Egyetemi doktori (PhD) értekezés tézisei

Középértékeket tartalmazó függvényegyenletek

Functional equations containing means

Vinczéné Varga Adrienn

Témavezető: Dr. Maksa Gyula

Debreceni Egyetem
Matematika- és Számítástudományok Doktori Iskola

Debrecen, 2012

Köszönetnyilvánítás

Köszönetet mondok Dr. Maksa Gyula egyetemi tanárnak témavezetői munkájáért.

Az értekezés elkészítését a TÁMOP-4.2.2/B-10/1-2010-0024 számú projekt támogatta. A projekt az Európai Unió támogatásával, az Európai Szociális Alap társfinanszírozásával valósult meg.

Bevezetés

A négy fejezetből álló disszertációban tárgyalt problémákat a [8] dolgozatban közölt, Daróczy Zoltán, Maksa Gyula és Páles Zsolt által felvetett ekvivalenciaprobléma motiválja: milyen feltételek mellett igaz, hogy az alábbi

I. $f(M_1(x,y)) + f(M_2(x,y)) = f(x) + f(y) \quad (x, y \in I)$,

II. $2f(M_1 \otimes M_2(x,y)) = f(x) + f(y) \quad (x, y \in I)$

függvényegyenletek megoldáshalmaza egybeesik? Egyenleteinkben $I \subset \mathbb{R}$ nemüres, nyílt intervallum, M_1 és M_2 kétváltozós szigorú közepek, $M_1 \otimes M_2$ pedig a Gauss kompozíciót jelöli. A szerzők az

$$M_1 \otimes M_2(M_1(x,y), M_2(x,y)) = M_1 \otimes M_2(x,y)$$

invarianciaegyenlet segítségével megmutatták, hogy (II.) minden megoldása megoldása az első egyenletnek is. A nem triviális probléma tehát az (I.) egyenlet megoldásainak a meghatározása.

A disszertáció **első fejezetében** az (I.) függvényegyenletet vizsgáljuk abban a speciális esetben, amikor M_1 és M_2 rendre az aritmetikai és a geometriai közép. A fejezet fő eredménye szerint ebben az esetben az (I.) függvényegyenletnek csak a konstans függvények a megoldásai, ld. [19]. (Ebből azonnal következik a függvényegyenletek ekvivalenciája.) A korábbi eredményekhez képest lényeges különbség az I intervallum szerepeltetése. Az $I = \mathbb{R}_+$ esetben ($\mathbb{R}_+$ a pozitív valós számok halmaza) ugyanis Daróczy–Maksa–Páles [8] már igazolták az ekvivalenciát. A bizonyítás azonban, mely Maksa Gyula egy [20] - ban elért eredményére támaszkodik, nem működik, ha I nem a teljes pozitív félegyenes, hanem csak egy valódi részintervallum.

Daróczy, Lajkó, Lovas, Maksa és Páles [9] az ekvivalenciát abban a speciális esetben vizsgálja, amikor M_1 és M_2 súlyozott aritmetikai közepek:

$$M_1(x,y) := \alpha x + (1-\alpha)y, \quad M_2(x,y) := (1-\alpha)x + \alpha y \quad (x, y \in I).$$

Ennek az esetnek az érdekessége, hogy (II.) a nevezetes

$$2f\left(\frac{x+y}{2}\right) = f(x) + f(y) \quad (x, y \in I)$$

Jensen egyenletbe megy át $f(x) = A_1(x) + A_0$ alakú megoldásokkal, ahol A_1 additív függvény, A_0 pedig egy tetszőleges konstans. A szerzők megmutatták, hogy ha α algebrai szám úgy, hogy $\frac{1-\alpha}{\alpha}$ és $-\frac{1-\alpha}{\alpha}$ nem algebrailag konjugáltak, akkor (I.) minden megoldása megoldása a Jensen egyenletnek is. Ha azonban $\frac{1-\alpha}{\alpha}$ transzcendens szám, vagy algebrai ugyan, de $\frac{1-\alpha}{\alpha}$ és $-\frac{1-\alpha}{\alpha}$ algebrailag konjugáltak, akkor van olyan $f: I \to \mathbb{R}$ megoldása (I.) - nek, mely $f(x) = A_2(x, x) + A_1(x) + A_0$ alakú és az $A_2: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ nem azonosan zérus szimmetrikus biadditív függvény. Ebben az esetben tehát (I.) és (II.) nem ekvivalensek. A súlyozott aritmetikai közepeket tartalmazó függvényegyenletek ezért önmagukban is érdekesek, illetve további általánosítások kiindulópontjai. Ezek egyike a disszertáció további fejezeteiben vizsgált

$$\sum_{i=0}^{n} a_i f(b_i x + (1 - b_i)y) = 0 \quad (x, y \in I)$$

függvényegyenlet, ahol f egy pozitív hosszúságú I nyílt intervallumon értelmezett ismeretlen függvény, $a_i \in \mathbb{R}$, $0 < b_i < 1$ $(i = 0, 1, \ldots, n)$ pedig adott valós számok. A függvényegyenlet megoldásának főbb lépései:

1. alkalmas helyettesítésekkel részintervallumokon teljesülő speciális típusú függvényegyenletek felállítása [33],
2. kiterjesztési tétel alkalmazása [23],
3. globális eredmények felhasználásával az első lépésben szereplő függvényegyenletek megoldása a részintervallumokon [28].

Mivel a harmadik lépésben konstruált megoldások általában függnek az I intervallum részintervallumaitól, ezért az utolsó lépés

4. az egyes részintervallumokon kapott megoldások összefűzése és a megoldás szerkezetének egységes leírása a teljes I intervallumon.

A disszertáció **második fejezet**ének fő eredménye szerint a megoldás

$$f(x) = A_{n-1}(\underbrace{x, \ldots, x}_{(n-1)\text{ -szer}}) + \ldots + A_2(x, x) + A_1(x) + A_0$$

alakú, ahol bármely k pozitív egészre $A_k\colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ változóiban szimmetrikus, k-additív függvény, A_0 valós konstans. Visszahelyettesítéssel most már a megfelelő k számhoz tartozó A_k függvényekre kapunk szükséges és elegendő feltételeket. Ez további vizsgálatok kiindulópontja, hiszen bonyolult, általában a k értékével egyező tagszámú lineáris függvényegyenlet-rendszerekről van szó.

A disszertáció **harmadik fejezetét** a $k = 1$ esetén adódó

$$A_1(t) + \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i A_1(t\beta_i) = 0 \quad (t \in \mathbb{R})$$

elsőrendű feltétel vizsgálatának szenteltük, ahol az α_i (illetve β_i) paraméterek a kiinduló függvényegyenlet a_i (illetve b_i) külső (illetve belső) paramétereivel vannak kifejezve. Az elsőrendű feltételre a továbbiakban *Daróczy-féle függvényegyenletként* hivatkozunk, ugyanis $n = 2$ esetben Daróczy Zoltán [6] szükséges és elegendő feltételt ad nem azonosan zérus additív megoldás létezésére. Daróczy tétele az egyenletben szereplő két paraméter algebrai tulajdonságai segítségével jellemzi a megoldhatóságot. A disszertációban Daróczy tételét kiterjesztjük tetszőleges n esetére, ld. [32] és [33]. Ekkor már nem paraméterek, hanem paramétercsaládok és lineáris sokaságok algebrai tulajdonságairól van szó; a nem azonosan zérus megoldás biztosításához olyan testizomorfizmusok létezését követeljük meg, melyek lehetővé teszik a külső (illetve belső) paraméterek mozgását az egyenletben (ld. külső, illetve belső szemihomogenitási test)[1]. Kulcsfontosságú szerepet kap annak az esetnek a vizsgálata, melyben vagy a külső, vagy a belső paramétercsalád tagjainak mindegyike algebrai szám. Az ilyen tipusú egyenletek megoldására algoritmust adunk, mely a Gauss-elimináció lineáris függvényegyenlet-rendszerekre vonatkozó megfelelője és alkalmas az additív megoldás létezésének az eldöntésére, illetve keresésére, ld. [31]. A paramétercsaládok algebrai tulajdonságainak nyelvén kifejezve a következő eseteket sikerült tisztázni:

(i) a külső, vagy a belső paramétercsalád algebrailag független (szükséges és elegendő feltétel a nem azonosan zéró megoldás létezésére),

(ii) a külső, vagy a belső paramétercsalád minden tagja algebrai szám (algoritmus).

[1] A témakörben elért legújabb eredmények már a spektrálanalízis egy M. Laczkovich és G. Székelyhidi [17] által elért osztályozási tételének alkalmazásaként adódnak és túlmutatnak a disszertáció keretein; ld. még **Előadások** [7].

Különösen érdekesek ezeknek az eredményeknek a negatív következményei, melyek a Daróczy-féle függvényegyenlet csak triviális (az azonosan zérus additív függvénnyel való) megoldhatóságáról szólnak, hiszen azonnal kizárják a kiinduló, súlyozott közepeket tartalmazó függvényegyenlet nem triviális megoldhatóságát. A magasabb rendű A_k monomokra vonatkozó egyenletrendszerek első tagjai ugyanis (alkalmasan rögzített változók mellett) formailag az elsőrendű feltételt kielégítő additív függvényekről szólnak. Magasabb rendű feltételt azonban csak az $n = 3$ speciális esetben és speciális külső paraméterek esetén vizsgálunk a disszertáció második fejezetében; ekkor szükséges és elegendő feltételt tudunk adni nem azonosan zérus A_2 biadditív tag létezésére [30].

A **negyedik fejezetben** a Daróczy-féle függvényegyenletet példákon keresztül mutatjuk be. Ezek megoldási módszere főként a már említett Gauss-féle eliminációs technika, de a harmadik fejezethez képest olyan konkrét esetet is megvizsgálunk, melyben algebrailag függő paramétercsaládok szerepelnek és redukciós lépésben vezethető vissza a megoldás az (i), illetve (ii) esetek valamelyikére, vagy az $n = 2$ esetre (ld. Daróczy-tétele).

1. Egy – számtani- és mértani közepet tartalmazó – függvényegyenlet

Ebben a fejezetben az

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) + f\left(\sqrt{xy}\right) = f(x) + f(y) \quad (x, y \in I) \tag{1}$$

függvényegyenletet vizsgáljuk, ahol I a pozitív félegyenes egy nemüres nyílt intervallumát jelöli. Az $I = \mathbb{R}_+$ esetben képezhetjük az

$$a(x) := f\left(\frac{x}{2}\right), \quad b(x) := f(\sqrt{x}), \quad c(x) := f(x) \quad (x \in \mathbb{R}_+)$$

függvényeket, melyek segítségével a függvényegyenlet az

$$a(x+y) + b(x \cdot y) = c(x) + c(y)$$

alakot ölti. Maksa [20] dolgozatában ennek a függvényegyenletnek a teljes megoldása megtalálható és ennek segítségével [8] - ban a szerzők bebizonyították, hogy az (1) függvényegyenletnek csak a konstans függvények a megoldásai. A segédfüggvények szerkezete mutatja, hogy a bizonyítás módszere nem alkalmazható, ha I csupán egy valódi részintervalluma $\mathbb{R}_+$ - nak. Ebben az esetben az általánosított polinomok elméletét felhasználva igazolható az alábbi tétel.

1.1. Tétel. (Maksa, Varga [19]) *Tegyük fel, hogy $f : I \to \mathbb{R}$ megoldása az (1) függvényegyenletnek. Ekkor f konstans függvény.*

A bevezetésben említett függvényegyenletek ekvivalenciájának problémájára visszatekintve, tételünk egy fontos következményt von maga után. Az

$$M_1(x,y) := \frac{x+y}{2} \quad \text{és} \quad M_2(x,y) = \sqrt{xy}$$

választás mellett ugyanis (II.) az

$$2f\left(\mathcal{G}(x,y)\right) = f(x) + f(y) \quad (x, y \in I) \tag{2}$$

alakot ölti. Az egyenletben $\mathcal{G}$ a nevezetes aritmetikai-geometriai közép. Értéke az $x, y \in I$ pontban az

$$x_1 := x, \; y_1 := y$$
$$x_{n+1} := \frac{x_n + y_n}{2}, \; y_{n+1} := \sqrt{x_n y_n} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

sorozatok közös határértéke:

$$\mathcal{G}(x,y) := \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n = \left(\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{\sqrt{x^2\cos^2 t + y^2 \sin^2 t}}\right)^{-1}.$$

Az 1.1. Tétel egyik következménye, hogy az (1) és a (2) függvényegyenletek ekvivalensek tetszőleges $I \subset \mathbb{R}_+$ nemüres nyílt intervallum esetén is.

1.1. Következmény. *$\mathcal{G}$ nem kváziaritmetikai közép $\mathbb{R}_+$ egyetlen nyílt részintervallumán sem, annak ellenére, hogy mind az aritmetikai, mind pedig a geometriai közép kvázi-aritmetikai közepek.*

Ez azt jelenti, hogy nem létezik olyan folytonos, szigorúan monoton növekvő $\varphi : I \to \mathbb{R}$ függvény (sőt $\varphi : I \to \mathbb{R}$ bijekció sem), mely az aritmetikai és a geometriai közép Gauss-kompozícióját előállítaná a

$$\mathcal{G}(x,y) = \varphi^{-1}\left(\frac{\varphi(x)+\varphi(y)}{2}\right) \qquad (x, y \in I)$$

alakban; lásd Hardy–Littlewood–Pólya [13]. Ellenkező esetben ugyanis maga a φ függvény lenne egy nem konstans megoldása az (1) függvényegyenletnek.

2. Súlyozott közepeket tartalmazó függvényegyenletek

Ebben a fejezetben meghatározzuk azoknak az $f\colon I \to \mathbb{R}$ függvényeknek az általános alakját, melyek kielégítik a

$$\sum_{i=0}^{n} a_i f(b_i x + (1-b_i)y) = 0 \qquad (x, y \in I) \tag{3}$$

súlyozott közepeket tartalmazó függvényegyenletet, ahol $a_i \in \mathbb{R}$ és $b_i \in (0,1)$ tetszőleges paraméterek $(i = 0, \ldots, n)$, I pedig a valós számegyenes egy nemüres, nyílt intervalluma. A nemtriviális megoldásokat a $\sum_{i=0}^{n} a_i = 0$ feltétel mellett keressük, hiszen az $x = y$ helyettesítéssel

$$\Big(\sum_{i=0}^{n} a_i\Big) f(x) = 0 \qquad (x \in I)$$

adódik. Másfelől, ha $b_i = b_j$ valamely i, j indexekre, akkor az egyenlet redukálható. Az általánosság sérelme nélkül feltehetjük tehát, hogy

$$a_i \neq 0 \ (i = 0, \ldots, n); \ \sum_{i=0}^{n} a_i = 0 \ \text{ és } \ b_0 < b_1 < b_2 < \ldots < b_n, \tag{4}$$

ahol $2 \leq n$. Hacsak mást nem mondunk a (3) függvényegyenlet paramétereiről mindig feltesszük a (4) - ben összefoglalt tulajdonságokat. Legyen továbbá a (4) feltételek mellett

$$c_i := \frac{b_n - b_i}{b_n - b_0} \ \text{ és } \ \beta_i := 1 - c_i = \frac{b_i - b_0}{b_n - b_0} \quad (i = 1, \ldots, n).$$

A továbbiakban ismertetjük a megoldó algoritmus lépéseit és a felhasznált eredményeket.

1. Alkalmas helyettesítésekkel részintervallumokon teljesülő speciális típusú függvényegyenletek felállítása (Varga, Vincze [33]): ha $f\colon I \to \mathbb{R}$ kielégíti a (3) függvényegyenletet, akkor bármely $\xi \in I$ - hez létezik $\varepsilon > 0$ úgy, hogy

$$a_0 f(u) + \sum_{i=1}^{n} a_i f(c_i u + (1-c_i)v) = 0 \ \ (u, v \in J_\xi :=]\xi - \varepsilon, \xi + \varepsilon[\subset I). \tag{5}$$

2. Kiterjesztési tétel alkalmazása (Páles [23]): ha $f\colon J_\xi \to \mathbb{R}$ kielégíti az (5) függvényegyenletet, akkor egyértelműen létezik $\tilde{f}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ kiterjesztése az f függvénynek úgy, hogy

$$a_0 \tilde{f}(u) + \sum_{i=1}^{n} a_i \tilde{f}(c_i u + (1-c_i)v) = 0 \quad (u, v \in \mathbb{R}).$$

3. Globális eredmények felhasználásával az első lépésben szereplő függvényegyenletek megoldása a részintervallumokon (Székelyhidi [28]):

$$\tilde{f}(x) = \sum_{k=0}^{n-1} D(A_k)(x) \quad (x \in \mathbb{R}), \tag{6}$$

ahol $A_k\colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ szimmetrikus k-additív függvény ($k \geq 1$), A_0 tetszőleges konstans és

$$D(A_k)(x) := A_k(\underbrace{x, \ldots, x}_{k\text{ - szor}}) \quad (x \in \mathbb{R}), \quad D(A_0) := A_0.$$

Mivel a harmadik lépésben konstruált megoldások általában függnek az I intervallum részintervallumaitól, ezért az utolsó lépés

4. az egyes részintervallumokon kapott megoldások összefűzése és a megoldás szerkezetének egységes leírása a teljes I intervallumon (Székelyhidi [26]; Varga, Vincze [33]): ha f lokálisan polinomiális az I intervallumon, azaz bármely $\xi \in I$ esetén létezik olyan $\varepsilon > 0$, hogy

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} D(A_k^{\xi})(x) \qquad (x \in J_\xi :=]\xi - \varepsilon, \xi + \varepsilon[\subset I),$$

akkor f globálisan polinomiális az I intervallumon, azaz

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} D(A_k)(x) \qquad (x \in I),$$

ahol $A_k\colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ egyértelműen meghatározott változóiban szimmetrikus k-additív függvény bármely $k = 0, \ldots, n$ esetén.

Legyenek $1 \leq k$ és $0 \leq l \leq k$ nemnegatív egészek; bevezetve az

$$A_{k,l}(x,y) := A_k(\underbrace{x,\dots,x}_{l\text{ - szer}},\underbrace{y,\dots,y}_{k-l\text{ - szer}}) \quad (x,y \in \mathbb{R}), \quad A_{0,0} := A_0$$

jelöléseket a fejezet fő eredménye az alábbi tétel.

2.1. Tétel. (Varga, Vincze [33]) *Az $f\colon I \to \mathbb{R}$ függvény pontosan akkor megoldása a (3) függvényegyenletnek, ha léteznek olyan egyértelműen meghatározott szimmetrikus k-additív $A_k\colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ $(k = 0, 1, \dots, n-1)$ függvények, melyekre*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} D(A_k)(x) \quad (x \in I) \tag{7}$$

és

$$\sum_{i=1}^{n} a_i A_{k,k-l}(s, t\beta_i) = 0 \quad (s,\ t \in \mathbb{R}) \tag{8}$$

bármely $k = 1, \dots, n-1$, $l = 1, \dots, k$, $n \geq 2$ esetén. Ha $n = 1$ akkor (7) miatt f konstans függvény.

2.1. Megjegyzés. *$k = 1$ esetén (8), figyelembe véve, hogy $\beta_n = 1$, az*

$$a_n A_1(t) + \sum_{i=1}^{n-1} a_i A_1(t\beta_i) = 0 \ \ (t \in \mathbb{R}) \tag{9}$$

egyenletre redukálódik, mely az $\alpha_i := \frac{a_i}{a_n}$ $(i = 1, \dots, n-1)$ jelölés mellett az

$$A_1(t) + \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i A_1(t\beta_i) = 0 \ \ (x \in \mathbb{R}) \tag{10}$$

alakot ölti. Ha ennek az egyenletnek létezik nem azonosan zérus additív megoldása, akkor a (3) egyenletnek is van nem azonosan zérus f megoldása. A $k = 2$ esetén (8) az

$$\left\{ \begin{array}{rcl} A_2(s,t) + \sum\limits_{i=1}^{n-1} a_i A_2(s, t\beta_i) & = & 0 \\ A_2(t,t) + \sum\limits_{i=1}^{n-1} a_i A_2(t\beta_i, t\beta_i) & = & 0 \end{array} \right. \quad (s, t \in \mathbb{R})$$

egyenletrendszert adja az f megoldás előállításában szereplő biadditív tagra.

A megoldhatóság elsőrendű (10) feltételét *Daróczy - féle függvényegyenlet*nek nevezzük és a harmadik fejezetben vizsgáljuk meg részletesen. Magasabb rendű feltételt azonban csak az $n = 3$ speciális esetben és speciális külső paraméterek esetén vizsgáltunk; ekkor szükséges és elegendő feltételt tudunk adni nem azonosan zérus A_2 biadditív tag létezésére [30].

2.2. Tétel. (Varga [30]) *Legyenek $b_0, b_1, b_2, b_3 \in (0, 1)$ páronként különböző valós számok úgy, hogy $b_0 < b_1 < b_2 < b_3$ és tekintsük a*

$$f(b_0x + (1 - b_0)y) + f(b_3x + (1 - b_3)y) = \\ = f(b_1x + (1 - b_1)y) + f(b_2x + (1 - b_2)y)$$

függvényegyenletet egy nemüres, nyílt I intervallumon értelmezett $f: I \to \mathbb{R}$ ismeretlen függvénnyel. Ha $b_0 + b_3 \neq b_1 + b_2$, akkor a függvényegyenletnek csak konstans megoldásai vannak, míg a $b_0 + b_3 = b_1 + b_2$ esetben a megoldás általános alakja

$$f(x) = A_2(x, x) + A_1(x) + A_0 \quad (x \in I),$$

ahol A_0, illetve $A_1: I \to \mathbb{R}$ rendre tetszőleges konstans, illetve additív függvény (Jensen-affin rész) és az $A_2: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ szimmetrikus, biadditív függvény kielégíti az

$$A_2(b_0x, b_3x) = A_2(b_1x, b_2x) \quad (x \in \mathbb{R})$$

feltételt.

Felhasználva Daróczy, Lajkó, Lovas, Maksa, Páles [9] egy eredményét kapjuk az alábbi szükséges és elegendő feltételt: a függvényegyenlet megoldásában pontosan akkor szerepel nem azonosan zérus biadditív tag, ha $b_0 + b_3 = b_1 + b_2$ és a

$$\lambda = \frac{1 - (b_3/b_1)}{1 - (b_0/b_1)}$$

szám transzcendens, vagy algebrai úgy, hogy $-\lambda$ az algebrai konjugáltja (definiáló főpolinomjuk ugyanaz).

3. A Daróczy-féle probléma

Ebben a fejezetben azzal a problémával foglalkozunk, hogy a paraméterek milyen választása mellett van a (10) egyenletnek nem azonosan zérus additív megoldása. Kiindulópontunk Daróczy Zoltán következő tétele az $n = 2$ esetre vonatkozóan.

3.1. Tétel. (Daróczy [6]) *Rögzített $\alpha_1 \neq 0, \beta_1$ valós paraméterek mellett a*

$$A_1(t) + \alpha_1 A_1(t\beta_1) = 0 \quad (t \in \mathbb{R}) \tag{11}$$

függvényegyenletnek pontosan akkor van nem azonosan zérus additív megoldása, ha a $\gamma_1 := -(1/\alpha_1)$ és β_1 paraméterek közül mindkettő transzcendens, vagy mindkettő algebrai ugyanazzal a definiáló főpolinommal.

A fejezet egyik egyszerű, de kulcsfontosságú észrevétele, hogy a Daróczy-féle tételben szereplő algebrai feltétel ekvivalens a

$$\delta\colon \mathbb{Q}(\beta_1) \to \mathbb{Q}(\alpha_1),\ \delta(\beta_1) = -(1/\alpha_1),$$

azaz

$$1 + \alpha_1\delta(\beta_1) = 0$$

tulajdonsággal rendelkező testizomorfizmus létezésével, ahol $\mathbb{Q}(a)$ a racionális számtest a elemmel való bővítése. A fejezet további részében a Daróczy-féle tételt általánosítjuk $n > 2$ esetén. Ekkor már nem paraméterek, hanem paramétercsaládok és lineáris sokaságok algebrai tulajdonságairól van szó.

3.1. Definíció. *Legyen m pozitív egész szám és tekintsük a $\vec{\lambda} := (\lambda_1, \ldots, \lambda_m)$ és $\vec{\mu} := (\mu_1, \ldots, \mu_m) \in \mathbb{R}^m$ rendezett szám m - eseket.*

(i) A $\mathbb{Q}[x_1, \ldots, x_m]$ polinomgyűrű

$$\mathcal{I}(\vec{\lambda}) := \{\ p \in \mathbb{Q}[x_1, \ldots, x_m] \mid p(\lambda_1, \ldots, \lambda_m) = 0\ \}$$

ideálját $\vec{\lambda}$ definiáló ideáljának nevezzük. Ha $\mathcal{I}(\vec{\lambda})$ csak az azonosan zéró polinomot tartalmazza, akkor azt mondjuk, hogy a $(\lambda_1, \ldots, \lambda_m)$ szám m - es algebrailag független. Egyébként algebrailag függőnek mondjuk.

(ii) Ha $\mathcal{I}(\vec{\lambda}) = \mathcal{I}(\vec{\mu})$, akkor azt mondjuk, hogy $\vec{\lambda}$ és $\vec{\mu}$ algebrailag konjugáltak.

Az $m = 1$ speciális esetben az $\mathcal{I}(\lambda)$ ideál egy elemmel generálható (λ definiáló főpolinomja), valamint λ és μ algebrailag konjugáltak ha mindkettő transzcendens, vagy mindkettő algebrai és definiáló főpolinomjuk ugyanaz. A koordinátasík $(\sqrt{\pi}, 2\pi + 1)$ pontjának koordinátái például algebrailag függők $\mathbb{Q}$ fölött, mivel a nem azonosan zérus

$$P(x_1, x_2) = 2x_1^2 - x_2 + 1$$

polinom eltűnik, ha $x_1 = \sqrt{\pi}$ és $x_2 = 2\pi + 1$. Algebrailag független elemrendszerekre a Lindemann-Weierstrass tétel [3] segítségével konstruálhatunk példát: ha $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ algebrai számok és *lineárisan* függetlenek a $\mathbb{Q}$ számtest felett, akkor $e^{\alpha_1}, \ldots, e^{\alpha_n}$ algebrailag független szám n - es. A következő lemma az algebrai konjugáltság egy ekvivalens átfogalmazása.

3.2. Tétel. (Varga, Vincze [33]) *Legyen* $2 \leq n \in \mathbb{N}$,

$$\vec{\lambda} := (\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}) \quad \textit{és} \quad \vec{\mu} := (\mu_1, \ldots, \mu_{n-1})$$

tetszőleges $\mathbb{R}^{n-1}$*-beli elemek. Pontosan akkor létezik*

$$\delta\colon \mathbb{Q}(\mu_1, \ldots, \mu_{n-1}) \to \mathbb{Q}(\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1})$$

testizomorfizmus úgy, hogy $\delta(\mu_i) = \lambda_i \quad (i = 1, \ldots, n-1)$, *ha* $\vec{\lambda}$ *és* $\vec{\mu}$ *algebrailag konjugáltak.*

3.1. Algebrai lineáris k - sokaságok

3.2. Definíció. *Az* $\mathbb{R}^m$ *lineáris tér egy k - dimenziós alterének eltoltját lineáris k - sokaságnak mondjuk. A* $k = 1$ *esetben egyenesről, míg a* $k = m - 1$ *esetben hipersíkról beszélünk. Azt mondjuk, hogy az* F_k *lineáris k - sokaság algebrai, ha van olyan nem azonosan zérus* $\mathbb{Q}[x_1, \ldots, x_m]$ *- beli P polinom, mely eltűnik* F_k *minden pontjában, azaz*

$$P \in \cap_{\vec{\lambda} \in F_k} \mathcal{I}(\vec{\lambda}).$$

A $k = 0$ esetben a sokaság egy pontra redukálódik és visszakapjuk a 3.1. definíciót.

3.1. Lemma. (Varga, Vincze [32]) $\mathbb{R}^m$ *egy* F_k *lineáris k - sokasága pontosan akkor algebrai, ha előáll* $\mathbb{Q}[x_1, \ldots, x_m]$ *- beli nem azonosan zérus polinomok gyökeinek uniójaként.*

A fenti lemma szerint $\mathbb{R}^m$ egy F_k lineáris k - sokasága pontosan akkor algebrai, ha F_k minden pontja (mint szám m - es) algebrailag függő.

3.2. Lemma. (Varga, Vincze [32]) *Legyen* $m \in \mathbb{N}$ *és* $(\lambda_1, \ldots, \lambda_m) \in \mathbb{R}^m$. *A*

$$\lambda_1 x_1 + \ldots \lambda_{m-1} x_{m-1} + \lambda_m = x_m \tag{12}$$

egyenlőség által meghatározott $\mathbb{R}^m$ *- beli hipersík pontosan akkor algebrai, ha a* $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ *együtthatók mindegyike algebrai szám.*

3.1. Példa. *Tekintsük az* $x_2 = \sqrt{3}x_1 + \sqrt{2}$ *egyenletű egyenest, mint* $\mathbb{R}^2$ *egy hipersíkját. Könnyű számolás mutatja, hogy ha*

$$P(x_1, x_2) = x_2^4 - 6x_1^2x_2^2 - 4x_2^2 + 9x_1^4 - 12x_1^2 + 4,$$

akkor $P(x_1, \sqrt{3}x_1 + \sqrt{2}) = 0$.

Felhasználva ezeket az észrevételeket az algebrailag független $\beta_1, \ldots, \beta_{n-1}$ paramétercsaládhoz pontosan akkor választható konjugált (azaz algebrailag független) δ_1, ..., δ_{n-1} elemcsalád az

$$1 + \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i x_i = 0$$

egyenletű hipersíkon, ha a hipersík nem algebrai, azaz az α_i paraméterek egyike transzcendens szám. Ekkor megadható olyan

$$\delta \colon \mathbb{Q}(\beta_1, \ldots, \beta_{n-1}) \to \mathbb{Q}(\delta_1, \ldots, \delta_{n-1})$$

testizomorfizmus is, hogy $\delta(\beta_i) = \delta_i$ (i=1,..., $n-1$) és

$$1 + \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i \delta_i = 0.$$

Ez formailag a kétparaméteres Daróczy-féle eredmény általánosítása, mint elegendő feltétel.

3.3. Tétel. (Varga, Vincze [32]) *Legyen* $n \geq 3$. *Ha a* $(\beta_1, \ldots, \beta_{n-1})$ *paraméterek algebrailag függetlenek és az* $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}$ *paraméterek közül legalább az egyik transzcendens, akkor a (10) egyenletnek van nem azonosan zérus szemihomogén* $A_1 \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *additív megoldása, azaz vannak olyan* δ_i $(i = 1, \ldots n-1)$ *valós számok, hogy* $A_1(\beta_i x) = \delta_i A_1(x) \quad (x \in \mathbb{R})$.

A bizonyítás során a valós számtestet mint $\mathbb{Q}(\beta_1, \ldots, \beta_{n-1})$ fölötti vektorteret tekintjük. A vektortér egy $\mathcal{H}$ bázisából kiindulva, a δ testizomorfizmus által meghatározott szemilineáris kiterjesztéssel konstruálhatunk nem azonosan zérus additív megoldásokat. A következő tétel mutatja, hogy a külső és belső paramétercsaládok szerepe felcserélhető.

3.4. Tétel. (Varga, Vincze [32]) *Legyen* $n \geq 3$. *Ha az* $(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1})$ *paraméterek algebrailag függetlenek és a* $\beta_1, \ldots, \beta_{n-1}$ *paraméterek közül legalább az egyik transzcendens, akkor a (10) egyenletnek van nem azonosan zérus szemihomogén* $A_1 \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *additív megoldása, azaz vannak olyan* δ_i $(i = 1, \ldots n-1)$ *valós számok, hogy* $A_1(\delta_i x) = \alpha_i A_1(x) \quad (x \in \mathbb{R})$.

3.2. Eliminációs eljárás speciális függvényegyenletrendszerek additiv megoldásainak meghatározására

Ahhoz, hogy a (10) függvényegyenlet nemzérus additív megoldásának létezésére szükséges és elégséges feltételt adjunk, kulcsfontosságú az alábbi észrevétel.

3.3. Lemma. (Varga [31]) *Legyen $k \geq 2$ pozitív egész szám; továbbá u, a_{ij} tetszőleges valós számok $(i, j = 1, \ldots, k)$. Ha az $M_1 := (a_{ij})_{k\times k}$ mátrix reguláris, akkor az egyetlen additív $A: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény, mely eleget tesz az*

$$u^{k-1}A(a_{i1}x) + u^{k-2}A(a_{i2}x) + \ldots + uA(a_{ik-1}x) + A(a_{ik}x) = 0 \tag{13}$$

$(x \in \mathbb{R}; i = 1, \ldots, k)$ függvényegyenlet-rendszernek, az azonosan nulla függvény.

A bizonyítás lényegében a Gauss-féle eliminációs technika lineáris függvényegyenlet-rendszerekre alkalmazott változata, melyet konkrét példával is illusztrálunk a negyedik fejezetben. Következményként kapjuk az alábbi tételt.

3.5. Tétel. (Varga [31]) *Legyen $n \geq 3$. Ha a $(\beta_1, \ldots, \beta_{n-1})$ paraméterek algebrailag függetlenek és az $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}$ paraméterek mindegyike algebrai szám, az egyetlen additív megoldása a (10) függvényegyenletnek az azonosan nulla függvény.*

A következő tétel értelmében a külső és belső paraméterek szerepe felcserélhető.

3.6. Tétel. (Varga [31]) *Legyen $n \geq 3$. Ha az $(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1})$ paraméterek algebrailag függetlenek és a $\beta_1, \ldots, \beta_{n-1}$ paraméterek mindegyike algebrai szám, az egyetlen additív megoldása a (10) függvényegyenletnek az azonosan nulla függvény.*

3.3. A Daróczy-féle tétel kiterjesztése

A 3.3. és a 3.5. Tételek, illetve a 3.4. és 3.6. Tételek összevetése adja a fejezet fő eredményeit.

3.7. Tétel. (Varga [31]) *Tegyük fel, hogy $n \geq 3$ és a $(\beta_1, \ldots, \beta_{n-1})$ paraméterek algebrailag függetlenek. Pontosan akkor van nem azonosan zérus additív megoldása a (10) egyenletnek, ha az $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}$ paraméterek közül legalább az egyik transzcendens szám.*

3.8. Tétel. (Varga [31]) *Tegyük fel, hogy* $n \geq 3$ *és az* $(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1})$ *paraméterek algebrailag függetlenek. Pontosan akkor van nem azonosan zérus additív megoldása a (10) egyenletnek, ha a* $\beta_1, \ldots, \beta_{n-1}$ *paraméterek közül legalább az egyik transzcendens szám.*

Az egyetlen lényeges (és tisztázatlan) további eset tehát, ha mindkét paramétercsalád algebrailag függő és mindkettőben van legalább egy transzcendens elem. A negyedik fejezetben bemutatott példákra alapozva (sejtés szintjén) az látszik körvonalazódni, hogy az algebrai függőség segítségével egy tagszámcsökkentő, redukciós eljárást hajthatunk végre, mely véges sok lépésben visszavezet az algebrailag független külső, vagy belső paramétercsaládok sikeresen megoldott esetére, vagy az $n = 2$ esetre (ld. Daróczy-féle tétel).

4. Példák és megoldási módszerek

A fejezet három példájában szereplő egyenletek (10) típusú függvényegyenletek. Amennyiben létezik, nem azonosan zérus additív megoldásaik keresésére olyan megoldási algoritmust mutatunk, mely lényegében a 3.3. Lemma bizonyításában szereplő Gauss-féle eliminációs technikán alapszik. Az **első példa** az

$$\alpha_1 A(\sqrt{d_1}x) + \alpha_2 A(\sqrt{d_2}x) + A(x) = 0 \tag{14}$$

egyenlet, ahol d_1 és d_2 olyan pozitív racionális számok, melyekre $\sqrt{d_1}$ és $\sqrt{d_2}$ is irracionális szám és $\alpha_i \in \mathbb{R}$ $(i = 1, 2)$ úgy, hogy $\alpha_1\alpha_2 \neq 0$. A **második példa** a (14) külső és belső paramétereinek cseréjével kapott

$$\sqrt{d_1}A(\beta_1 x) + \sqrt{d_2}A(\beta_2 x) + A(x) = 0 \tag{15}$$

egyenlet. Végül részletesen foglalkozunk a **harmadik példa**ként bemutatott

$$\alpha_1 A(\sqrt{2}x) + \alpha_2 A(\sqrt{5}x) + \alpha_3 A(\sqrt{7}x) + A(x) = 0 \tag{16}$$

egyenlettel, ahol $\alpha_i \in \mathbb{R}$ $(i = 1, 2, 3)$ úgy, hogy $\prod_{i=1}^{3} \alpha_i \neq 0$.

A 3.6. Tétel értelmében ha a külső paraméterek algebrailag függetlenek, akkor egyetlen additív megoldása van, az azonosan zérus függvény. Az elméleti háttér mellett/helyett azonban megoldjuk az egyenletet tetszőleges külső paraméterek esetén is. A megoldás első lépéseként helyettesítsünk x helyett rendre $\sqrt{2}x$, $\sqrt{5}x$, $\sqrt{7}x$, $\sqrt{2}\sqrt{5}x$, $\sqrt{2}\sqrt{7}x$, $\sqrt{5}\sqrt{7}x$ és $\sqrt{2}\sqrt{5}\sqrt{7}x$ értékeket a

(16) egyenletben. Ezek a helyettesítések egy lineáris egyenletrendszert adnak, melynek mátrixa $M := M(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, ahol

$$M(x,y,z) := \begin{pmatrix} 1 & x & y & z & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2x & 1 & 0 & 0 & y & z & 0 & 0 \\ 5y & 0 & 1 & 0 & x & 0 & z & 0 \\ 7z & 0 & 0 & 1 & 0 & x & y & 0 \\ 0 & 5y & 2x & 0 & 1 & 0 & 0 & z \\ 0 & 7z & 0 & 2x & 0 & 1 & 0 & y \\ 0 & 0 & 7z & 5y & 0 & 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 7z & 5y & 2x & 1 \end{pmatrix},$$

az egyenletrendszer pedig az

$$M \begin{pmatrix} A(x) \\ A(\sqrt{2}x) \\ A(\sqrt{5}x) \\ A(\sqrt{7}x) \\ A(\sqrt{2}\sqrt{5}x) \\ A(\sqrt{2}\sqrt{7}x) \\ A(\sqrt{5}\sqrt{7}x) \\ A(\sqrt{2}\sqrt{5}\sqrt{7}x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

alakba írható.

4.1. Lemma. *Ha x, y és z nemzérus valós számok és az $M(x,y,z)$ mátrix rangja kisebb, mint 6, akkor $x^2 = \frac{1}{2}$, $y^2 = 1$ és $z^2 = \frac{5}{7}$.*

Ha tehát rang $M \leq 5$, akkor (16) az

$$\pm\frac{1}{\sqrt{2}}A\left(\frac{\sqrt{2}}{1+\sqrt{5}}x\right) \pm \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{7}}A\left(\frac{\sqrt{7}}{1+\sqrt{5}}x\right) \pm A(x) = 0 \quad (x \in \mathbb{R})$$

egyenletre redukálható, ami speciális esete a második példa (15) egyenletének. Ha M rangja *maximális*, akkor a mátrixhoz tartozó lineáris transzformáció magja triviális és az egyetlen megoldás az azonosan nulla additív függvény. A további két lehetséges esetben pedig redukciós eljárás alkalmazható. Ha például rang M = 6, akkor az M

által reprezentált lineáris transzformáció magja kétdimenziós és ennélfogva

$$\begin{pmatrix} A(x) \\ A(\sqrt{2}x) \\ A(\sqrt{5}x) \\ A(\sqrt{7}x) \\ A(\sqrt{2}\sqrt{5}x) \\ A(\sqrt{2}\sqrt{7}x) \\ A(\sqrt{5}\sqrt{7}x) \\ A(\sqrt{2}\sqrt{5}\sqrt{7}x) \end{pmatrix} = \lambda(x) \begin{pmatrix} v_0 \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \\ v_7 \end{pmatrix} + \mu(x) \begin{pmatrix} w_0 \\ w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \\ w_5 \\ w_6 \\ w_7 \end{pmatrix}$$

valamely λ és μ additív függvényekre. Ha $v_0 = w_0 = 0$ akkor A az azonosan nulla függvény. Ha például $v_0 \neq 0$, akkor

$$\lambda(x) = \frac{1}{v_0}A(x) - \frac{w_0}{v_0}\mu(x),$$

következésképpen

$$A\left(\sqrt{2}x\right) = \frac{v_1}{v_0}A(x) + \left(w_1 - \frac{w_0}{v_0}\right)\mu(x).$$

Ha $w_1 - \frac{w_0}{v_0} = 0$ rögtön az

$$A\left(\sqrt{2}x\right) = \frac{v_1}{v_0}A(x)$$

egyenletet kapjuk, melyre alkalmazhatjuk a Daróczy - féle 3.1. tételt. Egyébként pedig

$$\mu(x) = \frac{1}{w_1 - \frac{w_0}{v_0}}A\left(\sqrt{2}x\right) - \frac{v_1}{v_0\left(w_1 - \frac{w_0}{v_0}\right)}A(x)$$

és így

$$A\left(\sqrt{5}x\right) = \frac{v_2}{v_0}A(x) - \frac{w_0 v_2}{v_0}\left(\frac{1}{w_1 - \frac{w_0}{v_0}}A\left(\sqrt{2}x\right) - \frac{v_1}{v_0\left(w_1 - \frac{w_0}{v_0}\right)}A(x)\right) +$$

$$w_2\left(\frac{1}{w_1 - \frac{w_0}{v_0}}A\left(\sqrt{2}x\right) - \frac{v_1}{v_0\left(w_1 - \frac{w_0}{v_0}\right)}A(x)\right),$$

ami az első példaként tárgyalt (14) egyenlet.

Introduction

In this PhD dissertation we discuss problems coming from the equivalence problem of functional equations

I. $f\left(M_1(x,y)\right) + f\left(M_2(x,y)\right) = f(x) + f(y) \quad (x, y \in I),$

II. $2f\left(M_1 \otimes M_2(x,y)\right) = f(x) + f(y) \quad (x, y \in I)$

due to Z. Daróczy, Gy. Maksa and Zs. Páles [8]. Here $I \subset \mathbb{R}$ is a nonempty, open real interval, M_1 and M_2 are two variable strict means on I, $M_1 \otimes M_2$ denotes the Gauss composition of M_1 and M_2. In [8] the authors proved by the invariance equation

$$M_1 \otimes M_2(M_1(x,y), M_2(x,y)) = M_1 \otimes M_2(x,y)$$

that any solution of the second functional equation is a solution of the first one. Therefore it is enough to determine the solutions of the first functional equation to decide their equivalence.

In the **first chapter** of the dissertation we study functional equation (I.) in case of the arithmetic and geometric means. The main result is that functional equation (I.) has only constant solutions under this special choice of means, see [19]. (The equivalence of the functional equations is a direct consequence). In the special case $I = \mathbb{R}_+$ (where $\mathbb{R}_+$ is the set of positive real numbers) the equivalence has been proved in Daróczy–Maksa–Páles [8]. The argumentation was based on a more general result due to Gy. Maksa [20] but it doesn't work in case of an arbitrary (nonempty) open interval $I \subset \mathbb{R}_+$.

Z. Daróczy, K. Lajkó, R. Lovas, Gy. Maksa and Zs. Páles [9] investigated the equivalence of the functional equations in the special case of weighted arithmetic means

$$M_1(x,y) := \alpha x + (1-\alpha)y, \quad M_2(x,y) := (1-\alpha)x + \alpha y \quad (x, y \in I).$$

Then (II.) reduces to the famous Jensen equation

$$2f\left(\frac{x+y}{2}\right) = f(x) + f(y) \quad (x, y \in I)$$

with solutions of the form $f(x) = A_1(x) + A_0$, where A_1 is an additive function and A_0 is an arbitrary constant. The authors presented that both positive and negative answers can also be given to the equivalence problem. Namely, if α is an algebraic number such that $\frac{1-\alpha}{\alpha}$ and $-\frac{1-\alpha}{\alpha}$ are not algebraically conjugated then all solutions of (I.) are solutions of the Jensen equation too. Therefore they are equivalent to each other. As a negative answer they also proved that if $\frac{1-\alpha}{\alpha}$ is transcendent or it is algebraic such that $\frac{1-\alpha}{\alpha}$ and $-\frac{1-\alpha}{\alpha}$ are algebraically conjugated then there exist solutions of the form $f(x) = A_2(x,x) + A_1(x) + A_0$ of functional equation (I.) with not identically zero symmetric biadditive part A_2. Therefore (I.) and (II.) are not equivalent. According to these results the functional equations containing weighted arithmetic means are proposed to study independently of the equivalence problem in a more general form. In the further chapters of the dissertation we study the functional equation

$$\sum_{i=0}^{n} a_i f(b_i x + (1-b_i)y) = 0 \quad (x, y \in I),$$

where f is an unknown function defined on a nonempty open interval $I \subset \mathbb{R}$, $a_i \in \mathbb{R}$ and $0 < b_i < 1$ $(i = 0, 1, \ldots, n)$ are real parameters. The main steps of the solution are

1. using substitutions derive functional equations on subintervals involving $f(u)$ in an explicite way [33],
2. use the technic of extension of the solution onto the entire real line [23],
3. characterize the extended functions by global results [28].

According to the starting step this characterization gives only local properties of the solution of the original functional equation. Therefore the last step is

4. the uniform description of the structure of the solution on the interval I.

The main result of the **second chapter** says that any solution has the form

$$f(x) = A_{n-1}(\underbrace{x, \ldots, x}_{(n-1)\text{-times}}) + \ldots + A_2(x,x) + A_1(x) + A_0,$$

where for each positive integer k, $A_k\colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ is a symmetric, k - additive function and A_0 is a constant. After substituting this form of the solution into the functional equation necessary and sufficient conditions can be given for each term A_1, ..., A_{n-1}. It is the starting point of further investigations because we have a system of linear functional equations involving k equations for any integer $k = 1$, 2, ..., $n-1$.

The **third chapter** is devoted to the discussion of the *first order condition*

$$A_1(t) + \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i A_1(t\beta_i) = 0 \quad (t \in \mathbb{R})$$

for the additive term A_1 in the solutions. The parameters α_i and β_j are explicitly related to the original parameters a_i and b_j, respectively. The first order condition is referred as *Daróczy's functional equation* because in case of $n = 2$ Daróczy [6] gives a necessary and sufficient condition for the existence of a not identically zero additive function satisfying the first order condition. Daróczy's criteria is formulated by the help of the algebraic properties of the parameters α_1, β_1 in the functional equation

$$A_1(t) + \alpha_1 A_1(t\beta_1) = 0.$$

In this chapter we extend Daróczy's result for the case of $n \geq 2$, see [32] and [33]. The algebraic properties of the family of parameters and linear varieties are essential. To provide (not identically zero) solutions we use field isomorphisms admitting motions of the parameters in the Daróczy's functional equation (see inner and outer semi-homogenity fields)[2]. Another important part of this chapter is the investigation of cases when all of the inner (or, symmetrically, all of the outer) parameters are algebraic. In these cases we have algorithms for finding the additive solutions of Daróczy's functional equations. The first step is to generate a system of linear functional equations by substitutions. Then we use a kind of eliminating process to find the unknown additive function, see [31]. In terms of the algebraic properties of the family of parameters the following cases are clarified:

(i) the outer (or the inner) parameters are algebraically independent (necessary and sufficient condition for the existence of not identically zero additive solutions),

(ii) all of the outer (or the inner) parameters are algebraic (algorithm).

The negative consequences are very interesting because if the Daróczy's functional equation has only trivial (i.e. identically zero) additive solution then so has the higher order conditions. Indeed, the kth order conditions ($k \geq 2$) involve a Daróczy's functional equation for the additive function coming from A_k after fixing the first $k-1$ variables. Higher order conditions are discussed only in the special case of $n = 3$ under the special choice of the outer parameters. In chapter 2 we formulate a sufficient and necessary condition for the existence of a not identically zero biadditive term A_2, see [30].

In **the fourth chapter** we investigate Daróczy's functional equations in special cases. The basic method of the solution is the eliminating process together with reduction to the cases (i), (ii) or $n = 2$ (see Daróczy's theorem).

[2] The field isomorphism-technic is also presented by some recent results. These are based on M. Laczkovich and G. Székelyhidi's spectral analysis theorem [17]; see also **List of talks** [7].

1. On a functional equation containing the arithmetic and the geometric mean

In this chapter we investigate functional equation

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right)+f\left(\sqrt{xy}\right)=f(x)+f(y)\quad (x,y\in I), \tag{17}$$

where I is a nonvoid open interval of the positive real half-line. In case of $I=\mathbb{R}_+$ we can form the functions

$$a(x):=f\left(\frac{x}{2}\right),\quad b(x):=f(\sqrt{x}),\quad c(x):=f(x)\quad (x\in\mathbb{R}_+)$$

and equation (17) can be written into the form

$$a(x+y)+b(x\cdot y)=c(x)+c(y).$$

The general solution of this equation can be found in Maksa [20]. As an application the autors in [8] proved that all solutions of (17) are constant. Because of the structure of the auxiliary functions (a, b, c) the proof doesn't work in case of an arbitrary (nonempty) open interval $I\subset\mathbb{R}_+$. The new method solving the problem is the theory of generalized polynomials.

1.1. Theorem. (Maksa, Varga [19]) *Suppose, that $f:I\to\mathbb{R}$ is a solution of equation (17). Then f is constant.*

If

$$M_1(x,y):=\frac{x+y}{2}\quad\text{and}\quad M_2(x,y)=\sqrt{xy}$$

then equation (II.) can be written into the form

$$2f\left(\mathcal{G}(x,y)\right)=f(x)+f(y)\quad (x,y\in I), \tag{18}$$

where $\mathcal{G}$ is the famous arithmetic-geometric mean. The value of $\mathcal{G}$ at $x,y\in I$ is the common limit

$$\mathcal{G}(x,y):=\lim_{n\to\infty}x_n=\lim_{n\to\infty}y_n=\left(\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dt}{\sqrt{x^2\cos^2 t+y^2\sin^2 t}}\right)^{-1}$$

of the sequences

$$x_1:=x,\ y_1:=y$$
$$x_{n+1}:=\frac{x_n+y_n}{2},\ y_{n+1}:=\sqrt{x_ny_n}\quad (n\in\mathbb{N}).$$

One of the direct consequences of Theorem 1.1. is the equivalence of functional equations (17) and (18) in case of an arbitrary nonvoid open interval of the positive real half-line.

1.1. Corollary. *$\mathcal{G}$ is not a quasi-arithmetic mean on any nonempty open intervals in $\mathbb{R}_+$ although both the arithmetic and the geometric means are quasi-arithmetic.*

This means that there is no any strictly monotone function (nor bijection) $\varphi : I \to \mathbb{R}$ to express the arithmetic-geometric mean in the form

$$\mathcal{G}(x,y) = \varphi^{-1}\left(\frac{\varphi(x)+\varphi(y)}{2}\right) \qquad (x, y \in I),$$

see Hardy–Littlewood–Pólya [13]. In the opposite case φ would be a non-constant solution of (17) which contradicts to Theorem 1.1.

2. Functional equations involving weighted arithmetic means

In this chapter we determine the general form of functions satisfying functional equation

$$\sum_{i=0}^{n} a_i f(b_i x + (1-b_i)y) = 0 \quad (x, y \in I), \tag{19}$$

where $I \subset \mathbb{R}$ is a nonempty open interval, $a_i \in \mathbb{R}$ and $0 < b_i < 1$ $(i = 0, 1, \ldots, n)$ are real parameters. If f is a not identically zero solution of (19), then $\sum_{i=0}^{n} a_i = 0$ because the substitution $x = y$ gives the equation

$$\left(\sum_{i=0}^{n} a_i\right) f(x) = 0 \qquad (x \in I).$$

On the other hand, if $b_i = b_j$ for some indices i, j then we can reduce equation (19). Therefore without loss of generality we may assume that

$$a_i \neq 0 \ (i = 0, \ldots, n); \ \sum_{i=0}^{n} a_i = 0 \ \text{ and } \ b_0 < b_1 < b_2 < \ldots < b_n, \tag{20}$$

where $2 \leq n$. Conditions (20) will be used without any comment. Let

$$c_i := \frac{b_n - b_i}{b_n - b_0} \ \text{ and } \ \beta_i := 1 - c_i = \frac{b_i - b_0}{b_n - b_0} \ \ (i = 1, \ldots, n).$$

In what follows we summarize the basic steps of the solution and the related results.

1. Using substitutions derive functional equations on subintervals involving $f(u)$ in an explicite way (Varga, Vincze [33]): if $f\colon I \to \mathbb{R}$ satisfies equation (19) then for any $\xi \in I$ there is an $\varepsilon > 0$ such that

$$a_0 f(u) + \sum_{i=1}^{n} a_i f(c_i u + (1-c_i)v) = 0 \quad (u, v \in J_\xi :=]\xi-\varepsilon, \xi+\varepsilon[\subset I). \tag{21}$$

2. Use the technic of extension of the solution onto the entire real line (Páles [23]): if $f\colon J_\xi \to \mathbb{R}$ satisfies equation (21) then there exists a unique extension $\tilde{f}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ of the function f such that

$$a_0 \tilde{f}(u) + \sum_{i=1}^{n} a_i \tilde{f}(c_i u + (1-c_i)v) = 0 \quad (u, v \in \mathbb{R}).$$

3. Characterize the extended functions by global results (Székelyhidi [28]):

$$\tilde{f}(x) = \sum_{k=0}^{n-1} D(A_k)(x) \quad (x \in \mathbb{R}), \tag{22}$$

where $A_k\colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ are symmetric k - additive functions ($k \geq 1$), A_0 is an arbitrary constant and

$$D(A_k)(x) := A_k(\underbrace{x, \dots, x}_{k\text{ - times}}) \quad (x \in \mathbb{R}), \quad D(A_0) := A_0.$$

According to the starting step this characterization gives only local properties of the solution of the original functional equation. Therefore the last step is

4. the uniform description of the structure of the solution on the entire interval I (Székelyhidi [26]; Varga, Vincze [33]): if f is a locally (generalized) polynomial function of degree at most n on I, that is for any $\xi \in I$ there is an $\varepsilon > 0$ such that

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} D(A_k^\xi)(x) \qquad (x \in J_\xi :=]\xi-\varepsilon, \xi+\varepsilon[\subset I)$$

then f is a globally (generalized) polynomial function of degree at most n on I, that is

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} D(A_k)(x) \qquad (x \in I),$$

where $A_k : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ is a uniquely determined k - additive and symmetric function for any $k = 0, \ldots, n$.

Let $1 \leq k$ and $0 \leq l \leq k$ be non-negative integers. Using the notations

$$A_{k,l}(x,y) := A_k(\underbrace{x,\ldots,x}_{l\text{-times}}, \underbrace{y,\ldots,y}_{k-l\text{-times}}) \quad (x,y \in \mathbb{R}), \quad A_{0,0} := A_0$$

the main result of this chapter can be formulated as follows.

2.1. Theorem. (Varga, Vincze [33]) *The function $f : I \to \mathbb{R}$ satisfies funtional equation (19) if and only if there exist uniquely determined symmetric k-additive functions $A_k : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ $(k = 0, 1, \ldots, n-1)$ such that*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} D(A_k)(x) \quad (x \in I) \tag{23}$$

and

$$\sum_{i=1}^{n} a_i A_{k,k-l}(s, t\beta_i) = 0 \quad (s,\ t \in \mathbb{R}) \tag{24}$$

holds for any $k = 1, \ldots, n-1$, $l = 1, \ldots, k$ provided that $n \geq 2$. If $n = 1$ then, by (23), f is constant.

2.1. Remark. *Keeping in mind that $\beta_n = 1$ if $k = 1$ then* (24) *can be written into the form*

$$a_n A_1(t) + \sum_{i=1}^{n-1} a_i A_1(t\beta_i) = 0 \quad (t \in \mathbb{R}) \tag{25}$$

Under the choice of the new parameters $\alpha_i := \frac{a_i}{a_n}$ $(i = 1, \ldots, n-1)$ we have that

$$A_1(x) + \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i A_1(\beta_i x) = 0 \quad (x \in \mathbb{R}). \tag{26}$$

If there exists a not identically zero additive solution of this equation then equation (19) *has a not identically zero solution f. When $k = 2$, we get by* (24) *the system of equations*

$$\left\{ \begin{array}{rcl} A_2(s,t) + \sum\limits_{i=1}^{n-1} \alpha_i A_2(s, t\beta_i) & = & 0 \\ A_2(t,t) + \sum\limits_{i=1}^{n-1} a_i A_2(t\beta_i, t\beta_i) & = & 0 \end{array} \right. \quad (s,t \in \mathbb{R})$$

for the biadditive part of the solution f.

The first order condition (26), i.e. the necessary and sufficient condition for the additive term A_1 is called as *Daróczy -functional equation.* It will be investigated in chapter 3. Higher order conditions are discussed only in the special case of $n = 3$ under the special choice of the outer parameters; we have a necessary and sufficient condition for the existence of solutions wit non-zero biadditive term.

2.2. Theorem. (Varga [30]) *Let $b_0, b_1, b_2, b_3 \in (0, 1)$ be pairwise different real numbers such that $b_0 < b_1 < b_2 < b_3$ and consider the functional equation*

$$\begin{aligned} &f(b_0x + (1 - b_0)y) + f(b_3x + (1 - b_3)y) = \\ &\qquad = f(b_1x + (1 - b_1)y) + f(b_2x + (1 - b_2)y), \end{aligned}$$

where $x, y \in I$. If $b_0 + b_3 \neq b_1 + b_2$ then all solutions are constant. In case of $b_0 + b_3 = b_1 + b_2$ the solutions have the form

$$f(x) = A_2(x, x) + A_1(x) + A_0 \quad (x \in I),$$

where the symmetric biadditive part $A_2 \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ satisfies the condition

$$A_2(b_0x, b_3x) = A_2(b_1x, b_2x) \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Using the result due to Daróczy, Lajkó, Lovas, Maksa, Páles [9] we have the following necessary and sufficient condition: there exists a solution with a not identically zero biadditive term if an only if $b_0 + b_3 = b_1 + b_2$ and the real number

$$\lambda = \frac{1 - (b_3/b_1)}{1 - (b_0/b_1)}$$

is transcendent or it is algebraic with the same defining polynomial as that of $-\lambda$ (i.e. λ and $-\lambda$ are algebraically conjugated).

3. On Daróczy's problem

In this chapter we investigate the following problem: under what choice of the parameters has equation (26) not identically zero additive solutions. The starting point is Daróczy's result related to the case of $n = 2$.

3.1. Theorem. (Daróczy [6]) *Let $\alpha_1 \neq 0, \beta_1$ be given real numbers. Equation*

$$A_1(t) + \alpha_1 A_1(t\beta_1) = 0 \quad (t \in \mathbb{R}) \tag{27}$$

has not identically zero additive solutions if and only if both $\gamma_1 := -(1/\alpha_1)$ and β_1 are transcendent or they are algebraic with the same defining polynomial.

A simple but key observation is that the condition in Daróczy's theorem is equivalent to the existence of a field isomorphism

$$\delta\colon \mathbb{Q}(\beta_1) \to \mathbb{Q}(\alpha_1) \ \text{ such that } \ \delta(\beta_1) = -(1/\alpha_1),$$

where $\mathbb{Q}(a)$ denotes the extension of the rational numbers with element a. In an equivalent way

$$1 + \alpha_1 \delta(\beta_1) = 0.$$

In what follows we generalize this result in case of $n > 2$. The algebraic properties of the family of parameters and linear varieties will be essential.

3.1. Definition. *Let m be a positive integer and consider the elements*

$$\vec{\lambda} := (\lambda_1, \ldots, \lambda_m) \ \text{ and } \ \vec{\mu} := (\mu_1, \ldots, \mu_m) \in \mathbb{R}^m.$$

(*i*) *The ideal*

$$\mathcal{I}(\vec{\lambda}) := \{\ p \in \mathbb{Q}[x_1, \ldots, x_m] \mid p(\lambda_1, \ldots, \lambda_m) = 0\ \}$$

of the polynomial ring $\mathbb{Q}[x_1, \ldots, x_m]$ is called the defining ideal of $\vec{\lambda}$. If $\mathcal{I}(\vec{\lambda})$ contains only the identically zero polynomial then we say that the m - tuple $(\lambda_1, \ldots, \lambda_m)$ is algebraically independent. Otherwise it is algebraically dependent.

(*ii*) *In case of $\mathcal{I}(\vec{\lambda}) = \mathcal{I}(\vec{\mu})$ the elements $\vec{\lambda}$ és $\vec{\mu}$ are algebraically conjugated.*

Especially, if $m = 1$ then the ideal $\mathcal{I}(\lambda)$ is generated by a distinguished polynomial called the defining polynomial of λ and the real numbers λ and μ are algebraically conjugated if both of them are transcendent or they are algebraic with the same defining polynomial. The coordinates of the point $(\sqrt{\pi}, 2\pi + 1)$ are algebraically dependent because the polynomial

$$P(x_1, x_2) = 2x_1^2 - x_2 + 1$$

vanishes at $x_1 = \sqrt{\pi}$ and $x_2 = 2\pi + 1$. By the Lindemann-Weierstrass theorem [3] we can construct algebraically independent systems in the following way: if $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ are algebraic real numbers but they are *linearly independent* over $\mathbb{Q}$ then the collection $e^{\alpha_1}, \ldots, e^{\alpha_n}$ of numbers is algebraically independent. The next result is an equivalent characterization for systems of numbers to be algebraic conjugate of each other.

3.2. Theorem. (Varga, Vincze [33]) *Let $2 \leq n \in \mathbb{N}$ be an integer. The elements*

$$\vec{\lambda} := (\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}) \quad and \quad \vec{\mu} := (\mu_1, \ldots, \mu_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$$

are algebraically conjugated if and only if there exists a field isomorphism

$$\delta \colon \mathbb{Q}(\mu_1, \ldots, \mu_{n-1}) \to \mathbb{Q}(\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1})$$

such that $\delta(\mu_i) = \lambda_i \quad (i = 1, \ldots, n-1)$.

3.1. Algebraic k - flats

3.2. Definition. *A translate of a k - dimensional linear subspace of $\mathbb{R}^m$ is called a k - flat. If $k = 1$ then we speak about a line. In case of $k = m - 1$ we have a hyperplane. A k - flat F_k is algebraic if there exists a not identically zero element P of the polynomial ring $\mathbb{Q}[x_1, \ldots, x_m]$ such that P vanishes at all points of the k - flat, i.e.*

$$P \in \cap_{\vec{\lambda} \in F_k} \mathcal{I}(\vec{\lambda}).$$

If $k = 0$ then the flat reduces to a single point and we can refer to Definition 3.1.

3.1. Lemma. (Varga, Vincze [32]) *A k - flat $F_k \subset \mathbb{R}^m$ is the union of zeros of not identically zero elements of the polynomial ring $\mathbb{Q}[x_1, \ldots, x_m]$ if and only if it is algebraic.*

The result says that the k - flat $F_k \subset \mathbb{R}^m$ is algebraic if and only if the coordinates of any point in F_k are algebraically dependent.

3.2. Lemma. (Varga, Vincze [32]) *The hyperplane in $\mathbb{R}^m$ defined by the equation*

$$\lambda_1 x_1 + \ldots \lambda_{m-1} x_{m-1} + \lambda_m = x_m \tag{28}$$

is algebraic if and only if all of the coefficients $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ are algebraic.

3.1. Example. *Consider the line $x_2 = \sqrt{3}x_1 + \sqrt{2}$ in the plane $\mathbb{R}^2$. It is algebraic because*

$$P(x_1, \sqrt{3}x_1 + \sqrt{2}) = 0,$$

where $P(x_1, x_2) = x_2^4 - 6x_1^2 x_2^2 - 4x_2^2 + 9x_1^4 - 12x_1^2 + 4$.

Let $\beta_1, \ldots, \beta_{n-1}$ be an algebraically independent system of real numbers. In view of the presented observations we can choose an algebraically independent system of real numbers $\delta_1, \ldots, \delta_{n-1}$ on the hyperplane

$$1 + \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i x_i = 0$$

if and only if at least one of the parameters α_i's is transcendent. In this case a field isomorphism

$$\delta: \mathbb{Q}(\beta_1, \ldots, \beta_{n-1}) \to \mathbb{Q}(\delta_1, \ldots, \delta_{n-1})$$

can also be given in such a way that $\delta(\beta_i) = \delta_i$ (i=1,..., $n-1$) and

$$1 + \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i \delta_i = 0.$$

Formally it is the generalization of the two parametric version in Daróczy's result as a sufficient condition.

3.3. Theorem. (Varga, Vincze [32]) *Let $n \geq 3$ be an integer. If the parameters $(\beta_1, \ldots, \beta_{n-1})$ are algebraically independent and at least one of the parameters $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}$ is transcendental then equation (26) has a not identically zero semi-homogeneous $A_1: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ additív solution, i.e. there exist real numbers δ_i $(i = 1, \ldots n-1)$ such that $A_1(\beta_i x) = \delta_i A_1(x) \quad (x \in \mathbb{R})$.*

In the proof of this theorem we consider $\mathbb{R}$ as a vector space over the scalar field $\mathbb{Q}(\beta_1, \ldots, \beta_{n-1})$. Taking a basis $\mathcal{H}$ we use the technic of semilinear extension with the field isomorphism δ to construct not identically zero solutions. The next result shows that the inner and the outer parameters play a symmetric role.

3.4. Theorem. (Varga, Vincze [32]) *Let $n \geq 3$ be an integer. If the parameters $(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1})$ are algebraically independent and at least one of the parameters $\beta_1, \ldots, \beta_{n-1}$ is transcendental then equation (26) has a not identically zero semi-homogeneous $A_1: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ additív solution, i.e. there exist real numbers δ_i $(i = 1, \ldots n-1)$ such that $A_1(\delta_i x) = \alpha_i A_1(x) \quad (x \in \mathbb{R})$.*

3.2. Eliminating process to find additive solutions of special systems of functional equations

To give a necessary and sufficient condition for the existence of not identically zero additive solutions of functional equation (26) we need the following key result.

3.3. Lemma. (Varga [31]) *Let $k \geq 2$ be an integer and suppose that u, a_{ij} are given real numbers $(i, j = 1, \ldots, k)$. If the matrix $M_1 := (a_{ij})_{k \times k}$ is regular then the only additive function $A: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisfying the system of equations*

$$u^{k-1} A(a_{i1}x) + u^{k-2} A(a_{i2}x) + \ldots + uA(a_{ik-1}x) + A(a_{ik}x) = 0 \tag{29}$$

$(x \in \mathbb{R}; i = 1, \ldots, k)$ is the identically zero function.

The proof is based on the Gaussian eliminating process adapted to the setting of functional equations. It will be illustrated in chapter 4 by explicite examples. As a direct consequence we have the following theorem.

3.5. Theorem. (Varga [31]) *Let $n \geq 3$ be an integer. If $(\beta_1, \ldots, \beta_{n-1})$ are algebraically independent and all of the parameters $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}$ are algebraic then the only additive solution of functional equation (26) is the identically zero function.*

In view of the next theorem the inner and the outer parameters play a symmetric role.

3.6. Theorem. (Varga [31]) *Let $n \geq 3$ be an integer. If $(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1})$ are algebraically independent and all of the parameters $\beta_1, \ldots, \beta_{n-1}$ are algebraic then the only additive solution of functional equation (26) is the identically zero function.*

3.3. The generalization of Daróczy's theorem

From theorems 3.3 and 3.5 or theorems 3.4 and 3.6 we get the main results of this section.

3.7. Theorem. (Varga [31]) *Suppose that $n \geq 3$ and let $(\beta_1, \ldots, \beta_{n-1})$ be algebraically independent. Equation (26) has a not identically zero additive solution if and only if at least one of the parameters $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}$ is transcendental.*

3.8. Theorem. (Varga [31]) *Suppose that $n \geq 3$ and let $(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1})$ be algebraically independent. Equation (26) has a not identically zero additive solution if and only if at least one of the parameters $\beta_1, \ldots, \beta_{n-1}$ is transcendental.*

In terms of the algebraic properties of the family of parameters the following cases are clarified:

(i) the outer (or the inner) parameters are algebraically independent (necessary and sufficient condition for the existence of not identically zero additive solutions),

(ii) all of the outer (or the inner) parameters are algebraic (algorithm).

The negative consequences are very interesting because if the Daróczy's functional equation has only trivial (i.e. identically zero) additive solution then so has the higher order conditions. Indeed, the kth order conditions ($k \geq 2$) involve a Daróczy's functional equation for the additive function coming from A_k after fixing the first $k-1$ variables.

4. Examples and methods of the solution

Functional equations presented in the last chapter are of type (26). To find their additive solutions we use a kind of Gaussian eliminating process. The **first example** is equation

$$\alpha_1 A(\sqrt{d_1}x) + \alpha_2 A(\sqrt{d_2}x) + A(x) = 0, \tag{30}$$

where d_1 and d_2 are positive rationals with irrational square roots, $\alpha_i \in \mathbb{R}$ $(i = 1, 2)$ such that $\alpha_1\alpha_2 \neq 0$. The **second example** comes from (30) by changing the inner and the outer parameters:

$$\sqrt{d_1}A(\beta_1 x) + \sqrt{d_2}A(\beta_2 x) + A(x) = 0. \tag{31}$$

Finally we investigate functional equation

$$\alpha_1 A(\sqrt{2}x) + \alpha_2 A(\sqrt{5}x) + \alpha_3 A(\sqrt{7}x) + A(x) = 0 \tag{32}$$

as the **third example**, where $\alpha_i \in \mathbb{R}$ $(i = 1, 2, 3)$ such that $\prod_{i=1}^{3} \alpha_i \neq 0$.

By Theorem 3.6 if the outer parameters are algebraically independent then the only additive solution is the identically zero function. In what follows we present the solution of equation (32) without any further restriction for the parameters α_i's. As the starting step substitute $\sqrt{2}x$, $\sqrt{5}x$, $\sqrt{7}x$, $\sqrt{2}\sqrt{5}x$, $\sqrt{2}\sqrt{7}x$, $\sqrt{5}\sqrt{7}x$ and $\sqrt{2}\sqrt{5}\sqrt{7}x$ in the arguments of A, respectively. This procedure gives a linear system of functional equations

$$M \begin{pmatrix} A(x) \\ A(\sqrt{2}x) \\ A(\sqrt{5}x) \\ A(\sqrt{7}x) \\ A(\sqrt{2}\sqrt{5}x) \\ A(\sqrt{2}\sqrt{7}x) \\ A(\sqrt{5}\sqrt{7}x) \\ A(\sqrt{2}\sqrt{5}\sqrt{7}x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

where $M := M(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ and

$$M(x,y,z) := \begin{pmatrix} 1 & x & y & z & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2x & 1 & 0 & 0 & y & z & 0 & 0 \\ 5y & 0 & 1 & 0 & x & 0 & z & 0 \\ 7z & 0 & 0 & 1 & 0 & x & y & 0 \\ 0 & 5y & 2x & 0 & 1 & 0 & 0 & z \\ 0 & 7z & 0 & 2x & 0 & 1 & 0 & y \\ 0 & 0 & 7z & 5y & 0 & 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 7z & 5y & 2x & 1 \end{pmatrix}.$$

4.1. Lemma. *Let x, y and z be non-zero real numbers and suppose that the rank of $M(x,y,z)$ is less than 6. Then $x^2 = \frac{1}{2}$, $y^2 = 1$ and $z^2 = \frac{5}{7}$.*

In the sense of the previous lemma if rank $M \leq 5$ then (32) reduces to the equation

$$\pm \frac{1}{\sqrt{2}} A\left(\frac{\sqrt{2}}{1+\sqrt{5}}x\right) \pm \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{7}} A\left(\frac{\sqrt{7}}{1+\sqrt{5}}x\right) \pm A(x) = 0 \quad (x \in \mathbb{R}).$$

This is the special case of (31) in the second example. If M has a maximal rank then the null-space is trivial and the only solution is the identically zero function. In each of the further possible cases we can use the following method illustrated in case of rank 6. Then the null-space is of dimension 2 spanned by linearly independent vectors $\vec{v}$ and $\vec{w}$. We can write

$$\begin{pmatrix} A(x) \\ A(\sqrt{2}x) \\ A(\sqrt{5}x) \\ A(\sqrt{7}x) \\ A(\sqrt{2}\sqrt{5}x) \\ A(\sqrt{2}\sqrt{7}x) \\ A(\sqrt{5}\sqrt{7}x) \\ A(\sqrt{2}\sqrt{5}\sqrt{7}x) \end{pmatrix} = \lambda(x) \begin{pmatrix} v_0 \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \\ v_7 \end{pmatrix} + \mu(x) \begin{pmatrix} w_0 \\ w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \\ w_5 \\ w_6 \\ w_7 \end{pmatrix}$$

for some additive functions λ and μ. If $v_0 = w_0 = 0$ then A must be the identically zero function. If, for example, $v_0 \neq 0$, then

$$\lambda(x) = \frac{1}{v_0} A(x) - \frac{w_0}{v_0} \mu(x)$$

and, consequently,

$$A\left(\sqrt{2}x\right) = \frac{v_1}{v_0} A(x) + \left(w_1 - \frac{w_0}{v_0}\right) \mu(x).$$

If $w_1 - \frac{w_0}{v_0} = 0$ then

$$A\left(\sqrt{2}x\right) = \frac{v_1}{v_0}A(x)$$

and we can use Daróczy's original theorem 3.1 to detect the possible solutions. Otherwise

$$\mu(x) = \frac{1}{w_1 - \frac{w_0}{v_0}}A\left(\sqrt{2}x\right) - \frac{v_1}{v_0\left(w_1 - \frac{w_0}{v_0}\right)}A(x)$$

and thus

$$A\left(\sqrt{5}x\right) = \frac{v_2}{v_0}A(x) - \frac{w_0 v_2}{v_0}\left(\frac{1}{w_1 - \frac{w_0}{v_0}}A\left(\sqrt{2}x\right) - \frac{v_1}{v_0\left(w_1 - \frac{w_0}{v_0}\right)}A(x)\right) +$$

$$w_2\left(\frac{1}{w_1 - \frac{w_0}{v_0}}A\left(\sqrt{2}x\right) - \frac{v_1}{v_0\left(w_1 - \frac{w_0}{v_0}\right)}A(x)\right),$$

which is just an equation of type (30) in the first example.

Irodalomjegyzék

[1] J. Aczél, J. K. Chung and C. T. Ng, *Symmetric second differences in product form on groups*, Topics in Mathematical Analysis, World Scientific, Singapure, 1-22 (1989).

[2] G. Almkvist and B. Berndt, *Gauss, Landen, Ramanujan, the arithmetic-geometric mean, ellipses, π, and the Ladies diary*, Amer. Math. Monthly **95** (1988), no. 7, 585–608.

[3] A. Baker, *Transcendental number theory*, Cambridge University Press 1975.

[4] J. M. Borwein and P. B. Borwein, *Pi and the AGM, (A study in analytic number theory and computational complexity)*, Wiley, New York, 1987.

[5] B. C. Carlson, *Algorithms involving arithmetic and geometric means*, Amer. Math. Monthly **78** (1971), 496–505.

[6] Z. Daróczy, *Notwendige und hinreichende Bedingungen für die Existenz von nichtkonstanten Lösungen linearer Funktionalgleichungen*, Acta Sci. Math. Szeged, **22** (1961), 31–41.

[7] Z. Daróczy, *Problem 13.*, Report of meeting; The Thirty-seventh International symposium on Functional Equations, May 16-23, 1999, Huntington, WV, Aequat. Math., **60** (2000), 175-200.

[8] Z. Daróczy, Gy. Maksa, and Zs. Páles, *Functional equations involving means and their Gauss composition*, Proc. Amer. Math. Soc., **134** (2005), no. 2, 521-530.

[9] Z. Daróczy, K. Lajkó, R-L. Lovas, Gy. Maksa and Zs. Páles, *Functional equations involving means*, Acta Math. Hungar., **116** (1-2), 2007, 79-87.

[10] Z. Daróczy and Zs. Páles, *Gauss composition of means and the solution of the Matkowski–Sutô problem*, Publ. Math. Debrecen, **61(1-2)** (2002), 157-218.

[11] D.Z.Djokovic, *A representation theorem for $(X_1 - 1)\dots(X_n - 1)$ and its applications*, An Polon. Math. **22** 1969, 189-198.

[12] C. F. Gauss, *Bestimmung der Anziehung eines elliptischen Ringes*, Akademische Verlagsgesellschaft M. B. H., Leipzig, 1927, Nachlass zur Theorie des arithmetisch-geometrischen Mittels und der Modulfunktion.

[13] G. H. Hardy, J. E. Littlewood, and G. Pólya, *Inequalities*, Cambridge University Press, Cambridge, 1934, (first edition), 1952 (second edition).

[14] S. Haruki, *On the theorem of S. Kakutani-M.Nagumo and J.L.Walsh for the mean value property of harmonic and complex polinomials*, Pacific J. Math. **94** 1981, No.1., 113-123.

[15] Pl. Kannappan, *Functional Equations and Inequalities with Applications*, Springer Science+Business Media, LLC 2009.

[16] M. Kuczma, *An Introduction to the Theory of Functional Equations and Inequalities*, Prace Naukowe Universitetu Śląskiego w Katowicach Vol. CDLXXXIX (Państwowe Wydawnictwo Naukowe – Universitet Śląski, Warszawa–Kraków–Katowice, 1985).

[17] M. Laczkovich and G. Székelyhidi, *Harmonic Analysis on discrete Abelian groups*, Proc. Amer. Math. Soc. **133** (2005), 1581-1586.

[18] G.Van Der Lijn, *La definition fonctionelle des polinomes dans les groupes abéliens*, Fund.Math. **33** 1945, 43-50.

[19] Gy. Maksa and A. Varga, *The equivalence of two functional equations involving the arithmetic mean, the geometric mean and their Gauss composition*, Aequat. Math. 80 (2010), 173-179.

[20] Gy. Maksa, *On the functional equation* $f(x+y)+g(xy)=h(x)+h(y)$, Publ. Math. Debrecen **24** (1977), no. 1-2, 25–29.

[21] Gy. Maksa, *Functional equations involving means*, (in Hungarian), Talks at the Academy, Hungarian Academy of Sciences, Budapest, 2006.

[22] M.A. Mckiernan *On vanishing n-th ordered differences and Hamel-bases*, Ann.Polon. Math. **19** (1967), 331-336.

[23] Zs. Páles, *Extension theorems for functional equations with bisymmetric operators*, Aequat. Math. **63** (2002), 266-291.

[24] F. Radó and J. A. Baker, *Pexider's equation and aggregation of allocations*, Aequationes Math., **32** (1987), 227-239

[25] J. Rimán, *On an extension of Pexider's equation*, Zb. Radova Mat. Inst. Beograd N. S. **1**(9) (1976), 65-72.

[26] L. Székelyhidi, *Local polynomials and functional equations*, Publ. Math. Debrecen, **30** (1983), 283-290.

[27] L. Székelyhidi, *Remark on a paper of M.A.Mckiernan*, Ann.Polon. Math. **36** (1979), 245-247.

[28] L. Székelyhidi, *On a class of linear functional equations*, Publ. Math. (Debrecen) **29** (1982), 19-28.

[29] L. Székelyhidi, *Convolution type functional equations on topological Abelian goups*, World Scientific Publishing Co. Inc. Teaneck, NJ, 1991.

[30] A. Varga, *On a functional equations containing four weighted arithmetic means*, BJMA, Vol. 2 (1), 2008, 21-32, www.math-analysis.org.

[31] A. Varga, *On additive solutions of a linear equation*, Acta Math Hungar., 128 (1-2), 2010, 15-25.

[32] A. Varga and Cs. Vincze, *On Daróczy's problem for additive functions*, Publ. Math. Debrecen, Vol. 75 (1-2), 2009, 299-310.

[33] A. Varga and Cs. Vincze *On a functional equations containing weighted arithmetic means*, International Series of Numerical Mathematics, Vol.157, 2009, 305-315

Publikációk/Publications

- [1.] A. Varga, Cs. Vincze, *On a lower and upper bound for the curvature of ellipses with more than two foci*, Expo. Math. 26 (2008), 55-77.
- [2.] A. Varga, *On a functional equations containing four weighted arithmetic means*, BJMA, Vol. 2 (1), 2008, 21-32, www.math-analysis.org.
- [3.] A. Varga, *On additive solutions of a linear equation*, Acta Math Hungar., 128 (1-2), 2010, 15-25.
- [4.] A. Varga and Cs. Vincze, *On Daróczy's problem for additive functions*, Publ. Math. Debrecen, Vol. 75 (1-2), 2009, 299-310.
- [5.] A. Varga and Cs. Vincze *On a functional equations containing weighted arithmetic means*, International Series of Numerical Mathematics, Vol.157, 2009, 305-315.
- [6.] Gy. Maksa and A. Varga, *The equivalence of two functional equations involving the arithmetic mean, the geometric mean and their Gauss composition*, Aequat. Math. 80 (2010), 173-179.

Előadások/ List of talks

- [1.] *A functional equation involving four weighted arithmetic means*, The seventh Katowice-Debrecen Winter Seminar on Functional Equations and Inequalities, Jan. 31 - Febr. 2, 2007, Bedlewo, Poland,
- [2.] *Lineáris függvény-egyenlőtlenségek – a kritikus görbe*, Tanszéki szeminárium, Debreceni Egyetem, Analízis Tanszék, 2007 március 30
- [3.] *On a functional equation containing weighted arithmetic means*, Conference on Inequalities and Applications'07, Noszvaj, Hungary, Sept. 9-15, 2007
- [4.] *On Daróczy's problem*, Tanszéki szeminárium, Debreceni Egyetem, Analízis Tanszék, 2008 október 31
- [5.] *On Daróczy's problem for additive functions*, The ninth Katowice-Debrecen Winter Seminar on Functional Equations and Inequalities, Febr. 4 - Febr. 7, 2009, Bedlewo, Poland,
- [6.] *Középértékeket tartalmazó függvényegyenletek*, Tanszéki Szeminárium, Debreceni Egyetem, Műszaki Alaptárgyi Tanszék, 2010. március 27.
- [7.] *Field isomorphisms related to a special class of functional equations*, International Symposium on Functional Equations 50, Hajdúszoboszló, Hungary, June 17 - 24, 2012.