iskolája*, Tankönyvkiadó, Budapest, 1971.

[43] H. Povey, M. Ransom, Some undergraduate students' perceptions of using technology for mathematics: Tales of resistance, In *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, (2000) 47–63.

[44] B. Rittle-Johnson, M. W. Alibali, Conceptual and procedural knowledge of mathematics: Does one lead to the other? *Journal of Educational Psychology*, 91, (1999), 175–189.

[45] D. Sima, Á. Miklós, B. Schmuck, S. Szöllősi, Rövid szöveges válaszok szemi automatikus kiértékelése, *Informatika a Felsőoktatásban* 2008.

[46] R. Skemp, *A matematikatanulás pszichológiája*, Edge 2000 kiadó, Budapest, 2005.

[47] R. Skemp, Relational understanding and instrumental understanding. *Mathematics Teaching*, 77, (1976), 20–26.

[48] Szegedi Tudományegyetem Bolyai Intézet, Webmathematics interactive, http://wmi.math.u-szeged.hu//wmi

[49] D. Tall, S. Vinner, *Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity*, Springer, 1981.

[50] M. O. J. Thomas, Y. Y. Hong, Integrating CAS calculators into mathematics learning: Partnership issues. *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Bergen, Norway*, 4, (2004), 297–304.

[51] I. Vajda, Computer aided teaching of discrete mathematics, *Kitekintés – Perspective*, (2011), 165–173.

[52] I. Vajda, Learning and teaching combinatorics with Sage, *Teaching Mathematics and Computer Science*, 2012.

[53] I. Vajda, Problems of computer-aided assessment of mathematical knowledge, *Teaching Mathematics and Computer Science*, 2012.

[54] I. Vajda, Számítógép algebrai rendszerek a matematika oktatásában, *Economica*, (2011), 82–89.

[55] I. Vajda, A. György, Electronic assessment in mathematics, *Pollack Periodica*, 19, no. 2, (2007), 203–214.

[56] I. Vajda, A. György, Intelligens tudásellenőrző kérdéssorok automatikus generálása *Informatika a Felsőoktatásban*, 2005.

[57] I. Vajda, A. György, The mathematics module of the eMax system, *2-nd European Computing Conference (ECC'08)*, 2008.

[58] N. J. Vilenkin, *Kombinatorika*, Műszaki könyvkiadó, Budapest, 1971.

[59] S. Vinner, *The role of definitions in the teaching and learning of mathematics*. Springer, 2002.

[60] S Vinner, T. Dreyfus, Images and definitions for the concept of function, *Journal for Research in Mathematics Education*, 1989.

[61] H. J. Vollrath, *Methodik des Begrifflehrens in Mathematikunterricht,* Klett Verlag, 1984.

[62] J. Wood, M. Burrow, Formative assessment in engineering using triads software, *International Computer Assisted Assessment Conference*, 2002.

[63] H. Wu, Basic skills versus conceptual understanding: A bogus dichotomy in mathematics education. *American Educator/American Federation of Teachers*, 1999.

[64] H. Wu, Computer aided teaching in linear algebra, *The China Papers*, (2004), 100–102.