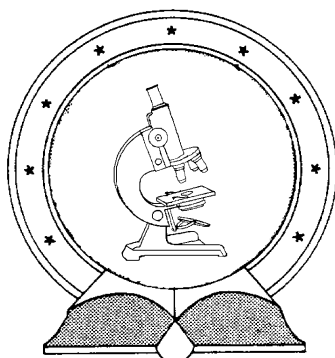


DE TTK



1949

# TEHETSÉGGONDOZÁS HÁTRÁNYOS HELYZETŰ TANULÓK KÖRÉBEN

Doktori (PhD) értekezés

**Szerző: Vecseiné dr. Munkácsy Katalin**

Témavezető: Vásárhelyi Éva

DEBRECENI EGYETEM

Természettudományi Doktori Tanács

Matematika és Számítástudományok Doktori Iskola

Debrecen, 2011.



*Ezen értekezést a Debreceni Egyetem Természettudományi Doktori Tanács Matematika és Számítástudományok Doktori Iskola Didaktika (szak módszertan) programja keretében készítettem a Debreceni Egyetem természettudományi doktori (PhD) fokozatának elnyerése céljából.*

*Debrecen, 2011. január 25.*

*a jelölt aláírása*

*Tanúsítom, hogy Vecseiné Munkácsy Katalin doktorjelölt 2008-2011. között a fent megnevezett Doktori Iskola Didaktika (szak módszertan) programjának keretében irányítással végezte munkáját. Az értekezésben foglalt eredményekhez a jelölt önálló alkotó tevékenységével meghatározóan hozzájárult. Az értekezés elfogadását javasolom.*

*Debrecen, 2011. január 25.*

*a témavezető aláírása*



# TEHETSÉGGONDOZÁS HÁTRÁNYOS HELYZETŰ TANULÓK KÖRÉBEN

Értekezés a doktori (Ph.D.) fokozat megszerzése érdekében  
a matematika tudományágban

Írta: Vecseiné dr. Munkácsy Katalin okleveles matematika-pedagógia szakos  
tanár.

Készült a Debreceni Egyetem Matematika és Számítástudományok doktori  
iskolája

Didaktika (szakmódszertan) programja keretében

Témavezető: Dr. Vásárhelyi Éva

A doktori szigorlati bizottság:

elnök: Dr. ....  
tagok: Dr. ....  
Dr. ....

A doktori szigorlat időpontja: 200... . . . . .

Az értekezés bírálói:

Dr. ....  
Dr. ....  
Dr. ....

A bírálóbizottság:

elnök: Dr. ....  
tagok: Dr. ....  
Dr. ....  
Dr. ....  
Dr. ....

Az értekezés védésének időpontja: 2011... . . . . .

## MOTTÓ

„Az iskola arra való, hogy az ember megtanuljon tanulni, hogy felébredjen tudásvágya, megismerje a jól végzett munka örömét, megízlelje az alkotás izgalmát, megtanulja szeretni, amit csinál, és megtalálja azt a munkát, amit szeretni fog.”

Szent-Györgyi Albert

### *Köszönetnyilvánítások*

Köszönöm témavezetőm, Vásárhelyi Éva segítségét, aki a szakszerű és szokásos témavezetői támogatáson messze túl, nagyon sok személyes biztatással támogatta munkámat. Nagyon nagy jelentőségű számomra, ahogyan az elméleti háttér és az empirikus munka közötti összefüggések kidolgozásában segített.

Köszönöm Kárpáti Andreának, hogy együtt dolgozhattam vele a hátrányos helyzetű iskolákban végzett kutatásaiban, és a sok segítséget abban, hogy tapasztalataimat konferenciákon és publikációkban is megtanultam előadni.

Köszönöm kollégáimnak, hogy érdeklődéssel hallgatták beszámolóimat és javaslataikkal segítették munkámat.

Köszönetet mondok Buda Mariannak, aki a munkám pedagógiai hátterének megalapozásában nyújtott sok segítséget.

És külön köszönöm, az együttműködő pedagógusok és tanítványaik sok-sok munkáját, amivel hozzájárultak ahhoz, hogy a hátrányos helyzetből érkező tanulókat segíthessük abban, hogy matematikai tehetségük is kibontakozhasson.

## TARTALOMJEGYZÉK

<b>TEHETSÉGGONDOZÁS HÁTRÁNYOS HELYZETŰ TANULÓK KÖRÉBEN.....</b>	<b>5</b>
<b>BEVEZETÉS.....</b>	<b>1</b>
A TÉMAVÁLASZTÁS INDOKLÁSA.....	1
<i>Módszerünk esélyegyenlőségi háttere.....</i>	<i>1</i>
<i>Módszerünk matematikadidaktikai háttere.....</i>	<i>2</i>
<i>Módszerünk tehetséggondozási háttere.....</i>	<i>3</i>
A DOLGOZAT TÉMÁJA ÉS CÉLKITŰZÉSEI.....	3
AZ EMPIRIKUS KUTATÁS MÓDSZEREI.....	4
<i>A motivációs szerkezetet vizsgáló teszt.....</i>	<i>5</i>
<i>Tanítói és tanulói beszámolók elemzése.....</i>	<i>5</i>
<i>Önkontrollós vizsgálat, elő- és utómérés.....</i>	<i>6</i>
<i>A fejlesztő program.....</i>	<i>6</i>
<i>A tárgyi szintű matematikai problémamegoldás a kísérleti iskolákban.....</i>	<i>6</i>
POPULÁCIÓ ÉS MINTA.....	6
A KUTATÁS HIPOTÉZISEI.....	7
<i>Főhipotézis.....</i>	<i>7</i>
<i>Első hipotézis.....</i>	<i>8</i>
<i>Második hipotézis.....</i>	<i>8</i>
<i>Harmadik hipotézis.....</i>	<i>8</i>
<b>A TÁRGYI REPREZENTÁCIÓ SZEREPÉNEK VIZSGÁLATA A MATEMATIKATANULÁS KÜLÖNBÖZŐ ASPEKTUSAI SZERINT.....</b>	<b>9</b>
A TANULÓK SZOCIOKULTURÁLIS HELYZETE ÉS A TANULMÁNYI EREDMÉNYEK ÖSSZEFÜGGÉSEI STATISZTIKAI VIZSGÁLATOK ÉS EMPIRIKUS KUTATÁSOK TÜKRÉBEN.....	10
<i>Országos és nemzetközi mérések néhány tapasztalata.....</i>	<i>11</i>
<i>Magyarázatok a gyengébb teljesítményre.....</i>	<i>12</i>
<i>Tanulmányok, óramegfigyelésre alapozott kutatások.....</i>	<i>13</i>
A HÁTRÁNYOS HELYZETŰ GYEREKEK ÉS AZ ISKOLAI MATEMATIKATANULÁS.....	17
<i>A tanulási folyamat logikája, a reprezentációs szintek.....</i>	<i>17</i>
<i>A tanulás feltételei.....</i>	<i>21</i>
AZ ESÉLYKOMPENZÁLÁS LEHETŐSÉGEI A MATEMATIKAOKTATÁSBAN.....	26
<i>Esélyjavító programok tartalmi és módszertani differenciálás nélkül.....</i>	<i>26</i>
<i>Az USA-ban alkalmazott néhány esélynövelő program.....</i>	<i>27</i>
<i>Következtetésem.....</i>	<i>30</i>
AZ IGÉNYES MATEMATIKATANULÁS FELTÉTELEINEK VIZSGÁLATA, A TELJESÍTMÉNYMOTIVÁCIÓ SZITUATÍV MÉRÉSE.....	31
<i>Az OMT teszt.....</i>	<i>32</i>
<i>Rövid összegzés.....</i>	<i>37</i>
A MATEMATIKATÖRTÉNET SZEREPE A REPREZENTÁCIÓS MÓDOK SZERINT SZERVEZETT MATEMATIKATANÍTÁSBAN.....	38
A TANÍTÁSI FOLYAMAT TERVEZÉSÉT BEFOLYÁSOLÓ NÉHÁNY SAJÁTOS TÉNYEZŐ AZ ÖSSZEVONT TANULÓCSOPORTOS ISKOLÁKBAN.....	39
<i>A didaktikai tervezés.....</i>	<i>39</i>
<i>A tehetséggondozás sajátos kérdései.....</i>	<i>44</i>
<i>Matematika a hátrányos helyzetű tanulók számára, az utca matematikája.....</i>	<i>46</i>

# Tartalomjegyzék

<b>EMPIRIKUS VIZSGÁLATOK.....</b>	<b>47</b>
1. A VIZSGÁLAT FELÉPÍTÉSE .....	47
<i>A populáció .....</i>	<i>48</i>
<i>A részvizsgálatok.....</i>	<i>49</i>
<i>A kombinált módszer .....</i>	<i>50</i>
2. A TANÍTANDÓ FOGALMAK MATEMATIKAI ÉS MÓDSZERTANI ELEMZÉSE .....	51
<i>A tanítandó fogalmak kiválasztása.....</i>	<i>51</i>
<i>A poliéderfogalom a matematikában és a tanulásban .....</i>	<i>53</i>
<i>A poliéderekkel kapcsolatos érdekességek a matematikatörténetben .....</i>	<i>57</i>
3. RÉSZVIZSGÁLATOK.....	59
<i>A tanulók motivációs rendszerének és az íráskészségük kommunikációs célú alkalmazhatóságának vizsgálata, a motivációs teszt .....</i>	<i>59</i>
<i>Kísérleti órák .....</i>	<i>69</i>
<i>Esettanulmány, a poliéderek tanítása .....</i>	<i>90</i>
<b>AZ EREDMÉNYEK A HIPOTÉZISEKKEL ÖSSZEVETVE .....</b>	<b>104</b>
A FŐHIPOTÉZISHEZ .....	104
A RÉSZHIPOTÉZISEKHEZ .....	105
<i>Az első hipotézishez .....</i>	<i>105</i>
<i>Az írásbeli kommunikációs kompetencia és a matematikatanulás.....</i>	<i>106</i>
<i>A második hipotézishez.....</i>	<i>106</i>
<i>A harmadik hipotézishez .....</i>	<i>108</i>
KÖVETKEZTETÉSEK .....	109
KITEKINTÉS, DISZKUSSZIÓ .....	111
<b>IRODALOMJEGYZÉK .....</b>	<b>112</b>
<b>FÜGGELÉK.....</b>	<b>116</b>
MELLÉKLETEK .....	116
<i>A PowerPoint diasorozatok rövid bemutatása .....</i>	<i>116</i>
<i>Egyéb dokumentumok .....</i>	<i>120</i>
ÖSSZEFOGLALÓK .....	121
A SZERZŐ PUBLIKÁCIÓS JEGYZÉKE .....	131



## BEVEZETÉS

### ***A témaválasztás indoklása***

A hátrányos társadalmi helyzetű diákokra fordított megkülönböztetett figyelem könnyen válhat a szegregáció eszközévé, aminek következtében a hátrányos helyzetű tehetséges tanulók esélyei a magasabb fokú tanulmányok elvégzésére tovább csökkennek. Kutatásomban azt vizsgáltam, hogy a hátrányos helyzetű tanulónak nyújtott, matematikadidaktikailag megalapozott segítség révén hogyan valósítható meg az átlagos, jó, illetve kiemelkedő képességű tanulók hatékony fejlesztése.

### ***Módszerünk esélyegyenlőségi háttere***

A hátrányos helyzet egyik legfontosabb következménye a kommunikációs zavar, ami a jelen kutatás fejlesztő programjának meghatározója. A szakirodalom és saját tapasztalataink alapján statisztikailag igazoltan igen erős kapcsolat van a tanulók hátrányos helyzete és kommunikációs problémáik között.

Saját tapasztalataim alapján, amelyeket az irodalmi adatok megerősítenek, a hátrányos helyzetű tanulók iskolai eredményei gyengék. Nem azért, mert diszkriminatíven értékeli őket, hanem valóban gyenge teljesítményt mutatnak az iskolai ellenőrzéseken, méréseken. A közvélemény nagy része és sokszor a pedagógusok is a gyenge teljesítményt a tanulók alacsony motivációjával indokolják, amiért a családokat teszik felelőssé. Meggyőződésem, hogy bár a családi nevelésben is gyakran előfordulnak súlyos problémák, az iskola nem háríthatja a családokra a felelőséget. Az iskolának kulcsszerepe van, pontosabban lehet a társadalmi eredetű hátrányok csökkentésében.

Sokféle feladat megoldása szükséges az esélyegyenlőtlenség csökkentése érdekében, amelyeknek egy része a pedagógusokat mint felelős polgárokat érinti: a családok életfeltételeinek javítása, az előítéletek csökkentése, az iskolai környezet megértőbbé tétele. Most csak egy részterülettel foglalkozom: Milyen speciális matematikadidaktikai feladatok léteznek? Mi az a szakmai különbség, amely lehetővé teszi a hátrányos helyzetű tanulók problémáihoz való alkalmazkodást? Feltételezem, hogy a pedagógusoktól elvárt jóindulaton, empátiás képességeken túl más szakmai fogásokra van szükség hátrányos helyzetben, mint egyébként. Hogy milyenekre, ezt vizsgálom.

A vizsgálatban szereplő tanulókat előzetesen nem szelektáltuk, mindenkiről jó képességet feltételezünk. Akiról kiderülne a gyenge képesség, az sem kerül a programban hátrányba, mert feladataink sok szinten megoldhatók, az is talál önállóan vagy tanítói segítséggel értelmes, kellemes, fejlesztő feladatokat, aki a feladatok teljességét nem képes feldolgozni. A hagyományos keretek között is

jól teljesítő tanulók szintén a differenciálás keretein belül kaptak képességüknek és előképzettségüknek megfelelő feladatokat, így változatlanul biztosítottuk az ő fejlődésüket is.

### *Módszerünk matematikadidaktikai háttere*

A tananyagot a szokásostól eltérően súlyozzuk.

Más szerzőkkel együtt közös meggyőződésünk, hogy számolás gyakorlását és általában az aritmetika tanulását nem gyorsítani, hanem lassítani kell, mert a gyors, mélységében meg nem értett tanulás hatására hibás matematikai struktúrák alakulnak ki (Rickart, 1998, 285. oldal).

Az aritmetika, prealgebrai feladatok mellett olyan problémákat állítunk a tanulók elé, amelyek, éppen csak megemlítve vagy pedig kimondatlanul, csak a rejtett tanterv részeként vannak benne az alsó tagozatos tananyagban, mint például:

- Valószínűségi megfontolások eltérő relatív gyakoriságok alapján és nem a biztos és a lehetetlen esetekből kiindulva, mivel azok túl tiszták, túl elvontak sok tanuló számára
- Mozgásos térbeli tájékozódási problémák
- Ismerkedés bonyolult térbeli alakzatokkal, és az ott szerzett tapasztalatok alkalmazása téglatestekre

Ezeken a részterületeken a tananyagtervezők spontán fejlődésre számítanak, amelynek a feltételei hátrányos helyzetben gyakran nincsenek meg. Ugyanakkor ezek és hasonló problémák – nem matematikai problémaként – részei a felnőttek mindennapi életének. A gyerekek nem látják, nem is igen tudnak elképzelni a könyvespolcokon könyveket számoló felnőtteket, amely szituáció igen gyakori a szöveges feladatok között, de láthatnak KRESZ-vizsgára készülők, a rajzos elsőségadási problémákat megoldani törekvő idősebb rokonokat.

A tanulás természetes menetét akarjuk bevinni az iskolába, és nem magyarázatokkal, hanem tárgyi tapasztalatokon keresztül, képek közvetítésével kívánjuk eljuttatni a tanulókat a matematikai ismeretek szimbolikus szintjére. Számítunk az otthonról hozott előzetes tapasztalatokra, de azokat nem feltételezzük, hanem szituációk létrehozásával ellenőrizzük meglétüket, felelevenítjük az emlékeket, és újakkal egészítjük ki a gyerekek korábbi tapasztalatait.

Módszerünk sok odafigyelést, módszertani elemzést igényel, mert a tárgyalkalmazása is válhat unalmassá, rossz hatékonyságúvá. A jó képességű, fejlett formális gondolkodású gyerekeknek egyszerű és rutinszerű alkalmazási feladat lehet az, ami a többieknek új felfedezés, ezért nekik korábban van szükségük csak szavakkal megadott, megfelelően nehéz feladatokra. Unalmas lehet a tárgyi problémamegoldás azoknak is, akik nem értik meg jól, mi is a feladat, vagyis akiknek maguk a feladatok nehezek, számukra a tárgyakkal végzendő egyszerű

feladatokat kell választani és nem tárgyakkal megoldható problémákat, amire a csoportmunka bőségesen kínál lehetőséget.

### ***Módszerünk tehetséggondozási háttere***

Azt feltételezzük, hogy a tanítási órákon megvalósított, felzárkóztatással egybekapcsolt tehetséggondozás a valóban tehetséges tanulókat 10-12 éves korukra alkalmassá teszi a tehetséggondozás intézményesített formáiba való bekapcsolódásra. Ehhez természetesen szükséges, hogy ezeket a lehetőségeket a tanítók is megismerjék, kapjanak segítséget ahhoz, hogy kiemelkedően tehetséges tanulóik eljuthassanak a tehetséggondozó központokba.

A tanulók veleszületett intellektuális képességei nem függenek a családok anyagi és egyéb társadalmi hátrányaitól, ezért az iskolának az a feladata, hogy lehetővé tegye, hogy a tanulók képességeik szerint tudjanak teljesíteni.

### ***A dolgozat témája és célkitűzései***

A kutatómunkát az ELTE TTK kutatási programjának keretében, a Matematikatanítási Módszertani Központ és a Multimédiapedagógiai Központ kutatásainak részeként végeztem. Az egyik jelentős kutatási projekt keretében a matematikai vizsgálatokat én irányítottam, illetve végeztem, amelynek keretében összevont tanulócsoporthoz kisiskolák tanulóinak komplex fejlesztésével foglalkoztunk. Dolgozatomban e kutatómunka tapasztalatainak matematikadidaktikai vonatkozásaival foglalkozom.

Az angol és a magyar nyelvű szakirodalom tanulmányozása, valamint saját iskolai és tanárképzési tapasztalataim alapján meggyőződésem, hogy az enaktív reprezentációs mód a problémamegoldás révén a szimbolikus reprezentáció mindkét összetevőjét, a természetes nyelvi reprezentációt és a matematikai formulákban megjelenő reprezentációt is hatékonyan képes támogatni. Így a Bruner féle reprezentációs módok (Bruner, 1960) tudatos megválasztása és integrált alkalmazása új lehetőségeket jelent az oktatás eredményességének javításában. Úgy gondolom, hogy az enaktív reprezentáció lehetővé teszi, hogy a hátrányos helyzetű, átlagosan, illetve kiemelkedően tehetséges tanulók számára ne csökkentsük, hanem gazdagítsuk a tananyagot, miközben a terhelésük se növekedjen.

A matematikadidaktikai kutatások fontos részterülete az egyéni különbségek figyelembe vételének lehetősége a tanulási folyamat során. Az egyéni sajátosságok felismerését és az azoknak megfelelő pedagógiai megoldások megtalálását hatékonyan segíti, ha a pedagógusok ismerik az egyéni különbségek hátterében meghúzódó csoport sajátosságokat.

A matematikadidaktika néhány csoporttal kiemelten foglalkozik.

1. A magyar matematikatanítás hagyományosan nagy figyelmet fordít a tehetség azonosítására, és eredményes *tehetséggondozást* folytat.

2. Kialakult az értelmi fejlődésben zavart szenvedett gyerekek oktatásának metodikája, és reményteljes törekvések vannak az *ép és sérült értelmű gyerekek integrált tanítására*.
3. A hátrányos helyzetű tanulók esélyeinek növelésére, a *felzárkóztatásra* is számos, a gyakorlatban használt módszer és intézményi forma alakult ki.
4. Több országban, sokféle indíttatásból létrejöttek olyan mozgalmak, amelyek a *hátrányos helyzetű tehetséges tanulók* számára kínálják a magas szintű tudás elérésének lehetőségét.
5. A *hátrányos helyzetű tanulók* előzetes tehetségazonosítás nélküli fejlesztési lehetőségeivel elvi szinten, a probléma felismerésének szükségességével, a matematikadidaktikában a matematikatanulás szociológiájának nevezett, főképpen angol nyelvű publikációkban megjelenő kutatási irány foglalkozik. Hasonló kutatások eredményei megjelentek Mexikóban 2008-ban, az ICME-n. A hátrányos helyzetet másképpen, a modern matematikának a tanulásban betöltött szerepének csökkentésével törekszik enyhíteni a főleg spanyol nyelvterületre jellemző másik matematikadidaktikai irányzat, amely tartalmában kívánja megreformálni a tananyagot. A ma általánosan elterjedt, nyugati matematika helyett a felkutatott népi hagyományokra épített speciális tananyagot tartják szükségesnek ezen irányzat képviselői, pl. D'Ambrosio (1998). A matematikusok többsége ez utóbbi, etnomatematikának is nevezett irányzatot elítéli, bár azt sokan elismerik, hogy a hagyományos matematikai kultúra egyes elemeit érdemes beépíteni a tanítási folyamatba<sup>1</sup>. Ezekre a kutatásokra Magyarországon is nagy szükség lenne.

Fejlesztő programjainkban a hátrányos helyzetű tehetséges tanulókra kiemelt figyelmet fordítottunk. Szeretném igazolni, hogy ha az iskolában *a jó képességeikhez de hiányos előismereteikhez alkalmazkodó módon tanítjuk őket*, akkor a matematikát örömmel tanulják, valamint hogy a fogalomépítésben már rövid idő alatt is átütő, bár az országos mérésekben alig megmutatkozó sikereket lehet elérni.

Feltételezéseimet empirikusan vizsgálható hipotézisekké alakítottam, amelyeket dolgozatomban részletesen elemzek, és igyekszem azokat kvantitatív és kvalitatív adatokkal alátámasztani.

### ***Az empirikus kutatás módszerei***

A kutatást kistélepülések összevont tanulócsoportos iskoláiban végeztem. Az iskolák nehezen megközelíthető volta mind a matematikatanulás, mind a kutatás módszertana szempontjából sajátos problémákat vetett föl, amelyek megoldására egyedi módszereket volt szükséges adaptálni, illetve kidolgozni.

---

<sup>1</sup> Például Phil Davis szóbeli közlésére hivatkozom.

Az *adatgyűjtés* változatos formáit alkalmaztuk, részben méréseket végeztünk, részben a résztvevő megfigyelés módszereit alkalmaztuk.

1. 16 iskola 243 tanulójáról gyűjtöttünk írásos dokumentumokat, amelyeket az általunk kidolgozott instrukciók alapján a pedagógusok vettek fel, és Budapesten dolgoztunk föl.
2. A kutatás vezetőjeként közvetlenül is bekapcsolódtam a tanításba. Az egyik iskolában a *poliéderfogalom* építésének egy szakaszát – együttműködve az osztály tanítójával – én végeztem. Elemeztem a munka tapasztalatait és dokumentumait, valamint az elő- és utómérés adatait.
3. Az adatgyűjtés harmadik formája jelentősen eltért a matematikadidaktikai kutatások hagyományos módszereitől. Olaszországban új kutatási módszerek alakultak ki (Arzarello, 1998 és 2004), adaptáltam a N. Malara (2004) által kidolgozott módszert: a fejlesztő program a kutatói-tanítói szakmai team együttműködésének eredményeként valósult meg. Az együttműködés keretében készült dokumentumok egyszerre szolgálták az adatgyűjtést, valamint részei voltak magának a fejlesztő programnak is.

A kutatás módszerei közül kiemelem Kuhl (1999) német pszichológus motivációs tesztjének adaptálását és alkalmazását, a tanítói és tanulói beszámolók elemzését, valamint az egyik iskolában elvégzett fejlesztő munkát.

### *A motivációs szerkezetet vizsgáló teszt*

A tanulók tanulási készségének és alkalmasságának mérésére egy pszichológiai tesztet adaptáltam pedagógiai célú iskolai alkalmazásra.

Jelen kutatásban annak igazolására törekedtem, hogy a tanulók átlagos eredményei pozitív motivációt tükröznek. Írásbeli kifejezőképességük kommunikációs célra többségében alkalmazható, és ez a szimbolikus gondolkodásnak az iskolai tanuláshoz szükséges szintjének meglétét tükrözi annak ellenére, hogy a helyesírási és egyéb normáknak általában nem felel meg. További munkákban az egyes pedagógusok e tesztet az egyéni bánásmód kialakításához szükséges információk gyűjtésére alkalmazhatják.

Statisztikai elemzéseket végeztem. Vizsgáltam a tanulók írásának formai jegyeit és a mondanivaló érthetőségét.

### *Tanítói és tanulói beszámolók elemzése*

A kísérleti órákat a pedagógusok tartották meg a szokásos tanítási órák keretében. Rendszeres internetes kapcsolatban voltunk, ez kutatás-módszertani szempontból lehetővé tette, hogy a Budapesttől távoli, rossz közlekedési helyzetű iskolákba rövid idő alatt eljussanak a kísérleti tananyagok és instrukciók, valamint megérkezzenek az órák menetéről és eredményeiről az információk.

A dokumentumok közül legfontosabbak a tanítói beszámolók az általuk tartott kísérleti órák tapasztalatairól. Ezek a beszámolók, azon túlmenően, hogy

érzékletes képet adnak az órákon történekről, a pedagógusi reflektivitás fejlesztésének hatékony eszközei voltak. Az írásos beszámolók készítése során sok kommunikációs akadály észrevehetővé vált a tanítók számára is. A rendszeres írásos feladatok, amelyekre tartalmi visszajelzéseket kaptak a pedagógusok, fejlesztették a tanítók kommunikációs érzékenységét és hatékonyságát is. A tanulóktól is kértünk írásos beszámolókat az órák végén. Ezeknek elsősorban nem dokumentációs értékük volt, hanem a nyelvi akadályok csökkentését szolgálták, ugyanakkor esetenként hasznos visszajelzést jelentettek az órát tartó tanítóknak is.

### *Önkontrollós vizsgálat, elő- és utómérés*

A kutatás empirikus részének második szakaszában a poliéderfogalom kialakítása volt a célunk. Az egyik osztályban végzett munkáról, annak előkészületeiről és eredményeiről esettanulmányyszerűen számolok be. A szöveges leírást kiegészítem az osztályban elvégzett, igen egyszerű elő- és utómérés adatainak elemzésével.

### *A fejlesztő program*

Az alkalmazott fejlesztő módszerben összekapcsoljuk a tehetségpedagógia sok elemét és az esélyegyenlőségi programok tapasztalatait. A fejlesztő program keretében Bruner reprezentációs elméletét alkalmaztam a hátrányos helyzetű, alsó tagozatos diákok matematikatanulásának hatékonyabbá tételében.

Az osztálytermi megvalósítás didaktikai feltételei közül elsősorban a tanártovábbképzést, a tananyag-kiválasztást, a tanítási órák felépítését és az oktatásszervezési formák optimális megválasztásának módját emelem ki. A dolgozatban bemutatom a fejlesztő munkát segítő, általam, illetve az irányítással elkészült oktatási eszközöket.

### *A tárgyi szintű matematikai problémamegoldás a kísérleti iskolákban*

A hagyományos órákhoz képest a legnagyobb különbséget az jelentette, hogy a tanítási órákon a tárgyak nagy szerepet kaptak, elsősorban nem mint szemléltető eszközök, hanem mint a problémamegoldást segítő eszközök. Ennek érdekében, hogy a tárgyakkal végzett munka optimálisan segítse a tanulók matematikai tehetségének kibontakozását, nélkülözhetetlen volt a tanítók internetes és közvetlen jelenlétben alapuló, a szakmai együttműködésre épülő továbbképzése, az egyszerű számítógépes eszközök gyakori alkalmazása, a tanulók és a tanítók rendszeres, írásbeli reflexiója és önreflexiója, valamint a vegyes életkorú tanulói csoportok megszervezése.

### **Populáció és minta**

Vizsgálatunk az alsó tagozatos, összevont tanulócsoporthoz tartozó iskolák tanulóira vonatkozik. A mintába iskolák kerültek és azoknak – lehetőség szerint – az

összes tanulója. Előfordult, hogy szervezési és egyéb okokból ettől eltérés történt, és nem kaptunk az iskola minden tanulójáról adatokat. A vizsgálatba bevont tanulók néhány alapadatát tartalmazzák az összefoglaló táblázatok.

A minta összetétele

1. szakasz: Közel véletlenszerűen kiválasztott 16 iskola 243 tanulója. Az iskolák az ország minden táját képviselik, megközelítőleg olyan arányban, amilyen az összevont tanulócsoporthoz az iskolák területi elhelyezkedése.
2. szakasz: Négy vállalkozó iskola (egy alföldi, egy borsónyi és két dunántúli iskola) egy-egy összevont tanulócsoporthoz.

## **A kutatás hipotézisei**

### **Főhipotézis**

*A tehetség társadalmi háttértől és etnikai hovatartozástól független, egyenletes eloszlásából kiindulva azt feltételezzük, hogy a hátrányos helyzetű tanulóknál a tehetséggondozás elérhetőségének egyenlőtlenségéből fakadó tudásbeli elmaradásról és nem képességihiányról van szó. A hátrányos társadalmi helyzetű tanulók többsége kommunikációs zavarral küzd, ez a közvetlen akadály az eredményes iskolai szereplésüknek.*

*A tantárgypedagógiai elméleti és gyakorlati eredmények alkalmazásával lehetőség van olyan tananyag-elrendezésre és feldolgozásra, amely lehetővé teszi a differenciált fejlesztést.*

*Megfelelő továbbképzési, támogatási formák segítségével a pedagógusok elsajátíthatják a kis tudású és a tanulás élményét még nem ismerő de tehetséges tanulók tanítására alkalmas fogásokat.*

*A két társadalmi közeg közötti különbségből – vagyis a tanítók középosztálybeli és az összevont tanulócsoporthoz az iskolák hátrányos társadalmi helyzetű tanulóinak közötti különbségből - fakadó kommunikációs zavar felismerésére és kezelésére a tanítók felkészítendőek és felkészíthetőek.*

## Bevezetés

A főhipotézis alapján fogalmaztam meg azt a három hipotéziscsoportot, amelyeket a kutatás során empirikusan is vizsgáltam.

### *Első hipotézis*

- a) A gyerekek motivációjának szerkezete (kötődés, teljesítmény, a társas kapcsolatokban elfoglalt szerephez való viszony) a hátrányos helyzet ellenére is jó, nem akadályozza az eredményes munkát.*
- b) A kommunikáció és az írás-olvasás területén meglévő problémák ellenére az őket érdeklő témákban kifejezőképességük árnyalt.*

### *Második hipotézis*

- a) Az új pedagógiai-didaktikai módszerek és eszközök Bruner reprezentációs elmélete alapján adaptálhatók a vizsgált körülményekre (6-10 éves életkor, hátrányos helyzet).*
- b) Az általunk kidolgozott és alkalmazott specifikus módszertani eljárások nyomán megnő a gyerekek tantárgy-specifikus (matematikatanulási) motivációja.*

### *Harmadik hipotézis*

- a) A tanulás pozitív élményét nyújthatjuk a tanulóknak akkor is, ha tudásbeli és műveltségi hiányosságok akadályozzák őket az életkoruknak megfelelően elvárt, tantervekben meghatározott, a tankönyvekben közvetített tanulási folyamat követésében.*
- b) Az eltérő tapasztalatokból származó súlyos kommunikációs zavarok a kombinált didaktikai módszerekkel rövid távon is eredményesen oldhatók.*
- c) A kombinált módszer a nem azonosított tehetség kibontakozását is elősegíti.*

Módszerünk elnevezésére a kombinált jelzőt alkalmazzuk, mivel ez az érzelmileg semleges kifejezés a kísérleti oktatás több sajátosságára is utal. Részletesebb kifejtése az empirikus vizsgálatok fejezetben olvasható.



## **A TÁRGYI REPREZENTÁCIÓ SZEREPÉNEK VIZSGÁLATA A MATEMATIKATANULÁS KÜLÖNBÖZŐ ASPEKTUSAI SZERINT**

A hátrányos helyzetű tanulók matematikatanulásának speciális jellemzőit sokféle szempontból vizsgálták, ezeket kívánom bemutatni, majd összehasonlítani a magyar tanulók egy viszonylag szűk rétegének, az összevont tanulócsoporthoz tartozó kisiskolások sajátosságaival.

A hátrányos helyzetű tanulók matematikatanulását akadályozó tényezők igen sokrétűek, ezért interdiszciplináris vizsgálatot végeztem. A pedagógiai fejlesztő folyamat minden mozzanatában (tervezés, végrehajtás, értékelés során) szociológiai, pszichológiai, pedagógiai, didaktikai és matematikai szempontok szerint (különböző mélységben) végeztem az elemzést.

Az Európában kialakult oktatási rendszer nagyon korán és nagyon szorosan összefonódott az írásbeliséggel. Az oktatásszociológusok, pl. Sáska Géza (2006) véleménye szerint az írásbeliség iskolai dominanciája révén válik a társadalmi hátrány iskolai hátránnyá<sup>2</sup>.

Különböző statisztikai vizsgálatokra és matematika-didaktikai kutatásokra építve bemutatom, hogy a családok társadalmi-gazdasági helyzete a matematikatanulásra is jelentős hatással van annak ellenére, hogy a mindennapi gyakorlatban sok ezzel ellentétes példával is találkozhatunk.

Az iskolai oktatásban a természetes tanulás mindhárom szintjére (tárgyi, képi és szimbolikus reprezentáció) szükség van. A középszályból érkező tanulók iskolába lépéskor már rendelkeznek azokkal a kompetenciákkal, amelyek lehetővé teszik, hogy korábbi tárgyi tapasztalataikat felelevenítsék, és ezáltal tartalommal töltsék meg a szavakra és más szimbólumokra épülő iskolai tanulást. A hátrányos helyzetű tanulók tapasztalati bázisa is szegényesebb, de elsősorban abban nincs gyakorlatuk, hogy a tapasztalataikat hogyan fogalmazzák meg, hogyan kapcsolják hozzá a tanítási órákon hallott és olvasott fogalmakhoz és összefüggésekhez.

Ezért kísérletünk szempontjából Bruner tanuláselmélete különösen jelentős. Ő a megszerzett ismeretek reprezentációinak mindegyikét (enaktív-tárgyi, ikonikus-képi, szimbolikus-nyelvi és egyéb jelek) részletesen vizsgálta a tanítás

---

<sup>2</sup> „Arra jutottam, hogy az olvasással mért kultúra regionális rajzolatot mutat, de ettől függetlenül egyénit is mutathat. Azt gondolom, hogy a térségi, a történelmi fejlődés során kialakult regionális szociális-kulturális hatások magyarázó ereje nagyobb, mint a pedagógiaiaké.” – írta magánlevélben Sáska Géza e témára vonatkozó kutatása összegzéseként. Hátrányos helyzetben nem „jobban” kell tanítani, hanem a társadalmi hátrányok tudatában valamelyest másképpen.

és tanulás szempontjából. Hangsúlyozta, hogy ezek nem mereven egymásra épülő fokozatok, hanem közöttük szoros oda-vissza ható kapcsolat van. Kiemelte továbbá, hogy a tanulás során a különböző reprezentációs formák között dinamikus egyensúly kialakítása szükséges.

Bruner tanuláseméletét és alkalmazási lehetőségeit a hátrányos helyzetű tehetséges, fiatal tanulók tanulásának nézőpontjából tekintem át.

A mentálisan egészséges tanulók tanulási eredményességének egyik legfontosabb feltétele a kíváncsiság, a tanulás vágya. A leckét nem író tanulók esetében gyakran feltételezzük a tanulási motiváció hiányát, holott a háttérben akár erős teljesítménymotivációi állhat, de azok működését tanulási akadályok gátolhatják. A tanítási órák gátló tényezői a hátrányos helyzetű tanulók esetében különösen erősek lehetnek, ezért szükséges olyan motivációs rendszert vizsgálni eszközt keresni, ami ezeket az akadályokat lehetőség szerint kikerüli, ilyen eszköz Kuhl személyiségtesztje, amelyet részletesebben is bemutatok.

Megvizsgálom olyan irányzatokat, amelyek szintén támogatják az esélyegyenlőség didaktikai eszközökkel történő javítását. A magyar tanárképzés és tanártovábbképzés szempontjából bemutatok és elemzem az összevont tanulócsoportos iskolák pedagógusainak sajátos helyzetét.

A pedagógiai fejlesztő tevékenységet elméleti és gyakorlati előzmények oldaláról megalapozva valósítjuk meg.

### ***A tanulók szociokulturális helyzete és a tanulmányi eredmények összefüggései statisztikai vizsgálatok és empirikus kutatások tükrében***

A hátrányos helyzetű tanulók számára a műszaki tudományok, a matematika, a természettudományok területén nagyobb lehetőség van a kiemelkedésre, mint egyéb területeken. Ezt tükrözik az európai továbbtanulási adatok: az ilyen irányokat képviselő főiskolákon, egyetemeken a legmagasabb a hátrányos helyzetű tanulók aránya. Az USA-ban eltérő a helyzet, ott ezek az arányok mások, ott elsősorban a szociális munkás képzésben és ehhez közelálló területeken találunk nagyobb arányban hátrányos helyzetből származó fiatalokat. A tudósok oldaláról vizsgálva is hasonló képet kapunk: a hátrányos helyzetből származó, kiemelkedő eredményeket elérő tudósok között sok a matematikus. A tudományos élet csúcsain mutatkozó, óriási eredményeket elérő, szegény családból származó matematikusok világraszóló eredményei eltakarják azt a tényt, hogy a matematika nagyon nehéz, „bukató” tantárgy. A hátrányos helyzetű fiatalok tömegei számára a matematika tantárgyban elszenvedett sikertelenség a legfőbb oka az iskola korai elhagyásának, a lemorzsolódásnak, és részben a gyenge matematikai eredmények okozzák, hogy sok tehetséges, de hátrányos helyzetből származó fiatal meg sem kísérli a felsőoktatásba való bejutást.

### Országos és nemzetközi mérések néhány tapasztalata

Az oktatáspolitikában a hátrányos helyzetű tanulók nyilvántartása terén is nagy különbségek vannak az egyes államok között. Franciaországban tilos bármely, a tanuló származására vonatkozó adat nyilvántartása „... a francia közoktatási intézményekben az állampolgárok egyenlőségét axiómaként kezelő köztársasági elv jegyében valóságos tabutémává vált a gyerekek nyelvi, etnikai hovatartozása.” (Bajomi, 1997). Az USA-ban ezzel ellentétben nagyon részletes statisztikák készültek a tanulók etnikai hovatartozása szerint (NAEP, é. n.). Az adatok azt mutatják, hogy az etnikai hovatartozás és a társadalmi helyzet, valamint a tanulmányi eredmények között szoros összefüggés van. A következő táblázat azt mutatja, hogy az USA-ban az etnikai-nyelvi háttér hogyan nyilvánul meg az iskolai eredményekben. A tantárgytesztekkel mért eredmények alapján a tanulók teljesítményét négy kategóriába sorolják. A két felső szint elérése jelenti a követelmények teljesítését. A „Fehér”-ek alkotják a tanulók többségét, közülük 7% éri el olvasásból és 2% matematikából a legmagasabb szintet, ezzel szemben az amerikai indiánoknak csak 3%-a került a legjobb csoportba olvasásból, matematikából viszont a mérési határ alatt van a legjobban teljesítők aránya. Érdekes, hogy csak az ázsiai származású tanulók körében fordul elő, hogy jobbak matematikából mint olvasásból. Az adatok 1998-ban, illetve 1996-ban végzett reprezentatív mérésekből származnak, a 12. osztályos fiatalokra vonatkoznak.

Etnikai, nyelvi csoport	A legmagasabb szintet elérő tanulók aránya saját csoportjukon belül, %-ban kifejezve		A jó szintet elérő tanulók aránya saját csoportjukon belül, %-ban kifejezve	
	Olvasás	Matematika	Olvasás	Matematika
Fehér	7	2	47	20
Ázsiai	6	7	38	33
Indián	3	0	27	3
Spanyol	2	0	26	6
Fekete	1	0	18	4

Teszteredmények, 12. évfolyam, USA reprezentatív minta, 1998 (olvasás) és 1996 (matematika). (Forrás: NAEP)

A lemorzsolódási adatok ugyanezt a tendenciát tükrözik. A hátrányos helyzetű, a többségtől eltérő szocio-kulturális háttérből származó fiatalok között magasabb a lemorzsolódási arány. Ezt a képet valamelyest módosítja az ázsiai fiatalok átlagosnál kisebb lemorzsolódási aránya. Az USA állami honlapról átvett grafikont a mellékelt CD-n közlöm<sup>3</sup>. A tanulók kategóriákba történő besorolásának szempontjait a jegyzetekben idézem, mert kötelezően, Európában szokatlan módon kategorizálják az iskolákban a tanulókat.

A kutatók az állami oktatási statisztikákon kívül más forrásokból is hozzájuthatnak az adatokhoz, például a hátrányos helyzetű tanulókat a kapott juttatások, étkezési és egyéb állami segélyek igénybevétele alapján azonosítják. Gyakran a másik oldalról közelítik meg a társadalmi helyzet és az iskolai eredmények közötti lehetséges összefüggéseket: a különböző tesztekben az alsó teljesítmény-harmadba kerülő tanulók családi hátterét igyekeznek feltárni.

### *Magyarázatok a gyengébb teljesítményre*

Sokan az itt bemutatott ellentmondást: a hátrányos helyzetű fiatalok egy kis részének a matematika területén elért jelentős sikerei, és nagy hányaduknak matematikatanulási kudarcai közötti feszültséget a tanulók motivátlanságával magyarázzák. Mi úgy gondoljuk, érdemes megvizsgálni alternatív magyarázatokat is. Sok kutatási eredmény utal arra, hogy a tanulók erős tanulási motivációval lépnek az iskolába, de ott kudarcok sorozata éri őket, így indokolatlan azt mondanunk, hogy motivátlanak, mégsem tudnak képességeiknek megfelelően teljesíteni. Az okokat keresve feltételezhetjük, hogy a hátrányos helyzetű tanulók gyenge iskolai matematikai eredményeit jelentősen befolyásolják azok a kulturális különbségek, amelyek a tanulók családjának kultúrája (pl. a szóbeliségnek nagyobb a jelentősége, mint az írásbeliségnek) és az iskolák középosztályra jellemző kultúrája között megfigyelhető. Ezek a különbségek tanítási órákon elsősorban a kommunikációs akadályokban jelentkeznek, amelyek azonban az órákat megtartó tanárok számára sokszor rejtve maradnak, miként azt a később elemzett kutatások be is bizonyítják.

A hátrányos helyzetű gyerekek többsége jó, néhányan kiemelkedően jó értelmi képességekkel rendelkezik, de nem alakulnak ki megfelelő mértékben azok a kompetenciáik, amelyek a hagyományos iskolai oktatáshoz szükségesek. A tanulásra való felkészültség és az iskolaérettség nagyon különböző lehet, erre több kutatás és az iskolai tapasztalatok is ráirányíthatják figyelmünket, pl. a higiénias szokások fejletlensége az osztálytermi munkát erősen akadályozza, de ez a matematikai képességek szempontjából indifferens jelenség.

A nyelvészetben a szociális dialektust vizsgálják, vagyis társadalmi csoportok szerint tagolt nyelvhasználatot, amely szerint a hátrányos helyzetből származó

---

<sup>3</sup> Lemorzsolódási arányok az USA-ban, a 15-24 éves népesség körében, 1972-2004 (NAEP)

gyerekek a saját környezetükben felmerülő szituációkban tökéletesen kommunikálnak, de az iskolai helyzetekben tanácstalanná válnak. A pedagógiai kutatásokban is elemezték a szimbólumokra, a kifinomult szóbeli, majd írásbeli kommunikációra épülő oktatási módszerek társadalmi hatásait. Sáska Géza (2006) megmutatta, hogy a társadalmakban az írásbeliség elterjedtségének történeti hagyományai milyen szoros kapcsolatban állnak az iskolai teljesítménnyel. A PISA eredmények nemcsak általában korrelálnak az egyes országok gazdasági-társadalmi fejlettségével, hanem szoros kapcsolatban vannak ezen belül egy sajátos elemmel, az európai alfabetizációval. Azok az országok értek el jó eredményeket a PISA matematika tesztjeiben is, ahol már a XX. század elején általános volt, még a falusi lakosság körében is, az írni-olvasni tudás.

### *Tanulmányok, óramegfigyelésre alapozott kutatások*

A kutatók azt tapasztalták, hogy az órai történésekből a tanárok keveset vettek észre, pontosabban félreértették a gyerekektől érkező jelzéseket (Tuveng – Wold, 2005), (Gorgorió – Planas, 2005). A norvég kutatásban eltér a gyerekek által beszélt nyelv és az oktatás nyelve, a spanyol példában a tanár is, meg a tanuló is spanyolul beszélt, de a diák annak egy Dél-Amerikában kialakult változatát beszélte.

#### *Egy norvég példa*

Két norvég pszichológus (Tuveng – Wold, 2005), egyikük nyelvész, másikuk matematikai végzettséggel is rendelkezik, egy norvég iskolában végzett vizsgálatában a matematikatanulás nyelvi problémáit kereste. Ebben a kutatásban osztálytermi keretek között vizsgálják a tanulók meglévő nyelvi kompetenciái és a tanuláshoz szükséges nyelvi kompetenciák közötti eltérést. A szerzők megkülönböztetik a megértés nyelvészeti és matematikai fogalmát. 10 matematikaórát figyeltek meg és rögzítettek 9-10 éves tanulókból álló csoportban. Ez a csoport egy fél osztály volt, a tanulók tizenegyen voltak, hatuknak norvég volt az anyanyelve, a többiek más nyelveken beszéltek, ők Indiából, Oroszországból, Horvátországból, Szomáliából érkeztek. A kutatók a diákokkal norvég nyelvi és matematikai teszteket töltek ki. Az órák után félig-strukturált interjúkat készítettek a matematikatanárral és a diákokkal. Azt tapasztalták, hogy a megfigyelt 10 óra alatt egyszer fordult elő, hogy az egyik külföldről érkezett diák megkérdezte egy számára idegen szó jelentését norvég társától, a pedagógustól nem kérdezték meg a szavak jelentését. Lehetséges, hogy nem is fordult elő más nyelvi probléma? Az interjúk során, amikor a tanárral együtt visszahallgatták az óráiról készült felvételeket, a pedagógus csak a tanítás logikai kérdéseivel foglalkozott, azon gondolkodott, hogy lehetett volna-e másképpen felépíteni valamelyik részletét az adott órának. Soha nem utalt a tanulók esetleges nyelvi problémáira, és a kutatók kérdéseire sem tudott felidézni ilyen esetet. A bevándorló családok gyerekei viszont az órák jelentős részében nem értették a tanár szavait. A tanulók közül csak az a két külföldi

gyerek, aki a legjobb eredményeket érte el a norvég és a matematika teszten is, tudta megfogalmazni az interjúban, hogy nyelvi problémái vannak, nem érti, hogy mi történik a matematika órákon. A beszélgetésekből az is világossá vált, hogy a norvég anyanyelvű tanulók sem mindig értették a feladatok szövegét. A külföldről érkezett tanulóknak a tanári közlések hétköznapi szavainak megértésével voltak gondjaik, így a matematikai problémákhoz gyakran el sem jutottak.

Rövid részlet egy tanulóval készült interjúból. Szonja igen tehetséges, mind matematikából, mind norvég nyelvből, ő érte el a legjobb eredményt a kisebbségi gyerekek között.

Kérdező: Kíváncsi vagyok, előfordult-e az órán, hogy csinálni kellett volna valamit, de nem értetted, hogy mit.

Szonja: Igen, néha.

Kérdező: Igen, néha. Néha a dolgok egy kicsit nehezek. Mit gondolsz, mi volt nehéz ma?

Szonja: Nem értem, mit mondanak.

Kérdező: Nem érted, mit mondanak, aha. De kik?

Szonja: Azt nem tudom pontosan.

Kérdező: Amit nem értesz, azt Karin (a tanítónő) mondja, vagy valami másról van szó?

Szonja: Néha megértem, amit Karin mond.

Kérdező: Néha megérted, amit Karin mond.

Szonja: De nem mindig.

Az interjúban, akárcsak az órákon, arra nem volt mód, hogy a gyerekek anyanyelvükön beszéljenek a nyelvi problémáikról. Nehéz helyzet áll elő: ahhoz, hogy a gyerekek segítséget kérhessenek, meg kell érteniük saját problémáikat és azt meg kell tudniuk fogalmazni - ehhez pedig fejlett metakognitív képességek kellenek, ami meghaladja a 8-9 évesek lehetőségeit. Így ők a problémák elrejtését választják, amivel aktuálisan elkerülik a konfliktusokat, de hosszabb távon akadályozzák saját fejlődésüket. Szonja igen aktívan részt vett az osztály életében, és csak a magnófelvétel visszahallgatásakor tűnt fel, hogy szinte sohasem beszélt. Viszont ha mégis megszólalt, remek volt a kiejtése, és egyébként igen jó kapcsolatban volt az osztálytársaival, és kitűnően mozgott. A társasági sikeréhez a nyelvi problémák elrejtésére volt szükség.

Részlet a tanárral készült interjúból:

Kérdező: Volt valami, amit a gyerekek azért nem tudtak megcsinálni, mert nem értették, mit kérsz? Vagy valami más ok lehetett a háttérben?

Karin, a tanítónő: Kevés időt szánnak rá. Nem gyakorolnak eleget.

Később Karin azt hangsúlyozta, hogy a matematika lényege a vizualitás, nem a szavakon múlik a megértése. A tanítónő szerint a tanulók nehézségeit a gyenge figyelmük okozza, valamint általában a speciális nevelési szükségletük, ami alatt az intellektuális fejlődésbeli lemaradást kell értenünk.

Karin azzal, hogy miről beszélt, illetve miről nem beszélt, mintát adott arra, hogy mi tartozik a matematika órára. Az órán elhangzó szavak jelentésének megkérdése nem való a matematika órára. Karin az új tananyag új matematikai szakkifejezésein kívül soha, egyetlen szó jelentését nem magyarázta el a tanulóknak, és nem is ellenőrizte, hogy értik-e a tanulók a szavait.

A vizsgálat fontos kutatómódszertani tapasztalatot is hozott: az órák gondos, több megfigyelő által végzett megfigyelése és az alkalmazott technikai eszközök ellenére egyedül az órai megfigyelésből nem derültek ki a tanulók nyelvi problémái, ehhez szükség volt az órákat követő interjúkra is (Tuveng-Wold, 2005).

### *A barcelonai kutatás*

Núria Gorgorio és Núria Planas Barcelonában végezték kutatásaikat a katalán oktatási minisztérium nagy összegű támogatásával a nem spanyol és nem katalán gyerekek iskolai matematikatanulására vonatkozóan (Gorgorio, Planas, 2005).

A globalizációs folyamatok hatására sok tanuló nem anyanyelvén és nem családjának hagyományos környezetében tanul. A kutatás igen jól dokumentált. Az órákon képmagnó-felvételeket készítettek, megfigyelő ült az osztályokban, és az óraleírásokat több szakértő elemezte. A kutatás eredménye: a kulturális különbségek megtalálhatók a matematikai műveltség hagyományos elemeiben, pl. a különböző kultúrákban másképpen írják a számokat, másféle mérési eljárásokat alkalmaznak, de ezek nem befolyásolják lényegesen a tanulási folyamatot. A fő különbség a matematikával összefüggő elvárásokban van és annak megítélésben, hogy mi a matematikai tudás személyes értéke az egyes tanulók számára. A matematikatanulás fontosságával kapcsolatban alakultak ki konfliktusok a tanulók és a tanárok között. Számunkra különösen érdekes a konfliktusok megnyilvánulása, maga az a tény, hogy egyáltalán felszínre kerültek a különféle értékek, a közöttük lévő konfliktusok, másrészt ezek megbeszélhetők voltak, nem ütköztek elutasításba.

Idézünk egy jellegzetes esetet a tanulmányból, egy rövid, az órán elhangzott dialógust:

Saima, egy indiai kislány: Tanárnő, rosszul érzem magam az Ön osztályában.

Tanár: Hogy érted ezt? Miért mondd?

Saima: Ugyanazt a matematikát tanulom, mint a fiúk, de én nem akarom ugyanazt a munkát végezni. Nem akarok mérnök lenni. Kérem, foglalkozhatnék lányoknak való matematikával?

Meglepő, hogy a kislány kifejezte érzéseit, mert Spanyolországban is jellemző, hogy a félreértéseknek, az eltérő tanulói igényeknek csak kisebbik része nyilvánul meg az órákon, nagyobb részük rejtve marad. Joel gondjai is csak az órát követő interjúban kerültek felszínre:

Kérdező: És mi a helyzet a matematikával? Nehezen megy?

Joel: Igen, de ez nem az én hibám.

Kérdező: Hogy érted ezt?

Joel: Karibi vagyok.

Kérdező: És ...? Mit akarsz ezzel mondani?

Joel: Nem vagyok katalán, nem vagyok spanyol. Amikor a tanárok beszélgetnek velem, azt hiszik spanyol vagyok, mert hasonlóan beszélek, mint ők. De hát láthatja, én néger vagyok!

Kérdező: Santo Domingóban nem spanyolul beszéltek?

Joel: De igen, de az egy másik spanyol nyelv. Vannak közös szavaink, de ennyi az egész!

Kérdező: Hm. Nézzük, mi történik a matek órákon!

Joel: A tanár nagyon kedves nő, igazán. Amikor rám néz, abbahagyja a katalánt és spanyolul kezd beszélni. Néha nagyon furcsa dolgokat mond, de ezt egyáltalán nem veszi észre. Higgyen nekem, én egyszerűen képtelen vagyok odafigyelni. (A párbeszédet a szerző fordította.)

A fiú meg tudta fogalmazni a problémáját, de csak a kutatóknak mondta el. Tanárának nem szólt annak ellenére, hogy kapcsolatuk elég jónak tűnik.

### *Egy ausztrál példa*

Ausztráliában a matematikatanárok többsége elfogadja, hogy a matematika kulturálisan meghatározott tantárgy egy multikulturális társadalomban. (Thomas, 1997, i.m. 35). A szélesebb közvélemény nem így gondolkodik: a matematikát kulturálisan semlegesnek tartja, amelynek tanulása során a diákok nyelvi gondjai nem akadályozzák a munkát. A tanulmányt író matematikatanár saját szociológiai ismereteire és empátiás képességére hagyatkozva oldotta meg a menekült gyerekek matematikatanulási problémáit. Az osztályában megjelenő kelet-timori menekültek nyilvánvalóan más kulturális háttérből származnak, mint az osztály többi tanulói. A tanár nem ismerte az új tanulók nyelvét, sajátos nemzeti kultúráját. A menekültek bizonytalan, átmeneti helyzete nem tette lehetővé, hogy a matematikatanár a tananyagot a gyerekekhez igazítsa, ezt elvi megfontolásból sem tartotta indokoltnak, mégis hatékonyan tudott segíteni tanítványainak. Ezt úgy oldotta meg, hogy kifejezte tiszteletét a más kultúra iránt, bátorította a tanulókat, hogy egymás között saját anyanyelvükön is beszéljék meg a tananyagot, és ő maga is nagy figyelmet fordított arra, hogy segítse a tanulókat, ugyanakkor kifejezze, hogy jó eredményeket vár el tőlük.



A kelet-timori menekültek megjelenése Ausztráliában változatos kérdéseket vetett fel és ráirányította a figyelmet a nem angolul beszélő, a nem a nyugati kultúrában nevelkedő tanulók problémáira. A szerző szerint a más anyanyelvű, más kultúrájú tanulóknak több időre van szükségük, több figyelmet, nagyobb empátiát igényelnek a tanároktól, mint a többségi gyerekek, de az egyenlő esélyek jobb megközelítése érdekében mindenkinek ugyanazt a tananyagot kell tanulnia.

### *Következtetésem a három röviden bemutatott kutatás alapján*

A tanítási órák hatékonyságát sok tényező befolyásolja, közöttük olyanok is, amelyek *a tanárok előtt rejtve maradnak*. A tanítási órákon zajló bonyolult folyamatok feltárására nagy szükség volna. E feladat aktualitása összefügg a hazánkban zajló társadalmi változásokkal is. Növekszik a társadalmi differenciáltság, ami abban is megnyilvánul, hogy az iskolák egy részében egyre nagyobb vagy talán egyre feltűnőbb a különbség a pedagógusok és tanítványaik szociokulturális hátterében. Tovább nehezíti a pedagógusok és természetesen a tanulók munkáját, hogy Magyarországon is megjelent az öröklődő munkanélküliség. A munkanélküli szülők családjában felnövekedő gyerekek számára nincsen olyan minta, ami segítené őket a rendszeresen ismétlődő feladatok megoldásában, a napirend megtartásában. A változó feltételekhez való alkalmazkodást könnyebbé tenné, ha a pedagógusoknak lehetőségük volna a rendszeres szakmai tapasztalatszerzésre, speciális szak módszertani ismeretek elmélyítésére. Ezt még ma Magyarországon sem a folyóiratok, sem egyéb intézményes tanárképzési formák nem tudják a szükséges mértékben biztosítani.

## ***A hátrányos helyzetű gyerekek és az iskolai matematikatanulás***

### *A tanulási folyamat logikája, a reprezentációs szintek*

A tanuláselméletek általában, mint például a mai oktatási gyakorlatot is erősen befolyásoló nagy pedagógusok, így Comenius és Herbart művei is, az adott kor iskolai oktatási gyakorlatából, annak hiányosságaiból kiindulva a tanulás általuk feltárt sajátosságaira építve adtak olyan elméleti megalapozást, amit később az iskolában törekedtek felhasználni. Bruner (1968) a tanulás és az iskolai tanulás fogalmát külön fogalomként értelmezi, és elemzi a kettő kapcsolatát. Bruner a szputnyik-sokk után kapcsolódott be az amerikai oktatási reformmozgalmakba, annak egyik magas tisztséget betöltő, sokat publikáló, vezető szakemberévé vált, aki ma is részt vesz a tudományos életben.

Elmélete nagy hatással volt a XX. és már mondhatjuk, a XXI. századi matematikadidaktikára is. Sok, azóta született mű alkalmazza a bruneri elméletet az oktatás valamely szintjére, valamely sajátos területére. Az elsősorban a tanárképzést szolgáló összefoglaló módszertani könyvekbe beépült a bruneri szemlélet (Ambrus A.; 1995, 2004, (Czeplédy, 1994). Más szerzők a matema-

tikatanulás valamely fontos részterületét emelik ki, pl. a fogalomalkotást és az algoritmusok tanulását (Pinto, Tall, 2002). Igen nagy irodalma van az értelmileg gátolt tanulók számára alkalmas gyógypedagógiai és gyógypedagógiai jellegű oktatásnak. A társadalmi helyzetük miatt hátrányos helyzetű tanulók esetében az elmélet konkretizálása még nem történt meg.

Munkámban építek a reprezentációs szintekre vonatkozó matematika-didaktikai kutatásoknak az utóbbi évtizedekben elért eredményeire, utalok itt Nakahara összefoglalójára (2008), de a dolgozatban – terjedelmi okok miatt – elsősorban azt mutatom meg, hogy Bruner több évtizede megjelent művei a hátrányos helyzetű tehetséges, 6-10 éves tanulókra vonatkozóan mit mondanak.

A tanulás még ma is élő, régi, a társadalmi környezettől elszigetelt fogalmát leginkább a Rousseau által megteremtett, idealizált magántanár-tanítvány viszony jeleníti meg. A valódi tanulás a diákok társas kapcsolataival szoros összefüggésben valósul meg, az iskolában és azon kívül is. Dolgozatomban igyekszem a bruneri elméletnek speciálisan az iskolai oktatásra vonatkozó oldalát kiemelni.

Az iskolai tanulás – a sok bekövetkezett változás ellenére is – elsősorban a beszélgetésen, tanári közléseken és az íráson-olvasáson keresztül történik. De ez nem a tanulás maga, hanem annak csak egy része. A teljes tanulási folyamat három, nem élesen elkülönülő szakaszból áll, amelyeket a három reprezentációs szinttel írhatunk le.

A konstruktivista tanuláselméletek egyik kulcsfogalma a mentális reprezentáció, amelynek előzményei Arisztotelész tükrözés-elméletéig vezethetők vissza. Ma a pszichológia és a pedagógia mellett a mesterséges intelligencia kutatásában játszik jelentős szerepet. Bruner a filozófia és a kognitív pszichológia reprezentációs elméleti megközelítését a tanulás gyakorlati fogalmára és ezáltal az iskolai tanulásra alkalmazta.

Bruner az iskolán kívül megszerzett tapasztalatokat igen fontosnak tartja, és a hatékonyabb tanulást lehetővé tevő tanórai munkát úgy tervezte meg, hogy abba beépítette azokat a folyamatokat is, amelyek egyébként az órán kívül zajlanak

A tanulás ebben az elméletben az a folyamat, amely során a külső valóság leképeződik az agyban, ez a tárgyi valóságtól való fokozatos eltávolodást jelent. A tárgyakat előbb képek helyettesítik (bizonyos esetekben a szagok, hangok és a valóság más emlékei is szerepet kapnak), később már a képekre sincs szükség, a valóságot a szimbólumok jelenítik meg, amelyek lehetnek szavak, jelek, formulák, vagy akár kotta is.

Bruner (1968) szerint három módja van annak, ahogyan a valóságot gondolkodásunkban leképezzük, ezek a cselekvésre alapozott, tárgyi reprezentáció (enaktív), a képi (ikonikus) (Bruner, 1968, 27-28. o.) és a szimbolikus (szövegekre, jelekre alapozott) reprezentáció. A fejlődés azt jelenti, hogy a leképezés mindhárom formájával egyre magasabb szinten rendelkezünk.

Ez a folyamat nem merev szakaszosságot jelent, hanem ciklikus ismétlődést, ahol az egyes szakaszok is átalakulhatnak egymásba, összefolyhatnak. Pl. az integráljel a kezdő tanulónak nagyon absztrakt szimbólum, a felsőoktatásban ikonikus jele lehet egy bonyolult összefüggésnek, annak viszont, aki valamilyen matematikai probléma megoldásán dolgozik, már szinte a tárgyi szintre jellemző konkrét jelentéssel bír.

A tanulás eredményessége érdekében minél változatosabb reprezentációs módokat szükséges a tanulók számára felkínálni, amelyek között ők viszonylagos szabadsággal mozoghatnak. A korábban elterjedt programozott oktatási elvekkel szemben Bruner elveti a merev, nagyon részletes előírásokat, mert szerinte a reprezentációs formák közötti átmenet rejtett (Bruner, i.m. 31. o.). Részben még kutatásra vár a szintek közötti kapcsolat, részben már tudható, hogy az átmenet természete olyan, amelyben nincsenek éles, pontosan megálapítható határok, az átmenet a reprezentációs formák között folytonos (Bruner, i.m. 96. o.) és állandóak a visszatérések, előreugrások. Tehát a tanulás hosszú és bonyolult folyamat, előre nem látható kitérőkkel és előreugrásokkal, amelyek a körülményektől, a tanuló pillanatnyi állapotától függenek. Az oktatásnak ezért egyszerre kell tervszerűnek lennie és szabadságot hagynia. Bruner sokszor ír arról, hogy nem lehet merev keretek közé szorítani a tanulási folyamatot. Azt is kiemeli, hogy ez nem azt jelenti, hogy a pedagógusnak nem kell megterveznie a folyamatot, hanem azt, hogy finom módszerekkel kell elemeznie, hogy mi történik, ennek milyen a kapcsolata az előzetes tervekhez és célokhoz, és az elemzés eredményeképpen kell döntenie az adott pillanatban történő beavatkozás jellegéről.

A reprezentációs elmélet már kezdetben összekapcsolódott a matematikatanítással. Egy matematikatanulási konferencia hatására, az ottani előadása nyomán született meg 1960-ban Bruner nagyjelentőségű könyve: *The Process of Education* (Cambridge, MA: Harvard University Press). A matematikatanulás kérdései később is rendszeresen visszatérnek műveiben. A következő példa a 60-as évekből származik, az 1966-os könyvben jelent meg, (magyarul Bruner, 1974). A folyamatot Bruner itt a 85-109. oldalon mutatja be, és több külön tanulmányt is írt e tárgyról (Bruner, 1974, 87. o. jegyzetei).

A kísérletben négy tanuló vett részt, kilencévesek, értelmiségi családból származtak, szüleik Bruner egyetemi kollégái voltak, magas, 120-130 közötti IQ-értéket mértek esetükben. A 4 gyerekkel 6 „tanító”, köztük Dienes Zoltán foglalkozott. 6 héten keresztül. Heti 4 alkalommal, két-két órán át tanultak matematikát a gyerekek. Számok tényezőkre bontásával, az összeadás és a szorzás disztributivitásával és kommutativitásával, valamint másodfokú függvényekkel foglalkoztak. Bruner természetesen maga is hangsúlyozza, hogy a helyzet nem tipikus. A kísérlet célja a tanulás vizsgálata volt, a munka a gondolkodási folyamat szerkezetéről adott felvilágosítást. Természetesen a résztvevő tanulók sokat fejlődtek, de a kutatók ezt külön mérésekkel nem dokumentálták.

A gyerekek építőkészletet kaptak, ezek elemei fából készült, nagy négyzetek voltak ismeretlen oldalhosszúsággal, valamint egység oldalú kis négyzetek és olyan tégl-

lapok, amelyek egyik oldala egységnyi volt, a másik pedig a nagy négyzet oldalával egyezett meg.

Bruner megjegyzi, hogy még ebben a kivételesen jó oktatási helyzetben sem volt könnyű ezeket az eszközöket a gyerekek kezébe adni, mert nehéz volt velük elfogadtatni, hogy a nagy négyzet oldalhossza egy rögzített, de pontosan nem meghatározott érték, amit szükségtelen, például vonalzóval, lemérni.

A Bruner által megtervezett kísérletben a gyerekek feladata az volt, hogy a készlet elemeiből nagyobb négyzeteket rakjanak ki. A gyerekeknek táblázatba kellett foglalniuk tapasztalataikat, amihez néhány speciális jelet is megismertek, esetükben szigorúan a modellekre vonatkoztatva. Például  $x^2 + 2x + 1 = (x + 1)(x + 1)$ .

Bruner kísérletében később áttértek a geometriai reprezentációról az algebraira, és a mérleg kiegyensúlyozásával jutottak általánosítható ismeretekhez, pl. ez a modell alkalmas magasabb fokú kifejezések bemutatására is.

Bár ez a vizsgálat nem osztályteremben, hanem különleges, laboratóriumi keretek között zajlott, és egyetemi tanárok gyerekei voltak a tanulók, mégis igen fontos tanulságot rejt a hátrányos helyzetű tanulók vonatkozásában is.

Az egyik tanulság, hogy a matematikai ismeretek szigorú egymásra épülésének elvét nem szabad mereven kezelnünk, a gyereki fejlődés menete eltérhet a matematikai fogalomalkotás szokásos menetétől, ezért jól megszervezett, tárgyi és képi reprezentáció esetén a tanulók képesek az egyébként nekik szánt tananyagnál sokkal mélyebb ismeretek elsajátítására is. Ez különösen fontos a megbízhatatlan előismeretekkel rendelkező tanulók oktatása esetében. A hiányzó előismeretek pótlása, a szokásos gyakorló feladatok monotonitása helyett a különleges új ismeretek megszerzése olyan tanulási örömet és sikert jelenthet, ami visszahat a kötelező tananyag elsajátítására is.

Bruner úgy véli, „hogy minden készségnek vagy tudásnak van megtanításra alkalmas változata, bármely életkorban kezdjük is a tanítást – bármennyire is előkészítő jellegű változatról van szó” (Bruner, 1968, 59. o.). Ez a többször visszatérő tétel bátorított arra, hogy a saját kutatásunkban a kísérleti csoportokban nehéz, kisiskoláskorban szokatlan témákkal foglalkozzunk.

A másik tanulság, hogy a szemléltetés sok megoldandó didaktikai feladatot jelent. Nem elég megmutatni a tárgyi eszközöket, azokhoz megoldandó, manipulatív feladatokat is kell rendelni, és gondoskodnunk kell a megszerzett ismeretek szimbolikus szinten történő rögzítéséről is. A tárgyakkal különös jelentősége van. Tárgyi tapasztalatok nélkül – amelyeket meg lehet szerezni az iskolában, vagy vissza lehet emlékezni korábbi tapasztalatokra – nincs mire épülnie az új ismeretnek, de a reflektálatlan tapasztalatokból értetlenség születik. Ha a gyerekek nem kapnak időben kellő segítséget, akkor egy matematikai fogalom tárgyi reprezentálására tervezett eszköz könnyen válhat a matematikai fogalom szimbólumává, így az enaktív szint helyett a tanulónak a szimbólumok szimbólumával kellene foglalkozniuk. A bemutatott matematikai példában az  $x$  oldalhosszúságú négyzet jelentett problémát, a gyerekek

kezdetben zavarba estek tőle, meg akarták mérni a hosszát. Iskolai tapasztalataim szerint hasonló helyzet állhat elő a logikai készség alkalmazásával is. Azok a gyerekek, akik korábban nem élték át a halmazba sorolás problémáit, pl. a színek szerint csoportosított kisautók esetében mit tegyenek egy többszínű autóval, a nagyon egyértelműen meghatározott elemeket tartalmazó készlettel dolgozva éppen a csoportosíthatóságot veszik nehezen észre. Számukra a logikai készség nem a korábbi tapasztalatok lényegét kiemelő eszköz, hanem egy olyan új játék, amivel nem tudják a matematikatanulás szempontjából megtervezett játékokat játszani.

### *A tanulás feltételei*

Ma a gyerekek túlnyomó többsége iskolában tanul, ezért a tanuláselméleteknek az iskolai tanulás szempontjából meghatározó elemeit emelem ki. (Bár ma sajnálatos módon éppen a hátrányos helyzetű, beilleszkedési nehézségekkel küzdő gyerekek egy részét helyezik magántanulói státuszba a pedagógiai problémákkal megbirkózni nem tudó iskolák. Korábban a leggazdagabb, illetve a valamilyen különleges tehetséggel rendelkező, például a sport, a zene, vagy éppen a sakk területén kiemelkedő diákok váltak csak magántanulóvá.) A közösségben történő tanulás előnye, hogy a tanuláshoz szükséges szociális tapasztalatok minden további szervezés nélkül adóttak.

A kognitív pszichológia a tanulást a korábbi elméleteknél sokkal szélesebb fogalomként értelmezi, a képességek fejlődését vizsgálja a régi tanuláselméletekkel (szöveges tanulás, mechanikus inger-válasz elmélet) szemben.

A korábbi tanuláselméletek a megértés folyamatát „fekete dobozként” kezelték, a látható, a viselkedésben közvetlenül megnyilvánuló jelenségekre koncentráltak. Arra helyezték a hangsúlyt, hogy hogyan érhető el, hogy a tanulók helyes választ adjanak a nekik feltett kérdésekre. Ezeket az irányzatokat újabban a szakirodalom összefoglalóan behaviorista tanuláselméletek néven említi, kitágítva ezzel a korábban csak egy irányzatra vonatkozó kifejezés jelentését. Ide tartoznak Skinner galambokkal végzett kísérletei, az inger-válasz elmélet és a programozott oktatást megalapozó elvek is, mint az azonnali megerősítés elve, a tananyag apró lépésekre bontásának elve. Jelentős változás következett be a 60-as években, amikor a több tudományterületen összegyűlt eredmények nyomán új tudományos részterületek jöttek létre. A pszichológiában a kognitív pszichológia, amely elsősorban a problémamegoldás folyamatát vizsgálta és emellett olyan magasabb rendű agyi folyamatokat is, mint pl. az emlékezés.

A pedagógiában a kognitív tanuláselméletek születtek meg, ezek között legjelentősebbek a konstruktivista tanuláselméletek, amelyeknek az elmúlt évtizedek során kialakultak radikális és mérsékelt változatai is. A konstruktivista tanuláselméletek két nagy pszichológus, Piaget (1999) és Vigotszkij (1966) életművét tekintik előzményüknek. Piaget a tanulónak a tárgyi valósággal való kapcsolatára helyezte a hangsúlyt, Vigotszkij a társas környezet jelentőségét emelte ki.

Piaget és Vigotszkij hangsúlyozzák, hogy a tanulás aktív folyamat, amelyben a tanulók nem befogadják a tudást, nem átveszik a tanárok által közvetített

ismereteket, hanem saját tapasztalataik alapján - amelyben az iskolai tanulmányok is jelentős szerepet játszanak - megkonstruálják azokat.

Ennek a konstrukciónak az alapja a gyerekekben meglévő fogalomcsíra. A mai pedagógiai elméletben általánosan elfogadott konstruktív nézet szerint, a tanulók nem lépésről lépésre gyűjtik be a tapasztalatokat és építik fel tudásukat, hanem a már meglévő, átfogó de még részletekben szegény világgépüket gazdagítják és formálják át folyamatosan a megszerzett új ismeretekkel, amelyeknek egyik fontos összetevője a tapasztalat.

Vigotszkij (1966) elmélete szerint az értelmi képességek fejlődését alapvetően a gyerek társas környezete határozza meg. Minden új képesség először az emberek közötti kapcsolatban jelenik meg, és csak később válik belsővé, a gyermeki gondolkodás részévé. Ezzel szorosan összefügg a legközelebbi fejlődési zóna elmélete: a gyermekek fejlődése szempontjából nem az a döntő, hogy egy adott pillanatban mit tud, hanem az, hogy mi az a szint, ahova el tud jutni. Ez a lehetőség is a társas kapcsolatban válik valósággá. Főműve az USA-ban 1962-ben jelent meg, és már a hatvanas évektől meghatározója az amerikai fejlődéselméleteknek.

A Piaget és Vigotszkij nézetei közötti ellentét matematikatanítási nézőpontból Cole és Wertsch (é. n.) nyomán úgy fogalmazható meg: mi segíti jobban a matematikatanulást, a pedagógus és a gyerekek beszélgetése, vitája vagy a gyerekek önálló kísérletezése, tárgyakkal, eszközökkel végzett manipulációja. A szerzők szerint az oktatási gyakorlatot tekintve az elméleti különbségek elmosódnak: sok tanulnivaló van Piaget-től is és Vigotszkijtól is, elveik a gyakorlatban összeegyeztethetők, jól kiegészítik egymást.

### *Az anyanyelv ismerete*

Ebben a részben az anyanyelv fontosságát emelem ki, de valójában egy nyelv fontosságáról van szó. Amennyiben az oktatás nem a kisgyerek anyanyelvéen történik, akkor az oktatás nyelvét kell a tanulónak jó színvonalon elsajátítania.

Az anyanyelvnek, a kisgyerek első nyelvének megtanulása rendkívül fontos a későbbi iskolai tanulás szempontjából, mert:

- A nyelv eszköze a tanulásnak
- A nyelv eredménye a tanulásnak
- Az első nyelv megtanulása modellje a későbbi tanulásnak

Az értelmi fejlődés tartalmazza az egyre növekvő képességet arra, hogy szavak vagy szimbólumok által cselekvéseinket vagy cselekvési szándékunkat önmagunkban tudatosítsuk és másokkal közöljük. (Bruner, i. m. 18-19. o.) Ebben a fejezetben Bruner 1968-ban magyarul is kiadott művére fogok hivatkozni, amennyiben egyéb utalás nem szerepel.

A nyelvi eszközök igen változatosak. Meg kell különböztetnünk a beszédet és az írást, mert az írás már önmagában két erős absztrakciót jelent. Megszűnik az

élőbeszéd anyagszerűsége, a hanghordozás, a hanglejtés, a szünetek és az egyéb szóbeli elemek hiányoznak, valamint nincs jelen a kommunikációs partner sem, az információ fogadóját a tanulónak el kell képzelnie. Elemezte Vigotszkij nyomán Bruner az írást és olvasást, mint másodlagos absztrakciót (i. m. 163. o.). A történelemben voltak olyan kultúrák, amelyek az írásbeliség nélkül is magas civilizációs szintre jutottak, illetve voltak olyan korszakok, amelyekben a művelt emberek sem tudtak írni-olvasni. Ma a tudományos nézetekkel való ismerkedésnek előfeltétele az írás-olvasás.

Az anyanyelv tanulásának szerepét Bruner kiemelkedően fontosnak tartja. Nem az az elsődleges, hogy a tanuló mondanivalóját szabatosan fogalmazhassa meg mások számára, bár természetesen ez is fontos, hanem az, hogy saját maga számára világosan fogalmazzon (i. m. 151-161.).

Később a kisgyerekek nyelvtanulásával külön kötetben is foglalkozott: Bruner (1983). Az 1966-os könyv megjelenésének idejében a nem angol anyanyelvű amerikaiak száma és aránya lényegesen kisebb volt a mainál, és sem az őslakosok, sem a régi sem az új, nem angol anyanyelvű bevándorlók problémái akkor még nem kerültek a politikai és pedagógiai érdeklődés előterébe. Valószínűleg ezért van, hogy Bruner nem differenciálta a nyelvi problémákat a gyerek anyanyelve, anyanyelvjárása és az oktatás nyelve közötti különbségek szerint. A nyelvi problémák kutatása a könyv megírása óta, és ebben Brunernek is jelentős szerepe van, kiszélesedett. A nyelvészek megkülönböztetnek nyelvfajlási zavart, ami az idegrendszer normálistól eltérő működésével van kapcsolatban, valamint a társadalmi elvárásoktól eltérő nyelvhasználatot. A probléma elméleti kérdéseivel először Bernstein foglalkozott. Az ő elmélete a korlátozott és kidolgozott kódokról sok jelenségre magyarázatot ad, de azóta lényegesen finomabb elemzésre van lehetőség a társadalmi dialektusok, a „social dialects” fogalmának bevezetésével. Az azonos nyelvet beszélők nyelvhasználatát nemcsak földrajzi régiók szerint térhet el, hanem az egyes társadalmilag meghatározott helyzetű csoportoknak is lehetnek sajátos nyelvváltozatuk, ami, néhány erre vonatkozó kutatás szerint, éppúgy akadályozhatja az iskolai történések megértését, mintha a tanulónak általa nem ismert nyelven kellene tanulnia.

A kommunikációs problémák sokszor nehezen észrevehetőek. Amikor a gyerekek a feltett kérdésre rossz választ adnak, Bruner szerint az a leghatékonyabb pedagógiai stratégia, ha kiderítjük, milyen kérdésre válaszoltak, mi az, amit ők megválasztak a mi kérdésünk helyett. Újabb vizsgálat is megerősítette annak fontosságát, hogy figyeljünk arra, vajon mire válaszolnak a gyerekek. Piaget híres korong-kísérletében, amelyben a mennyiségi állandóság kialakulását vizsgálta, a kisgyerekek a két, ugyanannyi korongot tartalmazó sor közül következetesen azt tartották nagyobbnak, amelyikben az elemek jobban szét voltak húzva, nagyobb helyet foglaltak el, akkor is, ha a hosszabb sorban kevesebb elem volt. Ellenben amikor korongok helyett, egy később megismételt kísérletben, csokoládé drázsékkal végezték el a kísérleteket, már nem lehetett őket becsapni. A nagyobb helyet, több teret foglal el és a nagyobb mennyiség közötti különbség a fogalmak szintjén még nem jelent meg a gyerekek gondolkozásában, de ha választaniuk kellett a számukra fontos dolgok, a csokoládé kupacok között, akkor tudták, melyik halmaz felé érdemes nyúlni.

### *A kíváncsiság és a tanulás vágya*

A hátrányos helyzetű, rossz tanulmányi eredményű tanulók esetében a matematikatanítás céljai sokszor nagyon lecsökkennek, cél a tanítási órák minél

kevesebb konfliktussal történő megtartása. Holott a tanulás akkor hatékony, ha az intenzív bekapcsolódást kíván a tanulóktól.

A tanulás Bruner szerint örömszerző tevékenység, és az iskolai oktatás célja, hogy a tanulók képesek legyenek átélni a tanulás örömét, és ezáltal elérjék a tanulás elvárt egyéb eredményeit is. A tanulásnak a kognitív tényezőkön túli személyes feltételeire Bruner többféle megközelítésben is utal. Külön fejezetet szentel a tanulás vágyának (i. m. 165-186). Ebben a tanulni akarás kérdésével foglalkozik. A tanulni akarásnak két alapvető összetevője van: a kíváncsiság és a kompetencia-motiváció.

A kíváncsiság biológiai örökségünk, a környezet felkutatására vonatkozó vágy nélkül nem volna lehetőség a túlélésre. Valamit tudni megcsinálni, vagyis a kompetencia-motiváció, szintén biológiai örökség. Az állatkölykök és az embergyerekek is kitartóan törekednek arra, hogy valamit meg tudjanak fogni, el tudjanak dobni, és így tovább, és ez láthatóan nagy örömet jelent számukra.

Az iskolai tanulás nem a gyerekek természetes érdeklődésén, önkéntelen figyelmén alapul, ezért a pedagógusoknak irányítaniuk kell a tanulók figyelmét. „A kíváncsiságnak erőteljesebb szellemi tevékenység medrébe való terelése éppen azt követeli, hogy a kíváncsiság passzív, receptív, epizodikus formájából átmenet jöjjön létre a kíváncsiság tartós és aktív formájába” (i. m. 170. o.). Itt a hagyományos motiválástól eltérő didaktikai feladatról van szó. Látványos, szórakoztató elemekre csak a tanulási folyamat egyes szakaszainak kezdetén van vagy lehet szükség, a későbbiekben maga a tanulási folyamat, a gyerek tevékenysége jelenti a motiváló erőt, mert „minden alapos ismeretszerzés ösztönző, jutalmazó” (i. m. 51. o.). A tanítási folyamat eredményességének tehát központi kérdése, hogy a gyerekekben eleve meglévő kíváncsiságot képes-e a tananyagra irányítani a tanár.

Az anyanyelv ismerete, a kíváncsiság, a tanulás vágya mind olyan feltétel, ami az elképzelt ideális magántanítványi viszonyban is és az iskolai órákon is szükséges az eredményes tanuláshoz. Azonban van az iskolai tanulásnak néhány olyan feltétele, ami a hagyományokon alapszik, ami a tömegoktatás követelményeiből származik. Ezek a feltételek nem a tanulást nehezítik meg, hanem csak annak kialakult iskolai formáit, de ezek nem teljesülése mégis a tanulásból zárja ki elsősorban a hátrányos helyzetű tanulókat.

A tanulónak a tanulásra alkalmasnak kell lennie, de (i. m. 50. o.) az alkalmasságra az iskolának kellene megtanítania az otthon nem felkészített gyerekeket. Az iskolában kezdetben az óvatosságot, a nőies finomságot várjuk el a tanulóktól, a felfedezés bátorsága helyett. „Iskoláinkban a gyerek elsőnek sokszor ezt tapasztalja: tanulni annyit jelent, hogy vissza kell emlékeznie valamire, amikor kérdéseket tesznek fel, holmijait valami meg nem határozott módon mindig rendben kell tartania, a gondolatok olyan menetét kell követnie, amelyet inkább kívülről diktálnak, semmint belülről erednek, és a helyes válaszért megjutalmazzák.” – írja Bruner a hatvanas évek amerikai iskolájáról,



ami a mi iskoláinkra is jellemző kép (i. m. 179. o.). A diákoknak meg kell tanulniuk, hogy a tanulás felfedezés, kaland, küzdelem, ami magában hordja saját jutalmát, a tanulás örömét. A tanulás nehéz pillanataiban dől el, hogy a tanulók milyen stratégiát választanak, a szembeszállást vagy a meghátrálást (i. m. 187-212). A tanulási akadályozottságból többnyire meghátrálás következik, a tanuló nem foglalkozik az adott feladattal, a helyett mással foglalkozik. Bruner felsorol saját pszichológusi tapasztalataiból olyan példákat, amikor a tanulás nem az ismeretszerzést, a több tudás elsajátítását szolgálja, hanem a családi, iskolai konfliktusok kezelésének félresikeredő eszköze. A tanulás lehet a családi hatalmi harcok eszköze, ahol a hatalomgyakorlás módja a nemtanulás is lehet. Lehet, hogy a tanuló a tananyaggal való foglalkozás helyett a tanárral vagy a tanulótársaival folytat harcot.

A tanulási akadályok sokszor irracionálisak, ezért irracionális eszközökkel is lehet segíteni a leküzdésüket. Egy kutatási programban Bruner tutorként foglalkozott egy tanulóval, akinek hibás mondatokat kellett nyelvtani házi feladatként átfőrnölnia. A tanuló félt, hogy nem fogja megtudni, hogy jó-e a megoldása. Bruner felajánlotta, hogy reggelenként olvassa fel neki telefonba a saját megoldását, amit Bruner meghallgat, de nem javít ki. Egy hét múlva a tanuló belejött az ilyen típusú feladatok megoldásába, és a tulajdonképpen irracionális telefonos segítséget már ő is szinte tréfának tekintette (i. m. 204. o.). Sokszor a kudarcok miatt rettegő tanulók félelmeit meglepő ötletekkel lehet csökkenteni.

A tanulás társas kapcsolat, ezért a tanulóhoz a tanulóknak az elemi társaskapcsolati kompetenciák birtokában kell lennie (i. m. 70. o.) Hiszen a tanulás, különösen kezdetben, legalább két embert, a tanulót és a tanárt feltételezi, azonban az órákon a többi tanulóval kialakuló kapcsolat is befolyásolja a tanulási szituációt. A tanulóknak meg kell tanulnia, hogy észrevegye, ha valamit nem ért, és képesnek kell lennie arra, hogy ezt jelezni tudja tanárának, majd később ez váljon saját magának szóló jelzéssé (i. m. 82. o.). Ez azonban igen magas szintű képességeket tételez fel, sok tanuló éppen ebből a szempontból szorul leginkább segítségre. A probléma észlelése és megfogalmazása metakogníciót igényel, a probléma kimondása pedig kommunikációs jártasságot és bátorságot. Az újabb kutatások szerint - ezekből később néhányat bemutatok - éppen azok a tanulók igyekeznek a leginkább elrejtetni a megértési problémáikat, akiknek pedig a legnagyobb szükségük volna segítségre. Ők így próbálják elkerülni a konfliktushelyzeteket, ezzel hosszú távon nagyon megnehezítik fejlődésüket.

Ahhoz, hogy a tanulók számára is jelentőséggel bírjon a tananyag, érdekessé kell tenni számukra. Bruner a társadalomismeret témakörében elemzi, hogy különleges, meglepő ismeretekkel lehet ráirányítani a tanulók figyelmét saját környezetük, a számukra ismerős világ sajátosságaira. A tanulók által elsajátítandó ismeretekhez látszólag felesleges, nagy kiterők végigjárása vezet

el. A társadalom életét két nagyon egyszerűen szervezett, néhány szempontból ellentétes, más szempontokból nagyon hasonlóan élő nép példáján mutatja be, az egyik egy eszkimó, a másik egy egyenlítői közösség. Az észak-amerikai és európai gyerekek számára egzotikus világ felkelti a gyerekek spontán érdeklődését, és ezáltal mély odafigyeléssel foglalkoznak olyan kérdésekkel is, amelyek a hagyományos tananyag részei.

Bruner alkalmazta a filmet is, mert " élénkíti a beszélgetést" (Az oktatás kultúrája, 110-113.). A tananyag gazdagítása a természettudományos tárgyakban és különösen a matematikában gyakran a tananyag nehezebbé tételét jelenti, azonban egyre bővülnek azok a tapasztalatok, amelyek azt mutatják, hogy a kötelező tananyagot túli ismeretek beépítése az iskolai tanulás folyamatába - ezekben a tantárgyakban is - megkönnyítheti a tanulást. A tananyag gazdagításának elve a matematikában úgy is megvalósítható, hogy a tananyaghoz közvetlenül nem kapcsolódó, didaktikailag megalapozottan kiválasztott, meglepetést okozó feladatokat adunk, amelyekkel segítjük a tanulókat, hogy jobban megértsék a kötelezően elsajátítandó ismereteket is.

A szellemi munka elemi technikáit a gyerekek jó esetben még az iskoláskor előtt, otthon tanulják meg (i. m. 47. o.), ilyenek a manipulálás, szemléltetés. A könnyen elterelhető, felszínes kíváncsiság helyett az elmélyült odafigyelést, a kitartó próbálkozást segítő környezetre van szükség.

### ***Az esélykompenzálás lehetőségei a matematikaoktatásban***

A hátrányos helyzet és a matematikatanulás összefüggéseit feltáró, összehasonlító elemzések még nem születtek meg. Egymással párhuzamosan futó, a gyakorlatban kialakult, elméletileg többé-kevésbé megalapozott fejlesztő programok vannak, amelyekből képet kaphatunk a szervezők pedagógiai nézeteiről, a felmerülő problémákról és a választott megoldási módszerekről is.

Szükséges-e a többségítő eltérő, más matematikatanítás a hátrányos helyzetű tanulók számára? Az alapkérdést illetően nincs egyetértés, de nincsenek viták sem, az ellentétes nézetek képviselői a matematikatanítás különböző területein, egymástól függetlenül építik fel saját programjaikat.

### ***Esélyjavító programok tartalmi és módszertani differenciálás nélkül***

Vannak olyan irányzatok, amelyek szerint semmilyen megkülönböztetés nem szükséges, mindenkinek ugyanazt a matematikát kell tanulnia, ugyanazon az úton, csak a hátrányos helyzetű tanulóknak több segítséget kell kapniuk tanáraiktól. Ebben az irányzatban azt tartják célszerűnek, ha a problémás tanulók egyenletesen elosztva vannak jelen az osztályokban. Sehol sem túl magas az arányuk, így a rájuk irányuló tanári többletfigyelem ellenére az osztály egészében a munka úgy folyhat, mintha nem is lennének hátrányos helyzetű tanulók az osztályban. Ezt a nézetet fogalmazta meg például a magyar és az USA-beli tapasztalatokra egyaránt hivatkozva a Kertesi-Kézdi szerzőpáros (2005).

A holland MATRA modellben szervezett többlettámogatást kapnak a rászoruló tanulók. Itt a hátrányos helyzetű családokkal való foglalkozással, a kisgyermekkorú intenzív fejlesztő programokkal, sok különórával és szabadidős tevékenységgel teszik alkalmassá a gyerekeket arra, hogy később zökkenők nélkül beilleszkedjenek az iskolai életbe. A holland programot már több országban, így Magyarországon is alkalmazzák (Bognár, 2005). A folyamatról kedvező a résztvevők véleménye, bár eredményeket még nem állapítottak meg. Ebben a modellben pozitív diszkriminációt alkalmaznak részben az iskolán kívül, részben az iskolákban. Hasonló modellt követnek sok magyar iskolában, órarendszerűen szervezett felzárkóztató programokat szerveznek: külön foglalkozások keretében kívánják megszüntetni a hátrányos helyzetű tanulók lemaradását annak érdekében, hogy a többiekkel együtt haladhassanak a matematikatanulás szokásos útján.

Az eddig említett programok közös vonása, hogy az iskolai oktatást lényegében változatlanul hagyva az egyes tanulóknak nyújtanak különböző formákban segítséget, hogy ők könnyebben alkalmazkodhassanak a változatlan iskolai feltételekhez.

Ezeknek a felzárkóztató programoknak az eddig tapasztalt csekély eredménye felértékeli az egyéb stratégiákat. Sokan úgy vélik, és én is úgy gondolom, hogy ezek a felzárkóztató programok eleve kudarcra vannak ítélve, hiszen azok a hátrányból induló gyerekeket ugyanazon az úton kívánják végigvezetni, mint a többségiakat. Azonban a hátrányok egyik összetevője éppen a lassabb haladási tempó, ezért a többiek utolérése reménytelen feladat. Tehát más segítő módszerre van szükség. Attól függően, hogy mit változtatnak meg a többségi matematikatanulási programokhoz képest, alakultak ki az eltérő megoldások. E programok közös vonása, amelyet sok amerikai matematikatanulási esélynövelő program tanulmányozása alapján állapítottam meg, hogy nem addig akarnak foglalkozni a tanulókkal, amíg ők utolérnek a többieket, ez általánosságban túlzottan magas, a tehetséges tanulók esetében pedig alacsony célkitűzés lenne, hanem olyan impulzusokat adnak a tanulóknak, amelyek hatására elindulhatnak a matematika tanulásának útján, és azon már érdeklődésüknek, tehetségüknek megfelelő, egyénekenként különböző távolságokra juthatnak el. Ezek az impulzusok nem egyszeriek, hanem hosszan tartó folyamatok keretében gyakran ismétlődnek. A következőkben a különböző amerikai programokra említünk néhány példát.

### *Az USA-ban alkalmazott néhány esélynövelő program*

A matematikai tehetséggondozás területén Magyarország nagyhatalom, a világ matematikai tehetséggondozással foglalkozó szaktekintélyei odafigyelnek a magyar módszerekre, sok elemét átveszik. A Középiskolai Matematikai Lapok világszerte nagy népszerűségnek örvend, különösen, amióta angolul is megjelenik. Mégis érdemes megvizsgálnunk, mi történik az Egyesült Államokban, hogyan foglalkoznak ott a hátrányos helyzetű fiatalokkal, hogyan keresik a

tehetségigéretet. Több olyan kezdeményezés is van, amelyben a matematikai tehetséggondozás a tehetség felfedezése előtt megkezdődik. Erről a látszólagos ellentmondásról és a feloldásáról szól a dolgozat következő része.

Az USA kisebbségi matematikatanítását két elv kölcsönhatása teszi izgalmassá, változatossá.

Az egyik az ország *demokratikus hagyománya*, az egyenlőség illúziója és vágya, amelynek pedagógiai vonatkozásairól Dewey nagyon határozottan írt: az iskolának egyenlő esélyeket kell adnia. Ezt a cél többféle iskolai mozgalom és a törvények is segítik például azzal, hogy a tanulók származása nyilvántartható, a rászoruló megatallása és a folyamatok ellenőrzése könnyebb mint Európában. A „senkit sem hagyunk le” (No Child Left Behind) törvény<sup>4</sup> a hátrányos helyzetűek pozitív diszkriminációját jelenti, olyan programok támogatását, amelyek az esélyeket növelik. Ez kormányzati ellenőrzéssel, támogatással történik.

A másik elv az *egyéni szabadság*, a korlátlan lehetőségek elve – vagy inkább vágya – szerint a kitűnőségeknek joguk van a legjobb oktatásra. A tehetségeseknek joguk van a tehetségük kibontakoztatására, ez nekik és az országnak egyaránt érdeke. Joguk van az egyéni utakhoz, akkor is, ha ennek az egyenlő esélyeket csökkentő hatása is lehet.

A két elv egyidejű érvényesülését a hátrányos helyzetű tehetséges tanulóknak nyújtott speciális képzési formák keretében törekednek megvalósítani. A fejlesztő programokban figyelembe veszik, hogy a tanulás feltételei közül a tanulni akarás képessége függ leginkább az otthoni környezettől, ezért nem a programba belépéskor, hanem a folyamat végén kell a diákoknak dönteniük arról, hogy akarnak-e matematikával foglalkozni. Csak a tehetséggondozó program első szakaszából való kilépéskor, tehát a segítő szakasz végén, az egyéni sajátosságokhoz is alkalmazkodó fejlesztő program hatásait figyelembe véve foglalkoznak a pedagógusok azzal, hogy tehetséges-e a tanuló, és mihez van tehetsége.

A matematikai tehetséggondozó programokban a választott célcsoport, például az indián tanulók közül bárki bekapcsolódhat a programba anélkül, hogy ehhez előzetes feltételeket szabnának, ez a demokratikus elv érvényesülése. A gyerekek érdeklődéséhez igazított magas színvonalú tananyag pedig a matematikai tehetség felismerését és kibontakoztatását teszi lehetővé. A látszólag egymásnak ellentmondó célok: *a lemorzsolódás megakadályozása és a legmagasabb szintű továbbtanulásra való felkészítés* sok programban egyidejűleg, integráltan történik. A No Child Left Behind programok ellenőrzésértékelése során is mindig együtt figyelik és értékelik a lemorzsolódási adatokat és azt, hogy hogyan gondoskodnak az iskolák a tehetségesekről. Ez az integrált szemlélet jelenti az amerikai tehetséggondozó programok újszerűségét.

---

<sup>4</sup> A No Child Left Behind program aktuális helyzetéről, problémáiról lásd: <http://www.ed.gov/nclb/landing.jhtml>

A hátrányos helyzetű tanuló politikailag korrekt, pedagógiai célokra alkalmazott amerikai elnevezése: a tudományos életben alulreprezentált kisebbségek tagja. Ők alkotják a következő részben bemutatott fejlesztő programok célcsoportját. Az összehasonlító elemzéseket az internetről gyűjtött, egyetemi és oktatásirányítási dokumentumok alapján végeztem.

### *A SUMMA kutatócsoport*

Az Amerikai Matematikai Társaság keretein belül működik egy kutatócsoport SUMMA (Strengthening Underrepresented Minority Mathematics Achievement) elnevezéssel<sup>5</sup>, amelynek célja, hogy a kisebbségeket segítsék jó matematikai teljesítmények elérésében. Az eredeti fogalmazás magyarul csak körülményesen írható le: matematikai kutatásokban nem résztvevő (még nagyobb korrektségre törekvő megfogalmazásban: önmagukat a számarányuknál kisebb létszámban képviselő) csoportok segítése. A kutatócsoport foglalkozik az iskolai oktatásra háruló feladatokkal is.

### *A Berkeley Egyetem programjai*

Berkeley-ben van a központja a *SEED Project*-nek, a Speciális nevelési szükségletű diákok tanulásával foglalkozó programnak.

A William F. Johntz elveire épülő program szerint azoknak a fiataloknak, akik már kudarcot vallottak matematikából, nem az iskolában egyszer már végigjárt utat kell követniük, hanem a magas presztízsű felsőbb matematikával való ismerkedés keretében kell elsajátítaniuk a továbbtanuláshoz és az iskolai zárótesztek sikeres megírásához szükséges matematikai alapismereteket (Burn, 1995).

Az egyetemen a kisebbségi, afro-amerikai hallgatók matematikatudásának problémáit is vizsgálták, és megoldásokat kerestek rájuk a *Merit* program keretében, amelynek főbb sajátosságait a következőkben foglalom össze:

1. rámutat a tévedésre: motivátlanságot feltételeznek a fekete fiatalokról, holott sok fekete fiatal magasan motivált, csak a sorozatos kudarcok miatt marad le
2. nem a felzárkóztatásra törekszik a program, hanem annál többre, a kiválóság elérésére biztatják a fiatalokat
3. a kiscsoportos tanulásnak kiemelt szerepe van, mert a közösség megerősítésén keresztül emeli tagjainak tanulási motivációt a tanulás nehéz pillanataiban
4. az egyéni tutorálás szintén szerepet kap a programban

A program 2002-ben lezárult.<sup>6</sup> Jelenleg a Berkeley Egyetem matematikai köröket szervez a tehetséges diákoknak, követve a magyar, orosz és más kelet-európai hagyományokat<sup>7</sup>.

<sup>5</sup> SUMMA: [http://www.maa.org/summa/archive/summa\\_wl.htm](http://www.maa.org/summa/archive/summa_wl.htm)

<sup>6</sup> Merit: <http://www.nationalmerit.org/nmsp.php>,  
[http://en.wikipedia.org/wiki/National\\_Merit\\_Scholarship\\_Program#Criticism](http://en.wikipedia.org/wiki/National_Merit_Scholarship_Program#Criticism)

### *Kétnyelvűséggel a globális társadalomért*

A Kétnyelvűséggel a globális társadalomért, Bilingual Literacy For A Global Society<sup>8</sup> programban a nyelvi hátrányok leküzdésére azt a módszert választják, hogy a matematikát az iskolába lépéstől kezdve két nyelven, angolul és a gyerekek anyanyelvén, spanyolul tanítják. A legújabb vizsgálatok alapján ez a szép elv eltorzult, hatásában az ellenkezőjére fordult: a kezdő szakasz végén a gyerekek nyelvi tesztekkel oldanak meg, és csak a leggyengébben teljesítők kerülnek a kétnyelvű osztályba. Tehát a kétnyelvű oktatás a hátrányos helyzetű tanulók szegregációjának legális módszerévé változott, ezért több amerikai államban betiltották a kétnyelvűséghez való alkalmazkodásnak ezt a formáját.

### *Newcomers programok*

A bevándorlók (newcomers<sup>9</sup>) esélyeit növelő, központilag szervezett programok is vannak. Nemcsak az ország hagyományos kisebbségei, hanem a bevándorló családok gyermekei is hátrányos helyzetben vannak az iskolákban. Az ő megsegítésüket tűzte ki célul a Newcomers mozgalom. Sajátossága, hogy az érintett pedagógusok rendszeresen találkoznak egymással, közösen oldják meg az oktatás során felmerülő problémákat. Kidolgozták értékelési rendszerüket, a bekapcsolódó iskolák tevékenységét igen részletes, kérdőíves módszerrel ellenőrzik és értéklik<sup>10</sup>.

### *Következtetésem*

A programokról nem készültek összehasonlító elemzések. Az általam elérhető források alapján megállapítható, hogy sikerüknek sok összetevője van. Először is matematikailag, pedagógiaiilag jól megalapozott programokról van szó. Másodszor: a programba bekerülő fiatalok érzik a feléjük áramló bizalmat, és a személyre szóló törődéssel együtt járó magas elvárásokat. Harmadszor ezekbe a csoportokba nem kerülnek be az eleve előnyös helyzetből indulók, egyrészt azért, mert számukra van sok egyéb szervezett lehetőség, és így nem is kíváncsiak bekerülni, másrészt azért, mert ezeket a programokat gyakran etnikai, nemzetiségi és ezekhez hasonló kritériumok alapján szervezik: például az indiánoknak, vagy a spanyol anyanyelvűeknek, így mások nem is jelentkezhetnek. Ez azért fontos, mert a teljesítménymérések sokszor és egybehangzóan kimutatták, hogy a hátrányos helyzet megszüntetésére alkalmazott, hatékonynak látszó módszerek eredményeképpen minden tanuló fejlődik, de azok, akik jobb helyzetből indulnak, gyorsabban fejlődnek, így a jobb egyéni és jobb átlageredmények mellett a különbségek tovább nőnek, a

---

<sup>7</sup> Mathematics Circle

<http://mathcircle.berkeley.edu/index.php?option=bmc|program|Program>

<sup>8</sup> An Idea Book on Dual Language Education. by K. Lindholm-Leary, 2000., <http://www.ncela.gwu.edu/pubs/ideabook/dual/index.htm>

<sup>9</sup> <http://www.ncela.gwu.edu/resabout/programs/newcomerOELA03.pdf>

<sup>10</sup> First National Conference for Educators of Newcomer Students and Pilot Study on Newcomer Program Literacy and Assessment Practices

hátrányok megmaradnak. A sikeres esélynövelő programok kezdeti szakaszában a hátrányos helyzetű tanulóknak nem kell megküzdniük az előnyből indulókkal. A lassabban haladó tanulók frusztrációját csökkentheti a tanulók időszakos elkülönítése egymástól. Ezt a megoldást Magyarországon Pósa Lajos (1995) is alkalmazza tehetséggondozó szakkörein: a munka egyes szakaszaiban a diákok nem látják gyorsabban dolgozó társaikat, így saját tempójukban, önállóan, kudarcok nélkül tudják megoldani a matematikai problémákat.

Az esélyegyenlőtlenség csökkentése érdekében kialakított programok speciálisan a hátrányos helyzethez alkalmazkodnak. Kiemelem legjellegzetesebb vonásaikat:

- A szervezés szempontjából: nincs előzetes válogatás, kemény felvételi vizsga, az ismert hátráltató okok miatt elegendő a leendő tanulók érdeklődése.

- A tananyag kiválasztása szerint: bátran választanak olyan matematikai problémákat és olyan módszereket, amelyek a közoktatás egésze szempontjából nehéznek minősülnek.

- A fejlesztő programok nem az iskolai tananyag ismétlésével kezdődnek. Kezdetben a gyakorlás helyett kreativitást igénylő és az adott előképzettséggel már éppen megoldható matematikai problémákkal foglalkoznak, akkor is, ha a feladatban szereplő kérdések pontos megválaszolására, a számítások elvégzésére még nincs lehetőség.

A matematikatanulást hátrányos társadalmi helyzetben segítő programok azt mutatják, hogy nincsenek titkos receptek, hanem szokatlan, de bárki számára megismerhető stratégiák vannak, amelyeknek közös vonása, hogy elindítják a tanulókat a matematika felé vezető úton. Ezeknek az impulzusokat adó programoknak a tapasztalatai a magyar iskolákban is felhasználhatók az esélyek javítására.

### ***Az igényes matematikatanulás feltételeinek vizsgálata, a teljesítménymotiváció szituatív mérése***

A hátrányos helyzetű tanulók tanulási problémáinak hátterében a pedagógusok gyakran a tanulók motivátlanságát feltételezik. Úgy gondolom, valódi motivátlanság, a tanulás elutasítása igen ritka, és akkor is inkább csak az idősebb tanulók körében fordul elő. A kisiskolások motivációjának megismerésére Kuhl (1999) megszerkesztett egy mérőeszközt, amelyet Vásárhelyi Éva alkalmazott Magyarországon. Vásárhelyi Éva útmutatása alapján módomban volt megismerni a vizsgálati eszközt, és a szerzőtől írásos engedélyt kaptam, hogy azt átdolgozzam a kisiskolások didaktikai célú vizsgálatára. A dolgozatnak ebben a részében az eredeti mérőeszközt mutatom be, azokat az elemeket kihangsúlyozva, amelyeket majd az empirikus részben magam is felhasználok.

A tanulás, ezen belül a matematikatanulás pszichológiájának kérdése sokoldalúan vizsgált terület, most csak Klein Sándor (1980) kutatásaira utalok. Dolgozatomban egy részterületet, a tanulók motivációját emelem ki. Olyan tanulók, akik látszólag motiválatlanok, nem, vagy nem szívesen végzik az iskolai feladatokat, bármely családi háttérből kikerülhetnek, de különösen nagy gondot a hátrányos helyzetű családok gyermekei esetében jelentenek. Fontos megvizsgálni, hogy az iskolai tanulással szembeni ellenszenv nagy valószínűséggel miből származik: a személyiség struktúrája tér el ezeknek a tanulóknak az átlagos tanulókétól, és ebben az esetben komplex pedagógiai-pszichológiai támogatást is igényelnek, vagy pedig kíváncsi, tanulni vágyó diákokról van szó, akik az iskolában tanulási akadályokba ütköznek, és ezért elsősorban tantárgypedagógiai elemzésekkel és változtatásokkal segíthetjük őket. Feltételezem, hogy az iskolában rosszul teljesítő, nehezen tanuló 6-10 éves gyerekek többsége esetében ez utóbbiról van szó, ezért a motiváció a vizsgálatunk egyik fontos problémája.

### *Az OMT teszt*

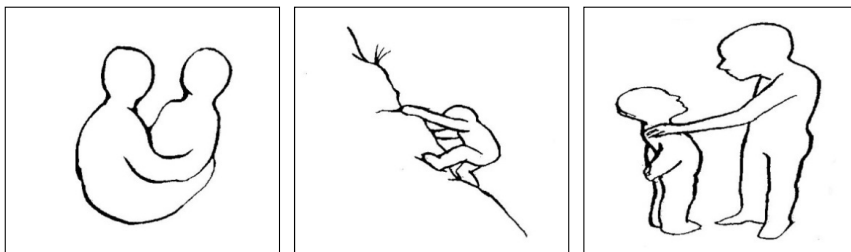
Az OMT teszt (Kuhl, 1999) a dinamikus személyiségtesztek közé tartozik. A legkomplexebb motivációs térkép létrehozását teszi lehetővé. Elméleti háttere a személyiség és a környezet interakciójának elemzése. A személyiség hajtóerőit vizsgálja három nagy területen. Egységben vizsgálja a motivációk értelmi és érzelmi meghatározottságát.

A személyiség önszabályozó funkcióit a tesztben a szerző egy új, saját fejlesztésű eszközzel, egy projektív teszttel méri. A dinamikus szemléletnek megfelelően ahhoz, hogy a személyiség mozgatórugói működésbe lépjenek, a vizsgálati személyeket kihívást jelentő szituációba helyezik. Ezt olyan képsorozattal valósítják meg, ami erős felhívó jelleggel rendelkezik. A tesztben alkalmazott 15 kép közül azt a hármat mutatom be, amelyeket az empirikus vizsgálat előmérés szakaszában alkalmaztam is. Az egyes képek a három motívumcsoport 5-5 ábrás sorozatának indító képei.

A különböző lélektani állapotokat előhívó ábrákon látszólag egyszerű, hétköznapi jelenetek vannak, ezek azonban a hozzájuk tartozó kérdésekkel együtt: Kik vannak a képen? Mi történik? Hogy érzik magukat a szereplők? Miért érzik így magukat? Mi fog történni ezután? - kiváltják a vizsgálati személyek érzelmeit és közlési vágyát is.



### OMT teszt feladatlapok



A motívumcsoportok: a Kötődés (kapcsolat), a Teljesítmény (kompetencia), a Hatalom (érvényesülés). Ezeknek öt szintjét állapítja meg a teszt. A tanulók válaszait e szinteken kell elhelyeznünk. A részletes besorolási útmutató néhány jellegzetes elemét kiemelem.

#### Motiváció

A pszichológiából származó fogalomnak nagy a jelentősége a pedagógiában. A motiválásra sok pedagógiai kutatás irányult.

A sok és szerteágazó pedagógiai feladat közül a matematika iránti érdeklődés felkeltése talán a legnehezebb. E téren új kutatási irányzat alakult ki, amely a könnyebb felismerhetőség érdekében a motiváció elnevezést új jelzővel látta el, így keletkezett a mastery motivation fogalma, ami magyarul 'elsajátítási motiváció'-ként látszik elterjedni (Józsa, 2007). A Bruner által is felvetett gondolatokat, hogy a kíváncsiság és a kompetenciaigény ősi örökségünk, neuropszichológiai és nagymintás statisztikai vizsgálatok is igazolták. Újabb megfogalmazásban: az emberek velük született tulajdonsága a környezet felfedezésére irányuló kíváncsiság, valamint a képességek „öncélú” fejlesztésének igénye. Ezek a kutatások más megvilágításba helyezik a matematika-didaktika feladatait: a motiválás nem külső eszköz, hanem fundamentális elv: a tanulás örömeinek megőrzésére, fenntartására kell törekednünk.

A motiválás matematikaórán alkalmazható eszközeit Czeglédy István foglalta össze módszertan könyvében (1994)

- A tananyag tartalmából adódó lehetőségek
- Az alkalmazott módszerek, eszközök, munkaformák motivációs lehetőségei
- Az értékelés mint motiváló tényező
- A tanár személyiségjellemzői mint motívumok

#### Motívumcsoportok

Kuhl három motívumcsoport 5-5 szintjét különbözteti meg:

Kötődés (kapcsolat, jele A)

A1 örömteli, érzelmi részvétel a kapcsolatban

A2 barátkozás, kifelé irányuló, felszínesebb kapcsolat

A3 a visszautasítás pozitív kezelése

A4 biztonságra törekvés

A5 függés, magány, mellőzöttség

Teljesítménymotiváció (kompetencia, jele I),

I1 öröm egy tevékenységben, kíváncsiság

I2 elismerés-motiváltság

I3 kudarc-legyőzés, egy feladat elkerülése

I4 kudarckerülés (semmitse elrontani)

I5 tanácstalanság, félelem

Hatalom, hierarchia (a társas kapcsolatokban elfoglalt helyzethez való alkalmazkodás, jele M)

M1 vezetés, együttérzés, mások segítése

M2 elismerést, tekintélyt kivívni

M3 önigazolás, érzelem, pl. harag kinyilvánítása

M4 félelem a hatalom elvesztésétől, másik oldalról: kötelességérzet

M5 tehetelenség, büntudat.

#### *Az OMT teszt*

- az örömmel végzett tevékenységet,
- a meleg érzelmi kapcsolat kialakításának képességét és
- a hatalomnak a másokat segítő vonását

tekinti leginkább pozitívnak, a szorongást, a félelmet, az elhagyatottság-érzést pedig a legnegatívabbnak. A közömbösség a válaszok elutasításában, elviccelésében jelenhet meg.

#### *Pedagógiai alkalmazás*

A háttérben álló mély személyiséglélektani eredményekre építve, de azokból csak a pedagógiai folyamatokban közvetlenül használható elemekre koncentrálna a teszt alkalmazható a tanulási folyamat optimalizálására (Vásárhelyi, 2008). A diákoknak a három skálán való elhelyezkedését mutató adatokból a pedagógusok a tanítási órákon alkalmazható, a diákok egyéni sajátosságaihoz illeszkedő módszertani segítséget kaphatnak. A teszt segítséget nyújt abban, hogy a pedagógusok megtalálják azt az egy-két tanulót, akik intenzív támogatásra szorulnak, a többiek esetében pedig elsősorban arról van szó, hogy a tanulók maguk választhassanak munkaformák, tanulási szervezési formák és feladatok közül az órák oktatási és nevelési feladataival összefüggésben.

A teszt pedagógiai alkalmazhatóságának éppen az ad különös jelentőséget, hogy a személyre szabott nevelési módszerek a tanuláson, a tanulás sikeresebbé és örömtelibbé tételén keresztül érvényesülnek. Ennek következtében ez a vizsgálat és a ráépülő egyéni pedagógia egyedülálló a nemzetközi szakirodalomban.

A gyakorlatban esetenként megfigyelhető tendenciával szemben az OMT eredményekre épülő alkalmazkodás a tanulókhöz nem merül ki abban, hogy a tanulók által mutatott képességnek látszólag megfelelően csökkentjük az egyes tanulókkal szemben támasztott követelményeket. Itt a siker elérését segítjük, elsősorban azáltal differenciálva, hogy mely tanulóktól várunk el önálló döntéseket, és kiket segítünk a döntések meghozatalában, illetve kiket mentünk fel a döntések felelőssége alól a számukra megfelelő munkaformák és feladatok kijelölésével.

Vásárhelyi Éva (Vásárhelyi, 2008) kutatásokat végzett azért, hogy az OMT teszt tapasztalatai a iskolai munkában is alkalmazhatóak legyenek. A tanulók egyéni sajátosságainak személyiségdinamikai összetevőiből származtat oktatási-nevelési feladatokat és megoldási javaslatokat. E munka nagy értéke, hogy a személyiségjellemzők és a pedagógiai munka közötti kapcsolatokat sok szinten dolgozza ki. A vizsgálati adatok komplex elemzésén alapuló hosszútávú fejlesztési feladatok mellett óraszervezési javaslatokat is találunk. E dolgozat keretei között csak néhány, a matematika órán alkalmazható gondolatot emelek ki.

### *A Kapcsolat motívumcsoport*

(A dolgozat e részében az eredeti skála szerinti jelöléseket alkalmazom, az empirikus részben megfordítom az irányt, hogy az illeszkedjen az osztályzatokhoz.)

A1 besorolást kapnak azok a tanulók, akik a személyes kapcsolat intimitását veszik észre, fogalmazzák meg a rajzok láttán, jellemzője a „melegség”. Itt e motívum megőrzése a pedagógiai cél és ennek kiaknázása az eredményes tanulás érdekében. Várhatóan a tanulók kiscsoportban, maximum négyfős kiscsoportban tudnak legjobban dolgozni, és a csoporttagok választását rájuk lehet bízni.

A2 besorolás az „egyenrangú” kapcsolat. E tanulók számára már nem olyan természetes a kapcsolatok kialakítása, ők ebbe sok energiát fektetnek, valószínűleg többet is, mint a tanulásba. Itt a tanulók számára a projekt munka az ideális és olyan részfeladatok az érintett tanulóknak, ahol nekik személyesen kell felelősséget vállalniuk a munka sikeréért a többi tanuló érdekében.

Az A3 a megküzdő tanuló, aki „felveszi a kesztyűt”. Számára fontos, hogy szabadon választhassa a szociális formát. Ő a körülményektől függően egyaránt jól tud önállóan és csoportban is dolgozni.

Az A4 csoportban is küzd a tanuló a közvetlen társas kapcsolatokért, de félénk, sokszor sikertelenek a próbálkozásai. Ő nem tud csoportot választani, számára jó megoldás az osztálymunka, illetve a pedagógus által jól összeállított csoport, amelyben barátai, lehetséges barátai vannak. Itt a tanulás segítőjévé válhat a társaskapcsolati kompetenciák fejlődésének, segítheti a tanulót az egyedüllét elleni küzdelemben.

Az A5 tanuló már egyedül van, és önállóan nem is képes változtatni ezen a helyzeten, nem küzd a számára is fontos kapcsolatokért. A tanár feladata, hogy beillesse, integrálja vagy reintegrálja a tanulót a csoportba. Kezdetben úgy, hogy maga kezdeményez kapcsolatot a tanulóval, majd később ebbe a páros kapcsolatba más tanulókat is bevon. A tanár katalizátor szerepet tölt be. A gyerekek elszigetelődése származhat iskolai konfliktusokból is és otthoni problémákból is, mindkét esetben gyógyító hatású lehet a pedagógusok segítő beavatkozása.

### *A Teljesítmény motívumcsoport*

L1: Ő az, aki „tüzet fog”, és hagyhatjuk őt dolgozni. Szociális és emocionális segítségre lehet szüksége, arra, hogy a pedagógus behívja a közös munkába. Önmagától a páros munkát - egy baráttal közösen - vagy az egyéni munkát választja.

L2: a külső normák szabályozzák, mások által is elismert teljesítményre törekszik. Számára hasznos, ha a szabadon választható feladatok mellett a megoldásukért kapható pontszámot is feltüntetjük, vagyis fontos a formális kritériumok explicit kifejtése. Az így kapott pozitív teljesítmény-visszajelzés az elégedettség forrása.

L3: számára a teljesítés kihívás, nagy feladat. Kudarcot is el tud viselni, de nagy szüksége van a külső visszajelzésre, szükségesegek az apró biztosítékok a sikerre. (Ide tartoznak általában a hátrányos helyzetű gyerekek, a későbbi iskolaévek során. Az iskolakezdekéskor még az otthoni magabiztossággal kezelik a projektív teszt helyzeteit, az iskolai kudarcok később generalizálódnak.)

L4: ők a kudarckerülő gyerekek. Meg kell tanulniuk a kudarcokat is kezelni. Számukra tervezni kell a sikerélményt, a háttérből támogatni őket. Fontos megvárni, amíg ők kérik a segítséget, mert ezzel is erősítjük azt az érzést, hogy képesek uralni a helyzetet a kisebb-nagyobb kudarcok ellenére is.

L5: ők a bizonytalan helyzetbe sodródott kudarckerülők, már nem bíznak a sikerben. Rajtuk vonatkoztatási személy tud csak segíteni, olyan domináns és szeretett felnőtt, akitől elfogadják a dicséretet. Számukra fontos, hogy a segítség szinte láthatatlan legyen, természetes módon következzen egy-egy adott szituációból. Elképzelhető, hogy más gyerekekkel is együtt tudnak működni, de ez sokszor a véletleneken múlik.

A skálák tetején lévő kategóriákban a tanulók várhatóan az iskolai tanulás természetes menetében megkapják a fejlődésükhöz szükséges hatásokat. A másik végén a személyiségfejlesztés és a matematikai kompetenciák fejlesztése bonyolult módon összefonódik. A különböző problémákkal küszködő tanulókat először segíteni kell a rossz helyzetből való kilábalásban, ehhez a pedagógusok és a többi gyerekek adhatnak az elfogadás által segítséget. Az apró, néha mesterségesen megtervezett tanulási sikerek a pozitív élethéberéseket erősíthetik, és az így megerősödött tanulóktól várható el a későbbi eredményesebb, hatékonyabb tanulás.

### *Szociális struktúra „Hatalom” motívumcsoport*

M1: számára fontos a teljesítmény, csoportban a vezetésre törekszik, ő a segítőkész, támogató vezető. Gyakori pedagógusi tévedés, amikor ezeket a tanulókat „kisinasként” vonják be a közös munkába, és ezáltal a teljesítmény helyett csak a segítő attitűdöt erősítik. Célszerűbb, ha eszközt adunk a kezükbe, megtanítjuk számukra azokat az eljárásokat, amivel másoknak segíthetnek. Ők várhatóan a mások érdekében nagyobb intenzitással fognak tanulni, mintha csak saját magukért tennék, pl. a szöveges feladatok megoldása egyes lépéseinek tudatosítása.

M2: Szeret szerepelni, de ezt nem biztos, hogy társai elfogadják. A tanár segíthet, hogy szereplési vágya mögött biztos alapok, pl. tantárgyi teljesítmény is legyen.

M3: az önszerveződő típus. Sem vezetésre nem törekszik, sem vezetőt nem keres a maga számára. Fontos, hogy a feladat legyen kedvére való. Könyvek és egyéb források „kézbe adásával” segíthetjük őt a jobb teljesítményhez és egyben szociális kompetenciájának fejlesztéséhez, az elfogadóbb, türelmesebb társas kapcsolatok kialakításához.

M4: Bátorítani kell, hozzásegíteni a saját ötletek megvalósításához. Számára fontos, hogy szabadon választhassa meg a feladatot és a megoldási módszert is. A sokféle megoldás bemutatása és elfogadása nagyon fontos. Itt tágabb körre gondolunk, mint a matematikai problémák többféle megoldása, beleértendő az is, hogy kitől és hogyan kér segítséget. Az elfogadható kezdeményezések támogatásával támogathatjuk a problémamegoldáshoz szükséges bátorság kialakulását.

M5: nem találja helyét, nem látja a megoldandó, megoldható feladatokat. Az ilyen tanulók érdekében különösen nagy jelentősége van a projekt munkának, ahol ők olyan részfeladatokat kaphatnak, amelyek eredményei kihagyhatatlanok, megkerülhetetlenek az egész program sikere érdekében.

### *Rövid összegzés*

Az OMT teszttel végzett eddigi vizsgálatok eredményei arra utalnak, hogy a hátrányos helyzetből fakadó problémákkal küzdő gyerekek motivációs rendszere ép. Általában igaz, hogy magas a teljesítménymotivációjuk, jól érzik magukat az érzelmileg telített kapcsolatokban, a társaskapcsolati hierarchiát segítő jellegű aszimmetriaként képesek megélni. Feltételezhetjük, hogy a jelenleginél több és nem kevesebb intellektuális élményt várnak az iskolában. Számukra nem a tananyagcsökkentés jelenti az elsődleges megoldást. Kreativitást igénylő, érdekes problémákat kell felvetnünk, és a csak monotoniatűrést igénylő, sokszor meg sem értett feladatok kiküszöbölésére kell törekednünk. A csökkentett követelmények hosszú távú hátrányai nyilvánvalóak a későbbi pályaválasztási esélyek szempontjából, de rövid távon sem jelentenek megoldást, hiszen nagyon sok oka lehet az alacsony teljesítménynek. Ezek közül csak egy részt alkotnak

az értelmi működés zavarai, amelyek gyógypedagógiai módszerekkel csökkenthetők, lassúbb haladási ütemmel, sok gyakorlással, az idegi kapcsolatok állandó erősítésével, a követelmények minimalizálásával. Más esetekben, éppen a szociális okok miatti hátrányos helyzet esetében, a kihívását jelentő nehéz de megoldható feladatok eredményezhetnek sikeres tanulást.

Kuhl pszichológiai kutatásai a matematikadidaktika számára igen fontos következménnyel járnak. A tanulási alkalmasság két alapfeltétele, a motivációk és az írásbeli kifejezés képessége egy teszttel vizsgálható, amely a pedagógiai gyakorlat számára leegyszerűsített változatban könnyen és hatékonyan alkalmazható.

A tanulókra jellemző motivációs szerkezetnek – a didaktikai alkalmazáshoz szükséges mértékű – ismerete támpontokat ad az osztályok munkájának megtervezéséhez és a differenciált egyéni fejlesztéshez is.

### ***A matematikatörténet szerepe a reprezentációs módok szerint szervezett matematikatanításban***

A matematikatörténetnek igen sok funkciója van a hátrányos helyzet következményeinek leküzdésében, ezért sem az elméleti elemzésből, sem a fejlesztő programokból nem hagyható ki.

Bár sok tanár szerint a matematikatanulás legeredményesebb módja, ha a tanulók a legszűkebb értelemben tekintett matematikai ismeretekre koncentrálnak, és így nem kapnak helyet az órákon a szemléletalkító és érdekes történeti mozzanatok, az utóbbi évek kutatásai alapján azonban célszerű a tanulást és a matematikát is tágabb nézőpontból szemlélni. Érdemes figyelmet fordítani arra, hogy az adott téma és módszer milyen hatással van a matematikáról alkotott kép formálására, elősegíti-e, hogy ez a kép bővíthető, korrigálható legyen, és a mindennapi matematikai tevékenységben eligazítsa a diákokat. A széles látókörű tervezés alapját a fundamentális elvek megtalálása és alkalmazása jelenti. Schweiger szerint (2006) a fundamentális elvek keresése maga is fontos folyamat, hiszen feltételezi a matematikáról és matematikából szerzett ismeretek felidézését, összehasonlítását és rendszerezését. A fundamentális elvek egyike a történeti nézőpont. A matematikatörténet didaktikailag átgondolt iskolai alkalmazását illetően figyelemre méltó összefoglaló mű a Fauvel és Maanen (2000) által szerkesztett könyv, amely az ICME kutatócsoport munkáját foglalja össze.

A matematikatörténeti szemléletmód a hátrányos helyzetű tanulók tanításában különösen fontos. Az iskolai oktatás céljainak és feladatainak figyelembevételével beépített matematikatörténeti vonatkozások is hidat jelenthetnek a mindennapi élet problémái és a matematika szimbolikus világa között.

Bár a régebbi nemzetközi jelentőségű magyar matematikatörténeti kutatások (Szabó Árpád, 1997), (Szénássy Barna, 1970) középpontjában nem az iskolai

alkalmazhatóság állt, a mai kutatások közül kiemelkednek azok, amelyek a matematikatanítás történetének bemutatásán keresztül (Kántor Sándorné, 2009), illetve a matematikai fogalmak történeti és logikai megalapozása révén (Deák Ervin, 2007) formálják a pedagógusok szemléletét.

A történetiség tehát elsősorban szemléletmódot jelent és nem megtanulandó ismereteket. A feladat nem a történeti tények tanítása, nem a történeti összefüggések felvázolása. A történeti szemléletmód megnyilvánulhat a tananyag felépítésében, mivel a matematikatörténeti adatok rámutathatnak arra, hogy a látszólag egyszerű logikai lépések milyen hosszú idő alatt váltak ismertté és elfogadottá. Továbbá a matematikatörténet segítséget jelenthet a manipulációs feladatok összeállításában is: az időben távoli korok matematikai eszközei és eljárásai a matematikai gondolkodás és tevékenység valóságközeli formáira mutatnak ma is követhető, ugyanakkor történeti patinával bevont példákat. A matematika egyszerre filozofikus, történeti és gyakorlatias szemléletmódjának példája Philip Davis és Reuben Hersh könyve (1984).

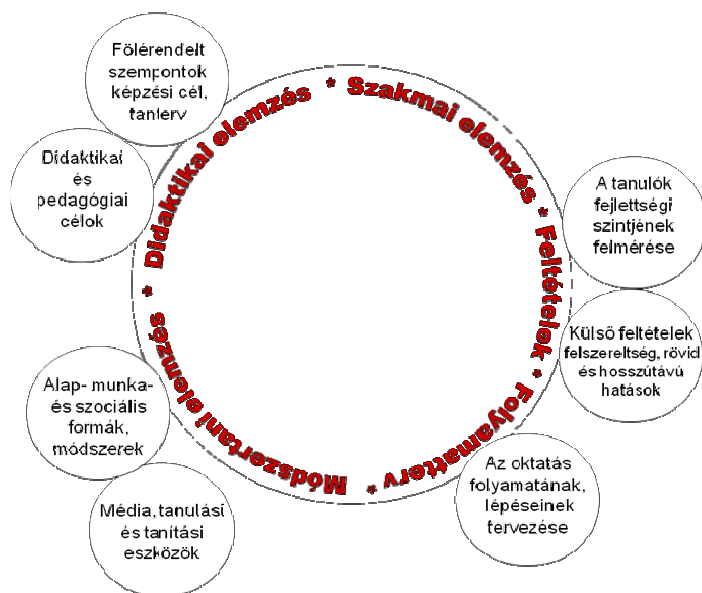
## ***A tanítási folyamat tervezését befolyásoló néhány sajátos tényező az összevont tanulócsoportos iskolákban***

### *A didaktikai tervezés*

A tanulási folyamat tervezését a német didaktikai irodalom körmodellben ábrázolja, ami kiemeli a tervezésben figyelembe veendő elemek egymásra épülését és ciklikusságát.

Dolgozatomban ezeket az általános szempontokat részletesen a kisiskolák szempontjából tekintem át. Ebben a részben a modell szemléletét követve azt mutatom be, hogy a külső tényezők hogyan hatnak a didaktikai folyamatokra. Az összevont tanulócsoportos oktatás az általános iskolás magyar diákoknak ma már csak közel 1 %-át érinti, ezért kevésbé ismert ez az oktatásszervezési forma. A feltételek bemutatása során a kisiskolák sajátosságaira részletesebben is kitérek. A feltételek és a lehetőségek elemzésére épül rá az oktatási folyamat tervezése, amelynek megvalósult elemei megváltoztatják a kiinduló helyzetet, így a következő szakasz tervei már ezeken a megváltozott feltételeken alapulnak.

A körmodell<sup>11</sup>



*Az összevont tanulócsoportos iskolák jellemzői*

Az összevont tanulócsoportos oktatás ma elsősorban a szegény országokban jellemző szervezési forma, gyakori még az ipari államok mezőgazdasági vidékein. Előfordul azonban a városokban is, részben a hátrányos helyzetű körzetekben, részben a magas társadalmi tekintélyű alternatív iskolákban.

Az összevont tanulócsoportos oktatás azt jelenti, hogy ugyanabban a tanteremben, egyidőben, egy tanár irányításával egyszerre több évfolyam tanulói tanulnak. Ez az oktatási forma az iskolarendszerű oktatás kialakulásakor általános volt, nagyon sokáig fennmaradt, mint normál oktatási forma. Az osztályrendszerű oktatást először Comenius valósította meg. Angliában az 1800-as években szervezték meg az azonos életkorú diákok számára az évfolyamrendszerű oktatást, elsősorban azért, mert így a növekvő létszámú diákságot kisebb költséggel lehet tanítani.

Comenius osztályrendszere nem érintette a falusi iskolákat, azokban sokáig még a Szent István által kialakított rend élt tovább, a falusi gyerekek társadalomba illeszkedéséhez szükséges minimális ismeretek nyújtása volt a feladat, és ezt évfolyamokra bontás nélkül valósították meg.

Magyarországon a vegyes életkorú csoportokban történő tanulás még a XX. században is tipikus szervezési forma volt. Az ötvenes években 50 % fölött volt az összevont tanulócsoportban tanuló diákok aránya. Ez az arány napjainkig folyamatosan, bár eltérő intenzitással, csökken.

<sup>11</sup> Fordította Rózsashegyi (2006)



A felekezeti iskolák 1945 utáni megszüntetése következtében a falvakban nagyobb létszámú iskolákat szerveztek a kis létszámú, más-más felekezethez tartozó iskolákból.

A hetvenes évektől a körzetesítés során nemcsak azonos településeken, egymás közelében fekvő iskolákat vonták össze, hanem különböző falvak iskoláit is. Sok faluban megszűnt az iskola, a gyerekek bejáróvá váltak. A rendszerváltás után néhány kistelepülés visszaszerezte iskoláját, egy-egy újonnan önállóvá vált település is iskolát alapított – ezek többsége összevont tanulócsoporthoz tartozó iskola, pl. Pörbölyön, Pogányban.

A szigorúbb gazdálkodás, az önkormányzati felelősség következtében ma a kisiskolák nem külső utasításra, hanem a gazdasági körülmények hatására szűntek és szűnnek meg. Kompromisszumos megoldásnak látszik a tagiskolákká való átalakulás, ami azt jelenti, hogy megszűnik az iskola szervezeti önállósága, de az oktatás megmarad a kistelepüléseken annak ellenére, hogy ott a tanulólétszám igen alacsony.

Általában 20-50 gyerek tanul ezeknek az általános iskoláknak az alsó tagozatán. Az összevonás vagy az 1. és a 2. osztály és a 3. és a 4. osztályt érinti, vagy pedig az 1.-t a 3.-kal, a 2.-at a 4.-kel vonják össze. Nagyon ritkán, szükséghelyzetben előfordul, hogy az első négy osztályból hármat vonnak össze.

Az összevont tanulócsoporthoz tartozó oktatás nemcsak oktatásszervezési formát, hanem sajátos társadalmi háttérrel is jelent. A kistelepüléseken a munkalehetőség nagyon kevés, így a felnőttek többsége a környező nagyobb településre jár dolgozni, és gyakran magával viszi a 6-10 éves gyermekét is. A kisiskolákban a munkanélküliséggel, a tartós betegséggel és hasonló problémákkal küzdő családok gyermekei vannak többségben – bár kivételek is szép számmal előfordulnak.

### *A kisiskolák társadalmi szerepe*

Magyarországon az összevont tanulócsoporthoz tartozó iskolákban tanuló alsós tanulók aránya meglehetősen változik, az országos átlag 2001-ben 1,1 % volt.

A nemzetközi tendenciákról Mihály Ildikó írt rövid összefoglalást (2000), amelyben elsősorban Coombs elemzésére hivatkozva (Education for Rural Development) amellett érvel, hogy a kisiskolák és a városi nagyiskolák eredményessége közötti különbséget meg kell szüntetni, de nem a kisiskolák megszüntetésével, hanem azok fejlesztésével.

A kisiskolák felszereltsége, sokszor még az épületeik állapota is rosszabb, mint az országos átlag, lehetőségeik szegényesebbek, bár az egy tanulóra eső fenntartási költségük még így is magasabb, mint a nagyobb létszámú iskolákban. Nem feledkezhetünk meg azonban arról, hogy a kistelepülések diákjainak is joguk van családi környezetben élni, és 6-10 éves korban indokolatlan hosszú, esetenként egy óránál is hosszabb napi utazásra kényszeríteni őket. A kisiskoláknak mindezekkel együtt jelentős településmegtartó szerepük is van.

Éppen a település életével való szoros összefonódás miatt helytelen az az ítélet, hogy a kisiskolák szükségképpen rosszul felszereltek. Az iskolák helyzete a falvak iskolával kapcsolatos attitűdjeitől és az adott település gazdasági erejétől egyaránt függ, valamint nagy a szerepük a történeti folyamatoknak is. Iskolalátogatásaink során, amit fotókkal is dokumentáltunk,<sup>12</sup> néhány különlegesen jól felszerelt, de sajnálatos módon lassan elnéptelenedő iskolával is találkoztunk. Szinte minden kisiskolára jellemző, hogy a pedagógusok igyekeznek a lehetőségek szerinti legjobb feltételeket biztosítani a tanuláshoz.

### *Oktatási módszerek az összevont tanulócsoporthoz*

#### ➤ Az önálló és a közös órák rendszere

Speciális módszerek akkor alakultak ki, amikor a kisiskolák aránya lényegesen lecsökkent, de számuk még jelentős volt, ez az 1960-as évekre tehető. Ma kevés helyen folyik szervezett felkészítés az összevont tanulócsoporthoz osztályokban folyó oktatásra, ezek egyike a bajai tanítóképző (Rendes-Fátrai, é. n.). Az összevont osztályokban a tanítás a legújabb hagyományok szerint követi az osztályrendszerű oktatási formában kialakult megoldásokat: a tanulók osztályrendszerben tanulnak. Ez úgy oldható meg, hogy a tanítási óra egy részében az osztálytanító az egyik évfolyammal dolgozik, közben a másik évfolyam önállóan dolgozik, elsősorban a munkafüzet feladatait oldja meg, majd később cserélődnek a feladatok. Az eltelt időben felmerült a változatosabb szervezési formák alkalmazásának igénye is, ezt szolgálja a később bemutatásra kerülő ViVe modell.

A bajai speciálkollégium igényesen összeállított tananyaga nagy figyelmet szentel a felzárkóztatásra és a tehetséggondozásra is, de nem foglalkozik a hátrányos helyzetű tehetséges tanulók problémáival, akiknek - bár tanulási nehézségekkel is küzdenek - optimális fejlődésükhöz a kötelezőt meghaladó tananyagra volna szükségük, vagyis az elkülönülten alkalmazott felzárkóztatás és tehetséggondozás helyett ezek integrációjára.

#### ➤ Vertikális-virtuális csoportok

Paradox módon a kisiskolák egyik legnagyobb oktatási problémája a csoportmunka alkalmazásának korlátozott lehetősége. Jelen kutatás empirikus szakaszát egy nemzetközi kisiskolás program keretében végeztem, az én felelősségem volt a matematikatanítási kísérletek szervezése, elemzése. Anita Pincas angol pedagógiai kutatóval közösen kidolgoztuk a ViVe modellt a kisiskolákban alkalmazható szervezési formák változatosabbá tétele érdekében. Azt tapasztaltuk, hogy a kis tanulói létszámnak - minden előnye ellenére - sok hátránya is van. A modellt, újszerűsége miatt, röviden ismertetem.

Hagyományosan a kisiskolákban a tanulók osztályonként külön padosorban ültek, pl. az egyikben az öt harmadikos, a másikban a négy negyedikes tanuló. A

<sup>12</sup> A fotók megtalálhatók az ELTE TTK Médiatár archívumában

gyerekek az óra egy részében önálló munkát végeztek, a másik részében közvetlenül foglalkozott velük tanítójuk, és óránként akár több alkalommal is történt váltás. Ez a frontális munkának a kisiskolák számára kialakított változata. Kétségtelen előnye, hogy a tanulók közvetlenül is tanulhatnak tanítójuktól, valamint nagy tapasztalatra tesznek szert az önálló tanulásban, amit a felső tagozatos tanáraik értékelni is szoktak (a tanítók szóbeli közlése), viszont kevés lehetőség van a tanulók közötti együttműködésre. A csoportmunka ötletét a tanítók elvetették, mondván az osztály kis létszámú, sem lehetőség, sem szükség nincs a további bontásra.

A ViVe modell lényege a gyerekek közötti együttműködésnek, a tanulási és munkakapcsolat lehetőségének minél sokoldalúbb biztosítása. Az osztályonkénti négy-öt tanuló, pusztán azért, mert létszámuk annyi, mint általában egy csoporté lenni szokott, nem csoport, hiszen a csoportalakítás is a csoportmunka szerves része. Ilyen kis létszám esetében nincs lehetőség a pedagógiai céloknak és a didaktikai feladatoknak megfelelő csoportalakításra. Ezért gondoljuk azt, hogy szükség van az osztályon belüli vegyes életkorú csoportokra (vertikálisan szervezett csoport), a személyes munkakapcsolatok sokféleségének megtapasztalására, és a tanulóknak arra is igényük van, hogy hasonló életkorú, hasonló osztályba járó tanulókkal is kapcsolatba kerüljenek, amire ma már az internet a nagy földrajzi távolságok ellenére is lehetőséget nyújt (virtuális csoportok szervezése). A virtuális csoportok kialakítására már alsó tagozaton is nyílt lehetőség, de előnyei elsősorban az idősebb tanulók esetében mutatkoznak meg. A feladatoknak megfelelően alakuló csoportok megváltoztatják a tanulók társas kapcsolatait és e változások pozitív vonásait kihangsúlyozva is fokozhatják a tanulók munkakedvét a pedagógusok.

#### *A történeti szemléletre épülő tervezési szempontok*

A tervezésnél, a tanulói hibák és félreértések, tanulási nehézségek megértésében nagy segítséget jelenthet, ha a tanárok tudnak a fejlődési folyamat hosszadalmasságáról, problémáiról, például:

- a negatív számok nagyon késői, a komplex számokkal egyidejű megjelenése a matematikában,
- a végtelen halmazok definiálásának nehézsége: el kellett vetni azt az annyira nyilvánvalónak tekintett és Euklidesznél axiómaként is megfogalmazott állítást, hogy a rész kisebb, mint az egész, mert ez a végtelen számosságok esetében már nem igaz,
- a folytonosság szemléletes egyszerűsége, ugyanakkor definiálásának bonyolultsága közötti feszültség.

Továbbá a matematikatörténeti anekdoták nemcsak pihentető epizódjai lehetnek a tanulásnak, hanem újszerű, meglepő kapcsolatokra mutathatnak rá

A matematikatörténet nemcsak arra a kérdésre segít megtalálni a választ, hogy mi a matematika, hogyan és miért alakultak ki a matematikának az iskolai oktatásban is fontos fogalmai, hanem lehetőséget kínál arra is, hogy a tanulók

megismerjék egy másik nép kultúráját. Ebből a szempontból a számírások különböző változatai és az alapműveleteknek a különböző kultúrákban kialakult, néha évezredekig is használt algoritmusai a legérdekesebbek.

A matematikatörténet, miközben feltárja a matematikai fogalmak kialakulásának bonyolult útját, egyben azt is megmutatja, hogy ugyanazon fogalmak elsajátításának többféle hatékony útja lehetséges. A matematikatörténet az érdekességek motiváló szerepén és a matematikatörténeti tények, folyamatok műveltség-gyarázó funkcióján túl a tanítás egyetlen jó formájának keresése helyett az alternatív megoldások megismerésére, az azok közötti választásra készítet. A matematikatörténet oktatásban betölthető szerepéről rövid összefoglaló található az OTKA kutatási beszámolómban.

### *A tehetséggondozás sajátos kérdései*

Az elemzett fejlesztő programok tapasztalatainak alkalmazásához szükséges volt áttekinteni a kisiskolások matematikatanulására vonatkozó közleményeket is, kiemelem Szendrei Julianna és C. Neményi Eszter (é. n.) tanulmányait. A tehetséggondozás intézményesített formáit, az életkori sajátosságok miatt a felsőtagozatos és az idősebb diákok számára szervezték meg, (Balogh, 2004). Azonban ez nem csökkenti, hanem növeli az alsó tagozatos matematika-oktatással foglalkozók felelősségét, mert a tanítási órák keretében szükséges a tehetségigéreték felismerése és olyan fejlesztésük, amely lehetővé teszi későbbi bekapcsolódásukat az tehetséggondozási folyamatba. A tehetséggondozás egyre intenzívebben kutatott megoldásainak el kellene jutniuk a kisiskolákba is, a pedagógusok ez irányú továbbképzésére is nagy szükség volna. A tehetséggondozás modern elveit a kisiskolások matematikatanulására vonatkozó ismeretekkel vetem össze.

### *A tehetség azonosítása és a tehetséggondozás*

A kisiskolákban mind a matematikai tehetség azonosítása, mind a tehetséggondozás komoly akadályokba ütközik. Vannak kitűnően működő szakkörök és szakköri példatárak (pl. Brenyo M-né és mts-i, 1984, Brenyo, 2004), de ezek eredményei nehezen jutnak el a hátrányos helyzetű iskolákba és a hátrányos helyzetű tanulókhöz.

Szükség van arra, hogy a pedagógusok olyan módszereket alkalmazzanak, amelyek azt feltételezik, hogy minden tanuló tehetséges matematikából is, így remény volna arra, hogy a szunnyadó tehetség valóban felszínre kerülhessen.

### *Felfedezettő tanítás*

Bruner szerint minden tanulás felfedezés, minden tanulónak fel kell fedeznie a maga számára a világot. A felfedezettő tanítás ezt segíti: a szaktanárnak, így a matematikatanárnak is olyan tanulási körülményeket kell kialakítania, amelyek támogatják az ismeretek megszerzésének folyamatát a tárgyi tevékenységtől, a tárgyakkal végzett problémamegoldástól kezdve az érzéki képek kialakításán

keresztül a fogalmi szintig, ami - az ismeretek sokrétősége miatt igen változatos lehet. Ilyenek a fogalmak matematikai szempontok szerinti kategorizálása, a fogalmak matematikai definíciója, összefüggések megsejtése és szavakkal vagy formulákkal való megfogalmazása, a sejtések ellenőrzése, különböző eljárások, algoritmusok folyamatábrán vagy egyéb módon történő rögzítése, megismert problémamegoldási eljárások alkalmazása valamilyen szempontból lényegesen új feladatban.

A felfedezés ebben az értelmezésben a tanulás következetesen megvalósított folyamatát jelenti és nem a matematikai alkotómunkára, az új matematikai összefüggések megtalálására való előkészítést (természetesen azt sem zárva ki, de nem célul kitűzve).

A felfedeztető tanítás *jól előkészített tananyagot* igényel. Bruner matematikai kísérleteiben Dienes Zoltán vezetésével dolgozták ki a különleges tananyagot. Szükség van az *állandó tanári figyelemre*.

A tanulónak, miközben önállóan dolgozik a kapott probléma megoldásán, biztonságban kell éreznie magát, tudnia kell, hogy valóban a cél, a probléma megoldása felé halad és próbálkozásai jól szolgálgják ezt a célt.

A tanárnak ezért állandóan mérlegelnie kell, beavatkozzon-e a folyamatba és hogyan változtassa meg a tanulási körülményeket, hogy azok hatékony tanulást tegyenek lehetővé (Bruner, 1968, 104. o.). Ez a tanári tevékenység nem a kiemelkedő matematikai tehetségek felismerése érdekében történik (ismét kijelenthetjük, hogy azt sem kizárva, de nem célul kitűzve), hanem az átlagosan jó képességű gyerekeket segíti. Erre a segítségre, ha az iskolai tananyagot messze meghaladó szintű ismeretekről van szó, a legtehetségesebb, legjobb otthoni körülmények közül érkező tanulóknak is szükségük van.

A szokásos iskolai tananyag megtanulása során különleges tanári figyelemre és a tanulási folyamat következetes végigvitelére elsősorban azoknak van szükségük, akik hátrányos körülmények közül érkeznek. Ők azok, akik a kisgyerekkori fejlődésük során szert tesznek az elemi intellektuális technikákra: megtanulják a saját környezetükben szükséges nyelvet, vagyis jól beszélnek közösségük társadalmi dialektusát. Kialakulnak azok az absztrakciós képességeik, amelyek révén a szokásos iskolai feltételek között is el tudják sajátítani az írás-olvasást, kíváncsiak és erős bennük a kompetencia-motiváció. Ahhoz, hogy mindezeket a képességeiket az iskolai matematikatanulás formális szintjén is alkalmazni tudják, sok segítségre szorulnak, pedagógiai támogatást kell kapniuk a hidak kiépítésében. Ettől a segítségtől várható, hogy a későbbiekben a többi tanulóhoz hasonlóan, a tanulási folyamat jelentős hányadában, számukra is elegendő lesz, ha tárgyi tapasztalataikra szavakkal hivatkoznak, vagy képek-rajzok segítségével hívják elő azokat. Más esetekben pedig, a tanulás bármely szintjén, ki kell használni a tárgyi tevékenységekben rejlő nagy lehetőségeket.

*Matematika a hátrányos helyzetű tanulók számára, az utca matematikája*

A korábban bemutatott statisztikai adatok szerint a matematika, a kevés de nagyon fontos kivételtől eltekintve, nem olyan tantárgy, amelyben a hátrányos helyzetű gyerekek sikereket érhetnek el. Éppen ezért igen fontosak azok az eredmények, amelyek arra vonatkoznak, hogyan tehető a matematikatanulás sikeressé.

T. Nunes (1993) összehasonlításokat végzett az „utca matematikája” és az iskolai matematika között. Megállapította, hogy az utcákon „kereskedő” gyerekek bonyolult számításokat képesek pontosan, gyorsan és fejben elvégezni, míg hasonló nehézségűeket iskolai körülmények között nem.

## EMPIRIKUS VIZSGÁLATOK

A vizsgálat célja az volt, hogy az irodalmi adatokkal részben már alátámasztott hipotéziseimet a hátrányos helyzetű magyar tanulók körében vizsgáljam.

A három részhipotézis vizsgálatára három, viszonylag elkülöníthető részvizsgálatot végeztem. Ezek tapasztalataira és az irodalmi elemzésekre építve válaszolom meg a fő hipotézist.

Az első hipotézist Kuhl (1999) tesztjének Vásárhelyi Éva segítségével elvégzett adaptálásával vizsgáltam.

A második hipotézis igazolása Bruner és Pólya (1965) vizsgálataira épül. Híressé vált kísérletük alapján választottam ki a kísérleti szakaszban tanított fogalmakat és az alkalmazott módszereket, saját vizsgálatom feltételeihez alkalmazkodva. A tapasztalatokat 16 iskolából gyűjtöttem össze.

A harmadik hipotézis feltételezését egy esettanulmány-jellegű iskolai vizsgálattal erősítettem meg.

### **1. A vizsgálat felépítése**

A hátrányos helyzetű tehetséges tanulók tanulási problémáinak vizsgálatára kiindulópontként az összevont tanulócsoportos iskolákat választottuk.

A kutatás az ELTE TTK Multimédiapedagógiai Központjának és Matematikatanítási Módszertani Központjának együttműködésében valósult meg. A kutatás vezetője Kárpáti Andrea. Munkácsy Katalin a matematikai részprogramot irányította, és részt vett az iskolák egyéb tevékenységeinek megszervezésében is. A végzett munka kutatási jelentései mellett tanulmányok és előadások is születtek. (Kárpáti, 2007), (Kárpáti, Munkácsy, 2008). A vizsgálat keretét a NEMED (Network of Multigrade Education, Az összevont tanulócsoportos iskolák együttműködési hálózata) program jelentette, ez a kisiskolák helyzetét vizsgáló, görög irányítású európai uniós támogatású program volt, amely később más nemzetközi keretben folytatódott. Az alsó tagozatos vizsgálatot megelőzte egy, a BAZ megyében, a cigány nemzetiségi oktatást folytató iskolákban végzett fejlesztő program, amelyről kötet született, amelyben szerepel a matematikatanítási tanulmányom (Kárpáti, 2006).

Ma az összevont tanulócsoportos iskolákban túlnyomóan hátrányos helyzetű diákok tanulnak. A helyben lakó többi családban a jobb körülmények között élő, munkaviszonnyal rendelkező szülők többsége a közeli, nagyobb településeken dolgozik, és oda viszi magával az iskoláskorú gyerekeket is.

Ezek a kisiskolák elsősorban a nehezen megközelíthető, rossz tömegközlekedésű településeken maradtak fenn, a közvetlen találkozásokra kevés lehetőségünk volt, ezért a pedagógiai vizsgálatomban sokféle módszert

integráltam, és felhasználtam az informatikai eszközök kínálta, a távmunkában alkalmazott lehetőségeket is. Elutaztunk kisiskolákba, és távoli helyszíneken, valamint a pedagógusokat az egyetemen is vendégül látva tartottam előkészítő foglalkozásokat a számítógépek és elsősorban az internet oktatási alkalmazásának lehetőségéről. Azt tapasztaltuk, hogy a tanítók jelentős részének van lehetősége az internet elérésére, de annak előnyeit az iskolai munkájukban korábban nem alkalmazták. 50 felett van azoknak az iskoláknak a száma, ahol a pedagógusok a programunk keretében használtak először informatikai eszközöket a tanításban.

A kisiskolák pedagógusainak sajátos helyzete miatt a klasszikus megfigyelés és az azt követő kísérlet helyett a pedagógusok és a kutatók team-munkáján alapuló, a résztvevő megfigyelés elemeit felhasználó módszert alkalmaztunk, építve a Malara (2004) által kidolgozott együttműködési technikákra is.

Az összevont tanulócsoportos iskolák legtöbbször elhivatott, a gyerekeket szerető pedagógusok dolgoznak, akik azonban kevés segítséget kapnak sajátos feladataik megoldásához. A kisiskolák önállóságának megszűnése, a tagiskolává válás még inkább megnehezíti, hogy a hasonló helyzetű pedagógusok szakmai közösséget alkossanak, mivel elsősorban a saját, nagy létszámú iskolájukhoz kapcsolódnak. A kutatás során megszerveződött Gárdonyi kör fennmaradt, és egy lehetséges szakmai fórumként működik.

### *A populáció*

Az összevont tanulócsoportos kisiskolák Magyarországon, igen kevés kivételtől eltekintve, alsó tagozatos iskolák és tagiskolák. A tanulók között (esetenként jelentős mértékű) túlkorosság is előfordul.

Ezeknek az iskoláknak a számáról, az ott tanuló diákok és az ott tanító pedagógusok létszámáról bizonytalan adataink vannak, hasonlóképpen az európai helyzethez. Ciprus kivételével egyetlen országban sincs naprakész statisztika az összevont tanulócsoportos iskolákról, annak ellenére számos gazdag országban is fontos elemét képezik az oktatási rendszernek (NEMED tapasztalatok)<sup>13</sup>.

A vizsgált populációból, az összevont tanulócsoportos iskolákból, féligvéletlen módszerekkel választottunk ki iskolákat<sup>14</sup> az Oktatási Minisztériumtól

<sup>13</sup> A nemzetközi vizsgálat dokumentumait az ELTE TTK Multimédiapedagógiai Központja őrzi.)

<sup>14</sup> Szakmai kapcsolatok révén személyesen megismerkedhettünk Baranya megyei, összevont tanulócsoportos iskolákban tanító pedagógusokkal. Ebből kiindulva igyekeztünk megtudni, hogy országosan hány ilyen iskola van, hogyan lehet elérni őket. Az Oktatási Minisztériumtól kapott listán szereplő iskoláknak csak egy része közoktatási intézmény. Ide sorolnak művészeti iskolákat, kórházakban működő iskolákat és más, alternatív intézményeket is, mint pl. a Waldorf iskolák. Az általunk küldött levelekre válaszoló iskolák más-más programok iránt érdeklődtek. Voltak, akik az összevont osztályokban alkalmazható csoportszervezési formákról tartott foglalkozásokon vettek részt, voltak, akiket a számítógéppel segített oktatás lehetőségei érdekeltek és voltak, akik a gyerekeknek szervezett versenybe kapcsolódtak be.



kapott lista (OM, 2001) alapján Minden olyan magyar iskolának kiküldtünk tájékoztatót, a részvételre felhívó levelet, amelyik a listán szerepelt, mint összevont oktatást végző alsó tagozatos iskola, ez 575 iskola volt, és közel 100 iskolából kaptunk választ. Ezek egy része érdeklődés, illetve udvarias elutasítás volt, más iskolákkal, ezek száma 60 feletti, különböző mélységű kapcsolata alakult ki az ELTE-n működő kutatócsoportnak. Az iskolák önként jelentkeztek, nem kisorsoltuk azokat, de a jelentkezés motivációja annyira változatos volt, hogy mintánk nagy valószínűséggel reprezentálja a magyar alsó tagozatos összevont tanuló csoportos iskolákat. Erre utal, hogy bár semmit nem tettünk ennek érdekében, a területi eloszlás egyenletes, Magyarország minden tájáról kerültek a mintába iskolák.

### *A részvizsgálatok*

Az iskolai vizsgálat három részvizsgálatból állt, amelyben felhasználtam a Roma Informatikai Projekt (Kárpáti, 2006) tapasztalatait is.

#### *A tanulók motivációs rendszerének vizsgálata*

A motivációs rendszert és a tanulók íráskészségének, az íráskészség kommunikációs célú alkalmazhatóságának vizsgálata egységet alkotott. Ennek nemcsak technikai oka volt, vagyis az, hogy a Kuhl tesztet írásos adatgyűjtéssel valósítottuk meg, hanem tartalmilag is szoros összefüggés van a két terület között. A pszichológiai teszt a tanulni akarásról nyújt információkat, a kommunikációs célra alkalmazható írás képessége pedig a tanulási képesség egy fontos mutatója. Bruner szerint az írás elsajátítása a tanulók szimbolikus szintű tanulási képességének jele, mivel az írásbeli kommunikáció során a vevő nincs jelen, maga az írás pedig a beszéd hangzó elemeinek jelekké formálása.

#### *Tájékozódó vizsgálat*

Magas teljesítménymotivációjuk, és átlagosan jó képességeik ellenére a vizsgált hátrányos helyzetű tanulók gyengén szerepelnek az iskolában, nem aktívak a matematikaórákon és nem fordítanak kellő figyelmet a házi feladatokra. Az ellentmondás feloldásának egyik lehetséges módja, hogy a tanulás elutasítását feltételezzük ezen tanulók esetében. Az alternatív magyarázat, hogy a tanulók olyan nyelven, olyan kulturális köntösben kapják az új ismereteket, amelyet nem értenek, és így bár akarnak, mégsem képesek megfelelni az elvárásoknak. Ez utóbbi feltételezés vizsgálatára a kísérleti órákat úgy terveztük meg, hogy a tanulók számára nehéz ismereteket tárgyi tevékenységbe illesztettük.

#### *Esettanulmány*

A sok, 16 iskolára kiterjedő vizsgálati szakaszra építve a munkát négy iskolában folytattuk, ezen belül is egy iskolában a folyamat jelentős részén én is jelen voltam, közre is működtem. Azt vizsgáltam, hogy olyan új fogalom, a poliéder fogalmának tanulása során, amellyel korábban nemcsak a tanulók nem

találkoztak, de amely az iskolai oktatás tananyagában sem szerepel, hogyan valósítható meg a tárgyi tevékenység révén végzett problémamegoldás.

### *A kombinált módszer*

- A tanulók pillanatnyi előismereteiből indulunk ki, amelyek szintje jelentősen elmarad attól, amit általánosan elvárnak az adott korosztálytól, de az alacsony kiindulási színvonal ellenére a tantervek optimális követelményeit célozzuk meg, építve a tanulók átlagosan jó, illetve kiemelkedő értelmi képességére.
- A matematikadidaktikában ismert módszereket és eszközöket kombináljuk a tanulók sajátos igényeinek és az iskolák speciális helyzetének megfelelően.
- A tanulási folyamat egy-egy részletének teljes ívét megtervezzük a tárgyi tapasztalatok szintjétől a matematikai szimbólumok révén megvalósított tudásrögzítésig, szemben a többségi tanulóknál alkalmazható módszerekkel, ahol a tanárok támaszkodhatnak a tanulók korábbi, reflektált tapasztalataira, és a csak szóbeli ismeretközvetítés is hatékony lehet.

*Ezek a reflektált tapasztalatok igen egyszerű megfigyelések és az azokat követő rövid beszélgetések lehetnek a többségi családok mindennapi életében, mint pl.: Miért esik le a kő? Mert nehéz. Miért repül el a léggömb? Mert könnyű. Vagy például:*

*Oszd el igazságosan a cukorkát a testvéreddel! Ne feledd, az egyik oszt, a másik választ!*

- Az ismeretek bővítését, a készségek fejlesztését olyan tanulási környezetben valósítjuk meg, ami a tanulás pozitív élményét nyújtja azoknak a gyerekeknek is, akiknél az elemi intellektuális technikák (írás, olvasás, számolás) hiányoznak vagy nagyon alacsony színvonalúak.
- Az iskolák nehéz helyzete ellenére, éppen a hátrányok csökkentése érdekében alkalmazzuk a számítógépeket is, a számítógéppel segített oktatás legegyszerűbben megvalósítható változatait.
- A különböző feladatokat a tanulók különböző értelmi képességeihez igazodva különböző szinteken oldhatják meg, pl. a lassabban érő tanulók gyakrabban térnek vissza korábbi feladatokhoz, hosszabb időt töltenek a tárgyi szintű tevékenységekkel, elsősorban gyakorló jellegű feladatokat oldanak meg az eszközökkel és nem (még a tárgyak segítségével sem), vagy csak rövidebb ideig foglalkoznak matematikai problémamegoldással.
- A tanulók kommunikációs képességeit intellektuális élmények nyújtásával és az azokról való beszélgetéssel fejlesztjük, hogy ezen az

úton vezessük el őket a tankönyvi és egyéb szövegek megértéséhez és a helyes írásbeli kommunikációhoz.

- Nagy szerepet kapnak a tanulási folyamatban a tárgyak és a számítógépek segítségével közvetített képek, képsorozatok. Az eszközhasználatban felhasználtam a tanszékünkön összegyűlt tapasztalatokat, amelyeket például Berta Tünde foglalt össze (2003).

Későbbiekben szemléletesebb kifejezést szeretnék alkalmazni a kombinált módszer helyett, mint pl. impulzust adó oktatás vagy elpattintó oktatás.

## **2. A tanítandó fogalmak matematikai és módszertani elemzése**

Az iskolai matematikaanyag elemzését két oldalról valósítottam meg. Egyrészt vizsgáltam a pedagógusok által nehéznek ítélt tananyagrészeket, kerestem a problémák matematikai magyarázatát. Másrészt egy matematikai fogalom, a poliéder elemzése révén kerestem a tananyag - didaktikailag a korábbiakban indokolt - gazdagításának lehetőségét.

### *A tanítandó fogalmak kiválasztása*

A kísérleti tananyagot különböző szempontok összehangolásával választottam ki.

- Bebizonyosodott, hogy – a közvélekedéssel ellentétben – a matematikaoktatás eredményességét illetően sem elhanyagolható, sőt kiemelkedő jelentőségű befolyásoló tényező a tanulók társadalmi háttere. Elsősorban a nemzetközi (NAEP, é. n.) és a hazai statisztikák pl. a PISA mérések hazai eredményei (Vári, 2003) támasztják alá ezt az összefüggést).
- A társadalmi hátrány a tanítási órán nyelvi hátrányként akadályozza a tanulást, ami általában rejtve marad az órát tartó pedagógus számára, ezt több külföldi osztálytermi kutatás igazolja (Gorgorió, Planas 2005; Tuveng, Wold, 2005).
- A matematikadidaktikai kutatások alapján, Brunernek és követőinek, valamint Magyarországon Varga Tamásnak a kutatásai alapján a tárgyi tevékenység megítélése megváltozott. Nemcsak előkészítője, kiegészítője a matematikai problémamegoldásnak, hanem a problémamegoldás egyik megjelenési formája is lehet. A gyakorlatban még sok a megválaszolatlan kérdés. Az iskolai matematikatanulás kezdő szintjén az elsajátítandó matematikai ismeretek között dominálnak az aritmetikai ismeretek. A tanulók problémamegoldó képességeinek fejlesztésében indokoltan nagy szerepet kap az alaplételekre vonatkozó tapasztalatok nyújtása. A kutatási eredmények arra utalnak, hogy az aritmetikai ismeretek biztos elsajátításához is gyorsabban el

lehet jutni egyéb, korábban az oktatás alsó fokán még nem tanított matematikai területek megismertetése révén. Ehhez más módszerek szükségesek, mint a magasabb oktatási szinteken, hiszen számításokkal, korrekt indoklásokkal ebben a korban még nem alátámasztható összefüggésekről van szó (Vásárhelyi, 1999).

- A tananyag gazdagítása, pl. matematikatörténeti elemekkel való kiegészítése és a változatos tanulásszervezési formák az egyébként nehéz körülmények között dolgozó iskolákban, így az összevont tanulócsoportos iskolákban is elősegíti a törzsanyag sikeres elsajátítását. A változatos módszerek alkalmazásának szükségességét Czeglédy István is kiemeli (1994,).
- A tehetséggondozás kialakított formáiból sok elemet kell alkalmazni az oktatásban azért, hogy a tehetség azonosítása során a tanulók gyenge előismeretei ne vezethessenek téves eredményekre (Balogh, 2004).
- A matematikai fogalmak nyelvi szempontból is igen különbözőek. A poliéder például latin eredetű szó, így hangalakja a gyerekekben nem vált ki képzeteket. A téglatest fogalmának megértését az nehezíti, hogy a téglatestek körébe tartozik a kocka is, valamint nagyon lapos, nagyon hosszú téglatestek is, nemcsak azok, amelyeknek alakja hasonlít az építkezéseknél használt téglákhoz. Tovább bonyolítja a helyzetet, hogy a tanulók egy részének beletartozik az aktív szókincsébe a téglaszó, mások pedig az iskolai matematikaórán használják először.

A tanított résztémák a következők voltak:

### *Poharak, mérés, mértékegységek*

Célunk a mérés és a mértékegység fogalmának kialakítása, elmélyítése volt az űrtartalom alkalmilag választott egységekkel történő mérése révén. Azt a mindennapi tapasztalatot terveztük beépíteni a matematikai ismeretek körébe, hogy ha mértékegységgel mérünk meg egy mennyiséget, akkor abból többre van szükségünk, mintha ugyanezt nagyobb egységgel tennénk.

### *Kirándulás, térbeli tájékozódás*

Célunk a három térbeli irány szavainak, le-föl, előre-hátra, jobbra-balra használatával a térbeli tájékozódás tudatossá tétele, a térfogalom kialakítása első lépéseinek megtétele volt. Feladatnak választottuk térbeli alakzatok építését, a párhuzamosság és a merőlegesség, az azonos élhossz reprodukálását különböző modellekkel. Célunk volt továbbá a bal és jobb oldal, a balra és jobbra kanyarodás fogalmának gyakorlása.

### *Időkerék, egyiptomi számírás és az első lépések a matematikai bizonyítás felé*

A történelmi keret segítségével elősegítettük két, didaktikailag nagyon különböző jellegű fogalom mélyebb megértését. Az egyik a mi számírásunk,

ami annyira egyszerűnek, nyilvánvalónak tűnik, hogy egy másik kultúra alapvetően más megoldásának ismerete segíthet megérteni a benne rejlő tartalmat, a helyiértékes számírás lényegét. A másik fogalom a bizonyítás, amely éppen hogy nagyon távolinak, idegennek látszik. Nehéz észrevenni, hogy mindennapi életünkhöz valójában milyen közel áll, hiszen szinte minden döntésünk feltételezéseken, hipotéziseken alapul.

#### *Utazás, adatkezelés*

Célunk volt egyszerű példán megismertetni a tanulókkal az alkalmazott matematika néhány sajátosságát, elősegíteni a gyakorlatszerzést az adatok gyűjtésében és elrendezésében, a feladatok megfogalmazásában és megoldásában.

#### *Poliéderek*

Célunk volt a poliéder szemléletes fogalmának kialakítása, azáltal, hogy bemutattuk a poliéderek fajtáit, tulajdonságait, valamint néhány példát a nem poliéder testekre. Gyakoroltattuk poliéderek összehasonlítását, megkülönböztetését az élek, lapok, csúcsok száma alapján.

#### *A poliéderfogalom a matematikában és a tanulásban*

##### *Miért a poliédereket választottam?*

A pedagógiai és a matematikadidaktikai vizsgálatok arra utalnak, hogy érdemes a hagyományosan a magasabb életkorban tanított ismeretek jelentős részét már fiatalabb tanulóknak bemutatni és lehetőséget adni számukra, hogy az adott témában önálló felfedezéseket tegyenek, a fogalomcsírák kialakuljanak. Erre elsősorban a hátrányos helyzetű tehetséges tanulóknak van szükségük. Vannak gyerekek, akik már kis korukban képesek arra, hogy elvont, szimbolikus szinten fedezzenek fel összefüggéseket, ez nagyon jó alapot jelent a számolási ismeretek megszerzéséhez, és később kiindulópontja az algebra tanulásának is. A számok ismerete nagyon sajátos gyerekkorban. Akinek kialakult, szilárd, jó számfogalma van, az a mások számára elvont számokat is konkrét létezőnek érzi és érti, az a konkrét gondolkodás szintjén tud a számokkal dolgozni. A tanulók egy részének tehát teljesíthetőek a számokkal összefüggő követelmények, pl.

- Számok bontása tízesek és egyesek összegére
- Kerek tízesek összeadása, kivonása, pótlása számfeladatokkal és egyszerű szöveges feladatokkal. Tagok felcserélhetősége
- Írásbeli összeadás: műveleti tulajdonságok megfigyelése – a tagok és az összeg változásainak összefüggései (Szabóné, 2010).

A számolás, pontosabban szólva a számokkal való munka azoknak a tanulóknak, akik már iskolába lépéskor képesek matematikaórákon is a szimbolikus gondolkodásra, a további ismeretszerzés szilárd alapjait jelentik

mind az ismereteket, mind a problémamegoldás módját illetően. Azoknak a tanulóknak, akik tapasztalataikat még nem képesek elvont formában általánosítani, a számolás mellett nagy szükségük van a matematika más területeivel való ismerkedésre. Ennek különböző lehetőségeit próbáltuk ki vizsgálatunkban.

A reprezentációs formák egymás közötti összefüggéseinek vizsgálatára, valamint hatásuk megfigyelésére a tanulási folyamaton belül a poliéderekkel összefüggő fogalmak tanítása alkalmas példának látszik. Egyrészt magukat a poliédereket reprezentáló tárgyak közül sok ismerős a gyerekeknek, könnyen bemutathatók, jól ábrázolhatók, viszonylag könnyen lehet beszélni sok itt felmerülő egyszerű fogalomról. Másrészt a poliéderfogalom kapcsán, annak sok különféle lehetséges tárgyi-képi reprezentációja következtében a matematika sok és elmélyült tudást igénylő részterületével kerülhetnek kapcsolatba a tanulók (méretes geometria, szemléletes szélsőérték-problémák a felszín-térfogat összefüggései révén, gráfelmélet, topológia, térbeli orientáció, szimmetriacsoportok) és sokféle matematikai tevékenységet próbálhatnak ki: fogalomalkotás és kategorizálás, definiálás, összefüggések kimondása és azok ellenőrzése, problémamegoldás. A poliéderekkel kapcsolatban sok olyan fogalom felmerül, amelyek hátrányos helyzetben nem tartoznak bele a hétköznapi szókincsbe, pl. él, téglatest, de más környezetben megszokottak.

Az az ellentmondásos helyzet, hogy a poliéder (és alkotórészeinek) fogalma része lett a nyugati közgondolkodásnak és a hétköznapi szókincsnek, ugyanakkor korrekt matematikai definíciója a felsőbb matematika körébe tartozik - ez olyan intellektuális feszültséget jelent, amivel foglalkozni kell, amikor a szociális szempontból, a társas kapcsolataiban hátrányos helyzetű, ugyanakkor mentálisan egészséges tanulók fejlődését kívánjuk segíteni. A tapasztalatok és a megfogalmazás nehézsége között húzóó feszültség kezelésére fel kell készülnünk, és a diákokat is fel kell készíteni rá. A magyar családok egy része ugyanis használja a poliéder szót, másik része viszont nem. Az iskolai oktatásban ebben az esetben is ütközik két fontos elv: az egyik, hogy matematikaórán lehetőleg alapfogalmakat és definiált fogalmakat használjunk, a másik, hogy a gyerekek kompetenciáit nyelvi szinten is közelítsük egymáshoz.

A térszemléletre épülő feladatok gyerekkortól felnőttkorig szinte mindenkinek nehezek. A perspektivikus szemlélet későn, 10 éves kor felett alakul ki, ezért alsó tagozatban a tankönyvek kétdimenziós ábrái nem adnak elég segítséget a térbeli képességek fejlesztéséhez. A vizuális nevelés szakirodalma alapján szükséges valódi (használt, elhasznált) tárgyakat bevinni az osztálytermekbe. Az ezzel kapcsolatos szervezési feladatokra, a felmerülő nehézségekre, a problémák megoldási lehetőségeire, az egész terület fontosságára külön fel kell hívni a pedagógusok figyelmét.

## A poliéder fogalma

### A definiálás problémája

A poliéder legtermészetesebbnek tűnő definíciója: síklapokkal határolt test. A test azonban szintén nem definiált fogalom, és nem is alapfogalom.

A poliéder szabatos definíciója Hajós György (1966) könyvében:

„Az olyan térrészt, amelyet véges sok sokszögtartomány határol, s amely teljes egyenest nem tartalmaz, poliédernek (poliédertest) nevezzük. A határoló sokszögtartományok együttesen poliéderfelületet (zárt poliéderfelület, poliéder) alkotnak.” (Hajós, 1966, 26. oldal).

Ha megvizsgáljuk a határolás definícióját, azonnal látszik, hogy milyen nehézségekbe ütközünk.

Ennek a definíciónak a magja a „*határolt térrész*”, vagyis olyan térbeli ponthalmazról van szó, aminek határa van. A határolás fogalmának definiálási folyamata a tér nem a sokszögtartományokhoz tartozó pontjainak két osztályba történő besorolásán alapul, amelynek tulajdonságai:

1. Ha egy szakasz két különböző osztályba tartozó pontot köt össze, akkor van a sokszögtartományokkal közös pontja
2. A sokszögtartományok minden pontján áthalad egy olyan töröttvonal, amely a sokszögtartományok más pontját nem tartalmazza, és két különböző tartományhoz tartozó pontot köt össze<sup>15</sup>.

Ez a definíció nélkülöz minden természetességet. Ha szemléletesen követni szeretnénk a definíciót, azt kell látnunk, hogy tulajdonképpen arról van szó, hogy a határoló alakzat valóban határol, tehát annak egyik oldalán, lokálisan tekintve, csak az alakzathoz tartozó, másik oldalán az alakzathoz nem tartozó pontok vannak. Másképpen fogalmazva, a poliéder minden pontja vagy határpont vagy belső pont, az analízisben használt értelemben. A definiálás során a folytonosság megragadásának problémájába ütköztünk, amelynek erre az esetre vonatkozó speciális megoldása is igen mély megfontolásokat igényel.

A térrész definiálásában a problémát tulajdonképpen az jelenti, hogyan fogalmazzuk meg azt, hogy a poliédertest pontjai a térnek olyan részhalmazát jelentik, amely az egyenesen intervallumnak felel meg, vagyis a folytonosság fogalmával találkozunk. Az analízis terminológiájával a poliédertestnek azt a tulajdonságát emeljük ki, hogy az olyan ponthalmaz, amelynek van térfogata, létezik nullától eltérő Riemann integrálja.

A poliéder definiálására további lehetőségek is vannak.

Reiman István (1999) pl. direkt módon nem definiálja a poliéder fogalmát, egy induktív meghatározást ad: hasáb, gúla, szabályos testek a poliéderek tágabb fogalmába tartoznak.

---

<sup>15</sup> További részletezések, a definiáláshoz szükséges további fogalmak az alábbi paragrafusokban találhatóak: 4.3.b1, 4.4.b, 4.5.b1, 4.5 (Hajós, 1966)

A legújabb irodalomban a poliéderek többdimenziós általánosításai, a politopok szerepelnek, és itt az analízisbeli eszközök alkalmazása természetes módon jelen van.

### *Konvex poliéderek*

A konvex poliéder olyan poliéder, amely tartalmazza bármely két pontjának összekötő szakaszát. Ez a definíció egyszerre jelent globális megkötést, a konvex poliéder olyan alakzat, „amiben nem lehet elbújni”, és lokálisat is, mivel lényegében azt is kimondjuk, hogy a poliéderek esetében a határpontok kivételével minden pont belső pont.

A poliéder fogalom nélkül közvetlenül is definiálható a konvex poliéder. A konvex poliéder egy térbeli véges ponthalmaz konvex burka, (Hajós, i. m. 29. o.), ahol a konvex burok a tartalmazó alakzatok közül a legkisebbet jelenti.

A konvex poliéderekből tetszőleges poliéder felépíthető. Minden poliéder (a tetszőleges poliéder akár a szemléletes, akár a „határolt térrész” értelemben), tetraéderekké bontható (Hajós, i. m. 212. o.), vagyis bármely poliéder felépíthető tetraéderekből. Így az nem jelent nehézséget, hogy a tetszőleges poliéder közvetlenül nem definiálható az elemi geometria eszközeivel.

### *Poliéderek az iskolában*

A poliéder szó a magyar matematika tantervekben nem szerepel. A poliéder helyettesítésére az iskolai gyakorlatban a mértani test fogalma terjedt el. Ezzel a fogalommal természetesen más ponthalmazra utalunk, nem csak a poliéderekre, hanem az iskolai oktatásban a térmértanban előforduló, közelebbről meg nem határozott, „ismerős” testeket jelöljük ezzel az elnevezéssel.

A mértani test matematikatanítási, módszertani fogalma kétféle értelemben használatos.

Az első értelmezés szerint olyan tárgyakat vagy másképpen, kicsit kibővítve a tárgyak fogalmát, olyan alakzatokat jelent, amelyeknek csak a geometriai fogalmakkal leírható tulajdonságait vesszük tekintetbe. Egy fogason lógó kabátot, mint mértani testet talán könnyebb elképzelni, ha a kabát formáját gipsszel kiöntjük, és ettől kezdve eltekintünk a színétől, az anyagának minőségétől és egyéb, a hétköznapi életben fontos tulajdonságától, és csak pontok távolságával, a pontjai által meghatározott szakaszok és síkok szögével és hasonló kérdésekkel foglalkozunk.

A másik értelmezés szerint mértani test a hasáb, a henger, a kúp, a gúla, a gömb, és ezekhez hozzávesznek még néhány más érdekes, sok szimmetriával rendelkező alakzatot is, mint pl. a szabályos testeket és a tóruszt, valamint az ezekből az alapformákból összerakott bonyolultabb alakzatokat.

Már maga a kétféle jelentéstartalom is bizonytalanságot tükröz, így azt gondolom, hogy az iskolában a mértani test fogalmát csak megszokásból használjuk.



Az első értelemben a fogalom mögött a valóság és a matematikai modell kapcsolata rejlik. Nem látszik szükségesnek, hogy azelőtt beszéljünk arról, hogy mit vizsgál a geometria, hogyan születik meg a valódi tárgyak fogalmából egy speciális térbeli ponthalmaz fogalma, mielőtt a gyerekekben felmerül ez a kérdés.

A második értelemben a szabatosság látszata miatt egy valójában definiálhatatlan, érdektelen fogalommal nehezítjük a geometriai alakzatok megismerését.

### *Poliéderek a tananyagban*

A NAT az első 4 évfolyam követelményét egy egységként határozza meg, ennek következtében az egyes kerettantervek között nagy különbség lehet abban a tekintetben, hogy az egyes ismereteket melyik évfolyam tervébe építik be, de a legtöbb tanterv szerint a 3. osztályban ismerkednek meg a tanulók a téglatest fogalmával. Pontosabban fogalmazva inkább azt mondhatjuk, hogy a harmadik osztályban csak a téglatest elnevezést tanulják meg a gyerekek.

A fogalmat nem kötik a tankönyvek a téglához, nincs mögötte szemléletes tartalom, így a téglatestet és a téglalapot gyakran összekeverik a tanulók. Nem ismerkednek meg másféle testekkel, nem neveznek meg más hasábokat, poliédereket és egyéb, nem poliédereket sem, holott például a gömb minden tanuló számára ismert.

A legtöbb helyi tanterv szerint az 5. osztályban, a téglatest térfogatának kiszámításán keresztül találkoznak a térfogat fogalmával a tanulók.

Felnőttek számára nagyon világos, könnyen érthető a szemléltetés: ha **a** téglatest oldalait kis egész számokkal mérjük, akkor az egységkockákkal könnyen kitölthető a test és így leszámolható, illetve szorzással kiszámolható a térfogat. Ezt az algoritmust mutatják a tankönyvi illusztrációk. Problémát jelent azonban, hogy a tanulók térszemlélete még nem elég fejlett a perspektivikus ábrázoláshoz. Pszichológiai vizsgálatok szerint 10 éves kor után éri el a tanulók többsége azt a fejlettséget, ami a síkbeli ábrák értelmezéséhez szükséges, ezért a magyarázó rajzok – a téglatest élvázával – sok tanuló számára érthetetlenek.

Később, nyolcadik osztályban és a középiskolában, elsősorban a méretes feladatok körében kerülnek elő a poliéderek. A középiskolások körében a gúla testmagasságának kiszámítását kérő feladatok általában nehéznek bizonyulnak.

### *A poliéderekkel kapcsolatos érdekességek a matematikatörténetben*

A poliéder fogalom kialakításához érdemes a *történeti előzményekre* is támaszkodni. Az összegyűjtött információk részben a tanárok háttértudását bővítik, részben közvetlenül is alkalmazhatók a tanításban.

Már az írott történelem előtti korból vannak olyan emlékek, amelyek arra utalnak, hogy a poliéderek korán felkeltették az emberek érdeklődését.

A hétköznapi életben az első, tömegesen előállított poliéder az építkezésekhez használt, *agyagból égetett tégl*a volt. A téglának előállítási módja és története is rokon a kenyér sütésével, nagyon ősi technológiákról van szó (Pogácsás Tibor). Az építkezésekhez használt téglá már az ókori Egyiptomból előkerült. A téglatest alakját, méretét és arányait előállításának (sorozatgyártás), beépítésének (illeszkedjen a kőműves kezébe) és az építésben való felhasználásának (stabilitás) követelményei határozták meg, ezért formája hosszú időn keresztül nagy állandóságot mutatott.

A párhuzamosság, a derékszögek kérdése, természetesen kimondatlanul, a téglák esetében már akkor jelentkezett, amikor az emberek papírt még nem használtak, nem ismerték a szerkesztési eljárásokat, vagyis mielőtt a geometriában összefoglalt tudás megszületett volna.

Az őskori régészeti emlékek között találtak olyan *amulettként használt*, apró, sokszögletű tárgyakat, amelyek sok szimmetriával rendelkeztek. Ez arra utal, hogy már ekkor felfigyeltek a poliéderek néhány további fajtájára.

Az írott történeti források utalnak a *természetben megtalálható geometriai alakzatok* korai felismerésére. Különösen a makroszkopikus méretű kristályok, a kőzetek és az ásványok kínálnak alkalmat sokféle szimmetria és egyéb geometriai jellemző megfigyelésére.

A csillagászatban szimbolikus jelentésük volt a poliédereknek.

### *Euklidesz: Elemek*

A *szabályos testek* is és a *téglatestek* is fontos szerepet kapnak Euklidesz művében. A téglatest térfogatának definícióján alapul az egyre bonyolultabb testek térfogatának kiszámítása. A szabályos testek megkonstruálása és annak bebizonyítása, hogy pontosan öt szabályos test van, az euklideszi geometria egyik csúcsteljesítménye, a geometria tárgyalásának célja lehetett. Az ókori geometriában az archimédeszi testek és az egyéb, részben szabályos testek is jelentős szerepet játszottak.

### *Középkor*

Az egyre bonyolultabbá váló építészet és a kockákkal játszott szerencsejátékok további új ismereteket halmoztak föl, miközben az ékszerészek változatlanul állították elő a szép mesterséges kristályformákat.

### *Euler*

A XVI. században merült fel újra a poliéderek matematikai vizsgálatának igénye. Már Descartes tett megállapításokat egyes poliéder-tulajdonságokról, de Euler volt az, aki felfedezte, hogy a poliédereket a 0 dimenziós csúcsok, az 1 dimenziós élek és a 2 dimenziós lapok jellemzik (Lakatos, 1998, 22. o.).

Euler poliédertétele az elemi térgeometria nagy eredménye, amelynek bizonyítása hosszú időn keresztül foglalkoztatta a matematikusokat, és egyben a topológia megszületését is jelenti (Lakatos, 1998). Euler tétele nyomán nem

általában a poliéder, hanem az egyszerű poliéder fogalmának definiálása történt meg a példák és ellenpéldák elemzésének bonyolult folyamatában.

*Egy, a poliéderfogalom tanításából következő érdekes logikai feladat, a poliéder belseje*

A poliéder definiálása során felmerült másik kérdés, hogy a sokszögtartományok által határolt két térrész közül melyik a poliéder, egyszerűen megoldható: az a rész a poliéder, amelyik nem tartalmaz egyenest. Ez a kérdés is természetesen csak akkor merül fel, ha a szemlélettől szigorúan el akarunk szakadni, egyébként nyilvánvaló a válasz. A definiálás folyamata viszont, ha már felmerült a kérdés, a tanulók számára is igen érdekessé tehető a telefon metaforával. A síkbeli analóg feladat:

A sík három, egymást három pontban metsző egyenese a síkot két tartományra osztja, az egyik a háromszög, a másik annak komplementere. Telefonbeszélgetésben, vagyis a rámutatás lehetősége nélkül, határozd meg, hogy a másik fél által, a sokszögvonallal létrehozott két tartomány közül melyik a háromszög.

A tanulók általában a papírra rajzolt ábrára gondolnak, és a gyakori válasz, hogy a kisebbik alakzat. A papíron könnyű olyan ábrát készíteni, ami ellenpéldát jelent. A teljes sík vonatkozásában a kisebb-nagyobb reláció nehezen definiálható, így eljutunk az egyenest nem tartalmazó síkbeli alakzathoz. Hasonló lépéseken keresztül vizsgálhatjuk a poliéder belsejének a fogalmát is.

### **3. Részvizsgálatok**

*A tanulók motivációs rendszerének és az íráskészségük kommunikációs célú alkalmazhatóságának vizsgálata, a motivációs teszt*

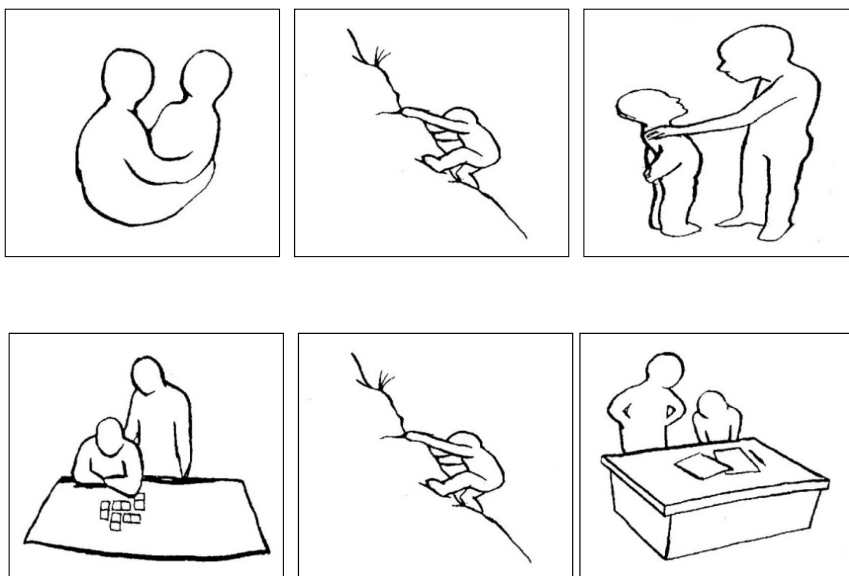
J. Kuhl (1999) OMT tesztjét használtuk (lásd az elméleti bevezetésben).

#### *Előkészítés*

##### *A teszt adaptálása*

A bonyolult pszichológiai összefüggések mérésére alkalmas eszközt mi didaktikai következtetések levonására alkalmaztuk. Célunk az volt, hogy képet kapjunk a vizsgált 6-10 éves gyerekek tanulási készségéről. A teszt didaktikai célú adaptálásán túl fontos szempont volt a kisiskolák sajátos helyzetéhez való alkalmazkodás is. A közlekedési nehézségek, az iskolák nehezen megközelíthetősége miatt szükséges volt, hogy az adatokat az osztályok saját tanítói felvehessék, és hogy a vizsgálat csoportosan, írásban elvégezhető legyen. Az első sor az előmérésben használt képeket, a második az utómérésben használtakat mutatja. A teljesítményfaktor kiemelt fontossága miatt az e területre vonatkozó kép mindkét alkalommal szerepelt.

*OMT teszt feladatlapok*



*Az adaptált eszköz*

A 15 kép közül hármat választottunk ki az elővizsgálathoz, az utóvizsgálatban ezek közül egyet megtartottunk és ehhez választottunk további két képet.

Az eredeti kérdések:

1. Ki a szereplő személy ebben a szituációban?
2. Hogy érzi magát ez a személy?
3. Miért érzi magát így?
4. Hogyan végződik a történet?

A módosított kérdések:

1. Kit látsz a képen?
2. Hogy érzi magát?
3. Miért érzi magát így?
4. Mi a történet vége?

*A kódolás előkészítése és megvalósítása*

Megfordítottuk a skálázás irányát, hogy az az osztályzatoknak megfelelő legyen, ezért a pozitív végpontokat jelöltük 5-tel.

A megbízható adatok érdekében a pontozást többféleképpen ellenőriztem. Magam végeztem az összes válasz értékelését, ennek szakaszai a következők voltak:

➤ Betanulás

A véletlenszerűen kiválasztott első 16 tesztlapot közösen értékeltük témavezetőmmel. Megtanultam azokat a kulcsszavakat, amelyek eligazítottak egy-egy bonyolultabb esetben.

➤ Ellenőrzés

A második szakaszban önállóan pontoztam, majd Vásárhelyi Éva ellenőrizte a besorolásaimat. Kevés esetben kellett segítséget kérnem, illetve még ritkábban fordult elő, hogy egy-egy besorolásom tévesnek bizonyult.

➤ Önellentőrzés

A harmadik szakaszban ugyanazoknak a válaszoknak a pontozását újra elvégeztem, és a két eredményt összehasonlítottam. Az eltérések aránya 4 % alatt volt.

➤ Kódolás

A későbbiekben néhány véletlenszerűen kiválasztott lapot újrakódoltam és a hibaarány később sem romlott.

### *A részvizsgálat mintája*

A 16 iskolából 243 tanuló vett részt a vizsgálatban.

16 összevont tanulócsoporthoz kisiskolában végeztük a vizsgálatokat, összesen 243 gyerekkel. (A résztvevő iskolák és a tanulók listája, valamint a kutatás egyéb dokumentumai az ELTE Médiatár archívumában találhatóak meg. A munka folyamán készült képanyag szintén a dokumentáció részét alkotja.)

### *A minta összeállítása*

Azoknak az iskoláknak, amelyek felhívásunkra válaszoltak, felkínáltuk a lehetőséget egy fejlesztő programban való részvételre is. A feltételek megismerése után ebben az első szakaszban 16 iskola vett részt. Így alakult ki a 16 iskolás minta.

Bár maga a bekapcsolódás szándéka az átlagosnál magasabb szintű pedagógiai érdeklődést jelez, a beszélgetések tapasztalatai alapján a részvétel motivációja olyan sokféle volt, hogy mintánk közel véletlen mintának tekinthető.

Voltak, akik azért jelentkeztek, mert nagyon jól értettek a számítógépekhez, és ezt a tudásukat az oktatás területén kívánták alkalmazni, és voltak, akik soha nem használtak még számítógépet. és most érezték úgy, hogy szükségük van informatikai műveltségre. Voltak iskolák, amelyek jobb feltételek között működtek, és az iskola vezetősége vállalta a továbbképzés utazási költségeit, és erkölcsileg támogatta a pedagógusok részvételét, és voltak olyan pedagógusok, akik annyira reménytelennek látták az iskolájuk helyzetét, hogy a mi segítségünkkel próbáltak alternatív megoldást találni személyes sorsuk rendezésére.

A minta véletlenszerűségére utal, hogy bár semmit nem tettünk az egyenletes területi eloszlás érdekében, ez nagyrészt mégis megvalósult. (A mellékletben felsorom a 16 iskolát)

### *Tanulók a mintában*

A kisiskolák jellegéből, a saját településükön betöltött szerepükből következik, hogy az iskolai és az iskolán kívüli programok nincsenek mereven szétválasztva. A programokba bevont gyerekek köre sem pontosan meghatározott. Az iskolai rendezvényeken részt vesznek például a korábban végzett tanulók és a jelenlegiek kisebb testvérei is. Az is gyakran előfordul, hogy nemcsak a formálisan egy tanulócsoporthoz tartozó gyerekek tevénykednek együtt, hanem a tanulók tágabb csoportja, akár azért, mert helyettesíteni kell valamelyik pedagógust, akár azért, mert valamilyen program különösen érdekesnek ígérkezik.

Ezek miatt lehetővé tettük, hogy egy-egy iskolából akár az egyik, akár mindkét tanulócsoport jelentkezzen a programra, csak azt kértük, hogy a benevezett tanulók vegyenek részt minden kísérleti foglalkozáson, töltsenek ki minden felmérő lapot, de azt nem korlátoztuk, ellenkezőleg, támogattuk, hogy a be nem nevezett tanulók is vegyenek részt a fejlesztő foglalkozásokon.

### *A vizsgálat menete*

Az első szakasz, a 16 iskolás vizsgálat elején és végén gyűjtöttük az adatokat. Postán kaptam meg a válaszokat.

A kisiskolások írásának fejlettsége még alacsony színvonalú, a szokásos helyzetekben az írás technikája elvonja figyelmüket az önkifejezés lényegi elemeitől. Az OMT teszt képei azonban erős felhívó jelleggel rendelkeznek, ezért a néhány fővel történt kipróbálás alapján arra számítottunk, hogy a gyerekek, a rajzoláshoz hasonlóan, képesek lesznek a kreatív önkifejezésre. Ezért vállaltuk a gyerekek írásbeli vizsgálatának nehézségeit, de az elsősök, valamint az idősebb és segítségre szoruló gyerekek diktálhatták is a pedagógusoknak válaszaikat. A döntést az önálló írásról vagy diktálásról a pedagógusokra, illetve magukra a gyerekekre bíztuk. Ez a kis osztálylétszámok miatt nem jelentett problémát.

Az iskolák a gyerekek létszámának megfelelő példányban megkapták a 3-3 rajzot a válaszok számára üresen hagyott résszel. A pedagógusok a táblára írták a kérdéseket, amelyeket az eredeti kérdések pontos fordítása nyomán alkalmaztunk a gyerekek életkorához.

A kapott eredmények elemzése során a személyiségnek csak néhány, az iskolai matematikatanulás szempontjából releváns elemét vettük tekintetbe.

### *Tapasztalatok*

Az OMT vizsgálat adatai ordinális skálán helyezkednek el, ezért az intervallumskálára vonatkozó elemzés helyett a kvalitatív elemzést szolgáló módszereket alkalmaztuk.

A gyerekek túlnyomó többsége - előzetes várakozásunknak megfelelően, azt néha meg is haladva - írásban is a gyerekrajzokhoz hasonló természetességgel fejezte ki magát. Ezekre példákat a a B. jelű iskola tanulói eredményeinek közlésekor mutatok.

### *Íráskép*

Íráskép: a vizsgálat tapasztalatai alapján összevont pontszámmal értékeltünk, ebben felhasználtuk Nagy József (2007) tanulmányának tapasztalatait az alsós tanulók íráskészségéről és annak értékeléséről.

<b>Íráskép 1</b>	<b>Összesen</b>
0	138
1	3
2	30
3	34
4	22
<b>Összesen</b>	<b>227</b>

A 243 gyerek közül az első OMT tesztet 227 tanuló írta meg (a hiányzó **16 adat** iskolai hiányzásból ered).

138 esetben a pedagógusok írták le a választ, 89 esetben a tanulók. A tanulók által írt 89 válaszból 3 nem volt értelmezhető. 30 esetben az egyébként nehezen olvasható válasz azért volt érthető, mert az értékelő számára ismerős volt a szituáció, a fennmaradó 56 esetben a tanulók több-kevesebb hibával, de lényegében jól olvashatóan válaszoltak.

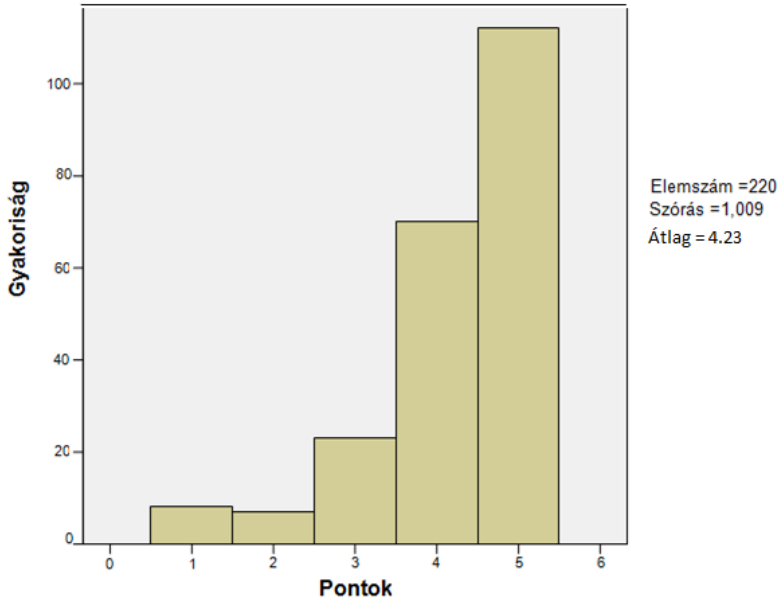
A 138 válasz, amit a pedagógusok írtak le, részben félreértésből származott. Több tanító így akart nekünk segíteni, hogy minél szebb munkákat kaphassunk, ezért a pedagógusok nemcsak az elsősök, a kisegítő iskolások és az írni még csak nagyon nehezen tudó gyerekek helyett írták le a válaszokat, hanem az iskola összes tanulója helyett. Miután megbeszéltük, hogy számunkra elegendő, ha érthető a gyerekek válasza, a megformálás szépségénél és pontosságánál fontosabb érték a gyerekek önálló munkája, az elő- és az utómérés között 61-ről 49%-ra csökkent a pedagógusok által leírt válaszok aránya.

### *A válaszok tartalmi kategorizálása*

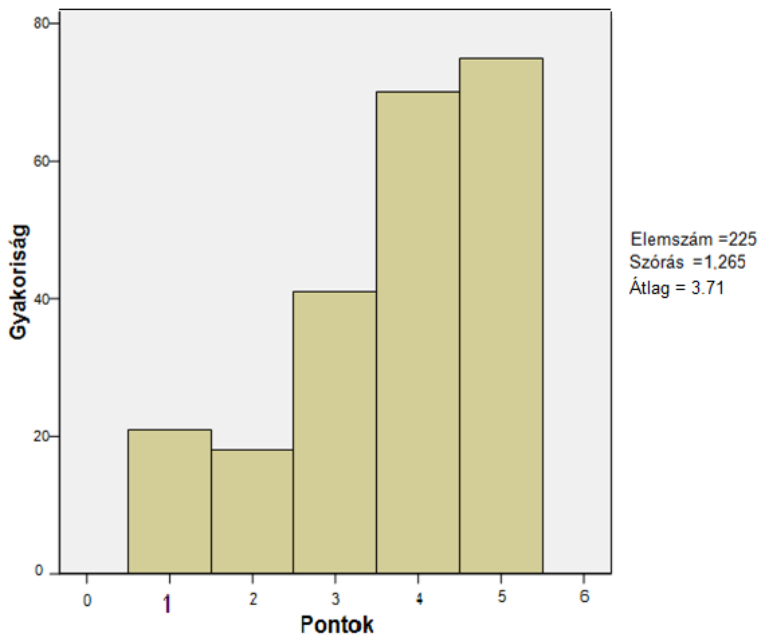
A kétszer három képre kapott válaszok megoszlása az 5 kategórián belül.

## Empirikus vizsgálatok

*Kötődés: Az OMT előteszt 1. rajz eredményeinek eloszlása*

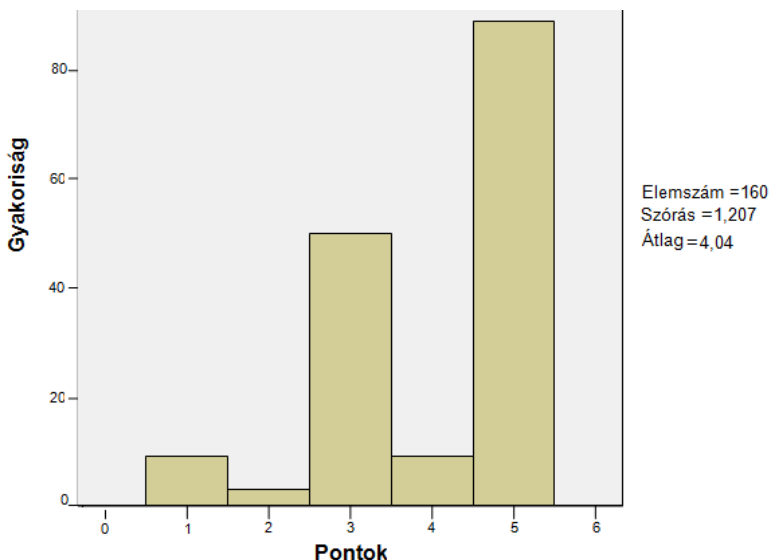


*Teljesítmény: Az OMT előteszt 2. rajz eredményeinek eloszlása*





*Hatalom, társadalmi hierarchia: OMT előteszt 3. rajz eredményeinek eloszlása*



A teljesítmény-kérdésre a 237 tanuló közül 225 olyan választ adott, amely szerint a tanulók többsége a teljesítményt örömként, sikerforrásként, kisebb részben szorongást tükröző fogalomként értelmezi. A kötődés, illetve a hatalom kérdések esetében sokkal nagyobb arányú volt a bizonytalanság.

*Az egyes területeken kapott adatok közötti összefüggések*

Végeztünk a három ábrára kapott válaszok között korreláció-számítást. A számok a képekre utalnak, az 1 a Kötődés, a 2 a Teljesítmény, a 3 a Hatalom jele.

➤ Spearman korreláció

Korreláció az előmérésben a képek között: 1-2 és 1-3 gyenge, nem szignifikáns, 2-3 gyenge, szignifikáns.

Azok a tanulók, akik esetében magasabb volt a pozitív teljesítménymotiváció, azok a hatalmi helyzetet is inkább felelősségvállalásként, segítségnyújtásként értelmezték, ezzel szemben azok, akik a teljesítménykényszert szorongáskeltő helyzetként élték meg, azok a hatalmi helyzetben is inkább a kiszolgáltatottságot látták.

A személyes kapcsolat bensőségessége sem a hatalmi helyzettel, sem a teljesítménymotivációval nem mutatott jellemző kapcsolatot.

➤ Rangkorrelációs együtthatók

Value	Asymp. Std. Error(a)	Approx. T(b)	Approx. Sig.
1 – 2			
Spearman Correlation	0,116	0,066	1,725
1 – 3			
Spearman Correlation	0,134	0,078	1,686
2 – 3			
Spearman Correlation	0,166	0,083	2,115

A gyenge pozitív kapcsolat utalhat arra, hogy a tanulók valamely háttérben álló ok miatt hasonlóképpen értelmezik a különböző képeket, de utalhat arra is, hogy a tanuló személyiségére az örömteli érzések, a segítőkészség vagy pedig a szorongás jellemző inkább. Ugyanakkor az, hogy a különböző motívumcsoportok között nincs szignifikáns kapcsolat, a három terület viszonylagos önállóságára utal.

*Az elő- és az utómérés eredményeinek összehasonlítása*

Szignifikancia számításokat végeztünk rendezhető adatokkal.

Az első és a második kép: kis pozitív változás történt a két mérés között, de ez inkább a véletlennek tulajdonítható. A harmadik kép esetében a változás negatív, és ez valószínűleg nem véletlen.

Mindhárom motívumcsoportban elvégeztük egy-egy képpel az OMT vizsgálatot, ezek közül a Teljesítmény volt számunkra a legfontosabb, itt ugyanazt a képet alkalmaztuk az elő- és az utómérésben.

*OMT elő- és utóteszt 2. rajz eredményeinek eloszlása*

		N
OMT2/2 Pont - OMT1/2 Pont	Negative Differences (a)	39
	Positive Differences (b)	39
	Ties (c)	51
	<i>Total</i>	<i>129</i>

A 243 gyerek közül 129-től van adatunk mindkét alkalommal. Az eltérés legfontosabb oka, hogy a második vizsgálat a tanév végén volt, ezért a késve, hiányosan vagy egyáltalán meg nem érkező válaszok pótlására már nem volt lehetőségünk.

Várakozásunknak megfelelően az öt szint közötti megoszlás-arányok nagyon hasonlóak. A véletlennek köszönhetően pontosan ugyanannyi, 39-39 tanuló esetében történt pozitív és negatív változás is, és 51 tanuló ugyanazt a besorolást

kapta. Ez egyrészt utal arra, hogy rövid idő alatt lényegesen nem változik a teljesítménymotiváció. A mindkét irányú, azonos mértékű változásra magyarázatul szolgálhat az egyik tanuló válasza, aki az előmérésnél a kötelességet említette a hegymászásnál, második esetben viszont arról írt, hogy egy gyerek mászik a hegyre, mert nagyon szeret hegyet mászni, de sietnie kell, mert még nincs kész a leckéje. A teljesítmény öröme megjelent nála, lehetséges, hogy éppen az érdekes iskolai feladatok hatására, de ez nem terjedt ki a tanulásra. Valószínűleg ő is, mint a magyar tanulók túlnyomó többsége, tanuláson a házi feladatok megírását és a szövegszerű tanulást, különösen a memoriterek, versek megtanulását érti. A gyerekek egy része, feltehetően a program hatására, megtapasztalta több újfajta tevékenység örömeit, de ezek az élmények nem kötődnek számukra a tanuláshoz, tanulásnak továbbra is a fásasztó feladatokat tartják. A tanulók egy részére a tevékenységi formák gazdagodása, másik részére a hagyományos házi feladatok változatlansága lehetett erősebb hatással.

Wilcoxon Signed Ranks Test:

**OMT elő- és utóteszt 2. rajz eredményeinek elemzése**

			OMT2/2 Pont - OMT1/2 Pont (b)
Z			-0,026 <sup>(a)</sup>
Asymp. Sig. (2-tailed)			0,979
Monte Carlo Sig. (2-tailed)	Sig.		0,987
	99% Confidence Interval	Lower Bound	0,984
		Upper Bound	0,990
Monte Carlo Sig. (1-tailed)	Sig.		0,485
	99% Confidence Interval	Lower Bound	0,472
		Upper Bound	0,498

a Based on negative ranks.

b Wilcoxon Signed Ranks Test

A harmadik kép esetében a kapott pontszámok csökkenése, vagyis az, hogy a gyerekek a hatalomról negatívabb érzelmeket írtak le, összefügghet azzal, hogy két, jellegében erősen különböző rajzot használtunk. Tervezem ennek a kapcsolatnak a későbbi vizsgálatát.

**Klaszterek**

A gyerekeket klaszterekbe soroltuk az OMT előzetes teszt, íráskép, a matematika és a magyar nyelvi osztályzatok alapján. Kihagytuk azt a két osztályt, amelyben értelmi sérült tanulók tanulnak.

## Empirikus vizsgálatok

- Az OMT adatok a már korábban említettek voltak, a három előmérés feladatát vettük figyelembe.
- Osztályzatok: A vizsgálatot megelőző félévi jegyek (az írásos értékelés ellenére megkértük a pedagógusokat, hogy osztályzatban értékeljenek).
- Íráskép: A tanulókat két csoportba soroltuk: a legalább elég jól olvashatóan író tanulókéba és azoknak a csoportjába, akik nem maguk írták le válaszaikat, vagy nem értékelhető választ írtak.

A klaszterezést is SPSS programmal végeztük. A hierarchikus módszert választottunk, 9 klaszterig vontuk össze az adatokat. Ebben a vizsgálatban még nem néztük, milyen közös jellemzőjük van az egy csoportba kerülő, hasonló pontszámokat elérő tanulóknak. Arra voltunk kíváncsiak, hogy igaz-e, hogy az azonos iskolába járó tanulók hasonló eredményeket produkálnak a mért területeken. Amennyiben az egy iskolába járó tanulók között találtunk volna egy-egy jellemző, túlsúlyban lévő klasztert, akkor az előbbi kérdésre igen lett volna a válaszuk.

A gyerekek egy adott iskolához tartozása és eredményei hasonlósága alapján kialakított csoportok között véletlenszerű kapcsolat van.

Ez megerősíti azt a feltételezést, hogy bár nagyon nagyok az egyes települések közötti különbségek, és a környezet erősen hat az iskolákra, a gyerekek teljesítményét jobban befolyásolják a személyes tulajdonságaik, mint az, hogy melyik iskolába járnak. A pedagógiai feladatokban a közös elemek dominálnak, függetlenül a nagy földrajzi távolságoktól.

Ezek az adatok más oldalról támasztják alá azt a tapasztalatunkat, hogy az ország különböző területein dolgozó, összevont tanulócsoporthoz tanító pedagógusok szakmailag megalapozott közös munkájára nagy szükség volna.

A statisztikai elemzések nem mutattak ki értékelhető változást a tanulók motivációjában a kísérleti oktatás előtti és utáni helyzetben. Ennek több lehetséges magyarázata van.

1. A vizsgálat hatására nem történt változás.
2. Történt változás, de az rövid távon nem jelent mérhető változást.
3. Ellentétes irányú változások történtek, a tanulók egy részének könnyebbé, szebbé vált a tanulás, másoknak - éppen a kísérleti órák hatására - a matematikai élmények nem változtatták meg a tanulásról alkotott képüket, a kellemes szellemi élmények szemben állnak az egyre inkább kötelességszerűnek érzett szokásos órákkal.

Jelen kutatás keretei között a legmegbízhatóbb magyarázat megtalálására nem volt lehetőség.

### *Kísérleti órák*

#### *A hátrányos helyzetű, tehetséges tanulók számára kidolgozott módszerek kipróbálása 16 iskolában*

##### *A kísérleti oktatás tervezése, a körmodell alkalmazása*

Speciális módszereinket a tanulási folyamatot meghatározó tényezők figyelembevételével, a tanulás pedagógiai és didaktikai feltételeinek biztosítására törekedve dolgozzuk ki. Ebből az elemzési folyamatból a matematikadidaktikai elemeket emeljük ki.

A tanulók *szociológiai státusza* a jelen kutatásban annyiban speciális, hogy a hátrányos helyzetű tanulók közül is az összevont tanulócsoportos iskolákban tanuló diákokat választottam. Mivel ezek az iskolák infrastrukturálisan elzárt, munkalehetőséget nem kínáló településeken található, az iskolafenntartó nem módszertani műhelyként, hanem kényszerből működteti az összevont formát. Ezt azért szükséges hangsúlyozni, mert a tanulók túlnyomó többségben hátrányos helyzetűek, és a társadalmi helyzet által meghatározott, intézményesült problémákkal küzdenek. Korábban a falusi tanulók jelentős hányada a társadalmi helyzettől függetlenül tanult összevont tanulócsoportos iskolában, ami akár módszertani előnyt is jelenthetett. A tanulók hátrányos helyzete és az iskolai eredményeik kapcsolatát, néhány jellemző adatot és összefüggést kiemelve, bemutattam az előző fejezetekben.

A hátrányos helyzetű tanulók egy része, jó általános *kognitív képességei* alapján éppen matematika tantárgyból képes kiemelkedő teljesítményre. Többségük mégis a matematikából elszenvedett kudarcok miatt hagyja el idő előtt az iskolát, vagy mond le a nagyobb igényeket támogató továbbtanulási formákról. A matematikatanulással szembeni ellenérzésekkel, a matematika-tanulási eredménytelenség miatti rosszkedvvel találkoztam az összevont tanulócsoportokra irányuló nemzetközi együttműködésben folytatott kutatás során is. Néhány e témával foglalkozó külföldi szerzővel (Gorgorío – Planas, Wold) megegyező tapasztalatom szerint félreértések sorozata nehezíti a gyerekek és tanítóik közötti viszonyt. Ezek a félreértések nem tudatosulnak egyik félben sem, így az osztálytermi gyakorlatban megoldásukra kevés a remény.

A matematikatanítás céljai a *NAT*<sup>16</sup> alapján:

„A matematikai kompetencia a matematikai gondolkodás fejlesztésének és alkalmazásának képessége, felkészítve ezzel az egyént a mindennapok problémáinak megoldására is. A kompetenciában és annak alakulásában a folyamatok és a tevékenységek éppúgy fontosak, mint az ismeretek. A matematikai kompetencia - eltérő mértékben - felöleli a matematikai gondolkodásmóddhoz kapcsolódó képességek alakulását, használatát, a

<sup>16</sup> NAT: [http://www.okm.gov.hu/letolt/kozokt/nat\\_070926.pdf](http://www.okm.gov.hu/letolt/kozokt/nat_070926.pdf).

matematikai modellek alkalmazását (képletek, modellek, struktúrák, grafikonok/táblázatok), valamint a törekvést ezek alkalmazására.”

A NAT a magyar matematikatanításban alkalmazott spirális felépítés elve szerint a fogalmak építésének megkezdését már az iskolába lépéstől kezdődően előírja, és természetesen épít az iskoláskor előtti fejlődés eredményeire is. A gyerekek közötti jelentős különbségek miatt nagyon megfontoltan és differenciáltan támaszt követelményeket a tanulókkal szemben.

Kutatási programunkban centrális elemként kezeljük „*a matematika élményének nyújtását*”.

Az összevont tanulócsoporthoz tartozó iskolák *pedagógusai* a kis létszám ellenére is túlterheltek, mert feladataik igen sokrétűek, beleértve a nagy iskolákéhoz hasonló mértékű adminisztrációt is, és az összevont tanulócsoporthoz tartozó órák előkészítése. Az esetek többségében barátságos környezetet, családi, jó légkört, egyénre szabott figyelmet tudnak nyújtani tanítványaiknak, de a matematikatanulást hatékonyan segítő módszereket nem eléggé ismernek. Az összevont tanulócsoporthoz tartozó tanítóinak felelőssége pedig nagyobb, mert a tanulók az átlagosnál kevesebb segítséget, biztatást kapnak otthon a tanuláshoz.

A matematikatanítás általánosan alkalmazott módszerein túl a hátrányos helyzetű tehetséges tanulók számára *speciális segítő módszereket* adaptáltam, illetve dolgoztam ki.

A Magyarországon és külföldön, elsősorban az USA-ban alkalmazott tehetséggondozó és esélynövelő programok számos matematikadidaktikai elemét integráltam. A tervezés és a megvalósítás során törekedtem az alkalmazott módszerek szociológiai, pedagógiai, didaktikai és matematikai megalapozására, alkalmas kompromisszumok kimunkálására. A matematikailag megalapozott, logikailag korrekt ismeretek elsajátítását úgy segítettük, hogy közben a személyiségfejlődés és a társadalmi beilleszkedés szempontjait is messzemenően figyelembe vettük. A vizsgálat tapasztalatainak leírása során a legjellemzőbb szempontokra koncentrálok.

A *tematikát* a pedagógusokkal együttműködve a tantervi témák közül választottunk ki. Egyrészt olyan témákat választottunk, amelyeket a tanítók különösen nehéznek találnak (mértékegységek), másrészt alkalmas témát kerestem a kiemelkedő teljesítmény hipotézisének vizsgálatára (poliéder).

Kiemelt szerepet kaptak az *oktatási eszközök*, ezen belül az informatikai eszközök. Az iskolák nehéz megközelíthetősége miatt az oktatás de a kutatás szempontjából is az információk cseréjének legfontosabb csatornája az internet volt. Rendszeresen használtunk oktatási célra készült szemléltetőeszközöket és egyéb tárgyakat. A program keretében elkészült PowerPoint prezentációkat a későbbiekben részletesen is bemutatom.

A kísérleti szituáció összetett és újszerű volta miatt a *reflexiók* jelentősége is kiemelt fontosságú volt. Az órai események utólagos dokumentálása több célt is

szolgált. Az órán történekről ezen az úton kaphattunk információkat, mivel a hospitálásoknak sok akadálya volt, csak kevés órán lehettem jelen. A kisiskolák többségére a nagy földrajzi távolságokon túl is jellemzőek a rossz közlekedési viszonyok. Ezen túlmenően a zárt falusi kisközösségekben a külső megfigyelő, az idegen jelenléte számottevően zavarja az iskolai munka normális menetét.

Az órák pedagógiai, didaktikai történései jelentősen befolyásolták az éppen soron következő kísérleti óra megtervezését, ezért nagyon fontosak voltak a pedagógusok jelzései. Az óravezetést is befolyásolta az órákról írandó összefoglalók önként vállalt kötelezettsége: hozzájárult a reflexív tanári magatartás megvalósításához.

A pedagógusokat felkészítettük a megfigyelési módszerek alkalmazására. Az órák megtartása során kértük a tanítókat, hogy figyelmüket megosztva koncentráljanak a tanulók tevékenységére, figyeljék a tanulók reakcióit, és azoknak megfelelően alakítsák az órák menetét, folyamatosan reagálva a gyerekek jelzéseire. A tipikus tanulói reakciók alapján fogalmaztuk meg a soron következő kísérleti órákra vonatkozó módszertani javaslatainkat.

Az órák végén írásos véleményt kértünk a tanulóktól is. Ezzel elsősorban a tanulók figyelmét igyekeztünk a tanulásra irányítani, de fontosnak tarjuk ezt a kommunikációs képesség fejlesztése szempontjából is. Mind az órákat tartó pedagógusok, mind a fejlesztő program szempontjából hasznosak voltak a tanulóktól kapott visszajelzések is.

A kéthetes ciklusok végén, a szakaszok lezárásakor és az empirikus vizsgálat végén is elemeztem saját módszereimet is, mind kutatás-módszertani szempontból, mind az alkalmazott fejlesztési eljárásokat illetően.

A körmodell alkalmazása tanárképzési szempontból is fontos tanulságokkal szolgált. A tanárok is és a leendő tanárok is problémamegoldásként csak a matematikai problémák megoldását azonosították. Ebben a kísérletben a kutatási folyamat empirikus szakaszának vázát képezte a tanítás megszervezése a körmodell alapján. A kutatásba bevont pedagógusok a körmodell egyes elemeit több-kevesebb önállósággal alkalmazták. A tanárképzés során érdemes lesz nagyobb figyelmet fordítani a didaktikai problémák tudatosítására, hogy a matematikatanárok a didaktikai problémák szakszerű megoldásának folyamatát is munkájuk integráns részének tekintsék.

A kutatás következő szakaszában érdemes lesz a résztvevő pedagógusok rendelkezésére bocsátani a körmodellnek az adott szituációra adaptált változatát, hogy ezzel is elősegítsük a még tudatosabb didaktikai tervezést.

### *A kombinált módszer*

Miként korábban említettük, módszerünk elnevezésére a kombinált jelzőt alkalmazzuk. Későbbiekben szemléletesebb kifejezést szeretnék alkalmazni, mint pl. impulzust adó oktatás vagy elpattintó oktatás. Az új elnevezéssel arra kívánunk majd utalni, hogy a hátrányos helyzetű tehetséges tanulók

- folyamatos figyelmet igényelnek tanáraiktól, mert a társadalmi helyzetből fakadó hátrányok a jó pedagógiai munka ellenére is, a magasabb életkorban is új és új problémákat okozhatnak,
- ennek a segítségnek lökészerűnek kell lennie, át kell lendítenie a tanulókat az éppen jelentkező akadályokon, mégpedig úgy, hogy önállóságukat, a saját tanulásukkal szembeni felelősségüket nem csökkentjük, hanem erősítjük.

### a. A tananyag kiválasztása és elrendezése

A kísérleti órákat kéthetenként egyszer tartottuk, ezekre az órákra viszonylag kötetlenül választhattunk a tantervben előírt tananyagból. Az alsó tagozatos tantervben kiemelt fontosságú feladat a számkörbővítés, az aritmetikai és a prealgebrai ismeretek elsajátítása. A kísérleti órák tematikájában ezek a területek direkt módon nem szerepeltek, a tanulók e témákat hagyományos módon tanulták. A hátrányos helyzetű tehetséges tanulók gyakran könnyen, sőt túl könnyen megtanulják a számolási műveleteket. Nem kapcsolják viszont azokat sem tapasztalataikhoz (otthon nemigen számolják meg, hány gombóc van a tálon, és mennyi marad, ha ketten esznek belőle három-három darabot), sem megfigyeléseikhez (ha a kisebbítendőt és a kivonandót ugyanazzal a számmal csökkentjük, a különbség nem változik), a reflektált tapasztalatok hiányában. Ezért a matematika tananyagának azokat a részeit választottam ki, amelyekben a gyerekek tényleges tapasztalataira építve ismerhetnek meg új fogalmakat és összefüggéseket. A kísérletben vizsgált résztémák: a mértékegységváltás előkészítése alkalmilag választott mértékegységekkel való méréssel, játékos térbeli tájékozódási feladatok, régi számírások a mi számírásunk mélyebb megértése és a beavatottság érzése érdekében, szöveges feladatok logikai buktatók nélkül (itt a számolást a gyerekek által gyűjtött adatok, a becslés és a véletlen adatok bevonása tette érdekessé) és a poliéderfogalom építése.

Kiemelt célunk a matematikatanítás egyik központi feladatának megvalósítása az adott körülmények között: a gyerekek hétköznapi tapasztalatai és a szimbolikus formában kifejezett matematikai összefüggések közötti kapcsolat kiépítése.

### b. A tanítási stratégia: tárgyi tevékenység és történetmesélés

A tanulók pillanatnyi előismereteiből indulunk ki, amelyek szintje jelentősen elmarad attól, amit általánosan elvárnak az adott korosztálytól, de az alacsony kiindulási színvonal ellenére a kiválasztott részterületeken a tantervek optimális követelményeit célozzuk meg, építve a tanulók átlagosan jó, illetve kiemelkedő értelmi képességére.

A pedagógusok az egyéni differenciálás eszközét korábban is alkalmazták. A differenciálás a vizsgálatban kiegészült a hátrányos helyzetű tehetséges tanulóakra vonatkozó differenciálási elvek bemutatásával és a gyakorlati alkalmazással, a tapasztalatok elemzésével. A hátrányos társadalmi helyzetből



fakadó kommunikációs akadályok csökkentése alapvetően kétféle speciális feladatot jelentett. A matematikai problémákat szemléletesen, a tanulók nyelvi szintjéhez igazítottan, képekkel és tárgyi tevékenységgel közvetítettük. A tanulók kommunikációs képességének fejlesztése érdekében, hogy a későbbiekben kevesebb segítséggel, illetve külön segítség nélkül is tudják követni a szokásos módon megtartott tanítási órákat, tudják használni a tankönyveket és egyéb nyomtatott segédleteket, sikeresek legyenek a felmérő dolgozatok megírásában, sok, a matematikával összefüggő beszélgetést szerveztünk, írásbeli és rajzos feladatokat adtunk a gyerekeknek.

A társadalmi helyzetből és az egyéni képességekből származó eltéréseken túl a differenciálás a tanulók pillanatnyilag mozgósítható előismereteit és aktuális figyelmi szintjét és érdeklődését figyelembe vette, eszerint kaptak, illetve választhattak feladatokat.

A tárgyi problémamegoldáson keresztül kaptak jelentést és értelmet a matematika elvont fogalmai. Pl. a mértékegységváltást a különféle űrtartalmú edényekkel végzett öntögetés, a tapasztalatok megbeszélése segítette. A téglatestekre vonatkozó számítási feladatokat és a poliéderfogalom építését a poliéderekkel kapcsolatos építő, illetve mozgásos játékok készítették elő. A problémák változatosak voltak. Volt olyan, amelyik nyilvánvalóan matematikai ötleteket, kreativitást igényelt és volt olyan is, ami a tanulók túlnyomó többsége számára csak alkalmazási feladat volt, néhányan mégis problémaként élték meg, és a megoldás során olyan tapasztalatokat szereztek, amelyek hatékonyan segítik a későbbi tanulást. A tárgyi problémamegoldás tervezését nehezítette, hogy gyakran nem könnyű a látott jelenség fizikai vonatkozásaitól eltekinteni, és a megcélzott matematikai összefüggésre koncentrálni.

A feladatok jelentéssel telítését szolgálták azok a történetek, amelyek a macicsalád példáján keresztül mutatták meg az elvégzendő feladatok kapcsolatát a mindennapi élet tapasztalataival.

Mindig nagyon fontos, hogy a tanulókat érdekeljék a matematikaórákon felvetett problémák, sajátjaiknak érezzék azokat. Sok szép példát olvashatunk arról, hogy egy-egy, a gyerekek által felvetett probléma megoldása érdekében a pedagógusok irányításával milyen mély matematikai ismeretekhez juthatnak el a tanulók. A közzétett didaktikai eredmények alkalmazása nagy nehézségbe ütközik. Az adott probléma egy más osztályban már nem a gyerekek saját problémája. A tanulók bevonását diasorozatok segítségével oldottuk meg, amelyek egy macicsalád történeteit mesélik el. A gyerekek közösséget éreznek a macikkal, így az ő problémáik a gyerekek problémáivá válnak.

c. A kísérleti tanítási órák szervezeti formái: a frontális és az egyéni munka kiegészül kiscsoportban végzett munkával.

#### *A matematikatamulás iránti motiváció erősítése*

A tanulók a csoportmunka során változatos élményeket éltek át. A sikerélményeken túl a közös munka történései, az örömeik és a súrlódások órai

megbeszélésének lehetősége a matematikatanulásba való érzelmi és akaratilag bevonódást erősítették.

*A tanulók kommunikációs képességeinek, elsősorban a kommunikációs szándéknak az erősítése*

A nyelvészociológia társadalmi dialektus fogalma „social dialect” alátámasztja Bruner régebbi és az azóta folytatott újabb kutatások eredményeit, amelyek szerint a hátrányos helyzet az iskolában elsősorban nyelvi hátrányként jelenik meg.

A matematikatanulásra vonatkozó néhány új kutatási eredmény tapasztalatai alapján a tanulók nyelvi hátrányuk miatt gyakran el sem juthatnak a matematikai problémához, már tanáraik hétköznapi közléseit sem értik meg, így eleve be sem kapcsolódnak a munkába.

A beszélgetéseket a nagyon egyszerű: Mi történt az órán? kérdéssel indítottunk, és a maci-történetekben példát mutattunk arra, milyen válaszok juthatnak más gyerekek eszébe a kérdés hallatán. Fontosnak tartottuk, hogy a matematikatanulás kezdetén, az egyébként is nehezen megszólaló gyerekek bátran meséljenek valódi élményeikről, pl. verekedtünk X-szel, örültem, hogy pancsoltunk, mert ezekből kiindulva juthatunk el a matematikatanulási szempontból releváns tapasztalatok felidézéséhez és megfogalmazásához.

d. A kísérleti tanítási órák munkaformái: tárgyi tevékenység, megbeszélés, a tapasztalatok lejegyzése.

A matematikadidaktikában ismert módszereket és eszközöket kombináljuk a tanulók sajátos igényeinek és az iskolák speciális helyzetének megfelelően.

A tanulási folyamat egészét megtervezzük a tárgyi tapasztalatok szintjétől a matematikai szimbólumok révén megvalósított tudásrögzítésig, szemben a többségi tanulóknál alkalmazható módszerekkel, ahol a tanárok támaszkodhatnak a tanulók korábbi, reflektált tapasztalataira, és a csak szóbeli ismeretközvetítés is hatékony lehet.

*Ezek a reflektált tapasztalatok igen egyszerű megfigyelések és az azokat követő rövid beszélgetések lehetnek a többségi családok mindennapi életében, mint*

- *Miért esik le a kő? Mert nehéz. Miért repül el a léggömb? Mert könnyű.*
- *Oszd el igazságosan a cukorkát a testvéreddel! Ne feledd, az egyik oszt, a másik választ!*

Az ismeretek bővítését, a készségek fejlesztését olyan tanulási környezetben valósítjuk meg, ami a tanulás pozitív élményét nyújtja azoknak a gyerekeknek is, akiknél az elemi intellektuális technikák hiányoznak vagy nagyon alacsony színvonalúak.

Az iskolák nehéz helyzete ellenére, éppen a hátrányok csökkentése érdekében alkalmazzuk a számítógépeket is, a számítógéppel segített oktatás legegyszerűbben megvalósítható változatát.

#### *Az iskolai matematikatanulás iránti érdeklődés felkeltése és fenntartása*

A vizsgálatnak ez a szakasza a 2006-07-es tanév második félévében zajlott, az előkészítés már az előző tanévben megkezdődött.

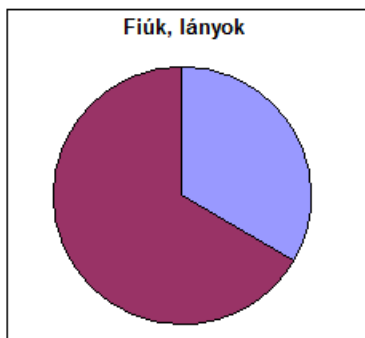
A matematikai programmal párhuzamosan egyéb tevékenységeket is szerveztünk, illetve bekapcsolódtunk már hagyományos, az iskola által szervezett iskolán kívüli programokba.

Az iskolák pedagógusai szakmai-módszertani segítséget és segédeszközöket kaptak a NEMED program keretében, és vállalták, hogy a kapott instrukciók alapján elvégzik az írásos és rajzos adatgyűjtést, matematikából megtartanak négy kísérleti órát, és beszámolnak tapasztalataikról, valamint kísérleti foglalkozásokat tartanak a vizuális nevelés területén is.

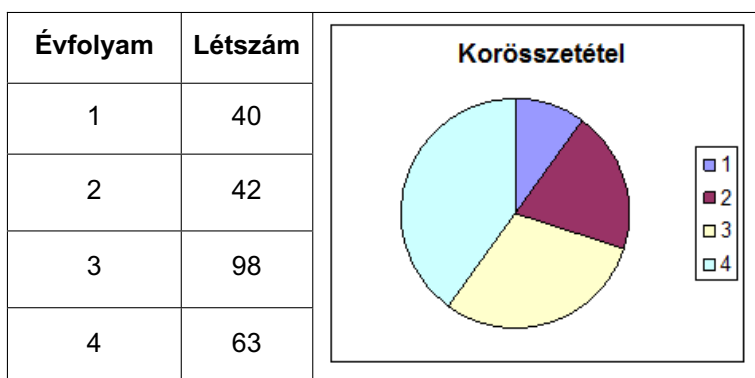
#### *A részvizsgálat mintája*

16 iskola 243 tanulója

A programba az iskolák által benevezett és legalább az első felmérő lapokra válaszoló tanulók adatai



A fiúk túlsúlya talán azzal magyarázható, hogy a szülők a kislányokat inkább magukkal viszik a közeli nagyobb településre, ahol ők maguk is dolgoznak.



Az iskolák némelyike nem teljes létszámmal vett részt a vizsgálatban.

A pedagógusoktól azt kértük, hogy a harmadik osztályosok kerüljenek be a mintába. Egyrészt, mert tőlük vártuk, hogy képesek lesznek az írásbeli kommunikációra, másrészt annak érdekében, hogy a következő évben felmenő rendszerben is folytatódhasson a program.

### *Módszertani gazdagítás a kísérleti matematikaórákon*

A program matematikából 4 kéthetes részzel volt bontva. A pedagógusok irányításunkkal valósították meg a programot.

#### *Előkészítés:*

Milyen tananyagokra, milyen formában van szükség az iskolákban? Mire utalnak a pedagógus beszámolók, milyen igények feltételezhetők a szakirodalom alapján?

A tanítókkal folytatott megbeszélések és a tantervi követelmények elemzése alapján választottam ki témákat, amelyekre elkészítettük a ppt bemutatókat és megírtam a módszertani leveleket.

A legfontosabb szempontok a tantervi követelmények és a gyakorlatban felmerülő tanulási problémák voltak.

#### *Technikai feltételek*

Az iskolák technikai felszereltsége igen különböző volt. Voltak iskolák jól felszerelt számítógépes teremmel, és volt olyan is, ahol a tanítónő egy kölcsönkapott laptopot vitt be magával az iskolába. Az iskolák kis tanulói létszáma miatt már egyetlen, kivetítő nélküli számítógép is lehetővé tette a számítógéppel segített tanulást. A munka sikeressége következtében megnőtt az iskolákban az igény a számítógépekre, és különböző források felhasználása révén általában sikerült javítani a feltételeket. A programba jelentkezett 16 iskolával interneten keresztül tartottuk kapcsolatot, amit alkalmanként postai levelezés, szükség esetén telefonos beszélgetés egészített ki. Volt lehetőség személyes találkozásra is. Az előkészítő szakaszban néhányszor iskolában is vezettem számítógépes és módszertani témákról megbeszéléseket. Az egyetlen is szerveztünk összejöveleket, ahol a matematikai módszertani, valamint az internet alkalmazásnak, az e-mailek küldésének és fogadásának technikáját és kialakult szokásait tárgyaló és gyakorló megbeszéléseket én vezettem.

#### *A teammunka szervezése*

A kísérleti órák tapasztalatait a pedagógusok leírták, e-mailben elküldték, majd ezekből összefoglalót készítettem, és azt visszaküldtem a munkában résztvevő pedagógusoknak. Annak ellenére, hogy az iskolák egy része nem volt rákötve az internetre, az e-mailes kapcsolattartás nem okozott problémákat, családi és egyéb segítséggel a levelezést sikerült megoldani. Ezek az összefoglalók egyrészt biztatást jelentettek a pedagógusoknak, jelezték, hogy fontosak a megfigyeléseik, másrészt megismerhettek sok, a sajátjuktól eltérő

módszertani megoldást. A módszertani sokszínűség tényének bemutatása és a kipróbált új ötletek átadása is része volt a munkánknak.

A kutatás dokumentálása másképpen megoldhatatlan volt, ezért írásos beszámolót kértem a tanítóktól, ugyanakkor, mint azt a körmodell bemutatásánál is jeleztem, a saját munkára való reflektálás, a korábbi tapasztalatok tudatos beépítése az oktatási folyamat következő szakaszának megtervezésében - ez a hatékony pedagógiai tevékenység fontos eleme volt.

A gyerekektől is kértem írásos beszámolót *Mi történt az órán?* címmel. Érdekes dokumentumokat kaptam ezen az úton is, de a fejlesztési folyamatnak is lényegi eleme volt ez a feladat, mert a tanulók kommunikációs képességeit az iskolai standardnak megfelelő szintre kell emelni. A szellemi munka élményeinek átélése, az erre való reflektálás képessége az eredményesség egyik alapfeltétele. A fogalmazás, annak írásos formája szoros kapcsolatban van az egyszerű hétköznapi beszéddel, ugyanakkor a verbalitás a tanulás szimbolikus szintjének egyik megnyilvánulási formája. A tanulóktól kapott írásos reflexiók jelentősen hozzájárultak a pedagógusok önértékelő tevékenységének fejlesztéséhez.

### *Vegyes életkorú csoportok*

A csoportmunkára szükség van a tanulás hatékonyságának emeléséhez. A csoportalakítás lényege nemcsak a szokásos osztálylétszámnál kisebb létszám - ez eleve adott az összevont tanulócsoporthoz többségében - hanem a társas viszonyok megváltozása: nincs közvetlen tanári irányítás, viszont a gyerekek között legális, sőt elvárt együttműködés van<sup>17</sup>.

### *Az órák megtartása*

Az órákat a gyerekek saját tanítói tartották, ezért a program fontos része volt a kialakított kiegészítő anyag kreatív alkalmazására való felkészítés és a pedagógiai munka folyamatos támogatása<sup>18</sup>.

### *A kísérleti témák tanításának szerkezete*

Célom az volt, hogy a kísérleti órákon a gyakorlás helyett a fogalomépítés és a problémamegoldás kerüljön előtérbe. Ezt szolgálták a macis ppt-k, amelyeknek a megtekintését megelőzte az adott téma előkészítése a ppt-vel párhuzamosan, illetve a tanítók döntésének megfelelően közvetlenül előtte, illetve utána kapták a cselekvéses feladatokat, vegyes életkori csoportokban a tanulók, majd ezt követte a tapasztalatok megbeszélése, leírása.

### **Az órákon**

<sup>17</sup> A csoportmunkának ezt a jellegzetességét a pedagógusok nehezen fogadták el, de miután kipróbálták, többségük mindenfajta, matematikaórán kívüli iskolai tevékenységben is alkalmazta.

<sup>18</sup> A 4 kísérleti órát előkészítendő a pedagógusoknak az órák megtartását segítő módszertani leveleket írtam. Oktatási segédeszközként az iskolákba a gyerekeknek szóló, a matematika-tanulást segítő, közös megbeszélésre és feldolgozásra szánt, PowerPoint formában elkészített diafilmeket küldtünk.

Előkészítés

A bemutató megnézése és közben beszélgetés

Tárgyi tevékenység, rajzolás, problémamegoldás szimbolikus síkon is

Mi történt az órán? beszélgetés, tudatosítás

A tanulók írásos visszajelzése

Az órák után

A pedagógusok írásos beszámolója az órákról

A kutatásvezető visszajelzése

Az új téma előkészítése

### *A választott témák*

A szokásos aritmetikai, síkgeometriai, logikai feladatokhoz az analízisből, térgeometriából, topológiából, matematikatörténetből és egyéb területekről is kapcsolunk problémákat. Ezzel nem a nehezítés, hanem a könnyítés volt a célunk.

A prealgebrai feladatok (pl. Hogyan változik a különbség, ha a kisebbítendőt és a kivonandót is ugyanazzal a számmal csökkentjük?) a jó számfogalomra, tehát már egy jó absztrakciós szintre épülő újabb absztrakciót jelentenek, ezért a számokkal, a számok jelölésével csak most ismerkedő, de egyébként okos gyerekeknek is túl nehezek, túl elvontak.

Az első évben négy területtel foglalkoztunk kiemelten. Ezeket a témákat korábban már felsoroltam, most kissé részletesebben is bemutatom őket.

Olyan témákat választottunk a tantervi anyagból, amelyeket a tanítók nehéznek tartottak, és nem is nagyon tudtak magyarázatot adni arra, hogy miért olyan nehezek ezek a témák. Az egyes témaválasztások indoklását az összevont tanulócsoporthoz iskolák pedagógusaival folytatott beszélgetések alapján fogalmazom meg.

a) Mérés, becslés, mértékegységek

Miért nem tudnak mértékegységet váltani? A tanítók nem látták, hogy milyen sok részismeret és milyen fejlett absztrakciós képesség szükséges a mérés, mértékegység lényegének megértéséhez. Nekünk sem volt a problémákat megoldó csodaötletünk. A segítséget az jelentette, hogy észrevették a tanítók, mennyi buktató van a méréses, mértékegység átváltásos feladatokban, így eredményeket csak hosszú távon lehet remélni, azonban a nehézségek egy része leküzdhető élményt adó, szórakoztató tevékenységekkel is. A tanulók olyan feladatokat kaptak, amelyekben a mérésekkel összefüggésben valamilyen problémát kellett megoldani.

Ilyen volt az öntögetős feladat a számunkra egyszerű, de a tanulók egy részének problémát jelentő kérdése: ha az adott folyadékmennyiséget kétszer akkora ürtartalmú pohárral mérjük, akkor hogyan változik a mérőszám. A képek éppen azt tették lehetővé, hogy a feladat világosan megfogalmazható legyen az előző mondat ijesztő szakkifejezései nélkül, így a válasz is egyszerűvé vált a már meglévő tapasztalatokra építve.

A mértékegységváltást egyszerű, mechanikus feladatnak tekintették a pedagógusok, nem gondolva arra, hogy az a mérésekkel kezdődő bonyolult absztrakciós folyamat, amelynek matematikai hátterét a mértékelmélet jelenti.

A mérésekhez becslési feladatokat is kapcsoltunk. Gyakori, hogy a becslés lényegét, a kiszámítást könnyebbé tevő voltát nem értik a tanulók.

#### b) Térbeli tájékozódás

A pedagógusok rendszeresen felméri az elsős tanulók térbeli tájékozódási képességét. A vizsgálatunkban részt vevő pedagógusok elmondták, hogy korábban rögzítették a tanulói eredményeket, majd később nem foglalkoztak a problémákkal. Ezzel a programmal segítettünk a fejlesztésben, ötleteket adtunk, és bátorítottuk a tanítókat saját ötleteik kipróbálására<sup>19</sup>.

#### c) Számolás és érvelés, matematikatörténeti érdekességek

A gyerekeknek meg kell mutatnunk, hogy a számolás része az emberek életének, nemcsak iskolai, iskolás feladat. A számolás révén egy másik, érdekes kultúra belsejébe kerülünk.

#### d) A bizonyítás fogalmának előkészítése

- Sok gyerekben – a pedagógusok egy részében is – olyan kép él a matematikáról, hogy ez az a tudomány, ahol minden biztos, egyértelmű. Meg kell mutatnunk, hogy a kételkedés nem az ellenállás, a motiválatlanság jele, hanem a matematika lényege. Az állításokban addig kételkedünk, kételkednünk kell, amíg azokat nem bizonyították be<sup>20</sup>.

#### e) Adatgyűjtés, becslés, táblázatkészítés

A szöveges feladatok nagyon nehezek a gyerekek jelentős hányada számára. A nagy, nemzetközi jelentőségű kutatások eredményei és saját tapasztalataink alapján a szöveges feladatok rejtett logikai finomságaihoz el sem jutnak a gyerekek, mert a szövegértés hétköznapi értelmében sem értik meg a feladatot. Nem értik azt a szituációt, amely a feladatot tartalmazza és azt sem, hogy nekik miért kell az adott témával foglalkozni. Az általunk választott keret az utazás volt. Az utazás, általánosságban ismerős szituáció, és a macik története miatt személyessé vált a helyzet, az utazási költség kiszámítása értelmes feladat volt. A differenciálódás lehetősége leginkább ebben a témában nyilvánult meg:

- voltak, akik képeseknek bizonyultak jó becsléseket adni a változó feltételekhez igazodva

<sup>19</sup> „Jobb-bal: Vagy tudja, vagy nem, mit lehet ezen gyakorolni? Egyáltalán matekórára való ez?”- kérdezte az egyik kolléga.

<sup>20</sup> A matematikatörténettel kapcsolatban voltak a leginkább eltérők a pedagógusok nézetei. Voltak, akik szerint a matematikatörténet feleslegesen terhelné az amúgy is tanulási problémákkal küzdő tanulókat, mások úgy gondolták, hogy remek lehetőséget jelent, hogy a matematika határterületein kalandozhassanak a tanítási órák keretében. Korábbi tapasztalataim alapján alkalmaztuk a problémátörténeti megközelítést, és külön témaként is szerepelt az egyiptomi számírás és egy a Pitagorasz tételhez elvezető probléma is.

- voltak, akik a becsléssel nem is próbálkoztak, de képeseknek bizonyultak korrektt számolások elvégzésére
- néhányan a számolás helyett vonat- és repülőjegyeket terveztek, rajzoltak és színezték, ezzel a szituációt értelmezték a maguk számára, bár nem matematikai, de a matematikai megértést előkészítő tevékenységet végeztek

f) A becsléssel kapcsolatos problémák

A tanítók látták, hogy a becslés nehéz a tanulók számára, elmesélték például, hogy amikor többjegyű számok szorzatát kell megbecsülni a tanulóknak, titokban elvégzik az írásbeli szorzást, majd a kapott eredményhez közeli számot adnak meg becslésként.

Feltételezhető, hogy a számfogalom bizonytalanságának egy megnyilvánulási formájával találkozunk: az írásos műveletek algoritmusát megtanulták a diákok, de az általuk is használt számok jelentésével sok a probléma, azok nagyságrendjét, egymáshoz viszonyított értékét, a műveletvégzés hatását nem érzik. Az utazási szituációban a közelítő számításnak könnyen látható értelme van. A számolást tágabb összefüggésbe helyeztük, így a számolást motiváltuk, és a statisztika tanulását is előkészítettük.

*Képek által irányított tanulás*

A kommunikáció fő eszköze a kép volt<sup>21</sup>. A matematikai témákra a macsócsalád életének eseményeivel irányítottuk a tanulók figyelmét. Így valószínűsítettük meg, hogy a tervezett problémák kerüljenek elő, ugyanakkor a gyerekeknek is megadtuk a lehetőséget, hogy ezeket a témákat a maguk módján kapcsolják saját életük tapasztalataihoz.

A didaktikai irodalomban sok szép, oktatási alkalmazásra kínált, kidolgozott téma olvasható, amelyekben egy-egy tanulói kérdésből kiindulva, a tanulók kíváncsiságára építve, szinte észrevétlenül tanulják meg a tanulók a matematikai tananyagot. A példák meggyőzően mutatják azt az élményt, azt a tanulói aktivitást, amiből kiindult a szépen felépített oktatási egység. Más osztályok tanulói számára azonban az esetek nagy részben ez a megközelítés éppen úgy kívülről jövő gondolat, mint a hagyományos tankönyvi felépítés. A macsócsalád történetei indirekt módon irányítják a tanulók figyelmét.

A képsorozat módszertani mintát adott a pedagógusoknak. Lehetőségeket kínált a folyamat sokszempontú elemzésére, ezzel is segíteni kívántuk a tanítási tudatosságot.

---

<sup>21</sup> A diasorozat megszületésében nagy szerepe van Schlosser Ákosnak, aki megrajzolta a macsócsalád szerethető, de mégis kemény, határozott, a mai gyerekeknek imponáló figuráit, és közreműködött a matematikai és didaktikai tartalmak képi megjelenésének megtervezésében.



Mintát adott a gyerekeknek is: utánozni lehet a macikat. A legelső diasorozatba be is illesztettünk néhány mondatot, ahogyan a macik megfogalmazták, mit történt, miközben az öntögetéses úrtartalom mérésről tanultak. A gyerekek mutatott példáink:

„Kis pohárból több kell.  
Először találgattunk, azután kipróbáltuk.  
Matekórán is lehet pancsolni.  
Nem kellett sokat olvasni, mert minden le volt rajzolva.  
Tetszettek a mackók.  
Az otthoni poharakkal is kipróbálom”

Ezzel sikerült a gyerekek figyelmét ráirányítani magára a tanulási folyamatra is.

A nyelvi akadályok csökkentek azáltal, hogy a tanulók látták azt a szituációt, ami a matematikai probléma keretét jelentette, és így azt is látták, hogy mi a feladatuk.

Ötleteket mutattunk a tárgyakkal végzett munkára: a macik olyan tárgyakkal tevékenykednek, ami az iskolába is bevihető, nem veszélyes, nem drága, könnyen elérhető, ugyanakkor új tapasztalatokra lehet szert tenni általuk. Például nagy sikere volt az egyensúly játéknak. Ez a játék kezűgyességet igényel, az egyensúlyérzékét fejleszti, látszólag nem kapcsolódik matematikai képességekhez. Mégis, igen nagy a matematikatanulási jelentősége, hiszen az egyenletek megoldását a mérlegelv alapján tanítjuk, miközben a mai gyerekek alig találkoznak kétkarú mérleggel. A gyakorlatban is használható mérleg egyensúlyi helyzetét könnyebb megtalálni, mint egy körlapét a véletlenszerűen ráhelyezett tárgyakkal. Éppen ezért úgy gondoljuk, ezáltal emlékezetes élményt nyújtottunk a tanulónak, és azt remélhetjük, hogy e játék tapasztalatait a tanulók majd át tudják vinni a mérlegelv tanulására, és így gazdagabb jelentéstartalommal fognak telítődni a mérleges tankönyvi ábrák is.

#### *Egy óra bemutatása, a matematikatörténeti téma, óraleírás*

Az órákon a matematikatörténet jelentős szerepet kapott, mert a tananyag gazdagításának egyik célszerű módja a matematikatörténet alkalmazása. Elsősorban a régi számírásokat tanítottuk, mert általuk

- újabb indokot tudtunk mutatni számok használatára, motiváltuk a tanulókat a számolásra
- a tanulók megtapasztalhatták, hogy többféle számírás létezik,
- szemléletessé válik a megállapodás (a konvenció) szerepe a matematikában (másrésről ezzel megkezdhetjük az axiómák felé vezető utak kiépítését is)
- bepillantást nyertek egyik másik kultúrába, a matematika által annak részévé váltak, példát láthattak a különböző kultúrák egymás mellett, egymás után létezésére

- olyan új ismeretet sajátítottak el, ami különlegesség, ami a család és az ismerősök előtt a magas műveltség tekintélyét adta az iskolás gyerekeknek.

Két témát választottunk, ezek az egyiptomi számírás és egy, a Pitagorasztétel előkészítő, szemléletes állítás empirikus vizsgálata voltak.

A munkát ebben az esetben is egy diasorozat szervezte. A két témának megfelelően két részből állt, az első az egyiptomi kalandozás, a másik a görög volt.

Az egyiptomi számírást azért választottam, mert a hieroglifák megismerése a beavatottság érzését, a magas műveltségbe való betekintés lehetőségét nyújtja. A matematikatörténetnek az egyiptomi matematika fontos része. Az egyiptomi eredetű szorzást és osztást még a középkorban is rendszeresen tanították és használták Európában a helyiértékes számírás elterjedése előtt. A különleges és matematikailag hiteles számírás megtanulása könnyű, annak szigorúan additív felépítése miatt, természetesen ennek ára is van, az alapműveletek elvégzése nehezebb, mint a helyiértékes számírásban, de érdekességképpen a szorzás megtanulható, sokaknak örömet szerez. A római számok is sok szempontból megfeleltek volna céljainknak, de az egyiptomi előnye volt éppen annak ismeretlensége, ami nemcsak a gyerekekre hatott erős motiváló erővel, hanem a pedagógusok is most ismerkedtek vele, ezért természetesebb volt a lassabb, türelmesebb haladás. További előnyt jelentett, hogy a számjegyeket nem betűk, hanem egyéb jelek jelölték. A témák kiválasztása során figyelembe vettem a korábbi tanítási, tanárképzési tapasztalatokat is, amelyek egy része szakdolgozatban is megjelent (Rózsahegy, 2006)

### *Ismerkedés a görög geometriai gondolatokkal*

A Pitagorasztétel mélyen beépült az európai közgondolkodásba, ezért választottam ezt a tételt.

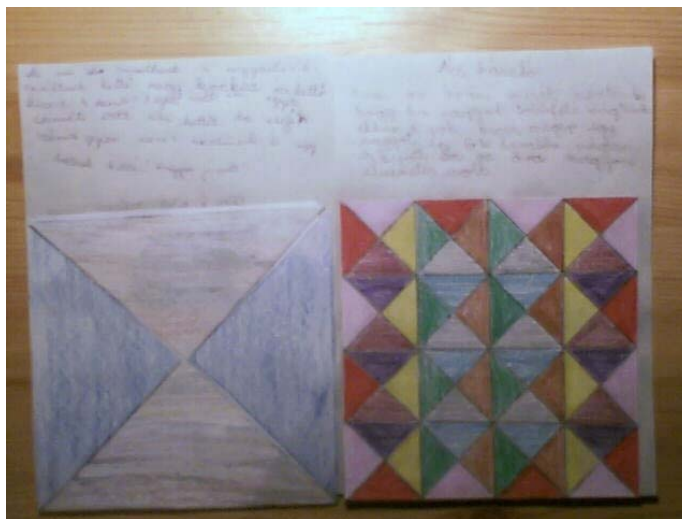
A Mi az, hogy bizonyítás? - kérdés megismertetése felé vezet el ez a téma. A hipotézisek felállítása és döntés azok igazságértékéről természetes emberi tevékenység, alapvetőbb, mint a számfogalom és a számolni tudás. Ezért, már igen hamar megérthetik a tanulók, hogy mit jelent egy matematikai állítás, és vizsgálhatják annak igazságtartalmát is. (Közvetlenebb célom ezzel a feladattal a számelméleti és elemi geometriai igaz-hamis állítások előkészítése.)

Természetesen a szabatos matematikai bizonyításra csak sokkal később érnek meg a tanulók, itt csak felvillantottuk a hipotézis ellenőrzésének egy lehetőségét.

A Pitagorasztétel előkészítéseként szemléletes kérdést választottam: csokoládék közül kell választani. A csokoládékat négyzet alakú papírlapok szemléltetik, a választási lehetőség: egy nagy, 14 cm oldalhosszúságú négyzet, illetve két kisebb, 10-10 cm oldalhosszúságú négyzet.

Innen indulva többféle úton haladtak a kollégák. Volt, aki megkérdezte a gyerekeket, ők melyiket választanák, a két kicsit vagy az egy nagyot. S ezután ellenőrizték a döntést. Volt, aki elmondta a gyerekeknek, hogy mindegy, melyiket választják (egyenlő vastagságot feltételezve), a két csokimennyiség

megegyezik. A gyerekek nem hitték el, ezért tanítójuk javasolta az állítás ellenőrzését, amit tárgyi szintű hipotézisvizsgálattal valósítottak meg. A gyerekek átdarabolással, valódi, ollóval végzett átdarabolással próbáltak meggyőződni az állítás igazságáról. Az átlós irányú vágás megtalálásához segítségre volt szükségük, de az ötlet annyira megragadta őket, hogy kértek még színes papírokat, és szép ritmusú ábrákat, képeket készítettek.



Egy 9 éves tanuló munkája, e-mailben kaptam meg a fényképet.

### *A tanítók és a gyerek által írt beszámolók tapasztalatai*

A tanítók írásos beszámolóit több célt is szolgáltak. A távoli kisiskolákkal interneten keresztül kommunikáltunk. Így küldtük el és kaptuk meg az információkat, a kutatást e nélkül lehetetlen lett volna megvalósítani. A tanártovábbképzést is szolgálta a pedagógusok önreflexiója és a kapott beszámolókból készített összefoglalók eljuttatása minden résztvevőhöz. A pedagógusokkal egyéni levelezés formájában is tartottam a kapcsolatot.

A feladatok a hagyományos matematikai feladatokhoz képest szokatlanok voltak, talán túl egyszerűnek tűnhetnek, olyanoknak, amikkel nem is érdemes a tanulóknak foglalkozniuk. A tapasztalatok cáfolták ezt az aggodalmat.

*„A poharas feladatot elvégeztük, a gyerekek leírták az észrevételeiket. Mindenki öntözgetett, de először meglepetésemre nem sok jelentkező akadt a feladatra. Nézték egymást, figyeltek, hogy ki jelentkezik. Hármasával méricskéltek, és hirtelen minden kéz a levegőben volt, hogy öntözgetni szeretne, így minden gyerek méricskélte. Tehát a lelkesedéssel nem volt probléma. Elhangzott, hogy nagyobb edénnyel sokkal egyszerűbb teletölteni bármit, mert kevesebbszer kell meríteni. Azt sajnálom, hogy*

*otthoni folytatásra egyik tanuló sem gondolt, nem vetítették ki a mindennapi tevékenységekre. A harmadikos tanulók, mivel ők ezt már tanulták, a matematika nyelvén fogalmazták meg gondolataikat. Beszélgetés után (adtam ötletet, hogy otthon üvegekbe, különböző nagyságú üvegekbe lehet tölteni, ez megmozgatta a fantáziájukat) elhangzott a homokozás. - Megmérem, hogy a homokozó vödörbe hány kispohár víz fér. - Anyukám hány pohár tejből készít tejbegrízt. Összegzésül: tetszett a feladat, remélem a következőnél szabadabban tudnak majd gondolkodni és fogalmazni.” (D. Márta)*

A kezdeti visszahúzóadás láthatóan nem azért van, mert túl könnyű, triviális a feladat, hanem a bizonytalantól való félelem miatt. Mennyivel erősebb lehet ez a félelem, ha matematikai problémát kell egyedül, írásban, tétre menően megoldani. Ezért nagyon fontos, hogy a konkrét tapasztalatokon túl bátorítást kapjanak a tanulók a próbálkozásra, ami a későbbi munka során várhatóan interiorizálódik.

Ebben a példában nagyon jól látszik, hogy a mértékegységváltásban lévő összefüggés a mérőszám és a mértékegység között milyen egyszerűen, szemléletesen, nyilvánvaló tudásként fogalmazható meg hétköznapi nyelven: nagyobb edénnyel sokkal egyszerűbb teletölteni bármit, mert kevesebbszer kell meríteni. A mértékegységváltási feladatokat a gyerekek mégis gyengén oldják meg a felmérésekben, és e mögött nemcsak technikai hiányosságok, a váltószámok nem ismerete áll, hanem a kapcsolat hiányzik a hétköznapi, ismerős tevékenység és a matematikai feladat között. Hasonló eredményeket mutat be Az utca matematikája című könyvében Theresina Nunes.

A következő példa azt igazolja, hogy nehéz a pedagógusoknak a hagyományos szemléltetésről áttérni a tárgyi problémamegoldásra. A feladat testek építése volt, valamint a jobb-bal oldal megállapítása álló és mozgó tárgyak esetében.

*„A foglalkozásnak nagy sikere volt, érdekesnek találták a gyerekek, örömmel készítették el a testeket. Először megbeszéltük a háromszög és a négyszögek tulajdonságait – élek, sarkok számát, majd a térbeli formákat bemutattam mintadarabok segítségével. Kerestünk a tanteremben hasonló tárgyakat, majd megbeszéltük a lapok, csúcsok élek számát. Hozzáfogtunk ezután az építéshez, mely nagyon könnyen ment az elsősöknek is, aminek nagyon megörültem, mert azt gondoltam, ez még nehéz lehet számukra. A nagyobbak pillanatok alatt több testet is készítettek, nagyon büszkék voltak a teljesítményükre. A nehezebb feladat ezután jött, azt kértem tőlük, mint a pilóták a sötétben, úgy navigálják ők is a társukat, amikor egymásnak háttal kellett építeniük. Ezt is sikeresen megoldotta a többség, főleg a 3.-4.-es tanulók. A kisebbeknél többen mondták közben, hogy nem értik, nehéz az utasítást követni, de kis segítséggel sikerült a feladatot megoldani. A térirányok gyakorlásához számomra is izgalmas játékok*

*találtam ki: kineveztünk egy mozdonyvezetőt, a többiek felsorakoztak egymás háta mögé, beszálltak a vonatba egymás vállát fogva. Majd megkértem őket, hogy csukják be a szemüket és csak a mozdonyvezetőt irányítottam. A tanteremben és a folyosón kellett lassan, egymásra vigyázva haladniuk. Előre, hátra, jobbra, balra, mellé, mögé stb. szerepeltek az utasításban.” (M. Judit)*

A hagyományos szemléltetésre utalnak a kiemelt szavak: Először **megbeszéltük** a háromszög és a négyszögek tulajdonságait - élek, sarkok számát, majd a térbeli formákat **bemutattam** mintadarabok segítségével. **Kerestünk** a tanteremben hasonló tárgyakat, majd **megbeszéltük** a lapok, csúcsok élek számát. Ugyanakkor ez a beszámoló azt is megmutatja, hogy a mozgásos problémamegoldás során a pedagógus milyen alkotó módon dolgozott, egy későbbi beszámolóban írta, hogy „mint a pilóták a sötétben, úgy navigálják ők is társukat”. És a pedagógus – bár ezt explicit módon nem írta le – kreatív módon alkalmazkodott a gyerekek eltérő életkorához, képességeihez: mivel az egyéni munka nehéznek bizonyult ezért a gyerekek csoportosan megoldható, játékos feladatot kaptak: „kineveztünk egy mozdonyvezetőt, a többiek felsorakoztak egymás háta mögé, beszálltak a vonatba egymás vállát fogva”.

Hasonló tapasztalatokról számolt be a tanítónő egy másik iskolából.

*„Elindítottam a ppt-t, nagyon örültek, többen mondták: Ezek a mackók, ezeket már ismerjük!*

*A fás kérdésre úgy válaszoltak, hogy hármat számoltam, és mindenki azt a kezét emelte a magasba, amely irányt helyesnek tartotta. A fánál csak egy tévedés volt, ám a Melyik autó kanyarodik jobbra? kérdésnél már többen hibáztak. Hogy pontosíthassuk a választ, krétával a parkettára rajzoltam az útkereszteződést, és két széket raktunk ki, a bizonytalankodók a „vezetőülésbe” ültek, így megfigyelhették, merre tekerik a kormányt, merre kanyarodik az autó. Persze az is ráült a székre, aki jól válaszolt, mert hát ezt ki kellett próbálni. (Jónás Ádám pl. 3. osztályos, tökéletesen biztos a térirányokban, de állította, hogy ő a kék autót válaszolta, tehát ki kell próbálnia.)” (K. Maca)*

A gyerekek kitartó, elmélyült munkáját dokumentálja ez a fotósorozat, S. Zita tanítványai láthatóak a képeken.



A megtervezett kommunikációs lehetőség és az érdekes feladatok a gyerekekből kommunikációs aktivitást váltottak ki. A következő beszámolót elküldő tanítónő osztályában a legérdekesebb feladat a matematikatörténeti ismeretek, ezen belül az egyiptomi számírás tanulása volt. A gyerekek örömmel vettek részt ezen az órán, és viszonylag hosszú beszámolóikban le is írták élményeiket, amelyekhez tanítónőjük megjegyzéseket is fűzött.

- *Azt tanultam meg, hogy mit jelentenek a hieroglifa rudak, és azt, hogy elől vannak a kis számok, hátul a nagyok, és azt, hogy a falba ütötték bele az élüket. Nagyon jól éreztem magam, mert találgatni kellett és szorozni. (2. o.) – ő ügyes kislány, de ilyen aktív még sosem volt, sőt a legtöbb okosságot ő mondta ezen a foglalkozáson.*
- *Nagyon tetszett a hieroglifák tanulása. Jó volt, és könnyen ment. Jó, hogy tudom, hogyan kell írni. Remélem, hogy még fogunk ilyet írni. (2. o.)*
- *Azt tanultam meg, hogy a fáraók nem tudtak írni, csak az írnokok. Hogy a sivatagban a hieroglifával az írnok hogy szoroz. Azért volt jó, mert számolnunk is kellett, és ötletes kérdések is voltak. (3. o.)*
- *Azt tanultam meg, hogyan kell egyiptomiul számolni. Jó volt, mert izgalmas volt. (4. o.)*
- *Fordított sorrend, nem tudtak írni, csak az írnokok. Jól éreztem magam. (4. o.) – a másik legaktívabb gyermek ezen az órán. Ő az, aki rendszeresen nem készít házi feladatot, nem olvas, rengeteg időt tölt a tévés rajzfilmek előtt, de ő ismerte egyedül a hieroglifa szót, és ezekből a rajzfilmekből egyiptomi istenek, fáraók nevét sorolta.*
- *Azt tudtam meg, hogy az arab számok számjegyeinek összege = a hieroglifás számjeleinek összegével. Nagyon jól éreztem magam, mert az ilyen feladatok érdekelnek. (4. o.) – ő a legmatematikásabban gondolkodó tanulómk, aki hamar megfogalmazta az előbb leírt összefüggést.*
- *Azt tudtam meg, hogy Görögországban római számmal írnak, Ázsiában hieroglifákkal. (mi Afrikáról beszéltünk és a múltból). Jól éreztem magam, mert sok mindent megtudtam valamit, és csendben volt mindenki, és figyelt, amit a tanító néni mondott. (4. o.)*
- *Azt tanultam meg, hogy amikor írjuk a más számot, akkor hátulról kezdjük. Jó volt, mert dolgoztunk, és gondolkoztunk is. (4. o.)*
- *Sok mindent megtanultam. Érdekes, hogyan éltek a múltban. Furcsa a jelük, ahogy a falra írtak. Remélem, sok ilyenféle feladat lesz. Nekem nincs rossz gondolatom, mert tetszett az egész. (4. o.) (S. Zita tanuló)*

A nagy érdeklődést tükröző beszámolókból kiolvasható néhány tévedés is, ami részben a PowerPoint prezentáció leegyszerűsítéseiből származik. A félreértésekre e-mailben hívtam fel a tanítónő figyelmét, és javaslatokat írtam azok korrigálására is.

Később egyensúly játékot is tanítottam, pontosabban a macik tanítottak a gyerekeknek. Az ismeretfejlesztési cél az egyensúly fogalmának megismerése volt, ezzel a későbbiekben sok gondot okozó mérlegelvet készítettem elő szemléletesen. A másik cél a problémamegoldási folyamat gyakorlása volt. A feladat világos, egyértelmű: minél több apró tárgyat kell felhelyezni a körlapra úgy, hogy az ne boruljon föl. A feladat mégsem egyszerű, mert a lemez könnyen

felborul, ugyanakkor már egy-egy darab rárakása is már látható sikert jelent. Hibázás után gyorsan újra lehet kezdeni próbálkozással, stratégia keresésével<sup>22</sup>.



A tanítók kérése alapján beiktatott szöveges feladatot is szituációs játék keretében kapták a gyerekek. A direkt szövegezésű feladat:

„Mennyibe kerültek a jegyek, ha az egyes jegyek ára és mennyisége adott?”, előkészíti a szokásos indirekt szövegezésű feladatokat. A feladat, egyszerűsége ellenére azért volt mégis problémamegoldás, mert a gyerekek maguk gyűjtötték össze az adatokat (utasok száma, jegyek ára, az utazási kedvezmények változatai), megbecsülték a várható részösszegeket. Így végül a kiszámoláskor kapott végeredmény a bennük megfogalmazódott kérdésekre adott válasz volt.

*„Az utolsó téma megvalósításához óvónő kollégámat is bevontam. Nem volt nehéz, mivel egy épületben van az iskola és az óvoda. Az óvó néni bejött megkérdezni a Megy a gőzös című gyerekdalt, amit az óvodában tanított nekik, de most nem jut eszébe. A gyerekek nagy örömmel igyekeztek felfrissíteni kolléganőm emlékezetét, eljátszva és elénekelve a dalocskát. Ekkor én megjegyeztem, hogy igen sok utas van azon a vonaton jegy nélkül. Természetesen azonnal nagy jegy-gyártásba fogtak, mindenki elképzelése szerint. Megbeszéltük, hogy kik utaznak, milyen jegyet vásárolnak és hol. Amikor a jegy elkészült, nem volt hol eladni, megvásárolni, ezért kénytelenek voltunk utazási irodát nyitni. A jegyek árának a meghatározásánál a kisebbek is nagyon hamar ráéreztek a különbségekre, az arányokra. A becslésekkel is megbirkóztak, amíg egy napot, kisebb számokkal számolgattunk. Miután eldöntöttük, az iroda*

<sup>22</sup> 2010 tavaszán részt vettünk UNESCO támogatással egy pedagógiai programban Kenyában. Egy jómódú, magániskolába járó, gondosan nevelt kisfiú példáján láttam, hogy a problémamegoldás nehézségei, a próbálkozással való szembenállás mennyire megmutatkoznak ebben a játékos feladatban. A gyerek láthatóan ingerült volt a családi körben játszott játék első néhány menetében. Ki is fejezte, hogy nekem, a felnőttnek, nem lenne szabad elhibáznom a rakosgatást, ha viszont nem tudom megoldani, akkor nem lenne szabad az ügyetlen mozdulatokkal kellemetlen helyzetbe hozni magam. Végül a kisfiúnak a játék során nemcsak kézügyessége és az egyensúlyról való ismeretei fejlődtek, hanem megismert, kipróbált egy problémamegoldási stratégiát, és sikereket ért el benne.



*beindításában mindenki részt kell vállaljon, az I.-II. osztályosok külön feladatot kaptak. Hirdetéseket fogalmaztak meg, plakátot terveztek az iroda reklámozásához. A IV. osztály dobókocka segítségével egy napra meghatározta az eladott felnőtt, gyerek és csoportjegyek számát, majd kiszámolta ezek számát egy hónapra, külön-külön. Következett az összes eladott jegyek száma, majd ezek értéke. Nagyon érdekes volt látni az izgalmat, vajon mennyi pénzünk lesz? A végén levő játék síri csendet váltott ki, még a lélegzetüket is visszatartották az én izgága, zajos gyermekeim.*

Ők mondták:

*„Megmondom apukámnak, utazási irodát nyisson, én majd készítem a jegyeket – repülőt veszek, de csak felnőttjegy lesz, a gyerekeket ingyen viszem – nem szeretem, mert nem engedték, hogy én tegyem a lapra a gyufaszálat.” (T. Tünde, Kiskapus, Románia)*

A tapasztalatok azt mutatták, hogy a feladatok alkalmasak a differenciálásra. A mintába két gyógypedagógiai csoport is bekerült, idézek egy ilyen osztályból érkezett beszámolóiból is. A tanítók a gyerekek képességeihez alkalmazkodva vezették az órákat, a gyerekek pedig egyéni képességeik szerint vették ki a részüket a közös munkából.

*„A negyedik matek témát is megoldottuk. Nagyon örültem az elnagyolt feladatadásnak, mert nekünk ez bizonyult a legnehezebbnek. Jócskán leegyszerűsítve a következőt "csináltuk" belőle: a kerettörténetet felhasználva fogalmakat tisztáztunk (utazási iroda, teljes árú jegy, kedvezményes stb.), majd el is játszottuk az utazásszervezést. A kialakított csoportok saját budapesti utazásukat tervezték: jegyeket készítettek, tippeltek - nagyon messze voltak a reális értéktől, pedig kis számokat használtunk - rögzítettük ezeket az adatokat táblázatba. Az ügyességi játék nagyszerű volt, mindannyian rendkívül élvezték! A beszélgetéskor elhangzottakból:*

*- Nagyon tetszett, hogy csináltunk jegyeket. Ráírtuk, hogy felnőtt, meg gyerek, meg kedvezményes. Meg összeszámoltuk, hogy hány forintba kerül.*

*- Az tetszett, amikor, készítettük a jegyeket, meg még az, hogy nagyon szépek voltak a filctollak. Más színekkel csináltuk a jegyeket. Én a gyerekjegyet csináltam, 2 forint volt.*

*- Nekem tetszett az üveges feladat. Rá kellett tenni az üveg tetejére a golyót, a golyóra pedig a kerek lapot és azokra a tárgyakat tenni, hogy nehogy leessen. A matematikában nekem az nem tetszik, hogy kivonást kell csinálni. A szövegértés feladatokat szeretem.*

*Sajnáljuk, hogy a mateknak vége, hiányozni fognak ezek az órák! Sokat tanultunk általa, belőle és róla. Köszönöm az érdekes feladatokat, a jól*

*követhető instrukciókat, a segítő, biztató visszajelzéseket! Kíváncsian várjuk az utómérést. A meglévő anyagokat majd postázom.” (M. Zsuzsa)*

A tanítónő szabadkozása ellenére a beszámolók azt mutatják, hogy az órák hangulata, a gyerekek aktivitása, sőt a megszerzett, a matematikatanulás szempontjából lényeges tapasztalatok között nincs nagy különbség, ezek jórészt függetlenek a gyerekek képességeitől. A továbblépés lehetőségei viszont lényegesen mások. A gyógypedagógiai csoportban a pozitív élményként megélt matematikatanulási problémamegoldás erőt, kedvet adhat a „kivonáshoz”, amint azt az egyik gyerek jelezte, utalva tanulási nehézségeire.

A tehetséges gyerek számára pedig sokfelé nyitott az út, számukra a tantervi anyag gazdagítható, versenyfeladatokkal és más matematikai problémákkal. A történet nyomán bonyolultabb, logikai összefüggések kibontását is igénylő szöveges feladatok, például az árakkal kapcsolatosak és a mozgásos feladatok irányába is érdemes elmenni. Folytatható a dobókockás tapasztalatok gyűjtése, ez elvezethet kombinatorikai és valószínűségszámítási feladatokhoz.

A reális adatok gyűjtése, táblázatok készítése, statisztikák olvasása pedig a gyakorlatközeli feladatokon keresztül vezet el matematikai, alkalmazott matematikai problémák megértéséhez.

### Összegzés

A tapasztalatokat összegezve megállapíthatjuk, hogy a PowerPoint bemutatók, kiegészítve a módszertani levelekkel és a tanítók közötti tapasztalatcserével és tudásmegosztással, lehetővé tették a kísérleti oktatás megszervezését ebben az egyébként pedagógiai kutatásokban szokatlan formában is, ahol a kísérletvezető nem lehetett jelen az órákon, és a pedagógusoknak szóló információk nem voltak előzetesen minden részletükben kidolgozva, azok módosultak a munka során kapott visszajelzések alapján. A kísérlet során a rendszeres internetkapcsolat és az alkalmankénti személyes megbeszélések révén bebizonyosodott, hogy a tanulók matematika órai aktivitása jelentősen megnőtt. Olyan munkát végeztek, olyan feladatokat oldottak meg, amelyeket korábban nem voltak képesek. A gyerekek rendszeres visszajelzést kaptak teljesítményükről. Hasonlóképpen a pedagógusok is azonnal értesültek végzett munkájuk értékéről, és segítséget kaphattak a félreértések tisztázásához, a felmerülő problémák megoldásához.

### *Esettanulmány, a poliéderek tanítása*

#### *A vizsgálat előkészítése, háttérmunkálatok*

Bruner kísérletei alapján „bármilyen megtanítható a gyerekeknek az ő szintjükön”, úgy gondoltam, hogy a szokásosnál bátrabban lehet választani problémákat a nehéznek tartott matematikai területekről is. Támazkodtam Varga Tamásnak a szorzótábla tanításval kapcsolatban megfogalmazott véleményére is: ha a gyerekek izgalmas problémákat oldanak meg, amelyek

keretében a szorzásra is szükségük van, szinte észrevétlenül, külön erőfeszítés nélkül megtanulják az 1x1-et is.

### *Tanítási stratégia*

A tananyag tartalma a tanulók képességeihez igazodik, ami a normális eloszlást követi, és nem, vagy igen kevésbé függ a tanulók társadalmi, hátrányos helyzetétől, tehát a megszokottnál nehezebb tartalmakról van szó

A tanítás stílusa a tanulók kommunikációs képességeihez igazodik:

az új ismeretek, feladatok, problémák tárgyi, cselekvéses szinten fogalmazódnak meg

a képek narratív kontextusba kerülnek, mert a steril ábrák nehezen érthetőek, a vizuális környezet megtervezésével és a problémák történetbe helyezésével tesszük érdekessé, érthetővé, jelentéssel telítetté a geometriai ábrákat is

a szimbolikus szinten alkalmazzuk a verbális kommunikációt, segítjük a tanulókat, hogy tapasztalataik megfogalmazásával tudatosítsák tapasztalataikat, és ezzel egy időben tanítjuk a matematika jelölési technikáit is.

### *A kommunikációs képesség fejlesztése*

Mivel a hátrányos helyzetű tanulók legközvetlenebb tanulási akadály a kommunikációs képességek iskolában elvártnál alacsonyabb szintje, ezért ennek fejlesztésére kiemelt figyelmet fordítunk. Alapvetően arra építhetünk, hogy a tanulóknak nincsenek pszichológiai értelemben beszédfejlődési zavarai, a saját családi környezetükben az ott kialakuló élethelyzeteknek megfelelően kommunikálnak, de az iskolában mást várnak el tőlük. Kétféle segítségre van szükségük: a nyelvi eszközeik gazdagítására, és az eszközök hiányosságai miatt kialakult gátlások és hibás stratégiák oldására. A fejlesztéseket a következő területeken valósítottuk meg:

A kommunikációs szándék és akarat segítése

A szövegek belső kohéziójának erősítése, ezen belül az egyszerű logikai összefüggések, ÉS, VAGY alkalmazásának gyakorlása

A szókincs bővítése olyan új fogalmak szisztematikus bevezetésével, amelyeket szerencsésebb körülmények között spontán módon sajátítanak el a tanulók

### *Társas kapcsolatok fejlesztése*

A hátrányos helyzetű tanulók gyakran elszigetelődnek. Az összevont tanulócsoportos kisiskolákban ezt az elszigetelődést a hagyományosan kialakított tanulási formák felerősítik: a kis, gyakran csak 3-8 fős osztálylétszámok miatt a pedagógusok nem alkalmaznak csoportmunkát, vagy az egész osztállyal foglalkoznak, vagy egyéni munkát végeznek a tanulók. (A későbbi iskolafokokon a kisiskolák tanulói kitűnnek azzal,

milyen magas szintet érnek el az önálló munkában, bár ez valószínűleg a fegyelmezetttségüket jelenti és nem a kreativitásuk magas szintjét.)

Rendhagyó óráinkon a csoportszervezésnek különböző formáit alkalmaztuk. A tanulást közösségi élménnyé tettük. A csoportfeladatok miatt kialakult tanulói viták és azok megoldásai a kommunikációs képességek fejlődését közvetlenül is segítették.

*Céljaink a poliéderek tanítása során:*

A gyerekek ismerjenek rá a poliéderekre, meg tudják különböztetni a poliédereket az egyéb testektől

Ismerjék fel, hogy a poliédereket az élek-lapok-csúcsok számával jellemezhetjük

A téglatestek tekintetében a matematikailag szabatos fogalomépítés megkezdése

Segítségnyújtás az önálló problémamegoldásban

A tanulás új, aktív és kreatív módszereinek megismertetése

*A tanulási folyamat menete*

A tanítási órák felépítése a korábbiakban kialakult vázlatot követte. A pedagógusok bevezették a témát, majd megnézték a PowerPoint bemutatót. Ezek után a tanulók tárgyi problémamegoldási feladatokat kaptak. Az órák a tapasztalatok és az élmények megbeszélésével zárultak.

Az elkészített, az órákon bemutatott prezentációkat és az alkalmazott munkafüzetet CD-n mellékelem.

*A részvizsgálat mintája*

A munkának ebben az intenzívebb szakaszában négy iskola vett részt. Az esettanulmányban a B jelű iskolában szerzett tapasztalatokat elemzem. A negyedik osztálynak hat tanulója van.

*A vizsgálat a B jelű iskolában*

A poliéderek kísérleti tanítását mind a négy iskolában megvalósítottuk. A dolgozatban a négy közül az egyikben szerzett tapasztalatokat mutatom be. A következő táblázat fejlécében a számok, illetve a számpárokból az első számok, a vizsgálat idejére, (1) elővizsgálat, (2) utóvizsgálat, a második számok az alkalmazott képre (lásd 60. o.) utalnak.

*A motivációs szerkezet vizsgálata, A B jelű iskola negyedikes tanulójának profilja az OMT vizsgálatok alapján*

Név	Omt 1/1	Omt 1/2	Omt 1/3	Omt 2/1	Omt 2/2	Omt 2/3	Írás- kép1	Írás- kép2	Mat.	Ma- gyar
<b>B. Dorina</b>	4	4	3	4	3	3	2	2	4	4
<b>B. Regina</b>	4	4	5	4	4	1	2	2	2	3
<b>B. Szabina</b>	5	2	3	4 L4	3	3	2	2	4	4
<b>C. Ágnes</b>	5	4	4	4 L3	1	2	3	3	4	5
<b>M. Pál</b>	5	1	5	4	3	?	2	3	3	3
<b>R. Laura</b>	?	4	4	4 L5	4	3	2	2	3	3

*A szöveges válaszok rövid ismertetése*

A motivációs állapot norma szerinti besorolása értékes információ az tanuló személyiségéről, de a válaszok egyedi értékelése még mélyebb megismerést tesz lehetővé. Az alábbi példákon lehet látni, hogy a tanulók az írástechnikai problémák ellenére világosan ki tudják fejezni az adott képpel kapcsolatos asszociációikat. Az elemző pedagógus ezeket az üzeneteket tudja a kudarctól való félelem vagy a sikerre való vágyakozás, stb. motivumaiként értékelni.

A tanulók ábrákra adott reflexióit betűhíven közlöm. Az egyes betűk megformálásában mutatkozó problémák így nem láthatóak, ugyanakkor a nyomtatott szövegre való áttérés kiemeli a betűhibákat, amelyek az írás lendületének ismeretében kevésbé voltak zavaróak.

➤ **B. Dorina**

Összbenyomás: Hibás írás, érthető tartalom, bizakodás jellemző rá

Elő: *„egy ember hegyet mász. bátornak érzi magát. mert bátor. végül fel mászot a hegyre.”*

Utó: *„Krisztián felmászik a dobtetőre. Nagyon izgul. Hogy leesik-e. Avégén feltudot mászni a dobtetőre.”*

➤ **B. Regina**

Összbenyomás: Hibás írás, érthető tartalom, derűs bizakodás

Elő: *„Bátor erős volt mert okosvol hogy felmaszot a hegy csucsra mert olyan erős volt és így volt a vége.”*

Utó: *„Jol érzi magát csak egy kicsit izgatotan érzi magá és egy kicsit fél és izzad és egy kicsit bátor. okos és nem néz le és fázi. tul lassan mászi és erő nyugot. jol kapaszkodi a kezével jol tapad a cipölye és erősnek érzi magát.”*

➤ B. Szabina

Összbenyomás: Hibás írás, érthető tartalom, leküzdött szorongás

Elő: *„Miki hegyet mászott. Egy kicsit fél. Attól hogy leesik. megcsúszott és leeset. Beviték a kórházba és egy hétmolva haza mehetet Miki.”*

Utó: *„Sándor hegyet mászik. Egy kicsit fél. Mert fél hogy leesik. Felmászt a hegycsucsra.”*

A B. gyerekek hármassikrek, nagyon különböző viselkedéssel, megjelenéssel. A pedagógus azt emelte ki, hogy ki melyik tantárgyat kedveli, miben sikeres valamelyikük. Ezek alapján a követelményeket általában nehezen teljesítik, de az iskolában jól érzik magukat.

➤ Cs. Ágnes

Összbenyomás: Korrekt írás, szorongást tükröző tartalom

A legjobb tanuló, okos, szorgalmas, jó családi háttérrel

Elő: *„A gyerek bátor volt. Egy nagy hegyre mászott fel.”*

Utó: *„Egy ember hegyet mászik. Egy kicsit fáradt. Azért érzi magát így mert nehéz mászni. Szegény ember le esett.”*

➤ M. Pál

Összbenyomás: Korrekt írás, leküzdött szorongás

Az elmúlt évben nagy családi problémák voltak körülötte, ebben az évben ezek megoldódtak, az egyik legjobb tanulóvá vált.

Elő: *„Nagyon fél. Rosszul érzi magát. Mert nagyon fél.”*

Utó: *„Máski az ember. izgatottnak érzi magát. Mert fél hogy leesik. Felér a hegyre.”*

➤ R. Laura

Összbenyomás: Hibás írás, érthető tartalom, magabiztosság

Rohamosan fejlődő tanuló

Elő: *„Andris felmászott a hegyre. nagyon bátra viselkedet és feltudot mászni a hegytetejére.”*

Utó: *„Egy ember hegyet mász. Frisnek érzi magát. mert még nem mászott hegyet. Felmászott a tetejébe.”*

**A tanítás folyamata**

Korábbi megbeszéléseink alapján az iskolában a poliéderekkel összefüggő fogalmakkal sokféle formában találkoztak a gyerekek, a napközis foglalkozásokon is, és az órákon is. Azon az órán én is jelen voltam, amelyiken az osztály tanítója, megbeszéléseink alapján, az éleken való mozgást állította a munka középpontjába. Az óra után lehetőségem volt az iskola mind a 6 negyedik osztályos tanulójával egyenként foglalkoznom. A tanulók segítségével oldották meg a feladatlap feladatait.

### *Az órai munka szervezése, a reprezentációs módokra fordított kiemelt figyelemmel*

#### ➤ Enaktív szint

Mozgás az éleken, Hogyan juthatok el egyik csúcspontból egy másikba?

A manipuláció sajátosságai: A gyerekek által készített modelleken kívül általában valódi tárgyakat használtunk, pl. a szertári „mértani testek” helyett óriási (a gyerekeket elbűvölő méretű), csomagolásra korábban már felhasznált papírdobozt, ezzel is erősítve azt az érzést, hogy a matematika szorosan kapcsolódik a hétköznapi valósághoz.

A nézelődésen és a modellek előállításánál szerzett tapasztalatokon túl problémamegoldásokat kértünk a tanulóktól, ezekre a későbbiekben példákat mutatok.

#### ➤ Ikonikus szint

Érzelemgazdag képek szerepeltek a filmekben. Ezáltal fontossá tettük a poliédereket a tanulók számára, és egyben mintákat is adtunk a pedagógusoknak, hogy minél sokoldalúbban közelítsék meg a tanítandó témát.

A macicsalád történetébe beépítettük a szafarit. Önmagában is izgalmas, új, sokféle beszélgetésre alkalmas a fogalom. Itt és most két vonatkozásban volt különösen jelentős: az egyik: az oroszlán szerepeltetéséhez keretet jelentett (erre a meglepő szereplőre nagy szükségünk volt didaktikai szempontból, amit a későbbiekben részletezek), a másik: a poliéderek változatos előfordulási formáit így egy tematikus fotógyűjtemény mutathatta be. A történetben a macipapa poliédereket fényképezett, ezáltal az absztrakciónak egy váratlan példáját láthatták a gyerekek: a fényképeken drágakövek, kristályok, épületek voltak, amelyeket nem utólag soroltunk be a poliéderek közé, hanem eleve a poliéderek fényképezése volt a cél, a diákon a macipapa a poliéderekre keresett példákat. Így a deduktív és az induktív ismeretszerzési módokat is váltogattuk.

#### ➤ Szimbólikus szint

A bruneri tanulásmélethez csúcsán a szimbólikus reprezentáció áll.

A hagyományos matematikatanításban a szimbólikus reprezentáció két formája, a természetes beszéd a tanulási folyamat kiindulópontját, a matematikai szimbólumok alkalmazása pedig a matematikatanulás magas szintjét, bizonyos értelemben annak csúcsát jelenti. A kutatási eredmények és saját tapasztalataink alapján nagyon fontosnak bizonyult a különböző szimbólumok következetesen egymást váltó alkalmazása.

*A poliéderek tanítása során szerzett tapasztalatok leíró jellegű bemutatása*

a) Beszélgetés a tapasztalatokról

A gyerekek példákat láthattak arra, hogy a valóság különböző jelenségei miképpen válhatnak a matematikai vizsgálat tárgyaivá, és erről beszélgettek is. További beszédtemát jelenthet, hogy hogyan és miért változnak a valóság bonyolult alakzatai az iskolai tananyagban annyira egyszerű és szabályos testekké, mint a kocka, téglatest, gömb. A változatos, meglepő elemeket tartalmazó megközelítés provokálta a beszélgetést, bátorította a tanulói kérdéseket.

b) Jelekkel megoldható feladatok

Új, bár nagyon természetes jelölést vezettünk be a poliéder élein való mozgásra, az egyszerű nyilakat: előre-hátra, jobbra-balra, le-föl. A tárgyakon a két adott csúcst összekötő élek megtalálása nem jelentett gondot, a mozgások szavakkal kísérése sem volt nehéz. Ugyanez a perspektivikus ábrán már megoldhatatlan feladat elé állította a tanulók többségét. Egy kocka rajzán megkülönböztetni az előre-hátra mozgást a jobbra-balra irányú mozgástól külön megállapodást igényelne, hacsak a kocka nincs belehelyezve egy jól felismerhető környezetbe. Azonban ennél jóval nagyobb a probléma. A képolvasás ebben a korban alapvető nehézséget okozott. Körülbelül 10 éves kor alatt nem alakul ki a perspektivikus látásmód, ennek következtében a tanulók számára - a nekünk teljesen egyértelmű - le-föl irány sem volt világos egy élvázis test perspektivikus képén. A gyerekek közül többen a fölfelé mozgást hátrafelé mozgásnak, vagyis távolodásnak látták. Ennek a problémának a kiküszöbölésére új szimbólumot vezettem be, a fekvő kisorozslánként megszemélyesített négyzetesoszlopon már világos volt, mit jelentenek az irányok (előre-hátra, jobbra-balra, le-föl).

A perspektivikus ábrázolás olvasási képességének fejlesztésére természetesen nemcsak a vizsgálatunk miatt van szükség. Ahhoz, hogy a gyerekek gyakorolhassák az elemi térgeometriai tájékozódást, ennek a témának a tankönyvben is meg kell jelennie, e megjelenés hagyományos módja pedig a legegyszerűbb poliéderek egyikének, a téglatestnek a perspektivikus tankönyvi ábrája. A harmadik osztályos tankönyvekben valóban meg is jelennek ezek az ábrák. Vizsgálatunk alapján a mértani ábrákat kezdetben ismerős szituációt idéző környezetben volna érdemes bemutatni, és innen eljutni az absztrakt ábrákhoz..

➤ 1. Új fogalmak

Olyan munkalapokat terveztem, amelyekben a tanulók a maguk számára feljegyezhetik, tanítói segítséggel, a közös munka során szerzett tapasztalataikat, azaz a munkalapok jegyzetfüzetként szolgálnak. A jegyzetfüzet egyik célja a



tanulók számára új fogalmak, elnevezések rögzítése, megszilárdítása volt. A matematikaórákon általában az szokott problémát okozni, hogy egyes szavaknak más a hétköznapi és más a matematikai jelentése. Hátrányos helyzetben gyakori, hogy a tanulók egyáltalán nem ismernek olyan, a hétköznapi életből származó szavakat, amelyeket a tankönyvek és a pedagógusok is magától értetődő természetességgel használnak, pl. él. Ha a tanulók tárgyi szinten és nem verbális formában találkoznak a matematikai feladatokkal, akkor ez a hátrány csökkenthető, azonban a tárgyi szinten történő matematikatanulás nem helyettesítheti, hanem kiegészíti a fogalmi tanulást. Ezért a tanulók verbális képességeinek fejlesztésére is nagy figyelmet fordítottunk.

Az új fogalmak tanulásának folyamatát arra a tapasztalatra építettük, hogy a fogalomalkotás módja a matematikában és a mindennapi életben különböző:

Pl. az asztal szó és fogalom tanulásának útja:

Rámutatunk, megnevezzük, és nem foglalkozunk a definiálással, kezdetben nem fontos, hogy mi tartozik még az adott konkrét tárgyon és más, a környezetben könnyen felismerhető tárgyakon kívül az asztal fogalmába és mi nem. A felsőbb fogalom, megkülönböztető fogalom, mint a definiálás két lépése fel sem merül ezen a szinten.

Néhány példán bemutatom, hogy a szavak jelentésének megbeszélése - bár nagyon távol áll a matematikai definíciótól, mégis a definiáláshoz vezető út nélkülözhetetlen kiinduló pontja.

### **A téglalap**

A téglalap fogalma a definíciója alapján:

Olyan négyszög, aminek minden szöge derékszög - egyértelmű, szabatos definíció, de a benne szereplő fogalmak sokkal nehezebbek a tanulók számára, mint a téglalap felismerése az egyszerű ráismerés szintjén.

A matematikailag korrekt definíció előnye, hogy később nem kell pontosítani, módosítani, azonnal és végérvényesen lehetővé teszi a téglalapok és a nem téglalapok elkülönítését. Ennek viszont ára van, mégpedig az, hogy a definíció nehezen érthető. Csak akkor alkalmazható, ha a tanulók az iskolán kívül már találkoztak a téglalap szóval, ha a szót meghallják, egy bizonyos, általuk téglalapként ismert alakzat jelenik meg a gondolatukban. Ha nem így van, akkor analógiával, rámutatással lehet élni, azt mondani például, hogy a könyvek lapjai téglalap alakúak, vagy más hasonló, az adott körülményekhez illő megoldást érdemes választani. Csak ha már maga a szó ismerős, akkor célszerű a fogalomépítés definícióra épülő folyamatát megkezdeni.

Tapasztalataim szerint a gyerekek könnyen tanulnak új szavakat, feltéve, ha lehetőséget kapnak a tanulásra, és nem azt érzik, hogy elvárják tőlük valami számukra idegen dolog ismeretét, amit már korábbról tudniuk kellene.

Fontosnak tartottuk, hogy a matematikában is használt új fogalmak tanulása kövesse a gyerekek anyanyelv-tanulásának módját, legyen a hétköznapi élet

szótanulásához hasonlító a folyamat, mivel az elnevezések megismerésének nagy jelentősége van a megismerési folyamatban. (Csak utalok arra, hogy a névadás mágikus jelentőségű sok kultúrában.)

Mi az órákon igyekeztünk egyeztetni az új szavak tanulásának leggazdaságosabb, hétköznapi módját a matematikailag jól használható fogalomépítés első lépéseivel.

További példákat sorolok föl.

### **Poliéder**

A poliéderek a szögletes testek. Ezek poliéderek, ezek meg nem.

Az általam meglátogatott órán a gyerekek még az ilyen bevezetéstől is megrettentek. A tanító egy remek ötlettel nagyszerűen oldotta a feszültséget, megkérdezte: Ugye ismertek idegen szavakat? Ugye mindenki hallott a terminátorról. Hát az is, meg ez is egy idegen szó. A tanteremben ülő összesen 12 harmadikos és negyedikes tanuló közül 11-en elnevezték magukat és ment tovább a tanulás, csak egyetlen kisfiú tért vissza még percek múlva is a terminátorra. Ő volt az egyedüli, akinek figyelmét ez az analógia elterelte és nem a témára koncentrált. Később, amikor már tárgyi szinten tevékenykedhetett, ő is bekapcsolódott a munkába. Szerencsére a kis létszám lehetővé tette, hogy a kiesést, tanítói segítséggel, be tudja hozni.

### **Tórusz**

Olyan, mint az úszógumi.

A tórusz minden gyereknek nagyon tetszett, azonnal megtanulták, és alkalmazni is tudták az elnevezést. Talán azért, mert valami sejtelmes, idegenszerű van ebben az alakzatban, a többi testhez képest nagyon mások a szimmetriái.

### **Hasáb**

A téglák és a szögletes oszlopok hasábok. Mondjatok még példákat a hasábokra!

Meglepődtem, mert ez volt a poliéderek között a legnehezebben megérthető fogalom, ennek használatában követték el a legtöbb hibát. A tapasztalatok alapján ennek feltételezhető oka, hogy a hasábok a mindennapi életben feketnek az alaplapjukon is, meg az oldallapjukon is, szemben például a gúlával, ami a gyakorlatban mindig az alaplapján áll. A háromszög alapú hasáb például ismerős a gyerekeknek, mint háztető-forma, de ez a hasáb nem az alaplapján, hanem az egyik oldallapján fekszik.

Az új fogalmak bevezetésekor a jegyzetfüzet a mindennapi életből ismert tárgyakhoz, (építményhez) testeket kapcsol. Szándékosan a legnyilvánvalóbb kapcsolatokat idéztük föl, illetve mutattuk be, pl. gömb-labda, gúla-piramis. A testek mellett az első lapon szerepel a nevük, a másodikon a tanulóknak kell a testek rajzát megfelelő nevekkal összekötniük. Ekkor az elnevezések ismeretére

már számítunk, de természetesen szükség estén szóban segítünk. Nem nehezítettük a tanulók feladatát nehezen besorolható alakzatokkal. Úgy gondoljuk, hogy mint a szavak tanulása során is, az későbbi feladat, hogy a szélsőséges, nehezen besorolható példákkal is találkozzanak a tanulók.

Más a helyzet, amikor a szavak hétköznapi jelentésétől sokszor eltérő, pontos matematikai fogalmakat építjük. A tanuláshoz abban a szakaszban már feltétlenül szükséges a fogalom határainak kijelölése, az odatartozó és az oda nem tartozó elemek minél pontosabb elkülönítése.

## ➤ 2. Problémák

### A.) A testeknek térfogatuk van, térfogat és felszín kapcsolata

A gyerekek a síkgeometriát tanulják először, a síkelemekkel kezdik az ismerkedést, a gyurma jelzi, hogy kiléptünk a térbe. Itt nem síkokkal és kiterő egyenesekkel kezdünk foglalkozni, és pl. az egyenesek párhuzamosságára vonatkoztatva a tranzitivitással, hanem testekkel, ezért a térfogatra utalást nagyon fontosnak tartom. Természetesen nem az egzisztenciális kérdést, van-e és mikor van térfogat, hanem: hogyan változik a térfogat, mi a kapcsolat a felszín és a térfogat között. Ez a kapcsolat most még olyan tudás, ami a kezükben van, szorosan kötődik a tárgyi tapasztalatokhoz, a megfogalmazásnak az igénye fel sem merül, nincs is rá szükség. A kezükben lévő tudás megerősítése érvényessé teszi a gyerek otthonról hozott tudását az iskolában, így a hidak kiépítésének megkönnyítésével erősíti a tanulási vágyat, segíti az új kultúra megismerését. És egy távlati érték: később, a felszín-térfogat összefüggéseire épülő szélsőértékes feladatok megoldásához jó alapot jelenthet, hogy korábban már látták a kapcsolatot a mindennapi tapasztalat és a matematika között. Néhány példa a térfogat és felszín összefüggéseire:

- *Sógyurmát nyújtunk ki, hogy szárítsuk, mint a gyúrt tésztát, illetve gömbölyítsük össze, hogy ne száradjon ki.*
- *A sógyurma mézes sütit jelképezzen, amiből karácsonyfadíszet készítünk, amit csokiba mártunk. Milyen alakot válasszunk, hogy minél több csoki legyen az adott sütiken (lapos, zsinórszerű, csillagforma, sok kicsi gömb)?*
- *Képzeld azt, hogy a sógyurmánk egy darab krumpli. Hogyan vágjuk föl, ha azt akarjuk, hogy gyorsan megfőjön?*
- *Csináljunk téglát a gyurmából! (Ne téglatestet, hanem az építkezésekről ismerős téglát!) Miközben a gyerekek megpróbálják utánozni a téglafarmját, ami elég nehéz feladat, sok tulajdonságot meg kell figyelniük, merőlegesség, párhuzamosság, ekvivalenciák és arányok. Csináljunk új téglatesteket a gyurmából! Jól növeljük meg a felszínét! - A megbeszélés során szinte észrevétlenül használhatók a kifejezések, mint él, lap, csúcs, élhosszúság, stb.*  
*Ez olyan lapos lett, mint egy rajztábla, nagyon jó. Az egyik éle sokkal*

*rövidebb, mint a másik kettő, stb.*

*Te sok kis téglalapot csináltál, valóban, így is jól megnőtt a felszín.*

A gyurmázás tapasztalataiból most még nem szükséges semmit sem akár szavakkal, akár jelekkel megfogalmazni. A tapasztalatok esetünkben az elnevezések egyre gazdagabb tartalommal való telítődésében jelentkeznek.

### **B.) Építés, hajtogatás**

Az építési feladatnak narratív jelleget adtam, részben egy-egy ismerős, a gyerekek számára fontos szituáció felidézésével (város, saját falu, macik faluja), részben azzal, hogy kértem a tevékenység kommentálását.

*„1. Az összegyűjtött dobozokból építsetek várost! Mondjátok is el, mit csináltok! Pl.: Ezt a hasábot ide állítom, ez lesz az áruház. Ezt a másik hasábot ide fektetem, ez lesz a pályaudvar. Ez a henger meg egy szálloda lesz.*

*2. Építsétek meg a saját iskolátok környékét is!*

*3. Szerintetek hol lakik a macicsalád? Építsétek meg az ő falujukat is!”*

6-10 éves korban a térbeli tapasztalatok lejegyzésének adekvát módja az alaprajz lerajzolása, ezért ezt is feladatul adtuk a gyerekeknek.

### **C.) Mozgás az éleken**

Kocka helyett a könnyebb eligazodás biztonságát nyújtó négyzetes oszlopot választottam, és azt meg is személyesítettük. Egy fekvő hasáb lett a fekvő oroszlán, amelyiknek arca, farka, lábfeje is volt, így azonnal egyértelművé váltak a jobbra-balra irányok, élesen megkülönböztethetőek lettek az előre-hátra irányoktól, és a le-föl is ismerős helyzetben fordult elő. Az éleken sétálás kérdése a poliéder egy-egy csúcsába elhelyezett bolhák segítségével már könnyen érthető és szemléletes volt: Hány bolhaugrással (éleken, mindig közeledve, csúcsról-csúcsra) jut el az egyik bolha a másikhoz?

Az előrajzolt minta alapján maguk a tanulók hajtogatták, ragasztották meg a kisoroszlánt.

A feladat több részből állt:

1. Utak keresése, mutogatás nagy modelleken, az utak szavakkal kísérése: hátra, fel, jobbra, majd ugyanez a saját kicsi, állatfigurás poliéderen.
2. Út berajzolása papírra az oroszlános ábrán.
3. Út berajzolása papírra a négyzetes oszlopon, ahol a nem látható élek is jelölve vannak, de a tájékozódást segítő rajzos elemek már nem szerepelnek.
4. Az út szavakkal kísérése.
5. Tanulói jegyzet készítése táblázatos formában az irányokat jelentő szimbólumok alkalmazásával.

Az első négy feladatot minden tanuló meg tudta oldani, az ötödikben többen is segítségre szorultak.

### D.) Szabályos testek, háromszöglapokból építhető testek

A bevezető feladatok a poliéderek és a nem poliéderek megkülönböztetését segítették. A téglatestekkel való ismerkedés után ismét tágítottam a kört. A gyerekek nagy érdeklődéssel figyelték a Hajós könyv poliéder ábráját, amely az egyszerű poliéderek és a nem egyszerűek megkülönböztetését segítik. Ezzel kapcsolatban is kaptak a gyerekek életkoruknak megfelelő feladatot: a szabályos testek axonometrikus ábráján kellett kiválasztaniuk azokat, amelyek szívszálakból könnyen megépíthetők. Ez a feladat alkalmat adott az elmúlt évi tapasztalatok felidézésére: háromszöglapokból álló testeket könnyű szívszálakból, vagyis élekből és csúcsokból megépíteni, mert 3 pont mindig egy síkban van, a négyszögeket és a többi sokszögeket merevíteni kell. Tehát a feladat a háromszöglapokból felépülő szabályos testek megjelölése volt, háttérben pedig a testek síkbeli ábrázolásának olvasása állt.

### E.) Egy inverz feladat

Táblázatban megadott adatokhoz testeket kerestek a gúla és a hasábok között, találgatással, majd ellenőrizték a megoldást.

*Elő- és utómérés jellegű feladat a poliéderekkel kapcsolatban:  
Él- lap-csúcsszámolás, B jelű iskola, 4. oszt. 2007. december*

Az alábbi táblázatok tartalmazzák a tanulók szóbeli válaszait (az él, lap és csúcsok számát) valódi, illetve elképzelt testen a kísérlet előtt és után. A satírozott (téves) válaszok csökkenése meggyőzően mutatja a fejlődést.

B iskola előmérés, téglá, kézben tartott gyufásdoboz

	él	lap	csúcs
M. PÁL	8	6	8
R. LAURA	8	6	8
B. DORINA	8	6	8
B. REGINA	8	4	8
B. SZABINA	8	6	8
CS. ÁGNES	8	6	8

B iskola előmérés, elképzelt kocka

	él	lap	csúcs
M. PÁL	8	6	8
R. LAURA	8	4	8
B. DORINA	8	6	8
B. REGINA	8	6	8
B. SZABINA	6	6	8
CS. ÁGNES	8	8	8

## Empirikus vizsgálatok

B iskola utómérés, elképzelt kocka

	él	lap	csúcs
M. PÁL	8	6	12
R. LAURA	6	6	8
B. DORINA	8	6	12
B. REGINA	8	6	8
B. SZABINA	12	6	6
CS. ÁGNES	12	6	8

B iskola utómérés, téglá, gyufásdoboz kézben

	él	lap	csúcs
M. PÁL	12	6	8
R. LAURA	12	6	8
B. DORINA	12	6	8
B. REGINA	12	6	8
B. SZABINA	12	6	8
CS. ÁGNES	12	6	8

A kapott adatok alapján láthatjuk, hogy a kézbe adott test alkotóelemeinek leszámolásában jelentős javulás következett be. Egyik magyarázat lehet, hogy a tanulók már olyan sokat gyakorolták, hogy végül elsajátították az új, az élék, lapok, csúcsok számára vonatkozó ismeretet. Alternatív magyarázatot is találhatunk, a sokféle megközelítés hatására értelemmel és jelentéssel telítődtek a téglatestekkel kapcsolatos fogalmak, ezért érdekessé vált a tanulók számára a kérdés, meg akarták és meg is tudták oldani a feladatot. Az is kiolvasható a táblázatokból, hogy a tanulók nem tanulták meg az ÉLCs adatokat, mivel az elképzelt kockára egyikük kivételével mindannyian hibás választ adtak, viszont megtanulták a fogalmakat és a megoldási stratégiát, mert a kézbe kapott gyufáskatulyán már hibátlanul leolvasták a megfelelő adatokat.

*Az inverz feladat*

A test neve vagy rajza	él	lap	csúcs
	9	5	6
	8	5	5

Ez a feladat több szempontból is igen nehéz, elsősorban azért, mert semmilyen szemléletes segítséget nem kínáltunk a probléma megértéséhez, bár megkaphatták volna a tanulók az adott számú élt és csúcsot modellező pálcikákat és gömböket is. Másrészt ez a feladat a korábbi feladathoz képest fordított gondolkodást igényelt: nem adott poliédert kellett a tanulóknak vizsgálniuk, hanem a kapott adatok alapján rekonstruálni kellett a két poliédert. Ez sokkal nehezebb az eredetinél, felnőttek számára is izgalmas probléma lehet.

A feladat valóban nehéznek bizonyult. A gyerekek egy része sikeresen birkózott meg vele. Ők kitöltötték a táblázat megfelelő rubrikáit. Vizsgálatunkban csak egy tanuló volt, aki hozzákezdett a munkához, majd feladta. Őt érdekelte a megoldás is, a közösen elkészített ábrán ellenőrizte, hogy az élek, lapok és csúcsok száma valóban megegyezik a megadottakkal. A többieket nem zavarta, hogy egy számukra érdektelen táblázatot kihagytak. Ők nyugodtan passzolhatták a feladatot. Nem tartottam szükségesnek sem a megoldás megmutatását, sem a probléma rávezető, tárgyi szintű feladattá átalakítását, mert ebben az esetben nem az ismeretek bővítése volt a didaktikai cél, hanem a már meglévő ismeretek alkalmazhatóságának ellenőrzése váratlan, új helyzetben.

#### *A kombinált módszer alkalmazásának tapasztalatai*

Eltértünk a tananyag lineáris felépítésétől, a spirális tananyag-felépítést a szokásosnál tágabban értelmeztük, a későbbi évek, sőt iskolafokokozatok anyagából is választottunk problémákat, pl. mérlegelv, poliéderfogalom, és ezekkel a gyerekek szintjén de a matematikai háttér lényeges elemeinek megtartásával foglalkoztunk.

A kísérleti órák tananyagát a bruneri tanuláselméletre építve terveztük meg: a mintát az órai tanulási folyamat megvalósításához képekkel megfogalmazott, történetbe ágyazott diasorozat adta. A gyerekek az órákon valódi tárgyakkal és saját maguk készítette eszközökkel dolgoztak. Ebben a szakaszban nem használtuk a szokásos szemléltető eszközöket, pl., színesrúd-készlet, logikai készlet, magas technológiai szinten előállított mértani szemléltető eszközök, mert azok logikai tisztasága a formális gondolkodás magas szintjét igényli a tanulóktól is.

Csoportmunkát alkalmaztunk, amelynek keretében a gyerekek közvetlen tanítói irányítás nélkül tudtak együtt dolgozni. Ez újdonság volt a kisiskolákban, mert az igen kis, 3-8 fős osztálylétszámok miatt a tanítók korábban csak a frontális, illetve az egyéni munkát alkalmazták. Az adott körülmények között szükségképpen vegyes életkorú csoportok az interperszonális kapcsolatokat bővítették, és az egyéni differenciálás gazdagabb lehetőségét teremtették meg.

## **AZ EREDMÉNYEK A HIPOTÉZISEKKEL ÖSSZEVETVE**

### **A főhipotézishez**

*A tehetség társadalmi háttértől és etnikai hovatartozástól független, egyenletes eloszlásából kiindulva azt feltételezzük, hogy a hátrányos helyzetű tanulóknál a tehetséggondozás elérhetőségének egyenlőtlenségéből fakadó tudásbeli elmaradásról és nem képességihiányról van szó. A hátrányos társadalmi helyzetű tanulók többsége kommunikációs zavarral küzd, ez a közvetlen akadálya az eredményes iskolai szereplésüknek.*

*A tantárgypedagógiai elméleti és gyakorlati eredmények alkalmazásával lehetőség van olyan tananyag-elrendezésre és feldolgozásra, amely lehetővé teszi a differenciált fejlesztést.*

*Megfelelő továbbképzési, támogatási formák segítségével a pedagógusok elsajátíthatják a kis tudású és a tanulás élményét még nem ismerő de tehetséges tanulók tanítására alkalmas fogásokat.*

*A két társadalmi közeg közötti különbségből – vagyis a tanítók középosztálybeli és az összevont tanulócsoportos iskolák hátrányos társadalmi helyzetű tanulói közötti különbségből - fakadó kommunikációs zavar felismerésére és kezelésére a tanítók felkészítendőek és felkészíthetők.*

*A tantárgypedagógiai elméleti és gyakorlati eredmények alkalmazásával lehetőség van olyan tananyag-elrendezésre és feldolgozásra, amivel a leszakadás megszüntethető.*

*Megfelelő továbbképzési, támogatási formák segítségével a pedagógusok elsajátíthatják a kis tudású és a tanulás élményét még nem ismerő de tehetséges tanulók tanítására alkalmas fogásokat.*



## Az eredmények a hipotézisekkel összevetve

*A két társadalmi közeg közötti különbségből – vagyis a tanítók középosztálybeli és az összevont tanulócsoporthoz tartozó iskolák hátrányos társadalmi helyzetű tanulói közötti különbségből - fakadó kommunikációs zavar felismerésére és kezelésére a tanítók felkészítendőek és felkészíthetőek.*

A főhipotézisünk beigazolódott, a tanulók a korábbinál szívesebben és eredményesebben foglalkoztak a matematikával. Ennek elsődleges oka az volt, hogy a tanítók elsajátították és alkalmazták azokat a matematikadidaktikai elemeket, amelyekkel hatékonyabban segíthetik a hátrányos helyzetű tehetséges tanulók iskolai tanulását.

A részhipotézisek vizsgálata megmutatja a változás részleteit.

### **A részhipotézisekhez**

#### *Az első hipotézishez*

*a) A gyerekek motivációjának szerkezete (kötődés, teljesítmény, a társas kapcsolatokban elfoglalt szerephez való viszony) a hátrányos helyzet ellenére is jó, nem akadályozza az eredményes munkát.*

*b) A kommunikáció és az írás-olvasás területén meglévő problémák ellenére az őket érdeklő témákban kifejezőképességük árnyalt.*

#### **Az a) ponthoz**

A magas motivációs (OMT) pontszámok azt mutatják, hogy valóban alternatív magyarázatra van szükség, mert a tanulóknak magas a teljesítményvágy, egészséges motivációs szerkezettel rendelkeznek. Az órai passzivitásuk okai máshol keresendők, nem az érdektelenségükben. A 55-62. oldalon található az állításmat megalapozó, a számítógéppel elvégzett statisztikai számítások eredményei.

Kutatásmódszertani tapasztalat: A tanulókra jellemző motivációs szerkezet megismerése (didaktikai célú megismerése) nem igényel a pedagógusoktól mélyebb pszichológiai ismereteket azon túl, mint amit a pedagógusképzés során a tanárjelöltek elsajátítanak, és amelyek a mindennapi gyakorlat tapasztalatai és az ezekre való reflektálás során szinte automatikusan továbbfejlődnek. Munkámnak ebben a szakaszában a tanulók motivációjáról megszerezhető ismereteket elsősorban az órák felépítésének megtervezéséhez használok föl, az egyéni differenciálás beépítése a következő szakasz feladata lesz.

#### **A b) ponthoz**

A gyerekek többsége önállóan, írásban meg tudta oldani a teszt feladatait. Írásuk kommunikációs szempontból jó volt: érthető volt a mondanivalójuk, ugyanakkor az írás formai kivitelezése gyakran eltért a normáktól. A helyesírási szabályokat sokan nem tartották be, a szövegszerkesztésben alapvető

hiányosságai voltak, olyan súlyúak, amelyek egy matematikai tesztben a matematikai teljesítményt akár értékelhetetlenné is tehetik, függetlenül a tanulók matematikai ismereteinek szintjétől (Az 55. oldalon az íráskép jellemzőinek rövid összefoglalása olvasható. A gyerekek írásbeli kifejezőképességének gazdagságáról, ugyanakkor a technikai kivitelezés nagyon gyenge színvonaláról az idézett tanulói beszámolók is képet adnak, például a 84-85. oldalon.)

### *Az írásbeli kommunikációs kompetencia és a matematikatanulás*

Ez a teszt új megvilágításba helyezi az írás jelentőségét is a matematika-tanulás szempontjából. Rámutat arra, hogy a gyerekek kreativitása írásban is képes megnyilvánulni. Az írás nemcsak az egyik legfontosabb elsajátítandó tudás a kisiskolások, a 6-10 évesek számára, hanem az önkifejezés eszköze is lehet. Fontos indikátora az intellektuális érettségnek. Jelzi, hogy az egyébként sok tanulási problémával küzdő gyerek, az otthoni hátrányok ellenére is, eljutott a szimbólumhasználat szintjére, képes az intellektuális technikák magas szintjét jelentő, kreatív alkalmazására, bár ezt még igen sok hibával teszi. Érdemes lenne ezért megvizsgálni annak lehetőségét, hogy lehet-e már az írástanulás kezdeti szakaszában, a betűk tanításával párhuzamosan az írás kommunikációs és önkifejezési funkcióit is gyakoroltatni a tanulókkal.

Az írás, az olvasás és a számolás elsajátításában nagyon fontosak azok az élmények, amelyeket a gyerekek már az iskoláskor előtt megszerznek.

### *A második hipotézishez*

*a) Az új pedagógiai-didaktikai módszerek és eszközök Bruner reprezentációs elmélete alapján adaptálhatók a vizsgált körülményekre (6-10 éves életkor, hátrányos helyzetű tehetséges tanulók).*

*b) Az általunk kidolgozott és alkalmazott specifikus módszertani eljárások nyomán megnő a gyerekek tantárgy-specifikus (matematikatanulási) motivációja.*

### **Az a) ponthoz**

A poliéderfogalom választása sikeresnek bizonyult. A matematikai elemzés igazolta, hogy bár az iskolában a fogalom definiálására nincs mód (48. o.), a fogalomépítés változatos egyéb módszerei alkalmazhatók. A tanulók megismerték a poliéder szó jelentését és néhány konkrét poliéder matematikai tulajdonságait (88. o.). Tapasztalatokat szereztek a fogalomépítés módszereiről, amelyeket már az összefüggések megfigyelése során alkalmaztak is (89-91. o.).

Eltérésünk a hátrányos helyzetű gyerekek körében alkalmazott módszertől, a felzárkóztató foglalkozások tartásától, a kutatás tapasztalatai alapján indokolt volt. Integráltuk az egyébként mereven szétválasztott felzárkóztatást és a tehetséggondozást. Annak ellenére, hogy a matematikai ismeretek szigorúan

egymásra épülő rendszert alkotnak, találtunk olyan területeket, amelyeken a megszereshető ismeretek a későbbi matematikatanulást segítik elő képességfejlesztéssel is és fogalomépítéssel is. A gyerek sikeresen oldottak meg nehéz feladatokat is, holott jelentős részük az alapvető tantervi követelményeket nem tudta minden területen teljesíteni. Az általunk javasolt kerülő út (pl. kitekintés a matematikatörténetre, saját adatgyűjtésen alapuló szöveges feladatok konstruálása és megoldása, poliéderek vizsgálata), a pedagógusok tapasztalatai szerint segítette az előírt fogalmak és algoritmusok elsajátítását, ez olvasható például a matematikatörténettel kapcsolatban a 70. oldalon.

Az alkalmazott kombinált módszer – a reprezentációs elmélet és a motívációkutatás eredményei alapján, felhasználva a számítógépek alkalmazásának lehetőségeit az oktatási eszközök készítésében és órai alkalmazásában – eredményesnek bizonyult a hátrányos helyzetű tehetséges tanulók tanításában. A diák- és tanár-visszajelzések alapján a matematikaóra várt eseménnyé változott, a viszonylag nehéz feladatok ellenére a tanulók is és a tanárok is sikerekről számoltak be. Néhány tanítói és tanulói visszajelzést „A tanítók és a gyerek által írt beszámolók tapasztalatai” című alfejezetben idézek a 74-81. oldalon.

A kombinált módszer eredményessége mind az előkészítést (64-66. o.), mind a lebonyolítást, mind az értékelést illetően megmutatkozott (81 o.). Legfontosabb elemei **a nem lineáris tananyag-elrendezés** (49. oldal), **a tárgyak és a képek kiemelt szerepe** (az elkészült PowerPoint diasorozatok rövid leírása a Mellékletben olvasható, maguk az anyagok pedig a CD-mellékleten található meg) és a **csoporthmunka** alkalmazása voltak. A csoportmunka fogadtatását az órákon készült fényképek is mutatják a 77. oldalon. A folyamatos mentorálás, a tanítók igényeinek és lehetőségeinek elemzése és a pedagógusok közötti internetes együttműködés tette lehetővé, hogy a pedagógusok a tanítási órákon sokféle változtatást egyidejűleg meg tudjanak valósítani.

A tanulók és a tanítók közötti kommunikációs zavart a pedagógusok a mi kutatásunkban sem tudatosították, de az általunk mutatott minták alapján igen jó, a tanulókat hatékonyan segítő módszertani megoldásokat találtak és alkalmazták a tanulási akadályok leküzdésére, de ennek a változásnak az elméleti háttérével nem tudtak, nem is akartak foglalkozni, ezt mutatja pl. K. Maca beszámolója a 76. oldalon.

*Kutatásmódszertani és disszeminációs megjegyzés:* A vizsgálat során biztosított szoros személyes és e-mail kapcsolat lehetővé tette, hogy a tanítók bátran alkalmazzanak korábban nem használt módszertani megoldásokat (53. oldal).

Megoldandó feladat a tanítók didaktikai metakogníciójának erősítése, ennek a képzési-továbbképzési munkának a tartalmi és módszertani kidolgozása a tanító- és tanárképző intézmények tapasztalatainak felhasználásával.

### **A b) ponthoz**

A kutatás kezdetén, már az ismerkedő szakaszban láttuk, hogy a gyerekek többsége érdeklődik a körülötte lévő világ összefüggései iránt, és törekszik a jó teljesítményre. A kísérleti tanítási órák tapasztalatai azt is megmutatták, hogy a tanulással kapcsolatos pozitív attitűd átvihető speciálisan a matematika tanulására is. A matematika órától való korábbi idegenkedést a kíváncsiság, esetenként az örömteli várakozás váltotta föl, mint azt a 76. oldalon olvasható, az erdélyi tanítónőtől érkezett beszámoló is tükrözi.

### **A harmadik hipotézishez**

a) *A tanulás pozitív élményét nyújthatjuk a tanulóknak akkor is, ha tudásbeli és műveltségi hiányosságok akadályozzák őket az életkoruknak megfelelően elvárt, tantervekben meghatározott, a tankönyvekben közvetített tanulási folyamat követésében.*

b) *Az eltérő tapasztalatokból származó súlyos kommunikációs zavarok a kombinált didaktikai módszerekkel rövid távon is eredményesen oldhatók.*

c) *A kombinált módszer a nem azonosított tehetség kibontakozását is elősegíti.*

### **Az a) ponthoz**

A kísérleti órák tapasztalatai átvihetők a tanítás szokásos menetébe is. A tanítók a kutatási periódus lezárását követően is alkalmazzák a küldött oktatási segédeszközöket. Figyelemmel követjük a kísérleti iskolákban bekövetkezett változásokat, és azt tapasztaljuk, hogy a matematikát kreatívabb módon tanítják a pedagógusok, és a gyerekek is jobban szeretik, több tehetséges gyereket fedeznek fel a tanítók. A követő vizsgálatok tapasztalatait külön tanulmányban tervezem bemutatni.

### **A b) ponthoz**

A bonyolultabb nyelvtani szerkezetek megértése és használata, a szókincs gyarapítása hosszú távú, több tantárgy keretében összehangoltan végzendő feladat. A matematikatanítás folyamatában elsősorban a kommunikációs szándékot erősítettük, ennek hatására a gyerekek bátrabbakká váltak, mertek kérdezni, és jobban ki tudták fejezni kívánságaikat, véleményüket, ez a gondolkodásukra is kihatott, a beszámolók és az óralátogatási tapasztalatok alapján számottevően fejlesztette matematikai problémamegoldó képességüket, itt ismét a tanítói beszámolókra utalok (pl. D. Márta összefoglalója a 72. oldalon).

### **A c) ponthoz**

A gyerekeket tehetségesnek tekintettük és így a deduktív módszer elemeit is alkalmaztuk a tanításban, pl. a téglatest megismeréséhez a szemléletes poliéderfogalmon keresztül vezettük el a tanulókat.

A tehetséges gyerekek matematikai problémamegoldó képessége a kísérlet során felszínre tudott kerülni. Szimbolikus szinten, az olvasott feladatokban is meg tudott nyilvánulni, annak ellenére, hogy az idő rövidege miatt a kommunikációs képességek fejlesztésében átütő eredményeket nem érhattünk el. Azok a tapasztalatok azonban, amelyek hidat képeznek a mindennapi élet és a matematikai feladatok között, nagy hatással voltak a gyerekek problémamegoldó bátorságára (96. és 101. oldal).

*Egy kutatómódszertani megjegyzés:* előzetes aggodalmunktól eltérően az internetes kapcsolattartás nem szűkítette le jelentősen a mintákba kerülés lehetőségét, ellenkezőleg, sokan éppen azért kapcsolódtak be a programba, mert nem volt számítógépes előismeretük, szerették volna megismerni a számítógépeket (54. oldal). Ezek a részeredmények megerősítik a főhipotézis állításait.

### **Következtetések**

Vizsgálataimat összevont tanulócsoporthoz kisiskolában végeztem. További kutatást igényel annak vizsgálata, hogy eredményeink hogyan alkalmazhatók az átlagos, viszonylag nagy létszámú osztályokban, amelyekben általában csak néhány társadalmilag hátrányos helyzetű tehetséges tanuló van. Feltételezhetően az alapelvek azonosak lesznek:

- a tananyag hangsúlyainak ideiglenes megváltoztatása, a számolás mellett más matematikai területek bevonása a tapasztalatszerzés körébe,
- a sok kép és a tárgyi problémamegoldás alkalmazása, ezek és a történetmesélés révén a gyerekek matematikai ismereteinek és kommunikációs képességeinek fejlesztése és
- a csoportmunka rendszeres alkalmazása, hogy az interperszonális benyomások segítsenek feloldani a gyerekek szorongását és kiköveteljék a beszédet, aminek belsővé válásával fog fejlődni a tanulók matematikai gondolkozása.

Nagy létszámú osztályokban a konkrét megvalósítás feltehetően sok részletében el fog térni az általunk kipróbált kombinált módszertől. Az új helyzetben alkalmazható módszerek megtalálását segíti a tanítási-tanulási folyamat körmodellje, az OMT teszt és a kidolgozott oktatási eszközeink alkalmazása tapasztalatainak elemzése.

Tanárképzési munkám számára fontos tanulság, hogy a hallgatók az új matematikadidaktikai módszereket „úri huncutságnak” tekintik, és éppen akkor,

amikor azokra nagy szükség lenne, hátrányos helyzetben, nehéz körülmények között nem alkalmaznak modern módszereket.

A pedagógusok és a gyerekek visszajelzései arra utaltak, hogy a játékot explicit módon be kell tervezni az egyes szakaszok feladatai közé, mert az utalások gyakran kevésnek bizonyultak, mivel sok gyerek nem ismeri a táblás játékokat és a dobókockát sem.

Azoknak a feladattípusoknak az esetében, ahol a problémát a pedagógusok vetették föl, pl. mértékegységváltás, a probléma-megoldási szituáció körvonalazása után jobban lehet számítani a pedagógusok kreatív közreműködésére. Ezt a lehetőséget, igényt érdemes lett volna részünkről jobban hangsúlyoznunk, mert bár így is sok jó ötlet született az iskolákban, még többre is lett volna lehetőség.

Azokban az esetekben, ahol a fogalomfejlesztés hatékonyabb módszereit kerestük, mélyebben elemeztük a gyerekek hátrányait és a tőlük elvárt matematikatanulási teljesítményt, a pedagógusok több segítséget igényeltek volna. A programba bekapcsolódott tanítóknak a matematikatanítás nem tartozott a fő érdeklődési körébe (hasonlóan a többi tanítónál megfigyelhető jelenséghez), ezért a hagyományos óravezetéstől nemcsak a módszertani megoldásokban, hanem a tananyag-tervezésben is eltérő téma esetében kevésbé voltak önállóak, többen elbizonytalanodtak. Ezen a tanítók intenzívebb és a kisgyerekkori gondolkodáshoz és a tapasztalatszerzés sajátosságaihoz jobban igazodó matematikai képzéssel lehetne segíteni, de a megfelelő keretek megtalálása igen nehéznek látszik.

Tervezem a vizsgálat folytatását.

A hátrányos helyzetű kisiskolások tanulási jellegzetességeit először viszonylag nagy mintán vizsgáltam, majd a munka esettanulmányokban folytatódott. Az összegyűlt tapasztalatok alapján újabb nagy mintás vizsgálatokat tervezek, amellyel ellenőrizni lehet a kidolgozott metodika hatékonyságát az iskolák mindennapi életében. A nagy létszámú vizsgálat azt is igényli és lehetővé is teszi, hogy az egyéni differenciálásban felhasználjuk az OMT teszt eredményeit, így segítve ígéretes tehetségek felfedezését és fejlesztését.

### ***Kitekintés, diszkusszió***

A kutatás tapasztalatai alapján további vizsgálatokat igényel, hogy az egyes tantervi témakörök felépítésében hogyan lehet jobban tekintettel lenni a hátrányos helyzetű tehetséges tanulók sajátos igényeire, melyek azok a témák, ahol a legsürgetőbb e feladat elvégzése.. Az iskola és a gyerekek világa közötti hídépítést a másik oldalról is folytatni szükséges. Vizsgálni kell, hogy a gyerekek mindennapi tapasztalatai mögötti összefüggéseket hogyan lehet az iskolai tanulási folyamatokba jobban beépíteni, és ehhez alkalmanként szükség lehet felsőbb matematikai témáknak a gyerekekhez igazított tárgyalására is.

A matematikatanításon belüli változtatások azonban önmagukban kis hatékonyságúak a valódi esélyegyenlőség megközelítése érdekében. Szükség van az összes tantárgyban hasonló kutatásokra. Túl kell lépni a szűk tantárgyi kereteken is. Komplex személyiségfejlesztő eljárások segíthetnek olyan nehéz feladatok megoldásában, mint például a küzdőképesség és az alkalmazkodás „elég jó” arányainak megtalálása. Az iskolai esélyegyenlőtlenség csökkentésében is alapvető a társadalmi segítség, mint a lakhatási, egészségügyi, munkavállalási feltételek javítása, amely folyamatokban a pedagógusoknak elsősorban nem szakemberként, hanem felelős polgárként vannak feladataik.

## IRODALOMJEGYZÉK

- Ambrus András: A konkrét és vizuális reprezentáció szükségessége az iskolai matematikaoktatásban (angol nyelven), 2008., Nyitra, 19-32. p.  
<http://xml.inf.elte.hu/~mathdid/ambrus/aarepr.pdf>
- Ambrus András: Bevezetés a matematikaidaktikába, Eötvös Kiadó Budapest, 1995.
- Arzarello, F. - Reggiani, M.: Teachers-Researchers Education and Trainings collaborative projects. In *Research and Teacher Training in Mathematics Education in Italy, 2000-2003*. Published on the occasion of ICME 10, 2004., 44-55. p.
- Arzarello, F. et al.: Italian trends of research in mathematics education: a national case study in the international perspective. In Kilpatrick J. – Sierpinska A. (eds.): *Proceedings of ICMI Study: What is research in mathematics education and what are its results?* Dodrecht: Kluwer, Academic Publishers, 1998., 243-262. p.
- Bajomi Iván: Az uniós oktatáspolitiká, ÚPSZ 1997/10, 118. p.
- Balogh László: Iskolai tehetséggondozás, Kossuth Egyetemi Kiadó, Debrecen, 2004.
- Berta Tünde: Combination of traditional and computer based tools in mathematics education, Journal ZDM , Issue Volume 35, Number 1 / February, 2003.,  
[http://matserv.pmmf.hu/anniv/cd\\_hun/prezentaciok/berta.pdf](http://matserv.pmmf.hu/anniv/cd_hun/prezentaciok/berta.pdf)
- Brenyó Mihály és Brenyó Mihályné: Szakköri feladatok matematikából, Tóth Könyvkereskedés és Kiadó Kft, 2004.
- Brenyo M-né, Kárpáti Andrea, Rajz I-né: Kép, nyelv, zene, matematika, Bács-Kiskun megyei PI, 1984.
- Bruner, J. Kenney, H.: Representation and Mathematics Learning, *Monographs of the Society for Research in Child Development*, Vol. 30, No. 1, Mathematical Learning: Report of a Conference Sponsored by the Committee on Intellectual Processes Research of the Social Science Research Council, 1965., 50-59. p.
- Bruner, J. S.: Az oktatás folyamata. Tankönyvkiadó, Budapest, 1968.
- Bruner, J. S.: Új utak az oktatás elméletéhez. Gondolat Kiadó, Budapest, 1974.
- Bruner, J. S.: Child's Talk: Learning to Use Language, New York: Norton, 1983.
- Bruner, J. S.: The Narrative Construction of Reality, *Critical Inquiry*, 1991.
- C. Neményi Eszter: A matematika tantárgy helyzete és fejlesztési feladatai, [http://www.oki.hu/oldal.php?tipus=cikk&kod=tantargyak-tobbek-matematika\\_e\\_n](http://www.oki.hu/oldal.php?tipus=cikk&kod=tantargyak-tobbek-matematika_e_n).



- Cole, M. – Wertsch, J. , :Beyond the Individual-Social Antimony in Discussions of Piaget and Vygotsky , University of California, é. n.  
<http://mathforum.org/mathed/vygotsky.html>
- Czeglédy István: Matematika tantárgypedagógia I. Calibra, Budapest, 1994.
- D'Ambrosio, U.: *Mathematics and Peace: Our Responsibilities, introduction to special section Analyses*, 1998.
- Davis, Ph. J. – Hersh, R.: *A matematika élménye*. Budapest, Műszaki Könyvkiadó, 1984.
- Deák Ervin: Ein grundsätzlich neuer didaktischer Zugang zu den numerischen unendlichen Reihen auf konstruktiv-genetischer Grundlage, GDM, Berlin, 2007. <http://www.mathematik.uni-dortmund.de/ieem/BzMU/BzMU2007/Deak.pdf>
- Fauvel, J. – Maanen, Jan van (ed): *The Role of the History of Mathematics in the Teaching and Learning of Mathematics Discussion*. Document for an ICMI Study, 1997–2000, Kluwer, Boston, 2000.
- Gorgorió N. – Planas N.: Cultural distance and identities-in-construction within the multicultural mathematics classroom. *Zentralblatt fur Didaktik der Mathematik, Analyses*, 2005. No. 2, 2005. 64-71. p.
- Gorgorió, N. - Planas, N.: Teaching mathematics in multilingual classrooms. *Educational studies in mathematics*, vol. 47, 2002. 7-33. p.
- Hajós György: Bevezetés a geometriába, Tankönyvkiadó, Budapest, 1966.
- Kántor Sándorné: Tudós matematikatanárok Hajdú, Szabolcs és Szolnok megye középiskoláiban, (1850-1948), Debrecen, 2009.
- Kárpáti Andrea (szerk.): Esélyteremtés az oktatási informatika eszközeivel. Tanári kézikönyv a 12-14 éves korosztály tanításához. NTK. 2006.
- Kárpáti, A. (2007): ICT and the Multigrade Teacher. The Hungarian NEMED Project. Multigrade Education: Past, Present and Future. Conference of NEMED (Network of Multigrade Schools in Education), University Politechnika, Bucharest, 2007.
- Kárpáti A. – Munkácsy K.: Mentorált innováció az összevont tanulócsoporthoz iskolákban – a Knowledge Practice Laboratory Projekt. Tanárképzők Konferenciája, Savaria Egyetem, Veszprém, 2008.
- Kertesi Gábor - Kézdi Gábor: Általános iskolai szegregáció, I., II. In: *Közgazdasági Szemle*. 2005. április, 317-355. p; 2005. május, 462-479. p.
- Klein Sándor: A komplex matematikatanítási módszer pszichológiai hatásvizsgálata, Akadémiai Kiadó, Budapest, 1980.
- Kuhl, J.: A Functional-Design Approach to Motivation and Self-Regulation: The Dynamics of Personality Systems Interactions in: M. Boekaerts, P.R. Pintrich & M. Zeidner (Eds.), *Self-regulation: Directions and challenges for future research*. Academic Press. 1999.

- Lakatos Imre: Bizonyítások és cáfolatok. Budapest, Typotex, 1998.
- Malara, N.: *The Dialectics between Theory and Practice: Theoretical Issues and Practice Aspects from an Early Algebra Project*. 2004. Plenary lecture at PME 27. <http://www.igpme.org/>
- Manen, Max van: *Reaching lived experience: a human science for an action sensitive pedagogy*. New York, The State University of New York, 1990.
- Mihály Ildikó: Vidéki környezet – vidéki iskolák, Van-e létjogosultságuk a kisiskoláknak? Új Pedagógiai Szemle, 2000/5, 65-72. p.
- Nagy József: Az íráskészség kritériumorientált fejlődése és fejlesztése, *Iskolakultúra*, 2007/5, 16-22. p.
- Nakahara in 2007 read a keynote paper: Cultivating Mathematical Thinking through Representation, 2008.
- Nunes, T. and others: *Street Mathematics And School Mathematics*, Cambridge University Press, 1993.
- OM Statisztikai Tájékoztató, Alapfokú oktatás, 1999/2000-ről, 2001., KIR-STAT 2005, EDUCATIO Kht. Közoktatási Információs Iroda, Győr, Hivatkozási szám: ASZ-01475
- Piaget - Inhelder: *Gyermeklélektan*, Budapest, Osiris, 1999.
- Pinto, M. M. F., Tall , D. O.: Building formal mathematics on visual imagery: a theory and a case study. For the Learning of Mathematics! 2002. 22 (1), 2-10.
- Pósa Lajos: Variációk egy témára, in Halmos-Pálfalvi (Szerk.): *Matematika-tanárképzés –matematikatanár-továbbképzés*, Budapest, Calibra, 1995.
- Reiman István: *Geometria és határterületei*, Szalay Könyvkiadó, 1999.
- Rendes Béla - Fátrai Klára: *Kisiskolák pedagógiája*, Bajai Tanítóképző EKF, jegyzet, é. n.
- Rickart, Ch.: Strukturális és matematikai gondolkodás, in: Sternberg, Ben-Zeev: *A matematikai gondolkodás természete*. Vince Kiadó, 1998.
- Rózsahegyi Eszter: *Matematikatörténet a számítógéppel segített matematika-oktatásban*. Szakdolgozat, ELTE 2006. Budapest, témavezető Munkácsy Katalin
- Sáska Géza: *Európa oktatásügye, ahogy a Kárpát-medencéből látszik*, Iskolakultúra, 2006.
- Schweiger, Fritz: *Fundamental Ideas*, fordította Rózsahegyi Eszter, kézirat 2006.
- Sternberg, R. J. : *Mi a matematikai gondolkodás?* In: Sternberg, R. J. és Ben-Zeev, T. (szerk.): *A mate-matikai gondolkodás természete*. Vince Kiadó, Budapest. 1998. 295–309. p.
- Szabó Árpád: *A görög matematika*, Budapest, Magyar Tudománytörténeti Intézet, 1997.

- Szabó Gézáné: TANMENETJAVASLAT a Színes matematika sorozat 3. osztályos elemeihez, NTK, 2010.  
[http://www.ntk.hu/also/utmutatok\\_tanmenetjavaslatok#Matek](http://www.ntk.hu/also/utmutatok_tanmenetjavaslatok#Matek),
- Szénássy Barna : A magyarországi matematika története (A legrégebbi időktől a 20. század elejéig), Akadémiai Kiadó, 1970.
- Szendrei Julianna: Gondolod, hogy egyre megy? Typotex, 2005.
- Thomas, J.: Teaching Mathematics in a Multicultural Classroom: Lessons from Australia. In *Multicultural and Gender Equity in the Mathematics Classroom, The Gift of Diversity*. NCTM USA, 1997. 34-45. p.
- Tuveng, E. – Wold, A. H.: The Collaboration of Teacher and Language-minority Children in Masking Comprehension Problems in the Language of Instruction: A Case Study in an Urban Norwegian School. *Language and Education*, 2005. 6. 513-536. p.
- USA, OM, Oktatási Statisztikai Hivatal jelentései, NAEP, é. n.  
<http://nces.ed.gov/nationsreportcard/>
- Vári Péter (szerk.): *PISA-vizsgálat 2000, mintafeladatokkal*. Budapest, Műszaki Könyvkiadó, 2003.
- Vásárhelyi Éva: A magyar matematikai nevelés a nemzetközi összehasonlítások tükrében. Kiegészítő tanulmány az Oktatókutató és Fejlesztő Intézet A matematika tantárgy helyzete a felső tagozaton és a középiskolában c. elemzéséhez, 2009. <http://www.ofi.hu/>
- Vásárhelyi Éva: Hintergrundtheorien des Unterrichtsmodells Innere. Differenzierung. Salzburg, egyetemi doktori dolgozat német nyelven, 2008.
- Vásárhelyi, É.: Combination of traditional and computer based tools as a strategy for problem solving. In: *Creativity and Mathematics Education (Tagungsband)*, Münster, 1999. 163-166. p.
- Vigotszkij, L. S.: Gondolkodás és beszéd. Bp. 1966.
- Waerden, B. L. van der: Egy tudomány ébredése, Egyiptomi, babiloni és görög matematika, Gondolat, 1977.
- Zaslavsky, C.: *Math Games and Activities from Around the World*, Chicago: Chicago Review Press, 1998.

## FÜGGELÉK

### **Mellékletek**

#### *A PowerPoint diasorozatok rövid bemutatása*

A kutatás során PowerPoint bemutatókat készítettünk, és azokhoz módszertani útmutatókat írtam.

Elkészült és iskolai környezetben alkalmaztunk öt képsorozatot, amelyeket a gyerekeknek szántunk, ugyanakkor a tanulási folyamat modelljéül is szolgáltak.

A munka során használt öt PowerPoint bemutatót CD-n mellékelem.

A diasorozatok jellemzői:

- Részben betöltik munkalapok funkcióját
- Kevés szöveggel, képek által reprezentált környezetben mutatják be a matematikai problémát
- Közös, tanítói irányítással való megbeszélésre készültek
- A diasorozatok mind a tanítók, mind a tanulók munkáját segítik
- A PowerPoint formában készített oktatási segédanyag, amely a beszélgetések alapjául és a tárgyi tevékenység mintájaként szolgált, a gyerekek számára megoldandó problémákat tartalmaz laza, inkább csak a képzeletet elindító történet keretében foglalva.

A maci-sorozat tagjait iskolai munkára szántuk, nem önálló tanulásra terveztük. Sokféle feldolgozási lehetőséget kínálnak, éppen ezért döntési lehetősége van a pedagógusoknak, és szerepük is nagy az órai alkalmazásokban.

A diasorozat egyes tagjait a tantervi követelmények, az egyes tananyagrészek matematikai és didaktikai problémáinak milyensége, a felső tagozatos tapasztalatok és a vizsgálati osztályokban tanító pedagógusok véleményének figyelembe vételével terveztem meg

A gyerekpszichológusok szerint az állatok közül a medve a leginkább emberi lény, ugyanakkor elég elvonatkoztatott az emberektől, gyerekektől, hogy ne valamilyen konkrét személyre utaljon, hanem minden gyerek saját magát tudja a helyére képzelni.

Mindig történetbe helyeztük a bemutatandó matematikai fogalmat vagy összefüggést annak érdekében, hogy segítsük az új ismereteknek valamilyen régi, már ismert tudáshoz való kapcsolását.

A képek és a képekkel kifejezett narratíva szerepéről a matematikatanításban részben a bruneri elvek és az azokra épülő oktatási kísérletek jelentették az alapot, részben pedig azok az új kutatások, amelyek a számítógéphasználat

elterjedése nyomán felerősödtek, ezek a vizualitás és az interaktivitás lehetőségei, valamint a narratív tanulási környezetre irányuló vizsgálatok.

A kiválasztott témák mind a tantervi anyaghoz kapcsolódnak, olyan területekkel foglalkoztunk, amelyek a tanítók véleménye szerint nehezek vagy általában ennek a korosztálynak, vagy speciálisan a kistelepülések tanulóinak.

A „dia-film” stílust választottuk, nem használtuk ki az interaktivitás és az ábrák mozgathatóságának lehetőségeit, amit a számítógépek lehetővé tettek volna. Ennek részben praktikus okai voltak, így azonnal, néhány napon belül is akár, lehetett reflektálni a felmerült tanítói igényekre.

Részben azonban tartalmi megfontolások alapján döntöttünk. A gyermekpszichológusok által sokat hangoztatott szempont szerint a mozgóképnél (így különösen a TV-műsoroknál) sokkal hasznosabb a gyermekek fejlődése szempontjából a képeskönyv és az elmondott-felolvasott mese. A maci-sorozat könyvben is készülhetett volna, ez ellen szól a könyvek előállításának és szállításának magas költsége. Továbbá ki akartuk használni a számítógépek motivációs lehetőségét, és példát akartunk mutatni arra is, hogy a számítógépek a tanulásban milyen sokféleképpen alkalmazhatók.

Az összes prezentáció bemutatásának javasolt menete:

1. Az adott prezentáció közös megtekintése

Kis létszámú osztályokban a PC monitorjának használatával is megoldható. Teljes osztályokban kivetítő, interaktív tábla használható, de tapasztalataink szerint már ebben a szakaszban is alkalmazható a csoportmunka, ebben az esetben forgószínpad-szerűen kapnak feladatokat a csoportok, míg végül mindenki megnézheti a ppt-t.

2. A tanító didaktikai céljainak és a lehetőségeknek megfelelően, a ppt-ben látott ötletre is építve tárgyi szintű problémamegoldó feladatokat ad a tanulóknak.

3. A tapasztalatok megbeszélése, az új ismeretek szimbolikus szinten, szavakkal, jelölésekkel történő rögzítése.

4. A tanulók élményeinek megbeszélése, leírása.

Tehát a hagyományos óráktól a következő területeken térnek el a kísérleti óráink:

A számítógépek segítségével közvetített képek, képsorozatok alkalmazása

A tárgyi tevékenység nem előkészítője, kiegészítője, illetve alternatívája a problémamegoldásnak, hanem egy formája

Kis létszámú (4-6 fős) osztályokban, akár vegyes életkori csoportok alakításával is, a csoportmunka alkalmazása

A történetmesélés beillesztése a matematikatanulás döntően logikai úton szervezett menetébe

A pedagógusoknak lehetőségük van, a kísérleti szakaszban kifejezetten feladatuk volt, tapasztalataik megosztására az ország más részeiben tanító kollégáikkal, illetve a kutatás vezetőjével

### *Poharak, mérés, mértékegységek*

#### *Cél*

A mérés és a mértékegység fogalmának kialakítása, elmélyítése az úrtartalom alkalmilag választott egységekkel történő mérése révén.

Annak a hétköznapi tapasztalatnak beépítése a matematikai ismeretek körébe, hogy ha kisebb edénnyel töltünk meg egy tartályt, akkor többször kell fordulnunk, mintha ugyanezt nagyobb edénnyel tennénk.

#### *Szükséges eszközök*

Víz, kisebb és nagyobb poharak, kancsó

#### *Követelmények*

Minimális követelmény: A tapasztalatok közvetlen megfogalmazása, pl.: „Kisebb edénnyel tovább tart a kancsó megtöltése.”

Optimális követelmény: Más mennyiségek mérésére és általában a mérésre vonatkozó összefüggések megfogalmazása, a váltószámok ismerete, a mértékegységek adott feladathoz illeszkedő megválasztása. A témához kapcsolódó szöveges feladatok megfogalmazása és megoldása.

### *Kirándulás, térbeli tájékozódás*

#### *Cél*

A három térbeli irány szavainak, le-föl, előre-hátra, jobbra-balra használatával a térbeli tájékozódás tudatossá tétele, a térfogalom kialakítása első lépéseinek megtétele.

Térbeli alakzatok építése, a párhuzamosság és a merőlegesség, az azonos élhossz reprodukálása különböző modellekkel.

A bal és jobb oldal, a balra és jobbra kanyarodás fogalmának gyakorlása.

#### *Szükséges eszközök*

Gyurma, pálcikák; hely és eszközök szituációs játékokhoz, a „jobbra kanyarodó autó”.

#### *Követelmények*

Minimális követelmény: A tapasztalatok közvetlen megfogalmazása, a bal és jobb oldal biztos ismerete, pl. bal kéz, jobb kéz.

Optimális követelmény: Az irányok biztos alkalmazása mozgásban is.

*Időkerék, egyiptomi számírás és az első lépések a matematikai bizonyítás felé*

**Cél**

A történelmi keret segítségével elősegíteni két, didaktikailag nagyon különböző jellegű fogalom mélyebb megértését. Az egyik a mi számírásunk, ami annyira egyszerűnek, nyilvánvalónak tűnik, hogy egy másik kultúra alapvetően más megoldásának ismerete segíthet megérteni a benne rejlő tartalmat, a helyiértékes számírás lényegét. A másik fogalom a bizonyítás, amely éppen hogy nagyon távolinak, idegennek látszik. Nehéz észrevenni, hogy mindennapi életünkhöz valójában milyen közel áll, hiszen szinte minden döntésünk feltételezéseken, hipotéziseken alapul.

**Szükséges eszközök**

Rajzeszközök a hieroglifák leegyszerűsített megrajzolásához, papírmodellek a „csokoládékhöz”, a négyzetek területének összehasonlításához.

**Követelmények**

Minimális követelmény: Az egyiptomi, szigorúan additív számírás írása, olvasása.

Próbálkozás a megismert probléma „Melyik terület nagyobb? A két kis négyzeté együtt, vagy a nagyé?” kísérleti megoldására.

Optimális követelmény: Az egyiptomi számírás biztos ismerete, a tanuló legyen képes összehasonlítani a kétféle számírást néhány szempont szerint, szorzás egyiptomi módra.

A területegyenlőség átdarabolásos bizonyításának megértése.

*Utazás, adatkezelés*

**Cél**

Egyszerű példán megismertetni a tanulókkal az alkalmazott matematika néhány sajátosságát, gyakorlatszerzés az adatok gyűjtésében és elrendezésében, feladatok megfogalmazása és megoldása az adatok segítségével.

**Szükséges eszközök**

Menetrendek, árlisták. Dobókocka a feladatok generálásához.

**Követelmények**

Minimális követelmény: A kapott adatok beírása a kapott táblázat megfelelő helyére, egyszerű számítások elvégzése.

Optimális követelmény: Annak ismerete, hogy az adatok elrendezésének és bemutatásának többféle módja lehet. Az adatok elemzése, kérdések felvetése és válaszok keresése, becslés és számolás

## *Poliéderek*

### *Cél*

A poliéder szemléletes fogalmának kialakítása, a poliéderek fajtái, tulajdonságai, néhány példa bemutatása nem poliéder testekre. A poliéderek összehasonlítása, megkülönböztetése az élek, lapok, csúcsok száma alapján.

### *Szükséges eszközök*

Gyurma, pálcikák, dobozok, építőkockák.

### *Követelmények*

Minimális követelmény: A kocka és a téglatest fogalma, ráismerés, modellek előállítás.

Optimális követelmény: Problémamegoldás a poliéderekkel kapcsolatban.

### *Egyéb dokumentumok*

#### *NEMED minta, a 16 iskola, településük szerint felsorolva*

Alsószentiván

Debrecen (SED)

Felsőkelecsény \*

Felsőpetény

Hasznos \*

Keszeg

Kolontár

Nógrádkövesd

Nógrádsipek

Pogány

Sárhida \*

Somogyhárság

Szár föld

Székesfehérvár (SED)

Vadna \*

Vezeny

A 16 iskolából a 2006-2007-es tanév végére 4 iskola, a csillaggal jelöltek megszűntek.

A két nagyvárosi iskolából gyógypedagógiai csoportok vettek részt a programban.t



## **Összefoglalók**

### **Magyar nyelvű összefoglaló**

#### **A kutatás motivációja és célja**

A hátrányos társadalmi helyzet és a matematikatanulás eredményessége (kudarcai) közötti összefüggéseket keresem, elsősorban az átlagos és az átlagosnál jobb képességű (tehetséges) tanulók szempontjából: Miért marad rejtve a hátrányos helyzetű tanulók matematikai tehetsége? Hogyan lehet az iskolai matematikaoktatást a rejtett tehetségek számára (is) megfelelőbbé tenni?

A személyes érdeklődésem nemzetközi kutatási törekvésekkel is találkozott. Az összevont tanulócsoportos iskola kutatására és fejlesztésére létrejött egy EU támogatású nemzetközi program (NEMED), amelynek magyar koordinátora az ELTE TTK Multimédiapedagógia Központja volt. Ennek keretében a matematikatanítás kérdéseivel a magyar partner foglalkozott, a munka koordinálását és a magyarországi kutatást én magam irányítottam, illetve végeztem.

Az empirikus kutatás során az ország különböző helyein elhelyezkedő 16 összevont tanulócsoportos iskolában közel 250 tanulóval és 25 pedagógussal működtem együtt 3 évig.

#### **A kutatás módszerei**

Az elzárt, egymástól is távoli települések sajátos kutatási és kapcsolattartási módszereket igényeltek, annak érdekében, hogy a kutatás ténye ne zavarja meg túlságosan az iskolák életét. Be kellett kapcsolódnom egy-egy iskola életébe, segítenünk kellett az informatikai eszköz megszerzésében és gondoskodnunk kellett arról, hogy ezeket a tanítók megfelelően használni is tudják.

Szociológiai, pedagógiai, pszichológiai és matematikadidaktikai elméleti kutatások és (hipotézisvizsgáló és feltáró) kísérleti vizsgálatok egymást kiegészítő sorozatában olyan matematikadidaktikai megoldást kerestem, amely kompenzálja a hátrányos társadalmi helyzetből fakadó iskolai hátrányokat, növeli az arra rászoruló tanulók esélyeit, de a többi tanuló fejlődését is megfelelően szolgálja. A feltárás és kísérleti tanítás módszereit és eszközeit részben nemzetközi kutatások magyar viszonyokra való adaptálásával (motivációs teszt, kutató és gyakorló pedagógusok együttműködésének Malara féle módszere), részben saját fejlesztéssel (tananyag-előkészítés, pedagógus-felkészítés, segédanyagok, interjúk, stb.) készítettem el.

A segédanyagok és azok felhasználói dokumentációjának elkészítésében a Bruner féle reprezentációs elmélet elveit követve, illetve a személyi számítógép által továbbfejlesztve dolgoztam.

#### **Az empirikus kutatás menete**

A kutatókból és a gyakorló pedagógusokból álló team megszervezésével kezdődött a munka és szakmai közösség az egész program során együttműködött

és fejlődött. Motivációs vizsgálatot végeztünk a tanulók körében annak igazolására, hogy a gyerekek érdektelensége, lustasága nem alkalmas magyarázat gyenge teljesítményükre. A kiinduló körülmények ismeretében kezdtük meg a kísérleti órák megvalósítását. Ezeket a körülményeket folyamatosan alakítottuk. A kísérleti órákat először 16 iskolában tartották meg a pedagógusok az interneten küldött oktatási anyagok és módszertani útmutatások alapján. A tanítók a programot két hónapon keresztül, a közösen választott négy téma mindegyikére 1-3 tanítási órát fordítva valósították meg. Az órákról kapott írásos beszámolókat összesítve, megszerkesztve visszaküldtem az iskolákba, így a tapasztalatok már a következő téma tárgyalásába beépültek. (A matematika órákkal párhuzamosan esztétikai fejlesztő program is zajlott, és a tanulók számára tanítási órán kívüli versenyeket, foglalkozásokat is szerveztünk.) A program utolsó szakaszában négy iskolával dolgoztunk együtt. Ebben a részben már nagy figyelmet fordítottunk arra is, hogyan terjeszthetjük el az elért eredményeket további, a programban részt nem vett iskolákban is.

A választott témák:

1. Poharak, mérés, mértékegységek
2. Kirándulás, térbeli tájékozódás
3. Időkerék, egyiptomi számírás és az első lépések a matematikai bizonyítás felé
4. Utazás, adatkezelés
5. Poliéderek

Az órák felépítése:

- Előkészítés
- A bemutató megnézése és közben beszélgetés
- Tárgyi tevékenység, rajzolás, problémamegoldás szimbolikus síkon is
- Mi történt az órán? – beszélgetés, tudatosítás
- A tanulók írásos visszajelzése

Az órák közötti munka:

- A pedagógusok írásos beszámolója az órákról
- A kutatásvezető visszajelzése
- Az új téma előkészítése

## **A kutatás hipotézisei és az eredményei**

### **Főhipotézis**

*A tehetség társadalmi háttértől és etnikai hovatartozástól független, egyenletes eloszlásából kiindulva azt feltételezzük, hogy a hátrányos helyzetű tanulónál a tehetséggondozás elérhetőségének egyenlőtlenségéből fakadó tudásbeli elmaradásról és nem képességihiányról van szó. A hátrányos társadalmi helyzetű tanulók többsége kommunikációs zavarral küzd, ez a közvetlen akadálya az eredményes iskolai szereplésüknek.*

*A tantárgypedagógiai elméleti és gyakorlati eredmények alkalmazásával lehetőség van olyan tananyag-elrendezésre és feldolgozásra, amely lehetővé teszi a differenciált fejlesztést.*

*Megfelelő továbbképzési, támogatási formák segítségével a pedagógusok elsajátíthatják a kis tudású és a tanulás élményét még nem ismerő, de tehetséges tanulók tanítására alkalmas fogásokat.*

*A két társadalmi közeg közötti különbségből – vagyis a tanítók középosztálybeli és az összevont tanulócsoporthoz tartozó iskolák hátrányos társadalmi helyzetű tanulói közötti különbségből - fakadó kommunikációs zavar felismerésére és kezelésére a tanítók felkészítendőek és felkészíthetők.*

Ezen hipotézisek vizsgálatát az elméleti kutatás során kezdtem meg, majd empirikusan vizsgálható részhipotézisekre bontottam.

A témára vonatkozó kutatási eredményeket sok különböző forrásból gyűjtöttem össze. Statisztikai adatokat, új, a matematikatanulást is érintő tanuláseméletet, feltáró kutatásokat és a gyakorlatban alkalmazott, a hátrányos helyzetű tanulók esélyeit javító programokat elemeztem.

### **Első hipotézis**

a) *A gyerekek motivációjának szerkezete (kötődés, teljesítmény, a társas kapcsolatokban elfoglalt szerephez való viszony) a hátrányos helyzet ellenére is jó, nem akadályozza az eredményes munkát.*

#### *Tapasztalat*

Kuhl német pszichológus dinamikus személyiségtesztjét a szerző írásbeli engedélyével Vásárhelyi Éva segítségével adaptáltam az adott pedagógiai szituációra. A teszt alapján a vizsgált tanulók többségének motivációs szerkezete ép, törekszenek a sikerre, örülnek a érzelemmentes személyes kapcsolatoknak és magasabb státuszú személyt (így a tanítókat) segítőknek és nem zsarnoknak látják.

Az elvégzett statisztikai próbák alapján a vizsgált tanulók motivációs szerkezete stabilnak látszik.

#### *Következtetés*

Most összességében vizsgáltuk a tanulókat, de a teszt alkalmasnak látszik a differenciálás segítésére is.

b) *A kommunikáció és az írás-olvasás területén meglévő problémák ellenére az őket érdeklő témákban kifejezőképességük árnyalt.*

#### *Tapasztalat*

A gyerekek írása az adott helyzetben érthető volt, de a normáktól nagyon eltért, ezért ebben az állapotban nem alkalmas az íráson-olvasáson alapuló tanulásra.

#### *Következtetés*

Feltételezem, hogy az írás technikai elemeit az írás kommunikációs funkciójának gyakorlásával lehet hatékonyan fejleszteni, erre a matematikaórák is kínálnak eddig még kihasználatlan lehetőségeket.

### **Második hipotézis**

- a) *Az új pedagógiai-didaktikai módszerek és eszközök Bruner reprezentációs elmélete alapján adaptálhatók a vizsgált körülményekre (6-10 éves életkor, hátrányos helyzet).*

#### *Tapasztalat*

A munka során sikeresen iktattunk a kísérleti órák tananyagába a tanítók szerint nehéz, valamint a tananyagban közvetlen módon nem szereplő matematikai témákat, amelyeket a tanulók elsajátítottak

#### *Következtetés*

Szükség van annak szisztematikus áttekintésére, hogy a közoktatási matematika tananyag sikeres elsajátításához milyen tartalmi és módszertani változtatásokra van szükség már az alsó tagozatban.

Feltételezem, hogy a hátrányos helyzetű tanulók számára a nagy, átfogó problémákból való kiindulás, a nehéz kérdések sokirányú, szemléletes megközelítése sikeresebb lehet, mint az egyszerűtől a bonyolult felé haladás elvének szigorú betartása.

- b) *Az általunk kidolgozott és alkalmazott specifikus módszertani eljárások nyomán megnő a gyerekek tantárgy-specifikus (matematikatanulási) motivációja.*

#### *Tapasztalat*

A gyerekek általában szívesen tanulták a matematikát, a tőlük és a tanáraiktól kapott írásbeli és szóbeli beszámolók alapján győződünk meg erről.

#### *Következtetés*

A matematikatanulás iránti attitűd változásának részleteit további célzott megfigyeléssel, kikérdezéssel lenne érdemes feltárni.

### **Harmadik hipotézis**

- a) *A tanulás pozitív élményét nyújthatjuk a tanulóknak akkor is, ha tudásbeli és műveltségi hiányosságok akadályozzák őket az életkoruknak megfelelően elvárt, tantervekben meghatározott, a tankönyvekben közvetített tanulási folyamat követésében.*

#### *Tapasztalat*

A kísérlet során a gyerekek életkorának megfelelő, illetve annál nehezebb problémákat tudtak megoldani, azokban az esetekben, amikor a feladat szituációjára nemcsak utalások történtek, mint az a szöveges példákban szokásos, hanem azt eljátszhatták, elmesélhették, modellezhették. Korábban ilyen teljesítményre a vizsgált tanulók többsége nem volt képes.

## Függelék

### *Következtetés*

Szükséges további új oktatási eszközök kikísérletezése, kipróbálása, és az adott eszköz felhasználását segítő sokféle alkalmazási lehetőség részletes, tanítói tapasztalatokra épülő bemutatása.

*b) Az eltérő tapasztalatokból származó súlyos kommunikációs zavarok a kombinált didaktikai módszerekkel rövid távon is eredményesen oldhatók.*

### *Tapasztalat*

A tanulmányi eredmények mérhető javulása csak hosszú távon várható, de az órák menetének megváltozása, a tanulói aktivitás növekedése azonnal megállapítható volt.

### *Következtetés*

Követő vizsgálatokra van szükség, amelyek pszichológiai és matematika-pedagógiai módszerekkel ellenőrzik a fejlődés ütemét, az eredmények tartósságát az eltérő adottságokkal és az eltérő társadalmi háttérrel rendelkező tanulók esetében.

*c) A kombinált módszer a nem azonosított tehetség kibontakozását is elősegíti.*

### *Tapasztalat*

A legtehetségesebb tanulók nehéz feladatok önálló megoldásával hívták fel magukra a figyelmet, és ez független volt társadalmi helyzetüktől, a korábbi „jók” és a most felbukkant tehetségesek egyaránt aktívak voltak.

### *Következtetés*

A fejlesztési folyamat egy-egy szakaszának végén szükség van olyan, a tehetségazonosítást segítő, a speciális helyzetre alkalmazott feladatsorokra, amelyekkel nemcsak a tehetség tényét, hanem jellegét, mértékét is meg lehet ítélni.

A tárgyi szintű problémamegoldás a tanulók minden rétege számára érdekes és fejlesztő hatású volt, de a hátrányos helyzetű tanulók számára különösen sokat jelentett, lehetővé tette számukra, hogy jó képességeiknek megfelelő nehéz problémákkal foglalkozhassanak.

A kutatás során szerzett elméleti ismeretek és kísérleti tapasztalatok tanárképzési szempontú elemzése folyamatban van.

## Summary

### **The motivation and aim of research**

I am looking for the connection between the negative social situation and the success (failure) in learning mathematics especially from the point of view of average and above average (talented) students: Why the talent of children with socially disadvantageous background is left undiscovered? How can school mathematics be made more suitable for hidden talents?

My personal interest also met with international research efforts. An EU-supported international program has been organized for research and development of multi-grade schools (NEMED), the Hungarian coordinator of which was the Centre for Multimedia and Educational Technology of the Eötvös Loránd University. As a part of this research, the Hungarian partner was dealing with questions of mathematics teaching, the research in Hungary was coordinated, directed and partly performed by the author.

The empirical research took place in 16 multi-grade schools located in different places in the country. The author co-operated with nearly 250 students and 25 teacher for 3 years.

### **Research methods**

In order to ensure that the research in these isolated and remote villages does not disturb too much the everyday life of the schools, we had to develop specific research and contact methods. I had to be involved in the school's life, had to help to get the IT tools and to make sure that these teachers could use them properly.

I was looking for a didactical solution, that compensates for the negative social disadvantages without restricting the development of "average" students. For this method I used the sociological, educational, psychological and mathematical (experimental and theoretical) studies in interaction with a series of experimental (hypothesis testing and exploratory) investigations.

I constructed the tools and methods of the exploration and experimental teaching (Curriculum Development, teacher training, materials, interviews, etc), partly by adapting the international research results (motivation test, Malara's "researchers and practicing teachers in cooperation" method) to Hungarian conditions.

The teaching materials and methodological guidelines are based on the representation theory of Bruner. I developed them further by learning materials for personal computer.

### **The empirical research process**

The work began with organizing a team of researchers and practicing teachers, which community cooperated and developed throughout the program. A projective motivational test was made among students to verify that the children's lack of interest or laziness is not a suitable explanation for their weak

performance. We started and continuously developed the experimental lessons according to the circumstances.

In the first phase of the experiment the teachers worked in 16 school using the experimental teaching materials and methodological guidelines. The everyday communication was managed via internet.

The experimental team had chosen four topics for two months. The teachers spent 1-3 lessons for each topic and they wrote a report about each lesson.

I reflected on the experiences collected in these reports, so the experience could be integrated into the next step.

Parallel to the Mathematics lessons aesthetic development, competitions and workshops also have been organized.

In the last phase of the program we worked together in four schools. We also discussed how the achieved results could be disseminated.

Selected Topics:

1. Cups, measuring, units
2. Excursions, spatial orientation
3. Wheel of Time, Egyptian numbers and the first steps toward a mathematical proof
4. Travel, data management
5. Polyhedra

Structure of lessons:

- Preparation
- Slide show and conversation
- Problem solving with help of concrete manual activities, drawing and at symbolic level
- What happened during the lesson? - conversation, reflection
- The students' written feedback

Work between lessons:

- The teachers' reports on the lessons
- Feedback from the organizer
- Preparing of the new topic

## **The research hypotheses and the results**

### **Main hypothesis**

*We assume, that the talent is independent of social background and ethnicity, and the lesser achievement of disadvantaged students is due to the disparities in access to knowledge and not to lesser abilities. The majority of socially disadvantaged students struggle with communication disturbance, this is the direct impediment to effective school achievement.*

*Applying the theoretical and practical results of Didactics of Mathematics it is possible to organize a curriculum and construct methods, which allow a differentiated development.*

*By proper training teachers can learn the forms of assistance to possibly gifted students without experience in learning.*

*The teachers should and can be prepared to recognize and treat the communication disturbance due to the difference between the teachers from middle-class and the multi-grade school students with disadvantaged social background.*

I began the examination of the main hypotheses with theoretical research, then derived some sub-hypotheses, which could be tested empirically.

The research results has been collected from many different sources: I analyzed statistical data, studied new learning theories (especially regarding mathematics), exploratory researches and the remedial programs for disadvantaged students, increasing their chances.

### **First hypothesis**

*a) The structure of children's motivation (affiliation, achievement, leadership) despite the disadvantage is good basis for the effective work.*

#### *Experience*

The German psychologist Julius Kuhl developed a projective multi-motive test, which I adapted with his permission and the help of Éva Vásárhelyi it to the pedagogical situation.

The statistical evaluation of the test shows, that the structure of motivation of most students is intact, they strive for success, they are open to personal relationships and regard higher-status people (including teachers) as helpers, not as tyrants.

Beyond the statistical evaluation the test is also suitable for a differentiated diagnosis.

*b) Despite the communication and literacy problems the level of their expressive abilities is surprisingly high in the topics that interest them.*

#### *Experience*

The text written by the children was understandable in the given situation, but very different from the norm. They are not suited for reading and writing-based learning.

#### *Conclusion*

I assume that the technical elements of writing can be effectively developed by exercising the communicational function of the writing. Learning Mathematics offer for this an untapped potential.

### **Second hypothesis**

*a) The new pedagogical-didactic methods and tools on the basis of Bruner's theory of representation can be adapted to the conditions (6-10 years of age, disadvantage) of the experiment.*

#### *Experience*

During the experiment the students could successfully solve such mathe-



mathematic problems, which were evaluated by the teachers as difficult, and are not in the Hungarian curriculum for their grade.

*Conclusion*

There is a need for a systematic review of the mathematics content and methodology in the curriculum of public education in order to learn what changes are needed even in the lower classes.

I assume that for disadvantaged students starting with an optimal activating problem (of challenging character) and dealing with it comprehensively in different representations may be more successful, than the strict compliance to the principle "from simple towards complex".

- b) The specific methodology developed and applied in our experiment results in an increase in subjects-specific (mathematics) motivation of the children.*

*Experience*

According to the children's feedback and the written and oral teachers' reports the children usually liked to learn math.

*Conclusion*

The details of the changes in attitude toward mathematics should be explored by monitoring and questioning.

**Third hypothesis**

- a) A positive learning experience can be offered to the students, even if knowledge and cultural gaps prevent them from fulfilling the equipments expected according to their age by the curricula, textbooks.*

*Experience*

During the experiment, the children were able to solve problems appropriate to their age or more difficult, when the problem was not posed only written, but they could personalize the situation (perform, model, tell it as a story). Previously, the majority of students were not capable for such an achievement.

*Conclusion*

It is necessary to develop and try new educational tools with a wide range of applications, and to introduce the new devices with detailed descriptions, based on the teaching experiences.

- b) The communication disturbances caused by different experiences can successfully be solved even in the short term through our combined didactical methods.*

*Experience*

The significant improvement of the math grade can only be expected in the long term, but the improvement, the changes in the lessons can be seen immediately.

*Conclusion*

Follow-up studies are needed to examine the rate of development and durability of the results with methods of the Psychology and Didactics of Mathematics especially for students with different social backgrounds.

*c) The combined method also promotes children with non-identified talent.*

*Experience*

The most talented students drew attention to themselves by solving difficult problems, and this was independent of their social status, the previous "good" and the recently emerged talents were equally active.

*Conclusion*

At the end of each phase of the development process one needs special sequences of tasks supporting the identification and characterization of talents.

The concrete-manipulative level of problem-solving was interesting and supporting for development for students of any social backgrounds, but it was exceptionally helpful for disadvantaged students.

The analysis of the theoretical knowledge and experiences gained from the research from teacher training aspects is in progress.

## **A szerző publikációs jegyzéke**

### *Angol nyelvű publikációk*

#### *Referált periodikában megjelent publikációk*

Preliminaries for the teaching of non-Euclidean geometries, *Creative Mathematics*, 2003. 12. 117-119. p., <http://creative-mathematics.ubm.ro/>  
 Social Skills and Mathematics Learning, *Philosophy of Mathematics Education Journal* No. 21. 2007.

<http://www.people.ex.ac.uk/PERnest/pome21/index.htm>

Mentoring Innovation - A Trialogical Model for In-Service Teacher Training, (Kárpáti Andreával) *Journal of Computer Assisted Learning*, special issue on Current and Future Issues in Research into ICT in Education

#### *Konferencia kiadványok*

Non-Euclidean Geometry in the Old Maps. VI. Österreichisches Symposium zur Geshichte der Mathematik. Neuhofen, 2002.

Pictures from the history of non-Euclidean geometry in Hungary, János Bolyai Conference on Hyperbolic Geometry, MTA Budapest, 2002.

Problems of everyday communication in mathematics teaching, GDM conference, Budapest, 2008.

Presentations, made for learning mathematics in multigrade schools, *Beiträge zum Mathematikunterricht*, 2008.

Das Geometriebuch des Kronenprinzen, Augsburg 1689-Hungarian Edition in 2001, VIII. Österreichisches Symposium zur Geshichte der Mathematik, Miesenbach 2008.

#### *Recenziók a Zentralblatt für Didaktik der Mathematik számára*

- Ambrus Gabriella: Hagymányos és problémaorientált feladatok kapcsolatának vizsgálata az iskolai gyakorlatban, *A matematika tanítása: módszertani folyóirat*
- Bencze Mihály: Generalizing Menelaos' theorem
- Csiszár Márton: Selected problems of combinatorial geometry
- Csorba Ferenc: Let's construct it again!
- Darvasi Gyula: Szerkesszünk adott háromszögbe szabályos háromszöget!
- Horváth Jenő, Temesvári H. Ágota, Krisztin István: The elements of the absolute geometry in the higher education (collegelevel) of geometry
- Lóczi Lajos: Solving equation of degree five
- Máté László: Fractal models with square lattice: an elementary introduction into fractal dimensions
- Riegler András: Parity properties of Pythagorean triples
- Szabó Péter Gábor: Upward chain fractions
- Tóth Mariann: Why not pose another question?

### *Előadások*

- What can we learn from broken stick of Rousseau? ATM , Oxford, 1997.
- The Hungarian Project of Using of Internet in the Schools - Sulinet, Nagybánya North University, 1998.
- The Role of Maths History in the Teaching of Proofs, the Models of Non-Euclidean Geometry, Workshop David Ligard matematika-történeti kurzusán, Sheffield, 1998.
- Development of Non-Euclidean Geometry in Hungary. The British Society for the History of Mathematics, Research in Progress Day, Oxford 2001.
- Some Hungarian examples of using ICT in mathematics classrooms , Innsbruck, EuroMath, 2004.
- Mathematics web pages in Hungarian SchoolNet, 5th Joint Conference on Mathematics and Computer Science, Debrecen 2004.
- Non-Euclidean Geometry in the Old Maps (a Bolyai software), Nehru University, New Delhi, 2005.
- Mathematics for multigrade schools, Varga Tamás Módszertani Napok, Angol nyelvű szekció, 2007.
- Mathematic teaching and virtual-vertical grouping in multigrade teaching. Kokkola University Consortium (Finland), 2007.
- Interactive, virtual and hands-on visualization in mathematics education, NEMED zárókonferencia, Bukarest, 2007.
- The role of the history of mathematics in the teaching and learning of mathematics – An ICMI study 1997–2000, History of Mathematics and Teaching Mathematics, V. Marosvárhely, 2008.
- Mathematics learning built on pictures, Second International Scientific Colloquium, Mathematics and Children, Osiek, 2009.
- Problemsolving built on Bruner's enactive mode, ProMath09, Budapest, 2009.
- The reception of Bolyai's geometry in the Austrian-Hungarian Empire, ICHST, Budapest, 2010.
- Language in the mathematical education, 18th and 19th century, Miesenbach, Osztrák Matematikatörténeti Konferencia, 2010. (megjelenés alatt)
- Language of the early Hungarian mathematics researches, Szeged, HMTM, 2010.
- Visually aided mathematics learning to reduce communication disorders, Nairobi, 2010.

### *Egyéb publikációk*

- Hungarian Conference on the History of Mathematics. (társszerzővel), Convergence 2005. <http://mathdl.maa.org/mathDL/>
- Report on "English Language Section of Varga Tamás Days" Annual Meeting, 11–12 November, 2005, Budapest, Hungary, Teaching Mathematics and Computer Science, Debrecen, 2006.
- Art Education for sustaining cultural identity: Making meaningful art with Hungarian Gypsies . Full paper, InSEA European Regional Conference, Rovaniemi, Finland, 2010, kutatási beszámoló, közösen Kárpáti Andreával

*Magyar nyelvű publikációk*

*Referált periodikában megjelent publikációk*

Matematikatanár-képzés, matematikatanár-továbbképzés

1. Népszerű matematikatörténeti témák - az infinitézimálisok, 117-122, Calibra Kiadó, 1993.
2. Fél-mikro tanítás, 33-44, Calibra Kiadó, 1994.
3. Néhány további feladat a "Pöttyös könyv" első fejezetéhez, Az alapl műveletek tanítása, Calibra Kiadó, 113-119. p. 1997.
4. A Bolyai-geometria helye a kerettantervben. In Halmos Mária – Pálfalvi Józsefné (szerk.): Matematikatanár-képzés, matematikatanár-továbbképzés. Budapest, Műszaki Könyvkiadó, 2002.

*Tanulmányok*

Számtani alapl műveletekre épülő, számelméleti jellegű játékok. *Módszertani Lapok, Matematika*, 1. 3-11 p. 1996.

Sok-sok füzet egy tankönyv helyett - matematikatanítás Angliában. *Tandem*, 1997. 3. szám

A nem-euklideszi szemléletmód történeti előzményei. *Műszaki Szemle, EMKTE*, Kolozsvár, 2004., <http://www.emt.ro/kiadvanyok/msz/msz2000/msz27.pdf>

Mérés, mértékegységek, *Módszertani Lapok, Matematika* 1-4. o., 1998. 4. szám

Matematika-történet a tanulási folyamatban, *Informatika*, 2000, 3. évf. 3. szám

A matematikatörténet szerepe a matematika tanításában. *Iskolakultúra*, 2002. 5. sz. 89. p.

A matematikatanulás társadalmi meghatározottsága. *Iskolakultúra*, 2006. 4. sz. 85-92. p.

Zárótanulmány, in A matematikatanítás mestersége – Mestertanárok a matematikatanításról, Gondolat, 2007. (szerk. Gordon Györi - Halmos - Munkácsy - Pálfalvi )

Az ókori térképek és a XXI. századi geometria, *Természet Világa*, 2009. december

*Konferencia kiadványok*

Metodikai újdonságokról egy érettségire felkészítő CD-ROM apropóján, társszerzőkkel, *Tanulmányok az oktatástechnológia köréből*, szerk.: Tompa Klára, Eger, 1997.

A matematika-történet szerepe a matematika tanításában, *Főiskolai Matematika, Fizika és Számítástechnika Oktatók Konferenciája*, Győr, 1997.

Bizonyítások tanítása, geometriák az iskolában, *Főiskolai Matematika, Fizika és Számítástechnika Oktatók Konferenciája*, Budapest, 1998.

A Bolyai geometria szerepe a hátrányos helyzetű gyerekek matematikai nevelésében. *Bolyai Konferencia*, Budapest 2002 MTA,

A matematikatörténet szerepe a tanárképzésben. In Katona András és mtsi (szerk.): *A tanári mesterség gyakorlata*. NTK - ELTE TFK, 2002

A gyakorlati képzés néhány módszertani kérdése a tanárképzésben. In Cseke Péter - Kozma Kis Erzsébet-Edit (szerk.) Minőségi igények és módszertani követelmények a felsőoktatásban, Kolozsvár, 2004, PUC, 91-98. p.

The role of national tradition in the teaching of mathematics, A nemzeti hagyományok szerepe a matematika oktatásában. In Körtesi Péter (Szerk.): History of Mathematics and Teaching of Mathematics. 2005 Az Octogon Mathematical Magazine különszáma.

Előadások az Országos Neveléstudományi Konferenciákon, Budapest

A matematikatörténet szerepe a matematika tanításában és tanulásában, magyarországi tapasztalatok, 2001.

Matematika tanárszakos hallgatók bekapcsolódása az „Innovative Didactics with ICT” holland-magyar kutatási programba, 2002.

A kommunikációs képességek fejlesztése és a PISA 2000 matematikai vizsgálat, 2003.

Az esélyegyenlőség néhány értelmezési lehetősége a matematika tanításában, 2004.

A reflektív tanári gyakorlat elemei hátrányos helyzetű települések kisiskoláiban dolgozó matematikatanárok munkájában, 2006.

A kommunikációs képesség fejlesztése az összevont tanulócsoporthoz iskolában, 2007

#### **Előadások**

A nem matematika szakos felsőfokú oktatás matematika tantervei és a középiskolai matematikatanítás, Rátz László Vándorgyűlés, Felsőoktatási Szekció, Győr, 2002

Laikusok csillagászati ismeretei, A felvilágosodás és a reformkor csillagászata, Tata, 2004

NEMED, az összevont tanulócsoporthoz iskolák hálózata, Előadás a Socrates program keretében, Budapest, 2007

A logika iskolai tanulásának első lépései, Logic, Language, Mathematics; A Philosophy Conference in Memory of Imre

Ruzsa, 2009, Budapest

#### **Recenziók**

Nagy Attila: Többkönyvű oktatás, *Magyar Pedagógia*, 1977.

Kántor Sándorné: Híres matematikatanárok és tanítványok a debreceni iskolákban, *Neveléstörténet*, 2007

#### **Elektronikus publikációk, Cikkek a SuliNet Matematika rovatában**

1. A königsbergi hidak problémája,  
(<http://www.sulinet.hu/tart/cikk/ag/0/20003/1>)
2. Internethasználat a matematika szakos tanárképzésben  
(<http://www.sulinet.hu/tart/cikk/ag/0/20387/1>)
3. Itt is, ott is végtelen - A végtelen az iskolai matematikában  
(<http://www.sulinet.hu/tart/cikk/ag/0/19389/1>)

## Függelék

4. Matematikaórán Indiában (<http://www.sulinet.hu/tart/cikk/ag/0/18722/1>)
5. Matematikatörténeti és Matematikatanítási konferencia (<http://www.sulinet.hu/tart/cikk/ag/0/19843/1>)
6. Olvassuk az Elemeket! (<http://www.sulinet.hu/tart/cikk/ag/0/14854/1>), Módszertani ajánlás a fenti cikkhez, ([http://www.sulinet.hu/matek/munkacsy/munk\\_el/modszer.doc](http://www.sulinet.hu/matek/munkacsy/munk_el/modszer.doc))
7. Orbis Pictus (<http://www.sulinet.hu/tart/cikk/ag/0/16504/1>)
8. ThinkQuest web-lap készítő verseny (<http://www.sulinet.hu/cgi-bin/db2www.cgi/ma/preview/lst.html?iid=20651>)

### *Tankönyv, jegyzet, tankönyvi fejezet*

Gimnáziumi matematika felvételi feladatsorok 6. osztályosoknak. MRO 2000. Budapest, 2006.

Informatikával segített matematikatanulás, esélynövelés. In Kárpáti Andrea (Szerk.): Esélyteremtés az oktatási informatika eszközeivel. Tanári kézikönyv a 12-14 éves korosztály tanításához. NTK. 2006. 88-92 . o.

Fejezetek a Matematikai Kincsestár című tankönyvben, Raabe Könyvkiadó

1. Amikor a számolni tudás szakma volt
2. Internet a tanítási órán
3. Ismerkedés Bolyaival

### *Egyéb publikációk*

Mérjük meg a Föld sugarát! Élet és Tudomány, 2002 június 21.

Angol nyelvű szekció a Varga Tamás Módszertani Napokon. Iskolakultúra, 2003. 12. sz.

Együtt tanulás egy CD ürügyén, Matematika, informatika és könyvtár szakos tanárok, valamint diákok közös fejlesztő tevékenysége, Iskolakultúra, 2003, 4. sz.

### *Szerkesztett mű*

Matematikatörténet és Matematikatanítás, konferencia CD-ROM, Budapest, 2000, ELTE TFK

A matematikatanítás mestersége – Mestertanárok a matematikatanításról, Gondolat, 2007. (szerk. társakkal), ismerteti Staar Gyula, *Természet Világa*, 2008/3, <http://www.termeszetsvilaga.hu/szamok/tv2008/tv0803/matek.html>