DE TTK

1949

Középértékeket tartalmazó függvényegyenletek

Doktori (PhD) értekezés

A szerző neve: Vinczéné Varga Adrienn
A témavezető neve: Dr. Maksa Gyula

Debreceni Egyetem
Természettudományi Doktori Tanács
Matematika- és Számítástudományok Doktori Iskola
Debrecen, 2012

Ezen értekezést a Debreceni Egyetem Természettudományi Doktori Tanács Matematika- és Számítástudományok Doktori Iskola Matematikai analízis, függvényegyenletek és egyenlőtlenségek programja keretében készítettem a Debreceni Egyetem természettudományi doktori (PhD) fokozatának elnyerése céljából.

Debrecen, 2012. június 1.

....

a jelölt aláírása

Tanúsítom, hogy Vinczéné Varga Adrienn doktorjelölt 2006-2009 között a fent megnevezett Doktori Iskola Matematikai analízis, függvényegyenletek és egyenlőtlenségek programjának keretében irányításommal végezte munkáját. Az értekezésben foglalt eredményekhez a jelölt önálló alkotó tevékenységével meghatározóan hozzájárult. Az értekezés elfogadását javasolom.

Debrecen, 2012. június 1.

....

a témavezető aláírása

KÖZÉPÉRTÉKEKET TARTALMAZÓ FÜGGVÉNYEGYENLETEK

Értekezés a doktori (PhD) fokozat megszerzése érdekében
a matematika tudományágban.
Írta: Vinczéné Varga Adrienn okleveles matematika szakos tanár.
Készült a Debreceni Egyetem Matematika- és Számítástudományok
doktori iskolája (Matematikai analízis, függvényegyenletek és
egyenlőtlenségek programja) keretében.
Témavezető: Dr. Maksa Gyula

A doktori szigorlati bizottság:

elnök: Dr. ....

tagok: Dr. ....

Dr. ....

A doktori szigorlat időpontja: 20... ....

Az értekezés bírálói:

Dr. ....

Dr. ....

A bírálóbizottság:

elnök: Dr. ....

tagok: Dr. ....

Dr. ....

Dr. ....

Dr. ....

Az értekezés védésének időpontja: 20... ....

Köszönetnyilvánítás

Köszönetet mondok Dr. Maksa Gyula egyetemi tanárnak témavezetői munkájáért.

Az értekezés elkészítését a TÁMOP-4.2.2/B-10/1-2010-0024 számú projekt támogatta. A projekt az Európai Unió támogatásával, az Európai Szociális Alap társfinanszírozásával valósult meg.

Tartalomjegyzék

Bevezetés

A disszertáció túlnyomó részében súlyozott aritmetikai közepeket tartalmazó függvényegyenletekről lesz szó, melyek lineáris függvényegyenletek abban az értelemben, hogy a megoldáshalmaz zárt a szokásos pontonkénti elv alapján értelmezett összeadásra és skalárral való szorzásra nézve. Ezeknek a függvényegyenleteknek a vizsgálatát a [6] dolgozatban Daróczy Zoltán, Maksa Gyula és Páles Zsolt által felvetett ekvivalenciaprobléma motiválja. Megjegyezzük, hogy ez a probléma speciális esetben és implicit módon már korábban megjelent ([9]). Nevezetesen, milyen feltételek mellett igaz, hogy az

I. $f\left(M_1(x,y)\right) + f\left(M_2(x,y)\right) = f(x) + f(y) \quad (x, y \in I)$ és a

II. $2f\left(M_1 \otimes M_2(x,y)\right) = f(x) + f(y) \quad (x, y \in I)$

függvényegyenletek megoldáshalmaza egybeesik? Egyenleteinkben $I \subset \mathbb{R}$ nemüres, nyílt valós intervallum, M_1 és M_2 kétváltozós, szigorú közepek, $M_1 \otimes M_2$ pedig a Gauss kompozíciót jelöli; $M_i : I^2 \to \mathbb{R}$ $(i = 1, 2)$ folytonos és

$$\min\{x, y\} < M_i(x, y) < \max\{x, y\}; \quad (x, y \in I, x \neq y)$$

(i=1,2). Közepek Gauss kompozíciójának általános definíciója (és az elnevezés) először Daróczy és Páles [10] cikkében szerepel. A témához kapcsolódó vizsgálatokat folytatott Borwein–Borwein [4], Gauss [12], Almkvist–Berndt [2], Carlson [5]. Alapvető eredmény az

$$M_1 \otimes M_2(M_1(x, y), M_2(x, y)) = M_1 \otimes M_2(x, y)$$

úgynevezett invarianciaegyenlet, mely mutatja, hogy a második egyenlet minden megoldása megoldása az első egyenletnek is. Az is igaz továbbá, hogy a két egyenlet folytonos megoldásai ugyanazok a függvények (ld. [6]). A nem triviális probléma tehát az (I.) egyenlet megoldásainak a meghatározása.

A disszertáció első fejezetében az (I.) függvényegyenletet vizsgáljuk abban a speciális esetben, amikor M_1 és M_2 rendre a szokásos aritmetikai és geometriai közép. Megmutatjuk, hogy ebben az esetben az (I.) függvényegyenletnek csak a konstans függvények a megoldásai. (Ebből azonnal következik, hogy az (I) és (II.) függvényegyenletek ekvivalensek.) Az aritmetikai és geometriai közepek Gauss kompozíciója a jól ismert aritmetikai-geometriai közép, ami Gausstól származik [12]. A korábbi eredményekhez képest lényeges különbség az I intervallum szerepeltetése. Az $I = \mathbb{R}_+$ esetben ($\mathbb{R}_+$ a pozitív valós számok halmaza) ugyanis Daróczy–Maksa–Páles [6] már igazolták az ekvivalenciát. A bizonyítás azonban, mely Maksa Gyula egy [20]-ban elért eredményére támaszkodik, nem működik, ha I nem a teljes pozitív félegyenes, hanem csak egy valódi részintervallum. Egy fontos következménye az ekvivalenciának az, hogy az aritmetikai és a geometriai közép Gauss kompozíciója nem kváziaritmetikai közép $\mathbb{R}_+$ egyetlen nyílt részintervallumán sem annak ellenére, hogy mind az aritmetikai, mind pedig a geometriai közép kváziaritmetikai.

Kérdés tehát, hogy mely kváziaritmetikai közepek Gauss kompozíciója kváziaritmatikai. Annál is inkább, mert a probléma kiindulópontját jelentő [6] dolgozatban a függvényegyenletek ekvivalenciájának elegendő feltételeként szerepel, hogy az M_1, M_2 és az $M_3 := M_1 \otimes M_2$ közepek mindegyike kváziaritmetikai közép. A következő levezetésből kiderül, hogy lényegében a Matkowski-Sutô probléma [10] átfogalmazásáról van szó. A probléma teljes megoldása Páles Zsolt és Daróczy Zoltán érdeme [10]. Tegyük fel tehát, hogy az M_1, M_2 és az $M_3 := M_1 \otimes M_2$ közepek mindegyike kváziaritmetikai, azaz előállnak

$M_1(x,y)=\varphi_1^{-1}\Big(\frac{\varphi_1(x)+\varphi_1(y)}{2}\Big)$, $M_2(x,y)=\varphi_2^{-1}\Big(\frac{\varphi_2(x)+\varphi_2(y)}{2}\Big)$ és

$$M_3(x,y)=\varphi^{-1}\Big(\frac{\varphi(x)+\varphi(y)}{2}\Big)$$

alakban, ahol φ_i, φ folytonos szigorúan monoton függvények az I intervallumon (i=1,2). Az invariancia-egyenletet felhasználva

$$\varphi^{-1}\left(\frac{\varphi(M_1(x,y))+\varphi(M_2(x,y))}{2}\right)=\varphi^{-1}\Big(\frac{\varphi(x)+\varphi(y)}{2}\Big),$$

ahonnan

$$\varphi(M_1(x,y))+\varphi(M_2(x,y))=\varphi(x)+\varphi(y),$$

következik. Az $x\mapsto\varphi^{-1}(x)$ és $y\mapsto\varphi^{-1}(y)$ helyettesítésekkel élve pedig

$$\varphi\Big(M_1(\varphi^{-1}(x),\varphi^{-1}(y))\Big)+\varphi\Big(M_2(\varphi^{-1}(x),\varphi^{-1}(y))\Big)=x+y,$$

ahol a bal oldalon szereplő tagok rendre

$$\varphi\Big(M_1(\varphi^{-1}(x),\varphi^{-1}(y))\Big)=\varphi\circ\varphi_1^{-1}\left(\frac{\varphi_1\circ\varphi^{-1}(x)+\varphi_1\circ\varphi^{-1}(y)}{2}\right)=$$

$$=(\varphi_1\circ\varphi^{-1})^{-1}\left(\frac{\varphi_1\circ\varphi^{-1}(x)+\varphi_1\circ\varphi^{-1}(y)}{2}\right)$$

és hasonlóan

$$\varphi\Big(M_2(\varphi^{-1}(x),\varphi^{-1}(y))\Big)=\varphi\circ\varphi_2^{-1}\left(\frac{\varphi_2\circ\varphi^{-1}(x)+\varphi_2\circ\varphi^{-1}(y)}{2}\right)=$$

$$=(\varphi_2\circ\varphi^{-1})^{-1}\left(\frac{\varphi_2\circ\varphi^{-1}(x)+\varphi_2\circ\varphi^{-1}(y)}{2}\right).$$

Az invariancia-egyenleten keresztül tehát két kváziaritmetikai közép Gauss-kompozíciója pontosan akkor kváziaritmetikai, ha létezik olyan folytonos, szigorúan monoton növekvő φ függvény, hogy

$$\psi_1^{-1}\Big(\frac{\psi_1(x)+\psi_1(y)}{2}\Big)+\psi_2^{-1}\Big(\frac{\psi_2(x)+\psi_2(y)}{2}\Big)=x+y,$$

ahol $\psi_i=\varphi_i\circ\varphi^{-1}$, $i=1,2$. Ennek a függvényegyenletnek a vizsgálata az ún. Matkowski-Sutô probléma [10].

Ha M_1 és M_2 súlyozott aritmetikai közepek, akkor [7] - ben példát találhatunk arra, hogy az ekvivalencia általában nem teljesül. Ha $\alpha\in(0,1)$ rögzített valós szám,

$$M_1(x,y):=\alpha x+(1-\alpha)y,\quad M_2(x,y):=(1-\alpha)x+\alpha y\ \ (x,y\in I)$$

akkor (I.)

$$f(\alpha x+(1-\alpha)y)+f((1-\alpha)x+\alpha y)=f(x)+f(y)\ \ (x,y\in I),$$

(II.) pedig

$$2f(\frac{x+y}{2})=f(x)+f(y)\ \ (x,y\in I)$$

alakban írható. Utóbbi a nevezetes Jensen egyenlet, melyről közismert, hogy megoldásai

$$f\colon I\to\mathbb{R},\quad f(x)=A_1(x)+A_0$$

alakúak, melyben $A_1\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ additív függvény, azaz

$$A_1(x+y)=A_1(x)+A_1(y)$$

teljesül minden $x,y\in\mathbb{R}$-re, A_0 pedig konstans.
Daróczy, Lajkó, Lovas, Maksa és Páles [7]-ben megmutatták, hogy ha α algebrai szám, úgy, hogy $\frac{1-\alpha}{\alpha}$ és $-\frac{1-\alpha}{\alpha}$ nem algebrailag konjugáltak,

azaz nincs olyan nem azonosan zérus racionális együtthatós polinom, melynek egyaránt gyökei, akkor minden megoldása (I.)- nek megoldása a Jensen egyenletnek is. Ebben az esetben tehát (I.) és (II.) ekvivalensek. Ha azonban $\frac{1-\alpha}{\alpha}$ transzcendens szám, vagy algebrai ugyan, de $\frac{1-\alpha}{\alpha}$ és $-\frac{1-\alpha}{\alpha}$ algebrailag konjugáltak, akkor van olyan $f\colon I \to \mathbb{R}$ megoldása (I.)- nek, mely $f(x) = A_2(x,x) + A_1(x) + A_0$ alakú és az $A_2\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ nem azonosan zérus szimmetrikus biadditív függvény. Így ebben az esetben (I.) és (II.) nem ekvivalensek. Ezért a súlyozott aritmetikai közepeket tartalmazó függvényegyenletek önmagukban is érdekesek, illetve további általánosítások kiindulópontjai. Ezek egyike a disszertáció további fejezeteiben vizsgált

$$\sum_{i=0}^{n} a_i f(b_i x + (1-b_i)y) = 0 \quad (x, y \in I),$$

alakú függvényegyenlet, ahol f egy pozitív hosszúságú I nyílt intervallumon értelmezett ismeretlen függvény, $a_i \in \mathbb{R}$; $0 \leq b_i \leq 1$ $(i = 0, 1, \ldots, n)$ pedig adott valós számok. Az $n = 3$, $a_0 = a_1 = 1$, $a_2 = a_3 = -1$ és $b_2 = 1$, $b_3 = 0$ korábban már vizsgált speciális esetekkel szemben, ld. [6], [7] és [21], a probléma nehézségét az adja, hogy a súlyokra vonatkozó feltétel miatt $f(x)$ általában nem fejezhető ki explicit módon a függvényegyenletből, továbbá a függvényegyenlet csak egy pozitív hosszúságú nyílt intervallumon áll fenn. Látni fogjuk, hogy ezeknek a nehézségeknek köszönhetően nincs elemi megoldási módszer, hanem egy általános algoritmus segítségével oldjuk meg az egyenletet. Ennek főbb lépései:

1. alkalmas helyettesítésekkel részintervallumokon teljesülő speciális típusú függvényegyenlet felállítása,

2. kiterjesztési tétel alkalmazása,

3. globális eredmények felhasználásával az első lépésben szereplő függvényegyenlet megoldása a részintervallumokon.

Mivel a harmadik lépésben konstruált megoldások általában függnek az I intervallum részintervallumaitól, ezért az utolsó lépés

4. az egyes részintervallumokon kapott megoldások összefűzése és a megoldás szerkezetének egységes leírása a teljes I intervallumon.

Az imént ismertetett algoritmust alkalmazzuk a

$$\sum_{i=0}^{n} a_i f(b_i x + (1-b_i)y) = 0 \quad (x, y \in I),$$

függvényegyenlet megoldására. Ennek fő eredménye szerint az f megoldás mindig

$$f(x) = A_{n-1}(\underbrace{x, \dots, x}_{(n-1)\text{-szer}}) + \dots + A_2(x, x) + A_1(x) + A_0$$

alakban reprezentálható, ahol bármely k pozitív egész szám mellett

$$A_k \colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$$

változóiban szimmetrikus, k-additív függvény, azaz

$$A_k(x_1, \dots, x_k) = A(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(k)})$$

az $1, \dots, k$ elemek bármely σ permutációja esetén és

$$A_k(x_1, \dots, x_j + y_j, \dots, x_k) =$$

$$= A_k(x_1, \dots, x_j, \dots, x_k) + A_k(x_1, \dots, y_j, \dots, x_k)$$

bármely $j = 1, \dots, k$ index esetén, továbbá A_0 valós konstans. A megoldást tehát ebben az alakban keressük, aminek a visszahelyettesítése az eredeti függvényegyenletbe most már magukra az A_k ($k =$

$1, \dots, n-1$) függvényekre ad szükséges és elegendő feltételeket. Ezeket foglaljuk össze a 2.2.1. Tételben, ami a további vizsgálatok kiindulópontja, hiszen bonyolult, általában a k értékével egyező tagszámú lineáris függvényegyenlet-rendszerekről van szó. A $k = 1$, azaz az f megoldásban szereplő additív tagra vonatkozó *elsőrendű* feltétel például

$$a_n A_1(t) + \sum_{i=1}^{n-1} a_i A_1(t\beta_i) = 0 \quad (t \in \mathbb{R}),$$

míg a biadditív A_2 tagra vonatkozó *másodrendű* feltétel pedig az

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \sum\limits_{i=1}^{n} a_i A_2(s, t\beta_i) & = & 0 \\ \sum\limits_{i=1}^{n} a_i A_2(t\beta_i, t\beta_i) & = & 0 \end{array} \right. \quad (t \in \mathbb{R}),$$

egyenletrendszer, ahol a β_i paraméterek a kiinduló függvényegyenlet b_i belső paramétereivel vannak kifejezve (és így tovább). A probléma most már úgy vethető fel, hogy a paraméterek milyen választása esetén van

- legalább elsőfokú, azaz nem azonosan zérus A_1 additív taggal rendelkező,
- maximális fokú, azaz nem azonosan zérus A_{n-1} „főmonommal" rendelkező

megoldása a függvényegyenletnek. A két probléma persze $n = 2$ esetén egybeesik, általában azonban különböző, hiszen a legalacsonyabb nem triviális fokszám (azaz $k = 1$) esetében az elsőrendű feltétel csupán egy egyenletet jelent az ismeretlen, additív A_1 függvényre, míg a maximális fokszámú tagra vonatkozó feltétel már egy $n - 1$ egyenletből álló függvényegyenlet-rendszer a k-additív, változóiban szimmetrikus

A_{n-1} függvényre. Várható tehát, hogy az utóbbi esetben szigorúbb feltételekre van szükség a kiinduló egyenlet paramétereire vonatkozóan, cserébe viszont több összefüggésből indulhatunk ki. Annál is inkább, mert ha a másodrendű feltételben szereplő egyenletrendszer első tagját alaposabban megnézzük, bármely rögzített s változó esetén egy – az elsőrendű feltételt teljesítő – additív függvényt kapunk, azaz ha van nem azonosan zérus biadditív rész a megoldásban, akkor additív részt is lehet konstruálni; ugyanez a helyzet a magasabbrendű feltételekkel – nem azonosan zérus A_k szimmetrikus k-additív megoldás létezése (alkalmasan rögzített változók mellett) maga után vonja az alacsonyabb rendű feltételeket kielégítő

$$A_1\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ A_2\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ \ldots,\ A_{k-1}\colon \mathbb{R}^{k-1} \to \mathbb{R}$$

változóikban szimmetrikus, j-additív ($j = 1, \ldots, k-1$) függvények létezését. Megfordítva azonban mindez nem áll. A diszkussziót csak egy speciális, az $n = 3$, $a_0 = a_3 = 1$, illetve $a_1 = a_2 = -1$ esetben végeztük el. Felhasználva a [7] dolgozat eredményeit szükséges és elegendő feltételt lehet adni nem azonosan zérus, biadditív (tehát maximális fokszámú) megoldás létezésére. Ezt egy konkrét példával is szemléltetjük az 2.3. alfejezetben.

A disszertáció fő vonala azonban az elsőrendű feltétel, az ún. *Daróczy-féle függvényegyenlet* vizsgálata mentén halad. Az $n = 2$ esetben ugyanis Daróczy Zoltán [8] szükséges és elegendő feltételt tudott adni az elsőrendű feltételt kielégítő nem azonosan zérus additív függvény létezésére. Daróczy tétele az

$$A(t) + \alpha A(\beta t) = 0$$

alakú egyenletben szereplő paraméterek algebrai tulajdonságai segítségével jellemzi a megoldhatóságot: pontosan akkor van nem azonosan zérus additív megoldás, ha a $-(1/\alpha)$ és a β paraméterek algebrailag konjugáltak, azaz vagy mindkettő transzcendens, vagy mindkettő algebrai, ugyanazzal a definiáló főpolinommal. A disszertáció harmadik fejezetében a Daróczy-féle tételt kiterjesztjük tetszőleges n esetére, ld. [32] és [33]. Ekkor már nem paraméterek, hanem paramétercsaládok és lineáris sokaságok algebrai tulajdonságairól lesz szó. Sikerült igazolni, ld. 3.5.4. Tétel, hogy ha az

$$A(x) + \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i A(\beta_i x) = 0 \quad (x \in \mathbb{R})$$

alakú Daróczy-féle függvényegyenletben a belső $(\beta_1, \ldots, \beta_{n-1})$ paraméterek algebrailag függetlenek, akkor a nem azonosan zérus additív megoldás létezéséhez szükséges és elegendő ha a külső $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}$ paraméterek közül legalább az egyik transzcendens szám. A 3.5.5. Tétel mutatja, hogy a paramétercsaládok szerepe felcserélhető. A bizonyítás során kulcsfontosságú szerepet kap annak az esetnek a vizsgálata, melyben vagy a külső, vagy a belső paramétercsalád tagjainak mindegyike algebrai szám. Az ilyen típusú egyenletek megoldására algoritmust adtunk a 3.4 alfejezetben, mely a Gauss-elimináció lineáris függvényegyenlet-rendszerekre vonatkozó megfelelője és alkalmas additív megoldás létezésének az eldöntésére, illetve keresésére, ld. [31]. Különösen érdekesek ezeknek az eredményeknek a negatív következményei, melyek a Daróczy-féle függvényegyenlet csak triviális (az azonosan zérus additív függvénnyel való) megoldhatóságáról szólnak, hiszen azonnal kizárják a kiinduló, súlyozott közepeket tartalmazó függvényegyenlet nem triviális megoldhatóságát. A magasabb rendű A_k monomokra ($k = 2,\ldots,, n-1$) vonatkozó egyenletrendszerek első tagjai ugyanis ($k-1$ változó rögzítése mellett) formailag az elsőrendű feltételt kielégítő additív függvényekről szólnak. Laczkovich Miklós és Székelyhidi Gábor [17] egy fontos eredménye szerint megszámlálható, diszkrét Abel csoporton spektrálanalízis érvényes, azaz a csoporton értelmezett komplex értékű függvények vektorterének minden nemtriviális, zárt és eltolásinvariáns altere tartamaz nem azonosan zérus exponenciális függvényt. Ennek az eredménynek a felhasználásával a 49. International Symposium on Functional Equations (Graz, Június 19-26, 2011) konferencián elhangzott előadásában Laczkovich Miklós szükséges és elegendő feltételt adott nem azonosan zérus additív megoldás létezésére a komplex számtest egy alkalmas tulajdonságú δ izomorfizmusának segítségével. Ez a racionális számtest belső (β_i, $i = 1, \ldots, n-1$) együtthatókkal való bővítését ágyazza be izometrikusan a komplex számtestbe úgy, hogy

$$1 + \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i \delta(\beta_i) = 0.$$

Természetesen a paramétercsaládok algebrai tulajdonságai döntik el az ilyen testizomorfizmus létezésének problémáját. A már idézett saját eredmények éppen ezt a kérdést érintik.

Megoldási módszereket mutatunk be a negyedik fejezetben. A paramétercsaládok algebrai tulajdonságainak nyelvén kifejezve a következő eseteket sikerült tisztázni:

(i) a külső, vagy a belső paramétercsalád algebrailag független (szükséges és elegendő feltétel a nem azonosan zéró megoldás létezésére: 3.5.4. és 3.5.5. tételek),

(ii) a külső, vagy a belső paramétercsalád minden tagja algebrai szám (additív megoldás keresése algoritmussal: 4. fejezet).

Az egyetlen lényeges (és tisztázatlan) további eset tehát, ha mindkét paramétercsalád algebrailag függő és mindkettőben van legalább egy transzcendens elem. A bemutatott példákra alapozva (sejtés szintjén) az látszik körvonalazódni, hogy az algebrai függőség segítségével egy tagszámcsökkentő, redukciós eljárást hajthatunk végre, mely véges sok lépésben visszavezet az algebrailag független külső, vagy belső paramétercsaládok sikeresen megoldott esetére.

1. Egy – számtani- és mértani közepet tartalmazó – függvényegyenlet

1.1. Bevezetés

Ebben a részben az

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right)+f\left(\sqrt{xy}\right)=f(x)+f(y)\quad (x,y\in I) \tag{1}$$

függvényegyenletet vizsgáljuk, ahol I a pozitív félegyenes egy nemüres nyílt intervallumát jelöli. Az $I=\mathbb{R}_+$ esetben képezhetjük az

$$a(x):=f\left(\frac{x}{2}\right),\quad b(x):=f(\sqrt{x}),\quad c(x):=f(x)\quad (x\in\mathbb{R}_+)$$

függvényeket, melyek segítségével a függvényegyenlet az

$$a(x+y)+b(x\cdot y)=c(x)+c(y)$$

alakot ölti. Maksa [20] dolgozatában ennek a függvényegyenletnek a teljes megoldása megtalálható és ennek segítségével [6]-ban a szerzők bebizonyították, hogy az (1) függvényegyenletnek csak a konstans függvények a megoldásai. A segédfüggvények (a, b, c) szerkezete mutatja, hogy a bizonyítás módszere nem alkalmazható, ha I nem az $\mathbb{R}_+$, hanem csak egy valódi részintervalluma $\mathbb{R}_+$-nak.

Az (1) függvényegyenletet a disszertáció bevezetésében ismertetett megoldási algoritmus első három lépésének alkalmazása segítségével oldjuk meg. Megmutatjuk, hogy az (1) függvényegyenletnek $I\subset\mathbb{R}_+$, $I\neq\mathbb{R}_+$ esetben is csak a konstans függvények a megoldásai. Ennek során felhasználjuk az általánosított polinomok elméletét is. Előljáróban kiemelünk két fontos következményt.

Az (1) függvényegyenlet vizsgálatát a [6] dolgozatban Daróczy Zoltán, Maksa Gyula és Páles Zsolt által felvetett ekvivalenciaprobléma motiválja. Nevezetesen, milyen feltételek mellett igaz, hogy a

I. $f\left(M_1(x,y)\right) + f\left(M_2(x,y)\right) = f(x) + f(y) \quad (x, y \in I)$ és a

II. $2f\left(M_1 \otimes M_2(x,y)\right) = f(x) + f(y) \quad (x, y \in I)$

függvényegyenletek megoldáshalmaza egybeesik? Egyenleteinkben $I \subset \mathbb{R}$ nemüres, nyílt valós intervallum, M_1 és M_2 kétváltozós, szigorú közepek, $M_1 \otimes M_2$ pedig a Gauss kompozíciót jelöli; $M_i : I^2 \to \mathbb{R}$ $(i = 1, 2)$ folytonos és

$$\min\{x, y\} < M_i(x, y) < \max\{x, y\}; \quad (x, y \in I, x \neq y)$$

(i=1,2). Ha $M_1(x,y) := \frac{x+y}{2}$ és $M_2(x,y) = \sqrt{xy}$, akkor (I.) az (1) függvényegyenlet, (II.) pedig

$$2f\left(\mathcal{G}(x,y)\right) = f(x) + f(y) \quad (x, y \in I) \tag{2}$$

alakban írható. (2)- ben $\mathcal{G}$ a nevezetes aritmetikai-geometriai közép, mely az alábbi jól ismert Gauss iteráció segítségével definiált: legyen $x, y \in I$ és definiáljunk (x_n) és (y_n) sorozatokat a következő módon:

$$x_1 := x, \; y_1 := y$$

$$x_{n+1} := \frac{x_n + y_n}{2}, \; y_{n+1} := \sqrt{x_n y_n} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Ismeretes, hogy az (x_n) és (y_n) sorozatok konvergensek; és a közös határérték

$$\mathcal{G}(x,y) := \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n = \left(\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{\sqrt{x^2\cos^2 t + y^2 \sin^2 t}}\right)^{-1}.$$

Az iménti $\mathcal{G} : I^2 \to \mathbb{R}$ leképezés szigorú közép az I intervallumon, azaz folytonos és

$$\min\{x, y\} < \mathcal{G}(x, y) < \max\{x, y\}; \quad (x, y \in I, x \neq y)$$

ráadásul
$$\mathcal{G}\left(\frac{x+y}{2}, \sqrt{xy}\right) = \mathcal{G}(x,y) \qquad (x, y \in I)$$
azaz az úgynevezett invariancia-egyenlet fennáll. Közepek Gauss kompozíciójának általános definíciója (és az elnevezés) először Daróczy és Páles [10] cikkében szerepel. Ehhez kapcsolódó vizsgálatokat folytatott Borwein–Borwein [4], Gauss [12], Almkvist–Berndt [2], Carlson [5]. Az invariancia-egyenlet közvetlen következménye, hogy (2) minden $f : I \to \mathbb{R}$ megoldása megoldása (1)-nek. Másrészt (1) folytonos megoldásai mindig megoldásai (2)-nek. Ez rögtön látható, ha az (1) függvényegyenletben x helyett $M_1(x,y)$ - t (azaz az aritmetikai közepet), míg y helyett az $M_2(x,y)$ - t (azaz a geometriai közepet) helyettesítjük. Ezt ismételve éppen a Gauss-féle iterációs sorozatok jelennek meg az egyenlet bal oldalán, míg jobb oldala változatlan marad. Határértékben pedig (tekintettel az f megoldás folytonosságára) a (2) egyenletet kapjuk. A fő probléma tehát az (1) függvényegyenlet olyan nem folytonos megoldásainak a megkeresése, melyek nem megoldásai (2) - nek, ha léteznek egyáltalán ilyen megoldások. Az $I = \mathbb{R}_+$ esetben ($\mathbb{R}_+$ a pozitív valós számok halmaza) Daróczy–Maksa–Páles [6] már igazolták (1) és (2) ekvivalenciáját, hiszen ha az (1) egyenletnek csak konstans megoldásai vannak, akkor az ekvivalencia triviálisan következik. Eredményeink alapján ugyanez az ekvivalencia fennáll, ha $I \subset \mathbb{R}_+$, $I \neq \mathbb{R}_+$. Ennek egy fontos következménye, hogy $\mathcal{G}|I \times I$ nem kváziaritmetikai közép $\mathbb{R}_+$ egy nyílt részintervallumán sem, azaz nem létezik olyan folytonos, szigorúan monoton növekvő $\varphi : I \to \mathbb{R}$ függvény (sőt $\varphi : I \to \mathbb{R}$ bijekció sem), mely az aritmetikai és a geometriai közép Gauss-kompozícióját előállítaná a
$$\mathcal{G}(x,y) = \varphi^{-1}\Big(\frac{\varphi(x)+\varphi(y)}{2}\Big) \qquad (x, y \in I),$$
alakban; lásd Hardy–Littlewood–Pólya [13]. Sőt ilyen φ bijekció sem létezik. Ellenkező esetben ugyanis maga a φ függvény lenne egy nem

konstans megoldása az (1) függvényegyenletnek.

1.2. Általánosított polinomok

A csoportokon értelmezett polinomok fontos szerepet játszanak a függvényegyenletek elméletében, mivel a legtöbb esetben egy lineáris függvényegyenlet általános megoldása polinomok segítségével kifejezhető. Ezzel kapcsolatos eredmények találhatók például D. Z. Djokovic [11], S. Haruki [14], M. A. Mckiernan [19] és L. Székelyhidi [27], [28] dolgozataiban. A továbbiakban összefoglaljuk a témakör főbb eredményeit.

A polinomok csoporton való értelmezése a differencia-operátor segítségével történik. Legyen G egy nem feltétlenül kommutatív csoport és jelölje $+$ a csoportműveletet. A differenciája egy $f\colon G \to \mathbb{R}$ függvénynek

$$\Delta_{y_1} f(x) := f(x + y_1) - f(x)$$

bármely $x, y_1 \in G$ esetén. A magasabb rendű differenciákat rekurzív módon

$$\Delta^2_{y_1,y_2} f(x) := \Delta_{y_2}(\Delta_{y_1} f)(x) = \Delta_{y_1} f(x + y_2) - \Delta_{y_1} f(x) =$$

$$= f(x + y_2 + y_1) - f(x + y_2) - f(x + y_1) + f(x),$$

$$\vdots$$

$$\Delta^n_{y_1,\ldots,y_n} f(x) = \Delta_{y_n}(\Delta^{n-1}_{y_1,\ldots,y_{n-1}} f)(x),$$

vagy a következő

$$\Delta^n_{y_1,\ldots,y_n} f(x) = \sum_{0 \le i_1 < \ldots < i_k \le n} (-1)^{n-k} f(x + y_{i_1} + \ldots + y_{i_k})$$

képlettel adhatjuk meg [26]. Az ekvidisztáns esetben, azaz amikor $y_1 = \ldots = y_n =: y$ a $\Delta_y^n f(x)$ jelölést használjuk. Ekkor

$$\Delta_y^n f(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} f(x+ky).$$

Azt mondjuk, hogy f legfeljebb n-ed fokú polinomiális függvény (általánosított polinom), ha $\Delta_y^{n+1} f(x) = 0$. Az általánosított polinomok egy explicit előállítását is fel fogjuk használni. Ez a reprezentáció k - additív függvények diagonálisainak (úgynevezett monomoknak) összegeként állítja elő az f függvényt sorrendtől eltekintve egyértelműen [18]. Ha például az első differencia eltűnik, akkor

$$0 = \Delta_y f(x) = f(x+y) - f(x),$$

ahonnan $x = 0$ helyettesítéssel nyílvánvaló, hogy f konstans. Másodjára a

$$0 = \Delta_y^2 f(x) = f(x+2y) - 2f(x+y) + f(x)$$

függvényegyenletet a $t = x + y$, $s = y$ helyettesítéssel az

$$f(t+s) + f(t-s) = 2f(t)$$

alakba írhatjuk, ahonnan $x = t + s$, $y = t - s$ választással a jól ismert

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{f(x)+f(y)}{2}$$

úgynevezett Jensen-egyenletet nyerjük feltéve, hogy a G csoport kommutatív és a 2-vel való osztásnak értelme van. A Jensen egyenletnek az általános megoldása

$$f(x) = A_1(x) + A_0$$

alakú, ahol A_0 konstans, $A_1\colon G \to \mathbb{R}$ additív függvény, azaz

$$A_1(x) + A_1(y) = A_1(x+y) \qquad (x, y \in G).$$

Ez J. Aczél, J. K. Chung és C. T. Ng [1] eredménye. Pl. Kannappan [15] igazolta, hogy ha az $f\colon G \to \mathbb{R}$ függvény harmadrendű differenciája azonosan nulla, azaz kielégíti a

$$f(x+3y) - 3f(x+2y) + 3f(x+y) - f(x) = 0 \qquad (x, y \in G)$$

függvényegyenletet, akkor

$$f(x) = A_2(x, x) + A_1(x) + A_0$$

ahol A_1 additív, A_0 konstans, $A_2\colon G^2 \to \mathbb{R}$ pedig szimmetrikus és mindkét változójában additív. Általában a legfeljebb n-ed fokú polinomiális függvények

$$f(x) = A_n(\underbrace{x, \ldots, x}_{n\text{ -szer}}) + \ldots + A_2(x, x) + A_1(x) + A_0$$

alakban reprezentálhatók [29], ahol bármely k pozitív egész szám mellett

$$A_k\colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$$

változóiban szimmetrikus k-additív függvény.

Számolásainkban sűrűn felhasználjuk, hogy a k-additív függvények minden változójukban racionálisan homogének.

1.3. A függvényegyenlet megoldása

1.3.1. Tétel. (Maksa, Varga [22]) *Tegyük fel, hogy $f : I \to \mathbb{R}$ megoldása az (1) függvényegyenletnek. Ekkor f konstans függvény.*

Bizonyítás. Meg fogjuk mutatni, hogy f legfeljebb másodfokú lokálisan polinomiális függvény az I intervallumon, azaz bármely $x_0 \in I$ esetén van olyan $V \subset \mathbb{R}$ környezete a nullának, hogy $x_0 + V \subset I$ és

$$\Delta_{y_1}\Delta_{y_2}\Delta_{y_3} f(x) = 0, \quad \text{ha } x - x_0, y_1, y_2, y_3 \in V;$$

a terminológiát illetően ld. [26]. Tegyük fel tehát, hogy $x_0 \in I$ és f megoldása az (1) függvényegyenletnek.

(A) Elsőként megmutatjuk, hogy létezik olyan $\alpha \in]1, \frac{3}{2}[$ racionális szám és x_0-at tartalmazó $U \subset I$ nyílt intervallum, melyekre $\frac{1}{\alpha}U \subset I$ és minden $x, y \in \frac{1}{\alpha}U$ esetén az

$$(3) \quad f\left(\frac{\alpha x + y}{2}\right) - f\left(\frac{x + \alpha y}{2}\right) = f(\alpha x) - f(x) - (f(\alpha y) - f(y))$$

egyenlőség teljesül. Ennek igazolásához válasszunk olyan $\delta > 0$ számot mely eleget tesz az alábbi követelményeknek:

$$\delta < x_0, \ ]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\subset I \text{ és } \alpha := 1 + \frac{\delta}{2x_0} \in \mathbb{Q}.$$

Legyen továbbá $\beta = \frac{1}{\alpha}$ és $U =]\alpha(x_0 - \delta), x_0 + \delta[$. Könnyű látni, hogy

$$\alpha \in]1, \frac{3}{2}[, \quad x_0 \in U$$

és

$$\frac{1}{\alpha}U = \beta U =]x_0 - \delta, \beta(x_0 + \delta)[\subset]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\subset I.$$

Legyen $x, y \in U$. Mivel $\beta x, \beta y \in I$, (1)-ből az x helyére βx - et, majd az y helyére βy - t helyettesítve kapjuk, hogy

$$f\left(\frac{x + \beta y}{2}\right) + f\left(\sqrt{x\beta y}\right) = f(x) + f(\beta y)$$

és
$$f\left(\frac{\beta x+y}{2}\right)+f\left(\sqrt{\beta xy}\right)=f(\beta x)+f(y).$$
Kivonva a második egyenletet az elsőből

$$(4)\quad f\left(\frac{x+\beta y}{2}\right)-f\left(\frac{\beta x+y}{2}\right)=f(x)+f(\beta y)-f(\beta x)-f(y)$$

$(x,y\in U)$. Ha (4) - ben x- et és y- t rendre αx- szel és αy- nal helyettesítjük, azonnal a (3) összefüggést kapjuk bármely $x,\ y\in\frac{1}{\alpha}U$ esetén.

(B) Legyen $\varepsilon=\frac{\delta}{\alpha}\left(1+\frac{1}{2\alpha}\right)$. Ebben a részben igazoljuk, hogy minden $t\in]-\varepsilon,\varepsilon[$ esetén a

$$D_t:=\left[\left(\frac{1}{\alpha}U\right)\cap\left(-t+\frac{1}{\alpha}U\right)\right]\times\left[U\cap\left(-\alpha^2t+U\right)\right]$$

halmaz nemüres és vannak olyan

$$A_0:\mathbb{R}\times]-\varepsilon,\varepsilon[\to\mathbb{R},\ b_0:]-\varepsilon,\varepsilon[\to\mathbb{R}$$

függvények, hogy A_0 az első változójában additív; azaz

$$A_0(u+v,t)=A_0(u,t)+A_0(v,t),$$

ha $u,v\in\mathbb{R},\ t\in]-\varepsilon,\varepsilon[$; és

$$(5)\qquad f\left(\frac{s+\alpha^2t}{2}\right)-f\left(\frac{s+t}{2}\right)=A_0(s,t)+b_0(t),$$

ahol $s\in H_t=\{x+y:(x,y)\in D_t\}$, $t\in]-\varepsilon,\varepsilon[$. Valóban, ha $t\in]-\varepsilon,\varepsilon[$ akkor $|-t|$ kisebb, mint $\frac{1}{\alpha}U$ hossza és $|-\alpha^2t|$ kisebb mint U hossza, vagyis
$$|-t|<\delta\left(1+\frac{1}{2\alpha}\right)\text{ és }|-\alpha^2t|<\delta\left(\alpha+\frac{1}{2}\right).$$

Ezek az egyenlőtlenségek ε és U definíciója, az $\alpha > 1$ feltétel és az

$$x_0 = \frac{\delta}{2(\alpha - 1)}$$

egyenlőség - mely az α definíciójából következik - segítségével egyszerű számolással igazolhatók. A fentiekből következik, hogy D_t nemüres.

Legyen most

$$x \in \left(\frac{1}{\alpha}U\right) \cap \left(-t + \frac{1}{\alpha}U\right) \quad \text{és} \quad y \in \left(\frac{1}{\alpha}U\right) \cap \left(-\alpha t + \frac{1}{\alpha}U\right).$$

Ekkor $x + t, y \in \frac{1}{\alpha}U$ így (3) miatt

$$f\left(\frac{\alpha x + \alpha t + y}{2}\right) - f\left(\frac{x + t + \alpha y}{2}\right) = \tag{6}$$

$$= f(\alpha x + \alpha t) - f(x + t) - f(\alpha y) + f(y).$$

Másfelől $x, y + \alpha t \in \frac{1}{\alpha}U$ is teljesül, így ugyancsak (3) miatt kapjuk, hogy

$$f\left(\frac{\alpha x + y + \alpha t}{2}\right) - f\left(\frac{x + \alpha y + \alpha^2 t}{2}\right) = \tag{7}$$

$$= f(\alpha x) - f(x) - f(\alpha y + \alpha^2 t) + f(y + \alpha t).$$

Kivonva (7)-et (6)-ból, majd az y helyére $\frac{1}{\alpha}y$ - t helyettesítve kapjuk, hogy

$$f\left(\frac{x + y + \alpha^2 t}{2}\right) - f\left(\frac{x + y + t}{2}\right) = f(\alpha x + \alpha t) - f(x + t) - f(\alpha x) +$$

$$+ f(x) + f(y + \alpha^2 t) - f(\frac{1}{\alpha}y + \alpha t) - f(y) + f(\frac{1}{\alpha}y)$$

teljesül minden $x, y \in D_t$ esetén. Ha $t \in]-\varepsilon, \varepsilon[$ rögzített, akkor ez egy Pexider egyenlet a nemüres, nyílt és összefüggő D_t halmazon. Így a Radó–Baker [24] - beli 1. tétel vagy a Rimán [25] - beli 3. tétel alkalmazható, mely segítségével kapjuk, hogy létezik a kívánt tulajdonságú A_0 és b_0 úgy, hogy (5) teljesül.

(C) Legyen $\tau = (\alpha^2 - 1)\frac{\varepsilon}{2}$ és minden $t \in]-\tau, \tau[$ esetén definiáljuk a

$$K_t := \frac{t}{\alpha^2 - 1} + \frac{1}{2} H_{\frac{2t}{\alpha^2-1}}$$

halmazt. A τ választása miatt

$$\frac{2t}{\alpha^2 - 1} \in]-\varepsilon, \varepsilon[,$$

így a K_t definíciója korrekt. Legyen továbbá

$$A : \mathbb{R} \times]-\tau, \tau[\to \mathbb{R} \text{ az } A(s,t) := 2A_0\left(s, \frac{2t}{\alpha^2 - 1}\right);$$

$$b :]-\tau, \tau[\to \mathbb{R}, \quad b(t) := -2A_0\left(\frac{t}{\alpha^2 - 1}, \frac{2t}{\alpha^2 - 1}\right) + b_0\left(\frac{2t}{\alpha^2 - 1}\right).$$

Világos, hogy A additív az első változójában. A bizonyítás soron következő részében belátjuk, hogy

$$\Delta_t f(s) = A(s,t) + b(t), \tag{8}$$

ahol $t \in]-\tau, \tau[$, $s \in K_t$. Valóban, írjunk először $2s$ - et és $2t$ - t rendre s és t helyett (5)- ben. Ekkor

$$f(s + \alpha^2 t) - f(s + t) = 2A_0(s, 2t) + b_0(2t),$$

ahol $s \in \frac{1}{2}H_{2t}$, $t \in]-\frac{1}{2}\varepsilon, \frac{1}{2}\varepsilon[$. Most s - et $s - t$ - vel helyettesíve kapjuk, hogy

$$f(s + (\alpha^2 - 1)t) - f(s) = 2A_0(s, 2t) - 2A_0(t, 2t) + b_0(2t)$$

ahol $s \in t + \frac{1}{2}H_{2t}$, $t \in]-\frac{1}{2}\varepsilon, \frac{1}{2}\varepsilon[$. Végül a $t \to \frac{t}{\alpha^2-1}$ helyettesítéssel élve – tekintettel τ, a K_t halmaz, az A és b függvények értelmezésére – a (8) összefüggést igazoltuk.

(D) Legyen

$$r = \delta\frac{\alpha^2-1}{16\alpha} \quad \text{és} \quad V =]-r, r[.$$

Most megmutatjuk, hogy az $x_0 + V \subset I$ és az $\{x - x_0, y_1, y_2, y_3\} \subset V$ tartalmazás maga után vonja, hogy $y_3 \in]-\tau, \tau[$ és

$$\{x + y_1 + y_2, x + y_1, x + y_2\} \subset K_{y_3}.$$

Mivel $\alpha = 1 + \frac{\delta}{2x_0}$ és $1 < \alpha < \frac{3}{2}$, némi számolás mutatja, hogy

$$x_0 + V \subset U, \quad \text{így} \quad x_0 + V \subset I$$

következik. Másfelől $V \subset]-\tau, \tau[$ nyílvánvaló, ezért csak azt kell bizonyítani, hogy

$$]x_0 - 3r, x_0 + 3r[\subset K_{y_3},$$

vagy ekvivalens módon

$$]-3r, 3r[\subset -x_0 + K_{y_3},$$

hiszen a feltételek miatt

$$x + y_1 + y_2 \in]x_0 - 3r, x_0 + 3r[,$$

$$x + y_i \in]x_0 - 3r, x_0 + 3r[$$

(i=1,2). Tekintettel az U, H_t, és $-x_0 + K_t$ hamazok definíciójára és ismét figyelembe véve, hogy $x_0 = \frac{\delta}{2(\alpha-1)}$, némi számolás után kapjuk, hogy

$$U = \frac{\delta}{2(\alpha-1)}]\alpha(3-2\alpha), 2\alpha - 1[.$$

Valóban,

$$U =]\alpha(x_0-\delta, x_0+\delta[=]\alpha\left(\frac{\delta}{2(\alpha-1)}-\delta\right), \frac{\delta}{2(\alpha-1)}+\delta[=$$

$$= \frac{\delta}{2(\alpha-1)}]\alpha(1-2(\alpha-1)), 1+2(\alpha-1)[= \frac{\delta}{2(\alpha-1)}]\alpha(3-2\alpha), 2\alpha-1[\subset \mathbb{R}^+.$$

Másfelől

$$H_t = \left](\alpha^2+1)t^- + \delta\frac{(\alpha+1)(3-2\alpha)}{2(\alpha-1)}, -(\alpha^2+1)t^+ + \delta\frac{(\alpha+1)(2\alpha-1)}{2\alpha(\alpha-1),}\right[,$$

és

$$-x_0 + K_t = \left]\frac{t^+ + \alpha^2 t^-}{\alpha^2-1} - \delta\frac{2\alpha+1}{4}, -\frac{t^- + \alpha^2 t^+}{\alpha^2-1} + \delta\frac{2\alpha+1}{4\alpha}\right[$$

ahol $t^+ = \frac{|t|+t}{2}$ és $t^- = \frac{|t|-t}{2}$. Ezeket az egyenlőségeket esetbontással igazolhatjuk; emlékeztetünk rá, hogy

$$H_t = \{x+y : (x,y) \in D_t\} \quad \text{ahol} \quad t \in]-\varepsilon, \varepsilon[$$

és

$$D_t := \left[\left(\frac{1}{\alpha}U\right) \cap \left(-t + \frac{1}{\alpha}U\right)\right] \times \left[U \cap \left(-\alpha^2 t + U\right)\right].$$

A H_t intervallum infimuma tehát

$$\inf\left[\left(\frac{1}{\alpha}U\right) \cap \left(-t + \frac{1}{\alpha}U\right)\right] + \inf\left[U \cap \left(-\alpha^2 t + U\right)\right].$$

Itt az egyes intervallumok infimumát a $t > 0$ esetben határozzuk meg:

$$\inf\left[\left(\frac{1}{\alpha}U\right) \cap \left(-t + \frac{1}{\alpha}U\right)\right] = \inf\frac{1}{\alpha}U =$$

$$= \frac{\delta}{2(\alpha-1)}(3-2\alpha)$$

míg

$$\inf\big[U \cap \big(-\alpha^2 t + U\big)\big] = \inf U = \frac{\delta}{2(\alpha-1)}\alpha(3-2\alpha),$$

hiszen t pozitivitására tekintettel az éppen aktuális intervallumot negatív irányban vett eltoltjával kell metszeni, s ennélfogva a metszet-intervallum infimuma az eredeti intervallum infimumával esik egybe. A H_t intervallum infimuma tehát

$$\delta\frac{(\alpha+1)(3-2\alpha)}{2(\alpha-1)} = (\alpha^2+1)t^- + \delta\frac{(\alpha+1)(3-2\alpha)}{2(\alpha-1)},$$

mivel pozitív t mellett $t^- = 0$. A suprémum pedig

$$\sup\left[\left(\frac{1}{\alpha}U\right) \cap \left(-t + \frac{1}{\alpha}U\right)\right] + \sup\big[U \cap \big(-\alpha^2 t + U\big)\big].$$

Továbbra is a $t > 0$ esetnél maradva,

$$\sup\left[\left(\frac{1}{\alpha}U\right) \cap \left(-t + \frac{1}{\alpha}U\right)\right] = \sup\left(-t + \frac{1}{\alpha}U\right) =$$

$$= -t + \frac{\delta}{2\alpha(\alpha-1)}(2\alpha-1),$$

míg

$$\sup\big[U \cap \big(-\alpha^2 t + U\big)\big] = \sup\big(-\alpha^2 t + U\big) =$$

$$= -\alpha^2 t + \frac{\delta}{2(\alpha-1)}(2\alpha-1),$$

s ennélfogva (a $t > 0$ esetben) a H_t intervallum suprémuma

$$-(\alpha^2+1)t + \delta\frac{(\alpha+1)(2\alpha-1)}{2\alpha(\alpha-1)} = -(\alpha^2+1)t^+ + \delta\frac{(\alpha+1)(2\alpha-1)}{2\alpha(\alpha-1)},$$

mivel pozitív t mellett $t^+ = t$. A $t < 0$ esetben a számolás teljesen hasonló (az eltolás tehát a valós tengely mentén pozitív irányban történik):

$$\inf\left[\left(\frac{1}{\alpha}U\right) \cap \left(-t + \frac{1}{\alpha}U\right)\right] = \inf\left(-t + \frac{1}{\alpha}U\right) =$$

$$= -t + \frac{\delta}{2(\alpha-1)}(3-2\alpha),$$

míg

$$\inf\left[U \cap \left(-\alpha^2 t + U\right)\right] = \inf\left(-\alpha^2 t + U\right) =$$

$$= -\alpha^2 t + \frac{\delta}{2(\alpha-1)}\alpha(3-2\alpha),$$

s ennélfogva az infimum

$$-(\alpha^2+1)t + \delta\frac{(\alpha+1)(3-2\alpha)}{2(\alpha-1)} = (\alpha^2+1)t^- + \delta\frac{(\alpha+1)(3-2\alpha)}{2(\alpha-1)}$$

és így tovább. A $t \mapsto \frac{2t}{\alpha^2-1}$ helyettesítéssel élve direkt számolással kapjuk a K_t intervallum infimumát és suprémumát is – emlékeztetünk rá, hogy

$$K_t := \frac{t}{\alpha^2-1} + \frac{1}{2}H_{\frac{2t}{\alpha^2-1}}.$$

Most már könnyen találhatunk elégséges feltételt a

$$]-3r, 3r[\subset -x_0 + K_{y_3}$$

tartalmazáshoz feltéve, hogy $|y_3| < r$. Annyit kell csupán biztosítanunk, hogy

$$-3r \geq \frac{{y_3}^+ + \alpha^2 {y_3}^-}{\alpha^2-1} - \delta\frac{2\alpha+1}{4}$$

és egyidejűleg

$$3r \leq -\frac{y_3{}^- + \alpha^2 y_3{}^+}{\alpha^2 - 1} + \delta\frac{2\alpha + 1}{4\alpha}$$

legyen, ha tudjuk, hogy $|y_3| < r$. Mivel

$$y_3^+ + y_3^- = |y_3|,$$

ezért

$$\frac{y_3{}^+ + \alpha^2 y_3{}^-}{\alpha^2 - 1} = \frac{|y_3|}{\alpha^2 - 1} + y_3^- < \frac{r}{\alpha^2 - 1} + r,$$

illetve

$$\frac{y_3{}^- + \alpha^2 y_3{}^+}{\alpha^2 - 1} = \frac{|y_3|}{\alpha^2 - 1} + y_3^+ < \frac{r}{\alpha^2 - 1} + r.$$

Az első egyenlőtlenséget tehát az erősebb

$$-3r \geq \frac{r}{\alpha^2 - 1} + r - \delta\frac{2\alpha + 1}{4},$$

a másodikat pedig a szintén erősebb

$$3r \leq -\left(\frac{r}{\alpha^2 - 1} + r\right) + \delta\frac{2\alpha + 1}{4\alpha},$$

egyenlőtlenséggel helyettesíthetjük. Figyelembe véve, hogy

$$r = \delta\frac{\alpha^2 - 1}{16\alpha},$$

ezek a

$$0 \leq 4\alpha^2 + 4\alpha + 3 \text{ és } 0 \leq -4\alpha^2 + 8\alpha + 7$$

egyenlőtlenségekhez vezetnek. Az $1 < \alpha < \frac{3}{2}$ értékekre azonban mind-kettő fennáll, s így teljesül a kívánt

$$]-3r, 3r[\subset -x_0 + K_{y_3}$$

tartalmazás is.

(E) Végül belátjuk, hogy f konstans függvény. Valóban, V egy környezete a nullának, $x_0 + V \subset I$ és a bizonyítás (D) része miatt a (8) egyenlet ismételten alkalmazható, ha $x - x_0, y_1, y_2, y_3 \in V$. Ekkor

$$\Delta_{y_1}\Delta_{y_2}\Delta_{y_3}f(x) = f(x+y_1+y_2+y_3) - f(x+y_1+y_2) - f(x+y_1+y_3) +$$

$$+f(x+y_1) - f(x+y_2+y_3) + f(x+y_2) + f(x+y_3) - f(x) =$$

$$= A(x+y_1+y_2, y_3) - A(x+y_1, y_3) - A(x+y_2, y_3) + A(x, y_3) = 0.$$

Így Székelyhidi [26] - beli 3.3 és 3.4 tételét használva kapjuk, hogy az f függvény

$$f(x) = a(x,x) + b(x) + c \qquad (x \in I) \tag{9}$$

alakú ahol $a : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ változóiban szimmetrikus, biadditív függvény, $b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ additív függvény és $c \in \mathbb{R}$. (3) - ba helyettesítve f- nek ezt az alakját, az additivitás és α racionális voltának felhasználásával nyerjük, hogy

$$3(\alpha+1)a(x,x) + 2b(x) = 3(\alpha+1)a(y,y) + 2b(y), \tag{10}$$

ahol $x, y \in \frac{1}{\alpha}U$. Legyen $x, y \in \frac{1}{\alpha}U$ rögzített. Ekkor létezik olyan $\varepsilon > 0$ hogy bármely $r \in (1-\varepsilon, 1+\varepsilon) \cap \mathbb{Q}$ esetén $rx, ry \in \frac{1}{\alpha}U$. Alkalmazva az $x \to rx$, $y \to ry$ helyettesítést (10) - ben, majd figyelembe véve a racionális homogenitást azt kapjuk, hogy

$$3(\alpha+1)a(x,x)r^2 + 2b(x)r = 3(\alpha+1)a(y,y)r^2 + 2b(y)r \quad (x, y \in \frac{1}{\alpha}U).$$

Minden valós $z \in (1-\varepsilon, 1+\varepsilon)$ szám megközelíthető azonban racionális számokból álló sorozattal, így $r \in \mathbb{Q}$ helyére z-t írhatunk. Ebből már könnyen látható, hogy $a(x,x) = b(x) = 0$ minden $x \in \frac{1}{\alpha}U$ esetén. Következésképpen a és b az azonosan zérus bi-, illetve additív függvények a teljes értelmezési tartományon és (9) implikálja, hogy $f(x) = c$ minden $x \in I$ esetén. ∎

1.3.1. Megjegyzés. *Könnyű látni, hogy ugyancsak a konstans függvények (1) megoldásai ha $I \subset \mathbb{R}_+$ tetszőleges, nem szükségképpen nyílt intervallum. Valóban, tegyük fel például, hogy $0 < a := \inf I$ és tekintsük a függvényegyenletünket az*

$$I_a := [a, a + \varepsilon[$$

intervallum fölött, ahol ε elég kicsi pozitív szám ahhoz, hogy $I_a \subset I$ teljesüljön. Tételünk szerint f konstans az I_a intervallum belsején, míg az (1) függvényegyenlet az $x = a$ és tetszőleges $y \in I_a$ belső pont esetén azt adja, hogy

$$f\left(\frac{a+y}{2}\right) + f\left(\sqrt{ay}\right) = f(a) + f(y).$$

Mivel $0 < a$, ezért $\sqrt{ay}$ is szigorúan I_a belsejébe esik, s ennélfogva

$$2c = f(a) + c$$

azaz $f(a) = c$, ahol c az f függvény (konstans) értéke az I_a intervallum belsején. Érvelésünk azonban nem alkalmazható $a = 0$ esetén, hiszen ekkor a geometriai közép is egybeesik az intervallum bal végpontjával és a függvényegyenlet csupán az

$$f(0) = f(0)$$

azonosságot adja – az origóban tehát a függvény értéke tetszőlegesen választható: ha $I \subset [0, +\infty[$ és $0 \in I$, akkor minden $f : I \to \mathbb{R}$ megoldás általános alakja

$$f(x) = \begin{cases} c & \text{ha } x > 0, \ x \in I \\ d & \text{ha } x = 0. \end{cases}$$

valamely c és $d \in \mathbb{R}$ valós számok mellett.

2. Súlyozott közepeket tartalmazó függvényegyenletek

2.1. Bevezetés

Bizonyos alkalmazások szempontjából fontosak az olyan függvényegyenletek, melyek nem teljesülnek a teljes valós számtest fölött, hanem csupán egy bizonyos $I \subset \mathbb{R}$ nemüres, nyílt intervallumon állnak fenn. Ekkor a megoldás egy elvileg lehetséges módja:

1. alkalmas helyettesítésekkel részintervallumokon teljesülő speciális típusú függvényegyenlet felállítása,
2. kiterjesztési tétel alkalmazása,
3. globális eredmények felhasználásával az első lépésben szereplő függvényegyenlet megoldása a részintervallumokon.

Mivel a harmadik lépésben konstruált megoldások általában függnek az I intervallum részintervallumaitól, ezért az utolsó lépés

4. az egyes részintervallumokon kapott megoldások összefűzése és a megoldás szerkezetének egységes leírása a teljes I intervallumon.

A súlyozott közepeket tartalmazó

$$\sum_{i=0}^{n} a_i f(b_i x + (1 - b_i)y) = 0 \qquad (x, y \in I)$$

függvényegyenletek esetében a megoldás megkeresésének ez a módja lehetséges. A rövidség kedvéért használni fogjuk a következő jelöléseket.

2.1.1. Definíció. *Legyen $A_k\colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ változóiban szimmetrikus k-additív függvény, $1 \le k$ és $0 \le l \le k$.*

$$D(A_k)(x) := A_k(\underbrace{x,\dots,x}_{k\text{ -szor}}) \quad (x \in \mathbb{R}), \quad D(A_0) := A_0,$$

$$A_{k,l}(x,y) := A_k(\underbrace{x,\dots,x}_{l\text{ -szer}}, \underbrace{y,\dots,y}_{k-l\text{ -szer}}) \quad (x,y \in \mathbb{R}), \quad A_{0,0} := A_0.$$

2.1.1. Lemma. (Székelyhidi [28]) *Ha $k \ge 0$ pozitív egész szám és $A_k\colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ változóiban szimmetrikus k-additív függvény, akkor*

$$D(A_k)(x+y) = \sum_{l=0}^{k} \binom{k}{l} A_{k,l}(x,y).$$

Általánosabban

$$D(A_k)(x_1+\ldots+x_l) =$$

$$= \sum_{i_1+\ldots+i_l=k} \frac{k!}{i_1!\cdot\ldots\cdot i_l!} A_k(\underbrace{x_1,\dots,x_1}_{i_1\text{ -szer}},\dots,\underbrace{x_l,\dots,x_l}_{i_l\text{ -szer}}),$$

továbbá

$$\Delta^n_{x_1,\dots,x_k} D(A_k)(0) = k! A_k(x_1,\dots,x_k),$$

ami azt jelenti, hogy a diagonálison felvett értékek egyértelműen meghatározzák az A_k függvényt.

Bizonyítás. Speciálisan az

$$A_k(x_1,\dots,x_k) := x_1\cdot\ldots\cdot x_k$$

választással a lemmában szereplő első két összefüggés a binomiális, illetve a polinomiális tétel, melyeknek akár a kombinatórikus, akár az indukcióval történő bizonyítása érdemi változtatás nélkül működik tetszőleges k - addítív, változóiban szimmetrikus függvény esetében. Legyen x_1, x_2, ..., x_k tetszőleges. Nyilvánvalóan csak egyetlen olyan $i_1, \ldots, i_k$ indexsorozat van, melynek egyik tagja sem zérus és

$$i_1 + \ldots + i_k = k.$$

Ekkor $i_1 = i_2 = \ldots = i_k = 1$. Ellenkező esetben legalább az egyik index zérus. Jelölje I_1 az olyan indexsorozatok halmazát, ahol $i_1 = 0$, I_2 az olyan indexsorozatok halmazát, ahol $i_2 = 0$ stb. Legyen I_{12} az olyan indexsorozatok halmaza, ahol $i_1 = i_2 = 0$ stb., I_{123} az olyan indexsorozatok halmaza, ahol $i_1 = i_2 = i_3 = 0$ stb. A logikai szita módszerének segítségével kapjuk, hogy

$$D(A_k)(x_1 + \ldots + x_k) =$$

$$k! A_k(x_1, \ldots, x_k) + \sum_{I_1} P(i_1, \ldots, i_k) + \ldots + \sum_{I_k} P(i_1, \ldots, i_k)$$

$$- \sum_{I_{12}} P(i_1, \ldots, i_k) - \ldots - \sum_{I_{k-1\ k}} P(i_1, \ldots, i_k) + \sum_{I_{123}} P(i_1, \ldots, i_k) + \ldots,$$

ahol

$$P(i_1, \ldots, i_k) = \frac{k!}{i_1! \cdot \ldots \cdot i_k!} A_k(\underbrace{x_1, \ldots, x_1}_{i_1 \text{ -szer}}, \ldots, \underbrace{x_k, \ldots, x_k}_{i_k \text{ -szer}}).$$

A polinomiális formula alapján

$$\sum_{I_1} P(i_1, \ldots, i_k) = D(A_k)(\hat{x}_1 + x_2 + \ldots + x_k),$$

$$\sum_{I_2} P(i_1, \ldots, i_k) = D(A_k)(x_1 + \hat{x}_2 + \ldots + x_k),$$

$$\ldots,$$

$$\sum_{I_{12}} P(i_1, \ldots, i_k) = D(A_k)(\hat{x}_1 + \hat{x}_2 + \ldots + x_k),$$
$$\ldots$$
$$\sum_{I_{123}} P(i_1, \ldots, i_k) = D(A_k)(\hat{x}_1 + \hat{x}_2 + \hat{x}_3 + x_4 + \ldots + x_k),$$
$$\ldots$$

ahol a ˆ operátor jelentése: töröld az alatta állót. Képleteink alapján a diagonálison felvett értékek egyértelműen meghatározzák az A_k függvényt, átrendezéssel pedig a bizonyítandó

$$\Delta^n_{x_1,\ldots,x_k} D(A_k)(0) = k! A_k(x_1, \ldots, x_k)$$

összefüggéshez jutunk. ■

A továbbiakban összefoglaljuk az algoritmus megfelelő pontjaihoz tartozó lényeges eredményeket. A legkritikusabbnak tűnő 2. kiterjesztési probléma megoldása során Páles egy *kiterjesztési tételét* [23] használjuk fel. Ennek az általános eredménynek azonban csak az

$$F = X = \mathbb{R}, \quad K = J_\xi, \quad Y = (\mathbb{R}, +),$$

$$\varphi_0 = 0, \quad \varphi_i\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \varphi_i(t) = -\frac{a_i}{a_1} t \quad (i = 1, \ldots, n)$$

speciális esetben adódó verziójára van szükség, amit a következő lemmában fogalmazunk meg részletesen.

2.1.1. Tétel. (Páles [23]) *Legyen $J \subset \mathbb{R}$ egy nemüres nyílt intervallum, n pozitív egész szám, a_i és $b_i \in \mathbb{R}$, $(i = 0, \ldots, n)$ úgy, hogy*

$$a_i \neq 0 \ (i = 0, \ldots, n); \ \sum_{i=0}^{n} a_i = 0 \quad \text{és} \quad b_0 < b_1 < b_2 < \ldots < b_n \quad \text{és}$$

$$c_i := \frac{b_n - b_i}{b_n - b_0} \quad (i = 1, \ldots, n).$$

Ha $f\colon J \to \mathbb{R}$ *megoldása az*

$$a_0 f(u) + \sum_{i=1}^{n} a_i f(c_i u + (1-c_i)v) = 0 \quad (u, v \in J)$$

egyenletnek, akkor egyetlen olyan $\tilde{f}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *kiterjesztése létezik az* f *függvénynek, mely eleget tesz a*

$$a_0 \tilde{f}(u) + \sum_{i=1}^{n} a_i \tilde{f}(c_i u + (1-c_i)v) = 0 \quad (u, v \in \mathbb{R})$$

függvényegyenletnek.

A 3. lépésben szereplő globális eredmény L. Székelyhidi [28] egyik tétele, amit szintén csupán a $G = \mathbb{R}$ esetben adódó speciális alakban fogalmazunk meg.

2.1.2. Tétel. (Székelyhidi [28]) *Legyenek* φ_i, $\psi_i\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *additív leképezései az* $\mathbb{R}$ *valós számtestnek önmagára úgy, hogy*

(11) $\mathrm{Rg}\,(\psi_j \circ \psi_i^{-1} - \varphi_j \circ \varphi_i^{-1}) = \mathbb{R}$ *ha* $i \neq j$ $\quad (i, j = 1, 2 \dots, n)$,

ahol Rg *a leképezés képterét jelöli. Ha az* $f_i\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $(i = 0, 1, \dots, n)$ *függvények eleget tesznek az*

$$f_0(x) + \sum_{i=1}^{n} f_i(\varphi_i(x) + \psi_i(y)) = 0 \qquad (x, y \in \mathbb{R})$$

egyenletnek, akkor léteznek szimmetrikus $A_k^i\colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ k*-additív függvények* $(k = 0, 1, \dots, n-1;\ i = 0, 1, \dots, n)$ *úgy, hogy*

$$f_i(x) = \sum_{k=0}^{n-1} D(A_k^i)(x) \quad (i = 0, 1, \dots, n) \quad (x \in \mathbb{R}).$$

A részintervallumokon kapott megoldások összefűzésének 4. problémájához pedig a következő eredményt fogjuk felhasználni, mely szerint egy nemüres nyílt $I \subset \mathbb{R}$ intervallumon értelmezett lokálisan polinomiális függvény, a teljes I intervallumon polinomiális. Az eredmény [26] 3.3. Tételének az $(\mathbb{R}, +)$ csoportra vonatkozó speciális esete, önálló bizonyítással.

2.1.3. Tétel. (Székelyhidi [26]; Varga, Vincze [33]) *Legyen $f\colon I \to \mathbb{R}$, és tegyük fel, hogy f lokálisan polinomiális az I intervallumon, azaz bármely $\xi \in I$ esetén létezik olyan $\varepsilon > 0$, hogy*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} D(A_k^{\xi})(x), \qquad x \in J_\xi :=]\xi - \varepsilon, \xi + \varepsilon[\subset I,$$

ahol $A_k^{\xi}\colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ változóiban szimmetrikus k-additív függvény, $k = 0$, ..., n. Ekkor f globálisan polinomiális az I intervallumon, azaz

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} D(A_k)(x), \qquad x \in I,$$

ahol $A_k\colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ egyértelműen meghatározott változóiban szimmetrikus k-additív függvény bármely $k = 0, \ldots, n$-re.

Bizonyítás. Tekintsünk egy $f\colon I \to \mathbb{R}$ függvényt. Legyen ξ_1 és $\xi_2 \in I$. Tegyük fel, hogy ε_1, $\varepsilon_2 > 0$ úgy, hogy

$$]\xi_1 - \varepsilon_1, \xi_1 + \varepsilon_1[\subset I, \quad]\xi_2 - \varepsilon_2, \xi_2 + \varepsilon_2[\subset I,$$

továbbá

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} D(A_k)(x) \quad x \in]\xi_1 - \varepsilon_1, \xi_1 + \varepsilon_1[$$

és

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n} D(B_k)(x) \quad x\in]\xi_2-\varepsilon_2,\xi_2+\varepsilon_2[$$

ahol A_k és $B_k\colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ $(k=0,\ldots,n)$ változóikban szimmetrikus k-additív függvények. A bizonyítás a következő két esetre bontható:

$$\text{I. }]\xi_1-\varepsilon_1,\xi_1+\varepsilon_1[\cap]\xi_2-\varepsilon_2,\xi_2+\varepsilon_2[\neq\emptyset$$

$$\text{II. }]\xi_1-\varepsilon_1,\xi_1+\varepsilon_1[\cap]\xi_2-\varepsilon_2,\xi_2+\varepsilon_2[=\emptyset.$$

I. Az egyszerűbb írásmód kedvéért jelölje a

$$]\xi_1-\varepsilon_1,\xi_1+\varepsilon_1[\ \text{ és a } \ ]\xi_2-\varepsilon_2,\xi_2+\varepsilon_2[$$

intervallumok metszetét M. Ekkor M nyílt intervallum és

$$(12) \qquad \sum_{k=0}^{n} D(A_k)(x)=\sum_{k=0}^{n} D(B_k)(x) \qquad (x\in M).$$

Először azt fogjuk megmutatni, hogy (12)- ből

$$(13) \qquad D(A_k)(x)=D(B_k)(x) \qquad (x\in M), \quad (k=0,\ldots,n)$$

következik. Ezt követően igazoljuk, hogy (13) fennállása esetén

$$(14) \qquad D(A_k)(x)=D(B_k)(x) \qquad (x\in \mathbb{R}), \quad (k=0,\ldots,n)$$

teljesül, mely implikálja, hogy

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n} D(A_k)(x)=\sum_{k=0}^{n} D(B_k)(x) \quad (x\in I).$$

Első lépés. Tegyük fel, hogy (12) fennáll és legyen $x\in M$ rögzített. Ekkor létezik olyan $\varepsilon>0$ szám, hogy bármely $r\in]1-\varepsilon,1+\varepsilon[\cap\mathbb{Q}$

esetén $rx \in M$. Alkalmazva az $x \to rx$ helyettesítést (12)-ben, majd figyelembe véve a racionális homogenitást azt kapjuk, hogy

$$\sum_{k=0}^{n} r^k D(A_k)(x) = \sum_{k=0}^{n} r^k D(B_k)(x). \tag{15}$$

Minden valós $z \in]1-\varepsilon, 1+\varepsilon[$ szám megközelíthető racionális számokból álló sorozattal, így $r \in \mathbb{Q}$ helyére z-t írhatunk. Ebből már könnyen látható, hogy teljesül (13).
Második lépés. Legyen $y \in \mathbb{R}$, $y \neq 0$ tetszőleges. Ekkor van olyan $r \in \mathbb{Q}$, hogy $ry \in M$. Figyelembe véve (13)-mat

$$r^k D(A_k)(y) = r^k D(B_k)(y) \qquad (k = 0, \ldots, n).$$

Így

$$D(A_k)(y) = D(B_k)(y) \qquad (k = 0, \ldots, n),$$

mely könnyen látható, hogy $y = 0$ esetén is teljesül.
II. Tegyük fel, hogy $\xi_1 < \xi_2$. Ekkor léteznek

$$x_1, \ldots, x_m \in [\xi_1, \xi_2],\ x_1 < \ldots < x_m$$

pontok úgy, hogy

$$[\xi_1, \xi_2] \subset \cup_{i=1}^{m} J_{x_i},$$

ahol f általánosított polinom minden egyes $J_{x_i} :=]x_i - \delta_i, x_i + \delta_i[$ intervallumon valamilyen $\delta_i > 0$ $(i = 1, \ldots, m)$ esetén és teljesülnek a

$$]\xi_1 - \varepsilon_1, \xi_1 + \varepsilon_1[\cap]x_1 - \delta_1, x_1 + \delta_1[\neq \emptyset$$

$$]x_i - \delta_i, x_i + \delta_i[\cap]x_{i+1} - \delta_{i+1}, x_{i+1} + \delta_{i+1}[\neq \emptyset \quad (i = 1, \ldots, m-1)$$

$$]x_m - \delta_m, x_m + \delta_m[\cap]\xi_2 - \varepsilon_2, \xi_2 + \varepsilon_2[\neq \emptyset$$

feltételek. Ekkor I. felhasználásával a bizonyítás teljes. ■

2.2. A függvényegyenlet megoldásának menete

Ebben a fejezetben az ismertetett algoritmus segítségével meghatározzuk azoknak az $f\colon I \to \mathbb{R}$ függvényeknek az általános alakját, melyek kielégítik a

$$\sum_{i=0}^{n} a_i f(b_i x + (1-b_i)y) = 0 \qquad (x, y \in I) \tag{16}$$

súlyozott közepeket tartalmazó függvényegyenletet, ahol $a_i \in \mathbb{R}$ és $b_i \in]0,1[$ tetszőleges paraméterek, $(i = 0, \ldots, n)$, I pedig a valós számegyenes egy nemüres, nyílt intervalluma. Ha a függvényegyenletben valamely i indexre $b_i = 0$, vagy $b_i = 1$ is megengedett ($a_i \neq 0$ mellett), akkor az ismeretlen függvény explicit módon kifejezhető az egyenletből és a 2.1.1. kiterjesztési tétel, illetve a 2.1.2. Tétel közvetlenül alkalmazható. Most azonban nem ez a helyzet. További nehézség forrása, hogy az egyenlet csak egy pozitív hosszúságú nyílt intervallumon áll fenn.

Az egyenlet nemtriviális megoldásait a $\sum_{i=0}^{n} a_i = 0$ feltétel mellett kereshetjük, hiszen y helyére x - et írva

$$\Big(\sum_{i=0}^{n} a_i\Big) f(x) = 0 \qquad (x \in I)$$

adódik.

Másfelől, ha $b_i = b_j$ valamely i, j indexekre, akkor az egyenlet redukálható.

Az általánosság sérelme nélkül feltehetjük tehát, hogy

$$(17)\ a_i \neq 0\ (i = 0, \ldots, n);\ \sum_{i=0}^{n} a_i = 0 \ \text{ és } \ b_0 < b_1 < b_2 < \ldots < b_n,$$

ahol $2 \leq n$. Legyen továbbá - a (17) feltételek mellett -

$$c_i := \frac{b_n - b_i}{b_n - b_0} \quad (i = 1, \ldots, n)$$

és

$$\beta_i := 1 - c_i = \frac{b_i - b_0}{b_n - b_0} \quad (i = 1, \ldots, n).$$

A továbbiakban, hacsak mást nem mondunk a (16) függvényegyenlet paramétereiről mindig feltesszük a (17) - ben összefoglalt tulajdonságokat.

2.2.1. Lemma. (Varga, Vincze [33]) *Ha $f\colon I \to \mathbb{R}$ kielégíti a (16) függvényegyenletet, akkor bármely $\xi \in I$-hez létezik $\varepsilon > 0$ úgy, hogy az*

$$a_0 f(u) + \sum_{i=1}^{n} a_i f(c_i u + (1 - c_i)v) = 0 \tag{18}$$

egyenlőség fennáll bármely $u, v \in J_\xi :=]\xi - \varepsilon, \xi + \varepsilon[\subset I$ esetén.

Bizonyítás. Alkalmazzuk a (16) egyenletben az

$$u \to b_0 x + (1 - b_0)y, \quad v \to b_n x + (1 - b_n)y \qquad (x, y) \in I^2 \tag{19}$$

helyettesítést. Tulajdonképpen ezzel a helyettesítéssel egy lineáris transzformációt hajtunk végre. Ennek a transzformációnak a mátrixát jelölje

$$P := \begin{pmatrix} b_0 & 1 - b_0 \\ b_n & 1 - b_n \end{pmatrix}$$

A szóban forgó lineáris transzformáció reguláris, mivel

$$\det\ P = b_0 - b_n$$

és feltettük, hogy az $b_i \in]0,1[$ paraméterek páronként különböző valós számok. Ekkor

$$\det\ P_x = \det \begin{pmatrix} u & 1-b_0 \\ v & 1-b_n \end{pmatrix} = u - ub_n - v + b_0 v$$

és

$$\det\ P_y = \det \begin{pmatrix} b_0 & u \\ b_n & v \end{pmatrix} = b_0 v - b_n u,$$

így

$$x = \frac{\det\ P_x}{\det\ P} = \frac{u - ub_n - v + b_0 v}{b_0 - b_n}$$

és

$$y = \frac{\det\ P_y}{\det\ P} = \frac{b_0 v - b_n u}{b_0 - b_n}.$$

A fentiek miatt

$$b_i x + (1-b_i) y = b_i \frac{u - ub_n - v + b_0 v}{b_0 - b_n} + (1-b_i)\frac{b_0 v - b_n u}{b_0 - b_n} =$$

$$= \frac{b_i - b_i b_n - b_n + b_i b_n}{b_0 - b_n} u + \frac{-b_i + b_i b_0 + b_0 - b_i b_0}{b_0 - b_n} v = \frac{b_i - b_n}{b_0 - b_n} u + \frac{b_0 - b_i}{b_0 - b_n} v$$

így a (16) egyenlet

$$(20) \qquad a_0 f(u) + \sum_{i=1}^{n} a_i f(c_i u + (1-c_i) v) = 0 \qquad (u,v) \in P(I^2)$$

alakban írható, ahol a $P(I^2)$ halmaz az I^2 képe a (19) helyettesítés után. Mivel minden reguláris lineáris transzformáció nyílt leképezés és

$$P \begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix} \qquad (x \in I),$$

így a

$$diag\ I^2 := \{(\xi, \xi) \mid \xi \in I\}$$

halmaz minden pontja belső pontja $P(I^2)$-nek. A belső pont fogalma miatt ez azt jelenti, hogy bármely $\xi \in I$ esetén van olyan $\varepsilon > 0$, hogy

$$]\xi - \varepsilon, \xi + \varepsilon[^2 \subset P(I^2).$$

Másfelől $P(I^2) \subset I^2$, ugyanis u és v is x és y konvex kombinációja. Ezzel beláttuk, hogy a (18) egyenlőség fennáll minden

$$u, v \in J_\xi :=]\xi - \varepsilon, \xi + \varepsilon[\subset I$$

intervallumon. ■

2.2.1. Tétel. (Varga, Vincze [33]) *Az $f: I \to \mathbb{R}$ függvényre pontosan akkor áll fenn (16) (minden $x, y \in I$ esetén), ha léteznek olyan egyértelműen meghatározott szimmetrikus k-additív*

$$A_k: \mathbb{R}^k \to \mathbb{R} \quad (k = 0, 1, \ldots, n-1)$$

függvények, melyekre

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} D(A_k)(x) \quad (x \in I) \tag{21}$$

és

$$\sum_{i=1}^{n} a_i A_{k,k-l}(s, t\beta_i) = 0 \quad (s,\ t \in \mathbb{R}) \tag{22}$$

bármely $k = 1, \ldots, n-1$, $l = 1, \ldots, k$, $n \geq 2$ esetén. Ha $n = 1$ akkor, (21) miatt f konstans függvény.

Bizonyítás. Legyen az $f\colon I \to \mathbb{R}$ függvény egy megoldása a (16) függvényegyenletnek és $\xi \in I$ rögzített. Tekintettel a 2.2.1. Lemmára a Páles-féle kiterjesztési tétel (ld. 2.1.1. Tétel) segítségével kapjuk, hogy létezik $\tilde{f}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ kiterjesztése f-nek úgy, hogy az

$$a_0\tilde{f}(u) + \sum_{i=1}^{n} a_i\tilde{f}(c_iu + (1 - c_i)v) = 0 \tag{23}$$

egyenlőség fennáll minden $u, v \in \mathbb{R}$ esetén, ahol

$$c_i := \frac{b_n - b_i}{b_n - b_0}, \quad (i = 1, \ldots, n);$$

ráadásul $\tilde{f}(u) = f(u)$ ahol $u \in J_\xi :=]\xi - \varepsilon, \xi + \varepsilon[\subset I$ valamely $\varepsilon > 0$ pozitív számra. (23)- ban az

$$u \to s, \quad \text{valamint} \quad v \to s - t \quad (u, v \in \mathbb{R})$$

helyettesítéseket végrehajtva

$$a_0\tilde{f}(s) + \sum_{i=1}^{n} a_i\tilde{f}(s - t(1 - c_i)) = 0 \;\; (s, t \in \mathbb{R}). \tag{24}$$

adódik. A (17) - ben leírt feltételek miatt ez az egyenlet ekvivalens az

$$\tilde{f}(s) + \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{a_0}\tilde{f}(s - t(1 - c_i)) = 0 \;\; (s, t \in \mathbb{R}). \tag{25}$$

egyenlettel, amire alkalmazhatjuk Székelyhidi tételét (ld. 2.1.2. Tétel) a következő jelölések mellett:

$$f_0 = \tilde{f}, \quad f_i = \frac{a_i}{a_0}\tilde{f} \;\; (i = 1, \ldots, n)$$

$$\psi_i(x) = -(1 - c_i)x \;\text{ és }\; \varphi_i(x) = x \quad (i = 1, \ldots, n).$$

Könnyű ellenőrizni, hogy a tétel feltételei (17) miatt teljesülnek, tehát vannak olyan $A_k^\xi : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ $(k = 0, 1, \ldots, n-1)$ szimmetrikus k-additív függvények,melyekre

$$\tilde{f}(x) = \sum_{k=0}^{n-1} D(A_k^\xi)(x) \quad (x \in \mathbb{R}). \tag{26}$$

Emlékeztetünk arra, hogy ξ tetszőleges volt, s így $f = \tilde{f}|_{J_\xi}$ lokálisan polinomiális. Az 2.1.3. Tétel értelmében viszont egy lokálisan polinomiális függvény globálisan is az. Kapjuk tehát, hogy

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} D(A_k)(x) \quad (x \in I),$$

valamely $A_k : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ $(k = 0, 1, \ldots, n-1)$ szimmetrikus k-additív függvényekre. f-nek ezt az alakját visszahelyettesíthetjük (25)-be:

$$\sum_{k=0}^{n-1} D(A_k)(s) + \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{a_0} \Big(\sum_{k=0}^{n-1} D(A_k)(s - t(1 - c_i)) \Big) = 0 \qquad (s, t \in \mathbb{R})$$

mely $c_0 := 1$ mellett

$$\sum_{i=0}^{n} a_i \Big(\sum_{k=0}^{n-1} D(A_k)(s - t(1 - c_i)) \Big) = 0 \qquad (s, t \in \mathbb{R}) \tag{27}$$

alakban írható. Az 2.1.1. Lemma és a (17) feltételek felhasználásával kapjuk, hogy

$$\sum_{i=0}^{n} a_i \Big(\sum_{k=0}^{n-1} D(A_k)(s - t(1 - c_i)) \Big) =$$

$$= a_0 \sum_{k=0}^{n-1} D(A_k)(s) + \sum_{i=1}^{n} a_i \Big(\sum_{k=0}^{n-1} D(A_k)(s - t(1 - c_i)) \Big) =$$

$$= a_0 \sum_{k=0}^{n-1} D(A_k)(s) + \sum_{i=1}^{n} a_i \Big(A_0 + \sum_{k=1}^{n-1} D(A_k)(s - t(1 - c_i)) \Big) =$$

$$= a_0 \Big(A_0 + \sum_{k=1}^{n-1} D(A_k)(s) \Big) + A_0 \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} a_i \sum_{k=1}^{n-1} D(A_k)(s - t(1 - c_i)) =$$

$$= a_0 \sum_{k=1}^{n-1} D(A_k)(s) + \sum_{i=1}^{n} a_i \sum_{k=1}^{n-1} D(A_k)(s - t(1 - c_i)) =$$

$$= a_0 \sum_{k=1}^{n-1} D(A_k)(s) + \sum_{i=1}^{n} a_i \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} A_{k,j}(s, -t(1 - c_i)) =$$

$$= a_0 \sum_{k=1}^{n-1} D(A_k)(s) + \sum_{i=1}^{n} a_i \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} (-1)^{k-j} A_{k,j}(s, t(1 - c_i)) =$$

$$= a_0 \sum_{k=1}^{n-1} D(A_k)(s) + \sum_{i=1}^{n} a_i \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{l=0}^{k} \binom{k}{k-l} (-1)^{l} A_{k,k-l}(s, t(1 - c_i)) =$$

$$= a_0 \sum_{k=1}^{n-1} D(A_k)(s) + \sum_{i=1}^{n} a_i \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{l=0}^{k} \binom{k}{l} (-1)^{l} A_{k,k-l}(s, t(1 - c_i)) =$$

$$= a_0 \sum_{k=1}^{n-1} D(A_k)(s) + \sum_{i=1}^{n} a_i \sum_{k=1}^{n-1} (D(A_k)(s) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} a_i \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{l=1}^{k} \binom{k}{l} (-1)^{l} A_{k,k-l}(s, t(1 - c_i)) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} a_i \Big(\sum_{k=1}^{n-1} (\sum_{l=1}^{k} \binom{k}{l} (-1)^{l} A_{k,k-l}(s, t(1 - c_i))) \Big),$$

így figyelembe véve az egyenlőségsor elejét és végét (27) miatt

$$\sum_{i=1}^{n} a_i\Big(\sum_{k=1}^{n-1}(\sum_{l=1}^{k}\binom{k}{l}(-1)^l A_{k,k-l}(s,t\beta_i))\Big)=0 \quad (s,t\in\mathbb{R}), \tag{28}$$

ahol $\beta_i := 1-c_i \ \ (i=1,\dots,n)$. Legyenek $x,y\in\mathbb{Q}$ racionális számok. Az s helyére xs - t, t helyére yt - t helyettesítve és a k-additív függvények racionális homogén tulajdonságát felhasználva kapjuk, hogy

$$\sum_{i=1}^{n} a_i\Big(\sum_{k=1}^{n-1}(\sum_{l=1}^{k}\binom{k}{l}(-1)^l x^{k-l}y^l A_{k,k-l}(s,t\beta_i))\Big)=0 \quad (s,\ t\in\mathbb{R}).$$

Minden $z,\ w\in\mathbb{R}$ szám approximálható azonban racionális számok sorozatával, így a fenti egyenlőség bal oldalán álló kifejezés a z és w változók egy polinomjának tekinthető. Mivel bármely $z,w\in\mathbb{R}$ mellett nullát kapunk, ez az azonosan zéró polinom, tehát

$$\sum_{i=1}^{n} a_i A_{k,k-l}(s,t\beta_i)=0 \quad (s,\ t\in\mathbb{R}) \tag{29}$$

teljesül minden $k=1,\dots,n-1$ és $l=1,\dots,k$ esetén, tekintettel arra, hogy $n\geq 2$. Az állítás megfordítása triviális. ■

2.2.1. Megjegyzés. *$k=1$ esetén (22), figyelembe véve, hogy $\beta_n=1$ az*

$$a_n A_1(t)+\sum_{i=1}^{n-1} a_i A_1(t\beta_i)=0 \quad (t\in\mathbb{R}) \tag{30}$$

egyenletre redukálódik, mely bevezetve az $\alpha_i := \frac{a_i}{a_n}$ $(i=1,\dots,n-1)$ jelölést, ekvivalens a

$$A_1(x)+\sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i A_1(\beta_i x)=0 \quad (x\in\mathbb{R}) \tag{31}$$

függvényegyenlettel. Ha ennek az egyenletnek létezik nem azonosan zérus additív megoldása, akkor a (16) *egyenletnek is van nem azonosan zérus f megoldása. A $k = 2$ esetén* (22) *a*

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \sum\limits_{i=1}^{n} a_i A_2(s, t\beta_i) & = & 0 \\ \sum\limits_{i=1}^{n} a_i A_2(t\beta_i, t\beta_i) & = & 0 \end{array} \right. \qquad (s, t \in \mathbb{R})$$

egyenletrendszert adja az f megoldás előállításában szereplő biadditív tagra.

A megoldhatóság elsőrendű (31) feltételét *Daróczy - féle függvényegyenlet*nek nevezzük és a harmadik fejezetben vizsgáljuk meg részletesen. Fontosságát – többek között – annak köszönheti, hogy ha a másodrendű feltételben szereplő egyenletrendszer első tagját alaposabban megnézzük, bármely rögzített s változó esetén egy az elsőrendű feltételt teljesítő additív függvényt kapunk, azaz ha az elsőrendű feltétel csak és kizárólag az azonosan zérus additív függvénnyel elégíthető ki, akkor a magasabb rendű feltételek is és a kiinduló súlyozott közepeket tartalmazó függvényegyenletnek csak konstans megoldásai vannak. Másfelől azonban, ha van például nem azonosan zéró biadditív rész a megoldásban, akkor additív részt is lehet konstruálni és ugyanez a helyzet a magasabb rendű feltételekkel – nem azonosan zérus A_k szimmetrikus k - additív ($k \geq 2$) megoldás létezése (alkalmasan rögzített változók mellett) maga után vonja az alacsonyabb rendű feltételeket kielégítő A_1, ..., A_{k-1} függvények létezését. Ezt a következőképpen láthatjuk be. Legyen k rögzített; az A_k függvényre vonatkozó egyenletrendszer

$$\sum_{i=1}^{n} a_i A_k(\underbrace{s, \ldots, s}_{(k-1)\text{ -szer}}, t\beta_i) = 0,$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_i A_k(\underbrace{s,\ldots,s}_{(k-2)\text{ -szer}},t\beta_i,t\beta_i)=0,...,\sum_{i=1}^{n} a_i A_k(s,,\underbrace{t\beta_i,\ldots,t\beta_i}_{(k-1)\text{ -szer}})=0,$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_i A_k(\underbrace{t\beta_i,\ldots,t\beta_i}_{k\text{ -szor}})=0.$$

Az utolsó egyenletet kivéve, minden egyes egyenletnek a bal oldala felfogható, mint az első $k-l$ változó $(l=1,\ldots k-1)$ szimmetrikus, $(k-l)$-additív függvénye, melynek diagonálisa azonosan zérus. A 2.1.1. Lemma szerint azonban a diagonálison felvett értékek egyértelműen meghatározzák a (szimmetrikus, változóikban additív) függvényeket, tehát

$$\sum_{i=1}^{n} a_i A_k(s_1,\ldots,s_{k-1},t\beta_i)=0,$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_i A_k(s_1,\ldots,s_{k-2},t\beta_i,t\beta_i)=0,...,\sum_{i=1}^{n} a_i A_k(s_1,\underbrace{t\beta_i,\ldots,t\beta_i}_{(k-1)\text{ -szer}})=0$$

írható, ahol $s_1,\ldots,s_{k-1}$ és $t\in\mathbb{R}$ tetszőleges valós számok. Ha az első változót rögzítve tartjuk, akkor ezek az egyenletek éppen azt jelentik, hogy az

$$A_{k-1}(s_2,\ldots,s_k):=A_k(s_1,s_2,\ldots,s_k)$$

szimmetrikus $(k-1)$-additív függvény eleget tesz a $(k-1)$-edrendű feltételeknek. Mivel s_1 tetszőlegesen rögzíthető, ezért nem azonosan zérus A_k monom létezése implikálja nem azonosan zérus A_{k-1} monom létezését is a megoldófüggvényt előállító összeg tagjai között. A magasabb rendű feltételek diszkusszióját azonban csak az n és a külső a_i paraméterek speciális választása mellett végezzük el a következő fejezetben.

2.3. Nem azonosan zérus biadditív megoldás létezése

2.3.1. Tétel. (Varga [30]) *Legyenek* $b_0, b_1, b_2, b_3 \in]0,1[$ *páronként különböző valós számok úgy, hogy* $b_0 < b_1 < b_2 < b_3$ *és tekintsük az*

$$f\left(b_0x + (1-b_0)y\right) + f\left(b_3x + (1-b_3)y\right) =$$
$$= f\left(b_1x + (1-b_1)y\right) + f\left(b_2x + (1-b_2)y\right)$$

függvényegyenletet egy nemüres, nyílt I *intervallumon értelmezett* $f\colon I \to \mathbb{R}$ *ismeretlen függvénnyel. Ha* $b_0 + b_3 \neq b_1 + b_2$*, akkor a függvényegyenletnek csak konstans megoldásai vannak, míg a*

$$b_0 + b_3 = b_1 + b_2$$

esetben a megoldás általános alakja

$$f(x) = A_2(x,x) + A_1(x) + A_0 \quad (x \in I),$$

ahol A_0*, illetve* $A_1\colon I \to \mathbb{R}$ *rendre tetszőleges konstans, illetve additív függvény (Jensen-affin rész) és az* $A_2\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *szimmetrikus, biadditív függvény kielégíti az*

$$A_2(b_0x, b_3x) = A_2(b_1x, b_2x) \quad (x \in \mathbb{R})$$

feltételt.

Bizonyítás. A tételben szereplő függvényegyenlet (16) típusú egyenlet $n = 3$, $a_0 = a_3 = 1$, $a_1 = a_2 = -1$ mellett. Így az 2.2.1. Tétel miatt f pontosan akkor megoldása az egyenletnek, ha léteznek szimmetrikus $A_k\colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ $(k = 0, 1, 2)$ k-additív függvények a

$$-A_1(t\beta_1) - A_1(t\beta_2) + A_1(t\beta_3) = 0 \quad (x \in \mathbb{R})$$

$$-A_2(s, t\beta_1) - A_2(s, t\beta_2) + A_2(s, t\beta_3) = 0 \quad (x \in \mathbb{R}) \tag{32}$$

$$(33) \quad -A_2(t\beta_1, t\beta_1) - A_2(t\beta_2, t\beta_2) + A_2(t\beta_3, t\beta_3) = 0 \quad (x \in \mathbb{R})$$

tulajdonságokkal, hogy

$$f(x) = A_2(x, x) + A_1(x) + A_0 \quad (x \in I).$$

Emlékeztetünk rá, hogy

$$\beta_i := \frac{b_i - b_0}{b_3 - b_0}, \quad i = 1, 2, 3,$$

azaz $\beta_3 = 1$. Mivel az A_2-re vonatkozó másodrendű feltétel (32) egyenlete formailag az A_1-re vonatkozó elsőrendű feltétel, az utóbbival külön nem foglalkozunk. A_2 mindkét változójában additív, így (32) ekvivalens az

$$A_2(s, t(\beta_1 + \beta_2 - \beta_3)) = 0 \qquad (s, t \in \mathbb{R})$$

egyenlettel. Könnyű látni, hogy ez pontosan akkor áll fenn nem azonosan zérus A_2 esetén, ha $\beta_1 + \beta_2 - \beta_3 = 0$; mely feltétel a β_i paraméterek definíciója miatt ekvivalens azzal, hogy

$$(34) \qquad b_0 + b_3 = b_1 + b_2.$$

Ez tehát egyúttal azt is jelenti, hogy ha $b_0 + b_3 \neq b_1 + b_2$, akkor sem az első, sem pedig a másodrendű feltétel nem elégíthető ki, csak az azonosan zéró additív, illetve biadditív függvényekkel, az f tehát konstans. Másfelől, ha $b_0 + b_3 = b_1 + b_2$, akkor az elsőrendű feltétel és (32) is automatikusan teljesül tetszőleges additív, illetve biadditív függvénnyel. Meg fogjuk mutatni, hogy a $b_0 + b_3 = b_1 + b_2$ feltétel mellett (33) ekvivalens az

$$A_2(b_0 x, b_3 x) = A_2(b_1 x, b_2 x)$$

egyenlőséggel. Valóban, (33) - ban a β_i paraméterek definícióját használva, majd a t helyett $(b_3 - b_0)t$ - t írva kapjuk, hogy

$$(35) \quad \sum_{i=1}^{2} A_2((b_i - b_0)t, (b_i - b_0)t) - A_2((b_3 - b_0)t, (b_3 - b_0)t) = 0$$

bármely $t \in \mathbb{R}$ esetén. Mivel A_2 változóiban szimmetrikus, biadditív függvény

$$A_2((b_i - b_0)t, (b_i - b_0)t) = A_2(b_i t, b_i t) - 2A_2(b_i t, b_0 t) + A_2(b_0 t, b_0 t) \quad (t \in \mathbb{R})$$

fennáll $i = 1, 2, 3$ esetén. Ezt (35)- ben felhasználva

$$A_2(b_0 t, b_0 t) + A_2(b_1 t, b_1 t) + A_2(b_2 t, b_2 t) - A_2(b_3 t, b_3 t) -$$
$$-2A_2(b_1 t, b_0 t) - 2A_2(b_2 t, b_0 t) + 2A_2(b_3 t, b_0 t) = 0$$

következik. Innen a (34) szerint adódó

$$A_2(b_0 t, b_0 t) = A_2((b_1 + b_2 - b_3)t, b_0 t), \quad A_2(b_1 t, b_1 t) = A_2((b_0 + b_3 - b_2)t, b_2 t),$$

$$A_2(b_2 t, b_2 t) = A_2((b_0 + b_3 - b_1)t, b_2 t)$$

egyenlőségeket és A_2 biadditivitását használva összevonás után kapjuk, hogy

$$A_2(b_0 x, b_3 x) = A_2(b_1 x, b_2 x) \quad (x \in \mathbb{R}),$$

ami bizonyítandó volt. ■

Könnyű látni, hogy ha $0 < b_0 < b_1 < b_2 < b_3 < 1$ és $b_0 + b_3 = b_1 + b_2$, akkor az

(a) $A_2\left(\frac{1-(b_3/b_1)}{1-(b_0/b_1)}x, x\right) = 0 \quad (x \in \mathbb{R})$

(b) $A_2(b_0 x, b_3 x) = A_2(b_1 x, b_2 x) \quad (x \in \mathbb{R})$

tulajdonságok ekvivalensek. Valóban, $(a) \Rightarrow (b)$ a következő módon látható: minden $x \in \mathbb{R}$ esetén (a) nem más, mint az

$$A_2\left(\frac{b_1 - b_3}{b_1 - b_0}x, x\right) = 0$$

egyenlet. Ha x helyett $(b_1 - b_0)x$ - t helyettesítünk, akkor

$$A_2((b_1 - b_3)x, (b_1 - b_0)x) = 0.$$

Innen A_2 biadditivitását felhasználva (34) szerint

$$A_2(b_1x, (b_3 - b_2)x) = A_2(b_3x, (b_1 - b_0)x)$$

következik. Ismételten A_2 biadditivitására hivatkozva pedig (b)- t kapjuk. A $(b) \Rightarrow (a)$ implikáció hasonlóan igazolható. Az alábbi lemma segítségével most már példát tudunk adni olyan megoldásra, melynek biadditív része nem tűnik el. A lemma közvetlen következménye az 1. és 2. lemmának [7]- ben, mely Daróczy ismert tételén alapszik [8]; lásd még Kuczma [16].

2.3.1. Lemma. (Daróczy, Lajkó, Lovas, Maksa, Páles [7]) *Pontosan akkor létezik nem azonosan zérus szimmetrikus $A_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ biadditív függvény, mely rendelkezik az*

$$A_2(\lambda x, x) = 0 \quad (x \in \mathbb{R})$$

tulajdonsággal, ha λ transzcendens szám vagy ha λ olyan algebrai szám, amelynek algebrai konjugáltja $-\lambda$.

2.3.1. Példa. *Legyen $c > 1$. Ekkor a*

$$b_0 = \frac{1}{2ce}, \quad b_3 = \frac{1}{c}, \quad b_1 = \frac{1}{ce}, \quad b_2 = \frac{2e-1}{2ce}$$

választás mellett (e az Euler-féle szám) $b_0 + b_3 = b_1 + b_2$ és a 2.3.1. Lemmában szereplő

$$\lambda = \frac{1 - (b_3/b_1)}{1 - (b_0/b_1)} = 2(1 - e)$$

szám transzcendens. Igy létezik az

$$f(b_0x + (1 - b_0)y) + f(b_3x + (1 - b_3)y) =$$
$$= f(b_1x + (1 - b_1)y) + f(b_2x + (1 - b_2)y)$$

függvényegyenletnek

$$f(x) = A_2(x,x) + A_1(x) + A_0 \quad (x \in I)$$

alakú megoldása, melynél A_2 *nem az azonosan zérus szimmetrikus biadditív függvény.*

A példák sorát konstruálhatjuk meg annak az egyszerű észrevételnek a segítségével, hogy ha b_3/b_1 és b_0/b_1 közül pontosan egy transzcendens, akkor

$$\lambda := \frac{1-(b_3/b_1)}{1-(b_0/b_1)}$$

is transzcendens.

3. A Daróczy-féle probléma

3.1. Daróczy tétele

A második fejezet 2.2.1. Megjegyzésében leírtak miatt célunk a (31) függvényegyenlet nem azonosan zérus additív megoldásainak létezésére szükséges és elegendő feltételeket adni. Daróczy ezt az $n = 2$ esetben megoldotta.

3.1.1. Tétel. (Daróczy [8]) *Rögzített $\alpha \neq 0, \beta$ valós paraméterek mellett az*

(36) $$A(x) + \alpha A(\beta x) = 0 \quad (x \in \mathbb{R})$$

függvényegyenletnek pontosan akkor van nem azonosan zérus $A\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ additív megoldása, ha

$$\gamma := -\frac{1}{\alpha} \quad \text{és} \quad \beta$$

transzcendens számok vagy algebraiak ugyanazzal a definiáló főpolinommal.

3.1.1. Megjegyzés. *A (36) egyenlet ekvivalens az*

$$A(\beta x) = \gamma A(x) \quad (x \in \mathbb{R})$$

egyenlettel. Ezt a továbbiakban úgy fejezzük ki, hogy a nemtriviális megoldások szükségképpen szemihomogének. Látni fogjuk, hogy jó motiváció a (31) egyenlet nem azonosan zéró szemihomogén megoldásának létezésére feltételeket keresni tetszőleges $n \in \mathbb{N}$ esetén.

A következő lemma megvilágítja a Daróczy-féle tételben szereplő algebrai feltétel hátterét. A továbbiakban $\mathbb{Q}(x)$ a $\mathbb{Q}$ racionális számtest $x \in \mathbb{R}$ elemmel való testbővítését jelöli, $\mathbb{Q}[x]$ pedig a racionális együtthatós egyváltozós polinomok gyűrűjét.

3.1.1. Lemma. *Rögzített α, β valós paraméterek mellett a (36) függvényegyenletnek pontosan akkor van nem azonosan zérus $A: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ additív megoldása, ha létezik*

$$\delta: \mathbb{Q}(\beta) \to \mathbb{Q}(\alpha) \textit{ testizomorfizmus úgy, hogy } \delta(\beta) = -\frac{1}{\alpha}.$$

Bizonyítás. Először megmutatjuk, hogy ha az $A: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ nem azonosan zérus additív függvény megoldása (36)- nak, akkor létezik

$$\delta: \mathbb{Q}(\beta) \to \mathbb{Q}(\alpha) \text{ testizomorfizmus úgy, hogy } \delta(\beta) = -\frac{1}{\alpha}.$$

Korábban megjegyeztük, hogy a $\gamma := -\dfrac{1}{\alpha}$ jelölés mellett (36) ekvivalens az

$$A(\beta x) = \gamma A(x) \qquad (x \in \mathbb{R})$$

függvényegyenlettel. Most x helyére βx-et helyettesítve

$$A(\beta^2 x) = \gamma^2 A(x)$$

adódik és n szerinti teljes indukcióval könnyen belátható, hogy

$$A(\beta^n x) = \gamma^n A(x) \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Mivel A additív (és ennélfogva racionális homogén) azt kapjuk, hogy ha $p \in \mathbb{Q}[x]$, akkor

$$A(p(\beta)x) = p(\gamma)A(x) \qquad (x \in \mathbb{R}). \tag{37}$$

Másfelől, ha $q \in \mathbb{Q}[x]$ úgy, hogy $q(\beta) \neq 0$, akkor

$$A\left(\frac{x}{q(\beta)}\right) = \frac{1}{q(\gamma)}A(x). \tag{38}$$

Valóban, (37) miatt

$$A(q(\beta)x) = q(\gamma)A(x) \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Az x- et kicserélve $\frac{x}{q(\beta)}$- val ez az egyenlet

$$A(x) = q(\gamma)A\left(\frac{x}{q(\beta)}\right)$$

alakban írható. Mivel A nem azonosan nulla, van olyan $x_0 \in \mathbb{R}$, melyre $A(x_0) \neq 0$. Ez azt jelenti, hogy

$$0 \neq q(\gamma)A(\frac{x_0}{q(\beta)}),$$

melyből következik, hogy $q(\gamma) \neq 0$ és így (38) fennáll. Tekintettel (37)- re és (38)- ra

$$A\left(\frac{p(\beta)}{q(\beta)}x\right) = \frac{p(\alpha)}{q(\alpha)}A(x)$$

teljesül minden $x \in \mathbb{R}$ esetén.
Tekintsük most a

$$\delta\colon \frac{p(\beta)}{q(\beta)} \in \mathbb{Q}(\beta) \to \frac{p(\gamma)}{q(\gamma)} \in \mathbb{Q}(\gamma) \quad \Big(= \mathbb{Q}(\alpha)\Big)$$

leképezést. Emlékeztetünk rá, hogy $\gamma := -(1/\alpha)$. Könnyű látni, hogy δ jóldefiniált, mivel ha A nem azonosan zérus és

$$\frac{p(\beta)}{q(\beta)} = \frac{\tilde{p}(\beta)}{\tilde{q}(\beta)} =: \tilde{\beta},$$

akkor

$$A(\tilde{\beta}x) = \frac{p(\gamma)}{q(\gamma)}A(x) \text{ és } A(\tilde{\beta}x) = \frac{\tilde{p}(\gamma)}{\tilde{q}(\gamma)}A(x) \quad (x \in \mathbb{R})$$

egyenlőségekből

$$\frac{p(\gamma)}{q(\gamma)} = \frac{\tilde{p}(\gamma)}{\tilde{q}(\gamma)}$$

következik. Legyen most

$$s := \frac{p(\beta)}{q(\beta)} \quad \text{és} \quad t := \frac{p'(\beta)}{q'(\beta)}.$$

Ekkor

$$\delta(s+t) = \delta\left(\frac{p(\beta)}{q(\beta)} + \frac{p'(\beta)}{q'(\beta)}\right) = \delta\left(\frac{(pq'+p'q)(\beta)}{(qq')(\beta)}\right) =$$

$$= \frac{(pq'+p'q)(\gamma)}{(qq')(\gamma)} = \frac{p(\gamma)}{q(\gamma)} + \frac{p'(\gamma)}{q'(\gamma)} = \delta(s) + \delta(t),$$

valamint

$$\delta(s \cdot t) = \delta\left(\frac{pp'(\beta)}{qq'(\beta)}\right) = \frac{pp'(\gamma)}{qq'(\gamma)} = \delta(s) \cdot \delta(t),$$

azaz δ izomorfizmus a $\mathbb{Q}(\beta)$ és $\mathbb{Q}(\alpha)$ testek között. A

$$p(t) = t, \quad q(t) = 1$$

választással pedig kapjuk, hogy

$$\delta(\beta) = \gamma \quad \left(= -\frac{1}{\alpha}\right).$$

Megfordítva, legyen

$$\delta\colon \mathbb{Q}(\beta) \to \mathbb{Q}(\alpha) \text{ izomorfizmus úgy, hogy } \delta(\beta) = -\frac{1}{\alpha}.$$

Tekintsük $\mathbb{R}$- et, mint $\mathbb{Q}(\beta)$ feletti vektorteret és jelölje e vektortér egy bázisát $\mathcal{H}$. Legyen $A\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ olyan, hogy $c_j \in \mathbb{Q}(\beta)$ és $h_j \in \mathcal{H}$ esetén tetszőleges $x = \sum_j c_j h_j$ valós számra

$$A(x) := \sum_j \delta(c_j)A(h_j),$$

ahol A értékei a bázis elemein önkényesen választhatók. δ additivitása maga után vonja A additivitását és

$$A(\beta x) = A\Big(\sum_j \beta c_j h_j\Big) = \sum_j \delta(\beta c_j)A(h_j) =$$

$$= \sum_j \delta(\beta)\delta(c_j)A(h_j) = -\frac{1}{\alpha}\sum_j \delta(c_j)A(h_j) = -\frac{1}{\alpha}A(x)$$

teljesül minden $x \in \mathbb{R}$ esetén. ■

3.1.1. Következmény. *Tetszőleges β, γ valós számok esetén, pontosan akkor létezik*

$$\delta\colon \mathbb{Q}(\beta) \to \mathbb{Q}(\gamma) \quad \textit{testizomorfizmus, melyre } \delta(\beta) = \gamma,$$

ha β és γ is transzcendens szám vagy mindkettő algebrai szám ugyanazzal a definiáló főpolinommal.

Daróczy a (31) függvényegyenlet nem azonosan zérus additív megoldásának létezésére adott szükséges és elegendő feltételt az $n = 2$ esetben úgy, hogy a feltételeket a paraméterek algebrai tulajdonságával fogalmazta meg. Mi is ezt kíséreljük meg tetszőleges $n \geq 3$ egész szám esetén az $(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1})$ és $(\beta_1, \ldots, \beta_{n-1})$ paraméter $(n-1)$-esek algebrai tulajdonságainak segítségével.

3.2. A testizomorfizmus-probléma

Először egy észrevételt teszünk a definiáló polinomokról. Jól ismert, hogy ha $\lambda \in \mathbb{R}$, akkor a $\mathbb{Q}[x]$ polinomgyűrű

$$\mathcal{I}(\lambda) := \{\ p \in \mathbb{Q}[x] \mid p(\lambda) = 0\ \}$$

ideálja egy elemmel generálható, azaz létezik $p_0 \in \mathcal{I}(\lambda)$ úgy, hogy bármely $p \in \mathcal{I}(\lambda)$ esetén van olyan $q \in \mathbb{Q}[x]$ polinom, hogy $p = p_0 \cdot q$ (azaz minden ideál főideál). Ez azonban a többváltozós polinomgyűrűkben már nem áll fenn.

3.2.1. Példa. *Tekintsük a kétváltozós $\mathbb{Q}[x_1, x_2]$ polinomgyűrűt és legyen például*

$$p(x,y) := (x^3 - 2)(y^2 - 3) \quad \textit{és} \quad q(x,y) := x^3y^2 - 6.$$

Először megmutatjuk, hogy q irreducibilis. Tegyük fel, hogy

$$q(x,y) = g(x,y)h(x,y)$$

bizonyos racionális együtthatós g és h polinomokkal. Rögzítve például az első változót, mint egy tetszőleges m egész számot,

$$q(m,y) = g(m,y)h(m,y)$$

írható, ahol az egyenlet jobb oldalán szereplő mindkét polinom racionális együtthatós polinomja az y változónak, míg a bal oldalon egy olyan másodfokú polinom áll, melynek gyöke a

$$t_m := \frac{1}{m}\sqrt{\frac{6}{m}}$$

szám, azaz $g(m, t_m) = 0$, vagy $h(m, t_m) = 0$. Megszámlálhatóan végtelen sok m esetén (például végigfuthatunk a 6 páros hatványain) feltehető, hogy $h(m, t_m) = 0$. Mivel t_m irracionális és ennélfogva másodfokú algebrai szám, azt kapjuk, hogy $h(m, y)$ az y változónak legalább *másodfokú polinomja. Ez azt jelenti, hogy* $g(m, y) =$ *konstans* $(y \in \mathbb{R})$*, azaz a második változó szerinti parciális deriváltja* $D_2 g(m, y) = 0$ *megszámlálhatóan végtelen sok* m *esetén.* $D_2 g(x, y)$ *viszont* x *- nek polinomja (véges sok gyökkel), azaz* $D_2 g(x, y) = 0$*. Kapjuk tehát, hogy*

$$q(x, y) = g(x)h(x, y).$$

Tetszőlegesen rögzített x *mellett mindkét oldalt* y *polinomjának tekintve a konstans tagok összevetése mutatja, hogy* $g(x)$ *maga is konstans polinom.*

Ekkor $(\sqrt[3]{2}, \sqrt{3}) \in \mathbb{R}^2$ *egyaránt zérushelye* p*-nek és* q*-nak,* q *irreducibilis de nem osztója* p*-nek.*

3.2.1. Definíció. *Legyen* m *pozitív egész szám és tekintsük az* $\mathbb{R}^m$ *rendezett valós szám* m*-esek halmazának*

$$\vec{\lambda} := (\lambda_1, \ldots, \lambda_m) \text{ és } \vec{\mu} := (\mu_1, \ldots, \mu_m) \text{ elemeit.}$$

(*i*) *A* $\mathbb{Q}[x_1, \ldots, x_m]$ *polinomgyűrű*

$$\mathcal{I}(\vec{\lambda}) := \{\ p \in \mathbb{Q}[x_1, \ldots, x_m] \mid p(\lambda_1, \ldots, \lambda_m) = 0\ \}$$

ideálját a $\vec{\lambda} := (\lambda_1, \ldots, \lambda_m)$ *definiáló ideáljának nevezzük. Speciálisan, ha*

$$\vec{\lambda} = (\lambda_1, \ldots, \lambda_m)$$

definiáló ideálja csak az azonosan zéró polinomot tartalmazza, akkor az mondjuk, hogy

$$(\lambda_1, \ldots, \lambda_m)$$

szám m*-es algebrailag független. Egyébként algebrailag függőnek mondjuk.*

(ii) Ha $\vec{\lambda}$ és $\vec{\mu}$ definiáló ideálja ugyanaz, akkor azt mondjuk, hogy $\vec{\lambda}$ és $\vec{\mu}$ algebrailag konjugáltak.

3.2.1. Megjegyzés. *Az $m = 1$ speciális esetben az $\mathcal{I}(\lambda)$ ideál egy elemmel generálható (λ definiáló főpolinomja), valamint λ és μ algebrailag konjugáltak ha mindkettő transzcendens, vagy mindkettő algebrai és definiáló főpolinomjuk ugyanaz.*

A koordinátasík $(\sqrt{\pi}, 2\pi + 1)$ pontjának koordinátái például algebrailag függők $\mathbb{Q}$ fölött, mivel a nem azonosan zéró

$$P(x_1, x_2) = 2x_1^2 - x_2 + 1$$

polinom eltűnik, ha $x_1 = \sqrt{\pi}$ and $x_2 = 2\pi + 1$. Algebrailag független elemrendszerekre a Lindemann-Weierstrass tétel [3] segítségével konstruálhatunk példát: ha $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ algebrai számok és lineárisan *függetlenek a $\mathbb{Q}$ számtest felett, akkor*

$$e^{\alpha_1}, \ldots, e^{\alpha_n}$$

algebrailag független szám n - es.

A következő lemma általánosítása a 3.1.1. Következményben szereplő észrevételnek.

3.2.1. Tétel. (Varga, Vincze [33]) *Legyen $2 \leq n \in \mathbb{N}$,*

$$\vec{\lambda} := (\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}) \quad \text{és} \quad \vec{\mu} := (\mu_1, \ldots, \mu_{n-1})$$

tetszőleges $\mathbb{R}^{n-1}$-beli elemek. Pontosan akkor létezik

$$\delta \colon \mathbb{Q}(\mu_1, \ldots, \mu_{n-1}) \to \mathbb{Q}(\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1})$$

testizomorfizmus úgy, hogy

$$\delta(\mu_i) = \lambda_i \qquad (i = 1, \ldots, n-1),$$

ha $\vec{\lambda}$ és $\vec{\mu}$ algebrailag konjugáltak.

Bizonyítás. A bizonyítás során a 3.2.1. Definíció jelöléseit használjuk, azaz $(\mu_1, \ldots, \mu_{n-1})$ és $(\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1})$ definiáló ideálját rendre $\mathcal{I}(\vec{\mu})$- vel és $\mathcal{I}(\vec{\lambda})$- val jelöljük. Mivel testizomorfizmusról van szó, minden $q \in \mathbb{Q}$ esetén $\delta(q) = q$.
Így azt kell belátnunk, hogy $w,\ k \in \mathbb{Q}[x_1, \ldots, x_{n-1}]$ és $k \notin \mathcal{I}(\vec{\mu})$ esetén a

$$z = \frac{w(\mu_1, \ldots, \mu_{n-1})}{k(\mu_1, \ldots, \mu_{n-1})} \mapsto \delta(z) := \frac{w(\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1})}{k(\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1})}, \tag{39}$$

leképezés pontosan akkor jóldefiniált, ha $\mathcal{I}(\vec{\mu}) = \mathcal{I}(\vec{\lambda})$. Először azt igazoljuk, hogy ha $\mathcal{I}(\vec{\mu}) = \mathcal{I}(\vec{\lambda})$, akkor (39) jóldefiniált. Egyrészt ugyanis a definiáló ideálok egyenlősége maga után vonja, hogy ha $k \notin \mathcal{I}(\vec{\mu})$, akkor $k \notin \mathcal{I}(\vec{\lambda})$. Másrészt legyen $z \in \mathbb{Q}(\mu_1, \ldots, \mu_{n-1})$, mely előáll

$$z = \frac{p(\mu_1, \ldots, \mu_{n-1})}{q(\mu_1, \ldots, \mu_{n-1})} = \frac{w(\mu_1, \ldots, \mu_{n-1})}{k(\mu_1, \ldots, \mu_{n-1})} \tag{40}$$

alakban is valamely $p,\ q,\ w,\ k \in \mathbb{Q}[x_2, \ldots, x_{n-1}]$ esetén, ahol $q,\ k \notin \mathcal{I}(\vec{\mu})$. Igazolnunk kell, hogy ha $\mathcal{I}(\vec{\mu}) = \mathcal{I}(\vec{\lambda})$, akkor

$$\frac{p(\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1})}{q(\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1})} = \frac{w(\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1})}{k(\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1})}. \tag{41}$$

A (40) előállításból következik, hogy

$$(pk - wq)(\mu_1, \ldots, \mu_{n-1}) = 0,$$

ami azt jelenti, hogy $pk - wq \in \mathcal{I}(\vec{\mu})$. Figyelembe véve az $\mathcal{I}(\vec{\mu}) = \mathcal{I}(\vec{\lambda})$ egyenlőséget kapjuk, hogy

$$(pk - wq)(\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}) = 0.$$

Mivel $q,\ k \notin \mathcal{I}(\vec{\mu})$ és $\mathcal{I}(\vec{\mu}) = \mathcal{I}(\vec{\lambda})$, ezért $q,\ k \notin \mathcal{I}(\vec{\lambda})$ és keresztbeosztással (41) egyszerűen következik. Könnyű igazolni (v.ö. 3.1.1. Lemma bizonyítása), hogy δ testizomorfizmus a kívánt tulajdonsággal.

Megfordítva, tegyük fel, hogy δ testizomorfizmus és

$$\delta(\mu_i) = \lambda_i \quad (i = 1, \ldots, n-1).$$

Ekkor δ a (39) képlet szerint hat. Mivel $\delta(0) = 0$ a $p \in \mathcal{I}(\vec{\mu})$ feltétel implikálja, hogy $p \in \mathcal{I}(\vec{\lambda})$. Ezzel igazoltuk, hogy $\mathcal{I}(\vec{\mu}) \subset \mathcal{I}(\vec{\lambda})$. A δ inverzére alkalmazva az előző érvelést $\mathcal{I}(\vec{\lambda}) \subset \mathcal{I}(\vec{\mu})$ adódik, ami teljessé teszi a bizonyítást. ∎

3.3. Algebrai lineáris k-sokaságok

3.3.1. Definíció. *Az $\mathbb{R}^m$ lineáris tér egy k-dimenziós alterének eltoltját lineáris k-sokaságnak mondjuk. A $k = 1$ esetben egyenesről, míg a $k = m - 1$ esetben hipersíkról beszélünk. Azt mondjuk, hogy az F_k lineáris k-sokaság algebrai, ha van olyan nem azonosan zérus $\mathbb{Q}[x_1, \ldots, x_m]$-beli P polinom, mely eltűnik F_k minden pontjában, azaz*

$$P \in \cap_{\vec{\lambda} \in F_k} \mathcal{I}(\vec{\lambda}).$$

3.3.1. Megjegyzés. *A $k = 0$ esetben a sokaság egy pontra redukálódik és visszakapjuk a 3.2.1. definíciót.*

3.3.1. Lemma. (Varga, Vincze [32]) *$\mathbb{R}^m$ egy F_k lineáris k-sokasága pontosan akkor algebrai, ha előáll $\mathbb{Q}[x_1, \ldots, x_m]$-beli nem azonosan zérus polinomok gyökeinek uniójaként.*

Bizonyítás. Ha F_k algebrai, az állítás triviális. Megfordításának bizonyítása k-szerinti indukcióval történik az alábbi módon. Mivel F_0 egy elemű, az előző megjegyzés alapján $k = 0$- ra az állítás nyilvánvaló. Tegyük fel, hogy $0 \le k \le m-1$ esetén az állítás igaz minden $\mathbb{R}^m$-beli lineáris k-sokaságra. Tekintsük az F_{k+1} lineáris $(k+1)$-sokaságot az alábbi formában:

$$F_{k+1} = \{v_0 + tv + t_1v_1 + \ldots + t_kv_k \mid (t, t_1, \ldots, t_k) \in \mathbb{R}^{k+1}\},$$

ahol $v \in \mathbb{R}^m$ és $v_j \in \mathbb{R}^m$ $(j = 0, 1, \dots, k)$ rögzítettek. Legyen továbbá

$$F_k(t) = \{v_0 + tv + t_1v_1 + \ldots + t_kv_k \mid (t_1, \dots, t_k) \in \mathbb{R}^k\}.$$

Ekkor $F_k(t) = F_k(0) + tv$ egy lineáris k-sokaság melyre $F_k(t) \subset F_{k+1}$. Szemléletesen szólva F_{k+1}-et beszőttük párhuzamos $F_k(t)$ lineáris k-sokaságokkal, ahol a t paraméter befutja a valós számok halmazát. Most tételezzük fel, hogy F_{k+1} előáll $\mathbb{Q}[x_1, \dots, x_m]$-beli nem azonosan zérus polinomok gyökeinek uniójaként. Mivel minden valós t esetén $F_k(t) \subset F_{k+1}$, az indukciós feltételt felhasználva kapjuk, hogy létezik nem azonosan zérus $P_t \in \mathbb{Q}[x_1, \dots, x_m]$ polinom, melyre $P_t(u+tv) = 0$ minden $u \in F_k(0)$ esetén. Jól ismert, hogy a $\mathbb{Q}[x_1, \dots, x_m]$ polinomgyűrű megszámlálható, így a fentiek miatt van olyan nem megszámlálható (és így végtelen) $I \subset \mathbb{R}$ halmaz és nem azonosan zérus $P \in \mathbb{Q}[x_1, \dots, x_m]$ polinom, hogy bármely $t \in I$ mellett $P_t = P$. Azt kaptuk, hogy

$$P(u + tv) = 0$$

fennáll minden $u \in F_k(0)$ és $t \in I$ esetén. Ebből következik, hogy minden egyes $u \in F_k(0)$- ra a $Q_u(t) = P(u + tv)$ módon definiált polinomnak végtelen sok gyöke van, azaz Q_u azonosan zérus. Mivel így a $P(u + tv) = 0$ egyenlőség fennáll minden $u \in F_k(0)$ és $t \in \mathbb{R}$ esetén, P eltűnik F_{k+1} minden elemén. ∎

3.3.2. Megjegyzés. *A fenti lemma szerint $\mathbb{R}^m$ egy F_k lineáris k-sokasága pontosan akkor algebrai, ha F_k minden pontja (mint szám m-es) algebrailag függő.*

3.3.2. Lemma. (Varga, Vincze [32]) *Legyen $m \in \mathbb{N}$ és $(\lambda_1, \dots, \lambda_m) \in \mathbb{R}^m$. A*

$$\lambda_1 x_1 + \ldots \lambda_{m-1} x_{m-1} + \lambda_m = x_m \tag{42}$$

egyenlőség által meghatározott $\mathbb{R}^m$-beli hipersík pontosan akkor algebrai, ha a $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ együtthatók mindegyike algebrai szám.

Bizonyítás. Legyen a (42) egyenlőséggel definiált hipersík algebrai. Ekkor definíció szerint van olyan nem azonosan zérus $P \in \mathbb{Q}[x_1, \ldots, x_m]$ polinom, mely eltűnik a hipersík minden pontjában. Ezért

$$P(x_1, x_2, \ldots, x_{m-1}, \lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_{m-1} x_{m-1} + \lambda_m) = 0. \tag{43}$$

Az $x_1 = \ldots = x_{m-1} = 0$ helyettesítéssel élve könnyen látható, hogy λ_m egy gyöke a $p(t) := P(0, \ldots, 0, t)$ polinomnak.

Az állítással ellentétben tegyük fel, hogy λ_m nem algebrai szám, azaz $p(t)$ azonosan zérus polinom. Bárki könnyen utána gondolhat, hogy ha

$$P(0, \ldots, 0, t) = 0$$

akkor $D_m P$- vel jelölve szokásos módon a P polinom x_m változója szerinti parciális deriváltját

$$D_m P(0, \ldots, 0, t) = 0. \tag{44}$$

Differenciálva (43)-mat x_i - szerint, minden $i = 1, \ldots, m-1$ index esetén

$$D_i P(0, \ldots, 0, \lambda_m) + \lambda_i D_m P(0, \ldots, 0, \lambda_m) = 0$$

és a fentiek miatt így $D_i P(0, \ldots, 0, \lambda_m) = 0$ $(i = 1, \ldots, m-1)$. Mivel λ_m nem algebrai szám $D_i P(0, \ldots, 0, t) = 0$ teljesül, $(i = 1, \ldots, m-1)$. Hasonlóan (44)-hez, ebből következik, hogy $D_m D_i P(0, \ldots, 0, t) = 0$ fennáll minden $i = 1, \ldots, m-1$ indexre és $t \in \mathbb{R}$-re. Természetesen ugyanez teljesül az $i = m$ esetben. Differenciálva (43)-mat az x_i és x_j változók szerint kapjuk, hogy

$$D_j D_i P(0, \ldots, 0, \lambda_m) + \lambda_j D_m D_i P(0, \ldots, 0, \lambda_m) +$$

$$\lambda_i D_j D_m P(0, \ldots, 0, \lambda_m) + \lambda_i \lambda_j D_m D_m P(0, \ldots, 0, \lambda_m) = 0,$$

melyből a fentieket figyelembe véve könnyen jön, hogy

$$D_j D_i P(0, \ldots, 0, \lambda_m) = 0.$$

Mivel λ_m transzcendens, $D_i D_j P(0,\ldots,0,t) = 0$ tetszőleges i,j indexek esetén, beleértve az $i = m$ vagy $j = m$ eseteket is. A Taylor formulára való tekintettel a $(0,0,\ldots,0)$- ban, P az azonosan zérus polinom, ami ellentmond a feltételnek.

Legyen most $x_1 := 1$ és $x_2 = \ldots = x_{m-1} = 0$. Ekkor (43)- ból $P(1,0,\ldots,0,\lambda_1+\lambda_m) = 0$, azaz $\lambda_1 + \lambda_m$ egy gyöke a

$$p(t) := P(1,0,\ldots,0,t)$$

polinomnak. Hasonló érvelés - mint λ_m esetében - adja, hogy $\lambda_1 + \lambda_m$ algebrai szám. Az algebrai számok testet alkotnak, ezért

$$\lambda_1 = \lambda_1 + \lambda_m - \lambda_m$$

is algebrai szám. A bizonyítás módszere hasonló a többi együttható esetében is.

Megfordítva; tegyük fel, hogy a $\lambda_1,\ldots,\lambda_m$ együtthatók mindegyike algebrai szám és tekintsük definiáló polinomjaikat a következő alakban:

$$\Omega_1(t) := (t-\lambda_{1,1})(t-\lambda_{1,2})\cdots(t-\lambda_{1,k_1}),$$

$$\Omega_2(t) := (t-\lambda_{2,1})(t-\lambda_{2,2})\cdots(t-\lambda_{2,k_2}),$$

$$\vdots$$

$$\Omega_{m-1}(t) := (t-\lambda_{m-1,1})(t-\lambda_{m-1,2})\cdots(t-\lambda_{m-1,k_{m-1}}),$$

$$\Omega_m(t) := (t-\lambda_{m,1})(t-\lambda_{m,2})\cdots(t-\lambda_{m,k_m}),$$

ahol $\lambda_{i,1} := \lambda_i$ és bármely további j index esetén $\lambda_{i,j}$ algebrai konjugáltja λ_i-nek. Tekintsük a

$$P(x_1,\ldots,x_m) :=$$

$$\prod_{i_1=1}^{k_1}\prod_{i_2=1}^{k_2}\dots\prod_{i_m=1}^{k_m}(x_m-\lambda_{1,i_1}x_1-\dots-\lambda_{m-1,i_{m-1}}x_{m-1}-\lambda_{m,i_m})$$

polinomot, mely nyilvánvalóan eltűnik a hipersík pontjaiban. Másfelől, bármely rögzített $x_1,\dots,x_m$ esetén P-t tekinthetjük a $\lambda_{1,1},\dots,\lambda_{1,k_1}$ változók szimmetrikus polinomjaként. A szimmetrikus polinomok alaptétele értelmében így P egyértelműen felírható az

$$E_0(\lambda_{1,1},\dots,\lambda_{1,k_1})=1,$$

$$E_1(\lambda_{1,1},\dots,\lambda_{1,k_1})=\lambda_{1,1}+\dots+\lambda_{1,k_1},$$

$$E_2(\lambda_{1,1},\dots,\lambda_{1,k_1})=\lambda_{1,1}\lambda_{1,2}+\dots+\lambda_{1,1}\lambda_{1,k_1}+$$
$$+\lambda_{1,2}\lambda_{1,3}+\dots+\lambda_{1,2}\lambda_{1,k_1}+\dots+\lambda_{1,k_1-1}\lambda_{1,k_1},$$

$$\vdots$$

$$E_{k_1}(\lambda_{1,1},\dots,\lambda_{1,k_1})=\lambda_{1,1}\lambda_{1,2}\dots\lambda_{1,k_1}$$

elemi szimmetrikus polinomok polinomjaként. Itt használhatjuk a polinom együtthatói és gyökei közötti összefüggéseket (Viéte-formulák), melyből kapjuk, hogy P az

$$x_1,x_2,\dots,x_m,\lambda_{2,1},\dots,\lambda_{2,k_2},\dots,\lambda_{m,k_m}$$

változók racionális együtthatós polinomja. Ismételve kellően sokszor a fenti algoritmust (a második lépésben a $\lambda_{2,1},\dots,\lambda_{2,k_2}$ változókra) azt kapjuk, hogy $P\in\mathbb{Q}[x_1,\dots,x_m]$. ∎

3.3.1. Példa. *Tekintsük az $x_2=\sqrt{3}x_1+\sqrt{2}$ egyenletű egyenest, mint $\mathbb{R}^2$ egy hipersíkját. Könnyű számolás mutatja, hogy ha*

$$P(x_1,x_2)=x_2^4-6x_1^2x_2^2-4x_2^2+9x_1^4-12x_1^2+4,$$

akkor $P(x_1,\sqrt{3}x_1+\sqrt{2})=0$.

3.4. Eliminációs eljárás speciális függvényegyenlet-rendszerek additiv megoldásainak meghatározására

Ahhoz, hogy a (31) függvényegyenlet nemzérus additív megoldásának létezésére szükséges és elégséges feltételt adjunk, kulcsfontosságú az alábbi észrevétel.

3.4.1. Lemma. (Varga [31]) *Legyen $k \geq 2$ pozitív egész szám; továbbá u, a_{ij} tetszőleges valós számok $(i, j = 1, \ldots, k)$. Ha az $M_1 := (a_{ij})_{k\times k}$ mátrix reguláris, akkor az egyetlen additív $A\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény, mely eleget tesz az*

$$(45) \quad u^{k-1}A(a_{i1}x) + u^{k-2}A(a_{i2}x) + \ldots + uA(a_{ik-1}x) + A(a_{ik}x) = 0$$

$(x \in \mathbb{R}; i = 1, \ldots, k)$ függvényegyenlet-rendszernek, az azonosan nulla függvény.

Bizonyítás. Az egyszerűség kedvéért M_1- et a továbbiakban a (45) függvényegyenlet-rendszer mátrixának fogjuk hívni és $E^{k-1}_{i(\mu x)}$- val jelöljük az

$$u^{k-1}A(\mu a_{i1}x) + u^{k-2}A(\mu a_{i2}x) + \ldots + uA(\mu a_{ik-1}x) + A(\mu a_{ik}x) = 0$$

egyenletet minden $i = 1, \ldots, k$ index és $\mu \in \mathbb{R}$ esetén. A bizonyítás során a Gauss eliminációs eljárás lépéseit imitáljuk. Az általánosság sérelme nélkül feltehetjük, hogy $a_{11} \neq 0$, mivel M_1 rangja maximális. Képezve az $E^{k-1}_{i(a_{11}x)} - E^{k-1}_{1(a_{i1}x)}$ különbségeket minden $i = 2, \ldots, k$ indexre, majd felhasználva A additivitását kapjuk, hogy

$$(46) \quad u^{k-2}A((a_{11}a_{i2} - a_{12}a_{i1})x) + \ldots + uA((a_{11}a_{ik-1} - a_{1k-1}a_{i1})x) +$$

$$+A((a_{11}a_{ik} - a_{1k}a_{i1})x) = 0$$

minden $x \in \mathbb{R}$ és minden $i = 2, \ldots, k$ index esetén. $E^{k-1}_{1(x)}$ és a (46)-beli egyenletek együtt egy függvényegyenlet-rendszert alkotnak, melynek mátrixa

$$M_2 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & . & . & a_{1k} \\ 0 & a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ 0 & a_{11}a_{k2} - a_{12}a_{k1} & . & . & a_{11}a_{kk} - a_{1k}a_{k1} \end{pmatrix}.$$

Mivel M_1 reguláris, föltehetjük, hogy $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$. Folytatva ezt az eljárást a $(k-1)$- edik lépésben az M_1 reguláris mátrix valamilyen $M_k := (\lambda_{ij})_{k \times k}$ trianguláris mátrixba megy át ($\lambda_{ij} \in \mathbb{R}$ és $\lambda_{ij} = 0$ ha $i > j$). M_k utolsó sora - a függvényegyenlet-rendszer mátrixának definíciója miatt - azt jelenti, hogy $A(\lambda_{kk}x) = 0$ teljesül minden $x \in \mathbb{R}$ esetén. Mivel $0 \neq \det M_1$, ezért $0 \neq \det M_k = \prod_{i=1}^{k} \lambda_{ii}$. Ebből azonnal adódik, hogy A az azonosan nulla függvény. ■

Az előző lemmára épül az alábbi tétel bizonyítása, mely már a (31) függvényegyenlet megoldhatóságáról szól a szereplő paramétercsaládok algebrai tulajdonságainak fényében.

3.4.1. Tétel. (Varga [31]) *Legyen $n \geq 3$. Ha a $(\beta_1, \ldots, \beta_{n-1})$ paraméterek algebrailag függetlenek és az $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}$ paraméterek mindegyike algebrai szám, az egyetlen additív megoldása az*

$$A(x) + \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i A(\beta_i x) = 0 \quad (x \in \mathbb{R})$$

függvényegyenletnek az azonosan nulla függvény.

Bizonyítás. Mivel az α_i $(i = 1, \ldots, n-1)$ paraméterek mindegyike algebrai $\mathbb{Q}$ fölött, így $\mathbb{Q}(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1})$ véges bővítése a $\mathbb{Q}$ testnek. Ráadásul $\mathbb{Q}$ zéró karakterisztikájú test, így

$$\text{van olyan } u \in \mathbb{R}, \text{ hogy } \ \mathbb{Q}(u) = \mathbb{Q}(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}).$$

Jelölje k a bővítés fokát. Mivel $1, u, \ldots, u^{k-1}$ a $\mathbb{Q}(u)$ vektortér egy bázisa, ezért

$$\alpha_i = \sum_{j=0}^{k-1} r_{ij} u^j$$

alakban írható, ahol $r_{ij} \in \mathbb{Q}$ $(i = 1, \ldots, n-1; \quad j = 0, \ldots, k-1)$. Ha ezt az alakját használjuk α_i- nek az állításban szereplő függvényegyenletben, kihasználva az additív függvények racionális homogén tulajdonságát kapjuk, hogy

$$A(x) + A(r_{10}\beta_1 x) + \ldots + A(r_{n-10}\beta_{n-1}x) + uA(r_{11}\beta_1 x) + \ldots +$$

$$+uA(r_{n-11}\beta_{n-1}x) + u^{k-1}A(r_{1k-1}\beta_1 x) + \ldots + u^{k-1}A(r_{n-1k-1}\beta_{n-1}x) = 0.$$

Mivel A additív, összevonás után

$$(47) \quad u^{k-1}A(p_{k-1}x) + u^{k-2}A(p_{k-2}x) + \ldots + uA(p_1 x) + A(p_0 x) = 0$$

írható, ahol

$$p_j = \sum_{i=1}^{n-1} \beta_i r_{ij} \ (j = 1, \ldots, k-1) \ \text{ és } \ p_0 = 1 + \sum_{i=1}^{n-1} \beta_i r_{i0}.$$

Könnyű látni, hogy $p_0 \neq 0$. (Máskülönben $(\beta_1, \ldots, \beta_{n-1})$ nem lehetne algebrailag független.) Legyen

$$f(t) := t^k + q_{k-1}t^{k-1} + \ldots + q_1 t + q_0 \quad (q_i \in \mathbb{Q}, \quad i = 0, \ldots, k-1)$$

az u definiáló polinomja. Ebből

$$u^k = -(q_{k-1}u^{k-1} + \ldots + q_1 u + q_0). \tag{48}$$

A (47) egyenletet megszorozva u- val, majd (48) és a racionális homogenitási tulajdonság felhasználásával

$$u^{k-1}A((p_{k-2} - q_{k-1}p_{k-1})x) + \ldots + u^2 A((p_1 - q_2 p_{k-1})x) + \tag{49}$$

$$+uA((p_0 - q_1 p_{k-1})x) + A(-q_0 p_{k-1}x) = 0.$$

egyenlet adódik. A (49) függvényegyenletet ismét megszorozva u- val és a fent ismertetett algoritmust $k-1$-szer végrehajtva egy (35)-típusú függvényegyenlet-rendszert nyerünk. Így a 3.4.1. Lemma miatt elég megmutatni, hogy a függvényegyenlet-rendszer $M := (b_{ij})_{k\times k}$ mátrixa reguláris. Indirekt tegyük fel, hogy $\det M = 0$. Könnyű ellenőrizni, hogy $b_{ij} = z^{(ij)}(\beta_1, \ldots, \beta_{n-1})$ valamely $z^{(ij)} \in \mathbb{Q}[x_1, \ldots, x_{n-1}]$ esetén $(i, j = 1, \ldots, k)$, ezért

$$\det M = z(\beta_1, \ldots, \beta_{n-1}),$$

ahol $z \in \mathbb{Q}[x_1, \ldots, x_{n-1}]$ a következő módon van definiálva:

$$z(x_1, \ldots, x_{n-1}) =$$

$$= det \begin{pmatrix} z^{(11)}(x_1, \ldots, x_{n-1}) & . & . & . & z^{(1k)}(x_1, \ldots, x_{n-1}) \\ . & & & . & . \\ . & & z^{(i\ k-i+1)}(x_1, \ldots, x_{n-1}) & & . \\ . & . & & & . \\ z^{(k1)}(x_1, \ldots, x_{n-1}) & . & . & . & z^{(kk)}(x_1, \ldots, x_{n-1}) \end{pmatrix}.$$

Most megmutatjuk, hogy z nem az azonosan zéró polinom, mely ellentmond annak, hogy $(\beta_1, \ldots, \beta_{n-1})$ algebrailag független. Látni fogjuk, hogy z nem tűnik el az origóban, konkrétan ebben az esetben $z^{(ij)}(0, \ldots, 0) = 1$, ha $j = k - i + 1$ $(i = 1, \ldots, k)$; egyébként 0. Az állításunkat i szerinti teljes indukcióval igazoljuk. $i = 1$- re az állítás teljesül, hiszen

$$z^{(1j)}(x_1, \ldots, x_{n-1}) = \sum_{i=1}^{n-1} r_{ij} x_i$$

így

$$z^{(1j)}(0, \ldots, 0) = 0 \quad (j = 1, \ldots, k-1),$$

$$z^{(1k)}(x_1, \ldots, x_{n-1}) = 1 + \sum_{i=1}^{n-1} r_{i0} x_i$$

így

$$z^{(1k)}(0, \ldots, 0) = 1.$$

Tegyük fel, hogy $2 \leq i \leq k-1$ esetén

$$z^{(ij)}(0, \ldots, 0) = 0, \text{ ha } j \neq k - i + 1 \quad (j = 1, \ldots, k)$$

és

$$z^{(i\ k-i+1)}(0, \ldots, 0) = 1$$

teljesül. Ahhoz, hogy az indukciós feltételt használhassuk, kapcsolatot kell találnunk a $b_{i+1\ j}$ és a b_{il} $(j, l = 1, \ldots, k)$ együtthatók között. A fent említett függvényegyenlet-rendszer i-edik egyenlete

$$u^{k-1} A(b_{i1} x) + \ldots + u^{i-1} A(b_{i\ k-i+1} x) + \ldots + A(b_{ik} x) = 0$$

az $(i+1)$- edik pedig

$$-(q_{k-1} u^{k-1} + \ldots + q_i u^i + \ldots + q_0) A(b_{i1} x) + \ldots + u^i A(b_{i\ k-i+1} x) +$$
$$+ \ldots + u A(b_{ik} x) = 0.$$

Felhasználva (48)- at, A additivitását (és racionális homogenitását) ez az egyenlet ekvivalens az

$$u^{k-1} A((b_{i2} - q_{k-1} b_{i1}) x) + \ldots + u^i A((b_{i\ k-i+1} - q_i b_{i1}) x) + \ldots + A(q_0 b_{i1} x) = 0$$

egyenlettel. A fentiekből könnyen látható, hogy

$$b_{i+1\ j} = b_{i\ j+1} - q_{k-j}b_{i1} \quad (j = 1, \ldots, k-1) \ \text{ és } \ b_{i+1\ k} = q_0 b_{i1}.$$

Tehát

$$z^{(i+1\ j)} = z^{(i\ j+1)} - q_{k-j}z^{(i1)} \ (j = 1, \ldots, k-1) \text{ és } z^{(i+1\ k)} = q_0 z^{(i1)}.$$

Ha $j = k - i$, akkor

$$z^{(i+1\ k-(i+1)+1)} = z^{(i+1\ k-i)} = z^{(i\ k-i+1)} - q_i z^{(i1)}$$

s ennélfogva

$$z^{(i+1\ k-(i+1)+1)}(0, \ldots, 0) = 1$$

a $z^{(i1)}(0, \ldots, 0) = 0$ és a $z^{(i\ k-i+1)}(0, \ldots, 0) = 1$ indunkciós feltevés miatt, míg ha $j \neq k - i$, akkor $z^{(i\ j+1)}(0, \ldots, 0) = 0$ (indukciós feltevés), ezért $z^{(i+1\ j)}(0, \ldots, 0) = 0$. A fenti érvelésre való tekintettel kapjuk, hogy

$$z(0, \ldots, 0) = det \begin{pmatrix} 0 & . & . & . & 0 & 1 \\ . & & & & 1 & 0 \\ . & & & . & & . \\ . & & . & & & . \\ 0 & 1 & & & & . \\ 1 & 0 & . & . & . & 0 \end{pmatrix} = (-1)^{\frac{k(k+3)}{2}},$$

mely implikálja, hogy z nem azonosan nulla polinom. ∎

A következő tétel értelmében a külső és belső paraméterek szerepe felcserélhető.

3.4.2. Tétel. (Varga [31]) *Legyen $n \geq 3$. Ha az $(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1})$ paraméterek algebrailag függetlenek és a $\beta_1, \ldots, \beta_{n-1}$ paraméterek mindegyike algebrai szám, az egyetlen additív megoldása az*

$$A(x) + \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i A(\beta_i x) = 0 \quad (x \in \mathbb{R})$$

függvényegyenletnek az azonosan nulla függvény.

Bizonyítás. Hasonlóan az előző tétel bizonyításához, mivel a β_1, ..., β_{n-1} számok mindegyike algebrai, $\exists u \in \mathbb{R}$, hogy $\mathbb{Q}(u) = \mathbb{Q}(\beta_1, \ldots, \beta_{n-1})$. Ha k a bővítés foka, akkor $1, u, \ldots, u^{k-1}$ egy bázisa $\mathbb{Q}(u)$-nak, így

$$\beta_i = \sum_{j=0}^{k-1} r_{ij} u^j$$

valamely r_{ij} racionális számokkal $(i = 1, \ldots, n-1; \quad j = 0, \ldots, k-1)$. Ezt behelyettesítve, a függvényegyenlet a

$$p_{k-1}A(u^{k-1}x) + p_{k-2}A(u^{k-2}x) + \ldots + p_1A(ux) + p_0A(x) = 0 \tag{50}$$

egyenletbe megy át, ahol

$$p_j = \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i r_{ij} \quad (j = 1, \ldots, k-1)$$

és $p_0 = 1 + \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i r_{i0}$. Könnyű látni, hogy $p_0 \neq 0$. Az u elem definiáló polinomjára ismét az

$$f(t) := t^k + q_{k-1}t^{k-1} + \ldots + q_1 t + q_0 \quad (q_i \in \mathbb{Q}, \quad i = 0, \ldots, k-1)$$

jelölést használva itt is érvényes a (48) egyenlőség. x helyére ux-et helyettesítve (50)-ben, majd használva (48)-at

$$p_{k-1}A(-(q_{k-1}u^{k-1} + \ldots + q_1u + q_0)x) + p_{k-2}A(u^{k-1}x) +$$
$$+ \ldots + p_1A(u^2x) + p_0A(ux) = 0,$$

melyből A additivitását és racionális homogenitását figyelembe véve kapjuk, hogy

$$(p_{k-2} - q_{k-1}p_{k-1})A(u^{k-1}x) + \ldots + (p_1 - q_2p_{k-1})A(u^2x) + \tag{51}$$

$$+(p_0 - q_1 p_{k-1})A(ux) + (-q_0 p_{k-1})A(x) = 0.$$

Most (50)- ben x helyére rendre u^2x-et,$\ldots, u^{k-1}x$-et helyettesítve kapunk k darab egyenletet k darab ismeretlennel, melyek által alkotott egyenletrendszer mátrixos alakja

$$L \begin{pmatrix} A(u^{k-1}x) \\ \cdot \\ \cdot \\ A(ux) \\ A(x) \\ \end{pmatrix} = 0$$

ahol $L := (c_{ij})_{k\times k}$ az egyenletrendszer együtthatóiból álló mátrixot jelöli. Meg fogjuk mutatni, hogy $\det L \neq 0$, tehát az L- lel jelölt lineáris transzformáció reguláris. Így L magja csak a zérusvektort tartalmazza, tehát $A(x) = 0$ minden $x \in \mathbb{R}$ esetén. Tegyük fel indirekt, hogy $\det L = 0$. Egyszerűen látható, hogy

$$c_{ij} = z^{(ij)}(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}) \quad \text{ahol} \quad z^{(ij)} \in \mathbb{Q}[x_1, \ldots, x_{n-1}] \quad (i, j = 1, \ldots, k)$$

és a 3.4.1. Tétel bizonyításában definiált $z \in \mathbb{Q}[x_1, \ldots, x_{n-1}]$ polinomra

$$\det L = z(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}).$$

Az idézett tétel bizonyításában szereplő indukcióval megmutatható, hogy

$$z^{(ij)}(0, \ldots, 0) = \begin{cases} 0, & \text{ha } j \neq k - i + 1 \\ \\ 1, & \text{ha } j = k - i + 1 \end{cases} \tag{52}$$

ahol $i, j = 1, \ldots, k$, melyből következik, hogy

$$z(0, \ldots, 0) = (-1)^{\frac{k(k+3)}{2}}.$$

Ez azt jelenti, hogy z nem az azonosan nulla polinom, mely ellentmond $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}$ algebrai függetlenségének. A (50) összefüggés (mint már utaltunk rá) bizonyítható például i- szerinti teljes indukcióval, felhasználva $c_{i+1\ j}$ és c_{il} együtthatók közti kapcsolatot. Ezt a kapcsolatot könnyen megtalálhatjuk, ha tekintjük az egyenletrendszer i- edik

$$c_{i1}A(u^{k-1}x) + \ldots + c_{i\ k-i+1}A(u^{i-1}x) + \ldots + c_{ik}A(x) = 0$$

és az $(i+1)$- edik, azaz a

$$(c_{i2} - q_{k-1}c_{i1})A(u^{k-1}x) + \ldots + (c_{i\ k-i+1} - q_i c_{i1})A(u^i x) + \ldots +$$
$$+ q_0 c_{i1} A(x) = 0$$

egyenleteit – a levezetés az előző tétel bizonyításában látottak mintájára történik. ■

3.5. A Daróczy-féle tétel kiterjesztése

3.5.1. Lemma. (Varga, Vincze [32]) *Legyen* $3 \le n \in \mathbb{N}$, $\beta_i, \delta_i \in \mathbb{R}$ *nullától különböző valós számok,* $i = 1, \ldots, n-1$. *Ha van olyan*

$$\delta \colon \mathbb{Q}(\beta_1, \ldots, \beta_{n-1}) \to \mathbb{Q}(\delta_1, \ldots, \delta_{n-1})$$

testizomorfizmus, mely eleget tesz a

$$\delta(\beta_i) = \delta_i \quad \textit{és} \quad \alpha_1\delta_1 + \ldots + \alpha_{n-1}\delta_{n-1} = -1 \tag{53}$$

feltételeknek $(i = 1, \ldots, n-1)$, *akkor létezik nem azonosan nulla* $A \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *additív megoldása az*

$$A(x) + \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i\ A(\beta_i x) = 0 \quad (x \in \mathbb{R})$$

függvényegyenletnek.

Bizonyítás. Tekintsük $\mathbb{R}$-et, mint $\mathbb{Q}(\beta_1, \dots, \beta_{n-1})$ feletti vektorteret, s jelölje a vektortér egy bázisát $\mathcal{H}$. Ekkor minden $x \in \mathbb{R}$ felírható $x = \sum_j c_j h_j$ alakban, ahol $c_j \in \mathbb{Q}(\beta_1, \dots, \beta_{n-1})$ és $h_j \in \mathcal{H}$. Legyen $A\colon \mathcal{H} \to \mathbb{R}$ tetszőleges, nem azonosan nulla függvény. Ekkor az

$$A\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad A(x) := \sum_j \delta(c_j) A(h_j)$$

módon definiált függvény additív és minden $i = 1, \dots, n-1$ esetén

$$A(\beta_i x) = \delta_i A(x) \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Valóban, ha $i = 1, \dots, n-1$

$$A(\beta_i x) = A(\sum_j \beta_i c_j h_j) = \sum_j \delta(\beta_i c_j) A(h_j) =$$

$$= \sum_j \delta_i \delta(c_j) A(h_j) = \delta_i \sum_j \delta(c_j) A(h_j) = \delta_i A(x)$$

teljesül minden $x \in \mathbb{R}$-re. Így

$$A(x) + \alpha_1 A(\beta_1 x) + \ldots + \alpha_{n-1} A(\beta_{n-1} x) =$$

$$= (1 + \alpha_1 \delta_1, \dots, +\alpha_{n-1} \delta_{n-1}) A(x) = 0$$

teljesül bármely $x \in \mathbb{R}$ esetén. ■

3.5.1. Tétel. (Varga, Vincze [32]) *Legyen $n \geq 3$. Ha a $(\beta_1, \dots, \beta_{n-1})$ paraméterek algebrailag függetlenek és az $\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}$ paraméterek közül legalább az egyik transzcendens, akkor az*

$$A(x) + \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i A(\beta_i x) = 0 \quad (x \in \mathbb{R})$$

egyenletnek van nem azonosan zérus szemihomogén $A\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ additív megoldása, azaz vannak olyan δ_i $(i = 1, \dots n-1)$ valós számok, hogy

$$A(\beta_i x) = \delta_i A(x) \quad (x \in \mathbb{R})$$

teljesül.

Bizonyítás. Legyent $(\beta_1, \dots, \beta_{n-1})$ tetszőleges algebrailag független együtthatórendszer. Tekintettel a 3.2.1. Tételre és a 3.5.1. Lemmára, (31)-nek van nem azonosan zérus additív megoldása, ha létezik olyan

$$\delta_1, \dots, \delta_{n-1} \in \mathbb{R}^{n-1}$$

paraméterrendszer, mely eleget tesz az

$$\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_{n-1} x_{n-1} = -1 \tag{54}$$

egyenlőségnek és a definiáló ideálja a $\vec{\delta} := (\delta_1, \dots, \delta_{n-1})$ vektornak csak a zérus polinomot tartalmazza. Tegyük fel – a határozottság kedvéért – hogy pl. α_{n-1} transzcendens szám. A (54) által definiált hipersíkot átírva a

$$\Big(-\frac{\alpha_1}{\alpha_{n-1}}\Big)x_1 + \dots + \Big(-\frac{\alpha_{n-2}}{\alpha_{n-1}}\Big)x_{n-2} + \Big(-\frac{1}{\alpha_{n-1}}\Big) = x_{n-1}$$

alakba, a 3.3.2. Lemma mutatja, hogy nem algebrai hipersíkról van szó $(m = n-1)$. A 3.3.1. lemma szerint ez azt jelenti, hogy nem áll elő $\mathbb{Q}[x_1, \dots, x_{n-1}]$-beli nem azonosan zérus polinomok gyökeinek uniójaként. Létezik tehát olyan $(\delta_1, \dots, \delta_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$ pont a hipersíkon, melynek δ_i koordinátái algebrailag független rendszert alkotnak. ■

3.5.2. Tétel. (Varga, Vincze [32]) *Legyen $n \geq 3$. Ha az $(\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1})$ paraméterek algebrailag függetlenek és a $\beta_1, \dots, \beta_{n-1}$ paraméterek közül legalább az egyik transzcendens, akkor az*

$$A(x) + \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i A(\beta_i x) = 0 \quad (x \in \mathbb{R})$$

egyenletnek van nem azonosan zérus szemihomogén $A\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *additív megoldása, azaz vannak olyan* δ_i $(i = 1, \dots n-1)$ *valós számok, hogy*

$$A(\beta_i x) = \delta_i A(x) \quad (x \in \mathbb{R})$$

teljesül.

Bizonyítás. Az állítás a 3.5.1. tétel bizonyításának mintájára igazolható olyan $\delta\colon \mathbb{Q}(\delta_1, \dots, \delta_{n-1}) \to \mathbb{Q}(\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1})$ testizomorfizmus segítségével, melyre

$$\delta(\delta_i) = \alpha_i \ \text{ és } \ \delta_1\beta_1 + \ldots + \delta_{n-1}\beta_{n-1} = -1, \tag{55}$$

$i = 1, \dots, n-1$ esetén. ∎

3.5.1. Megjegyzés. *Ha egy nem azonosan zérus A additív függvény szemihomogén, azaz bizonyos* (β_i, δ_i) *számpárokra*

$$A(\beta_i x) = \delta_i A(x) \qquad (x \in \mathbb{R})$$

fennáll, $(i = 1, \dots n-1)$*, akkor minden* $\beta \in \mathbb{Q}(\beta_1, \dots, \beta_{n-1})$ *esetén* $A(\beta x) = \delta A(x)$ *teljesül valamely* $\delta \in \mathbb{Q}(\delta_1, \dots, \delta_{n-1})$ *számra. Explicite, ha*

$$\beta = \frac{w(\beta_1, \dots, \beta_{n-1})}{k(\beta_1, \dots, \beta_{n-1})}, \quad \textit{akkor} \ \ \delta = \frac{w(\delta_1, \dots, \delta_{n-1})}{k(\delta_1, \dots, \delta_{n-1})},$$

bizonyos $w, k \in \mathbb{Q}[x_1, \dots, x_{n-1}]$ *polinomokkal. Tekintettel a 3.2.1. Tétel bizonyítására a*

$$\mathbb{Q}(\beta_1, \dots, \beta_{n-1}) \ \ \textit{és} \ \ \mathbb{Q}(\delta_1, \dots, \delta_{n-1})$$

testek izomorfak. Hasonlóan a homogenitási test *fogalmához* [16]*-ben definiálhatjuk a* belső szemihomogenitási test*:*

$$IS(A) := \{\beta \in \mathbb{R} \mid A(\beta x) = \delta A(x) \quad (x \in \mathbb{R})\}$$

és a külső szemihomogenitási test*:*

$$OS(A) := \{\delta \in \mathbb{R} \mid A(\beta x) = \delta A(x) \quad (x \in \mathbb{R})\}$$

fogalmakat. A szemihomogenitási test egyértelmű abban az értelemben, hogy $IS(A)$ és $OS(A)$ testek izomorfak. Megjegyezzük, hogy az additív függvények racionális homogén tulajdonsága miatt

$$\mathbb{Q} \subset IS(A) \cap OS(A).$$

Az eddigiek egyszerű következménye az alábbi tétel, mely hangsúlyozza a belső és külső együtthatók szimmetrikus szerepét.

3.5.3. Tétel. (Varga, Vincze [32]) I. *Legyen $n \geq 3$. Ha a $(\beta_1, \ldots, \beta_{n-1})$ belső együtthatók algebrailag függetlenek és a* (31) *függvényegyenletnek van nemzérus szemihomogén additív megoldása úgy, hogy $\beta_1, \ldots, \beta_{n-1}$ benne van a belső szemihomogenitási testben, azaz*

$$A(\beta_i x) = \delta_i A(x) \quad (x \in \mathbb{R}, i = 1, \ldots, n-1)$$

teljesül bizonyos δ_i valós számokra, akkor az $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}$ külső együtthatók közül legalább egy transzcendens.
II. *Legyen $n \geq 3$. Ha az $(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1})$ külső együtthatók algebrailag függetlenek és a* (31) *függvényegyenletnek van nemzérus szemihomogén additív megoldása úgy, hogy $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}$ benne van a külső szemihomogenitási testben, azaz*

$$A(\delta_i x) = \alpha_i A(x) \quad (x \in \mathbb{R}, i = 1, \ldots, n-1)$$

teljesül bizonyos δ_i valós számokra, akkor a $\beta_1, \ldots, \beta_{n-1}$ belső együtthatók közül legalább egy transzcendens.

Összevetve rendre a 3.4.1. és 3.4.2 Tételeket, illetve a 3.5.1. és 3.5.2 Tételeket kapjuk a fő eredményeinket:

3.5.4. Tétel. (Varga [31]) *Tegyük fel, hogy $n \geq 3$ és a $(\beta_1, \ldots, \beta_{n-1})$ paraméterek algebrailag függetlenek. Pontosan akkor van nem azonosan zérus additív megoldása az*

$$A(x) + \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i A(\beta_i x) = 0 \quad (x \in \mathbb{R})$$

egyenletnek, ha az $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}$ paraméterek közül legalább az egyik transzcendens szám.

3.5.5. Tétel. (Varga [31]) *Tegyük fel, hogy $n \geq 3$ és az $(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1})$ paraméterek algebrailag függetlenek. Pontosan akkor van nem azonosan zérus additív megoldása az*

$$A(x) + \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i A(\beta_i x) = 0 \quad (x \in \mathbb{R})$$

egyenletnek, ha a $\beta_1, \ldots, \beta_{n-1}$ paraméterek közül legalább az egyik transzcendens szám.

3.5.2. Megjegyzés. *Állításaink az $n = 2$ esetben is érvényesek: ld. Daróczy-féle tétel.*

Az egyetlen lényeges (és tisztázatlan) további eset tehát, ha mindkét paramétercsalád algebrailag függő és mindkettőben van legalább egy transzcendens elem. A negyedik fejezetben bemutatott példákra alapozva (sejtés szintjén) az látszik körvonalazódni, hogy az algebrai függőség segítségével egy tagszámcsökkentő, redukciós eljárást hajthatunk végre, mely véges sok lépésben visszavezet a lineárisan független külső, vagy belső paramétercsaládok sikeresen megoldott esetére.

4. Példák és algoritmusok additív megoldások keresésére

A következő három példában szereplő egyenletek (31) típusú függvényegyenletek. Amennyiben létezik, nem azonosan zérus additív megoldásaik keresésére olyan megoldási algoritmust mutatunk, mely lényegében a már ismertetett Gauss-féle eliminációs technikán alapszik. További érdekessége a kidolgozott példáknak, hogy az elvben tisztázott eseteken (ld. algebrailag független külső, vagy belső paramétercsalád) túl is sikerül a nem azonosan zérus additív megoldás létezésére szükséges és elegendő feltételét megfogalmazni, vagy pedig nem azonosan zérus additív megoldást algoritmikusan megkonstruálni. Az algebrailag függő paramétercsaládok esetében egyfajta redukciós eljárást követően a Daróczy-féle tételt fogjuk alkalmazni.

4.1. Első példa

Legyen (31)- ben $n = 3$, $\beta_1 = \sqrt{d_1}$, $\beta_2 = \sqrt{d_2}$ ahol d_1 és d_2 olyan pozitív racionális számok, melyekre $\sqrt{d_1}$ és $\sqrt{d_2}$ is irracionális szám és legyenek $\alpha_i \in \mathbb{R}$ $(i = 1, 2)$ olyanok, hogy $\alpha_1\alpha_2 \neq 0$. A következő tételben az

$$\alpha_1 A(\sqrt{d_1}x) + \alpha_2 A(\sqrt{d_2}x) + A(x) = 0 \tag{56}$$

függvényegyenlet nem azonosan zérus additív megoldásainak létezésével ekvivalens állítást fogalmazunk meg. A bizonyítás során arra is módszert adunk, hogy hogyan konstruálhatunk ilyen megoldásokat.

4.1.1. Tétel. *Az (56) függvényegyenletnek pontosan akkor van nem azonosan zérus additív megoldása, ha az alábbi feltételek egyike teljesül:*

(i) $1 + \alpha_1\sqrt{d_1} + \alpha_2\sqrt{d_2} = 0,$

(ii) $1 + \alpha_1\sqrt{d_1} - \alpha_2\sqrt{d_2} = 0,$

(iii) $1-\alpha_1\sqrt{d_1}+\alpha_2\sqrt{d_2}=0$,

(iv) $1-\alpha_1\sqrt{d_1}-\alpha_2\sqrt{d_2}=0$.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy A nem azonosan zérus additív függvény. Az x helyére rendre $\sqrt{d_1}x$- et, $\sqrt{d_2}x$- t, majd $\sqrt{d_1d_2}x$- et írva (56)-ban, egy négy egyenletből álló homogén, lineáris függvényegyenletrendszert kapunk, melynek mátrixos alakja:

$$M\begin{pmatrix} A(x)\\ A(\sqrt{d_1}x)\\ A(\sqrt{d_2}x)\\ A(\sqrt{d_1d_2}x)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix},$$

ahol

$$M:=\begin{pmatrix} 1 & \alpha_1 & \alpha_2 & 0\\ d_1\alpha_1 & 1 & 0 & \alpha_2\\ d_2\alpha_2 & 0 & 1 & \alpha_1\\ 0 & d_2\alpha_2 & d_1\alpha_1 & 1\end{pmatrix}.$$

Mivel

$$\det\begin{pmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & 0\\ 1 & 0 & \alpha_2\\ 0 & 1 & \alpha_1\end{pmatrix}=-2\alpha_1\alpha_2\neq 0,$$

következik, hogy az M mátrix rangja legalább 3. Csakhogy A nem azonosan nulla függvény, M rangja tehát nem lehet maximális. Az elöbbiek miatt feltehetjük, hogy M rangja 3, s így az M mátrixhoz tartozó lineáris transzformáció magja egydimenziós, azaz egy $\vec{v}=(v_0,v_1,v_2,v_3)$ vektorral generálható. Ez azt jelenti, hogy

$$\begin{pmatrix} A(x)\\ A(\sqrt{d_1}x)\\ A(\sqrt{d_2}x)\\ A(\sqrt{d_1d_2}x)\end{pmatrix}=\lambda(x)\begin{pmatrix}v_0\\v_1\\v_2\\v_3\end{pmatrix}$$

valamely $\lambda\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ additív függvénnyel és $v_0\neq 0$- val. Így kapjuk, hogy

$$A(\sqrt{d_1}x)=v_1\lambda(x)=\frac{v_1}{v_0}A(x) \tag{57}$$

és hasonló módon

$$A(\sqrt{d_2}x)=v_2\lambda(x)=\frac{v_2}{v_0}A(x). \tag{58}$$

Mivel a (57) és az (58) függvényegyenlet is (36) alakú, így a Daróczy tétele miatt

$$\frac{v_1}{v_0}=\pm\sqrt{d_1} \quad \text{és} \quad \frac{v_2}{v_0}=\pm\sqrt{d_2}.$$

Következésképpen

$$A(\sqrt{d_1}x)=\pm\sqrt{d_1}A(x) \text{ és } A(\sqrt{d_1}x)=\pm\sqrt{d_1}A(x),$$

melyet (56)- ba helyettesítve az (i), (ii), (iii) és (iv) egyenlőségek következnek.

Megfordítva; ha például (i) teljesül, akkor az $A(x):=x$ vagy $A(x):=-x$ nem azonosan zérus additív függvények megoldásai (56)-nak. Az (ii), (iii), (iv) esetek mindegyike ugyanazzal a módszerrel bizonyítható. Illusztrációként tekintsük a (ii) esetet. Belátjuk, hogy

$$\vec{\mu}=(\sqrt{d_1},\sqrt{d_2}) \quad \text{és} \quad \vec{\nu}=(\sqrt{d_1},-\sqrt{d_2})$$

definiáló ideáljai egybeesnek, azaz a

$$\mathcal{I}(\vec{\mu}):=\{\ P\in\mathbb{Q}[x_1,x_2]\mid P(\sqrt{d_1},\sqrt{d_2})=0\ \}$$

és

$$\mathcal{I}(\vec{\nu}):=\{\ P\in\mathbb{Q}[x_1,x_2]\mid P(\sqrt{d_1},-\sqrt{d_2})=0\ \}$$

halmazok egyenlők. Legyen $P\in\mathcal{I}(\vec{\mu})$, ami azt jelenti, hogy

$$P(\sqrt{d_1},\sqrt{d_2})=0.$$

Ekkor $P(\sqrt{d_1}, x_2) = f(x_2)(x_2^2 - d_2)$ írható, mivel $\sqrt{d_2}$ másodfokú algebrai szám. Ebből pedig $P(\sqrt{d_1}, -\sqrt{d_2}) = 0$ következik, azaz $\mathcal{I}(\vec{\mu}) \subset \mathcal{I}(\vec{\nu})$. A másik irányú tartalmazás hasonlóan látható. A 3.2.1. Tétel értelmében tehát van olyan

$$\delta\colon \mathbb{Q}(\sqrt{d_1}, \sqrt{d_2}) \to \mathbb{Q}(\sqrt{d_1}, -\sqrt{d_2})$$

testizomorfizmus melyre

$$\delta(\sqrt{d_1}) = \sqrt{d_1} \quad \text{és} \quad \delta(\sqrt{d_2}) = -\sqrt{d_2}.$$

A 3.5.1. Lemma bizonyításában látott szemilineáris kiterjesztés módszerének segítségével konstruálható nem azonosan zérus additív A függvényt melyre

$$A(\sqrt{d_1}x) = \sqrt{d_1}A(x) \quad \text{és} \quad A(\sqrt{d_2}x) = -\sqrt{d_2}A(x)$$

teljesül bármely valós x esetén. Tekintettel a (ii) feltételre az A függvény kielégíti a (56) egyenletet. ■

4.1.1. Megjegyzés. *Legyenek r_i, s_i, $d_i \in \mathbb{Q}$ és $d_i > 0$ $(i = 1, 2)$. Lényegében hasonló állítást fogalmazhatunk meg az*

$$\alpha_1 A(\beta_1 x) + \alpha_2 A(\beta_2 x) + A(x) = 0$$

függvényegyenlet nem azonosan zérus additív megoldásainak létezésére, ahol a belső paraméterek $\beta_i = r_i + s_i\sqrt{d_i}$ $(i = 1, 2)$ alakban írhatók; ugyanis a 4.1.1. Tétel bizonyításának módszere ekkor is működik.

4.2. Második példa

Tekintsük a (31) típusú

$$\sqrt{d_1}A(\beta_1 x) + \sqrt{d_2}A(\beta_2 x) + A(x) = 0 \quad (x \in \mathbb{R})$$

függvényegyenletet, ahol $A\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ additív függvény, valamint d_1 és d_2 pozitív racionális számok úgy, hogy $\sqrt{d_1}$, $\sqrt{d_2}$ irracionális.

A 3.4.1 Tétel értelmében ha a fenti feltételek mellett a (β_1, β_2) belső paraméterpár algebrailag független, a függvényegyenletnek egyetlen additív megoldása van, az azonosan zérus függvény. A következő (i) érvelésben egy algoritmust adunk ennek megmutatására.

(i) Az egyenlet mindkét oldalát megszorozva $\sqrt{d_1}$- gyel, majd A racionális homogenitását felhasználva

$$A(d_1\beta_1 x) + \sqrt{d_1 d_2}A(\beta_2 x) + \sqrt{d_1}A(x) = 0,$$

ezután az x helyére $\beta_1 x$- et írva

$$A(d_1{\beta_1}^2 x) + \sqrt{d_1 d_2}A(\beta_1\beta_2 x) + \sqrt{d_1}A(\beta_1 x) = 0 \tag{59}$$

egyenletet kapjuk. Hasonló módon jönnek a

$$\sqrt{d_1 d_2}A(\beta_1 x) + A(d_2\beta_2 x) + \sqrt{d_2}A(x) = 0$$

és a

$$\sqrt{d_1 d_2}A(\beta_1\beta_2 x) + A(d_2{\beta_2}^2 x) + \sqrt{d_2}A(\beta_2 x) = 0 \tag{60}$$

egyenletek. (60)- ból kivonva az (59) egyenletet

$$\sqrt{d_2}A(\beta_2 x) - \sqrt{d_1}A(\beta_1 x) = A\Big((d_1{\beta_1}^2 - d_2{\beta_2}^2)x\Big),$$

másfelől az eredeti egyenletből

$$\sqrt{d_1}A(\beta_1 x) + \sqrt{d_2}A(\beta_2 x) = -A(x)$$

adódik. Az utóbbi két egyenlőséget összegezve kapjuk, hogy

$$2\sqrt{d_2}A(\beta_2 x) = A\Big((d_1{\beta_1}^2 - d_2{\beta_2}^2 - 1)x\Big).$$

Utóbbiból az x- et $\frac{1}{2\beta_2}x$- szel kicserélve

$$\sqrt{d_2}A(x) = A\Big((d_1{\beta_1}^2 - d_2{\beta_2}^2 - 1)\frac{1}{2\beta_2}x\Big)$$

adódik; melyből ha A nem azonosan zérus, Daróczy tétele szerint

$$\sqrt{d_2} \text{ és } (d_1{\beta_1}^2 - d_2{\beta_2}^2 - 1)\frac{1}{2\beta_2}$$

algebrailag konjugáltak. Mivel $\sqrt{d_2}$ másodfokú algebrai szám, ez azt jelenti, hogy

$$\pm\sqrt{d_2} = (d_1{\beta_1}^2 - d_2{\beta_2}^2 - 1)\frac{1}{2\beta_2}$$

Hasonló módon – különbséget képezve az egyenletek összegzése helyett – kapjuk, hogy

$$-2\sqrt{d_1}A(\beta_1 x) = A\Big((d_1{\beta_1}^2 - d_2{\beta_2}^2 + 1)x\Big)$$

következésképpen

$$\pm\sqrt{d_1} = (d_1{\beta_1}^2 - d_2{\beta_2}^2 + 1)\frac{1}{2\beta_1}.$$

Könnyen látható, hogy mindkét végső eredmény ellentmond $(\beta_1,\ \beta_2)$ algebrai függetlenségének. Az ellentmondás feloldásaként kapjuk, hogy az egyenlet egyetlen additív megoldása az azonosan nulla polinom.

(ii) Most tekintsünk el a belső paraméterpár algebrai függetlenségének követelményétől. A fenti számolás alapján azt kapjuk, hogy a

$$\sqrt{d_1}A(\beta_1 x) + \sqrt{d_2}A(\beta_2 x) + A(x) = 0 \quad (x \in \mathbb{R})$$

függvényegyenletnek pontosan akkor van nem azonosan zérus additív megoldása, ha

$$\pm\sqrt{d_1} = (d_1{\beta_1}^2 - d_2{\beta_2}^2 + 1)\frac{1}{2\beta_1} \quad \text{és} \quad \pm\sqrt{d_2} = (d_1{\beta_1}^2 - d_2{\beta_2}^2 - 1)\frac{1}{2\beta_2}.$$

Egyszerű számolás mutatja, hogy a két feltétel valójában ekvivalens egymással.

(iii) Végül példát adunk olyan paraméterpárokra, melyek kielégítik a megoldhatóság szükséges és elegendő feltételét.

4.2.1. Példa. *Legyen* $\beta_1 = e$ *és* $\beta_2 = \frac{\sqrt{d_1}}{\sqrt{d_2}}e + \frac{1}{\sqrt{d_2}}$. *Ekkor a paraméterpár algebrailag függő* $\mathbb{Q}$ *fölött, hiszen a nemzérus*

$$P(x_1, x_2) = (d_1x_1^2 - d_2x_2^2 - 1)^2 - 4d_2x_2^2$$

polinom eltűnik, ha $x_1 = \beta_1$ *és* $x_2 = \beta_2$. *A* $P(\beta_1, \beta_2) = 0$ *egyenletet átrendezve pedig a megoldhatóság szükséges és elegendő feltételét kapjuk, azaz a függvényegyenletnek van nem azonosan zérus additív megoldása. Egy negatív példa a* $\beta_1 = e$ *és* $\beta_2 = \frac{\sqrt{d_1}}{\sqrt{d_2}}e$ *paraméterpár. Ezek algebrailag függők* $\mathbb{Q}$ *fölött, hiszen a nemzérus*

$$P(x_1, x_2) = \frac{d_1}{d_2}x_1^2 - x_2^2$$

polinom eltűnik, ha $x_1 = \beta_1$ *és* $x_2 = \beta_2$, *a megoldhatóság feltétele viszont nem teljesül. Így a függvényegyenlet egyetlen megoldása az azonosan nulla függvény.*

4.3. Harmadik példa

Tekintsük a (31) típusú

$$\alpha_1 A(\sqrt{2}x) + \alpha_2 A(\sqrt{5}x) + \alpha_3 A(\sqrt{7}x) + A(x) = 0 \quad (x \in \mathbb{R}) \tag{61}$$

függvényegyenletet, ahol $A\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ additív függvény, $\beta_1 = \sqrt{2}$, $\beta_2 = \sqrt{5}$, $\beta_3 = \sqrt{7}$ és $\alpha_i \in \mathbb{R}$ $(i = 1, 2, 3)$ olyanok, hogy $\prod_{i=1}^{3} \alpha_i \neq 0$.

A 3.4.2. Tétel értelmében ha a fenti feltételek mellett a (α_1, α_2, α_3) külső paraméterpár algebrailag független, a függvényegyenletnek egyetlen additív megoldása van, az azonosan zérus függvény. A következő (i) érvelés tulajdonképpen egy algoritmus ennek megmutatására.

A (61) egyenletben x helyett rendre $\sqrt{2}x$, $\sqrt{5}x$, $\sqrt{7}x$, $\sqrt{2}\sqrt{5}x$, $\sqrt{2}\sqrt{7}x$, $\sqrt{5}\sqrt{7}x$ és az $\sqrt{2}\sqrt{5}\sqrt{7}x$ helyettesítésekkel élve az

$$\alpha_1 A(\sqrt{2}x) + \alpha_2 A(\sqrt{5}x) + \alpha_3 A(\sqrt{7}x) + A(x) = 0,$$

$$2\alpha_1 A(x) + \alpha_2 A(\sqrt{2}\sqrt{5}x) + \alpha_3 A(\sqrt{2}\sqrt{7}x) + A(\sqrt{2}x) = 0,$$
$$\alpha_1 A(\sqrt{2}\sqrt{5}x) + 5\alpha_2 A(x) + \alpha_3 A(\sqrt{7}\sqrt{5}x) + A(\sqrt{5}x) = 0,$$
$$\alpha_1 A(\sqrt{2}\sqrt{7}x) + \alpha_2 A(\sqrt{5}\sqrt{7}x) + 7\alpha_3 A(x) + A(\sqrt{7}x) = 0,$$
$$2\alpha_1 A(\sqrt{5}x) + 5\alpha_2 A(\sqrt{2}x) + \alpha_3 A(\sqrt{7}\sqrt{2}\sqrt{5}x) + A(\sqrt{2}\sqrt{5}x) = 0,$$
$$2\alpha_1 A(\sqrt{7}x) + \alpha_2 A(\sqrt{5}\sqrt{2}\sqrt{7}x) + 7\alpha_3 A(\sqrt{2}x) + A(\sqrt{2}\sqrt{7}x) = 0,$$
$$\alpha_1 A(\sqrt{2}\sqrt{5}\sqrt{7}x) + 5\alpha_2 A(\sqrt{7}x) + 7\alpha_3 A(\sqrt{5}x) + A(\sqrt{5}\sqrt{7}x) = 0,$$
$$2\alpha_1 A(\sqrt{5}\sqrt{7}x) + 5\alpha_2 A(\sqrt{2}\sqrt{7}x) + 7\alpha_3 A(\sqrt{2}\sqrt{5}x) + A(\sqrt{2}\sqrt{5}\sqrt{7}x) = 0.$$

egyenletrendszert kapjuk. Tekintsük az

$$M := \begin{pmatrix} 1 & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2\alpha_1 & 1 & 0 & 0 & \alpha_2 & \alpha_3 & 0 & 0 \\ 5\alpha_2 & 0 & 1 & 0 & \alpha_1 & 0 & \alpha_3 & 0 \\ 7\alpha_3 & 0 & 0 & 1 & 0 & \alpha_1 & \alpha_2 & 0 \\ 0 & 5\alpha_2 & 2\alpha_1 & 0 & 1 & 0 & 0 & \alpha_3 \\ 0 & 7\alpha_3 & 0 & 2\alpha_1 & 0 & 1 & 0 & \alpha_2 \\ 0 & 0 & 7\alpha_3 & 5\alpha_2 & 0 & 0 & 1 & \alpha_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 7\alpha_3 & 5\alpha_2 & 2\alpha_1 & 1 \end{pmatrix}$$

mátrixot. Ekkor az egyenletrendszer

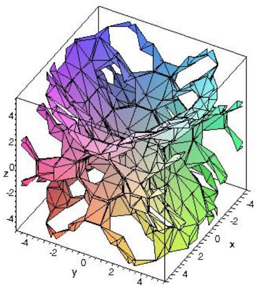
$$M\begin{pmatrix} A(x) \\ A(\sqrt{2}x) \\ A(\sqrt{5}x) \\ A(\sqrt{7}x) \\ A(\sqrt{2}\sqrt{5}x) \\ A(\sqrt{2}\sqrt{7}x) \\ A(\sqrt{5}\sqrt{7}x) \\ A(\sqrt{2}\sqrt{5}\sqrt{7}x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

alakban írható.

(i) Ha az (α_1, α_2, α_3) együtthatóhármas algebrailag független, akkor az azonosan zérus függvény az egyetlen megoldása az egyenletnek. Valóban, ha $\det M \neq 0$, akkor az M által reprezentált lineáris transzformáció magja csak a zérus vektort tartalmazza; így $A(x) = 0$ minden $x \in \mathbb{R}$. Indirekt tegyük fel, hogy $\det M = 0$. Ekkor a

$$P(x,y,z) := \det\begin{pmatrix} 1 & x & y & z & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2x & 1 & 0 & 0 & y & z & 0 & 0 \\ 5y & 0 & 1 & 0 & x & 0 & z & 0 \\ 7z & 0 & 0 & 1 & 0 & x & y & 0 \\ 0 & 5y & 2x & 0 & 1 & 0 & 0 & z \\ 0 & 7z & 0 & 2x & 0 & 1 & 0 & y \\ 0 & 0 & 7z & 5y & 0 & 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 7z & 5y & 2x & 1 \end{pmatrix}$$

racionális együtthatós polinomnak azonosan zérusnak kell lennie, hiszen a külső paramétercsalád algebrailag független és - feltevésünk szerint - $\det M = P(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = 0$. Ez pedig ellentmondás, mivel $P(0,0,0) = 1$.



1. ábra. A $P(x, y, z) = 0$ irregularitási felület.

4.3.1. Megjegyzés. *Az ábrán a $P(x, y, z) = 0$ irregularitási felületet szemléltetjük – emlékeztetünk rá, hogy $P(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \det M$, ahol M a példában szereplő függvényegyenlet-rendszer mátrixa. A regularitási tartományt illetően jegyezzük meg, hogy $P(0, 0, 0) = 1$, s ezért az origónak van olyan gömbkörnyezete, hogy bármely innen vett $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ paramétercsalád esetén $0 \neq P(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \det M$, azaz a függvényegyenletnek csak egyetlen, az azonosan nulla additív megoldása van függetlenül az $\vec{\alpha} := (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ elem definiáló ideáljától. Ennek irányába mutat a következő gondolatmenet is.*

(ii) Most tekintsünk el az $(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3)$ paraméterek algebrai függetlenségétől.

4.3.1. Lemma. *Ha x, y és z nemzérus valós számok és az*

$$M(x,y,z) := \begin{pmatrix} 1 & x & y & z & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2x & 1 & 0 & 0 & y & z & 0 & 0 \\ 5y & 0 & 1 & 0 & x & 0 & z & 0 \\ 7z & 0 & 0 & 1 & 0 & x & y & 0 \\ 0 & 5y & 2x & 0 & 1 & 0 & 0 & z \\ 0 & 7z & 0 & 2x & 0 & 1 & 0 & y \\ 0 & 0 & 7z & 5y & 0 & 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 7z & 5y & 2x & 1 \end{pmatrix}$$

mátrix rangja kisebb, mint 6*, akkor* $x^2 = \frac{1}{2}$*,* $y^2 = 1$ *és* $z^2 = \frac{5}{7}$*.*

Bizonyítás. Az alábbi aldeterminánsa M-nek mutatja, hogy M rangja legalább 5.

$$\det \begin{pmatrix} z & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & y & z & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 & z & 0 \\ 1 & 0 & x & y & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & z \end{pmatrix} = -2z^3xy$$

Tegyük fel, hogy a rang kisebb, mint 6. Ekkor a

$$\det \begin{pmatrix} y & z & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & y & z & 0 & 0 \\ 1 & 0 & x & 0 & z & 0 \\ 0 & 1 & 0 & x & y & 0 \\ 2x & 0 & 1 & 0 & 0 & z \\ 0 & 2x & 0 & 1 & 0 & y \end{pmatrix} = 4z^2y^2(1-2x^2)$$

aldetermináns eltűnéséből kapjuk, hogy $x^2 = \frac{1}{2}$; ennek segítségével pedig a

$$\det \begin{pmatrix} x & y & z & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & y & z & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & x & 0 & z & 0 \\ 0 & 0 & 1 & x & 0 & y & 0 \\ 5y & 2x & 0 & 1 & 0 & 0 & z \\ 7z & 0 & 2x & 0 & 1 & 0 & y \\ 0 & 7z & 5y & 0 & 0 & 1 & x \end{pmatrix} = -8x^5yz + 56z^3yx^3 - 8zyx^3 +$$

$$+40zy^3x^3 - 98xyz^5 + 140xz^3y^3 - 28xz^3y + 6zyx - 50xzy^5 - 20xzy^3 =$$

$$= xyz(-8x^4 + 56z^2x^2 - 8x^2 + 40y^2x^2 - 98z^4 +$$

$$+140z^2y^2 - 28z^2 + 6 - 50y^4 - 20y^2)$$

aldetermináns eltűnéséből

$$0 = -98z^4 + 140z^2y^2 - 50y^4 = -2(7z^2 - 5y^2)^2$$

következik, melyből $y^2 = \frac{7}{5}z^2$. Mivel

$$\det M(x, y, z) = 1 + 16x^8 + 560z^2y^2x^4 + 2401z^8 +$$

$$+392z^4x^2 - 500y^6 - 28z^2 + 112z^2x^4 + 24x^4 - 6860z^6y^2 +$$

$$+7350z^4y^4 - 3500z^2y^6 - 2800z^2y^2x^2 + 625y^8 + 1960z^4y^2x^2 +$$

$$1400z^2y^4x^2 - 160x^6y^2 - 224x^6z^2 + 600x^4y^4 + 80x^4y^2 +$$

$$+1176x^4z^4 - 1000x^2y^6 + 200x^2y^4 - 2744x^2z^6 + 980z^4y^2 - 1372z^6 +$$

$$+700z^2y^4 - 32x^6 + 150y^4 + 40x^2y^2 + 294z^4 - 20y^2 - 8x^2 + 56z^2x^2 + 140z^2y^2,$$

ennek eltűnéséből $x^2 = \frac{1}{2}$ és $y^2 = \frac{7}{5}z^2$ felhasználásával

$$0 = -294z^4 + \frac{14406}{25}z^8,$$

melyből $z^2 = \frac{5}{7}$ és $y^2 = 1$. ■

A lemmára tekintettel M rangja nagyobb vagy egyenlő mint 6 vagy

$$\alpha_1 = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \alpha_2 = \pm 1, \quad \text{és} \quad \alpha_3 = \pm\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{7}}$$

(rang $M = 5$ esetén).

(a) Ha az utóbbi áll fenn, azaz M rangja *minimális*, akkor a harmadik példa egy speciális esete a másodiknak, ugyanis ekkor az

$$\pm\frac{1}{\sqrt{2}}A(\sqrt{2}x) \pm A(\sqrt{5}x) \pm \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{7}}A(\sqrt{7}x) + A(x) = 0 \quad (x \in \mathbb{R})$$

alakú egyenletekből a második és negyedik tag A additivitását használva összevonható, továbbá az x helyére $\frac{x}{1+\sqrt{5}}$- t írva a második példaként tárgyalt alakú

$$\pm\frac{1}{\sqrt{2}}A\left(\frac{\sqrt{2}}{1+\sqrt{5}}x\right)\pm\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{7}}A\left(\frac{\sqrt{7}}{1+\sqrt{5}}x\right)\pm A(x)=0 \quad (x\in\mathbb{R})$$

egyenletet kapjuk.

(b) Ha M rangja *maximális*, akkor az M mátrixhoz tartozó lineáris transzformáció magja triviális és az egyetlen megoldás az azonosan nulla additív függvény.

(c) Ha pedig a rang 7, akkor az M mátrixhoz tartozó lineáris transzformáció magja egydimenziós és az első példában látott érveléssel redukálhatjuk a problémát a Daróczy-féle tétel (többszöri) alkalmazására.

(d) Az egyetlen érdekes eset tehát amikor rang M = 6. Ekkor az M által reprezentált lineáris transzformáció magja kétdimenziós és ennélfogva

$$\begin{pmatrix} A(x) \\ A(\sqrt{2}x) \\ A(\sqrt{5}x) \\ A(\sqrt{7}x) \\ A(\sqrt{2}\sqrt{5}x) \\ A(\sqrt{2}\sqrt{7}x) \\ A(\sqrt{5}\sqrt{7}x) \\ A(\sqrt{2}\sqrt{5}\sqrt{7}x) \end{pmatrix} = \lambda(x)\begin{pmatrix} v_0 \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \\ v_7 \end{pmatrix} + \mu(x)\begin{pmatrix} w_0 \\ w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \\ w_5 \\ w_6 \\ w_7 \end{pmatrix}$$

valamely λ és μ additív függvényekre. Ha $v_0 = w_0 = 0$ akkor A az azonosan nulla függvény. Ha például $v_0 \neq 0$, akkor

$$\lambda(x) = \frac{1}{v_0}A(x) - \frac{w_0}{v_0}\mu(x)$$

és következésképpen

$$A\left(\sqrt{2}x\right) = \frac{v_1}{v_0}A(x) + \left(w_1 - \frac{w_0}{v_0}\right)\mu(x).$$

Ha $w_1 - \frac{w_0}{v_0} = 0$ rögtön az

$$A\left(\sqrt{2}x\right) = \frac{v_1}{v_0}A(x)$$

szemihomogenitási tulajdonságot kapjuk; egyébként pedig

$$\mu(x) = \frac{1}{w_1 - \frac{w_0}{v_0}}A\left(\sqrt{2}x\right) - \frac{v_1}{v_0\left(w_1 - \frac{w_0}{v_0}\right)}A(x)$$

és így

$$A\left(\sqrt{5}x\right) = \frac{v_2}{v_0}A(x) - \frac{w_0 v_2}{v_0}\left(\frac{1}{w_1 - \frac{w_0}{v_0}}A\left(\sqrt{2}x\right) - \frac{v_1}{v_0\left(w_1 - \frac{w_0}{v_0}\right)}A(x)\right) +$$

$$w_2\left(\frac{1}{w_1 - \frac{w_0}{v_0}}A\left(\sqrt{2}x\right) - \frac{v_1}{v_0\left(w_1 - \frac{w_0}{v_0}\right)}A(x)\right),$$

ami egy az első példában már tárgyalt (56) egyenlet-típus.

Összefoglaló

A négy fejezetből álló disszertációban tárgyalt problémákat a [6] dolgozatban közölt, Daróczy Zoltán, Maksa Gyula és Páles Zsolt által felvetett ekvivalenciaprobléma motiválja. Nevezetesen, milyen feltételek mellett igaz, hogy a

I. $f(M_1(x,y)) + f(M_2(x,y)) = f(x) + f(y) \quad (x, y \in I)$ és a

II. $2f(M_1 \otimes M_2(x,y)) = f(x) + f(y) \quad (x, y \in I)$

függvényegyenletek megoldáshalmaza egybeesik? Egyenleteinkben $I \subset \mathbb{R}$ nemüres, nyílt valós intervallum, M_1 és M_2 kétváltozós, szigorú közepek, $M_1 \otimes M_2$ pedig a Gauss kompozíciót jelöli. [6]-ban a szerzők az

$$M_1 \otimes M_2(M_1(x,y), M_2(x,y)) = M_1 \otimes M_2(x,y)$$

invarianciaegyenlet segítségével megmutatták, hogy a második egyenlet minden megoldása megoldása az első egyenletnek is. A nem triviális probléma tehát az (I.) egyenlet megoldásainak a meghatározása.

A disszertáció **első fejezetében** az (I.) függvényegyenletet vizsgáljuk abban a speciális esetben, amikor M_1 és M_2 rendre az aritmetikai és a geometriai közép. Megmutatjuk, hogy ebben az esetben az (I.) függvényegyenletnek csak a konstans függvények a megoldásai. (Ebből azonnal következik, hogy az (I) és (II.) függvényegyenletek ekvivalensek.) A korábbi eredményekhez képest lényeges különbség az I intervallum szerepeltetése. Az $I = \mathbb{R}_+$ esetben ($\mathbb{R}_+$ a pozitív valós számok halmaza) ugyanis Daróczy–Maksa–Páles [6] már igazolták az ekvivalenciát. A bizonyítás azonban, mely Maksa Gyula egy [20]-ban elért eredményére támaszkodik, nem működik, ha I nem a teljes pozitív félegyenes, hanem csak egy valódi részintervallum. Egy fontos következménye az ekvivalenciának az, hogy az aritmetikai és a geometriai közép Gauss kompozíciója nem kváziaritmetikai közép $\mathbb{R}_+$ egyetlen nyílt részintervallumán sem annak ellenére, hogy mind az aritmetikai, mind pedig a geometriai közép kváziaritmetikai.

Daróczy, Lajkó, Lovas, Maksa és Páles [7]-ben az ekvivalenciát abban a speciális esetben vizsgálták, amikor (I.)-ben és (II.)-ben M_1 és M_2 súlyozott aritmetikai közepek, azaz

$$M_1(x,y) := \alpha x + (1-\alpha)y, \quad M_2(x,y) := (1-\alpha)x + \alpha y \ \ (x, y \in I).$$

Ekkor (I.)

$$f(\alpha x + (1-\alpha)y) + f((1-\alpha)x + \alpha y) = f(x) + f(y) \ \ (x, y \in I),$$

(II.) pedig

$$2f(\frac{x+y}{2}) = f(x) + f(y) \ \ (x, y \in I)$$

alakban írható. Utóbbi a nevezetes Jensen egyenlet.

Megmutatták, hogy ha α algebrai szám, úgy, hogy $\frac{1-\alpha}{\alpha}$ és $-\frac{1-\alpha}{\alpha}$ nem algebrailag konjugáltak, akkor minden megoldása (I.)- nek megoldása a nevezetes Jensen egyenletnek is. Ebben az esetben tehát (I.) és (II.) ekvivalensek. Ha azonban $\frac{1-\alpha}{\alpha}$ transzcendens szám, vagy algebrai ugyan, de $\frac{1-\alpha}{\alpha}$ és $-\frac{1-\alpha}{\alpha}$ algebrailag konjugáltak, akkor van olyan $f\colon I \to \mathbb{R}$ megoldása (I.)-nek, mely $f(x) = A_2(x,x) + A_1(x) + A_0$ alakú és az $A_2\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ nem azonosan zérus szimmetrikus biadditív függvény. Így ebben az esetben (I.) és (II.) nem ekvivalensek. Ezért a súlyozott aritmetikai közepeket tartalmazó függvényegyenletek önmagukban is érdekesek, illetve további általánosítások kiindulópontjai.

A disszertáció **második fejezetében** a

$$\sum_{i=0}^{n} a_i f(b_i x + (1-b_i)y) = 0 \quad (x, y \in I),$$

alakú függvényegyenletet vizsgáljuk, ahol f egy pozitív hosszúságú I nyílt intervallumon értelmezett ismeretlen függvény, $a_i \in \mathbb{R}$; $0 < b_i < 1$

$(i=0,1,\ldots,n)$ pedig adott valós számok. Az $n=3$, $a_0=a_1=1$, $a_2=a_3=-1$ és $b_2=1$, $b_3=0$ korábban már vizsgált speciális esetekkel szemben, ld. [6], [7] és [21], a probléma nehézségét az adja, hogy a súlyokra vonatkozó feltétel miatt $f(x)$ általában nem fejezhető ki explicit módon a függvényegyenletből, továbbá a függvényegyenlet csak egy pozitív hosszúságú nyílt intervallumon áll fenn. Ezeknek a nehézségeknek köszönhetően nincs elemi megoldási módszer, hanem egy általános algoritmus segítségével oldjuk meg az egyenletet. Ennek főbb lépései:

1. alkalmas helyettesítésekkel részintervallumokon teljesülő speciális típusú függvényegyenlet felállítása,

2. kiterjesztési tétel alkalmazása,

3. globális eredmények felhasználásával az első lépésben szereplő függvényegyenlet megoldása a részintervallumokon.

Mivel a harmadik lépésben konstruált megoldások általában függnek az I intervallum részintervallumaitól, ezért az utolsó lépés

4. az egyes részintervallumokon kapott megoldások összefűzése és a megoldás szerkezetének egységes leírása a teljes I intervallumon.

Az imént ismertetett algoritmust alkalmazzuk a függvényegyenlet megoldására. A fejezet fő eredménye szerint az f megoldás mindig

$$f(x)=A_{n-1}(\underbrace{x,\ldots,x}_{(n-1)\text{ -szer}})+\ldots+A_2(x,x)+A_1(x)+A_0$$

alakban reprezentálható, ahol bármely k pozitív egész szám mellett

$$A_k\colon\mathbb{R}^k\to\mathbb{R}$$

változóiban szimmetrikus, k-additív függvény, továbbá A_0 valós konstans. A megoldást tehát ebben az alakban keressük, aminek a visszahelyettesítése az eredeti függvényegyenletbe most már a megfelelő k számhoz tartozó A_k függvényekre ad szükséges és elegendő feltételeket. Ezeket foglaltuk össze a 2.2.1. Tételben, ami a további vizsgálatok kiindulópontja, hiszen bonyolult, általában a k értékével egyező tagsszámú lineáris függvényegyenlet-rendszerekről van szó. A $k = 1$, azaz az f megoldásban szereplő additív tagra vonatkozó *elsőrendű* feltétel például

$$a_n A_1(t) + \sum_{i=1}^{n-1} a_i A_1(t\beta_i) = 0 \quad (t \in \mathbb{R}),$$

míg a biadditív A_2 tagra vonatkozó *másodrendű* feltétel pedig az

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \sum_{i=1}^{n} a_i A_2(s, t\beta_i) & = & 0 \\ \sum_{i=1}^{n} a_i A_2(t\beta_i, t\beta_i) & = & 0 \end{array} \right. \quad (t \in \mathbb{R}),$$

egyenletrendszer, ahol a β_i paraméterek a kiinduló függvényegyenlet b_i belső paramétereivel vannak kifejezve (és így tovább). A probléma most már úgy vethető fel, hogy a paraméterek milyen választása esetén van legalább elsőfokú, azaz nem azonosan zérus A_1 additív taggal rendelkező; illetve maximális fokú, azaz nem azonosan zérus A_{n-1} „főmonommal" rendelkező megoldása a függvényegyenletnek. A két probléma persze $n = 2$ esetén egybeesik, általában azonban különböző. Ha a másodrendű feltételben szereplő egyenletrendszer első tagját alaposabban megnézzük, bármely rögzített s paraméter esetén egy az elsőrendű feltételt teljesítő additív függvényt kapunk, azaz ha van nem azonosan zérus biadditív rész a megoldásban, akkor additív részt is lehet konstruálni; ugyanez a helyzet a magasabbrendű feltételekkel – nem azonosan zérus A_k k-additív megoldás létezése (alkalmasan rögzített változók mellett) maga után vonja az alacsonyabb rendű feltételeket kielégítő A_1, ..., A_{k-1} függvények létezését. Megfordítva azonban mindez nem áll. A diszkussziót csak egy speciális, az $n = 3$, $a_0 = a_3 = 1$, illetve $a_1 = a_2 = -1$ esetben végeztük el. Felhasználva a [7] dolgozat eredményeit szükséges és elegendő feltételt tudunk adni nem azonosan zérus, biadditív (tehát maximális fokszámú) megoldás létezésére. Ezt egy konkrét példával is szemléltetjük az 2.3. alfejezetben.

A **harmadik fejezet** a második fejezetben szereplő elsőrendű feltétel vizsgálatának van szentelve. Az elsőrendű feltételre a továbbiakban *Daróczy-féle függvényegyenletként* hivatkozunk, ugyanis $n = 2$ esetben Daróczy Zoltán [8]- ben szükséges és elegendő feltételt tudott adni az elsőrendű feltételt kielégítő nem azonosan zérus additív függvény létezésére. A Daróczy tétele az

$$A(t) + \alpha A(\beta t) = 0$$

alakú egyenletben szereplő paraméterek algebrai tulajdonságai segítségével jellemzi a megoldhatóságot: pontosan akkor van nem azonosan zérus additív megoldás, ha a $-(1/\alpha)$ és a β paraméterek algebrailag konjugáltak, azaz vagy mindkettő transzcendens, vagy mindkettő algebrai, ugyanazzal a definiáló főpolinommal. Ebben a fejezetben Daróczy tételét kiterjesztjük tetszőleges n esetére, ld. [32] és [33]. Ekkor már nem paraméterek, hanem paramétercsaládok és lineáris sokaságok algebrai tulajdonságairól van szó. Sikerült igazolni, ld. 3.5.4. Tétel, hogy ha az

$$A(x) + \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i A(\beta_i x) = 0 \quad (x \in \mathbb{R})$$

alakú Daróczy-féle függvényegyenletben a belső $(\beta_1, \ldots, \beta_{n-1})$ paraméterek algebrailag függetlenek, akkor a nem azonosan zérus additív megoldás létezéséhez szükséges és elegendő ha a külső $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}$ paraméterek közül legalább az egyik transzcendens szám. A 3.5.5. Tétel mutatja, hogy a paramétercsaládok szerepe felcserélhető. A bizonyítás során kulcsfontosságú szerepet kap annak az esetnek a vizsgálata, melyben vagy a külső, vagy a belső paramétercsalád tagjainak mindegyike algebrai szám. Az ilyen tipusú egyenletek megoldására algoritmust adtunk a 3.4 alfejezetben, mely a Gauss-elimináció lineáris függvényegyenlet-rendszerekre vonatkozó megfelelője és alkalmas az additív megoldás létezésének az eldöntésére, illetve keresésére, ld. [31]. Különösen érdekesek ezeknek az eredményeknek a negatív következményei, melyek a Daróczy-féle függvényegyenlet csak triviális (az azonosan zérus additív függvénnyel való) megoldhatóságáról szólnak, hiszen azonnal kizárják a kiinduló, súlyozott közepeket tartalmazó függvényegyenlet nem triviális megoldhatóságát. A magasabb rendű A_k monomokra ($k = 2,\ldots, n-1$) vonatkozó egyenletrendszerek első tagjai ugyanis ($k-1$ változó rögzítése mellett) formailag az elsőrendű feltételt kielégítő additív függvényekről szólnak. Laczkovich Miklós és Székelyhidi Gábor [17] egy fontos eredménye szerint megszámlálható, diszkrét Abel csoporton spektrálanalízis érvényes, azaz a csoporton értelmezett komplex értékű függvények vektorterének minden nemtriviális, zárt és eltolásinvariáns altere tartamaz nem azonosan zérus exponenciális függvényt. Ennek az eredménynek a felhasználásával a 49. International Symposium on Functional Equations (Graz, Június 19-26, 2011) konferencián elhangzott előadásában Laczkovich Miklós szükséges és elegendő feltételt adott nem azonosan zérus additív megoldás létezésére a komplex számtest egy alkalmas tulajdonságú δ izomorfizmusának segítségével. Ez a racionális számtest belső (β_i, $i = 1, \ldots, n-1$) együtthatókkal való bővítését ágyazza be izometrikusan a komplex számtestbe úgy, hogy

$$1 + \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i \delta(\beta_i) = 0.$$

Természetesen a paramétercsaládok algebrai tulajdonságai döntik el az ilyen testizomorfizmus létezésének problémáját. A már idézett saját eredmények éppen ezt a kérdést érintik.

A **negyedik fejezetben** a Daróczy-féle függvényegyenletet speciális esetekben vizsgáljuk. A paramétercsaládok algebrai tulajdonságainak nyelvén kifejezve a következő eseteket sikerült tisztázni:

(i) a külső, vagy a belső paramétercsalád algebrailag független (szükséges és elegendő feltétel a nem azonosan zéró megoldás létezésére),

(ii) a külső, vagy a belső paramétercsalád minden tagja algebrai szám.

A (ii) esetben a függvényegyenletek nem azonosan zérus additív megoldásainak keresésére olyan megoldási algoritmust mutatunk, mely lényegében a 3.4 alfejezetben ismertetett Gauss-féle eliminációs technikán alapszik. Az egyetlen lényeges (és tisztázatlan) eset, ha mindkét paramétercsalád algebrailag függő és mindkettőben van legalább egy transzcendens elem. A bemutatott példákra alapozva (sejtés szintjén) az látszik körvonalazódni, hogy az algebrai függőség segítségével egy tagszámcsökkentő, redukciós eljárást hajthatunk végre, mely véges sok lépésben visszavezet az algebrailag független külső, vagy belső paramétercsaládok sikeresen megoldott esetére.

Summary

In this PhD dissertation we discuss problems coming from the equivalence problem of the functional equations

I. $f(M_1(x,y)) + f(M_2(x,y)) = f(x) + f(y) \quad (x, y \in I)$ and

II. $2f(M_1 \otimes M_2(x,y)) = f(x) + f(y) \quad (x, y \in I)$

due to Z. Daróczy, Gy. Maksa and Zs. Páles [6]. Here $I \subset \mathbb{R}$ is a nonempty, open real interval, M_1 and M_2 are two variable strict means on I and $M_1 \otimes M_2$ denotes their Gauss composition. In [6] the author proved by the invariance equation

$$M_1 \otimes M_2(M_1(x,y), M_2(x,y)) = M_1 \otimes M_2(x,y)$$

that any solution of the second functional equation is a solution of the first one. Therefore it is enough to determine the solutions of the first functional equation to decide their equivalence.

In **the first chapter** of the dissertation we study the functional equation (I.) in case of the arithmetic and geometric means. We show that all solutions of (I.) are constant. (As a direct consequence we have immediately that (I.) and (II.) are equivalent.) In the special case $I = \mathbb{R}_+$ (where $\mathbb{R}_+$ is the set of positive real numbers) the equivalence has been proved in Daróczy–Maksa–Páles [6]. The argumentation is based on a more general result due to Gy. Maksa [20] about the functions $a, b, c\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ satisfying the functional equation

$$a(x+y) + b(x \cdot y) = c(x) + c(y)$$

but it doesn't work in case of an arbitrary (nonempty) open interval $I \subset \mathbb{R}_+$. The proof presented in the dissertation is essentially different. One of the most important consequence of the equivalence of (I.) and

(II.) in case of the arithmetic and geometric means is that their Gauss composition is not a quasi-arithmetic mean on any nonempty intervals in $\mathbb{R}_+$ although both the arithmetic and the geometric means are quasi-arithmetic.

Z. Daróczy, K. Lajkó, R. Lovas, Gy. Maksa and Zs. Páles [7] investigated the equivalence of the functional equations in the special case of weighted arithmetic means

$$M_1(x,y) := \alpha x + (1-\alpha)y, \quad M_2(x,y) := (1-\alpha)x + \alpha y \quad (x, y \in I)$$

too. Then (I.) can be written into the form

$$f(\alpha x + (1-\alpha)y) + f((1-\alpha)x + \alpha y) = f(x) + f(y) \quad (x, y \in I),$$

and (II.) reduces to the Jensen equation

$$2f(\frac{x+y}{2}) = f(x) + f(y) \quad (x, y \in I).$$

The authors presented that both positive and negative answers can also be given to the equivalence problem. Namely, if α is an algebraic number such that $\frac{1-\alpha}{\alpha}$ and $-\frac{1-\alpha}{\alpha}$ are not algebrically conjugated then all solutions of (I.) are solutions of the Jensen equation too. Therefore they are equivalent to each other. As a negative answer they also proved that if $\frac{1-\alpha}{\alpha}$ is transcendent or it is algebraic such that $\frac{1-\alpha}{\alpha}$ and $-\frac{1-\alpha}{\alpha}$ are algebraically conjugated then there exist solutions of the form $f(x) = A_2(x,x) + A_1(x) + A_0$ of the functional equation (I.) with not identically zero symmetric biadditive part A_2. Therefore (I.) and (II.) are not equivalent because any solution of the Jensen equation must be the sum of an additive function A_1 and a constant A_0. According to these results the functional equations containing weighted arithmetic means are proposed to study independently of the equivalence problem in a more general form.

In **the second chapter** of the dissertation we study the functional equation

$$\sum_{i=0}^{n} a_i f(b_i x + (1 - b_i)y) = 0 \quad (x, y \in I),$$

where f is an unknown function defined on a nonempty open interval I, $a_i \in \mathbb{R}$ and $0 < b_i < 1$ $(i = 0, 1, \ldots, n)$ are real parameters. The case $n = 3$, $a_0 = a_1 = 1$, $a_2 = a_3 = -1$ and $b_2 = 1$, $b_3 = 0$ was investigated in [6], [7] and [21]. Here we avoid the values $b_i = 0$ or 1 for any index $i = 0, \ldots, n$ which means that $f(x)$ cannot be explicitely expressed from the functional equation. Therefore we can not use the technic of extension of the solution onto the entire real line or the technic of differences in a direct way. These difficulties are handled by the following algorithm of the solution. The main steps are

1. using substitutions derive functional equations on subintervals involving $f(u)$ in an explicite way,
2. using the technic of extension of the solution onto the entire real line,
3. the characterization of the solution by global results.

According to the starting step this characterization gives only local properties of the solution of the original functional equation. Therefore the last step is

4. the uniform description of the structure of the solution on the entire interval I.

This algorithm will be used for the solution of our functional equation. The main result says that any solution $f\colon I \to \mathbb{R}$ has the form

$$f(x) = A_{n-1}(\underbrace{x, \ldots, x}_{(n-1)\text{ -times}}) + \ldots + A_2(x, x) + A_1(x) + A_0,$$

where for all positive integer k,

$$A_k\colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$$

is a symmetric, k-additive function and A_0 is a constant. After substituting this form of the solution into the functional equation necessary and sufficient conditions can be given for each of the terms A_1, ..., A_{n-1}. They are formulated in Theorem 2.2.1. as the starting point of further investigations because we have a system of linear functional equations involving k equations for any integer $k = 1, 2, ..., n-1$. The *first order condition*, i.e. the necessary and sufficient condition for the additive term A_1 is

$$a_n A_1(t) + \sum_{i=1}^{n-1} a_i A_1(t\beta_i) = 0 \quad (t \in \mathbb{R}).$$

The *second order conditions*, i.e. the necessary and sufficient conditions for the biadditive term A_2 are

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \sum_{i=1}^{n} a_i A_2(s, t\beta_i) & = & 0 \\ \sum_{i=1}^{n} a_i A_2(t\beta_i, t\beta_i) & = & 0 \end{array} \right. \quad (t \in \mathbb{R}),$$

where the parameters β_i are explicitly related to the inner parameters b_i of the original functional equation for any indeces $i = 1, 2, ..., n$; and so on (third order conditions, ...,nth order conditions). The next problem can be formulated in such a way that under what conditions for the parameters there is a solution of at least first degree (i.e. a solution with not identically zero additive term) or a solution of maximal degree (i.e. a solution with not identically zero $(n-1)$-additive term). They are equivalent in case of $n = 2$ but different in general. It is remarkable that the existence of A_k satisfying the kth order conditions imply terms of lower degrees in the solution. For example, after fixing the variable s, the first equation for the biadditive term A_2 is formally the same as that for the additive term A_1 and the situation is similar in case of terms of higher degree satisfying higher order conditions. The converse is not true. We discuss only the special case of $n = 3$, $a_0 = a_3 = 1$ and $a_1 = a_2 = -1$. Using the results in [7] a necessary and sufficient condition will be formulated for the existence of not identically zero biadditive solution (i.e. a solution of maximal degree) of the functional equation. Explicite examples will be also given in the subsection 2.3.

The third chapter is devoted to the investigation of the first order condition. It is referred as *Daróczy's functional equation* because in case of $n = 2$ Daróczy [8] gives a necessary and sufficient condition for the existence of a not identically zero additive function satisfying the first order condition. Daróczy's criteria is formulated by the help of the algebraic properties of the parameters α, β in the functional equation

$$A(t) + \alpha A(\beta t) = 0.$$

The equation has nontrivial solutions if and only if $-(1/\alpha)$ and β are algebraically conjugated, i.e. both of them are transcendent or they are algebraic with the same defining polynomial. In this chapter we extend Daróczy's result for the case of $n \geq 2$, see [32] and [33]. The algebraic properties of family of parameters and linear varieties are essential. We prove in Theorem 3.5.4. that if the inner parameters $(\beta_1, \ldots, \beta_{n-1})$ are algebraically independent then the Daróczy's functional equation

$$A(x) + \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i A(\beta_i x) = 0 \quad (x \in \mathbb{R})$$

has nontrivial additive solutions if and only if at least one of the outer parameters $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}$ is transcendent. Theorem 3.5.5. shows that the inner and the outer parameters play symmetric roles in the formulation of the result. To present the proof of these theorems we had to investigate the cases when all of the inner (or, symmetrically, all of the outer) parameters are algebraic. In these cases we have algorithms for finding the additive solutions of Daróczy's functional equations. The first step is to generate a system of linear functional equations by substitutions. Then we use a kind of elminating proccess to find the unknown additive function, see subsection 3.4. and [31]. The negative consequences are very interesting because if the Daróczy's functional equation has only trivial (i.e. identically zero) additive solution then so has the higher order conditions. Indeed, the kth order conditions ($k \geq 2$) involve a Daróczy's functional equation for the additive function coming from A_k after fixing the first $(k-1)$ variables. Using the spectral analysis result by M. Laczkovich and G. Székelyhidi [17] on the existence of exponential functions on countable discrete Abelian groups, non-zero additive solutions imply the existence of a field isomorphism $\delta\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ such that

$$1 + \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i \delta(\beta_i) = 0$$

and vica-verse. The result is due to M. Laczkovich and G. Kiss presented at the 49. International Symposium on Functional Equations (Graz, 19-26 June, 2011). The existence of this isomorphism depends obviously on the algebraic properties of the parameters. Our results are just based on such kind of properties.

In **the fourth chapter** we investigate Daróczy's functional equations in special cases. In terms of the algebraic properties of the family of parameters the following cases are clarified:

(i) the outer (or the inner) parameters are algebraically independent (necessary and sufficient condition for the existence of not identically zero additive solutions),

(ii) all of the outer (or the inner) parameters are algebraic.

In case (ii) we use an algorithm based on the eliminating technic in subsection 3.4. for finding not identically zero additive solutions of the functional equation. The only unclarified case is that of algebraically dependent family of parameters, i.e. both the outer and the inner parameters are algebraically dependent and each of them contains at least one transcendent number. The conjecture based on the presented examples in this chapter is that the algebraically dependent parameters admit the reduction of the number of parameters (with some eliminating proccess) in the functional equation as far as we get back to the case of $n = 2$ or the case of algebraically independent parameters in finite many steps.

Irodalomjegyzék

[1] J. Aczél, J. K. Chung and C. T. Ng, *Symmetric second differences in product form on groups*, Topics in Mathematical Analysis, World Scientific, Singapure, 1-22 (1989).

[2] G. Almkvist and B. Berndt, *Gauss, Landen, Ramanujan, the arithmetic-geometric mean, ellipses, π, and the Ladies diary*, Amer. Math. Monthly **95** (1988), no. 7, 585–608.

[3] A. Baker, *Transcendental number theory*, Cambridge University Press 1975.

[4] J. M. Borwein and P. B. Borwein, *Pi and the AGM, (A study in analytic number theory and computational complexity)*, Wiley, New York, 1987.

[5] B. C. Carlson, *Algorithms involving arithmetic and geometric means*, Amer. Math. Monthly **78** (1971), 496–505.

[6] Z. Daróczy, Gy. Maksa, and Zs. Páles, *Functional equations involving means and their Gauss composition*, Proc. Amer. Math. Soc., **134** (2005), no. 2, 521-530.

[7] Z. Daróczy, K. Lajkó, R-L. Lovas, Gy. Maksa and Zs. Páles, *Functional equations involving means*, Acta Math. Hungar., **116** (1-2), 2007, 79-87.

[8] Z. Daróczy, *Notwendige und hinreichende Bedingungen für die Existenz von nichtkonstanten Lösungen linearer Funktionalgleichungen*, Acta Sci. Math. Szeged, **22** (1961), 31–41.

[9] Z. Daróczy, *Problem 13.*, Report of meeting; The Thirty-seventh International symposium on Functional Equations, May 16-23, 1999, Huntington, WV, Aequat. Math., **60** (2000), 175-200.

[10] Z. Daróczy and Zs. Páles, *Gauss composition of means and the solution of the Matkowski–Sutô problem*, Publ. Math. Debrecen, **61(1-2)** (2002), 157-218.

[11] D.Z.Djokovic, *A representation theorem for* $(X_1 - 1) \ldots (X_n - 1)$ *and its applications*, An Polon. Math. **22** 1969, 189-198.

[12] C. F. Gauss, *Bestimmung der Anziehung eines elliptischen Ringes*, Akademische Verlagsgesellschaft M. B. H., Leipzig, 1927, Nachlass zur Theorie des arithmetisch-geometrischen Mittels und der Modulfunktion.

[13] G. H. Hardy, J. E. Littlewood, and G. Pólya, *Inequalities*, Cambridge University Press, Cambridge, 1934, (first edition), 1952 (second edition).

[14] S. Haruki, *On the theorem of S. Kakutani-M.Nagumo and J.L.Walsh for the mean value property of harmonic and complex polinomials*, Pacific J. Math. **94** 1981, No.1., 113-123.

[15] Pl. Kannappan, *Functional Equations and Inequalities with Applications*, Springer Science+Business Media, LLC 2009.

[16] M. Kuczma, *An Introduction to the Theory of Functional Equations and Inequalities*, Prace Naukowe Universitetu Śląskiego w Katowicach Vol. CDLXXXIX (Państwowe Wydawnictwo Naukowe – Universitet Śląski, Warszawa–Kraków–Katowice, 1985).

[17] M. Laczkovich and G. Székelyhidi, *Harmonic Analysis on discrete Abelian groups*, Proc. Amer. Math. Soc. **133** (2005), 1581-1586.

[18] G. Van Der Lijn, *La definition fonctionelle des polinomes dans les groupes abéliens*, Fund.Math. **33** 1945, 43-50.

[19] M.A. Mckiernan *On vanishing n-th ordered differences and Hamel-bases*, Ann.Polon. Math. **19** (1967), 331-336.

[20] Gy. Maksa, *On the functional equation $f(x+y)+g(xy) = h(x)+h(y)$*, Publ. Math. Debrecen **24** (1977), no. 1-2, 25–29.

[21] Gy. Maksa, *Functional equations involving means*, (in Hungarian), Talks at the Academy, Hungarian Academy of Sciences, Budapest, 2006.

[22] Gy. Maksa and A. Varga, *The equivalence of two functional equations involving the arithmetic mean, the geometric mean and their Gauss composition*, Aequat. Math. 80 (2010), 173-179.

[23] Zs. Páles, *Extension theorems for functional equations with bisymmetric operators*, Aequat. Math. **63** (2002), 266-291.

[24] F. Radó and J. A. Baker, *Pexider's equation and aggregation of allocations*, Aequationes Math., **32** (1987), 227-239

[25] J. Rimán, *On an extension of Pexider's equation*, Zb. Radova Mat. Inst. Beograd N. S. **1**(9) (1976), 65-72.

[26] L. Székelyhidi, *Local polynomials and functional equations*, Publ. Math. Debrecen, **30** (1983), 283-290.

[27] L. Székelyhidi, *Remark on a paper of M.A.Mckiernan*, Ann.Polon. Math. **36** (1979), 245-247.

[28] L. Székelyhidi, *On a class of linear functional equations*, Publ. Math. (Debrecen) **29** (1982), 19-28.

[29] L. Székelyhidi, *Convolution type functional equations on topological Abelian goups*, World Scientific Publishing Co. Inc. Teaneck, NJ, 1991.

[30] A. Varga, *On a functional equations containing four weighted arithmetic means*, BJMA, Vol. 2 (1), 2008, 21-32, www.math-analysis.org.

[31] A. Varga, *On additive solutions of a linear equation*, Acta Math Hungar., 128 (1-2), 2010, 15-25.

[32] A. Varga and Cs. Vincze, *On Daróczy's problem for additive functions*, Publ. Math. Debrecen, Vol. 75 (1-2), 2009, 299-310.

[33] A. Varga and Cs. Vincze *On a functional equations containing weighted arithmetic means*, International Series of Numerical Mathematics, Vol.157, 2009, 305-315