

Egyetemi doktori (PhD) értekezés tézisei
A VALÓSZÍNŰSÉGI GONDOLKODÁS SAJÁTÓSSÁGAI

PhD Thesis

PROBABILISTIC THINKING, CHARACTERISTIC FEATURES

Szabóné Szitányi Judit

Témavezető: Dr. Szendrei Julianna



DEBRECENI EGYETEM
Matematika és Számítástudományok Doktori Iskola
Debrecen, 2012

A VALÓSZÍNŰSÉGI GONDOLKODÁS SAJÁTOSSÁGAI

A témaválasztás indoklása

A dolgozat a valószínűségi gondolkodás sajátos elemeit kívánja vizsgálni.

A valószínűség számítása a matematikának egy olyan területe, amelynek gyakorlati haszna közel áll hozzánk, hiszen valószínűséggel kapcsolatos döntéseket – sokszor észrevétlenül is – nap mint nap hozunk. Sőt, a nem determinisztikus eseményekkel kapcsolatos döntések előkészítése a természettudomány, a társadalomtudomány területein is nagy jelentőséget kap.

Amikor egy eseményhez tartozó valószínűséget próbálunk megadni, akkor az többféleképpen történhet:

- Intuitív módon, érzéseinkre hagyatkozva.
- A valószínűség relatív gyakoriságokkal történő megközelítésével.
- A valószínűség elméleti modell segítségével történő kiszámításával.

A dolgozat a háromféle megközelítés sajátos elemeit kívánja feltárni a magyar közoktatás gyakorlatában. A témával azért kezdünk foglalkozni, mert tanítóképző főiskolás hallgatóinkkal dolgozva a valószínűség kiszámításának témaköre más matematikai témaköröknél sokkal több gondot okozott, melynek okait a fogalomalakulás folyamatában éreztük.

Kutatási célok

A kutatás alapvetően azt vizsgálta, hogy a közoktatásban alkalmazott gyakorlat milyen mértékben segíti a valószínűség fogalmának előkészítését és kialakítását. Ennek érdekében a vizsgálódás a következő célokat tűzte ki:

- Feltárni a valószínűség különböző értelmezéseinek sajátos elemeit és ezek eltérését;
- Vizsgálni a valószínűségfogalom fejlődési fázisait;
- Vizsgálni a jelenlegi közoktatási gyakorlat szokásait a valószínűségszámítás tanítása során;
- Képet kapni a valószínűségszámítás tanulásának a valószínűségfogalom értelmezésére gyakorolt hatásáról;
- Bemutatni, hogy a valószínűség fogalma a hétköznapi tapasztalatból eredeztethető és a matematika más területeivel összekapcsolható.

Kutatási módszerek

A kutatási célok elérése érdekében a következő módszereket alkalmaztuk:

- Tanulmányoztuk a valószínűségi gondolkodást érintő pszichológiai és didaktikai elméleteket.
- Áttekintettük és elemeztük a jelenleg érvényben lévő hazai tantervek tankönyvek, és szakmódszertani anyagok a valószínűségszámítás tanítására vonatkozó álláspontját és szemléletét.
- Kérdőíves kikérdezéssel összehasonlító vizsgálatot végeztünk három különböző matematikai előképzettséggel rendelkező csoportban.
- Tanítási órákon megfigyeltük az alkalmazott gondolkodási stratégiák módosulását a valószínűségszámítás tanulásának hatására.

Főbb kutatási kérdések

1. Tapasztalhatók-e eltérések a különböző matematikai előképzettséggel rendelkező csoportok valószínűségi ítéletalkotásában?
2. Aktivizálódnak-e a valószínűségszámítás témakörében megtanult ismeretek valószínűségi ítéletalkotás során?
3. Hat-e a valószínűséggel kapcsolatos elsődleges megérzés matematikai problémamegoldás közben?
4. Hol a helye ennek a témakörnek a magyar matematikatanítási gyakorlatban?

A kutatás hipotézisei

1. A magasabb matematikai előképzettségű csoportok átlagosan jobban teljesítenek a valószínűségi problémák megoldása során.
2. A valószínűségszámítás témakörében megtanult ismeretek a valószínűségi ítéletalkotás során nehezen aktivizálódnak. A valószínűség fogalmánk különböző értelmezései között fellelhető eltérések az ítéletalkotást nagymértékben befolyásolják.
3. Egy esemény valószínűségének becslését a fogalomalkotás minden fázisában befolyásolják szubjektív tényezők is.
4. a) A valószínűségi szemléletfejlesztés időszakában végzett iskolai tevékenységek a valószínűség relatív gyakoriságokkal történő megközelítését segítik. A valószínűség kiszámításának időszakában

végzett feladatok a valószínűség kombinatorikus módon való számítását erősítik.

b) A valószínűség témaköre a matematika más témaköreivel összekapcsolható.

A kutatás témájának tanuláspszichológiai és didaktikai vonatkozásai

A fogalomalkotási folyamat vizsgálatának kiindulópontja Skemp elmélete.

A témakör épülése során az anyanyelvi szóhasználatnak nagy jelentősége van, ezért nem tekinthetünk el a nyelvi vonatkozások vizsgálatától. Vigotszkij álláspontja szerint a gondolkodás és a beszéd egymás közti viszonya nem állandó, a fogalom fejlődése közben minőségi és mennyiségi változások történnek. Fontos részét képezi a dolgozatnak a valószínűségi ítéletalkotások során történő nyelvhasznált vizsgálata.

A valószínűség fogalma a hétköznapi tapasztalattól ered. Vigotszkij kutatásaihoz kapcsolódva tudjuk, hogy a hétköznapi szóhasználat függ a fogalmat használó egyéntől és a fogalom jellegétől.

Az elsődleges megérzés, az intuíció fogalma alapvető jelentőségű a téma feltárásához. Az intuíció értelmezéséi közül kutatásunkban Fischbein tanuláseméleti meghatározására támaszkodtunk.

Bruner reprezentációs elméletének konklúziója szerint a matematika tanításának olyan alapelvekre kell épülnie, amelyek feltárják a valóság és a matematika kapcsolatát. Ezt Paivio duál kód elmélete tovább finomítja, mely szerint a megismerés verbális és vizuális síkja külön utakon járnak. Az egymástól eltérő képi és verbális fogalomképzetek a fogalomalkítás folyamata során potenciális konfliktusfaktort jelentenek. Ilyen konfliktusok keletkezhetnek a valószínűséggel kapcsolatos fogalmak alakulásakor is.

Az analógiás gondolkodás fejlesztése kiemelt területe a matematika tanításának. Az analógia meghatározásában Vásárhelyi Éva kutatásaira támaszkodtunk. A valószínűség témakörében igen nehéz észrevenni, ha egy probléma rokonságban áll egy már megoldottal, és sok úgynevezett valószínűségi paradoxon is hamis analógián alapul.

Magyarországon az 1978-as tanterv érvénybe lépése után kezdődött meg a valószínűségszámítás tanítása a közoktatásban, mely az alsóbb évfolyamokon a valószínűség fogalmának tapasztalati alapozását célozta meg. Nagy különbség van a valószínűségi *szemlélet fejlesztése*, és a

valószínűség *számítása* között. A valószínűségi szemléletfejlesztéssel foglalkozó nemzetközi irodalom kiindulópontja Piaget és Fischbein munkássága volt. Kettőjük álláspontja sok tekintetben egyezett, de szemléletükben eltérések is megfigyelhetők. Az esély megjelenését illetően Fischbein szakít Piaget fejlődéslélektani besorolásával, melyet később más kutatók is alátámasztanak. Kutatásunk egyik alapvető irodalma Fischbein „The Intuitive Sources of Probabilistic Thinking in Children” című könyve. Fischbein munkássága a matematika didaktikára ezen belül a valószínűségszámítás tanítására alapvető hatással volt. Bemutatta, hogy a valószínűségi tevékenységek szoros kapcsolatot mutatnak a természettudományos gondolkodás fejlődésére, valamint a matematika más területeit is érintik. Ezzel igazolja a valószínűségi tevékenységek komplex voltát, és javaslatot tesz arra, hogy ezek a tantervekben is megjelenjenek. Kutatásunk szempontjából fontos eredménye annak igazolása, hogy az oktatásban alkalmazott jó eljárások segítenek megérteni a sztochasztikus folyamatok dinamizmusát. Egyetértünk azon következtetésével, hogy az oktatásban szükség van a tapasztalatszerző tevékenységekre.

A valószínűség fogalmának matematikai megközelítései és ezek hatása az oktatásra

A valószínűség mint tudományos fogalom tanítása és események valószínűségének kiszámítása alapvetően kétféle módon történik az oktatásban.

- A valószínűség statisztikai (relatív gyakoriságokkal történő) értelmezése:

Konkrét kísérletekhez kapcsolódva a tanulók megfigyelik a relatív gyakoriságok „stabilizálódását” Ebben a megközelítésben később bizonyítható matematikai tételeket előlegezünk meg, valószínűség helyett a kívánt pontosságú relatív gyakoriságot használjuk.

- A valószínűség axiomatikus felépítése a Kolmogorov–féle axiómarendszerben:

Az adott problémához elméleti modellt állítunk, amelynek segítségével meghatározhatók a kívánt valószínűségek. A tanítás gyakorlatában célszerű egy-egy probléma elméleti modelljének érvényességét statisztikai szimuláció eredményeként kapott értékekkel ellenőrizni.

A magyar közoktatás gyakorlatában a valószínűséggel kapcsolatban mindig tárgyalják a relatív gyakoriság fogalmát. A tárgyalás során a tanítványoktól azt kéri, hogy a valószínűségre, mint egy rögzített számra gondoljanak. Ugyanakkor a relatív gyakoriság a véletlentől függ. Azt gondoljuk, hogy igen nehéz e kettősségnek a fogalmi kezelése. Ez lehet a témakör tárgyalásának egyik fontos sajátossága.

A magyar közoktatás dokumentumainak vizsgálata

A NAT a matematika műveltségterület tanításának alapelvei között hangsúlyozza, hogy a matematika különböző témaköreinek szerves összeépülésével kívánja feltárni a matematika és a matematikai gondolkodás világát.

Ehhez igazodva a kerettantervek az általános célok meghatározásakor minden esetben említést tesznek a valószínűségi gondolkodás fejlesztésének lehetőségéről a matematika más területein, ez viszont a részletes kidolgozás során csak kevés esetben jelenik meg. A kerettantervek nem egyformák a valószínűség-statisztika témaköréhez tartozó fejlesztési feladatok megfogalmazásában, és a valószínűség-statisztika témaköréhez ajánlott óraszámok meghatározásában.

A tankönyvek elemzése azt mutatja, hogy a valószínűségi szemlélet fejlesztését szolgáló tevékenységek az alsó tagozaton a tanév végére kerülnek, ráadásul a tankönyvekben nem, vagy csak elenyésző mértékben jelennek meg valószínűségi problémák a matematika más témaköreiben. Ez a tény a téma céltudatos épülését megkérdőjelezi.

A valószínűségi szemléletfejlesztést szolgáló tevékenységek döntő többsége klasszikus valószínűségi mezővel írható le. A valószínűség relatív gyakoriságokkal való értelmezése hangsúlyos. A valószínűség számítására vonatkozó feladatok döntő többsége kombinatorikus megfontolásokkal oldható meg. Kevés tankönyv foglalkozik azzal, hogy egy probléma valószínűségét többféle módon határozza meg és ezzel segítse a modellválasztás tanulását.

Vizsgálat bemutatása

A vizsgálat előzményei: Az 1970-es évek végén és 80-as évek elején Angliában David Green vizsgálta kérdőívvel 11-16 éves diákok

valószínűségi gondolkodását. Az 1989/90-es tanévben három ország – Brazília, Magyarország és Quebec (Kanada) – részvételével zajlott a SIMULO projekt, melyben 10-14 éves gyerekek valószínűségi gondolkodását vizsgálták. Ezen kutatások elméleti eredményeit, és tesztkérdéseinek egy részét felhasználtuk vizsgálatunkhoz.

A vizsgálat során a következő kvalitatív és kvantitatív módszereket használtuk:

- Kérdőíves felmérés és a kérdőívek elemzése
- Tanítási órák tartása illetve megfigyelése az ELTE Tanítóképző Karán
- Tanítási órák megfigyelése 3., 4., 5. osztályban

Kérdőíves vizsgálatunkban három különböző populáció valószínűségi gondolkodását figyeltük meg:

- az ELTE-TÓFK 178 hallgatója. (Ez csoport reprezentálja, a valószínűségszámítást már tanult, de nem matematikai, természettudományos érdeklődésű populációt)
- az ELTE-TTK 139 hallgatója. (Ebben a populációban magasabb matematikai előképzettség illetve természettudományos érdeklődés feltételezhető.)
- 66 általános iskolai tanuló (10-13 év) (Ez a populáció még nem tanult valószínűségszámítást)

A tapasztalatok bemutatását az alábbi résztemakörök köré csoportosítva végeztük:

- A nyelvhasználat szerepe
- A valószínűség becslése és számítása
- A kérdésfeltevés módjának jelentősége
- Érzelmi tényezők
- A tudás aktivizálhatósága

A vizsgálat legfontosabb tapasztalatai a következők:

Az esély számokkal történő kifejezésre való hajlandóság függ az előképzettségtől. Az esély kifejezése alapvetően százalékos formában történik. Különösen igaz ez szubjektív ítéletalkotások során. A matematika tanulása során rengeteg olyan kifejezést használunk, amely mást jelent a hétköznapi szóhasználatban, mint a szaknyelvben. Ez a probléma a valószínűség témakörében fokozottan jelen van.

A valószínűség jó meghatározása függ a tanultságtól. Minél képzetlenebb valaki matematikából, annál sikeresebben oldja meg a feladatokat. Igen sok valószínűségi probléma megoldásának fontos összetevője az arány fogalma.

Az analógiás gondolkodás a matematika tanulásának és értésének fontos része. A valószínűség témakörében az analógiák alkalmazásával óvatosan kell bánni.

A valószínűségszámítás tanulása során rengeteg olyan kérdés vetődhet fel, mely többféleképpen értelmezhető. A válaszadáshoz legjobban illeszkedő modell kiválasztása csak akkor lehet sikeres, ha a diákok ebben segítséget kapnak. A modellválasztás sokkal jobban függ a kérdésfeltevés módjától, mint a matematikai képzettségtől. A kérdés feltevésének módja nagymértékben befolyásolja a tanulók gondolkodási stratégiáját.

A valószínűség témakörében az érzelmi tényezők egyetlen vizsgálati csoportban sem elhanyagolhatóak. A hiedelmek befolyásolják, vagy gátolják az esély ismert elméleti modell alapján történő meghatározását. Az érzelmi befolyásoltság a matematika és a valószínűségszámítás tanulásának hatására csökken. A kérdőíves és az órai tapasztalatok összevetése azt mutatja, hogy az érzelmi tényezők valóságos problémahelyzetben sokkal erősebbek, mint a tanfeladatok megoldásakor. Az érzelmi tényezők hatása az egyik oka annak, hogy a valószínűségszámításban megszerzett ismeretek tevékenységben nehezen aktivizálódnak.

A kutatás eredményei a hipotézisek tükrében

- 1. A magasabb matematikai előképzettségű csoportok átlagosan jobban teljesítenek a valószínűségi problémák megoldása során.*

A három különböző matematikai előképzettségű vizsgálati csoport teljesítményének összehasonlítása a következő eredményt hozta:

Átlagosan a legmagasabb teljesítményt az ELTE – TTK hallgatói nyújtották. Ezt követte az ELTE – TÓK hallgatók csoportjának átlagos teljesítménye, a legalacsonyabb teljesítményt nyújtott az általános iskolások csoportja, akik valószínűségszámítást még nem tanultak.

Az összteljesítményt tekintve a három csoport szignifikánsan elkülönül, ugyanakkor az egyes kérdésekre adott válaszok sok esetben nem különböznek el a három vizsgálati csoportot.

Ennek alapján az 1. hipotézisünket nem vetjük el.

2. *A valószínűségszámítás témakörében megtanult ismeretek a valószínűségi ítéletalkotás során nehezen aktivizálódnak. A valószínűség fogalmánk különböző értelmezései között fellelhető eltérések az ítéletalkotást nagymértékben befolyásolják.*

A vizsgálat eredményeinek tükrében a 2. hipotézis sem vehető el.

A kérdőíves vizsgálat, és az órai tapasztalatok alapján kimondhatjuk, hogy a matematika és a valószínűségszámítás tanulása során megszerzett tudás nehezen aktivizálódik a valószínűségi ítéletalkotások során.

Az események valószínűségének becslésére háromféle gondolkodási stratégiát alkalmaztak:

- Intuitív módon, érzésekre hagyatkozva.
- A valószínűség relatív gyakoriságokkal történő megközelítésével.
- A valószínűség valamilyen elméleti értékének kiszámításával.

Úgy találtuk, hogy a kérdéshez legjobban illeszkedő stratégia kiválasztása a valószínűségi gondolkodás kulcskérdése. A kérdőíves és órai tapasztalatok azt mutatják, hogy a stratégiaválasztást mindhárom vizsgálati csoportban befolyásolják a nyelvi tényezők, a kérdésfeltevés módja, a valószínűségszámítás és a matematika más területein megszerzett ismeretek, valamint az érzelmi tényezők.

A valószínűségi ítéletalkotások során a nyelvhasználat szerepe döntő jelentőséggel bír. Egyrészt a valószínűség kifejezésének módjából következtethetünk a válaszoló gondolkodásmódjára. Másrészt a matematikai szaknyelv és a hétköznapi szóhasználat között meglévő eltérés a tudás aktivizálásának gátját jelentheti.

A valószínűség témakörében az érzelmi tényezők nem elhanyagolhatóak. A hiedelmek befolyásolják, vagy gátolják az esély ismert elméleti modell alapján történő becslését. Az érzelmi befolyásoltság a matematika és a valószínűségszámítás tanulásának hatására csökken. Az érzelmi tényezők valóságos problémahelyzetben erősebbek, mint a tanfeladatok megoldásakor. Az érzelmi tényezők hatása az egyik oka annak, hogy a valószínűségszámításban megszerzett ismeretek tevékenységben nehezen aktivizálódnak.

3. *Egy esemény valószínűségének becslését a fogalomalkotás minden fázisában befolyásolják szubjektív tényezők is.*

Fischbein kutatásai igazolták, hogy létezik elsődleges intuíció a valószínűségről. Az intuíciók a matematika tanítása során mindvégig jelen vannak. A kérdőíves és az órai vizsgálat azt mutatta meg, hogy a valószínűséggel kapcsolatos megérzés gyakran ellentétes a mérhető, kiszámolható valószínűséggel. A döntésemélet más kutatásai is ezt a feltevést támasztják alá (Kapadia – Borovcnik 1991).

A kérdőíves vizsgálat során az is kiderült, hogy az elsődleges megérzés olyan erősen hat a valószínűségi problémamegoldásra, hogy helyenként a matematikából megszerzett tudást is elfedi.

Igazoltuk, hogy egy esemény valószínűségének becslését a fogalomalkotás minden fázisában befolyásolják szubjektív tényezők is. Tehát a harmadik hipotézis sem vethető el.

4. a) *A valószínűségi szemléletfejlesztés időszakában végzett iskolai tevékenységek a valószínűség relatív gyakoriságokkal történő megközelítését segítik. A valószínűség kiszámításának időszakában végzett feladatok a valószínűség kombinatorikus módon való számítását erősítik.*

Mind a tantervi, mind a tankönyvi dokumentumok elemzése alátámasztják ezt a hipotézist: A valószínűségi szemléletfejlesztés időszakában végzett iskolai tevékenységek a valószínűség relatív gyakoriságokkal történő megközelítését segítik, emellett a tankönyvekben megjelennek a valószínűség kombinatorikus módon való számolására szolgáló feladatok. A valószínűség kiszámításának időszakában végzett feladatok tovább erősítik a valószínűség kombinatorikus módon való számítását. A tankönyvekben megjelenő problémák döntő többsége a klasszikus valószínűségi modellel oldható meg.

A dokumentumelemzések azt is megmutatták, hogy a közoktatás gyakorlata keveset foglalkozik a modellválasztás kérdésével. Ha a kérdőíves vizsgálat és az órai megfigyelés tapasztalatait összevetjük a dokumentumelemzés eredményével, azt a következtetést vonhatjuk le, hogy a valószínűségszámítás eredményes tanításának alapvető kérdése a valószínűség megadásához választható modellek ismerete és ezek eltéréseinek tudatosítása.

4. b) *A valószínűség témaköre a matematika más témaköreivel összekapcsolható.*

A kerettantervek az általános célok meghatározásakor minden esetben említést tesznek a valószínűségi gondolkodás fejlesztésének lehetőségéről a matematika más területein, ez viszont a részletes kidolgozás során csak kevés esetben jelenik meg. A tankönyvekben nem, vagy csak elenyésző mértékben jelennek meg valószínűségi problémák a matematika más témaköreiben. A dolgozat példát mutatott a valószínűség témakörének a matematika más témaköreivel történő összekapcsolására, ezáltal egzisztenciális kijelentésünk igaz.

Kitekintés:

A dolgozatban bemutatott korábbi kutatások (Green kutatásai és a SIMULO kutatás) a valószínűségi gondolkodás négy szintjét állapították meg. További kutatások szükségesek annak vizsgálatához, hogy a szintek megállapítása akkor milyen módon történt. Amennyiben ez lehetséges, érdemes lenne különböző matematikai előképzettségű vizsgálati csoportok valószínűségi gondolkodásának Green-féle szintjeit meghatározni.

Kutatásunk 4. kérdése adott válasz tulajdonképpen a jelenlegi magyar közoktatási gyakorlatban lévő hiányokra hívja fel a figyelmet. Ezért utat jelöl fejlesztő kutatások számára. Szükség van arra, hogy kidolgozzanak és a gyakorlatban kipróbáljanak olyan tanítási anyagokat,

- a) amelyek a valószínűségi problémák statisztikai megoldása vezet célhoz;
- b) amelyek egyszerre fejlesztik a valószínűségi gondolkodást és megvalósíthatnak a matematika egy másik területén való fejlesztést. E mellett szükség van annak hangsúlyozására, hogy a valószínűségi szemléletfejlesztés során végzett tevékenységek a matematika más területeit is érintik.

PROBABILISTIC THINKING, CHARACTERISTIC FEATURES

Reasons for the choice of thesis topic

The dissertation intends to examine the particular elements of probabilistic thinking. Calculation of probability is an area of mathematics with the most obvious practical utility because making decisions connected to probability is – sometimes imperceptibly – part of our daily routine. Moreover preparation of decisions connected to nondeterministic events is emphasized both in the fields of natural and social science.

Assigning probability to an event could happen in several manners:

- Intuitively, relying on feelings.
- By approach probability with relative frequency.
- By calculation of the theoretical value of the probability.

The dissertation aims to reveal the particular elements of these three approaches in the practice of Hungarian education. We started to investigate the topic because while we were working with our students in training school we had to realize that calculation of probability looks much more difficult for them than other areas in mathematics. We thought that the root cause of the problem is in the process of concept formation.

Aims of research

This research examines in what capacity the practice applied in the education eases the preparation and formation of the concept of probability. For this purpose the objectives of this research are as follow:

- To explore the particular elements of the different approaches of probability and the differences between them;
- To investigate the development stages of the concept of probability;
- To investigate the habits of the current practice of public education in teaching probability theory;
- To get an impression of the effect of the way of learning probability theory on the interpretation of probability;
- To demonstrate that the concept of probability can be derived from everyday experiences and connected with other fields of mathematics.

Methods of research

To reach the research objectives we applied the following methods:

- We studied the psychological and didactic theories concern to probability thinking.
- We reviewed and analyzed the attitude concerning to the education of probability of national curriculums, textbooks and methodological sources currently in force.
- We performed a comparative study by questionnaires on three groups with different pre-qualification of mathematics.
- During lessons we observed the modifications of applied thinking strategies induced by learning probability theory.

Major research questions

1. Are there differences in probability decisions of groups of people having different level of mathematical grounding?
2. Is the learnt knowledge activated during probability decisions?
3. Has the primary intuition related to the probability influence on mathematical problem solving?
4. How can this subject be positioned in the practice of Hungarian teaching mathematics?

Hypotheses

1. Groups having higher level of mathematical grounding perform better in average in probability problem solving.
2. The knowledge gained in studying probability is going to be activated during decision making hardly. The differences among the interpretations of probability influence the decisions substantially.
3. Subjective factors also have influence on the estimation of the probability of an event in each and every phase of concept formation.
4. a) The exercises completed in lessons during the period of the development of probability approach help the approximation of probability by relative frequency. The exercises during the calculation of probability enhance the combinatorial manners.

- b) The probability topics can be linked to other areas of mathematics.

Psychological and didactic aspects of the research topic

The starting point of the investigation of the conceptualization process is Skemp's theory.

Native language vocabulary has a great importance in building the topic, thus the investigation of the linguistic aspects is indispensable. According to the theory of Vigotszkij the relation between thinking and talking is not constant, during the development of the concept qualitative and quantitative changes occur. Investigation of the language usage in probability judgments is an important part of the dissertation.

The concept of probability comes from everyday experiences. Connected to the research of Vigotszkij we know that accustomed vocabulary depends on the person using the concept and the type of the concept.

The concept of primary impression, intuition has a fundamental importance to explore the topic. Among the interpretations of intuition we rely on Fischbein's learning theory definition in our research.

According to the conclusion of Bruner's representation theory the mathematics education has to be based on principles that unfold the relation of the reality and mathematics. This is further refined by Paivio dual code theory that assumes the verbal and the visual dimension of cognition develops separately. The visual and verbal concept images differing from each other are conflict factors during the process of concept development. Such conflict could arise during concept development as well.

The development of analogical thinking is a highlighted area of mathematics education. We rely on the research of Éva Vásárhelyi in the definition of analogy. It's difficult to notice in the topic of probability if a problem is related to one that is already solved and so many paradoxes in probability are based on false analogy.

In Hungary the instruction of probability theory in public education started after the curriculum of 1978 came into force, which aimed the empirical foundation of the concept of probability. There is a great difference between *development of probability approach* and *calculation of probability*. The starting point of the international literature on perspective

development of probability was the work of Piaget and Fischbein. Their point of view was the same in many aspects but differences can also be found in their attitude. Regarding the presence of chance Fischbein distanced himself of the developmental psychological classification of Piaget that was confirmed by other researchers later. One of the main literary base of our research is Fischbein's book entitled „The Intuitive Sources of Probabilistic Thinking in Children”. The work of Fischbein had a major influence on mathematics didactics, especially on teaching probability theory. He showed that probabilistic activities are closely related to the development of scientific thinking and they affect other areas of mathematics. By this he proved the complexity of probabilistic activities and he proposed them to appear in the curriculums. The proof that the appropriate methods applied in education aid the understanding of dynamism of stochastic processes is an important result of his regarding our research. We agree on his conclusion that experiencing activities are necessary in education.

Mathematical approaches of the probability conception and their influence to the education

The scientific concept and the calculation of probability of events can be taught basically in two different ways in public education.

- Statistical interpretation of probability (by relative frequencies):

The students observe the stabilization of relative frequency in related concrete experiments. Mathematical theses are advanced in this approach, which can be proven later. The relative frequency with the desired precision is used instead of probability.

- The axiomatic construction of probability in Kolmogorov's axiom system:

A theoretical model is established for the given problem in order to determine the desired probability. In teaching practice, it is expedient to verify the validity of a theoretical model associated to one or another problem with a value gained as result of a statistical simulation.

The term of relative frequency always discussed along with the concept of probability in the practice of Hungarian education. During this discussion, the students are asked to think of the probability as a fixed number. At the same time the value of the relative frequency randomly changes. We think

that handling of this duality is very difficult. It could be an important flavor in the discussion of the topic.

Investigation of the documents of Hungarian education

The „NAT” emphasizes in the principles of mathematics teaching that it aims to explore the world of mathematics and mathematical thinking by integral linking of different topics of mathematics.

In line with this the curriculum frameworks always mention the possibility of development of probabilistic thinking in other areas of mathematics when defining general objectives, however it appears in the detailed elaboration in only a few cases. The curriculum frameworks are different in wording tasks belonging with the topic probability-statistics and also in determination the number of hours recommended for the topic.

Analyzing textbooks shows that activities for development of probabilistic perspective remain to the end of the school year in primary school, in addition problems related to probability do not or only slightly appear in other topics of mathematics in textbooks. This fact raises doubts if the topic is constructed single-minded.

The vast majority of activities for development probabilistic perspective can be described by the classical probabilistic field. The interpretation of probability by relative frequency is emphasized. Most of the tasks concern to calculating probability can be solved by combinatorial methods. The starting point of defining probability is the empirical law of large numbers. Only a few textbooks deal with approximating the probability of a problem in different manners to help learning the selection of a model this way.

Demonstration of the investigation

Antecedents of the investigation: In the late 1970s and early 80s David Green examined the probabilistic thinking of 11-16 years old students by questionnaire in England. In the school year 1989/90 three countries – Brazil, Hungary and Quebec (Canada) – participated in SIMULO project that investigated the probabilistic thinking of 10-14 years old children. Theoretical results of these researches and parts of their questionnaires were used in our investigation.

The following qualitative and quantitative methods were used during the investigation:

- Questionnaire survey and analysis of questionnaires
- Keeping and observing lessons at the Faculty of Primary and Pre-School Education of ELTE
- Observing lessons in 2. 3. 5. grade

In our questionnaires we observed the probabilistic thinking of three groups:

- 178 students of the Faculty of Elementary Teacher Training of ELTE (They represent the population that has already learnt probability, but has no interest in mathematics and natural sciences.)
- 139 students of the Faculty of Science ELTE (Higher level of mathematical grounding and interest in natural sciences can be assumed in this population.)
- 66 elementary school students (10-13 years old) (This population has never learnt probability.)

The presentation of the experiences will be grouped around the following sub-topics:

- The role of language
- Estimation and calculation of probability
- The importance of the way of questioning
- Emotional factors
- Activitability of knowledge

The examination has been completed by presenting activities observed on lessons, which activities show the relationship of probability to other mathematical areas.

The most important experiences are the following:

Willingness to express chance by numbers depends on the pre-qualification. The chance is usually expressed by percentage, especially when the judgment is subjective. When learning mathematics we use a lot of expressions that has different meaning in everyday vocabulary then in mathematical terminology. This problem is strongly present in the topic of probability.

The good definition of probability in depends on erudition. The more mathematically educated a person is better in solving the tasks. The concept

of rate is an important component of solving many probability related problems.

Analogical thinking is an important part of learning and understanding mathematics. In the topic of probability analogies have to be applied carefully.

During learning probability a lot of questions that can be interpreted in different ways occur. The selection of the model best suited to the question can only be successful if the students are helped in this. The model selection is more dependent on the questioning then on the mathematical qualification. The way of questioning highly influences the thinking strategy of the students.

In the topic of probability the emotional factors cannot be neglected in any of the test groups. Beliefs can influence or inhibit the definition of chance by known theoretical models. Emotional influence is reduced as the result of learning mathematics and probability. Comparison of questionnaires and experiences of lessons shows that the emotional factors are much stronger in real problem situations then in solving school tasks. The influence of emotional factors is one reason why the knowledge acquired in probability theory is difficult to apply in activities.

The results of research according to the hypotheses

- 1. Groups having higher level of mathematical grounding perform better in average in probability problem solving.*

The comparison of the performance of three groups having different mathematical grounding is the following:

Students of ELTE-TTK gained the highest performance on the average. Students of ELTE-TOK gained the second average result. Students of 5th and 6th classes of primary school reached the third position in the competition.

Regarding to the overall results, the three groups are significantly different. On the other hand, the three groups cannot be differentiated based on the answers given to one or another individual question. Based on this we do not rule our first hypothesis out.

- 2. The knowledge gained in studying probability is going to be activated during decision making hardly. The differences among the interpretations of probability influence the decisions substantially.*

The second hypothesis cannot be ruled out according to our examination.

Based on our questionnaire and experiences on lessons we can state that the knowledge gained during studying mathematics and probability is hardly activated during making probability decisions.

Three different thinking strategies had been applied to estimate the probability of events:

- Intuitive manner relying on feelings
- Approximation by relative frequency
- Calculation some sort of theoretical value of probability

We found that the key point of probability thinking is the selection of the appropriate strategy the best fitting to the question.

Based on our experiences, the selection of the strategy is influenced by linguistic factors, the manner how the question is asked, the knowledge about probability and other mathematical areas and emotional factors as well in all three groups.

The used terminology has crucial significance in probability decisions. On one hand, we can judge the way of thinking based on the manner how the probability is expressed. On the other hand, the differences between the mathematical terminology and the ordinary usage of the language could prevent the activation of the gained knowledge.

The emotional factors cannot be neglected in topics of probability. Beliefs influence or prevent the estimation of chance based on a learnt theoretical model. The influence of emotional factors reduces by learning mathematics and probability. These factors are much stronger in real life scenarios than during solving exercises. The influence of emotional factors is one of the reasons why the gained knowledge about probability can hardly be activated.

- 3. Subjective factors also have influence on the estimation of the probability of an event in each and every phase of concept formation.*

Fischbein verified that primary intuition about the probability exists. The intuitions continuously present in teaching mathematics. The questionnaire and the lesson observations indicated that anticipation related

to the probability quite often contradicts to the measured and counted probability. The results of theory of decision confirm this assumption.

The evaluation of the questionnaire indicated that the primary anticipation so strongly influences the probability problem solving that sometimes it obscures the gained mathematical knowledge.

We proved that the estimation of the probability of an event is influenced by subjective factors in each phase of concept formation. So, the third hypothesis cannot be ruled out.

4. a) *The exercises completed in lessons during the period of the development of probability approach help the approximation of probability by relative frequency. The exercises during the calculation of probability enhance the combinatorial manners.*

This hypothesis was proven by the analysis of curriculum of studies and schoolbooks. The schoolwork in the period of development of probability approach helps the approximation of probability by relative frequency. Besides that the exercises for combinatorial manner of calculating the probability also appear in schoolbooks. In the period of calculating probability, the exercises enhance the combinatorial manner. Most of the exercises appearing in the schoolbooks can be solved by the classic probability model.

The document evaluations also indicated that the questions around the model selection hardly appear in practice of education. If we compare the experiences of the questionnaire and observation of lessons to the result of document analysis we can conclude that knowledge about the selectable models for solving probability problems and bringing the differences among them to students' consciousness are the fundamental questions to teach probability successfully.

- b) *The probability topics can be linked to other areas of mathematics.*

The curriculums of studies always mention the possibilities of developing probability thinking within other areas of mathematics. On the hand it rarely appears in the elaborated plans. Probability problems of other mathematical areas do not or rarely appear in the schoolbooks. This document exhibits example of linking topics of probability to other areas of mathematics. This example proves our hypothesis.

Perspectives

Researches exhibited in this paper – Green’s researches and the Simulo program – determined four levels of probability thinking. Further researches are needed to investigate how these levels were determined. If it was possible, it would be worth to determine the Green-levels of probability thinking for groups having different levels of mathematical grounding.

The answer to the fourth question of our research draws the attention to the lacks in the current practice in Hungarian public education. Therefore it shows the direction of the new researches.

It is necessary to elaborate and try in practice such teaching materials that

- a. show statistical manners of solving probability problems;
- b. develop probability thinking and other areas of mathematics at the same time. It is also necessary to emphasize that activities performed during development of probability approach also influences other topics of mathematics.

IRODALOM

1. Ambrus András (1995): *Bevezetés a matematikadidaktikába*, Eötvös Kiadó, Budapest
2. Bán Sándor (1998): *Gondolkodás a bizonytalanról: Valószínűségi és korrelatív gondolkodás* In: Csapó Benő (szerk.) (1998): *Az iskolai tudás*, Osiris Kiadó, Budapest
3. Bognár Jánosné – Nemetz Tibor – Tusnády Gábor (1980): *Ismerkedés a véletlennel*, Tankönyvkiadó, Budapest
4. Bryant, P. – Nunes, T (2012): *Children's understanding of probability*, University of Oxford, www.nuffieldfoundation.org (2012.10.12.)
5. Engel, A. –Varga, T. –Walser W. (1972): *Hasard ou stratégie?* O.C.D.L., Paris
6. Falus Iván – Ollé János (2000): *Statisztikai módszerek pedagógusok számára*, OKKER Kiadó
7. Fazekas István (2009): *Valószínűségszámítás*, Debreceni Egyetemi Kiadó, Debrecen
8. Fazekas, István– Tómacs, Tibor (1996): *A valószínűségszámítás szemléletes oktatásáról*, A matematika tanítása, 1996. szeptember (8 – 11)
9. Feller, W. (1978): *Bevezetés a valószínűségszámításba és alkalmazásaiba*, Műszaki Könyvkiadó, Budapest,
10. Fischbein, E. – Gazit, A. (1984): *Does the teaching of probability improve probabilistic intuitions?* Educational Studies in Mathematics, 15., (p. 1-24.)
11. Fischbein, E. – Pampu, I. - Manzat, I. (1970): *Effects of age and instruction on combinatory ability in children*, British Journal of Educational Psychology (p.261–270)
12. Fischbein, E. (1975): *The Intuitive Sources of Probabilistic Thinking in Children*, D. Reidel Publishing Company, Boston
13. Freudenthal, H. (1970): *The aims of teaching probability*, In: Lennart Råde: *The teaching of probability and statistics*, proceedings of the first CSMP international conference, Almqvist and Wiksell, Uppsala
14. Freudenthal, H. (1991): *Revisiting mathematics education*, Kluwer, Dordrecht

15. Green, D.R. (1982): *Probability concept ian 11-16 year old pupils*, Report of reasarch sponsored by the Social Science Researc Council 1978-1981, University of Technology, Loughborough, England
16. Greer, B. (2001): *Understanding probabilistic thinking: The legacy of Efraim Fischbein*, Educational Studies in Mathematics, 45. (p. 15–33)
17. Hajós György (1971): *Bevezetés a geometriába*, Tankönyvkiadó, Budapest
18. Hawkins, A. S. – Kapadia, R. (1984):. *Children's conceptions of probability. – A psychological and pedagogical review*, Educational Studies in Mathematics, 1984. 15.
19. Izard, John (1991): *Patterns of Development with probability concepts*, Australian Councilé for Educational Researc, Australia
20. Juhász Márta – Takács Ildikó (2006): *Pszichológia*, Typotex Kiadó, Budapest
21. Kahneman, D. – Tversky A. (2002): *Belief in the law of small numbers. In Judgment under uncertainty. Heuristics and biases*, Cambridge University Press., Cambridge
22. Kalmár László (1986): *Integrállevél*, Gondolat Kiadó, Budapest
23. Kapadia, R. – Borovcnik, M. (1991): *Chance and encounter: Probability in Education*, Kluwer, Dordecht
24. Lovász László (2000): *Véletlen és álvéletlen*, Természet világa, Informatika különszám
25. Mérő László (2010): *Az érzelmek logikája*, Tericum Könyvkiadó, Budapest
26. Nagy Lászlóné (2000): *Analógiák és az analogikus gondolkodás a kognitív tudományok eredményeinek tükrében*, Magyar Pedagógia, 100. 3. sz. 275-302.
27. Nemetz Tibor – Wintsche Gergely (1998): *Valószínűségszámítás*, Typotex Kiadó, Budapest
28. Nemetz Tibor – Wintsche Gergely (1999): *Valószínűségszámítás és statisztika mindenkinek*, Polygon Kiadó, Szeged
29. Nemzeti Alaptanterv, 2007., OM
30. Paivio, A. (2006): *Dual coding theory and education. Draft chapter for the conference on "Pathways to Literacy Achievement for High Poverty Children"*, University of Michigan School of Education
31. Pálfalvi Józsefné (2000): *Matematika didaktikusan*, Typotex Kiadó, Budapest

32. Piaget, J. – Inhelder, B. (1999): *Gyermeklélektan*, Osiris Kiadó, Budapest
33. Piaget, J. – Inhelder, B. (1975): *The Origin of the Idea of Chance in Children*, Routledge and Kegan Paul, London
34. Pinkler, S. (1994): *A nyelvi ösztön*, Typotex Kiadó, Budapest
35. Pólya György (1989): *Plauzibilis következtetés*, Gondolat Kiadó, Budapest
36. Pólya, G. (1945) *How to solve it? A new aspect of mathematical method*, Princeton University
37. Rényi Alfréd (1967): *Levelek a valószínűségről*, Akadémiai Kiadó, Budapest
38. Rényi Alfréd (1981): *Valószínűesszámitás*, Tankönyvkiadó, Budapest.
39. Rényi Alfréd (1970): *Remarks on the teaching of probability*, In: Lennart Råde: *The teaching of probability and statistics*, proceedings of the first CSMP international conference, Almqvist and Wiksell, Uppsala
40. Schoenfeld, A. H. (Ed.) (1994). *Mathematical thinking and problem solving*, Hillsdale, NJ: Erlbaum.
41. Skemp R. R. (1975): *A matematikatanulás pszichológiája*, Gondolat Kiadó, Budapest
42. Székely J, Gábor (1982), *Paradoxonok a véletlen matematikájában*, Műszaki Könyvkiadó, Budapest
43. Szendrei Julianna – Szitányi Judit (2007): *Intereses y sentimientos ¿ Qué dificultades tiene el desarrollo de la mentalización hacia las probabilidades en la escuela primaria?*, Uno, Revista de Didáctica de las Matemáticas, Probabilidades, 31-46. Barcelona
44. Szendrei Julianna (2005): *Gondolod, hogy egyre megy? Dialógusok a matematikatanításról tanároknak, szülőknak és érdeklődőknek*, Typotex Kiadó, Budapest.
45. Takács Lajos – Ziermann Margit (1972): *Valószínűesszámitás*, Középisikolai szakköri füzetek, Tankönyvkiadó, Budapest
46. Vancsó Ödön – Szitányi Judit: (2005): *Mérés, mértékváltás, mennyiségi és valószínűségi következtetések*; tanulmány, SuliNova Közoktatás-fejlesztési és Pedagógus-továbbképzési Kht., Budapest.
47. Varga Tamás (1971): *Nemzetközi matematikaoktatási tanfolyam Budapesten*, Kapcsolat 1971 júliusi száma, OPI, Budapest
48. Varga Tamás (1973): *A valószínűesszámitás tanítása*, Kapcsolat 1973 májusi száma, OPI, Budapest

49. Varga Tamás (1981): *On Probability*, Southern Illinois University at Edwardsville
50. Vásárhelyi Éva (2006): *Problem solving with the help of different representations*. In: Learning in Europe, Jena.
51. Vásárhelyi Éva (2007): Fogalomalkotás és reprezentációk, ELTE TTK Matematikatanítási és Módszertani Központ
52. Vetier András (1991): *Szemléletes mérték és valószínűségelmélet*, Tankönyvkiadó, Budapest
53. Vidákovich Tibor (2001): *Diagnosztikus tudásszint- és képességvizsgálatok*, In: Csapó Benő és Vidákovich Tibor (szerk.) (2001): Neveléstudomány az ezredfordulón. Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest
54. Vigotszkij, L. Sz. (1966): *Gondolkodás és beszéd*, Akadémia Kiadó, Budapest
55. Warren Weaver (1979): *Szerencse kisasszony*, Gondolat Kiadó, Budapest
56. <http://www.nefmi.gov.hu/kozoktatas/tantervek/gimnazium>

PUBLIKÁCIÓK – PUBLICATIONS

Idegen nyelvű referált folyóiratban, megjelent publikációk

- Szendrei Julianna – Szitányi Judit (2007): Intereses y sentimientos ¿ Qué dificultades tiene el desarrollo de la mentalización hacia las probabilidades en la escuela primaria?, Uno, Revista de Didáctica de las Matemáticas, Probabilidades, 31–46. Barcelona REF: Zentralblatt ME 2008c.00461
- Csíkos Csaba, Szitányi Judit és Kelemen Rita (2011): The effects of using drawings in developing young children's mathematical word problem solving: A design experiment with third-grade Hungarian students, 2011. november, 47–65., Educational Studies in Mathematics 81
- Szitányi Judit (2012): Probabilistic thinking, characteristic features, TMCS, 10/1 13-36., Debrecen

Konferencia kiadványban megjelent referált publikáció idegen nyelven:

- Szitányi Judit – Zsinkó Erzsébet (2007): Calculators used not only for calculations. In.: Szendrei Julianna (szerk.): International Commission for the Study and Improvement of Mathematics Education. 273-277. CIEAEM 59 Congress, Dobogókő.

Magyar nyelvű folyóiratban, megjelent referált publikációk:

- Csíkos Csaba, Szitányi Judit és Kelemen Rita (2010): Vizuális reprezentációk szerepe a matematikai problémamegoldásban. Egy 3. osztályos tanulók körében végzett fejlesztő kísérlet eredményei, Magyar Pedagógia 110. évf. 2. szám 149–166.

Egyéb publikációk:

- C. Neményi Eszter–Szabóné Szitányi Judit–Zsinkó Erzsébet (2008): Kerettanterv Matematikai kompetenciaterület 1–4. évfolyam. In.: Az Educatio Kht. kompetenciafejlesztő oktatási program kerettanterve – *Matematikai kompetencia* – Általános iskola és középiskola 1–12. évfolyam. (www.educatio.hu)
- Csíkos Csaba, Gábri Katalin, Lajos Józsefné, Makara Ágnes, Szendrei Julianna, Szitányi Judit és Zsinkó Erzsébet (2011): Részletes tartalmi keretek a matematika diagnosztikus értékeléséhez In: Csapó Benő és

Szendrei Mária (szerk): Tartalmi keretek a matematika diagnosztikus értékeléséhez, Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest

- Angol nyelven: Csaba Csíkos, Katalin Gábri, Józsefné Lajos, Ágnes Makara, Julianna Szendrei, Judit Szitányi, Erzsébet Zsinkó (2011): Detailed Framework for Diagnostic Assessment of Mathematics In: Benő Csapó, Mária Szendrei: Framework for diagnostic Assessment of mathematics, Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest

Előadások idegen nyelven:

1. Calculators used not only for calculations, CIEAEM konferencia, 2007, Dobogókő
2. Probability sense, 2008, Erasmus oktatói mobilitás program, Belfast
3. Hungarian Education System, 2008, Erasmus oktatói mobilitás program, Belfast
4. Csíkos Csaba, Szitányi Judit, Kelemen Rita, 2009 Promoting 3rd grade children's mathematical problem solving through learning about the role of visual representations, 13th European Conference for Research on Learning and Instruction held in Amsterdam
5. Traditions and new elements of teaching mathematics in Hungary, 2012, Palmenia Centre for Continuing Education, Helsinki

Magyar nyelven:

1. Grafikus zsebszámológépek felhasználása az oktatásban 2003, TIT matematikatanár továbbképzés, Budapest
2. Valószínűségi játékok 2004, Rátz László vándorgyűlés, Nyíregyháza
3. A fogalomalkotás 2005, Varga Tamás napok, Budapest
4. Differenciálás a matematika órákon 2005, Békés megyei szakmai napok, Békéscsaba
5. Kezdeti lépések a valószínűségi szemlélet fejlesztésében, 2006, Varga Tamás napok, Budapest
6. Mentorképzés, SuliNova Közoktatás-fejlesztési és Pedagógus-továbbképzési Kht., 2005, Balatonszemes
7. Fogalmam sincs – A számfogalom és a műveletfogalom alakulása az írásbeli algoritmusok során., 2008, Varga Tamás napok, Budapest

8. 3. osztályos tanulók körében, a matematikai szöveges feladatok területén végzett kísérlet módszerei és a fejlesztő feladatok rendszere, 2008, VIII. Országos Neveléstudományi Konferencia, Budapest
9. Valószínűségi tapasztalatok a matematika más témaköreiben, 2011, A matematikai kompetenciák fejlesztése és mérése 1–6. osztályban, ELTE-TÓK Matematika Tanszék, Budapest