Egyetemi doktori (PhD) értekezés tézisei

Általánosított Berwald-sokaságok

Szakál Szilvia

Témavezető: Dr. Szilasi József egyetemi docens

Debreceni Egyetem
Matematika- és Számítástudományok Doktori Iskola
Debrecen, 2012.

1. Előzmények, motiváció és célkitűzések

A Finsler-geometriai kutatások napjainkban reneszánszukat élik. Túl a tárgykör iránt az alkalmazások (fizika, biológia, kontrolrendszerek) oldaláról megmutatkozó növekvő igényeknek, a nagyfokú fellendülésnek szubjektív okai is vannak. A XX. század egyik legkíválóbb geométere, S.S. CHERN, aki a 40-es évek végén maga is fontos eredményeket ért el ezen a területen, a múlt század utolsó évtizedében néhány igen hatásos írásában ismételten fölhívta a figyelmet a Finsler-geometria fundamentális jelentőségére. CHERN érvelése egyszerű és meggyőző: a metrikus differenciálgeometria fölépítése, s egy sor alapvető tételének leszármaztatása szempontjából lényegtelen, sőt természetellenes a metrika kvadratikus jellegére vonatkozó azon megkötés, amely benne rejlik a Riemann-sokaságok fogalmában. (Hasonló gondolat korábban már HERMANN WEYL-nél is fölmerült.) A metrikus differenciálgeometria ebben az általánosabb megközelítésben egy első fokú homogén Lagrange-függvényre (vagy másodfokú homogén energiafüggvényre) van alapozva (bizonyos további megkötésekkel), így a mechanika nézőpontjából a Finsler-sokaságok homogén Lagrange-rendszereket jelentenek.

A Finsler-sokaságok nyújtotta nagyobb általánosság a differenciálgeometriai kalkulációkhoz nélkülözhetetlen konnexiók bevezetése szempontjából számos nehézség forrása. Ellentétben a Riemann-geometriával, nem áll rendelkezésre *egyetlen* kitüntetett konnexió, s ráadásul a konnexióparaméterek az esetek többségében a helytől és a sebességtől egyaránt függnek. (Ez utóbbi alól fontos kivétellel a jelen disszertáció is szolgálni fog!) Manapság az az álláspont kezd kikristályosodni, hogy minden konkrét Finsler-geometriai probléma tárgyalásához meg lehet – és meg is kell – találni egy ahhoz leginkább adekvát Finsler-konnexiót. Ezt az elvet először M. Matsumoto fogalmazta meg explicite, s mint látni fogjuk, a jelen munka újabb megerősítését adja.

A Finsler-sokaságok nagyobb általánosságának további természetes következménye, hogy a Finsler-geometria szűkölködik a struktúra-tételekben. Az egyetlen igazán mély struktúra-tételt Szabó Zoltán találta a 70-es évek második felében, aki teljes leírását adta a pozitív definit Berwald-sokaságoknak. A Berwald-sokaságok esetében az alapsokaságon létezik (egy és csak egy) olyan *torziómentes* lineáris konnexió, amelyhez tartozó párhuzamos eltolás megőrzi az érintővektorok Finsler-normáját. Kézenfekvőnek látszik elejteni a torziómentesség feltételét – így jutunk az *általánosított Berwald-sokaságokhoz.* Gyorsan kiderül azonban, hogy ezzel az első pillantásra csekély általánosítással egy olyan bonyolult szerkezetű világba léptünk, amelyre vonatkozó struktúra-tételre egyelőre reményünk sincs.

Az általánosított Berwald-sokaságok fogalmát a kétdimenziós esetben és eltérő módon V. V. Wagner vezette be 1943-ban. Különféle tenzoriális karakterizációjukkal azóta többen és ismételten foglalkoztak; mindenekelőtt M. Hashiguchi, Y. Ichijyō és M. Matsumoto. A legeredetibb gondolatok megítélésünk szerint Ichijyō munkáiban találhatók, amelyek disszertációnkra is rendkívül inspirálóan hatottak. Ez az értekezés azonban mind kiindulópontjában, mind megközelítési módjában, mind pedig az alkalmazott technikai apparátus tekintetében jelentősen különbözik a tárgykör korábbi dolgozataitól – és vélhetően e nézőpontváltásnak is köszönhető, hogy sikerült egy sor olyan alapvető tényt feltárni, amely eddig kívül maradt a látótéren.

Az egész munka fogalmi kereteit a Finsler-sokaságoknak és -konnexióknak az az elmélete képezi, amelynek alapjait J. Grifone fektette le a 70-es évek elején, technikai apparátusként a vektorértékű differenciálformák és a hozzájuk csatolt derivációk Frölicher-Nijenhuis-féle kalkulusát használva. Ilyen módon rendkívül tömör, ugyanakkor áttekinthető megfogalmazások válnak lehetővé, a bizonyítások azonban sokszor lényegesen több ötletet igényelnek annál, mint ami a hagyományos tenzorkalkulus alkalmazása esetén megszokott.

Munkánk e rövid történeti beágyazásának lezárásaként meg kell említenünk, hogy a 2000-es évekkel kezdődően (részben munkatársaival együttműködve) számos új gondolattal gazdagította a tárgykört TAMÁSSY Lajos professzor. Ő egészen más megközelítést alkalmazott, amelynek lényege az indikátrixok ún. affin deformációinak vizsgálata. Ily módon számos esetben bonyolult kalkulatív apparátus használata nélkül, egyszerű geometriai megfontolásokkal sikerült új eredményeket nyernie, ill. korábbi eredményeket reprodukálnia.

2. Az értekezés tartalma és új eredményei

A következőkben rövid összefoglalását adjuk az egyes fejezetek tartalmának, és felsoroljuk, hogy mi az *igazán új* eredmény bennük.

1. fejezet *Ebben a fejezetben rögzítjük jelöléseinket, megállapodásainkat és emlékeztetünk néhány olyan alapvető fogalomra és tényre, amelyekre a továbbiakban végig támaszkodni fogunk.*

Sokaságon egy véges (de nem nulla) dimenziójú, Hausdorff, összefüggő, megszámlálható bázisú sima sokaságot értünk.

Egy M sokaságon adott *semispray*n olyan $\mathring{T}M$ fölött sima $S\colon TM \to TTM$ C^1-osztályú leképezést értünk, amelyre teljesül, hogy $\tau_{TM} \circ S = 1_{TM}$, és eleget tesz a $JS = C$ feltételnek. Egy semispray *spray*, ha másodfokú pozitív homogén abban az értelemben, hogy $[C, S] = S$. Egy sprayt *affin*nak vagy *kvadratikus*nak nevezünk, ha C^2-osztályú - és ennélfogva sima - TM-en.

2. fejezet *A Finsler-sokaságok elméletében alapvető szerepet játszanak a lineáris konnexiók alkalmas, nemlineáris általánosításai, az ún. Ehresmann-konnexiók. A második fejezetben tárgyaljuk az ezzel kapcsolatos alapvető fogalmakat és konstrukciókat, és teszünk néhány egyszerű, új észrevételt.*

*Ehresmann-konnexió*n olyan $\mathring{T}M$ fölött sima h vektorértékű 1-formát értünk, amely projektor ($h^2 = h$) és amelynek nulltere a vertikális résznyaláb. $v := 1_{\mathfrak{X}(TM)} - h$ a h hoz tartozó *vertikális projektor*.

Egy h Ehresmann-konnexióhoz a következő vektorértékű formákat csatoljuk:

$$
\begin{aligned}
H &:= [h, C] && - \ h \text{ tenziója;}\\
t &:= [J, h] && - \ h \text{ gyenge torziója;}\\
T &:= i_S t + H && - \ h \text{ erős torziója } (S \text{ tetszőleges semispray});\\
\Omega &:= -\frac{1}{2}[h, h] && - \ h \text{ görbületi tenzora.}
\end{aligned}
$$

(A zárójel mindenütt Frölicher-Nijenhuis zárójelet jelent.) Azt mondjuk, hogy h *homogén*, ha a tenziója eltűnik.

Az Ehresmann-konnexiók és a semisprayk közötti alapvető relációt - egymástól függetlenül - M. Crampin és J. Grifone fedezte fel. Eredményüket az alábbiakban foglaljuk össze:

(i) Amennyiben h Ehresmann-konnexió és $\widetilde{S}$ tetszőleges semispray az M sokaság fölött, úgy $S := h\widetilde{S}$ szintén semispray, amely független $\widetilde{S}$ megválasztásától és eleget tesz a $h\,[C,S] = S$ összefüggésnek. Ezt a semisprayt a *h-hoz tartozó* vagy *h-hoz csatolt semispray*nek mondjuk.

(ii) Ha egy $S\colon TM \to TTM$ semispray van adva, akkor

$$h := \frac{1}{2}\left(1_{\mathfrak{X}(TM)} + [J,S]\right) \tag{1}$$

Ehresmann-konnexió, amelyet az *S által származtatott Ehresmann-konnexió*nak hívunk. Az így konstruált Ehresmann-konnexió (gyenge) torziója eltűnik a hozzá tartozó semispray pedig $\frac{1}{2}\left(S + [C,S]\right)$. Amennyiben S spray, úgy h eleget tesz a homogenitási feltételnek és a hozzátartozó semispray éppen az S spray.

(iii) Egy Ehresmann-konnexió akkor és csak akkor származik semisprayből ((1) szerinti értelemben) ha gyenge torziója eltűnik.

Egy h Ehresmann-konnexió birtokában az $F := h\,[S,h] - J$ formulával majdnem komplex struktúrát adunk meg, ahol S a h-hoz tartozó semispray.

Tény. Tegyük fel hogy $\nabla\colon \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ kovariáns deriválás az M sokaságon. Ekkor ∇ egy mindenütt sima homogén h_∇ Ehresmann-konnexiót, azaz lineáris konnexiót származtat M-en. Megfordítva, minden minden sima homogén Ehresmann-konnexió meghatároz egy kovariáns deriválást M-en.

2.9 Lemma. Legyen h homogén Ehresmann-konnexió az M sokaságon és jelölje S a h-hoz csatolt semisprayt. Amennyiben $\widetilde{h}$ az S által a (1)– szerint származtatott Ehresmann-konnexió, úgy h és $\widetilde{h}$ kapcsolatát a

$$\widetilde{h} = h - \frac{1}{2}t^\circ$$

összefüggés adja, ahol t a h gyenge torziója, t° pedig t potenciálja.

3. fejezet *Ebben a fejezetben bevezetjük a Finsler-konnexió fogalmát, majd szisztematikusan vizsgáljuk az ún. horizontálisan liftelt Finsler-konnexiókat.*

Egy M sokaságon adott *Finsler-konnexió*n olyan (D, h) párt értünk, ahol D kovariáns deriválás a TM vagy a $\mathring{T}M$ sokaságon, h pedig Ehresmann-konnexió M-en, és teljesülnek a következő feltételek:

$$\begin{aligned} Dh &= 0 \quad &&- \text{"}D \text{ redukálható"} \\ DF &= 0 \quad &&- \text{"}D \text{ majdnem komplex"} \end{aligned}$$

(F a h-hoz tartozó majdnem komplex struktúra). Ha (D, h) Finsler-konnexió, akkor azt mondjuk, hogy a

$$h^*(DC) : X \in \mathfrak{X}(TM) \mapsto DC(hX) = D_{hX}C$$

leképezés a Finsler-konnexió h-*deflexió*ja.

A D^i_J operátor. Tekintsük a

$$D^i_J : \mathfrak{X}^{\mathrm{v}}(TM) \to \Psi^1(TM), \quad JY \mapsto D^i_J JY := [J, JY].$$

leképezést. Felhasználva, hogy a vertikális endomorfizmus Nijenhuis-torziója eltűnik, azaz $\frac{1}{2}[J, J] = 0$, egyszerűen adódik, hogy tetszőleges $X \in \mathfrak{X}(TM)$. vektormező esetén

$$D^i_{JX} JY := \left(D^i_J JY\right)(X) = J[JX, Y].$$

Legyen h Ehresmann-konnexió az M sokaságon. Mivel $v = J \circ F$, tekinthetjük a

$$D^i_{vX} JY = D^i_{JFX} JY = J[vX, Y]$$

vektormezőt. A h Ehresmann-konnexió segítségével definiálhatjuk a D^i_J operátor prolongációját a horizontális résznyalábra oly módon, hogy tetszőleges $Y \in \mathfrak{X}(TM)$ vektormező esetén

$$D^i_J hY = D^i_J FJY := FD^i_J JY.$$

Ekkor

$$D^i_{JX} hY := \left(D^i_J hY\right)(X) = FD^i_{JX} JY = h[JX, Y].$$

A továbbiakban egy Ehresmann-konnexió jelenlétében D^i_J a prolongált operátort fogja jelenteni. Legyen (D, h) Finsler-konnexió az M sokaságon, és tekintsük a D^i_J prolongált operátort. Ha

$$\widetilde{D} : (X, Y) \in \mathfrak{X}(\mathring{T}M) \times \mathfrak{X}(\mathring{T}M) \mapsto \widetilde{D}_X Y := D_{hX} Y + D^i_{vX} Y,$$

akkor $(\widetilde{D}, h)$ szintén Finsler-konnexió, amelyet a (D, h) Finsler-konnexióhoz csatoltnak nevezünk. A 3.6 lemmában megmutatjuk, hogy $(\widetilde{D}, h)$ vegyes görbületi tenzorára érvényes a következő összefüggés:

$$\widetilde{\mathbb{P}}(X^c, Y^c)Z^c = -[J, D_{X^h} Z^{\mathrm{v}}]Y^c; \qquad X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M).$$

Egy (D, h) Finsler konnexiót *horizontálisan lifteltnek* nevezünk, ha létezik olyan ∇ kovariáns derivált az M sokaságon, amelyre teljesül, hogy tetszőleges $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ vektormezők esetén

$$D_{X^h} Y^{\mathrm{v}} = (\nabla_X Y)^{\mathrm{v}}.$$

Ekkor ∇-t a (D, h) Finsler-konnexióhoz tartozó *bázikus derivált*nak mondjuk.

3.9 Lemma. Egy (D, h) Finsler-konnexió akkor és csak akkor horizontálisan liftelt, ha a $(\widetilde{D}, h)$ csatolt Finsler-konnexió vegyes görbületi tenzora eltűnik.

Megvizsgáltuk, hogy mi a kapcsolat egy horizontálisan liftelt Finsler-konnexió Ehresmann-konnexiója és a bázikus derivált által származtatott Ehresmann-konnexió között.

3.11 Lemma. Tegyük fel, hogy (D, h) horizontálisan liftelt Finsler-konnexió ∇ bázikus deriválttal, és legyen h_∇ a ∇ által származtatott lineáris konnexió. Ekkor

$$D_{X^h} C = X^h - X^{h_\nabla} \qquad (X \in \mathfrak{X}(M)),$$

következésképpen h_∇ akkor és csak akkor egyezik meg a h Ehresmann-konnexióval, ha a (D, h) Finsler-konnexió h-deflexiója eltűnik.

3.14 Állítás. Legyen (D, h) horizontálisan liftelt Finsler-konnexió és tegyük fel, hogy h lineáris konnexió. Ebben az esetben (D, h) h-deflexiója akkor és csak akkor tűnik el, ha D $(v)hv$ torziója eltűnik.

3.15 Állítás. Legyen (D, h) horizontálisan liftelt Finsler-konnexió és ∇ a hozzá tartozó bázikus derivált. Tegyük fel, hogy h az egész érintőtéren sima Ehresmann-konnexió. Ebben az esetben (D, h) h-deflexiója akkor és csak akkor esik egybe h tenziójával, ha D $(v)hv$ torziója eltűnik.

4. fejezet *Ezt a fejezetet a Finsler-sokaságok definíciójával indítjuk, majd bevezetjük a Riemann-Finsler metrikát, valamint az első és második Cartan tenzort. Értelmezzük a kanonikus sprayt, amely a kanonikus Ehresmann konnexiót, az ún. Berwald-konnexiót származtatja.*

Legyen adva egy $E\colon TM \to \mathbb{R}$ függvény, amelyet a továbbiakban *energiafüggvénynek* mondunk. Az (M, E) párt (vagy egyszerűen M-et) *Finsler-sokaság*nak nevezzük, ha teljesülnek a következők:

(F1) bármely $a \in \mathring{T}M$ esetén $E(a) > 0$; $\quad E(0) = 0$;

(F2) E C^1 osztályú TM-en, sima $\mathring{T}M$-en;

(F3) $CE = 2E$, azaz E másodfokú pozitív homogén;

(F4) az $\omega := dd_J E$ *fundamentális forma* nemelfajuló.

Tény. Minden Finsler-sokaságon létezik pontosan egy olyan $S_0\colon TM \to TTM$ spray, amelyet $\mathring{T}M$-en egyértelműen meghatároz az

$$i_{S_0}\omega = -dE$$

formula, s amely kiterjeszthető C^1 osztályú $S_0\colon TM \to TTM$ leképezéssé úgy, hogy $S_0(0) = 0$ teljesüljön. Ezt a sprayt a Finsler-sokaság *kanonikus spray*-jének nevezzük.

Egy (M, E) Finsler-sokaságon adott h Ehresmann-konnexiót *konzervatív*nak mondunk, ha $d_h E = 0$.

4.8 Állítás. Legyen (M, E) Finsler-sokaság, h konzervatív Ehresmann-konnexió, S pedig a hozzá csatolt semispray. Ekkor S előállítható az

$$S = S_0 + (d_{t^\circ} E)^{\#}$$

formula alapján, ahol S_0 a Finsler-sokaság kanonikus sprayje és t° a h Ehresmann-konnexió gyenge torziójának a potenciálja.

4.9 Tétel. Legyenek h és $\widetilde{h}$ konzervatív Ehresmann-konnexiók az (M, E) Finsler-sokaságon. Amennyiben h és $\widetilde{h}$ erős torziója megegyezik, úgy $h = \widetilde{h}$.

Tény (*a Finsler-geometria alaplemmája*). Ha (M, E) Finsler sokaság, akkor létezik egy és csak egy olyan h_0 Ehresmann-konnexió, amely rendelkezik a következő tulajdonságokkal:

h_0 *konzervatív, azaz,* $d_{h_0}E = 0$;
h_0 *homogén*;
h_0 *gyenge torziója eltűnik.*

Ezt az alapvető eredményt ebben a formában J. Grifone [7] fogalmazta meg. A szóbanforgó Ehresmann-konnexiót a Finsler-sokaság *kanonikus konnexió*jának vagy *Berwald-konnexió*jának nevezzük. Explicite:

$$h_0 = \frac{1}{2}\left(1_{\mathfrak{X}(TM)} + [J, S_0]\right),$$

ahol S_0 a kanonikus spray.

4.11 Állítás. Tegyük fel, hogy h homogén, konzervatív Ehresmann-konnexió egy (M, E) Finsler-sokaságon. Ekkor a h_0 kanonikus konnexió segítségével h előállítható a

$$h = h_0 + \frac{1}{2}t^\circ + \frac{1}{2}\left[J, (d_{t^\circ}E)^\#\right]$$

alakban.

5. fejezet *Megmutatjuk, hogy minden általánosított Berwald-sokaságon létezik, egy a vizsgálatuk szempontjából "legjobb" Finsler-konnexió. A Finsler-konnexiók ezen osztályát neveztük az Ichijyō-konnexiók osztályának. Ichijyō ezeket a konnexiókat direkt, koordinátás eljárással értelmezte. Sikerült megtalálnunk a konnexió-osztályt leíró axiómákat, amelyekből a megfelelő kovariáns deriválás szabályai egyszerűen levezethetők.*

5.2 Tétel. Tegyük fel, hogy (M, E) Finsler-sokaság, ∇ pedig kovariáns deriválás az M sokaságon. Legyen h_∇ a ∇-ból származó

Ehresmann-konnexió, és g jelentse a vertikális metrika prolongációját $h_\triangledown$ mentén. Létezik egy és csak egy olyan $\left(\overset{\triangledown}{D}, h_\triangledown\right)$ Finsler-konnexió M-en, amely eleget tesz a következő feltételeknek:

(I1) $\overset{\triangledown}{D}$ v-metrikus, azaz, $\overset{\triangledown}{D}_v g = 0$;

(I2) $\overset{\triangledown}{D}$ v-vertikális torziója eltűnik;

(I3) a $\left(\widetilde{D^\triangledown}, h_\triangledown\right)$ csatolt Finsler-konnexió vegyes görbületi tenzora eltűnik;

(I4) $\left(\overset{\triangledown}{D}, h_\triangledown\right)$ h-deflexiója eltűnik.

A $\overset{\triangledown}{D}$ szerinti kovariáns deriváltak a következő képletek szerint számíthatók ki:

$$\overset{\triangledown}{D}_{JX} JY = J[JX, Y] + \mathcal{C}(X, Y);$$
$$\overset{\triangledown}{D}_{h_\triangledown X} JY = v_\triangledown [h_\triangledown X, JY];$$
$$\overset{\triangledown}{D}_{JX} h_\triangledown Y = h_\triangledown [JX, Y] + F_\triangledown \mathcal{C}(X, Y);$$
$$\overset{\triangledown}{D}_{h_\triangledown X} h_\triangledown Y = h_\triangledown F_\triangledown [h_\triangledown X, JY]$$

$(X, Y \in \mathfrak{X}(\mathring{T}M))$.

5.4 Állítás. Legyen (M, E) Finsler-sokaság, ∇ kovariáns derivált M-en, és tekintsük a ∇ által indukált $\left(\overset{\triangledown}{D}, h_\triangledown\right)$ Ichijyō-konnexiót. Ekkor

$$\left(\overset{\triangledown}{D}_{JX} \mathcal{C}\right)(Y, Z) = \left(\overset{\triangledown}{D}_{JY} \mathcal{C}\right)(X, Z),$$

ahol X, Y, Z tetszőleges vektormezők $\mathring{T}M$-en.

Az Ichijyō-konnexió parciális görbületei

horizontális	$\overset{\nabla}{\mathbb{R}}(X,Y)Z = [J,\Omega_\nabla(X,Y)]h_\nabla Z + \mathcal{C}\big(F\Omega_\nabla(X,Y),Z\big)$
vegyes	$\overset{\nabla}{\mathbb{P}}(X,Y)Z = \Big(\overset{\nabla}{D}_{h_\nabla X}\mathcal{C}\Big)(h_\nabla Y, h_\nabla Z)$
vertikális	$\overset{\nabla}{\mathbb{Q}}(X,Y)Z = \mathcal{C}(F\mathcal{C}(X,Z),Y) - \mathcal{C}\big(X,F\mathcal{C}(Y,Z)\big)$

Az Ichijyō-konnexió parciális torziói

h − horizontális	$\overset{\nabla}{\mathbb{A}}(X^{h_\nabla},Y^{h_\nabla}) = (\mathbb{T}_\nabla(X,Y))^{h_\nabla}$
h − vegyes	$\overset{\nabla}{\mathbb{B}}(X^{h_\nabla},Y^{\mathrm{v}}) = -F_\nabla\mathcal{C}(X^{h_\nabla},Y^{h_\nabla})$
v − horizontális	$\overset{\nabla}{\mathbb{R}}{}^1(X^{h_\nabla},Y^{h_\nabla}) = \Omega_\nabla(X^{h_\nabla},Y^{h_\nabla})$
v − vegyes	$\overset{\nabla}{\mathbb{P}}{}^1 = 0$
v − vertikális	$\overset{\nabla}{\mathbb{S}}{}^1 = 0$

5.7, 5.8 és 5.9 Következmények.

Egy Ichijyō-konnexió horizontális görbülete akkor és csak akkor tűnik el, ha a ∇ bázikus derivált görbülete, vagy – ami ezzel ekvivalens – a h_∇ Ehresmann-konnexió görbületi tenzora eltűnik.

Egy Ichijyō-konnexió vegyes görbülete akkor és csak akkor tűnik el, ha az első Cartan tenzor $\overset{\nabla}{D}$ szerinti h-kovariáns deriváltja eltűnik.

Egy Ichijyō-konnexió h-horizontális torziójának eltűnése ekvivalens ∇ torziótenzorának (vagy h_∇ gyenge torziójának) eltűnésével.

6. fejezet *Ebben a fejezetben megadjuk az általánosított Berwald-sokaságok definícióját, majd az Ichijyō-konnexió segítségével jellemezük az álatlánosított Berwald- és a Berwald-sokaságokat, valamint a lokálisan Minkowski sokaságokat.*

Legyen (M, E) Finsler-sokaság és ∇ kovariáns derivált M-en. Azt mondjuk, hogy az (M, E, ∇) hármas *általánosított Berwald-sokaság*, ha a h_∇ Ehresmann-konnexió konzervatív, azaz $d_{h_\nabla} E = 0$. Egy (M, E, ∇) általánosított Berwald-sokaságot *Berwald-sokaság*nak nevezünk, ha ∇ szimmetrikus kovarináns derivált. Amennyiben ráadásul, ∇ görbületi tenzora is zérus, úgy *lokálisan Minkowski sokaság*ról beszélünk.

Megjegyzés. Egyszerűen belátható, hogy ha (M, E, ∇) Berwald-sokaság, akkor a ∇-ból származó h_∇ Ehresmann-konnexió éppen a sokaság Berwald-konnexiója, ennélfogva a ∇ kovariáns derivált egyértelmű. Ekkor ezt a Berwald-sokaság kovariáns deriváltjának nevezzük, és (M, E, ∇) helyett egyszerűen csak (M, E)-t írunk.

6.3 Következmény. Ha (M, E, ∇) általánosított Berwald-sokaság, akkor

$$S_\nabla = S_0 + \left(d_{\overset{\circ}{t}_\nabla} E\right)^\#, \qquad h_\nabla = h_0 + \frac{1}{2}\overset{\circ}{t}_\nabla + \frac{1}{2}\left[J, \left(d_{\overset{\circ}{t}_\nabla} E\right)^\#\right].$$

Mint azt látni fogjuk, az így nyert nyert elegáns relációk a disszertációbeli alkalmazások szempontjából is igen hasznosak.

Az egyik első kérdés, amely egy (M, E, ∇) általáanosított Berwald-sokasággal kapcsolatban fölvetődik az, hogy *milyen mértékben meghatározott a ∇ kovariáns derivált*? A válasz erre a

6.4 Tétel. Legyenek (M, E, ∇) és $(M, E, \overline{\nabla})$ általánosított Berwald-sokaságok. A ∇ és $\overline{\nabla}$ kovariáns deriváltak akkor és csak akkor egyeznek meg, ha a torziójuk egyenlő.

6.5 Állítás. Legyen (M, E) Finsler-sokaság és tegyük fel, hogy ∇ kovariáns derivált M-en. A következő állítások ekvivalensek:

(a) (M, E, ∇) általánosított Berwald-sokaság;

(b) a h_∇-hoz tartozó $\mathcal{C}'_\nabla$ második Cartan tenzor eltűnik;

(c) a $\left(\overset{\nabla}{D}, h_\nabla\right)$ Ichijyō konnexió h_∇-metrikus, azaz $\overset{\nabla}{D}_{h_\nabla} g = 0$.

6.6 Állítás. Ha (M, E, ∇) általánosított Berwald-sokaság, akkor a $\left(\overset{\nabla}{D}, h_\nabla\right)$ Ichijyō-konnexió vegyes görbületi tenzora eltűnik.

6.9 Tétel. Egy Finsler-sokaság akkor és csak akkor Berwald-sokaság, ha a klasszikus Hashiguchi-konnexió Ichijyō-konnexió.

6.10 Állítás. Egy (M, E, ∇) általánosított Berwald-sokaság akkor és csak akkor Berwald-sokaság, ha $(d_{t^\circ_\nabla} E)^\#$ kvadratikus vektormező.

Azt mondjuk, hogy az M sokaságon adott S_1 és S_2 spray *projektíven ekvivalens*, ha létezik olyan $\mathring{T}M$ fölött sima $\lambda\colon TM \to \mathbb{R}$ függvény amely C^1 osztályú TM-en, és eleget tesz az $S_1 = S_2 + \lambda C$ feltételnek.

6.12 Állítás. Legyen (M, E, ∇) általánosított Berwald-sokaság. Ha a ∇-hoz tartozó S_∇ spray projektíven ekvivalens az S_0 kanonikus spray-vel, akkor $S_\nabla = S_0$, következésképpen (M, E) Berwald-sokaság.

6.13 Tétel. Az (M, E) Finsler-sokaság akkor és csak akkor lokálisan Minkowski-sokaság, ha létezik olyan torziómentes, eltűnő görbületű ∇ kovariáns derivált M-en, hogy a $\left(\overset{\nabla}{D}, h_\nabla\right)$ Ichijyō-konnexió „h_∇-metrikus", azaz $\overset{\nabla}{D}_{h_\nabla} g = 0$.

7. fejezet *Ebben a fejezetben, a korábbi eredmények felhasználásával, a Wagner-sokaságok néhány érdekes karakterizáló tulajdonságát vezetjük le. Az itt kapott eredmények a Finsler-struktúrák konform megváltoztatásának elméletében nyernek fontos alkalmazást.*

Legyen ∇ kovariáns derivált az M sokaságon. A $(\overset{\nabla}{D}, h_\nabla, \alpha)$ hármast (a ∇ által indukált) *Wagner-Ichijyō-konnexió*nak nevezzük, ha $(\overset{\nabla}{D}, h_\nabla)$ Ichijyō-konnexió, α sima függvény M-en és a $\overset{\nabla}{D}$ kovariáns deriválás $\overset{\nabla}{\mathbb{A}}$ h-horizontális torziója eleget tesz az

$$\overset{\nabla}{\mathbb{A}} = d\alpha^{\mathrm{v}} \wedge h_\nabla := d\alpha^{\mathrm{v}} \otimes h_\nabla - h_\nabla \otimes d\alpha^{\mathrm{v}}$$

összefüggésnek.

7.2 Állítás. Legyen $(\overset{\nabla}{D}, h_\nabla, \alpha)$ Wagner-Ichijyō-konnexió az M sokaságon. Ekkor

$$t_\nabla = d\alpha^{\mathrm{v}} \wedge J := d\alpha^{\mathrm{v}} \otimes J - J \otimes d\alpha^{\mathrm{v}}, \quad \overset{\circ}{t}_\nabla = \alpha^c J - d\alpha^{\mathrm{v}} \otimes C,$$
$$\mathbb{T}_\nabla(X,Y) = d\alpha(X)Y - d\alpha(Y)X.$$

Az (M, E, ∇, α) négyest *Wagner-sokaság*nak nevezzük, ha (M, E, ∇) általánosított Berwald-sokaság, α sima függvény M-en, és teljesül a

$$\mathbb{T}_\nabla(X,Y) = d\alpha(X)Y - d\alpha(Y)X \qquad (X, Y \in \mathfrak{X}(M))$$

reláció.

Megjegyzés. Az eddigiek alapján közvetlenül adódik, hogy ha (M, E, ∇, α) Wagner-sokaság, akkor a ∇ által indukált Ichijyō-konnexió Wagner-Ichijyō-konnexió.

7.5 Tétel Legyen (M, E) Finsler-sokaság. Tegyük fel, hogy ∇ kovariáns derivált, α pedig egy sima függvény M-en. A következő állítások ekvivalensek:

(i) (M, E, ∇, α) Wagner-sokaság.

(ii) A ∇ által indukált $(\overset{\nabla}{D}, h_\nabla, \alpha)$ Wagner-Ichijyō-konnexió h_∇-metrikus, azaz $\overset{\nabla}{D}_{h_\nabla} g = 0$.

(iii) A h_∇ Ehresmann-konnexió a

$$h_\nabla = h_0 + \alpha^c J - E[J, \operatorname{grad} \alpha^{\mathrm{v}}] - d_J E \otimes \operatorname{grad} \alpha^{\mathrm{v}}$$

alakban állítható elő.

7.6 Következmény. Ha (M, E, ∇, α) Wagner-sokaság, akkor a h_∇-hoz csatolt S_∇ spray és az S_0 kanonikus spray kapcsolatát a

$$S_\nabla = S_0 + \alpha^c C - 2E \operatorname{grad} \alpha^{\mathrm{v}}.$$

reláció adja.

8. fejezet *Ebben a fejezetben az ún. 1-forma metrikájú, paralelizálható Finsler-sokaságokat vizsgáljuk, egyszerű új bizonyítást adva arra, hogy minden 1-forma metrikájú paralelizálható Finsler-sokaság általánosított Berwald-sokaság.*

Tegyük fel, hogy M *paralelizálható* sokaság, és legyen $(X_i)_{i=1}^n$ $(X_i \in \mathfrak{X}(M),\ i \in \{1, ..., n\})$ *paralelizációja* M-nek. Tekintsük az $(X_i)_{i=1}^n$ paralelizációhoz duális 1-formák $(\lambda^i)_{i=1}^n$ sorozatát. Vezessük be a

$$\widetilde{\lambda} := (\widetilde{\lambda^1}, \dots \widetilde{\lambda^n}) : TM \to \mathbb{R}^n, \quad v \mapsto \widetilde{\lambda}(v) = \big(\widetilde{\lambda}^1(v), \dots \widetilde{\lambda}^n(v)\big)$$

leképezést, ahol

$$\widetilde{\lambda}^i : TM \to \mathbb{R}, \quad v \mapsto \widetilde{\lambda}^i(v) := \lambda^i_{\pi(v)}(v) \qquad (1 \leq i \leq n).$$

Tegyük fel, hogy $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ Finsler-Minkowski norma, és legyen

$$\mathcal{L} := f \circ \widetilde{\lambda}, \qquad E := \frac{1}{2}\mathcal{L}^2.$$

Ekkor $\mathcal{L}$ Finsler-alapfüggvény, (M, E) pedig Finsler-sokaság. Az így definiált $\mathcal{L}$ alapfüggvényt *1-forma Finsler-függvény*nek, az (M, E) Finsler-sokaságot *1-forma Finsler-sokaság*nak nevezzük.

8.4 Állítás. Legyen (M, E) 1-forma metrikájú paralelizálható Finsler-sokaság. Tekintsük az $(X_i)_{i=1}^n$ paralelizáció által meghatározott ∇ kovariáns deriváltat, legyen továbbá h_∇ a ∇-ból származó Ehresmann-konnexió. Ekkor (M, E, ∇) általánosított Berwald-sokaság. Ha ráadásul ∇ torziótenzora eltűnik, akkor (M, E) lokálisan Minkowski-sokaság.

9. fejezet *Ebben a záró fejezetben definiáljuk a konform ekvivalens Ichijyō-struktúrákat. Részletesen leírjuk a konform ekvivalens Ichijyō-struktúrák alapvető geometriai adatainak kapcsolatát, majd a fejezet végén mindezeket az eredményeket alkalmazzuk az általánosított Berwald-sokaságokra.*

Az (M, E) és $(M, \overline{E})$ Finsler sokaságokat *konform ekvivalens*eknek nevezzük, ha létezik olyan $\varphi \colon TM \to \mathbb{R}$ pozitív, sima függvény, hogy az energiafüggvényeikre fennáll az $\overline{E} = \varphi E$ összefüggés. Jól ismert tény, hogy φ vertikális lift, így mindig felírható $\exp \circ \sigma^{\mathrm{v}}$, $\sigma \in C^\infty(M)$ alakban.

Az (M, E, ∇) hármast *Ichijyō-struktúrá*nak hívjuk, ha (M, E) Finsler-sokaság, amely el van látva a (D, h_∇) Ichijyō-konnexióval.

9.4 Azt mondjuk, hogy az (M, E, ∇) és $(M, \overline{E}, \overline{\nabla})$ Ichijyō-struktúrák *konform ekvivalens*ek, ha teljesülnek a következő feltételek:

(i) (M, E) és $(M, \overline{E})$ konform ekvivalens Finsler-sokaságok, azaz $\overline{E} = (\exp \circ \sigma^{\mathrm{v}})E$, $\sigma \in \mathcal{C}^\infty(M)$,

(ii) $\overline{\nabla} = \nabla + \frac{1}{2} d\sigma \otimes \mathrm{id}$.

9.5 Állítás. Megtartva **9.4** feltételeit és jelöléseit, érvényesek a következő összefüggések:

$$\begin{aligned}
&h_{\overline{\nabla}} = h_\nabla - \frac{1}{2} d\sigma^{\mathrm{v}} \otimes C, && S_{\overline{\nabla}} = S_\nabla - \frac{1}{2} \sigma^c C; \\
&\overline{D}_{JX} JY = D_{JX} JY, && \overline{D}_{h_{\overline{\nabla}} X} JY = D_{h_\nabla X} JY - \frac{1}{2} d\sigma^{\mathrm{v}}(X)[C, JY]; \\
&\Omega_{\overline{\nabla}} = \Omega_\nabla, && t_{\overline{\nabla}} = t_\nabla + \frac{1}{2}(d\sigma^c \circ J) \wedge J; \\
&H_{\overline{\nabla}} = H_\nabla = 0, && \overset{\circ}{t}_{\overline{\nabla}} = \overset{\circ}{t}_\nabla + \frac{1}{2}\left(\sigma^c J - (d\sigma^c \circ J) \otimes C\right).
\end{aligned}$$

9.6 Következmény. Tegyük fel, hogy (M, E, ∇) és $(M, \overline{E}, \overline{\nabla})$ konform ekvivalens Ichijyō-struktúrák; legyen $\overline{E} = (\exp \circ \sigma^{\mathrm{v}})E$, $\sigma \in C^\infty(M)$. Ekkor a következő állítások ekvivalensek:

(i) σ konstans függvény, és így a konform változtatás hasonlóság.

(ii) $h_\nabla = h_{\overline{\nabla}}$. **(iii)** $S_\nabla = S_{\overline{\nabla}}$. **(iv)** $t_\nabla = t_{\overline{\nabla}}$.

9.7 Tétel. Konform ekvivalens Ichijyō-struktúrák Ichijyō-konnexióinak parciális görbületei megegyeznek.

Alkalmazások általánosított Berwald-sokaságokra

9.8 Állítás. Tegyük fel, hogy (M, E, ∇) és $(M, \overline{E}, \overline{\nabla})$ konform ekvivalens Ichijyō-struktúrák. Ha (M, E, ∇) általánosított Berwald-sokaság, akkor $(M, \overline{E}, \overline{\nabla})$ szintén általánosított Berwald-sokaság.

9.9 Következmény. Legyenek (M, E, ∇) és $(M, \overline{E}, \overline{\nabla})$ konform ekvivalens Ichijyō-struktúrák, ahol $\overline{E} = (\exp \circ \sigma^{\mathrm{v}})E$, $(\sigma \in C^{\infty}(M))$. Ha (M, E, ∇, α) Wagner-sokaság, akkor $(M, \overline{E}, \overline{\nabla}, \overline{\alpha})$, $\overline{\alpha} = \alpha + \frac{1}{2}\sigma$ szintén Wagner-sokaság.

9.10 Következmény (M. Hashiguchi – Y. Ichijyō). Annak szükséges és elegendő feltétele, hogy egy Finsler-sokaság konform ekvivalens legyen egy Berwald-sokasággal az, hogy a Finsler-sokaság Wagner-sokaság legyen.

1 History, motivations and aims

The notion of generalized Berwald manifolds was introduced by V. V. WAGNER in 1943 [36]. A modern approach to these manifolds within the framework of Matsumoto's theory of Finsler connections, via the so-called generalized Cartan connections, was elaborated by M. HASHIGUCHI [11]. Inspired by Z. I. SZABÓ's paper [23], in our Thesis we follow another, geometrically much more natural and technically easier manageable approach. Namely, we mean by a generalized Berwald manifold a triplet (M, E, ∇), where (M, E) is a Finsler manifold, ∇ is a linear connection on M, and the Ehresmann connection h_∇ generated by ∇ is conservative, i.e., $d_{h_\nabla} E = 0$. Thus in this concept a Finsler structure is nicely related to a linear connection.

'Through the author's several experiences the author became convinced that there should exist the *best* Finsler connection for every theory of Finsler spaces' – wrote MAKOTO MATSUMOTO in 1987 [21]. This remarkable and stimulating principle has been confirmed in our present work. We have found that for a generalized Berwald manifold a *whole class* of the 'best' Finsler connections can be attached in general. We call the members of this class *Ichijyō connections*. We found a purely intrinsic (coordinate-free) characterization of the Ichijyō connections by means of simple axioms. By using Ichijyō connections, we have obtained a simple characterization of generalized Berwald, Berwald and locally Minkowski manifolds.

Let us note that any Ichijyō connection is determined by a linear connection on the carrying manifold. Finsler connections arising from a 'base linear connection' were baptized 'linear Finsler connections' in [12]. This terminology would be ambiguous in our theoretical framework, so in [25] we tentatively introduced the term '*h-basic connection*' (h as 'horizontally') instead. Other choices for an expressive (or a more expressive) term are also possible, of course. Finsler manifolds whose structure is connected with a base linear connection were called 'point Finsler spaces' by L. TAMÁSSY. As for his instructive geometric approach, we refer to [31].

Wagner manifolds form an important class of special Finsler manifolds. We define them as generalized Berwald manifolds satisfying some extra conditions, and deduce some useful equivalents of the property characterizing Wagner manifolds. These results have essential applications in the theory of conformal changes of a Finsler structure. We note that for Wagner manifolds the 'best' Finsler connections are the so-called *Wagner-Ichijyō connections*.

Non-Berwald generalized Berwald manifolds do exist. In our Dissertation we give a detailed description of a typical family of such manifolds together with their basic data. First, we build a special Finsler structure, the so-called *one-form metric*, on a parallelizable manifold. Next, we present an elegant proof of the fact, discovered originally by Y. ICHIJYŌ, that our construction actually leads to generalized Berwald manifolds. A detailed study of one-form metrics in the language of classical tensor calculus can be found in [22]. These metrics also appear in an interesting context in [33].

Throughout the Thesis we work in the framework of Grifone's theory of connections and Finsler structures [7], [8]. As a main technical tool, we apply the calculus of vector-valued differential forms elaborated by A Frölicher and A. Nijenhuis [6] and combine it with (and simplify on occasion) a systematic use of a moving frame field consisting of vertically and completely (or vertically and horizontally) lifted vector fields.

2 Contents and new results

In the following we present a brief summary of the chapter contents, and highlight our new results contained in them.

Chapter 1 *The aim of this introductory chapter is to fix our notation, conventions, and to recall some basic concepts and facts which will be used throughout the Thesis.*

We denote once for all by M an n-dimensional smooth manifold, which is Hausdorff, connected and has a countable basis of open sets.

A map $S : TM \to TTM$ of class C^1 is said to be a *semispray* on M if it is smooth on $\mathring{T}M$ and satisfies the relations $\tau_{TM} \circ S = 1_{TM}$ and $JS = C$. A semispray is called a *spray* if the homogeneity condition $[C, S] = S$ holds A spray is called *quadratic* if it is of class C^2 over TM.

Chapter 2 *The concept of an Ehresmann connection is crucial in Finsler geometry. In this chapter we collect their basic properties in a form which is the most convenient for the subsequent considerations.*

Consider the tangent bundle $\tau_{TM} \colon TTM \to TM$, and let VTM be its vertical subbundle. By an *Ehresmann connection* over M we mean a mapping $h \colon TTM \to TM$ satisfying the following conditions:

(i) h is fibre-preserving and fibrewise linear;

(ii) h is smooth on $T\mathring{T}M$;

(iii) $h^2 = h, \quad \mathrm{Ker}(h) = VTM$;

(iv) $h \circ \sigma_* = \sigma_*$, where $\sigma \in \mathfrak{X}(TM)$ is the zero vector field and $*$ denotes its derivate.

Then h can be freely interpreted as a $C^\infty(\overset{\circ}{T}M)$-linear endomorphism of $\mathfrak{X}(\overset{\circ}{T}M)$, and we use this interpretation without any comment.

The *vertical projection* belonging to h is $v := 1_{TTM} - h$, which can also be regarded as a $C^\infty(\overset{\circ}{T}M)$-linear endomorphism of $\mathfrak{X}(\overset{\circ}{T}M)$.

In the spirit of GRIFONE's theory of connections, we attach to an Ehresmann connection h the following data:

$H := [h, C]$ – tension of h;

$t := [J, h]$ – weak torsion of h;

$T := i_S t + H$ – strong torsion of h (S is an arbitrary semispray);

$\Omega := -\frac{1}{2}[h, h]$ – curvature of h.

(Brackets mean here Frölicher- Nijenhuis brackets.) A horizontal endomorphism is said to be *homogeneous*, if its tension vanishes.

The fundamental relation between Ehresmann connections and semisprays was discovered, independently, by M. CRAMPIN and J. GRIFONE. Their main result can be summarized as follows.

(i) Let an Ehresmann connection h be given on the manifold M. If $\widetilde{S}$ is an arbitrary semispray on M, then $S := h\widetilde{S}$ is also a semispray on M which does not depend on the choice of $\widetilde{S}$ and satisfies the relation $h\,[C, S] = S$. We say that S is the *semispray associated to h.*

(ii) Any semispray $S\colon TM \to TTM$ generates in a canonical way an Ehresmann connection which be given by the formula

$$h := \frac{1}{2}\left(1_{\mathfrak{X}(TM)} + [J, S]\right). \tag{1}$$

The weak torsion of h vanishes and the semispray associated to h is $\frac{1}{2}(S + [C, S])$. If, in addition, S is a spray, then h is homogeneous and its associated semispray ist just the starting spray S.

(iii) An Ehresmann connection arises from a semispray in the above manner if and only if its weak torsion vanishes.

Any covariant derivative ∇ on the manifold M determines a homogeneous, everywhere smooth Ehresmann connection h_∇.

2.9 Lemma Suppose that h is a homogeneous Ehresmann connection on the manifold M, and let S be the semispray associated with h. If $\widetilde{h}$ is the Ehresmann connection determined by S according to (1), then h and $\widetilde{h}$ are related by

$$\widetilde{h} = h - \frac{1}{2}t^\circ,$$

where t is the weak torsion of h, and t° is its potential.

Chapter 3 *In this chapter we introduce the concept of a Finsler connection and investigate the so called h-basic Finsler connections.*

A pair (D, h) is said to be *Finsler connection* on the manifold M, if D is a covariant derivative on the tangent manifold TM (or on the slit manifold $\mathring{T}M$), h is an Ehresmann connection on M, and the following conditions are satisfied:

$$\begin{aligned} Dh &= 0 \quad - \text{'}D\text{ is reducible'}, \\ DF &= 0 \quad - \text{'}D\text{ is almost complex'}, \end{aligned}$$

where $F := h[S, h] - J$ (S is the semispray associated to h). The *h-deflection* of (D, h) is the mapping.

$$h^*(DC) : X \in \mathfrak{X}(TM) \mapsto DC(hX) = D_{hX}C.$$

The operator D^i_J the canonical mapping

$$D^i_J : \mathfrak{X}^{\mathrm{v}}(TM) \to \Psi^1(TM), \quad JY \mapsto D^i_J JY := [J, JY].$$

Using the property $[J, J] = 0$, it can be easily seen that for any vector field X on TM we have

$$D^i_{JX} JY := \left(D^i_J JY\right)(X) = J[JX, Y].$$

Now we suppose that an Ehresmann connection h is also given on M. Since $v = J \circ F$, we can also consider the vector field

$$D^i_{vX} JY = D^i_{JFX} JY = J[vX, Y].$$

In the next step, we prolong the operator D^i_J to $\mathfrak{X}^h(TM)$ such that for any vector field Y on TM,

$$D^i_J hY = D^i_J FJY := FD^i_J JY.$$

Then

$$D^i_{JX} hY := \left(D^i_J hY\right)(X) = FD^i_{JX} JY = h[JX, Y].$$

In the presence of an Ehresmann connection, D^i_J will always denote this extended operator. Let us finally note that if (D, h) is a Finsler connection on the manifold M, and

$$\widetilde{D} : (X, Y) \in \mathfrak{X}(\mathring{T}M) \times \mathfrak{X}(\mathring{T}M) \mapsto \widetilde{D}_X Y := D_{hX} Y + D^i_{vX} Y,$$

then $(\widetilde{D}, h)$ is also a Finsler connection, called the *associated Finsler connection* to (D, h). For the mixed curvature $\widetilde{\mathbb{P}}$ of $(\widetilde{D}, h)$ we have the expression

$$\widetilde{\mathbb{P}}(X^c, Y^c)Z^c = -[J, D_{X^h} Z^{\mathrm{v}}]Y^c \qquad (X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)).$$

A Finsler connection (D, h) is said to be an *h-basic Finsler connection* if there exists a covariant derivative ∇ on the manifold M such that for any vector fields X, Y on M, we have

$$D_{X^h} Y^{\mathrm{v}} = (\nabla_X Y)^{\mathrm{v}} .$$

Then ∇ is called the *base covariant derivative* belonging to (D, h).

3.9 Lemma. A Finsler connection (D, h) is h-basic if and only if the mixed curvature of the associated Finsler connection $(\widetilde{D}, h)$ vanishes.

3.11 Lemma Suppose that (D, h) is an h-basic Finsler connection with the base connection ∇, and let h_∇ be the Ehresmann connection induced by ∇. Then

$$D_{X^h} C = X^h - X^{h_\nabla} \qquad (X \in \mathfrak{X}(M)),$$

therefore h_∇ coincides with h if and only if the h-deflection of (D, h) vanishes.

3.14 Proposition Let (D, h) be an h-basic Finsler connection and suppose that the Ehresmann connection h is homogeneous. Then the h-deflection of (D, h) vanishes if and only if the v-mixed torsion of D vanishes.

3.15 Proposition Let (D, h) be an h-basic Finsler connection with the base covariant derivative ∇. Suppose that the Ehresmann connection h is smooth on the whole tangent manifold. Then the h-deflection of (D, h) coincides with the tension of h if and only if the v-mixed torsion of D vanishes.

Chapter 4 *We start this chapter with the definition of Finsler manifolds and then we introduce the Riemann-Finsler metric* *and the first and second Cartan tensor. We derive the canonical spray from which a canonical Ehresmann connection, the so-called Berwald-connection can be derived.*

Let a function $E : TM \to \mathbb{R}$ be given. The pair (M, E) is said to be a *Finsler manifold* with *energy function* E if the following conditions are satisfied:

(F1) For each $a \in \mathring{T}M$, $E(a) > 0$; $\quad E(0) = 0$;

(F2) E is of class C^1 on TM and smooth on $\mathring{T}M$;

(F3) $CE = 2E$, i.e., E is homogeneous of degree 2;

(F4) the *fundamental form* $\omega := dd_J E$ is non-degenerate.

On any Finsler manifold (M, E) there is a spray $S_0 \colon TM \to TTM$, uniquely determined on $\mathring{T}M$ by the relation

$$i_{S_0}\omega = -dE$$

and prolonged to a C^1-mapping of TM such that $S_0(0) = 0$. This spray is called the *canonical spray* of the Finsler manifold.

An Ehresmann connection on (M, E) is said to be conservative, if $d_h E = 0$.

4.8 Proposition. Suppose that h is a conservative Ehresmann connection on the Finsler manifold (M, E) with the associated semispray S. Then S can be represented in the form

$$S = S_0 + (d_{t^\circ} E)^{\#} ,$$

where S_0 is the canonical spray of (M, E) and t° is the potential of the weak torsion of h.

4.9 Theorem. Suppose h and $\widetilde{h}$ are conservative Ehresmann connections on the Finsler manifold (M, E). If h and $\widetilde{h}$ have the same strong torsion, then $h = \widetilde{h}$.

The Berwald connection. If (M, E) is a Finsler manifold then there exists a unique Ehresmann connection h_0 on M such that

h_0 is conservative, i.e., $d_{h_0}E = 0$;
h_0 is homogeneous;
the weak torsion of h_0 vanishes.

This fundamental result is due to J. Grifone. The Ehresmann connection characterized by the above conditions is called the *Berwald connection* of the Finsler manifold. It can be given explicitly by the formula

$$h_0 = \frac{1}{2}\left(1_{\mathfrak{X}(TM)} + [J, S_0]\right),$$

where S_0 is the canonical spray of (M, E).

4.11 Proposition. Any homogeneous, conservative Ehresmann connection h on a Finsler manifold (M, E) can be expressed with the help of the Berwald connection h_0 as follows:

$$h = h_0 + \frac{1}{2}t^\circ + \frac{1}{2}\left[J, (d_{t^\circ}E)^\#\right].$$

Chapter 5 *In this chapter we establish the existence and uniqueness of the Ichijyō connection on a Finsler manifold endowed with a "basic" linear connection. A list of essential curvature and torsion data concerning the Ichijyō connection is also presented here.*

5.2 Theorem. Suppose that (M, E) is a Finsler manifold and ∇ is a covariant derivative on M. Let h_∇ be the Ehresmann connection induced by ∇, and consider the prolongation g of the vertical metric along h_∇. There exists a unique Finsler connection $\left(\overset{\nabla}{D}, h_\nabla\right)$ on M such that

(I1) $\overset{\nabla}{D}$ is v-metrical, i.e., $\overset{\nabla}{D}_v g = 0$;

(I2) the v-vertical torsion of $\overset{\nabla}{D}$ vanishes;

(I3) the mixed curvature of the associated Finsler connection $\left(\widetilde{D^{\nabla}}, h_{\nabla}\right)$ vanishes;

(I4) the h-deflection of $\left(\overset{\nabla}{D}, h_{\nabla}\right)$ vanishes.

The covariant derivatives with respect to $\overset{\nabla}{D}$ can be calculated by the following formulas:

$$\begin{aligned}
&\overset{\nabla}{D}_{JX} JY = J[JX, Y] + \mathcal{C}(X, Y);\\
&\overset{\nabla}{D}_{h_{\nabla} X} JY = v_{\nabla}[h_{\nabla} X, JY];\\
&\overset{\nabla}{D}_{JX} h_{\nabla} Y = h_{\nabla}[JX, Y] + F_{\nabla}\mathcal{C}(X, Y);\\
&\overset{\nabla}{D}_{h_{\nabla} X} h_{\nabla} Y = h_{\nabla} F_{\nabla}[h_{\nabla} X, JY]
\end{aligned}$$

$(X, Y \in \mathfrak{X}(\overset{\circ}{T}M))$.

5.4 Proposition. Let (M, E) be a Finsler manifold, ∇ a covariant derivative on M, and consider the Ichijyō connection $\left(\overset{\nabla}{D}, h_{\nabla}\right)$ induced by ∇. Then

$$\left(\overset{\nabla}{D}_{JX}\mathcal{C}\right)(Y, Z) = \left(\overset{\nabla}{D}_{JY}\mathcal{C}\right)(X, Z),$$

where X, Y, Z are any vector fields in $\overset{\circ}{T}M$.

For the partial curvatures and torsions of an Ichijyō connection $\left(\overset{\nabla}{D}, h_{\nabla}\right)$ we have the following expressions:

Curvature

horizontal	$\overset{\triangledown}{\mathbb{R}}(X,Y)Z = [J, \Omega_\triangledown(X,Y)]h_\triangledown Z + \mathcal{C}\big(F\Omega_\triangledown(X,Y), Z\big)$
mixed	$\overset{\triangledown}{\mathbb{P}}(X,Y)Z = \Big(\overset{\triangledown}{D}_{h_\triangledown X}\mathcal{C}\Big)(h_\triangledown Y, h_\triangledown Z)$
vertical	$\overset{\triangledown}{\mathbb{Q}}(X,Y)Z = \mathcal{C}(F\mathcal{C}(X,Z),Y) - \mathcal{C}\big(X, F\mathcal{C}(Y,Z)\big)$

Torsion

h − horizontal	$\overset{\triangledown}{\mathbb{A}}(X^{h_\triangledown}, Y^{h_\triangledown}) = (\mathbb{T}_\triangledown(X,Y))^{h_\triangledown}$
h − mixed	$\overset{\triangledown}{\mathbb{B}}(X^{h_\triangledown}, Y^{\mathrm{v}}) = -F_\triangledown\mathcal{C}(X^{h_\triangledown}, Y^{h_\triangledown})$
v − horizontal	$\overset{\triangledown}{\mathbb{R}}{}^1(X^{h_\triangledown}, Y^{h_\triangledown}) = \Omega_\triangledown(X^{h_\triangledown}, Y^{h_\triangledown})$
v − mixed	$\overset{\triangledown}{\mathbb{P}}{}^1 = 0$
v − vertical	$\overset{\triangledown}{\mathbb{S}}{}^1 = 0$

5.7 Corollary. The horizontal curvature of an Ichijyō connection vanishes if and only if the curvature of the base covariant derivative ∇, or – what is essentially the same – the curvature of $h_\triangledown$ – vanishes.

5.8 Corollary. The mixed curvature of an Ichijyō connection $\Big(\overset{\triangledown}{D}, h_\triangledown\Big)$ vanishes if and only if the h-covariant derivative of the first Cartan tensor with respect to $\overset{\triangledown}{D}$ vanishes.

5.9 Corollary. The h-horizontal torsion of an Ichijyō connection $\Big(\overset{\triangledown}{D}, h_\triangledown\Big)$ and the torsion tensor of ∇ (or the weak torsion of $h_\triangledown$) vanish at the same time.

Chapter 6 *In this chapter we give the definition of generalized Berwald manifolds and characterize the generalized Berwald, Berwald and locally Minkowski manifolds by means of Ichijyō connection.*

Suppose that (M, E) is a Finsler manifold and let ∇ be a covariant derivative on M. The triplet (M, E, ∇) is said to be a *generalized Berwald manifold* if the Ehresmann connection h_∇ is conservative, i.e., $d_{h_\nabla} E = 0$. A generalized Berwald manifold (M, E, ∇) is called a *Berwald manifold* if ∇ is a torsion-free covariant derivative. If, in addition, ∇ is flat, then we speak of a *locally Minkowski* Finsler manifold.

Remark. It can easily be seen that in the particular case of Berwald manifolds the Ehresmann connection h_∇ coincides with the Berwald connection, hence the covariant derivative ∇ is unique. Then we speak of *the* covariant derivative of the Berwald manifold and write (M, E) rather than (M, E, ∇).

6.3 Corollary. If (M, E, ∇) is a generalized Berwald manifold, then we have

$$S_\nabla = S_0 + \left(d_{t^\circ_\nabla} E\right)^\#, \qquad h_\nabla = h_0 + \frac{1}{2} t^\circ_\nabla + \frac{1}{2}\left[J, \left(d_{t^\circ_\nabla} E\right)^\#\right].$$

6.4 Theorem. Suppose that (M, E, ∇) and $(M, E, \overline{\nabla})$ are generalized Berwald manifolds. The covariant derivatives ∇ and $\overline{\nabla}$ are equal if and only if they have same torsion tensor field.

6.5 Proposition. Let (M, E) be a Finsler manifold and suppose that ∇ is a covariant derivative on M. The following conditions are equivalent:

(a) (M, E, ∇) is a generalized Berwald manifold;

(b) the second Cartan tensor $\mathcal{C}'_\nabla$ belonging to h_∇ vanishes;

(c) the Ichijyō connection is h_∇-metrical, i.e., $\overset{\nabla}{D}_{h_\nabla} g = 0$.

6.6 Proposition. If (M, E, ∇) is a generalized Berwald manifold, then the mixed curvature of the Ichijyō connection $\left(\overset{\nabla}{D}, h_\nabla\right)$ vanishes.

6.9 Theorem A Finsler manifold is a Berwald manifold if and only if its Hashiguchi connection is an Ichijyō connection.

6.10 Proposition. A generalized Berwald manifold (M, E, ∇) reduces to a Berwald manifold (M, E), if and only, if the vector field $(d_{\overset{\circ}{t}_\nabla} E)^\#$ is quadratic.

Two sprays S_1 and S_2 on a manifold M are said to be *projectively equivalent* if there exists a function $\lambda : TM \to \mathbb{R}$, smooth on $\overset{\circ}{T}M$, C^1 on TM such that $S_1 = S_2 + \lambda C$. Then λ is automatically 1-homogeneous, i.e., $C\lambda = \lambda$.

6.12 Proposition Let (M, E, ∇) be a generalized Berwald manifold. If the spray S_∇ arising from ∇ is projectively equivalent to the canonical spray S_0 of (M, E), then $S_\nabla = S_0$ and, consequently, (M, E) is a Berwald manifold.

6.13 Theorem. A Finsler manifold (M, E) is a locally Minkowski manifold if and only if there exists a torsion-free, flat covariant derivative ∇ on M such that the Ichijyō connection $\left(\overset{\nabla}{D}, h_\nabla\right)$ is 'h_∇-metrical', i.e., $\overset{\nabla}{D}_{h_\nabla} g = 0$.

Chapter 7 *In this chapter we deduce some useful equivalents of the property characterizing Wagner manifolds. These results have essential applications in the theory of conformal changes of a Finsler structure*

Let ∇ be a covariant derivative on the manifold M. A triplet $(\overset{\nabla}{D}, h_\nabla, \alpha)$ is said to be a *Wagner-Ichijyō connection* (induced by ∇) if $(\overset{\nabla}{D}, h_\nabla)$ is an Ichijyō connection, α is a smooth function on M and the h-horizontal torsion $\overset{\nabla}{\mathbb{A}}$ of $\overset{\nabla}{D}$ has the following form:

$$\overset{\nabla}{\mathbb{A}} = d\alpha^{\mathrm{v}} \wedge h_\nabla := d\alpha^{\mathrm{v}} \otimes h_\nabla - h_\nabla \otimes d\alpha^{\mathrm{v}}.$$

7.2 Proposition If $(\overset{\nabla}{D}, h_\nabla, \alpha)$ be a Wagner-Ichijyō connection on the manifold M, then we have the following relations:

$$t_\nabla = d\alpha^{\mathrm{v}} \wedge J := d\alpha^{\mathrm{v}} \otimes J - J \otimes d\alpha^{\mathrm{v}}, \qquad \overset{\circ}{t}_\nabla = \alpha^{c} J - d\alpha^{\mathrm{v}} \otimes C,$$
$$\mathbb{T}_\nabla(X, Y) = d\alpha(X)Y - d\alpha(Y)X.$$

A quadruple (M, E, ∇, α) is said to be a *Wagner manifold* if (M, E, ∇) is a generalized Berwald manifold, α is a smooth function on M, and the relation

$$\mathbb{T}_\nabla(X, Y) = d\alpha(X)Y - d\alpha(Y)X \qquad (X, Y \in \mathfrak{X}(M))$$

holds.

Remark It follows immediately that for a Wagner manifold (M, E, ∇, α) the Ichijyō connection induced by ∇ is just a Wagner-Ichijyō connection.

7.5 Theorem Let (M, E) be a Finsler manifold. Suppose that ∇ is a covariant derivative and α a smooth function on M. Then the following assertions are equivalent:

(i) (M, E, ∇, α) is a Wagner manifold.

(ii) The Wagner-Ichijyō connection $(\overset{\nabla}{D}, h_\nabla, \alpha)$ induced by ∇ is h_∇-metrical, i.e., $\overset{\nabla}{D}_{h_\nabla} g = 0$.

(iii) The Ehresmann connection h_∇ is of form

$$h_\nabla = h_0 + \alpha^c J - E[J, \operatorname{grad} \alpha^v] - d_J E \otimes \operatorname{grad} \alpha^v.$$

7.6 Corollary If (M, E, ∇, α) is a Wagner manifold then the spray S_∇ generated by h_∇ and the canonical spray S_0 are related by

$$S_\nabla = S_0 + \alpha^c C - 2E \operatorname{grad} \alpha^v.$$

Chapter 8 *This chapter deals with parallelizable Finsler manifolds with 'one-form metric'.*

Suppose that M is a *parallelizable* manifold with a *parallelization* $(X_i)_{i=1}^n$; $X_i \in \mathfrak{X}(M)$, $1 \leq i \leq n$. Let $(\lambda^i)_{i=1}^n$ be the coframe dual to $(X_i)_{i=1}^n$. Consider the mapping

$$\widetilde{\lambda} := (\widetilde{\lambda^1}, \dots \widetilde{\lambda^n}) : TM \to \mathbb{R}^n, \quad v \mapsto \widetilde{\lambda}(v) = \big(\widetilde{\lambda}^1(v), \dots \widetilde{\lambda}^n(v)\big),$$

where

$$\widetilde{\lambda}^i : TM \to \mathbb{R}, \quad v \mapsto \widetilde{\lambda}^i(v) := \lambda^i_{\pi(v)}(v) \qquad (1 \leq i \leq n).$$

Suppose that $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ is a Finsler-Minkowski functional, and define the functions

$$\mathcal{L} := f \circ \widetilde{\lambda}, \qquad E := \frac{1}{2}\mathcal{L}^2.$$

Then (M, E) is a Finsler manifold, the Finsler structure constructed in this way is said to be a *one-form Finsler structure*. Following (at least partly) the traditions, in the sequel we shall mention (M, E) as a '*Finsler manifold with one-form metric*'.

8.4 Proposition. Let (M, E) be a parallelizable Finsler manifold of one-form metric. Consider the covariant derivative ∇ determined by the parallelization $(X_i)_{i=1}^n$, and let h_∇ be the Ehresmann connection arising from ∇. Then (M, E, ∇) is a generalized Berwald manifold. If, in addition, ∇ is torsion-free, then (M, E) is a locally Minkowski manifold.

Chapter 9 *This concluding chapter is devoted to conformally equivalent Ichijyō structures. We calculate their basic geometric data, and derive some consequences on generalized Berwald manifolds.*

Two Finsler manifolds (M, E) and $(M, \overline{E})$ are said to be *conformally equivalent*, if their energy functions are related by $\overline{E} = \varphi E$, where $\varphi \in C^\infty(TM)$ is a positive function. It is well-known that in this case *φ is a vertical lift* (Knebelman's observation), so it can be written in the form $\exp \circ \sigma^{\mathrm{v}}$, $\sigma \in C^\infty(M)$.

9.4 Two Ichijyō structures (M, E, ∇) and $(M, \overline{E}, \overline{\nabla})$ are said to be *conformally equivalent* if

(i) (M, E) and $(M, \overline{E})$ are conformally equivalent Finsler manifolds, i. e., $\overline{E} = (\exp \circ \sigma^{\mathrm{v}})E$, $\sigma \in \mathcal{C}^\infty(M)$,

(ii) $\overline{\nabla} = \nabla + \frac{1}{2} d\sigma \otimes \mathrm{id}$.

9.5 Proposition. With the hypothesis of **9.4** we have the following relations:

$$h_{\overline{\nabla}} = h_\nabla - \frac{1}{2} d\sigma^{\mathrm{v}} \otimes C, \quad S_{\overline{\nabla}} = S_\nabla - \frac{1}{2} \sigma^c C;$$

$$\overline{D}_{JX} JY = D_{JX} JY, \qquad \overline{D}_{h_{\overline{\nabla}} X} JY = D_{h_\nabla X} JY - \frac{1}{2} d\sigma^{\mathrm{v}}(X)[C, JY];$$

$$\Omega_{\overline{\nabla}} = \Omega_{\nabla}, \qquad t_{\overline{\nabla}} = t_{\nabla} + \frac{1}{2}(d\sigma^c \circ J) \wedge J;$$
$$H_{\overline{\nabla}} = H_{\nabla} = 0, \qquad \overset{\circ}{t}_{\overline{\nabla}} = \overset{\circ}{t}_{\nabla} + \frac{1}{2}\left(\sigma^c J - (d\sigma^c \circ J) \otimes C\right).$$

9.6 Corollary. Suppose that (M, E, ∇) and $(M, \overline{E}, \overline{\nabla})$ are conformally equivalent Ichijyō structures. Let $\overline{E} = (\exp \circ \sigma^{\mathrm{v}})E$, $\sigma \in C^\infty(M)$. Then the following assertions are equivalent:
(i) The function σ is constant, i.e., the conformal change is homothetic.
(ii) $h_{\nabla} = h_{\overline{\nabla}}$. **(iii)** $S_{\nabla} = S_{\overline{\nabla}}$. **(iv)** $t_{\nabla} = t_{\overline{\nabla}}$.

9.7 Theorem. Conformally equivalent Ichijyō structures have the same partial curvatures.

Applications to generalized Berwald manifolds

9.8 Proposition Suppose that (M, E, ∇) and $(M, \overline{E}, \overline{\nabla})$ are conformally equivalent Ichijyō structures. If (M, E, ∇) is a generalized Berwald manifold, then $(M, \overline{E}, \overline{\nabla})$ is also a generalized Berwald manifold.

9.9 Corollary. Let (M, E, ∇) and $(M, \overline{E}, \overline{\nabla})$ be conformally equivalent Ichijyō structures, where $\overline{E} = (\exp \circ \sigma^{\mathrm{v}})E$, $\sigma \in C^\infty(M)$. If (M, E, ∇, α) is a Wagner manifold, then $(M, \overline{E}, \overline{\nabla}, \overline{\alpha})$ is also a Wagner manifold with $\overline{\alpha} = \alpha + \frac{1}{2}\sigma$.

9.10 Corollary (Theorem of M. Hashiguchi and Y. Ichijyō).
In order to a Finsler manifold is conformally equivalent to a Berwald manifold, it is necessary and sufficient that the Finsler manifold is a Wagner manifold.

3 Tudományos munkásság

Referált kiadványokban megjelent dolgozatok

(1) Sz. Szakál and J. Szilasi, *A new approach to generalized Berwald manifolds I*, SUT Journal of Mathematics **37** (2001), No. 1, 19–41.

(2) Sz. Szakál and J. Szilasi, *A new approach to generalized Berwald manifolds II*, Publ. Math. Debrecen **60** (2002), 429–453.

(3) Sz. Szakál, *On the conformal theory of Ichijyō manifolds*, Supplemento ai Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo Serie II, Suppl.**69** (2002), 245–254

Egyéb dolgozatok

(1) Szakál Szilvia: A Rund-konnexió egy általánosítása és néhány alkalmazása - OTDK dolgozat, Debrecen, 1999

Előadások

(1) A Rund-konnexió egy általánosítása és néhány alkalmazása - OTDK, 1999.

(2) A new look at generalized Berwald manifolds - Colloquium on Differential Geometry, Debrecen, 2000.

(3) A new approach to generalized Berwald manifolds - Matematikus Doktoranduszok Találkozója, Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem, 2000.

(4) On the conformal theory of Ichijyō manifolds - The 21th Winter School Geometry and Physics, Srní, 2001.

A dolgozat teljes irodalomjegyzéke

[1] P. L. Antonelli, R. S. Ingarden and M. Matsumoto, *The Theory of Sprays and Finsler Spaces with Applications in Physics and Biology*, Kluwer Academic Publishers Dordrecht, 1993.

[2] F. Brickell and R. S. Clark, *Differentiable Manifolds*, Van Nostrand Reinhold, London, 1970.

[3] M. Crampin, *On horizontal distributions on the tangent bundle of a differentiable manifold*, J. London Math. Soc. (2) **3** (1971), 178–182.

[4] M. Crampin, *Generalized Bianchi identities for horizontal distributions*, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. **94** (1983), 125–132.

[5] M. De Leon and P. R. Rodrigues, *Methods of Differential Geometry in Analytical Mechanics*, North-Holland, Amsterdam, 1989.

[6] A. Frölicher and A. Nijenhuis, *Theory of vector-valued differential forms*, Proc. Kon. Ned. Ak. Wet. Amsterdam A **59** (1956), 338–359.

[7] J. Grifone, *Structure presque-tangente et connexions, I*, Ann. Inst. Fourier, Grenoble **22** no. 3 (1972), 287–334.

[8] J. Grifone, *Structure presque tangente et connexions, II*, Ann. Inst. Fourier, Grenoble **22** no. 3 (1972), 291–338.

[9] J.Grifone and Z. Muzsnay, *Variational Principles for Second-order Differential Equations*, World Scientific, Singapore, 2000.

[10] M. Hashiguchi, *On conformal transformations of Finsler metrics*, J. Math. Kyoto Univ. **16** (1967) 25–50.

[11] M. Hashiguchi, *On Wagner's generalized Berwald space*, J. Korean Math. Soc. **12** (1975), 51–61.

[12] M. Hashiguchi, *Some remarks on linear Finsler connections*, Rep. Fac. Sci. Kagoshima Univ. (Math., Phys. & Chem.) **21** (1988), 25–31.

[13] M. Hashiguchi and Y. Ichijyō, *On conformal transformations of Wagner spaces*, Rep. Fac. Sci. Kagoshima Univ. (Math., Phys., Chem.) **10** (1977), 19–25.

[14] M. Hashiguchi and Y. Ichijyō, *On generalized Berwald spaces*, Rep. Fac. Sci. Kagoshima Univ. (Math., Phys., Chem.) **15** (1982), 19–32.

[15] Y. Ichijyō, *Finsler manifolds modeled on a Minkowski space*, J. Math. Kyoto Univ. **16** (1976), 639–652.

[16] Y. Ichijyō, *Finsler manifolds with a Linear Connection*, J. Math. Tokushima Univ. **10** (1976), 1–11.

[17] Y. Ichijyō, *On the Finsler Connection Associated with a Linear Connection Satisfying* $P^h_{ikj} = 0$, J. Math. Tokushima Univ. **12** (1978), 1–7.

[18] J. Klein, *Connexions in Lagrangian dynamics*, Atti della Accademia delle Scienze di Torino, Suppl. n. 2 al vol. **126** (1992), 33-91.

[19] I. Kolář, P. W. Michor and J. Slovák, *Natural operations in differential geometry*, Springer-Verlag, Berlin, 1993.

[20] L. Kozma and L. Tamássy, *Finsler geometry without line elements faced to applications*, Rep. Math. Phys. **51** (2003), 233–250.

[21] M. Matsumoto, *Projective Theories of Finsler Spaces*, Symp. on Finsler Geom., Asahikawa Aug. 5–8, 1987.

[22] M. Matsumoto and H. Shimada, *On Finsler spaces with 1-form metric*, Tensor, N. S. **32** (1978), 161–169.

[23] Z. I. Szabó, *Generalized spaces with many isometries*, Geometria Dedicata **11** (1981), 369–383.

[24] Sz. Szakál, *On the conformal theory of Ichijyō manifolds*, Supplemento ai Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo Serie II, Suppl.**69** (2002), 245–254

[25] Sz. Szakál and J. Szilasi, *A new approach to generalized Berwald manifolds I*, SUT Journal of Mathematics **37** (2001), No. 1, 19–41.

[26] Sz. Szakál and J. Szilasi, *A new approach to generalized Berwald manifolds II*, Publ. Math. Debrecen **60** (2002), 429–453.

[27] J. Szilasi, *Notable Finsler connections on a Finsler manifold*, Lecturas Matemáticas **19** (1998) 7–34.

[28] J. Szilasi and Cs. Vincze, *On conformal equivalence of Riemann-Finsler metrics*, Publ. Math. Debrecen **52** (1998), 167–185.

[29] J. Szilasi and Cs. Vincze, *A new look at Finsler connections and special Finsler manifolds*, Acta Math. Acad. Paed. Nyíregyháziensis **16** (2000), 33–63, www.emis.de/journals.

[30] J. Szilasi and L. Tamássy, *Affine Deformations of Minkowski Spaces*, Bulletin of the Transilvania University of Brasov **4** (2011), 89–96.

[31] L. Tamássy, *Area and metrical connections in Finsler spaces*, in Finslerian Geometries (P.L. Antonelli, ed.), Kluwer Acedemic Publishers, Dordrecht, 2000, 263–280.

[32] L. Tamássy, *Point Finsler spaces with metric linear connections*, Publ. Math. Debrecen **56** (2000), 643–655.

[33] L. Tamássy and M. Matsumoto, *Direct method to characterize conformally Minkowski Finsler spaces*, Tensor, N. S. **33** (1979), 380–384.

[34] Cs. Vincze, *On Wagner connections and Wagner manifolds*, Acta Math. Hungar. **89** (1–2) (2000), 111–133.

[35] Cs. Vincze, *An intrinsic version of Hashiguchi-Ichijyō's theorems for Wagner manifolds*, SUT Journal of Mathematics **35** (1999), No. 2, 263–270.

[36] V. V. Wagner, *On generalized Berwald spaces*, C. R. (Doklady), Acad. Sci. URSS (N. S.) **39** (1943), 3–5.

[37] K. Yano and S. Ishihara, *Tangent and cotangent bundles* Marcel Dekker Inc., New York, 1973.

[38] K. Yano and A. Ledger, *Linear connections on tangent bundles*, J. London Math. Soc. **39** (1964), 495–500.

[39] Nabil L. Youssef, *Semi-projective changes*, Tensor, N. S. **55** (1994), 131–141.