Egyetemi doktori (PhD) értekezés tézisei

A diszkrét matematika és lineáris algebra számítógéppel támogatott oktatása

Computer Aided Teaching of Discrete Mathematics and Linear Algebra

Vajda István

Témavezető: Dr. Hortobágyi István

DEBRECENI EGYETEM
Természettudományi Doktori Tanács
Matematika- és Számítástudományok Doktori Iskola

Debrecen, 2012.

Tartalomjegyzék

1. A témaválasztás indoklása **3**

2. A Sage számítógép-algebrai rendszer alkalmazása a diszkrét matematika és lineáris algebra tárgy oktatásában **4**

2.1. A kísérleti munka ismertetése 4

2.2. Tézisek a DMLA tárgy számítógép algebrai rendszerrel támogatott oktatásával kapcsolatban 7

2.3. Az elvégzett vizsgálatok és a kapcsolódó eredmények . 7

3. Az eMax vizsgáztató rendszer **12**

3.1. Bevezetés 12

3.2. A tudásértékelő program matematikai moduljával kapcsolatos célkitűzések 14

3.2.1. A tervezéskor megfogalmazott hipotézis 14

3.2.2. A rendszerrel kapcsolatos egyéb elvárások . . 14

3.3. Az eMax által támogatott matematikai feladatok 15

3.4. Felhasználói felületek 15

3.5. Az értékelést végző algoritmusok 16

3.5.1. A megoldási fák 16

3.5.2. A tesztalgoritmus 17

3.5.3. A szűrőalgoritmusok 18

3.6. Eredmények 19

4 Justification of choice of subject **22**

5 Application of Sage computer-algebra system in teaching Discrete Mathematics and Linear Algebra **23**

5.1 Review of the experiment 23

5.2 Theses on computer algebra system aided teaching of subject DMLA 25

5.3 Research executed, and relating results 26

6 eMax exam system **31**
6.1 Introduction 31
6.2 Aims connected to the mathematical module of the assessment program 32
6.2.1 Hypothesis formulated in the phase of planning 32
6.2.2 Other requirements related to the system 33
6.3 Mathematical problems supported by eMax 33
6.4 User interfaces 34
6.5 Algorithms of evaluation 35
6.5.1 Solution trees 35
6.5.2 Test algorithm 35
6.5.3 Filter algorithms 36
6.6 Results 37

1. A témaválasztás indoklása

A matematika oktatása során az ismeretek átadása mellett fontos szerep jut a gondolkodásmód, illetve a tárgyhoz kapcsolódó képességek, készségek fejlesztésének.

A National Research Council (Washington) kiadványában pl. ezeket a következőképpen csoportosítják [9]:

- Fogalmi megértés
  A matematikai elgondolások integrált és funkcionális megértése, ami lehetővé teszi, hogy a tanulók új fogalmakat tanuljanak meg azáltal, hogy azokat a már ismert fogalmakhoz kapcsolják. A fogalmi megértés elősegíti az ismeretek hosszú távú megjegyzését és segít elkerülni szokványos hibákat.
- Eljárások rutinos végrehajtása
  Olyan képesség, amely lehetővé teszi az eljárások rugalmas, hatékony, pontos és helyes végrehajtását.
- Stratégiai készség
  A formalizálás, a reprezentálás és a problémák megoldásának képessége
- Adaptív indoklási készség
  A logikai gondolkodás, elemzés, magyarázat és döntés képessége
- A tárgyhoz való pozitív viszony
  A tanuló a matematikát ésszerűnek, hasznosnak, értékesnek gondolja és hisz a szorgalomban, illetve a saját képességeiben

Az Óbudai Egyetemen és annak jogelőd intézményeiben végzett oktatói munkám során azt tapasztaltam, hogy a mérnök informatika szakos hallgatók többsége sem az ismeretek, sem a fenti készségek tekintetében nem felkészültek a felsőfokú matematika tanulmányok folytatására [2]. Bár az egyetemen egy részük pótolja a hiányosságokat, többségük a rendelkezésre álló rövid idő és feszített tananyag mellett erre nem képes.

Az ehhez hasonló problémák nem egyediek, az okok elemzésével sok szerző foglalkozik [10] [8]. Az oktatás hatékonyságának javítása érdekében sokan próbálkoznak a számítógéppel támogatott matematika oktatással és különösen népszerűek a számítógép-algebrai rendszerek (CAS) [11] [12] [3]. Munkám egyik része egy ilyen rendszernek az alkalmazásához kapcsolódik a Diszkrét matematika és lineáris algebra tárgy (DMLA) témakörében. Választásom azért erre a tárgyra esett, mert ennek számítógéppel támogatott oktatása még nem olyan elterjedt, mint pl. az analízis, vagy a matematikai statisztika esetében.

Munkám másik része az eMax vizsgáztató rendszer matematikai moduljának fejlesztéséhez kapcsolódik. Ezt a rendszert 2005-ben kezdtük el fejleszteni egy IBM által támogatott projekt keretében. Célunk egy olyan tudásértékelő rendszer létrehozása volt, ami új lehetőségeket nyújt az ismert, meglévő rendszerekhez képest.

Munkám részét képezte az oktatott anyagban felhasznált feladatok kiválasztása és megfelelő szempontok szerinti osztályozása, ami lényeges szerepet játszott a számítógéppel támogatott oktatás és a vizsgáztató rendszer fejlesztésében egyaránt.

2. A Sage számítógép-algebrai rendszer alkalmazása a diszkrét matematika és lineáris algebra tárgy oktatásában

2.1. A kísérleti munka ismertetése

Kísérleteimet a 2009/10. tanévben kezdtem, szemeszterenként két tankörben, amelynek keretében két tankörnek számítógépes laborban oktatok matematikát. Ezekben a kurzusokban a hallgatóknak a Sage számítógép-algebrai rendszer segítségével kell matematika feladatokat megoldaniuk.

A Sage rendszer 2005-ben született és kifejezetten oktatási célokra hozták létre. Mivel több korábbi CAS rendszert magában foglal, így sok témakör tanulmányozásához nyújt segítséget. Ez a sokoldalúság az egyik oka, hogy választásom erre a rendszerre esett. Fontos szerepet játszott az ingyenesség is, ami könnyen elérhetővé teszi a hallgatók számára az otthoni felhasználást a tanulás és a házi feladatok készítése során.

A kísérlet a 10-15 tankörből álló évfolyamnak viszonylag kis részét érinti. Az első év során a DMLA tárgy gyakorlatain használtam a rendszert két-két tankörben, a későbbiekben külön választható tárgy[1] keretében. Ez ugyancsak két tankört érintett szemeszterenként és az órákon feldolgozott anyag továbbra is elsősorban a DMLA tárgyhoz kapcsolódott.

A témák feldolgozása során szükségesnek bizonyult az óra elején egy rövid tanári magyarázat, amelyben részben az aktuális tananyag fontosabb fogalmainak, tételeinek ismétlése került sorra, részben pedig a Sage rendszer olyan fontosabb függvényeit ismertettem, amelyek az aktuális témakörben felhasználhatók. A magyarázat általában mintafeladatok bemutatását is magában foglalta. Az óra további része önálló hallgatói munkával telt, amelynek során megengedett volt a párokban vagy kisebb csoportokban történő munka is.

A hallgatók minden órán kaptak házi feladatot, amit a következő óra elejéig kellett benyújtaniuk, illetve elküldeniük elektronikus formában. A félév során két gépes zárthelyi dolgozatot is kellett írniuk, ezeknek eredménye, a házi feladatra és az órai munkára adott pontszám együttesen határozták meg a hallgató évközi jegyét.

A DMLA tárgy hagyományos gyakorlatain feldolgozott feladatok jelentős része a Sage rendszerben egyetlen függvényhívással megoldható. A kísérleti kurzusokon ezek közül néhányat felhasználtam a program szintaktikájának bemutatására, a hallgatók számára kitűzött feladatsorokban viszont kerültem őket, mert nem fejlesztik a matematikai gondolkodást. Azokat a feladatokat sem tudtam felhasználni, amelyek megoldásához a rendszer nem nyújt segítséget.[2] A fentiek következtében a feladatsorok összeállítása során sok új feladatot készítettem, illetve kerestem.

[1] Matematikai problémák megoldása számítógéppel (MP).

[2] Ilyen volt a bizonyítási feladatok egy része.

A kitűzött feladatokat didaktikai szempontok szerint osztályozva a következő típusokat különböztettem meg:[3]

1. Direkt feladat
   A feladatban megadott (ismert) módszerrel megoldandó feladat.
2. Realizációs feladat
   Tanult fogalomra konkrét példa vagy ellenpélda megadása, adott tulajdonságú objektum előállítása.
3. Kombinált feladat
   Adott problémához megfelelő módszer kiválasztása, a módszer alkalmazásával a megoldás előállítása.
4. Összefüggés keresése
   A feladat része az állítás megfogalmazása, majd annak megoldása.
5. Problémamegoldás
   A megoldáshoz a tanult ismeretek szokatlan kombinációjára van szükség [1].

A feladatok megoldásainak ellenőrzése során vizsgáltam, hogy a kísérleti kurzusokban részt vevő hallgatók milyen eredményeket érnek el a hagyományos kurzusokban részt vevő hallgatókhoz viszonyítva, illetve milyen eltérések mutathatók ki a különböző típusú feladatok megoldásának eredményességében.

A kísérleti kurzusokon részt vevő hallgatók számára összeállítottam egy kérdőívet, amit önkéntes alapon tölthettek ki. Ennek feldolgozása információval szolgált a számítógépes és hagyományos tanulási módszerekkel, eszközökkel való hallgatói véleményekről.

[3] Az oktatói munka során gyakran alkalmazunk további feladattípusokat is, pl. *memória feladat*, *azonosítási feladat* [17], ezek megoldásához azonban az esetek többségében nincs szükség a CAS alkalmazására, illetve megoldásuk érdektelenné válik, így nem szolgálja a hallgatók matematikai készségeinek fejlesztését.

2.2. Tézisek a DMLA tárgy számítógép algebrai rendszerrel támogatott oktatásával kapcsolatban

1. A CAS használata mellett a hallgatók jobb eredményeket érnek el a DMLA tárgyhoz kapcsolódó feladatok megoldásában, mint a hagyományos írásbeli vizsgák során.
2. A rendszer használata bővíti a feldolgozható feladatok és témák körét.
3. A számítógép használata elősegíti a hallgatók önállóbb munkavégzését az órákon és a házi feladatok elkészítése során.
4. A rendszer használata mellett a hallgatók szívesebben foglalkoznak matematikai feladatokkal, mint a hagyományos oktatási forma esetén.
5. A kitűzött feladatok nehézsége összefüggésben van a feladat didaktikai céljaival.
6. A CAS használatának engedélyezése a feladatok nehézségi sorrendjét jelentősen megváltoztatja.
7. A tárgyi eszközök közül a CAS kiemelkedő segítséget nyújt a hallgatók számára a matematika tanulásában, de a személyes segítség és ezen belül az oktatók szerepe továbbra is a legfontosabb.

2.3. Az elvégzett vizsgálatok és a kapcsolódó eredmények

1. tézis:

Ennek igazolásához kétféle vizsgálatot végeztem. Az egyik során a kísérletben részvevő és a kontrollcsoportok hagyományos írásbeli vizsgán nyújtott teljesítményét hasonlítottam össze. Ezt a 2009/10. tanév első félévétől kezdve minden félévben megismételtem, minden esetben hasonló eredménnyel. A kísérleti csoportok átlaga minden alkalommal magasabb volt, de szignifikáns eltérést nem lehetett kimutatni.

Példaként a 2010/11. tanév második félévében elért eredményeket mutatom be. Ekkor összesen 42 hallgató vett részt kísérleti kurzusainkon. Ezen hallgatók közül 30 vette fel párhuzamosan a Diszkrét Matematika és Lineáris Algebra II. tárgyat.[4] Az ő vizsgaeredményeiket az ugyancsak 30 főt tartalmazó kontrollcsoport ugyanezen tárgyból elért eredményével hasonlítottam össze.

Az elért osztályzatok gyakoriságát a 1. táblázat első két sora mutatja. A kísérleti csoportok átlaga 2,47, míg a kontrollcsoporté 2,37. Az eltérés 0,1, az aktuális hallgatói létszámokkal 5%-os szignifikanciaszinten a kétmintás t-próba eredménye $t = 0,442$.

1. táblázat. Vizsga- és gépes zárthelyi eredmények

számonkérés formája	**csoport**	**osztályzatok száma**					**átlag**
		1	**2**	**3**	**4**	**5**	
írásbeli	kontroll	2	19	6	2	1	2,37
írásbeli	kísérleti	2	17	7	3	1	2,47
gépes	kísérleti	0	10	8	9	3	3,23

A másik vizsgálat során a kísérleti csoport gépes zárthelyi dolgozatokon elért eredményeit hasonlítottam össze a DMLA tárgy írásbeli vizsgáján elért eredményekkel. Az eredmények itt is minden félévben hasonlóan alakultak, példaként ugyanazon félévben elért eredményeket mutatom be. A kísérleti tárgy ugyanazon 30 hallgatójának a gépes zárthelyi dolgozatokon elért átlaga 3,23, az osztályzatok eloszlását a 1. táblázat 3. sorában láthatjuk. Az eredmények összehasonlítására itt is t-próbát alkalmaztam, amelynek eredménye $t = 3,3$, tehát itt az eltérés szignifikáns a számítógépen írt dolgozatok javára.

2. tézis:

A CAS használata lehetővé teszi olyan problémák vizsgálatát, amelyek idő- és számolásigényes részfeladatokat tartalmaznak, így a hagyományos keretek között nincs lehetőség a feldolgozásukra. A kísérleti csoportokban előfordultak ilyen feladatok, példa található rájuk az értekezésben és [15]-ben is.

[4] A többiek ezt a tárgyat már korábban elvégezték.

3. tézis:

Az órákon a hallgatók igényelték a tanári segítséget, de az idő nagy részében önállóan, illetve egymást segítve kisebb csoportokban vagy párokban dolgoztak. Szükség esetén a beépített súgót és az interneten található ismereteket is felhasználva folyamatosan dolgoztak, kitöltve a rendelkezésre álló időt.

4. tézis:

A kérdőívet kitöltő 94 hallgató közül mindössze három részesítette a hagyományos oktatási formát előnyben, a többiek szívesebben foglalkoztak a matematika feladatokkal a CAS támogatása mellett.

5. tézis:

Ennek a tézisnek az igazolásához a hallgatók által beadott feladatok megoldásait típusonként értékeltem. Ehhez az értekezés függelékében megtalálható 53 feladat megoldásait használtam fel, mivel azonban ezek egy része különböző típusú részfeladatokból áll, azokat külön értékelve összesen 98 feladattal dolgoztam. A 25 hallgatótól elvárt 2450 megoldás helyett csak 1881 érkezett. Az eltérő pontszámok miatt az összehasonlítás során a megoldással elért százalékos eredményekkel számoltam. Az egyes feladattípusok esetén kapott megoldások számát és eredményét a 2. táblázatban láthatjuk.

Látható, hogy direkt feladatokban és a realizációs feladatokban elért eredmények a legjobbak és ezek nagyon közel állnak egymáshoz. Valamivel gyengébbek az eredmények a kombinált feladatok és az összefüggéskeresések esetén és lényegesen gyengébb eredmények születtek a problémamegoldások megoldása során.

Bár a táblázat alapján jól elkülöníthető a három különböző nehézségű feladatokat tartalmazó csoport kétmintás t-próba segítségével is igazoltam, hogy az eltérés szignifikáns.[5] A számítás során a nem megoldott feladatok eredményeit 0-nak tekintettem. A direkt és a realizációs feladatok esetén $t = 0,126$, a kombinált feladatok és az összefüggéskeresések esetén $t = 0,566$, tehát egyik esetben sem mutatható

[5] Előtte F-próbával mutattam meg, hogy az egyes csoportok eredményeinek szórása nem tér el lényegesen egymástól.

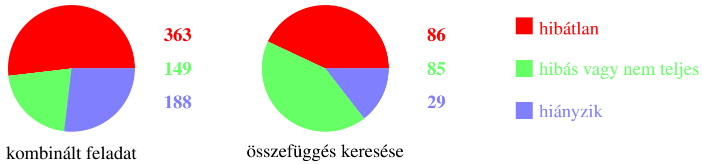
2. táblázat. A feladatmegoldások eredménye típusonként

feladattípus	hibátlan	hibás, nem teljes	hiányzik	eredmény
direkt feladat	536	158	156	83,6%
realizációs feladat	127	34	39	84,8%
kombinált feladat	363	149	188	78%
összefüggés keresése	104	97	49	77,8%
problémamegoldás	140	173	137	48,4%
összesen	1270	511	569	75%

ki szignifikáns eltérés $p = 0,05$ szignifikanciaszinten.

A direkt- és realizációs feladatokat összehasonlítva a kombinált feladatokkal és összefüggéskeresésekkel $t = 2,3$ adódik, tehát itt már szignifikáns az eltérés és ugyanez a helyzet a problémamegoldások, illetve kombinált feladatok és összefüggéskeresések esetén, ahol a próba eredménye $t = 3,45$.

Bár a kombinált feladatok és az összefüggéskeresések nehézségi foka az elért eredmények átlaga és a t próba alapján megegyezik, ha alaposabban megvizsgáljuk az összefüggéskeresés kategóriába sorolt feladatokat, akkor megfigyelhetjük, hogy ezek mindegyike két vagy több részből áll. Ezek közül csak az utolsó rész a tiszta összefüggéskeresés, azt mindig konkrét számítási feladatok előzik meg, amelyek eredményét megfigyelve kellene sejtést megfogalmazni és a feladatok egy részében igazolni is. Mivel a feladatok számítási része egyszerű, a hallgatók többségének sikerült ezekből részpontszámot szerezni, így érthető a 0 pontos megoldások viszonylag alacsony száma. Azt, hogy az összefüggés felismerése sok hallgató számára nehézséget jelent, alátámasztja, hogy az ilyen feladatokra beadott 97 hibás vagy nem teljes megoldásból 69 esetben a hallgató ugyan helyesen végezte a számításokat, de ezek alapján nem jutott el a sejtésig.



1. ábra. Kombinált feladatok és összefüggéskeresések megoldásai

6. tézis:

A hosszadalmas számításokat, illetve sok adat rendszerezését igénylő feladatok a CAS lehetőségeit felhasználva gyorsabban és egyszerűbben megoldhatók [15][14].

7. tézis:

Itt a hallgatói kérdőív olyan kérdéseire adott válaszokat vizsgáltam, amelyekből kiderül, hogy az oktatás során használt eszközök és szolgáltatások milyen mértékben segítik a hallgatók tanulmányait. Ezek közé tartoztak a következők:

- Mennyire segítette a tananyag megértésében az órákon használt Sage rendszer?[6]
- Mekkora segítséget jelentettek a diszkrét matematika tanulása során a következők?
  - a tankönyv;
  - a példatár;
  - az előadás;
  - a személyes tanári segítség a gyakorlatokon;
  - az interneten talált anyagok;
  - a középiskolában megszerzett alapozó ismeretek.

[6]Osztályozza 1-5-ös skálán, ahol az 1 azt jelenti, hogy nem segítette, az 5 pedig azt, hogy hatékony segítségnek bizonyult.

3. táblázat. A tanári és tárgyi segítség hatása

	osztályzatok száma 1	2	3	4	5	Nem válaszolt	átlag
tankönyv	37	13	19	13	6	6	2,30
példatár	30	16	21	14	8	5	2,48
alapozó i.	15	21	29	12	14	3	2,88
internet	7	18	34	17	15	3	3,16
Sage	2	10	32	32	15	3	3,53
előadás	4	5	27	35	20	3	3,68
személyes	0	0	5	12	74	3	4,76

A 3. táblázat alapján láthatjuk, hogy a kérdőívet 94 hallgató töltötte ki, ezek közül az első kérdésre hárman nem válaszoltak, a válaszolók többsége a Sage segítő hatását közepesnek vagy jónak értékelte. Az átlag 3,53. Lényegesen gyengébb eredmény született a tankönyvvel és a példatárral kapcsolatosan és az internet által nyújtott segítséget is valamivel kevesebbre értékelték. Az előadásra már valamivel magasabb átlag adódott és kimagaslóan fontosnak találták a gyakorlatokon nyújtott személyes tanári segítséget. Mivel azonban a hagyományos gyakorlatokon a személyes tanári segítségre kevesebb lehetőség adódik, az utóbbi eredmény is a számítógéppel támogatott gyakorlatok pozitív hatását emeli ki.

3. Az eMax vizsgáztató rendszer

3.1. Bevezetés

A számítógépes tudásellenőrző rendszerek két fontos ismérve, hogy milyen a kiértékelés intelligenciája és milyen feladattípusokat támogat. A értékelés intelligenciája alapján a rendszerek három csoportba sorolhatók [4]:

- manuális értékelésű:
  A feladatokat a hallgatók a számítógépen keresztül kapják és a gépen oldják meg őket, a megoldások értékelése már emberi erőforrás alkalmazásával történik.
- kvázi automatikus értékelésű:
  A rendszer képes a dolgozatok döntő részét önállóan értékelni, míg egy kisebb részét az oktatóra bízza.
- automatikus értékelésű:
  A rendszer képes valamennyi választ teljes mértékben értékelni.

A támogatott feladatokat gyakran osztályozzák a válaszok bevitelének módja szerint. Ennek alapján megkülönböztetünk passzív és aktív feladattípusokat [6].

- passzív feladat:
  A választ egy előre megadott válaszhalmazból kell kiválasztani, vagy egy képpontot kell megjelölni.
- aktív feladat:
  A választ a hallgatónak kell megalkotnia.

A tudásellenőrző rendszerek nagy része csak passzív feladatokkal dolgozik, mert ezeknél a megoldások értékelése könnyebben megvalósítható [16].

Az Óbudai Egyetem Neumann János Informatikai Karán létrehozott eMax rendszer két aktív feladattípus esetén biztosít kváziautomatikus kiértékelést:

- rövid szöveges válasz
- matematika feladatok speciális fajtái

A következőkben csak a rendszer matematikai moduljáról lesz szó, mivel ennek létrehozásában vettem részt. A matematikai modul egy háromfős csapat munkája, ezért kiemelem azon elemeit, amelyek alapötlete tőlem származik:

- a feladatmegoldások bevitele során alkalmazott forma,
- a műveleti fák összeépítése,
- a tesztalgoritmus

3.2. A tudásértékelő program matematikai moduljával kapcsolatos célkitűzések

3.2.1. A tervezéskor megfogalmazott hipotézis

Alkalmas matematikai feladattípusok körében megvalósítható olyan tudásértékelő rendszer, amely kváziautomatikus értékelést biztosít aktív feladatok esetén, és megfelel a következő feltételeknek:

- A vizsgázó nemcsak a végeredményt adja meg, hanem a megoldás menetét is, hogy ne csak a végeredmény, hanem az ahhoz vezető út is ellenőrizhető legyen.
- A rendszer többféle megoldási módszert is elfogad.
- Adott megoldási módszer mellett a vizsgázó többféleképpen is leírhatja a megoldását.
- Értékelhető részmegoldás esetén a rendszer arányos részpontszámot ad a megoldásra.

3.2.2. A rendszerrel kapcsolatos egyéb elvárások

1. Áttekinthető felhasználói felület, ami egyszerű és kényelmes kezelési lehetőséget biztosít.
2. Gyors értékelési folyamat
3. A kézi értékelésre utalt megoldások aránya legyen alacsony, lehetőleg ne haladja meg a megoldások 5%-át!
4. A rendszer által értékelt feladatok esetén a program által adott pontszám ne térjen el jelentősen (10%-nál nagyobb mértékben) a tanár által kézi javítás során adott pontszámtól!
5. Adjon pontos, részletes, információt az egyes hallgatók eredményeiről, tegye lehetővé az elkövetett hibák megtekintését!
6. Adjon áttekinthető, összefoglaló jellegű információt a vizsga eredményeiről összességében, illetve feladatonként!

3.3. Az eMax által támogatott matematikai feladatok

Pólya György a matematikai feladatok két nagy csoportját különbözteti meg: a bizonyítási feladatokat és a meghatározó feladatokat [13]. A bizonyítási feladatoknál egy állítás helyességét kell megmutatni – esetleg cáfolni –, míg a meghatározó feladatok esetén valamilyen adatok alapján meg kell határozni valamilyen matematikai objektumot. Ez az objektum lehet egy szám, valamilyen mennyiség, vektor, mátrix, geometriai ábra stb. Az eMax matematikai modulja csak meghatározó feladatokat értékel, azok közül is olyanokat, amelyeknél a kiinduló adatok és a végeredmény is szám, vektor vagy mátrix, illetve az eredmény lehet még sík egyenlete és egyenes egyenletrendszere is.

A felhasználható feladatok a fentiek alapján a lehetséges matematikai feladatokhoz képest jelentős szűkítésnek tűnnek, ezért összegyűjtöttük és kategorizáltuk a 2000/2008. közötti lineáris algebra tárgykörébe eső mérnök informatikus hallgatók számára kitűzött zárthelyi és vizsgafeladatainkat. A feladatok egy része a tételek, definíciók ismeretét kívánta számon kérni. Ezeket négy csoportba tudtuk sorolni, de együttvéve is csak az összes feladat 21%-át tették ki. A fennmaradó feladatok mindegyike a meghatározó feladat kategóriájába került, ezek összesen tehát az összes feladatok nagy többségét 79%-át alkották. Részletesebb információt láthatunk a 2. ábrán.

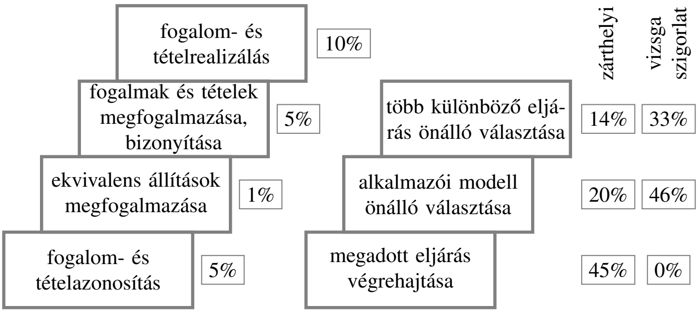
3.4. Felhasználói felületek

Az eMax matematikai modulja egy hallgatói felületet biztosít, a feladatsorban kitűzött feladatok megoldásának beírására a beépített képletszerkesztő segítségével. A program többfajta megoldás értékelésére képes és egy adott megoldás leírásában is lehetnek eltérések. Az adatbevitel soronként történik. A sorok többnyire a következő formát követik:

```
<részeredmény> = <szimbolikus megadás> = <numerikus érték>
```

Fontos, hogy a vizsgázó a szimbolikus megadás során csak olyan adatokra hivatkozzon, amelyeket korábban definiált vagy a feladat be-

fogalom	tétel	meghatározó feladat
21%		79%



2. ábra. Feladattípusok a lineáris algebra zárthelyi dolgozatokon és vizsgákon

menő adatai.

Az oktatói felület segítségével új feladatok vihetők be a rendszerbe, többfajta mintamegoldással, pontozással, tesztesetekkel. A már rögzített feladatokat használhatja fel az oktató a vizsgafeladatsorok összeállításához. Ugyancsak az oktatói felületen keresztül tekinthető meg az értékelés eredménye, hallgatónként vagy feladatonként, illetőleg statisztikai adatok, mint átlag és szórás formájában. A vizsga eredményét diagramok formájában is megjeleníthetjük.

3.5. Az értékelést végző algoritmusok

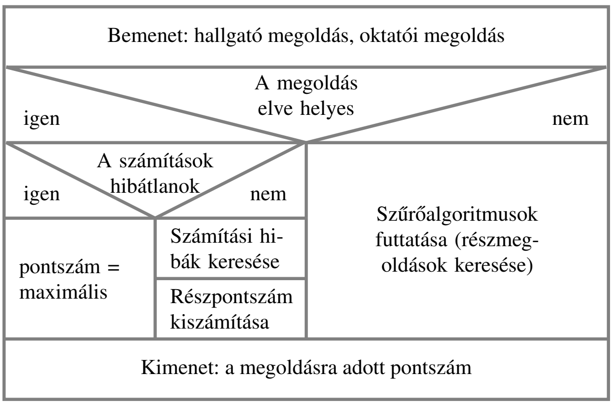
3.5.1. A megoldási fák

A hallgatói, illetve oktatói megoldások egyes soraiból a rendszer egy-egy műveleti fát hoz létre, majd ezek összeépítésével [7] eljut a megoldási fához. Az összeépítés célja az azonos alapelvű, de különbözőképpen leírt megoldások egységesítése. Az értékelő algoritmusok a hallgatói megoldási fát hasonlítják össze a megfelelő mintamegoldással.

A megoldások értékelését végző algoritmusok meghatározott sorrendben követik egymást. Ha valamelyik segítségével a megoldás értékelhető, akkor a rendszer pontozza a feladatot, különben a következő algoritmussal próbálkozik. Ha a rendelkezésre álló algoritmusok egyike sem képes a megoldást értékelni, akkor a rendszer a feladatot kézi értékelésre utalja.

3.5.2. A tesztalgoritmus

A tesztalgoritmus célja a megoldás elvi helyességének ellenőrzése, illetve számolási hibák felderítése. Az elvi helyességen azt értjük, hogy a feladat által megadott adatokból kiindulva, helyes matematikai összefüggéseket felhasználva eljutunk a keresett értékhez (objektumhoz) úgy, hogy nem használunk fel olyan segédadatokat, amelyeket a rendszer számára nem definiáltunk. Az esetleges számolási hibák az elvi helyességet nem befolyásolják [5]. Működését a 3. ábra szemlélteti.



3. ábra. A tesztalgoritmus

3.5.3. A szűrőalgoritmusok

Ha a hallgató megoldása nem elégíti ki az elvi helyesség fentebb megfogalmazott követelményét, még lehetnek benne értékelhető részeredmények. Ezen részeredmények megkeresését és értékelését szolgálják a szűrőalgoritmusok.[7] Ezekből sokféle képzelhető el, amelyek közül az eMax rendszerben négyet sikerült megvalósítani. Az egyes algoritmusoknak megfelelő részmegoldások a következők:

- RHMOA[8]

  Ez valójában egy elvileg helyes megoldás, eltekintve attól, hogy a vizsgázó nem az előírt módon használja a feladat végeredményének jelölését. Ez legtöbbször úgy fordul elő, hogy a hallgató nem figyel a nagybetű és a kisbetű közötti különbségre. Ez ilyen megoldások viszonylag könnyen értékelhetőek – a műveleti fa felépítése után annak gyökerében a jelölést megváltoztatjuk az eredmény jelére és a módosított fára alkalmazzuk a tesztalgoritmust.
- RHMOB

  Ennél a megoldásnál a hallgató szintén jól dolgozik, eltekintve attól, hogy nem vezeti vissza a feladatot az adatokig, hanem az adatokból – fejben vagy papíron – számolt helyes értékekből indul ki. Ilyen volt a mintafeladatra adott harmadik megoldás.
- RHMOC

  Olyan részmegoldást keres, amely alulról felfelé építkezik, a feladatban megadott adatokból helyesen vezeti le a feladat valamely részeredményét, amelynek felhasználásával a feladat megoldása folytatható.
- RHMOD

  Olyan részmegoldás értékelésére szolgál, amely fentről lefelé építkezik, és nem jut el az alapadatokig.

[7] Kiszűrik a feladatra adott megoldások közül azokat, amelyek bizonyos kritériumoknak megfelelő részmegoldást tartalmaznak.

[8] RészHallgatóiMegOldás A-típus

Látható, hogy az RHMOA speciális esete az RHMOC típusú megoldásnak és hasonlóan az RHMOB speciális esete az RHMOD-nek.

3.6. Eredmények

Az eMax rendszer működését 2008. januárjában egy hat feladatból álló vizsgadolgozat segítségével próbáltuk ki. A vizsgán 25 hallgató vett részt, a feladatokat a vektor- és mátrixalgebra témaköréből választottuk. A hallgatók összesen 133 feladatmegoldást adtak be. Elsőként azt vizsgáltuk, hogy rendszerünk milyen mértékben ismerte fel az egyes megoldástípusokat, ezért az oktatók minden egyes hallgatói megoldást végignéztek és besorolták őket az eMax által vizsgált típusok egyikébe, ha ez lehetséges volt. A 4. tábla mutatja, hogy az egyes típusokat hány esetben ismerte fel a rendszer.

Az oktatók 118 megoldást azonosítottak az ismertetett típusok valamelyikeként. Az eMax rendszer ebből 104 esetben helyesen adta meg a megoldás típusát. Látható, hogy az RHMOB típus felismerésével van a legtöbb gond, hiszen ez csak az esetek kétharmad részében sikerült.

4. táblázat. A felismert megoldástípusok gyakorisága

Típus	**oktatói osztályozás**	**eMax által felismert**
Helyes megoldás	77	68
RHMOA	13	13
RHMOB	12	8
RHMOC	8	7
RHMOD	8	8
egyéb	15	–

A legfontosabb kérdés a rendszer működésével kapcsolatosan, hogy a rendszer mennyire képes helyesen értékelni. Ennek eldöntéséhez a hallgatói megoldásokat kézileg is értékeltük, és ennek eredményét összehasonlítottuk az automatikus értékelés eredményével. Az utóbbit abban az esetben tekintettük helyesnek, ha az oktató és a rendszer által adott pontszám legfeljebb a feladatra adható összpontszám 10%-val tért el egymástól. (Ezzel pl. egy 10 pontos feladat esetén legfeljebb egy pont eltérést tartottunk elfogadhatónak.) Az eredményt a 5. táblázat mutatja. Az oktató és az eMax értékelésének összevetése szerint a megoldások 87%-ában a rendszer helyesen értékelt. Az értékelés jósága a feladattól függően eltért, az 5. és 6. feladat esetében csupán 80%-ban adott a rendszer megfelelő pontszámot. A rendszer a feladatok 5%-át utalta kézi javításra, 7%-át pedig hibásan értékelte. A hibás értékelés részben algoritmikus hibákból származott, amit a szűrőalgoritmusok fejlesztésével lehetne javítani, részben pedig abból, hogy a hallgató nem megfelelően használta az eMax válaszszerkesztőjét. A helytelen használatból adódó hibák csökkennek a gyakorlattal, illetve tovább csökkenthetőek lennének a szintaktikai ellenőrzés javításával.

5. táblázat. Az oktató és az eMax értékelésének összevetése

feladat	**helyes pontszám**	**kézi értékelés**	**algoritmikus probléma**	**helytelen használat**
1.	96%	0%	0%	4%
2.	84%	4%	8%	4%
3.	88%	8%	0%	4%
4.	96%	0%	4%	0%
5.	80%	8%	12%	0%
6.	80%	12%	8%	0%
összesen	**88%**	**5%**	**5%**	**2%**

Az eredményekből látható, hogy a vektorgeometriai és mátrixalgebrai feladatok egy csoportján sikerült igazolni a feltett hipotézist, és a többi követelményt is sikerült teljesíteni. Természetesen nem állíthatjuk, hogy a rendszer mindig és minden körülmények között hasonló eredménnyel dolgozik, hiszen ez függ a kitűzött feladatoktól, valamint a hallgatók és oktatók által adott megoldásoktól. Az eMax rendszer jelen állapotában, csak a matematika feladatok egy meghatározott csoportjára működik, ami felhasználhatóságát erősen korlátozza, de kiindulási alapot jelenthet egy általánosabban használható rendszer létrehozásához. A legfontosabb fejlesztési lehetőségek a következők:

- A felhasználható feladatok körének bővítése
- Új beépített függvények implementálása
- A felhasználói felületeken használt képletszerkesztő felkészítése az új feladatokhoz és függvényekhez
- Az értékelő algoritmusok fejlesztése
- Összekapcsolás egy alkalmas számítógép-algebrai rendszerrel

4 Justification of choice of subject

In the course of teaching Mathematics, besides transmission of knowledge, there is an important role of developing the way of thinking, the abilities and skills related to the subject.

In the issue of National Research Council (Washington) these skills are grouped as follows: [9]:

- Conceptual understanding
  The integrated and functional comprehension of mathematical ideas, which enable for students to learn new ideas by connecting them to known concepts. The conceptual understanding conduces to the long-term remembrance of knowledge and helps to avoid the usual mistakes.
- Procedural fluency
  Ability which makes it possible to accomplish procedures flexibly, efficiently, accurately and correctly.
- Strategic competence
  Abiliy of formalizing, representation and solving problems.
- Adaptive reasoning
  Ability of logical thinking, analysing, explanation and decision.
- Productive disposition
  The student thinks of Mathematics as a reasonable, useful and valuable subject, believes in diligence and in his own abilities.

I experienced during my tutorial work at Óbuda University and its predecessor institutes that the majority of computer science and engineering students are not prepared to study higher Mathematics as regards either knowledge or the skills above [2]. Although some of them make up for their deficiencies, most of the students are unable to keep up with the pace of the curriculum because of the short time available.

Such problems are not unique, several authors deal with analysing the reasons [10] [8]. In order to improve the efficiency of teaching, many of them make an attempt at computer aided teaching of Mathematics, and computer-algebra systems (CAS) are especially popular [11] [12] [3]. One part of my research is the application of such a system in the subject of Discrete Mathematics and Linear Algebra (DMLA). My choice came upon this subject because its computer-aided teaching is not as popular as in case of e.g. Calculus or Mathematical Statistics.

The other part of my research is related to the development of the mathematical module of eMax exam system. We started to develop this system in 2005 in the framework of a project sponsored by IBM. We aimed at creating such a knowledge evaluation system which offers new prospects compared to the known, already existing systems.

A part of my work was the selection of problems used in the material taught and their classification according to suitable aspects, which played an essential role both in computer-aided teaching and the development of the exam system.

5 Application of Sage computer-algebra system in teaching Discrete Mathematics and Linear Algebra

5.1 Review of the experiment

I started my experiments in school-year 2009/10, with two study groups each semester, in the course of which I have been teaching Mathematics for the two groups in a computer laboratory. At these courses students have to solve mathematical problems with the help of the Sage computer algebra system.

Sage system was created in 2005 and it was made especially for tutorial purposes. As it consists of several earlier CAS systems, it gives assistance to the study of many subjects. This versatility is one of the reasons why my choice came upon this system. Another important reason is that the system is free of charge, which makes it available for students to use it at home while learning and preparing their homework.

The experiment affects a relatively small part of the students out of the 10-15 study groups. During the first year I used the system at DMLA seminars for two-two groups, later it was an optional course. [9] This also affected two groups each semester and the elaborated material was still related to the subject DMLA.

During the elaboration of the material, there was a need of a teacher's explanation at the beginning of the lessons, which contained partly the revision of the main concepts, theorems of the subject, and partly a review of the important functions of the Sage system which could be used in the actual topic. The explanation usually consisted of the presentation of sample problems. The further part of the lesson was spent by the students' own work, and they were also allowed to work in pairs or in small groups.

Students were given homework at each lesson, which was to be submitted at the beginning of the next seminar or to be sent in electronic form. During the term they had to write two tests at the computer, the results of these, the points given for the homework and for their seminar work were totalized to determine their final mark.

A major part of the problems of DMLA seminars can be solved by one function call. I used some of these at the experimental courses to present the syntax of the program, but I avoided the use of them in the assigned tasks, because they do not develop mathematical thinking. I could not use those problems either, which are not supported by the system. [10] As a result of the above, while setting up the list of questions I made and searched several new problems.

I differentiated the following types of the set problems, classified from the point of view of didactics: [11]

---

[9] Solution of Mathematical Problems by Computer (MP)

[10] Such types of questions were proofs.

[11] In the course of tutorial work we often use further types of problems, such as *memory tasks*, *identification* [17], however the solution of these does not require CAS, or their solution becomes uninteresting, thus they do not further the development of students' mathematical skills.

1. Direct problem
   A problem to be solved by a given (known) method.
2. Realisation problem
   Giving examples and counter-examples for a known concept, producing an object with a given property.
3. Combined problem
   Choosing the suitable method for a given problem, producing the solution by the application of the method.
4. Searching for connection
   A part of the task is formulating a statement, then solving it.
5. Problem solving
   An unusual combination of the learnt knowledge is needed for the solution [1].

In the course of checking the solutions of the problems I examined the results reached by the students in the experimental courses compared to the students of the traditional courses, and the differences of the efficiency of problems of different types.

I set up a questionnaire for the students of the experimental course, which they could fill in voluntarily. Processing of this gave information about students' view on computerized and traditional study methods and tools.

5.2 Theses on computer algebra system aided teaching of subject DMLA

1. Using CAS, students reach better results in solving problems of DMLA than in traditional written exams.
2. Using the system widens the range of problems and themes to be elaborated.
3. Using computers promotes students' own work at seminars and while doing their homework.
4. Using the system, students are more willing to deal with mathematical problems than in case of traditional form of lessons.

5. The difficulty of the set problems is in connection with the didactic aims of the problems.
6. Allowing the use of CAS significantly changes the order of difficulty of problems.
7. Among objective tools CAS renders a superior help to students in learning Mathematics, but personal help, especially the role of the teacher is still the most important.

5.3 Research executed, and relating results

1. thesis:

For the proof of this I made two kinds of research. In the course of the first I compared the traditional written exam achievement of the experimental and the control groups. I repeated this comparison from the first semester of school year 2009/10 in each term, with similar results in every case. The average result of the experimental groups was higher in each case, but the difference was not significant.

As an example I show the results of the second semester of school year 2010/11. In this term there was a total of 42 students in the experimental courses. Out of these students there were 30 who studied the subject Discrete Mathematics and Linear Algebra II in parallel. [12] Their results were compared with the results of the same subject of a control group of 30 students.

The frequency of the reached marks is shown in the first two rows of Table 1. The average of the experimental group was 2.47, while that of the control group was 2.37. The difference is 0.1, the result of the two-sample t-test at 5% significance level is $t = 0.442$.

In the course of the other research I compared the results of the experimental group at the computerised test with their results at the written DMLA exam. The results in this case were also similar in each term, as an example I show the results of the same semester. The same 30 students reached an average of 3.23 at the computerised test, the frequency of the marks is shown in the third row of Table 1. I used

[12] The others had already completed this course.

Table 1: Written and computerised test results

form of test	group	number of marks 1	2	3	4	5	average
written	control	2	19	6	2	1	2.37
written	experimental	2	17	7	3	1	2.47
computerised	experimental	0	10	8	9	3	3.23

t-test again to compare the results, the value of which is $t = 3.3$, thus the difference is significant in favour of the computerised test.

2. thesis:

Using CAS makes it possible to analyse such problems which need a lot of time and calculation, thus these cannot be dealt with at the traditional lessons. In the experimental group I presented such problems, examples can be found in the dissertation and in [15] as well.

3. thesis:

Students needed teacher's assistance at the seminars, but in the major part of the time they worked on their own, and also in smaller groups or pairs, helping each other. They worked continuously, filling their time available, and when it was necessary they used the program's 'help' function or information found on the internet.

4. thesis:

Among the 94 students who filled in the questionnaire there were only three who preferred the traditional form of teaching, the others were more inclined to solve mathematical problems with CAS support.

5. thesis:

For the verification of this thesis I assessed the submitted solutions by types. I used the solutions of the 53 problems that can be found in the appendix of the dissertation, however, as these problems consist of partial tasks of different types, assessing them separately I worked with a total of 98 problems. Instead of the expected 2450 solutions the 25 students submitted only 1881. Because of the different scores, during the comparison I expressed the results in percentage. The numbers and results of the different types of problems can be seen in Table 2.

Table 2: Results of solutions by type

type of problem	**correct**	**faulty not complete**	**missing**	**result**
direct problem	536	158	156	83.6%
realisation problem	127	34	39	84.8%
combined task	363	149	188	78%
searching for connection	104	97	49	77.8%
problem solving	140	173	137	48.4%
total	1270	511	569	75%

It can be seen that results are the best in case of direct problems and realisation problems, these are almost the same. Results are slightly weaker in case of combined tasks and connection searching, and considerably weaker in case of problem solving.

Although the three groups, in which the difficulties of the problems are different, are noticeably separable, I verified that the difference is significant with a two-sample t-test.[13] While calculating, I considered the scores of the non-solved problems as 0. In case of direct and realisation problems $t = 0.126$, in case of combined problems and searching for connection $t = 0.566$, thus here there is no significant difference at significance-level $p = 0.05$.

[13] Previously I showed with an F-test that the groups have the same standard deviation.

Comparing direct- and realisation problems with combined- and connection searching problems $t = 2.3$, thus the difference is significant here, and the situation is the same in case of problem solving and searching for connection, where $t = 3.45$.

Although the degree of difficulty of combined- and connection searching problems is the same according to the average results and the t-test, if problems of connection searching are investigated thoroughly, it can be noticed that each of these consists of two or more parts. Out of these only the last part is pure connection searching, they are always preceded by factual calculation problems, the results of which should be observed to formulate a conjecture, and also to prove it in some of the cases. As the calculation part of the problems is simple, the majority of the students succeeded to get partial scores, thus the relatively low rate of 0 scores is understandable. The fact, that finding a connection presents difficulties to many of the students, is confirmed by the data, that in 69 out of the 97 faulty or not complete solutions, the calculation part was correct, but students could not formulate the conjecture.

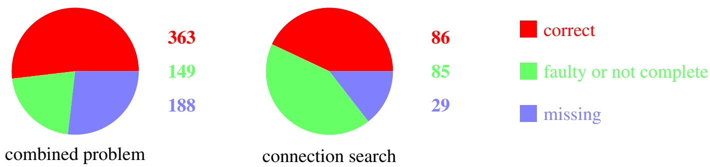


Figure 1: Solutions of combined- and connection searching problems

6. thesis:

Problems needing circumstantial calculation and systematization of many data can be solved more quickly and more simply by using the possibilities of CAS [15][14].

7. thesis:

I investigated those answers given to the questions of the questionnaire, which reveal how much the applied tools and services help students' studies. Among these were the following:

- How did Sage system help understanding the material?[14]
- How much help were the followings during learning Discrete Mathematics?
  - manual;
  - collection of exercises;
  - lecture;
  - teacher's personal help at seminars;
  - material found on the internet;
  - base knowledge acquired in secondary school.

Table 3: Effects of teacher's and objective help

	number of marks					**Did not answer**	**average**
	1	**2**	**3**	**4**	**5**		
manual	37	13	19	13	6	6	2.30
collection of exercises	30	16	21	14	8	5	2.48
base knowledge	15	21	29	12	14	3	2.88
internet	7	18	34	17	15	3	3.16
Sage	2	10	32	32	15	3	3.53
lecture	4	5	27	35	20	3	3.68
personal	0	0	5	12	74	3	4.76

According to Table 3. it can be seen, that the questionnaire was filled in by 94 students, out of these three did not answer the first question, the majority of the students considered the helping effect of Sage as mediocre or good. The average is 3.53. The result was considerably weaker in connection with the manual or the collection of exercises, and the help offered by the internet was slightly lower. Higher average

[14]Mark in a 1-5 scale, where 1 means 'it did not help at all', 5 means 'it proved to be an efficient help'.

was given to the lecture and students considered teacher's personal help as superiorly important. However, as there is less possibility of teacher's help at traditional seminars, the latter result emphasises the positive effect of computer aided seminars.

6 eMax exam system

6.1 Introduction

The two important criteria of computer assessment systems are the intelligence of evaluation and the types of problems they support. According to the intelligence of evaluation, systems can be classified in three groups. [4]:

- manual evaluation:
  Students get and solve the problems on computers, the evaluation of the solutions is done manually, by human resources.
- quasi-automatic evaluation:
  The system is able to evaluate the major part of the solutions automatically, still a smaller part of them are evaluated by the teacher.
- automatic evaluation:
  The system is able to evaluate all answers automatically.

The supported problems are often classified by the way users enter the answers. According to this, passive and active types of problems are distinguished [6].

- passive problems:
  The answer has to be chosen from a set of answers or a pixel has to be marked.
- active problems:
  The answer has to be formulated by the student.

The major part of the assessment systems assess only passive questions, because in their case evaluation is easily realizable.

The eMax system, which was set up at John von Neumann Faculty of Informatics of Óbuda University, is able to evaluate quasi-automatically in case of two types of problems:

- short textual answer
- special kinds of mathematical problems

In the followings only the mathematical module of eMax system will be discussed, as I took part in its accomplishment. The mathematical module is the work of a group of three persons, therefore I highlight those elements, which were my base ideas:

- the form applied during entering the solutions,
- building the operation trees together,
- test algorithm.

6.2 Aims connected to the mathematical module of the assessment program

6.2.1 Hypothesis formulated in the phase of planning

In the scope of suitable types of mathematical problems, such an assessment system has to be realised, which ensures a quasi-automatic evaluation in case of active questions, and meets the following requirements:

- The examinee does not give only the final result but the course of the solution as well, so that not only the final result, but also the way to it can be checked.
- The system accepts various ways of solutions.
- In case of a given solution method, the examinee can write down his solution in several ways.
- In case of a valuable partial solution, the system gives a proportional partial score.

6.2.2 Other requirements related to the system

1. Well-arranged user interface which ensures a simple and comfortable handling.
2. Quick evaluation progress.
3. The proportion of solutions evaluated manually should be low, it should not possibly exceed 5% of all the solutions.
4. Scores given to problems evaluated by the system should not differ more than 10% from scores given by manual evaluation of the teacher.
5. The system should give exact, detailed information about the results of students, and it should let students have a look at the mistakes they made.
6. The system should give well-arranged, comprehensive information about global results of the examination as well as about results of the individual questions.

6.3 Mathematical problems supported by eMax

György Pólya distinguishes two main groups of mathematical problems: problems of proof and problems of determination. [13]. In case of proofs the task is to verify – or contravene – a statement, while in case of determination problems some mathematical object has to be determined from some data. This object can be a number, some kind of value, vector, matrix, geometrical figure etc. The mathematical module of eMax evaluates only determination problems, in so far as both the initial data and the final result are numbers, vectors, matrices, or the result can also be the equation of a plane or the equations of a straight line.

According to the above requirements the range of usable problems seems to be quite narrow, that is why we collected and classified the Linear Algebra test exercises which were set for computer science and engineering students between 2000-2008. A part of the exercises aimed at checking the knowledge of theorems, definitions. These could be classified into four groups, but still they were only 21% of all the questions. Each of the remaining questions were categorized in the group of determination problems, these were the great majority – 79% – of the questions. A detailed information is shown in Figure 2.

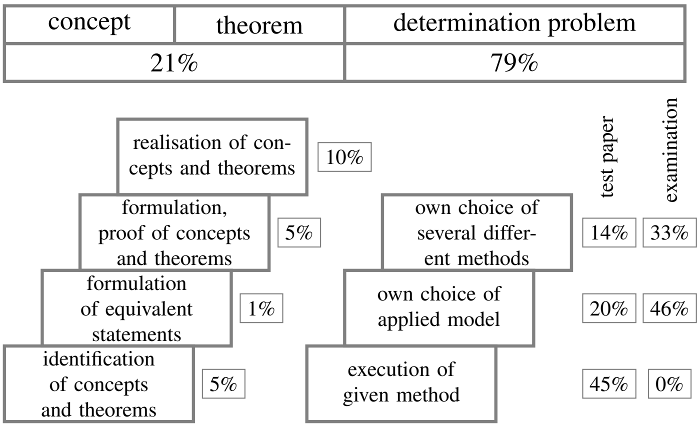


Figure 2: Types of problems in Linear Algebra tests and exams

6.4 User interfaces

The mathematical module of eMax provides a student interface to enter the solutions of the problems with the help of an equation editor. The program is able to assess different kinds of solutions and there can be variance in the description of a given solution. Entering the data is done by rows. Rows are mainly in the following form:

```
<partial result> = <symbolic description> = <numerical value>
```

It is important that during the symbolic description, the examinee can refer only to data that were previously defined or given as the input data of the problem.

With the help of the tutorial interface new problems can be taken into the system, with different kinds of sample solutions, scoring and test cases. The teacher can use the problems already fixed to set the test exercises. It is also the tutorial interface where the results of students or exercises, as well as statistical data such as mean or standard deviation can be viewed. The results of the test can be illustrated graphically in diagrams too.

6.5 Algorithms of evaluation

6.5.1 Solution trees

The system creates operation trees from the rows of students' and teacher's solutions, then by building these together[7] it gets to the solution tree. The goal of building together is the unification of solutions which are differently described, but based on the same principle. The evaluation algorithms compare student's solution tree with the suitable sample solution.

The evaluation algorithms follow each other in a determined order. If the solution is appreciable by one of them, the system scores the solution, otherwise it makes a trial of the next algorithm. If none of the algorithms available is able to evaluate the solution, the system sends it to manual evaluation.

6.5.2 Test algorithm

The aim of the test algorithm is to check the theoretical correctness of the solution and to reveal calculation mistakes. Theoretical correctness means that the searched value (object) is reached by starting off from the initial data given by the problem, using mathematical equalities, in such a way that data which were not defined earlier are not used. The possible calculation mistakes do not affect theoretical correctness [5]. Its operation is illustrated in Figure 3.

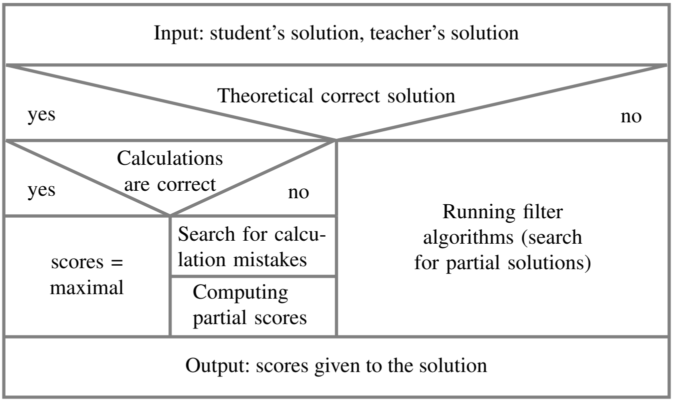


Figure 3: Test algorithm

6.5.3 Filter algorithms

Even if the student's solution does not satisfy the requirements concerning theoretical correctness specified above, there still can be appreciable partial solutions. Filter algorithms find and evaluate these partial solutions. [15] There can be many kinds of these algorithms, four of them succeeded to be realised in eMax system. Partial solutions corresponding to the certain algorithms are the following:

- RHMOA[16]

  This is in fact a theoretically correct solution, apart from the fact that the examinee does not use the notation of the final solution in the required way. This most often happens beacause the student does not pay attention to the difference between small- and capital letters. Such solutions can be assessed relatively easily – after building the operation tree, the notation is altered to the no-

[15]They filter those answers which contain partial solutions meeting certain criteria.
[16]Partial Student's Solution type A

tation of the result in the root of the tree, and the test algorithm is applied to the modified tree.

- RHMOB

  In the case of this solution the student also works right, apart from the fact that he does not trace the question back to the data, but starts from some correct value calculated in his head or in paper. An example for this case is the third solution given to the sample problem.

- RHMOC

  The algorithm looks for such a partial solution which builds from bottom to top, a certain partial solution is deduced correctly from the data, the solution of the problem can be continued using this partial solution.

- RHMOD

  This is used to evaluate such a partial solution, which builds from top to bottom, and does not reach the initial data.

It can be noticed that RHMOA is a special case of solution type RHMOC and similarly RHMOB is a special case of RHMOD.

6.6 Results

The operation of eMax system was tested by an examination containing six questions in January 2008. 25 students took part at the exam, the problems were chosen from the theme of vector- and matrix algebra. Students submitted 133 solutions altogether. At first we investigated how the system recognised certain types of solutions, therefore teachers examined all solutions and classified them into one of the types examined by eMax, if it was possible. Table 4. shows how many times the system recognised the certain solutions.

Teachers could identify 118 solutions as one of the above types. eMax system recognised the type of the solution in 104 cases. It can be seen that recognising type RHMOB is the most problematic, as this succeeded only in two-third of the cases.

Table 4: Frequency of recognised solution types

Type	teacher's classification	recognised by eMax
Correct solution	77	68
RHMOA	13	13
RHMOB	12	8
RHMOC	8	7
RHMOD	8	8
other	15	–

The most important question about the operation of the system is how correct its evaluation is. To decide this question, students' solutions were evaluated manually too, and the result of this was compared to that of automatic assessment. The latter was considered correct if the difference between the two scores was at most 10%. (Eg. in case of a 10-point question at most one point difference could be accepted.) The result is shown in Table 5. According to the comparison, in 87% of the solutions the system's assessment was correct. The adequacy of evaluation differed depending on the problem, in cases of questions 5. and 6. only 80% of the solutions were given correct scores by the system. The system sent 5% to manual evaluation, and assessed 7% incorrectly. The incorrect evaluation resulted partly from algorithmic faults, which could be improved by developing filter algorithms, partly from the student's misuse of the answer editor of eMax. Mistakes rising from misuse can be reduced by practice, and could be further reduced by the improvement of syntactical check.

It can be seen from the results, that the assumed hypothesis could be verified in a group of problems of vector geometry and matrix algebra, and the other requirements could also be satisfied. Naturally it cannot be stated that the system works with similar results in every case and under all circumstances, as this depends on the problems

Table 5: Comparison of teacher's and eMax assessment

question	correct scores	manual assessment	algorithmic problem	misuse
1.	96%	0%	0%	4%
2.	84%	4%	8%	4%
3.	88%	8%	0%	4%
4.	96%	0%	4%	0%
5.	80%	8%	12%	0%
6.	80%	12%	8%	0%
total	**88%**	**5%**	**5%**	**2%**

chosen and the solutions given by students and teachers. In its present state, system eMax works only for a specific group of mathematical problems, which notably restricts its applicability, but it can be a starting point for creating a system that can be used more generally. The most important development possibilities are the following:

- widening the range of usable problems;
- implementing new built-in functions;
- preparing the user interface equation editor for the new tasks and functions;
- developing the evaluation algorithms;
- connecting eMax to a suitable computer-algebra system.

Irodalomjegyzék

[1] A. Ambrus, *Bevezetés a matematika-didaktikába*, ELTE Eötvös Kiadó, 2004.

[2] J. Csicsek, I. Vajda, A matematika tantárgycsoport számonkéréseiben szereplő feladatok tipizálása a felzárkóztatást igénylő középiskolai témakörök vonatkozásában, *MAFIOK*, 2006.

[3] D Guin, L. Trouche, Mastering by the teacher of the instrumental genesis in CAS environments: Necessity of instrumental orchestrations, *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 34, no. 5, (2002), 204–211.

[4] A. György, V. Kos, B. Schmuck, D. Sima, S. Szöllősi, I. Vajda, Intelligens vizsgakiértékelő rendszer (előkészítő vizsgálódások), *IX. Országos Neumann Kongresszus Győr, Széchenyi Egyetem*, 2006.

[5] A. György, S. Szénási, I. Vajda, Szemi-automatikus tudáskiértékelés a vektoralgebrai feladatok példáján. *Informatika a felsőoktatásban*, 2008.

[6] A. György, I. Vajda, Elektronikus vizsgáztatás matematikából, *Matematika-, Fizika és Számítástechnika Oktatók XXX. Konferenciája*, 2006.

[7] A. György, I. Vajda, The mathematics module of the eMax system, *2-nd European Computing Conference (ECC'08)*, 2008.

[8] L. S. Hagedorn, M. V. F. Siadat, S. Vogel, A. Nora, E. T. Pascarella, SUCCESS IN COLLEGE MATHEMATICS: Comparisons Between Remedial and Nonremedial First-Year College Students, *Research in Higher Education*, 40, no. 3, (1999), 261–284.

[9] J. Kilpatrick, J. Swafford, B Findell, *Adding it up: Helping children learn mathematics.* National Academy Press, 2001.

[10] A. T. Morgan, A study of the difficulties experienced with mathematics by engineering students in higher education, *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 21, no. 6, (1990), 975–988.

[11] K. A. Nabb, CAS as a restructing tool in mathematics education. *Proceedings of the* 22^{nd} *International Conference on Technology in Collegiate Mathematics*, 2010.

[12] R. Pierce, K. Stacey, Observations on students' responses to learning in a CAS environment, *Mathematics Education Research Journal*, 13, no. 1, (2001), 28–46.

[13] G. Pólya, *A problémamegoldás iskolája*, Tankönyvkiadó, Budapest, 1971.

[14] I. Vajda, A lineáris algebrai ismeretek számítógéppel támogatott oktatása, *Informatika a felsőoktatásban*, 2011.

[15] I. Vajda, Learning and teaching combinatorics with Sage, *Teaching Mathematics and Computer Science*, 2012.

[16] I. Vajda, Problems of computer-aided assessment of mathematical knowledge, *Teaching Mathematics and Computer Science*, 2012.

[17] I. Vajda, A. György, Intelligens tudásellenőrző kérdéssorok automatikus generálása, *Informatika a Felsőoktatásban*, 2005.

A szerző publikációi hivatkozásokkal

Referált folyóiratban megjelent cikkek

I. Vajda, Learning and teaching combinatorics with Sage, *Teaching Mathematics and Computer Science*, ISSN: 1589-7389, (közlésre elfogadva)

I. Vajda, Problems of computer-aided assessment of mathematical knowledge, *Teaching Mathematics and Computer Science*, ISSN: 1589-7389, (közlésre elfogadva)

Referált nemzetközi konferencia kiadványban megjelent cikkek

A. György, I. Vajda, Intelligent mathematics assessment in eMax, *IEEE Africon*, ISBN:0-7803-8606-X, 2007.

- D. Sima, B. Schmuck, S. Szöllősi, Intelligent short text assessment in eMax, *IEEE Africon*, 2007.
- A. Ibrahim, B. Z. Abu, O. N. Izzah, IR-based framework of free-response mathematics assessment marking engine, *Engineering Education (ICEED)*, 2009.
- G. C. Pajor, D. Radosav, Semiautomatic evaluation using educational software eMax, *Intelligent Systems and Informatics (SISY)*, 2010.

I. Vajda, A. György, The mathematics module of the eMax system, *2-nd European Computing Conference (ECC'08)*, ISBN:978-960-474-002-4, ISSN: 1790-5109, 2008.

Lektorált folyóiratban megjelent cikkek

I. Vajda, A. György, Electronic assessment in mathematics, *Pollack Periodica Suppl.*, ISBN-10: 963-7298-12-6, ISBN-13: 978-963-7298-12-7, DOI: 10.1556, 19, no. 2, (2007), 203–214.

I. Vajda, Computer aided teaching of discrete mathematics, *Kitekintés – Perspective Különszám*, ISSN: 1454-9921, (2011), 165–173.

I. Vajda, Számítógép algebrai rendszerek a matematika oktatásában, *Economica*, ISSN: 1585-6216, (2011), 82–89.

Konferencia kiadványban megjelent cikkek

Á. Cserjés, P. Kárász, I. Vajda, Távtanulást segítő multimédiás anyagok a BMF-en, *Informatika a Felsőoktatásban*, ISBN: 963 472 691 7, 2002.

A. György, P. Kárász, Á. Záborszky, Sz. Sergyán, I. Vajda, Gondolatok egy új diszkrét matematikai feladatgyűjtemény tükrében, *Főiskolák Matematika, Fizika, Számítástechnika Oktatóinak XXVII. Országos Konferenciája*, ISBN: 963 86320 9 7, 2003.

A György, P Kárász, I. Vajda, Miért készítjük ábráinkat a MetaPost rendszer segítségével?, *Főiskolák Matematika, Fizika, Számítástechnika Oktatóinak XXVII. Országos Konferenciája*, ISBN: 963 86320 9 7, 2003.

A. György, I. Vajda, Intelligens tudásellenőrző kérdéssorok automatikus generálása, *Informatika a Felsőoktatásban*, ISBN: 963 472 909 6, 2005.

I. Vajda, A determináns fogalmának egy lehetséges bevezetése, *Főiskolák Matematika, Fizika, Számítástechnika Oktatóinak XXIX. Országos Konferenciája*, ISBN: 963 7356 088, 2005.

Á. Cserjés, J. Csicsek, I. Vajda, Matematika távtanulással – eredmények, elemzések, nehézségek II, *Főiskolák Matematika, Fizika, Számítástechnika Oktatóinak XXIX. Országos Konferenciája*, ISBN: 963 7356 088, 2005.

A. György, V. Kos, B. Schmuck, D. Sima, S. Szöllősi, I. Vajda, Intelligens vizsgakiértékelő rendszer – Előkészítő vizsgálódások, *IX. Országos Neumann Kongresszus*, (2006), 1–7.

A. György, I. Vajda, Elektronikus vizsgáztatás matematikából, *Matematika, Fizika és Számítástechnika Oktatók XXX. Konferenciája*, ISBN-10: 963-7298-12-6, ISBN-13: 978-963-7298-12-7, 2006.

J. Csicsek, I. Vajda, A matematika tantárgycsoport számonkéréseiben szereplő feladatok tipizálása a felzárkóztatást igénylő középiskolai témakörök vonatkozásában, *Matematika, Fizika és Számítástechnika Oktatók XXX. Konferenciája*, ISBN-10: 963-7298-12-6, ISBN-13: 978-963-7298-12-7, 2006.

A. György, S. Szénási, I. Vajda, Szemi-automatikus tudáskiértékelés a vektoralgebrai feladatok példáján, *Informatika a felsőoktatásban*, ISBN:978-963-473-129-0, 2008.

I. Vajda, A lineáris algebrai ismeretek számítógéppel támogatott oktatása, *Informatika a felsőoktatásban*, ISBN: 978-963-473-461-1, (2011) 940-946.

Jegyzet

A. György, P. Kárász, Sz. Sergyán, I. Vajda, Á. Záborszky, *Diszkrét matematika példatár*, BMF-NIK-5003, Budapest, ISBN: 963-9132-96-9, 2003.

Konferencia előadások

Á. Cserjés, P. Kárász, I. Vajda, Matematika távtanulással – eredmények, elemzések, nehézségek, *Főiskolák Matematika, Fizika, Számítástechnika Oktatóinak XXVI. Országos Konferenciája*, ISBN: 963 472 691 7, 2002.

Á. Cserjés, P. Kárász, I. Vajda, Távtanulást segítő matematikai multimédiás anyagok a BMF-en, *Főiskolák Matematika, Fizika, Számítástechnika Oktatóinak XXV. Országos Konferenciája*, 2001.