Egyetemi doktori (PhD) értekezés tézisei

Spectral analysis and moment functions on hypergroups

Vajday László

Témavezető: Dr. Székelyhidi László

Debreceni Egyetem

Matematika- és Számítástudományok Doktori Iskola

Debrecen, 2012.

Acknowledgements[1]

This work was carried out during the years 2008-2012 at the Department of Analysis, Institute of Mathematics, Faculty of Science and Technology, University of Debrecen.

I owe my deepest gratitude to my supervisor, professor László Székelyhidi who introduced me to the abstract layers of mathetical analysis, who had a major role in the development of my mathematical thinking and last, but not least who showed me the way the "games are played", not merely in the field of mathematics.

I also want to thank to professor Lajos Molnár and professor Zsolt Páles who insured the climate and the financial background I needed to complete this research.

Finally, I wish to thank my dearest ones and my friends for their support, patience and understanding during these years.

[1] The work is supported by the TÁMOP-4.2.2/B-10/1-2010-0024 project. The project is co-financed by the European Union and the European Social Fund.

1. INTRODUCTION

Hypergroups are locally compact spaces on which the bounded Radon measures form a Banach algebra with the convolution of measures. The general theory of hypergroups had been worked out in the 1970s (see **[2]**, **[4]**, **[8]**). The heuristic meaning of the concept of hypergroup is the following: suppose that a locally compact topological group is given. We consider all complex Radon measures defined on this topological group. These measures form a $*$-algebra with the convolution as a multiplication. The mapping $x \mapsto \delta_x$, where δ_x is the point mass at x, embeds the group into the multiplicative semigroup of the measure algebra and the multiplication on the image of the group uniquely determines the multiplication in the algebra. We get the concept of *hypergroup* in the way that at this time we "forget about" the group, we "throw away" the group from the measure-algebra and "forget" that convolution of measures is defined by the multiplication defined on the group. Only the basic properties of the convolution remain and the fact that the measures are defined on a locally compact Hausdorff space. When we collect these facts in the form of axioms we arrive at the definition of hypergroup. The appearance of translation operators enables us to utilize an effective method of studying functional equations on hypergroups.

This PhD dissertation deals with the study of classical functional equations on different types of hypergroups, characterizing additive, exponential and generalized moment functions on special hypergroups, describing linear independence and translation properties of exponential monomials and generalized moment sequences with applications to spectral analysis and spectral synthesis. We extend the classical moment problem to generalized moment sequences and solve its uniqueness on polynomial and Sturm–Liouville hypergroups.

2. NOTATION AND TERMINOLOGY

2.1. Terminology. Let X be a locally compact Hausdorff space and let $\mathcal{C}(X)$ be the set of all complex valued continuous function on X. Let $\mathcal{C}_c(X)$ be the set of compactly supported functions from $\mathcal{C}(X)$. The space $\mathcal{C}_c(X)$ is the union of subspaces

$$\mathcal{C}_c(X, K) = \{f \in \mathcal{C}_c(X) | \operatorname{supp} f \subset K\},$$

where K is a compact subset of X. If we equip these spaces with the uniform convergence topology on compact sets, we get a locally convex topology on $\mathcal{C}_c(X)$, which is the inductive limit of the topologies on the spaces $\mathcal{C}_c(X)$. We say that μ is a *Radon measure* on X if it is a continuous linear functional of the space $\mathcal{C}_c(X)$. We use the notation

$$\mu(f) = \int_X f(x)\, d\mu(x) = \int_X f\, d\mu,$$

where f is an element of $\mathcal{C}_c(X)$. We denote the set of all complex Radon measures on X by $\mathcal{M}(X)$. The set of all bounded and probability measures on X are denoted by $\mathcal{M}^b(X)$, $\mathcal{M}^1(X)$, respectively.

The measure δ_x defined by

$$\delta_x(f) = f(x) \qquad (f \in \mathcal{C}_c(X))$$

for each f in $\mathcal{C}(X)$ and x in X is called the *Dirac measure*.

2.2. The measure algebra of hypergroups. Let K be a locally compact Hausdorff space and we suppose the following:

H_1 There is a binary operation $*$ on the vector space $\mathcal{M}^b(K)$, with the property that $(\mathcal{M}^b(K), +, *)$ is an algebra (*convolution*).
H_2 If x, y are in K, then $\delta_x * \delta_y$ is in $\mathcal{M}^1(K)$ and $\operatorname{supp}(\delta_x * \delta_y)$ is compact.
H_3 The mapping $(x, y) \mapsto \delta_x * \delta_y$ is continuous, where the topology of $\mathcal{M}^1(K)$ is the weak topology induced by $\mathcal{C}_c(K)$.
H_4 The mapping $(x, y) \mapsto \operatorname{supp}(\delta_x * \delta_y)$ is continuous, where the topology of $\mathcal{K}(K)$ is the Michael-topology.
H_5 There exists a unique element e in K that $\delta_e * \delta_x = \delta_x * \delta_e = \delta_x$ holds for any x in K (*identity*).
H_6 There exists a homeomorphism $^\vee : K \to K$, such that $(x^\vee)^\vee = x$ holds for any x in K and for x, y in K the element e is in $\operatorname{supp}(\delta_x * \delta_y)$ if and only if $x = y^\vee$ (*involution*).
H_7 For any x, y in K, the property $(\delta_x * \delta_y)^\vee = \delta_{y^\vee} * \delta_{x^\vee}$ holds, where $\mu^\vee$ is defined by

$$\int_K f(x)\, d\mu^\vee(x) = \int_K f(x^\vee)\, d\mu(x) \qquad (f \in \mathcal{C}_c(K)),$$

whenever μ is in $\mathcal{M}^b(K)$.

We say that the quadruple $(K, *, ^\vee, e)$, or simply K is a *hypergroup*. It is important to note that K has no algebraical structure, all properties come from the measure algebra in the way that we identify the members of K by the appropriate Dirac measures.

The hypergroup K is *commutative* if $(\mathcal{M}^b(K), +, *)$ is a commutative algebra. The hypergroup K is *Hermitian* if the involution on it is the identity. With the help of convolution we can introduce the notion of translation. For f in $\mathcal{C}(K)$ and x, y in K the *left (right) translate* of f by y is defined by

$$\tau_L^y f(x) = \int_K f(t)\ d(\delta_x * \delta_y)(t), \qquad \tau_R^y f(x) = \int_K f(t)\ d(\delta_y * \delta_x)(t),$$

respectively. We shall use the following suggestive notation for the *translation operator* τ:

$$f(x * y) = \tau_y\ f(x) = \int_K f(t)\, d(\delta_x * \delta_y)(t).$$

3. HYPERGROUPS AND EXAMPLES

3.1. Polynomial hypergroups. An important special class of Hermitian hypergroups is closely related to polynomials.

Let $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ and $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ be real sequences with the following properties: $c_n > 0$, $b_n \geq 0$, $a_{n+1} > 0$ for all n in $\mathbb{N}$, moreover $a_0 = 0$, and $a_n + b_n + c_n = 1$ for all n in $\mathbb{N}$. We define the sequence of polynomials $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ by $P_0(x) = 1$, $P_1(x) = x$, and by the recursive formula

$$xP_n(x) = a_nP_{n-1}(x) + b_nP_n(x) + c_nP_{n+1}(x)$$

for all $n \geq 1$ and x in $\mathbb{R}$. In this case there exist constants $c(n, m, k)$ for all natural numbers n, m, k such that

$$P_nP_m = \sum_{k=|n-m|}^{n+m} c(n, m, k)P_k\,.$$

If these *linearization coefficients* are nonnegative, $\delta_n^\vee = \delta_n$ and

$$\delta_n * \delta_m = \sum_{k=|n-m|}^{n+m} c(n, m, k)\delta_k \qquad (n, m \in \mathbb{N})\,,$$

then $K = (\mathbb{N}, *, ^\vee)$ is a hypergroup, which is commutative. The hypergroup (K, P_n) is called *polynomial hypergroup* [**6**].

3.2. Sturm–Liouville hypergroups. Let $\mathbb{R}_0 = [0, +\infty[$. The continuous function $A : \mathbb{R}_0 \to \mathbb{R}$ is called a *Sturm–Liouville function*, if it is positive and continuously differentiable on the positive reals. For a given Sturm–Liouville function A one defines the *Sturm–Liouville operator* L_A by

$$L_A\ f = -f'' - \frac{A'}{A}f',$$

where f is a twice continuously differentiable real function on the positive reals. Using L_A one introduces the differential operator l by

$$l[u](x, y) = (L_A)_xu(x, y) - (L_A)_yu(x, y) =$$
$$= -\partial_1^2u(x, y) - \frac{A'(x)}{A(x)}\ \partial_1u(x, y) + \partial_2^2u(x, y) + \frac{A'(y)}{A(y)}\ \partial_2u(x, y),$$

where u is twice continuously differentiable on the positive reals.

A hypergroup on $\mathbb{R}_0$ is called *Sturm–Liouville hypergroup*, if there exists a Sturm–Liouville function A such that given any real-valued C^∞-function f on $\mathbb{R}_0$ the function u_f defined by

$$u_f(x, y) = f(x * y) = \int_{\mathbb{R}_0} f\ d(\delta_x * \delta_y)$$

for all positive x, y is twice continuously differentiable and satisfies the partial differential equation

$$l[u_f] = 0$$

with $\partial_2 u_f(x, 0) = 0$ for all positive x (**[1]** and **[10]**).

3.3. The $SU(2)$-hypergroup. The $SU(2)$-hypergroup is related to the set of continuous unitary irreducible representations of the group $G = SU(2)$, the *special linear group* in two dimensions. The dual object $\widehat{G}$ can be identified with the set $\mathbb{N}$ of natural numbers as it is indicated in **[1]**: the set of equivalence classes of continuous unitary irreducible representations of $SU(2)$ is given by $\{T^{(0)}, T^{(1)}, T^{(2)}, \dots\}$, where $T^{(n)}$ has dimension $n + 1$, and we identify this set with $\mathbb{N}$. The convolution is given by

$$\delta_m * \delta_n = {\sum_{k=|m-n|}^{m+n}}' \frac{k+1}{(m+1)(n+1)} \delta_k \,, \tag{1}$$

where the "dash" denotes that every second term appears in the sum, only. With this convolution $\mathbb{N}$ becomes a discrete commutative hypergroup, and since all the $T^{(n)}$ are self-conjugate, the hypergroup is in fact Hermitian. We call this hypergroup the *$SU(2)$-hypergroup.*

3.4. Two-point support hypergroups.

3.4.1. *The $K_1 = ([0, 1], *)$ hypergroup.* Let K_1 be the hypergroup on the interval $[0, 1]$ with the convolution defined by

$$\delta_x * \delta_y = \frac{1}{2}\delta_{x+y} + \frac{1}{2}\delta_{|x-y|}.$$

This is a one-dimensional compact hypergroup (see **[1]**, Example 3.4.6 on p.191.).

3.4.2. *The $K_2 = ([0, +\infty[, *)$ hypergroup.* The hypergroup K_2 is defined on the nonnegative reals $[0, +\infty[$ and the convolution is defined by

$$\delta_x * \delta_y = \frac{1}{2}\delta_{x+y} + \frac{1}{2}\delta_{x-y} \qquad (0 \le y < x).$$

This hypergroup $K_2 = ([0, +\infty[, *)$ is a noncompact one-dimensional hypergroup (see **[1]**, Example 3.4.5 on p. 191.).

3.4.3. *The* cosh*-hypergroup.* Using the function cosh, we can build up a Sturm–Liouville hypergroup on the nonnegative reals, called the *cosh-hypergroup.* In this case the Sturm–Liouville function will be the function $x \mapsto \cosh^2(x)$. Another way to introduce the cosh-hypergroup is the following. We consider the nonnegative reals as a base set and we introduce the convolution with the formula

$$\delta_x * \delta_y = \frac{\cosh(x+y)}{2\cosh x \cosh y}\delta_{x+y} + \frac{\cosh(|x-y|)}{2\cosh x \cosh y}\delta_{|x-y|} \,.$$

This hypergroup is also a special two-point support hypergroup, which is actually identical with the cosh-hypergroup (see [**1**]).

4. EXPONENTIAL AND ADDITIVE FUNCTIONS ON HYPERGROUPS

Let K be a hypergroup with convolution $*$, involution $^\vee$, and identity e. For any y in K let τ_y denote the left translation operator on the space of all complex valued functions on K which are integrable with respect to $\delta_x * \delta_y$ for any x, y in K. We call the continuous complex valued function a on K *additive*, if it satisfies

$$\int_K a(t)\, d(\delta_x * \delta_y)(t) = a(x) + a(y)$$

for all x, y in K. The continuous complex valued function m on K is called an *exponential*, if it is not identically zero, and

$$\int_K m(t)\, d(\delta_x * \delta_y)(t) = m(x)m(y)$$

holds for all x, y in K.

4.1. The case of polynomial hypergroups. Let $K = (\mathbb{N}, P_n)$ be the polynomial hypergroup associated with the sequence of polynomials $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

It is known that on an arbitrary polynomial hypergroup $K = (\mathbb{N}, P_n)$, exponentials have the form $m(n) = P_n(\lambda)$ $(n \in \mathbb{N})$ with some complex number λ and additive functions have the form $a(n) = cP_n'(1)$ $(n \in \mathbb{N})$ with some complex number c.

4.2. The case of Sturm–Liouville hypergroups. Let $K = (\mathbb{R}_0, A)$ be a Sturm–Liouville hypergroup.

On these types of hypergroups exponentials are the solutions of the following differential equation

$$m''(x) + \frac{A'(x)}{A(x)}\, m'(x) = \lambda m(x), \quad m(0) = 1,\ m'(0) = 0$$

for any positive x and for some complex number λ. Furthermore, additive functions are the solutions of the differential equation

$$a''(x) + \frac{A'(x)}{A(x)}\, a'(x) = \lambda, \quad a(0) = 0,\ m'(0) = 0$$

for any positive x and for some complex number λ.

4.3. The case of the $SU(2)$-hypergroup. The function $M : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ is an exponential if and only if it satisfies

$$M(m)M(n) = M(m * n) = \sum_{k=|m-n|}^{m+n}{}' \frac{k+1}{(m+1)(n+1)} M(k) \tag{2}$$

for all natural numbers m, n. Here, and everywhere "dash" means that each second term appears in the sum, only.

THEOREM 4.1. *The function $M : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ is an exponential on the $SU(2)$-hypergroup if and only if there exists a complex number λ such that*

$$M(n) = \frac{\sinh[(n+1)\lambda]}{(n+1)\sinh\lambda} \tag{3}$$

holds for each natural number n. (Here $\lambda = 0$ corresponds to the exponential $M = 1$.)

The function $A : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ is an additive function if and only if it satisfies

$$A(m) + A(n) = A(m * n) = \sum_{k=|m-n|}^{m+n}{}' \frac{k+1}{(m+1)(n+1)} A(k) \tag{4}$$

for all natural numbers m, n.

THEOREM 4.2. *The function $A : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ is an additive function on the $SU(2)$-hypergroup if and only if there exists a complex number c such that*

$$A(n) = \frac{c}{3} n(n+2) \tag{5}$$

holds for each natural number n.

5. GENERALIZED MOMENT FUNCTION SEQUENCES

For any nonnegative integer n the complex valued continuous function φ on the hypergroup K is called a *generalized moment function of order n*, if there are complex valued continuous functions $\varphi_k : K \to \mathbb{C}$ for $k = 0, 1, \ldots, n$ such that $\varphi_0 \neq 0$, $\varphi_n = \varphi$ and

$$\varphi_k(x * y) = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \varphi_i(x)\varphi_{k-i}(y) \tag{6}$$

holds for $k = 0, 1, \ldots, n$ and for all x, y in K. In this case we say that the functions φ_k for $k = 0, 1, \ldots, n$ form a *generalized moment function sequence of order n* (see **[12]**, **[6]**, **[5]**, **[7]**).

5.1. Linear independence of generalized moment functions.

THEOREM 5.1. *Let K be a commutative hypergroup, $n \geq 1$ an integer and $(\varphi_k)_{k=0}^n$ a sequence of generalized moment functions with $\varphi_1 \neq 0$. Then the generalized moment function φ_n is not the linear combination of the generalized moment functions $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1}$.*

THEOREM 5.2. *Let K be a commutative hypergroup, $n \geq 1$ an integer and $(\varphi_k)_{k=0}^n$ a sequence of generalized moment functions with $\varphi_1 \neq 0$. Then the functions $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_n$ are linearly independent.*

5.2. Generalized moment functions on the $SU(2)$-hypergroup. We describe the generalized moment functions on the $SU(2)$-hypergroup. Let n be a nonnegative integer. We introduce the function

$$\Phi(n, \lambda) = \frac{\sinh[(n+1)\lambda]}{(n+1)\sinh \lambda} \tag{7}$$

for each n in $\mathbb{N}$ and $\lambda \neq 0$ in $\mathbb{C}$, while $\Phi(n, 0) = 1$ for each n in $\mathbb{N}$. The function $\Phi : \mathbb{N} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ is an *exponential family* for the $SU(2)$-hypergroup: each exponential on this hypergroup has the form $n \mapsto \Phi(n, \lambda)$ with some unique λ in $\mathbb{C}$, and, conversely, the function $n \mapsto \Phi(n, \lambda)$ is an exponential on the $SU(2)$-hypergroup for every complex λ.

THEOREM 5.3. *Let K denote the $SU(2)$-hypergroup and Φ the exponential family given by* (7). *The functions $\varphi_0, \varphi_1, ..., \varphi_N : K \to \mathbb{C}$ form a generalized moment sequence of order N on K, if and only if there exist complex numbers c_j for $j = 1, 2, \ldots, N$ such that*

$$\varphi_k(n) = \frac{d^k}{dt^k}\Phi(n, f(t))(0) \tag{8}$$

holds for each n in $\mathbb{N}$ and for $k = 0, 1, \ldots, N$, where

$$f(t) = \sum_{j=0}^{N} \frac{c_j}{j!} t^j$$

for each t in $\mathbb{C}$.

6. EXPONENTIAL MONOMIALS ON STURM–LIOUVILLE HYPERGROUPS

We define exponential monomials and present a special linear independence property of then on Sturm–Liouville hypergroups. Let $K = (\mathbb{R}_0, A)$ be a Sturm–Liouville hypergroup. We can define an exponential family $\varphi : \mathbb{R}_0 \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ with the property that the function $x \mapsto \varphi(x, \lambda)$ is an exponential of K for each complex λ, and for each exponential m of K there exists a unique complex λ such that $m(x) = \varphi(x, \lambda)$ holds for every x in $\mathbb{R}_0$. Hence the exponential family satisfies

$$\partial_1^2\varphi(x, \lambda) + p(x)\partial_1\varphi(x, \lambda) = \lambda\varphi(x, \lambda), \qquad \varphi(0, \lambda) = 1, \qquad \partial_1\varphi(0, \lambda) = 0 \tag{9}$$

for each positive x and complex number λ, where $p(x) = \frac{A'(x)}{A(x)}$.

Using the exponential family we define *exponential monomials* on K as functions of the form $x \mapsto P(\partial_2)\varphi(x,\lambda)$, where P is a complex polynomial and λ is a complex number. The meaning of $P(\partial_2)$ is obvious. Observe that this is an analoguous concept to the "exponential monomial" on polynomial hypergroups ([**9**] and [**11**]).

6.1. Linear independence of exponential monomials. A particular subclass of exponential monomials is formed by the functions of the type $x \mapsto \partial_2^k\varphi(x,\lambda)$, where k is a nonnegative integer and λ is a complex number. Here we note that if $\lambda = 0$, then $\varphi(x,0) = 1$ for each x in $\mathbb{R}_0$, hence the corresponding function $x \mapsto \partial_2^k\varphi(x,0)$ is identically 1 for $k = 0$, and it is identically 0 for $k > 0$. For the sake of simplicity we will call the functions $x \mapsto \partial_2^k\varphi(x,\lambda)$ *special exponential monomials* if k is a nonnegative integer and λ is a complex number, supposing that if $\lambda = 0$, then $k = 0$. Our aim is to show that different special exponential monomials are linearly independent.

Theorem 6.1. *On any hypergroup different exponentials are linearly independent.*

Theorem 6.2. *Let $K = (\mathbb{R}_0, A, *)$ be a Sturm–Liouville hypergroup with the exponential family $\varphi : \mathbb{R}_0 \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, n a nonnegative integer and $\lambda_0 \neq 0$ a complex number. Then the special exponential monomials*

$$x \mapsto \varphi(x,\lambda_0), x \mapsto \partial_2\varphi(x,\lambda_0), \ldots, x \mapsto \partial_2^n\varphi(x,\lambda_0) \tag{10}$$

are linearly independent.

Theorem 6.3. *On any Sturm–Liouville hypergroup different special exponential monomials are linearly independent.*

6.2. Translates of exponential monomials. The translates of exponential monomials have the characteristic property of moment functions. This means that there is a close connection between exponential monomials and moment functions.

Theorem 6.4. *Let $K = (\mathbb{R}_0, A)$ be a Sturm-Liouville hypergroup, λ a fixed complex number, N a nonnegative integer, y an arbitrary nonnegtive real number, $\Phi : \mathbb{R}_0 \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ an exponential function and $\nu : \mathbb{R}_0 \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ a function with the the property $\nu(x,\lambda) = 1 \cdot \lambda = \lambda$. Then the second order partial derivatives of the function $\nu(x,\lambda)\ \Phi(x * y,\lambda)$ can be written in the form*

$$\partial_2^N\left[\nu(x,\lambda)\ \Phi(x * y,\lambda)\right] = \lambda\partial_2^N\Phi(x,\lambda)\Phi(y,\lambda) +$$
$$+ \sum_{i=0}^{N-1}\partial_2^i\Phi(x,\lambda)\big(\lambda\binom{N}{i}\partial_2^{N-i}\Phi(y,\lambda) + N\binom{N-1}{i}\partial_2^{N-i-1}\Phi(y,\lambda)\big).$$

We show that the translates of exponential monomials can be written in a compact form.

THEOREM 6.5. *Let $K = (\mathbb{R}_0, A)$ be a Sturm-Liouville hypergroup, λ a complex number, N a nonnegative integer and the function $x \mapsto \partial_2^N \Phi(x, \lambda)$ is a special exponential monomial. Then*

$$\tau_y\, \partial_2^N \Phi(x,\lambda) = \sum_{i=0}^{N} \binom{N}{i} \partial_2^i \Phi(x,\lambda) \partial_2^{N-i} \Phi(y,\lambda) \tag{11}$$

for any y in $\mathbb{R}_0$.

Summarizing the results of this section we see that the translate of an arbitrary exponential monomial presents a special linear combination, where the basis functions are the lower order exponential monomials. This is a very useful property when considering spectral synthesis.

7. SPECTRAL ANALYSIS

7.1. Spectral analysis for commutative hypergroups. Spectral synthesis deals with the description of translation invariant function spaces over topological groups. Suppose that a locally compact Abelian group is given and consider the set of all continuous complex valued functions on it, equipped with the pointwise linear opertions and with the topology of uniform convergence on compact sets. The problem of spectral analysis and spectral synthesis can be formulated:

(1) Is it true, that any nonzero, closed, translation invariant linear subspace of the space mentioned above (in other words a *variety*) contains an exponential function (*spectral analysis*)?

(2) Is it true, that any variety is equal to the closed linear span of all exponential monomials in it (*spectral synthesis*)?

The study of spectral analysis and spectral synthesis problems are based on the concept of exponential monomials. Here we deal with spectral analysis only and we prove it for finite dimensional varieties on commutative hypergroups, hence we need exclusively the concept of exponentials.

THEOREM 7.1. *Spectral analysis holds for nonzero finite dimensional varieties on every commutative hypergroup.*

7.2. Spectral analysis using moment functions. Here we show that if a variety contains certain nonzero generalized moment functions, then spectral analysis holds for this variety.

THEOREM 7.2. *Let K be a commutative hypergroup, n a nonnegative integer and $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_n$ a generalized moment function sequence with $\varphi_1 \neq 0$. If V is a variety in $\mathcal{C}(K)$ and φ_n belongs to V, then φ_k belongs to V for $k = 0, 1, \ldots, n$. In particular, spectral analysis holds for V.*

8. A MOMENT PROBLEM

Let μ be a compactly supported measure on K and let $(\varphi_k)_{k=0}^{\infty}$ be a generalized moment function sequence. Then for each natural number n the complex number

$$m_n = \int_K \varphi_n \, d\mu$$

is called the *n-th generalized moment of μ* with respect to the given generalized moment function sequence. In this case the sequence $(m_n)_{n=0}^{\infty}$ is called the *generalized moment sequence of the measure μ* with respect to the given generalized moment function sequence.

In this setting we can formulate the problem of existence: Let the generalized moment function sequence $(\varphi_k)_{k=0}^{\infty}$ and the sequence of complex numbers $(m_n)_{n=0}^{\infty}$ be given. Under what conditions is there a compactly supported measure μ on K such that $(m_n)_{n=0}^{\infty}$ is the generalized moment sequence of the measure μ with respect to the given generalized moment function sequence? The other basic question is about uniqueness: if the compactly supported measures μ and ν have the same generalized moment sequences with respect to the given generalized moment function sequence, then does it follow $\mu = \nu$?

We study the problem of uniqueness and solve it in the case of polynomial hypergroups in a single variable and in the case of Sturm–Liouville hypergroups.

8.1. The case of polynomial hypergroups.

THEOREM 8.1. *Let $K = (\mathbb{N}, P_n)$ be a polynomial hypergroup, μ a finitely supported measure on $\mathbb{N}$ and let $(\varphi_k)_{k=0}^{\infty}$ be a generalized moment function sequence on K. If $\varphi_1 \neq 0$ and*

$$\int_{\mathbb{N}} \varphi_k(n) \, d\mu(n) = 0 \tag{12}$$

for $k = 0, 1, 2, \ldots,$ then $\mu = 0$.

This result implies the following uniqueness theorem.

THEOREM 8.2. *Let $K = (\mathbb{N}, P_n)$ be a polynomial hypergroup, μ, ν finitely supported measures on $\mathbb{N}$ and let $(\varphi_k)_{k=0}^{\infty}$ be a generalized moment function sequence on K. If $\varphi_1 \neq 0$ and the generalized moment sequences of μ and ν with respect to the given generalized moment function sequence are the same, then $\mu = \nu$.*

8.2. The case of Sturm–Liouville hypergroups. Following the previous ideas in this subsection we consider the same problem on Sturm–Liouville hypergroups.

THEOREM 8.3. *Let $K = (\mathbb{R}_0, A)$ be a Sturm–Liouville hypergroup, μ a compactly supported measure on $\mathbb{R}_0$ and let $(\varphi_k)_{k=0}^{\infty}$ be a generalized moment function sequence* *on K. If $\varphi_1 \neq 0$ and*

$$\int_{\mathbb{R}_0} \varphi_k(x)\, d\mu(x) = 0 \tag{13}$$

for $k = 0, 1, 2, \ldots,$ then $\mu = 0$.

Similarly as above, we have the corresponding uniqueness result.

THEOREM 8.4. *Let $K = (\mathbb{R}_0, A)$ be a Sturm–Liouville hypergroup, μ, ν compactly supported measures on $\mathbb{R}_0$ and let $(\varphi_k)_{k=0}^{\infty}$ be a generalized moment function sequence on K. If $\varphi_1 \neq 0$ and the generalized moment sequences of μ and ν with respect to the given generalized moment function sequence are the same, then $\mu = \nu$.*

9. CONDITIONAL FUNCTIONAL EQUATIONS AND APPLICATIONS

In this section we give the description of exponential and additive functions on some types of two-point support hypergroups. These hypergroups are studied in [**1**]. Our problem leads us to the study of some conditional functional equations. In dealing with regular solutions of conditional functional equations the most powerful tools are the regularity results of [**3**], which play a fundamental role in this chapter too.

9.1. Conditional d'Alembert-type functional equations.

THEOREM 9.1. *Let $f : [0,1] \to \mathbb{C}$ be a continuous function satisfying $f(0) = 1$ and*

$$f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)f(y)\,, \tag{14}$$

whenever $0 \leq y \leq x$ and $x + y \leq 1$. Then there exists a complex number λ such that f has the form:

$$f(x) = \cosh \lambda x \tag{15}$$

for each x in $[0,1]$.

THEOREM 9.2. *Let $f : [0, +\infty[\to \mathbb{C}$ be a continuous function satisfying $f(0) = 1$ and*

$$f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)f(y)\,, \tag{16}$$

whenever $0 \leq y \leq x$. Then there exists a complex number λ such that f has the form:

$$f(x) = \cosh \lambda x \tag{17}$$

for each $x \geq 0$.

9.2. Conditional square-norm equations.

THEOREM 9.3. *Let $f : [0,1] \to \mathbb{C}$ be a continuous function satisfying*

$$f(x+y) + f(x-y) = 2f(x) + 2f(y)\,, \tag{18}$$

whenever $0 \le y \le x$ and $x + y \le 1$. Then there exists a complex number λ such that f has the form:

$$f(x) = \lambda x^2 \tag{19}$$

for each $0 \le x \le 1$. Moreover, f is real if and only if λ is real.

THEOREM 9.4. *Let $f : [0,+\infty[\to \mathbb{C}$ be a continuous function satisfying*

$$f(x+y) + f(x-y) = 2f(x) + 2f(y)\,, \tag{20}$$

whenever $0 \le y \le x$. Then there exists a complex number λ such that f has the form:

$$f(x) = \lambda x^2 \tag{21}$$

for each $x \ge 0$. Moreover, f is real if and only if λ is real.

9.3. Exponentials and additive functions on two-point support hypergroups.

9.3.1. *The case of the hypergroup $K_1 = ([0,1],*)$.* Let K_1 be the hypergroup on the interval $[0,1]$ with the convolution defined by

$$\delta_x * \delta_y = \frac{1}{2}\delta_{x+y} + \frac{1}{2}\delta_{|x-y|}\,.$$

This is a one-dimensional compact hypergroup (see [**1**], Example 3.4.6 on p.191.). The characterizing equation of additive functions has the form

$$a(x+y) + a(|x-y|) = 2a(x) + 2a(y) \qquad (0 \le x, y \le 1)\,. \tag{22}$$

Our next theorem describes the additive functions on K_1.

THEOREM 9.5. *Let K_1 be the hypergroup defined above. Then the continuous function $a : [0,1] \to \mathbb{C}$ is an additive function on K_1 if and only if there exists a complex number λ such that*

$$a(x) = \lambda x^2 \tag{23}$$

holds for each x in $[0,1]$.

Using the convolution and the definition of exponential functions we have that the continuous function $m : [0,1] \to \mathbb{C}$ is an exponential on K_1 if and only if it satisfies

$$m(x+y) + m(x-y) = 2m(x)m(y) \qquad (0 \le y \le x,\ x + y \le 1)\,. \tag{24}$$

Using the above results we obtain the following statement.

THEOREM 9.6. *Let K_1 be the two-point support hypergroup defined above. The continuous function $m : [0,1] \to \mathbb{C}$ is an exponential function on K_1 if and only if there exists a complex number λ such that*

$$m(x) = \cosh \lambda x \tag{25}$$

holds for each x in $[0,1]$.

9.3.2. *The case of the hypergroup $K_2 = ([0,+\infty[,*)$.* The hypergroup K_2 is defined on the nonnegative reals $[0,+\infty[$ and the convolution is defined by

$$\delta_x * \delta_y = \frac{1}{2}\delta_{x+y} + \frac{1}{2}\delta_{x-y} \qquad (0 \le y < x).$$

This hypergroup $K_2 = ([0,+\infty[,*)$ is a noncompact one-dimensional hypergroup (see **[1]**, Example 3.4.5 on p. 191.). On K_2 the characterizing equation of additive functions has the form

$$a(x+y) + a(x-y) = 2a(x) + 2a(y) \qquad (0 \le y < x)\,. \tag{26}$$

Now we exhibit the general form of additive functions on the hypergroup K_2.

THEOREM 9.7. *Let K_2 be the two-point support hypergroup defined above. The continuous function $a : [0,+\infty[\to \mathbb{C}$ is an additive function on K_2 if and only if there exists a complex number λ such that*

$$a(x) = \lambda x^2 \tag{27}$$

holds for each x in $[0,+\infty[$.

Using similar arguments and Theorem 9.2 we get the general form of exponential functions on K_2.

THEOREM 9.8. *Let K_2 be the two-point support hypergroup defined above. The continuous function $m : [0,+\infty[\to \mathbb{C}$ is an exponential function on K_2 if and only if there exists a complex number λ such that*

$$m(x) = \cosh \lambda x \tag{28}$$

holds for each x in $[0,+\infty[$.

9.3.3. *The case of the* cosh*-hypergroup.* We consider the nonnegative reals as a base set and we introduce the convolution with the formula

$$\delta_x * \delta_y = \frac{\cosh(x+y)}{2\cosh x \cosh y}\delta_{x+y} + \frac{\cosh(|x-y|)}{2\cosh x \cosh y}\delta_{|x-y|}\,.$$

This hypergroup is also a special two-point support hypergroup, which is actually identical with the cosh-hypergroup **[1]**. We denote this hypergroup by $K_3 = (\mathbb{R}_0\,,*)$. If we introduce the substitution $\tilde{m}(t) = \cosh(t)\, m(t)$, then exponentials on this hypergroup satisfy the following equation:

$$\cosh(x+y)\, m(x+y) + \cosh(|x-y|)\, m(|x-y|) =$$
$$= 2\,\big(\cosh(x)\, f(x)\big)\,\big(\cosh(y)\, f(y)\,\big),$$

using our substitution we get the equation of exponentials

$$\tilde{m}(x+y) + \tilde{m}(|x-y|) = 2\,\tilde{m}(x) + \tilde{m}(y).$$

THEOREM 9.9. *Let K_3 be the* cosh-*hypergroup. Then the continuous function $m : [0, +\infty[\to \mathbb{C}$ is an exponential on K_3 if and only if there exists a complex number λ such that*

$$m(x) = \frac{\cosh \lambda x}{\cosh x} \tag{29}$$

holds for each x in $[0, +\infty[$.

The case of additive functions is a bit more complicated. We consider the equation of additive functions

$$\cosh(x+y)\,a(x+y) + \cosh(x-y)\,a(x-y) =$$
$$= 2\,\cosh x \cosh y\,a(x) + 2\,\cosh x \cosh y\,a(y) \quad (0 \le y \le x).$$

Differentiating this equation twice with respect to the variable y, then substituting $y = 0$ and $\lambda = a''(0)$ and using the properties $a(0) = 0$ and $a'(0) = 0$ we have

$$a''(x) + 2\frac{\sinh x}{\cosh x}\,a'(x) = \lambda\,.$$

This means that on the cosh-hypergroup an additive function is the solution of the previous equation. The next theorem describes the additive functions on K_3.

THEOREM 9.10. *Let K_3 be the* cosh-*hypergroup. Then the continuous function $a : [0, +\infty[\to \mathbb{C}$ is an additive function on K_3 if and only if there exists a complex number λ such that*

$$a''(x) + \frac{2\sinh x}{\cosh x} a'(x) = \lambda \tag{30}$$

holds for each x in $[0, +\infty[$.

We remark that the solutions of equation (30) are special Bessel-functions.

1. BEVEZETÉS

A hipercsoportok olyan lokálisan kompakt terek, amelyeken a korlátos Radon-mértékek a mértékek közötti konvolúcióval Banach algebrát alkotnak. A hipercsoportok axiómarendszere és általános elmélete az 1970-es években született meg ([**2**], [**4**], [**8**]). A fogalom heurisztikus jelentése a következő: tekintsünk egy lokálisan kompakt topologikus csoportot, amelyen értelmezett összes komplex Radon-mértékek $*$-algebrát alkotnak a konvolúcióval, mint szorzás-művelettel. Ha a csoport x elemének e mérték-algebra δ_x elemét feleltetjük meg, ami az x pontban koncentrált Dirac-mértéket jelenti, akkor az $x \mapsto \delta_x$ megfeleltetés a csoport olyan leképezése a mértékek algebrájába, amelynél az x és y csoportelemek $x \cdot y$ szorzatának a δ_x és δ_y mértékek $\delta_x * \delta_y$ konvolúciója felel meg. A hipercsoport fogalmához úgy jutunk, hogy ennél a pontnál „megfeledkezünk" a csoportról: a mértékek algebrája alól „kihúzzuk" a csoportot, s „elfelejtjük" azt, hogy a mértékek konvolúcióját valójában a csoporton értelmezett művelet alapján definiáltuk. Mindössze a konvolúció alaptulajdonságai maradnak meg, valamint az a tény, hogy a mértékek egy lokálisan kompakt Hausdorff-téren vannak értelmezve. Ha ezeket a tényeket axiómák formájában fogalmazzuk meg, akkor a hipercsoport fogalmához jutunk. A hipercsoportokon bevezethető eltolás operátor hatékony segédeszköznek bizonyul hipercsoportokon definiálható függvényegyenletek tanulmányozásához.

Jelen PhD disszertációban megvizsgáljuk a klasszikus függvényegyenleteket különböző típusú hipercsoportokon, megadjuk az additív, exponenciális és általánosított momentumfüggvények alakját speciális hipercsoportokon, leírjuk az exponenciális monomok lineáris függetlenségét és eltolással való kapcsolatukat, valamint általánosított momentumfüggvények felhasználásával igazolunk spektrálanalízis-típusú eredménytkommutatív hipercsoportokra. Kiterjesztjük a klasszikus momentumproblémát általánosított momentumfüggvény sorozatokra és megoldjuk az egyértelműség kérdését polinomiális és Sturm–Liouville hipercsoportokon.

2. JELÖLÉSEK, TERMINOLÓGIA

2.1. TERMINOLÓGIA. Legyen X egy lokálisan kompakt Hausdorff-tér és legyen $\mathcal{C}(X)$ az összes, X-en értelmezett komplex értékű folytonos függvények halmaza. Jelölje $\mathcal{C}_c(X)$ a $\mathcal{C}(X)$-beli kompakt tartójú függvények halmazát. A $\mathcal{C}_c(X)$ tér a

$$\mathcal{C}_c(X, K) = \{f \in \mathcal{C}_c(X) | \operatorname{supp} f \subset K\}$$

alterek uniója, ahol K kompakt részhalmaza X-nek. Ha ellátjuk az előbbi tereket a kompakt halmazokon egyenletes konvergencia topológiájával, akkor egy lokálisan konvex topológiát kapunk $\mathcal{C}_c(X)$-en, amely induktív limesze a $\mathcal{C}_c(X)$ terek topológiáinak. Azt mondjuk, hogy μ egy *Radon-mérték* az X halmazon, ha a $\mathcal{C}_c(X)$ tér folytonos lineáris funkcionálja. Azt alábbi jelölést használjuk:

$$\mu(f) = \int_X f(x)\, d\mu(x) = \int_X f\, d\mu,$$

ahol f a $\mathcal{C}_c(X)$ térhez tartozik. Továbbá, $\mathcal{M}(X)$-szel jelöljük az X-en értelmezett összes komplex Radon-mértékek halmazát. Az X-en értelmezett korlátos, valamint valószínűségi mértékek halmazát rendre $\mathcal{M}^b(X)$ és $\mathcal{M}^1(X)$ jelöli.

A δ_x mértéket az alábbi módon definiáljuk

$$\delta_x(f) = f(x) \qquad (f \in \mathcal{C}_c(X))$$

minden $\mathcal{C}(X)$-beli f-re és X-beli x-re. Ekkor δ_x-et *Dirac-mérték*nek nevezzük.

2.2. Hipercsoportok mértékalgebrája. Legyen K egy lokálisan kompakt Hausdorff-tér és tegyük fel, hogy teljesülnek a következők:

- H_1 Az $\mathcal{M}^b(K)$ vektortéren adott egy $*$ bináris művelet, amellyel $(\mathcal{M}^b(K), +, *)$ algebra (*konvolúció*).
- H_2 Ha $x, y \in K$, akkor $\delta_x * \delta_y \in \mathcal{M}^1(K)$ és $\operatorname{supp}(\delta_x * \delta_y)$ kompakt.
- H_3 Az $(x, y) \mapsto \delta_x * \delta_y$ leképezés folytonos, ahol $\mathcal{M}^1(K)$ topológiája a $\mathcal{C}_c(K)$ szerinti gyenge topológia.
- H_4 Az $(x, y) \mapsto \operatorname{supp}(\delta_x * \delta_y)$ leképezés folytonos, ahol $\mathcal{K}(K)$ topológiája a Michael-topológia.
- H_5 Egyértelműen létezik egy olyan $e \in K$ elem, amelyre $\delta_e * \delta_x = \delta_x * \delta_e = \delta_x$ teljesül minden $x \in K$ esetén (*egységelem*).
- H_6 Létezik egy $^\vee : K \to K$ homeomorfizmus, amelyre minden $x \in K$ esetén fennáll, hogy $(x^\vee)^\vee = x$, és valamely $x, y \in K$ elemekre $e \in \operatorname{supp}(\delta_x * \delta_y)$ pontosan akkor teljesül, ha $x = y^\vee$ (*involúció*).
- H_7 Bármely $x, y \in K$ elemekre $(\delta_x * \delta_y)^\vee = \delta_{y^\vee} * \delta_{x^\vee}$ teljesül, ahol egy tetszőleges $\mu \in \mathcal{M}^b(K)$ mérték esetén $\mu^\vee$ az alábbi módon definiált:

$$\int_K f(x)\, d\mu^\vee(x) = \int_K f(x^\vee)\, d\mu(x) \qquad (f \in \mathcal{C}_c(K)).$$

Ekkor azt mondjuk, hogy $(K, *, ^\vee)$, vagy röviden K egy *hipercsoport*. Fontos megjegyezni, hogy a K halmaznak önmagában nincs semmilyen algebrai struktúrája, minden tulajdonságot a mértékalgebrán keresztül örököl azáltal, hogy a K halmaz elemeit azonosítjuk a hozzájuk tartozó Dirac-mértékkel.

A K hipercsoportot *kommutatívnak* nevezzük, ha $(\mathcal{M}^b(K), +, *)$ kommutatív algebra. A K hipercsoportot *Hermite-hipercsoport*nak nevezzük, ha rajta az involúció az identikus leképezés. A konvolúció segítségével bevezethetjük az eltolás fogalmát. Legyen $f \in \mathcal{C}(K)$ és $x, y \in K$. Az f folytonos függvény y-nal vett *bal (jobb) eltoltja* az alábbiak szerint definiált

$$\tau_L^y f(x) = \int_K f(t)\ d(\delta_x * \delta_y)(t), \qquad \tau_R^y f(x) = \int_K f(t)\ d(\delta_y * \delta_x)(t).$$

Az alábbi szuggesztív jelölést használjuk a τ *eltolás operátor*ra:

$$f(x*y) = \tau_y\ f(x) = \int_K f(t)\, d(\delta_x * \delta_y)(t).$$

3. PÉLDÁK HIPERCSOPORTOKRA

3.1. Polinomiális hipercsoportok. A következőkben a Hermite-hipercsoportok egy fontos osztályát vezethetjük be.

Legyenek $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ és $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ valós sorozatok a következő tulajdonságokkal: $c_n > 0$, $b_n \geq 0$, $a_{n+1} > 0$ minden n természetes számra, továbbá $a_0 = 0$, és $a_n + b_n + c_n = 1$ minden n természetes számra. Definiáljuk egy $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ polinom sorozatot a $P_0(x) = 1$, $P_1(x) = x$ feltételekkel és az alábbi rekurzióval

$$xP_n(x) = a_n P_{n-1}(x) + b_n P_n(x) + c_n P_{n+1}(x)$$

minden $n \geq 1$ természetes and x valós számra. Ekkor léteznek olyan $c(n,m,k)$ konstansok (*linearizációs együtthatók*) minden n, m, k természetes szám esetén, hogy

$$P_n P_m = \sum_{k=|n-m|}^{n+m} c(n,m,k) P_k.$$

Ha a linearizációs együtthatók nemnegatívak, $\delta_n^\vee = \delta_n$ és

$$\delta_n * \delta_m = \sum_{k=|n-m|}^{n+m} c(n,m,k)\delta_k \qquad (n, m \in \mathbb{N}),$$

akkor $K = (\mathbb{N}, P_n, *)$ hipercsoport, amely kommutatív. Ezt a hipercsoportot *polinomiális hipercsoport*nak nevezzük (**[6]**).

3.2. Sturm–Liouville hipercsoportok. A továbbiakban legyen $\mathbb{R}_0 = [0, +\infty[$. Egy folytonos $A : \mathbb{R}_0 \to \mathbb{R}$ függvényt *Sturm–Liouville függvény*nek nevezünk, ha pozitív és folytonosan differenciálható a pozitív valós számokon. Adott A Sturm–Liouville függvény esetén definiálhatjuk az L_A *Sturm–Liouville operátort* az alábbi módon

$$L_A\ f = -f'' - \frac{A'}{A} f',$$

ahol f kétszer folytonosan differenciálható valós függvény a pozitív valós számokon. L_A segítségével bevezetünk egy l differenciáloperátort az alábbiak szerint

$$l[u](x,y) = (L_A)_x u(x,y) - (L_A)_y u(x,y) =$$
$$= -\partial_1^2 u(x,y) - \frac{A'(x)}{A(x)}\ \partial_1 u(x,y) + \partial_2^2 u(x,y) + \frac{A'(y)}{A(y)}\ \partial_2 u(x,y),$$

ahol u kétszer folytonosan differenciálható a pozitív valós számokon.

Egy hipercsoportot *Sturm–Liouville hipercsoport*nak nevezünk, ha létezik egy A Sturm–Liouville függvény úgy, hogy bármely, $\mathbb{R}_0$-on adott f valós értékű C^∞ függvény esetén u_f az alábbi módon definiált

$$u_f(x,y) = f(x * y) = \int_{\mathbb{R}_0} f \; d(\delta_x * \delta_y)$$

függvény, mely a pozitív valós számpárokon van értelmezve, kétszer folytonosan differenciálható és teljesíti a

$$l[u_f] = 0$$

parciális differenciálegyenletet a $\partial_2 u_f(x,0) = 0$ feltétellel minden pozitív x-re ([**1**] and [**10**]).

3.3. Az $SU(2)$-hipercsoport. Az $SU(2)$-hipercsoport a $G = SU(2)$ csoport folytonos unitér irreducibilis reprezentációival kapcsolatos. A G duálisa azonosítható a természetes számok halmazával. Részletes leírást [**1**] tartalmaz, heurisztikusan az $SU(2)$ folytonos unitér irreducibilis reprezentációi ekvivalencia osztályainak halmaza megadható a $\{T^{(0)}, T^{(1)}, T^{(2)}, \dots\}$ alakban, ahol $T^{(n)}$ dimenziója $n+1$, így azonosíthatjuk $\mathbb{N}$-nel. A konvolúció a következő módon van értelmezve:

$$\delta_m * \delta_n = \sum_{k=|m-n|}^{m+n}{}' \frac{k+1}{(m+1)(n+1)} \delta_k \,, \tag{1}$$

ahol az összegzést csupán minden második tagra végezzük. Ezzel a konvolúció művelettel $\mathbb{N}$-en egy diszkrét kommutatív hipercsoportot definiálunk, mely Hermite-féle és *$SU(2)$-hipercsoport*nak nevezzük.

3.4. Két-pont tartójú hipercsoportok.

3.4.1. *A $K_1 = ([0,1], *)$ hipercsoport.* Legyen $K_1 = ([0,1], *)$ a $[0,1]$ kompakt intervallumon definiált hipercsoport az alábbi konvolúcióval

$$\delta_x * \delta_y = \frac{1}{2}\delta_{x+y} + \frac{1}{2}\delta_{|x-y|}.$$

Ekkor K_1 egy kompakt, egydimenziós hipercsoport ([**1**], Example 3.4.6 on p.191.).

3.4.2. *A $K_2 = ([0,+\infty[, *)$ hipercsoport.* Legyen $K_2 = ([0,+\infty[, *)$ nemnegatív valós számokon definiált hipercsoport az alábbi konvolúcióval

$$\delta_x * \delta_y = \frac{1}{2}\delta_{x+y} + \frac{1}{2}\delta_{x-y} \qquad (0 \le y < x).$$

Ekkor K_2 egy nem kompakt egydimenziós hipercsoport ([**1**], Example 3.4.5 on p. 191.).

3.4.3. *A* cosh-*hipercsoport.* Legyen K a nemnegatív valós számokon definiált cosh-*hipercsoport* az alábbi konvolúcióval

$$\delta_x * \delta_y = \frac{\cosh(x+y)}{2\cosh x \cosh y}\delta_{x+y} + \frac{\cosh(|x-y|)}{2\cosh x \cosh y}\delta_{|x-y|}\,.$$

Ez a hipercsoport is egy speciális két-pont tartójú hipercsoport ([**1**]). Mindazonáltal ez a hipercsoport más módon is származtatható. Ha tekintjük a $A(t) = \cosh^2 t$ Sturm–Liouville függvényt a nemnegatív valós számokon, akkor a megfelelő Sturm–Liouville hipercsoport éppen a cosh-hipercsoport.

4. EXPONENCIÁLIS ÉS ADDITÍV FÜGGVÉNYEK HIPERCSOPORTOKON

Legyen K egy hipercsoport a $*$ konvolúcióval, a $^\vee$ involúcióval és az e egységgel. Jelölje τ_y a K-beli y-nal vett bal eltolás operátorát a K-n értelmezett összes komplex értékű függvények halmazán, amelyek $\delta_x * \delta_y$ integrálhatók minden K-beli x, y-ra. Azt mondjuk, hogy egy komplex értékű folytonos a függvény *additív* K-n, ha

$$\int_K a(t)\, d(\delta_x * \delta_y)(t) = a(x) + a(y)$$

teljesül minden K-beli x, y-ra. Egy komplex értékű folytonos m függvény *exponenciális* K-n, ha nem azonosan zéró és

$$\int_K m(t)\, d(\delta_x * \delta_y)(t) = m(x)m(y)$$

teljesül minden K-beli x, y-ra.

4.1. Polinomiális hipercsoportok. Legyen $K = (\mathbb{N}, P_n)$ egy polinomiális hipercsoport. Ismeretes, hogy egy tetszőleges $K = (\mathbb{N}, P_n)$ polinomiális hipercsoporton az exponenciálisok az $m(n) = P_n(\lambda)$ $(n \in \mathbb{N})$ alakban írhatók valamilyen λ komplex szám esetén, az additív függvények pedig az $a(n) = cP_n'(1)$ $(n \in \mathbb{N})$ alakban valamilyen c komplex szám esetén.

4.2. Sturm–Liouville hipercsoportok. Legyen $K = (\mathbb{R}_0, A)$ egy Sturm–Liouville hipercsoport.

Ezen a hipercsoporton az exponenciálisok az alábbi differenciálegyenlet megoldásaiként kaphatóak meg:

$$m''(x) + \frac{A'(x)}{A(x)}\, m'(x) = \lambda m(x), \quad m(0) = 1,\ m'(0) = 0$$

minden pozitív x és valamely λ komplex szám esetén. Az additív függvények is egy speciális differenciálegyenlet megoldásaiként adhatóak meg:

$$a''(x) + \frac{A'(x)}{A(x)}\, a'(x) = \lambda, \quad a(0) = 0, \; m'(0) = 0$$

minden pozitív x és valamely λ komplex szám esetén.

4.3. Az $SU(2)$-hipercsoport. Az $M : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ függvény exponenciális az $SU(2)$-hipercsoporton, ha

$$M(m)M(n) = M(m*n) = \sum_{k=|m-n|}^{m+n}{}' \frac{k+1}{(m+1)(n+1)}\, M(k) \tag{2}$$

teljesül minden m, n természetes számra. A továbbiakban a „ $'$ ” azt jelöli, hogy az összegzést csak minden második tagra végezzük.

Tétel 4.1. *Az $M : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ függvény pontosan akkor exponenciális az $SU(2)$-hipercsoporton, ha létezik olyan λ komplex szám, hogy*

$$M(n) = \frac{\sinh[(n+1)\lambda]}{(n+1)\sinh\lambda} \tag{3}$$

teljesül minden n természetes számra. (Itt a $\lambda = 0$ esetben a megfelelő exponenciális az $M = 1$.)

Az $A : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ függvény additív az $SU(2)$-hipercsoporton, ha

$$A(m) + A(n) = A(m*n) = \sum_{k=|m-n|}^{m+n}{}' \frac{k+1}{(m+1)(n+1)}\, A(k) \tag{4}$$

teljesül minden m, n természetes számra.

Tétel 4.2. *Az $A : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ függvény pontosn akkor additív függvény az $SU(2)$-hipercsoporton, ha létezik olyan c komplex szám, hogy*

$$A(n) = \frac{c}{3} n(n+2) \tag{5}$$

teljesül minden n természetes számra.

5. ÁLTALÁNOSÍTOTT MOMENTUMFÜGGVÉNY SOROZATOK

Legyen φ egy komplex értékű folytonos függvény a K kommutatív hipercsoporton és legyen n nemnegatív egész szám. Azt mondjuk, hogy φ *egy n-ed rendű általánosított momentumfüggvény*, ha vannak olyan $\varphi_k : K \to \mathbb{C}$ komplex értékű folytonos függvények $k = 0, 1, \ldots, n$ esetén, úgy hogy $\varphi_0 \neq 0$, $\varphi_n = \varphi$ és

$$\varphi_k(x*y) = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \varphi_i(x)\varphi_{k-i}(y) \tag{6}$$

teljesül $k = 0, 1, \ldots, n$ esetén és minden K-beli x, y-ra. Ekkor azt mondjuk, hogy a φ_k függvények $k = 0, 1, \ldots, n$ esetén egy *n-ed rendű általánosított momentumfüggvény sorozat*ot alkotnak ([**12**], [**6**], [**5**], [**7**]).

5.1. Lineáris függetlenség.

TÉTEL 5.1. *Legyen K egy kommutatív hipercsoport, $n \geq 1$ egész szám és $(\varphi_k)_{k=0}^n$ egy általánosított momentumfüggvény sorozat, melyre $\varphi_1 \neq 0$. Ekkor a φ_n általánosított momentumfüggvény nem lineáris kombinációja a $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1}$ általánosított momentumfüggvényeknek.*

TÉTEL 5.2. *Legyen K egy kommutatív hipercsoport, $n \geq 1$ egész szám és $(\varphi_k)_{k=0}^n$ egy általánosított momentumfüggvény sorozat, melyre $\varphi_1 \neq 0$. Ekkor a $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_n$ függvények lineárisan függetlenek.*

5.2. Momentumfüggvények az $SU(2)$-hipercsoporton. Legyen n egy nemnegatív egész és vezessük be az alábbi Φ függvényt:

$$\Phi(n, \lambda) = \frac{\sinh[(n+1)\lambda]}{(n+1)\sinh\lambda} \tag{7}$$

minden n nemnegatív egész, és $\lambda \neq 0$ komplex szám esetén, legyen $\Phi(n, 0) = 1$ minden n in $\mathbb{N}$ esetén. Ekkor a $\Phi : \mathbb{N} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ függvényt *exponenciális család*nak nevezzük az $SU(2)$-hipercsoporton. Ezen a hipercsoporton minden exponenciális $n \mapsto \Phi(n, \lambda)$ alakban írható valamilyen rögzített λ komplex szám esetén, és fordítva, az $n \mapsto \Phi(n, \lambda)$ függvény exponenciális az $SU(2)$-hipercsoporton minden λ komplex szám esetén.

TÉTEL 5.3. *Legyen K az $SU(2)$-hipercsoport és Φ legyen egy exponenciális család. A $\varphi_0, \varphi_1, ..., \varphi_N : K \to \mathbb{C}$ függvények pontosan akkor alkotnak N-ed rendű általánosított momentumfüggvény sorozatot K-n, ha léteznek $j = 1, 2, \ldots, N$ esetén, olyan c_j komplex számok, melyekre*

$$\varphi_k(n) = \frac{d^k}{dt^k}\Phi(n, f(t))(0) \tag{8}$$

teljesül minden n természetes számra, $k = 0, 1, \ldots, N$ esetén, ahol

$$f(t) = \sum_{j=0}^{N} \frac{c_j}{j!} t^j$$

teljesül minden t komplex számra.

6. EXPONENCIÁLIS MONOMOK STURM–LIOUVILLE HIPERCSOPORTOKON

A spektrálszintézis szempontjából nem mellékes, hogy Sturm–Liouville hipercsoportokon az exponenciális monomok lineárisan függetlenek. A következőkben legyen $K = (\mathbb{R}_0, A)$ egy Sturm–Liouville hipercsoport. Ha a $\varphi : \mathbb{R}_0 \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ függvényre teljesül a

$$\partial_1^2 \varphi(x,\lambda) + p(x)\partial_1\varphi(x,\lambda) = \lambda\varphi(x,\lambda), \qquad \varphi(0,\lambda) = 1, \qquad \partial_1\varphi(0,\lambda) = 0 \tag{9}$$

feltétel minden x pozitív valós és λ komplex szám esetén, ahol $p(x) = \frac{A'(x)}{A(x)}$, akkor φ exponenciális család, a fenti értelemben.

Az exponenciális monomokat az exponenciális család felhasználásával értelmezzük. K-n az $x \mapsto P(\partial_2)\varphi(x,\lambda)$ függvény egy *exponenciális monom*, ahol P egy komplex polinom, λ pedig komplex szám. A $P(\partial_2)$ jelentése nyilvánvaló. Vegyük észre, hogy az „exponenciális monom” fogalma analóg a polinomiális hipercsoportokon bevezethetőkkel ([**9**] and [**11**]).

6.1. Lineáris függetlenség.

Az exponenciális monomok egy fontos alosztályát jelentik az $x \mapsto \partial_2^k\varphi(x,\lambda)$ alakú függvények, ahol k nemnegatív egész és λ komplex szám. Megjegyezzük, hogy ha $\lambda = 0$, akkor $\varphi(x,0) = 1$ minden x nemnegatív valós szám esetén, így az $x \mapsto \partial_2^k\varphi(x,0)$ függvény az azonosan 1 függvény, ha $k = 0$, és azonosan 0, ha $k > 0$. Az egyszerűség kedvéért az $x \mapsto \partial_2^k\varphi(x,\lambda)$ függvényeket *speciális exponenciális monom*oknak fogjuk nevezni, ha k nemnegatív egész és λ komplex szám. Tegyük fel továbbá, hogy ha $\lambda = 0$, akkor $k = 0$. A következő eredményekben a speciális exponenciális monomok lineáris függetlenségét állítjuk.

TÉTEL 6.1. *Bármely hipercsoporton az exponenciálisok lineárisan függetlenek.*

TÉTEL 6.2. *Legyen K egy Sturm–Liouville hipercsoport az $\varphi : \mathbb{R}_0 \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ exponenciális családdal, n egy nemnegatív egész és $\lambda_0 \neq 0$ egy komplex szám. Ebben az esetben az*

$$x \mapsto \varphi(x,\lambda_0), x \mapsto \partial_2\varphi(x,\lambda_0), \ldots, x \mapsto \partial_2^n\varphi(x,\lambda_0) \tag{10}$$

speciális exponenciális monomok lineárisan függetlenek.

TÉTEL 6.3. *Bármely Sturm–Liouville hipercsoporton a különböző speciális exponenciális monomok lineárisan függetlenek.*

6.2. Exponenciális monomok eltoltjai.

Az exponenciális monomok eltoltai analógiát mutatnak a momentumfüggvények karakterizáló tulajdonságával.

TÉTEL 6.4. *Legyen $K = (\mathbb{R}_0, A)$ egy Sturm-Liouville hipercsoport, λ egy komplex szám, N egy nemnegatív egész szám és $x \mapsto \partial_2^N\Phi(x,\lambda)$ egy speciális exponenciális monom. Ekkor*

$$\tau_y\, \partial_2^N\Phi(x,\lambda) = \sum_{i=0}^{N} \binom{N}{i} \partial_2^i\Phi(x,\lambda)\partial_2^{N-i}\Phi(y,\lambda) \tag{11}$$

teljesül minden y nemnegatív valós szám esetén.

Összegezve elmondhatjuk, hogy egy tetszőleges exponenciális monom eltoltja egy speciális lineáris kombinációval írható le, amelyben a bázis függvények az adott exponenciális monomhoz tartozó alacsonyabb rendű exponenciális monomok. Ez lényeges észrevétel a spektrálszintézis szempontjából.

7. SPEKTRÁLANALÍZIS

7.1. Spektrálanalízis kommutatív hipercsoportokon. A spektrálszintézis topológikus csoportok feletti eltolásinvariáns függvényterek leírásával foglalkozik. Tegyük fel, hogy adott egy lokálisan kompakt Abel-csoport, és tekintsük a csoporton értelmezett összes komplex értékű folytonos függvények halmazát ellátva a pontonkénti lineáris műveletekkel és a kompakt halmazokon egyenletes konvergencia topológiájával. Ennek a térnek egy nemüres, zárt, eltolásinvariáns lineáris alterét *varietás*nak nevezzük. A spektrálanalízis és spektrálszintézis alapproblémái az alábbiak:

(1) Igaz-e, hogy bármely nem nulla varietás tartalmaz exponenciális függvényt (*spektrálanalízis*)?

(2) Igaz-e, hogy bármely varietás egyenlő mint exponenciális monomjainak zárt lineáris burkával (*spektrálszintézis*)?

A spektrálanalízis és spektrálszintézis vizsgálatai az exponenciális monomok fogalmán alapulnak. A következő állításban kommutatív hipercsoportok feletti véges dimenziós varietásokra igazolunk spektrálanalízist.

TÉTEL 7.1. *Kommutatív hipercsoportok véges dimenziós varietásaira a spektrálanalízis teljesül.*

7.2. Spektrálanalízis momentumfüggvényekkel. Igazoljuk, hogy a $\mathcal{C}(K)$ tér egy V varietására spektrálanalízis teljesül, ha a varietás tartalmaz nem zéró általánosított momentumfüggvényt.

TÉTEL 7.2. *Legyen K egy kommutatív hipercsoport, n egy nemnegatív egész szám és a $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_n$ egy általánosított momentumfüggvény sorozat, ahol $\varphi_1 \neq 0$. Ha V egy varietás és φ_n V-hez tartozik, akkor φ_k is V-hez tartozik minden $k = 0, 1, \ldots, n$ esetén. Speciálisan, spektrálanalízis teljesül V-n.*

8. MOMENTUM PROBLÉMA

Legyen μ egy kompakt tartójú mérték K-n és legyen $(\varphi_k)_{k=0}^{\infty}$ egy általánosított momentumfüggvény sorozat. Ekkor minden n természetes számra az

$$m_n = \int_K \varphi_n \, d\mu$$

komplex számokat a *μ mérték n-edik általánosított momentum*ának nevezzük az adott általánosított momentumfüggvény sorozatra vonatkozóan. Az $(m_n)_{n=0}^{\infty}$ komplex sorozatot a *μ mérték általánosított momentum sorozat*ának nevezzük az adott általánosított momentumfüggvény sorozatra vonatkozóan.

Az egzisztencia problémáját a következőképpen fogalmazhatjuk: Legyen $(\varphi_k)_{k=0}^{\infty}$ egy általánosított momentumfüggvény sorozat, $(m_n)_{n=0}^{\infty}$ pedig egy adott komplex számsorozat. Milyen feltételek mellett létezik olyan kompakt tartójú μ mérték, hogy az adott komplex számsorozat éppen a μ mérték általánosított momentum sorozata a $(\varphi_k)_{k=0}^{\infty}$ általánosított momentumfüggvény sorozatra nézve?

Az egyérteleműség kérdése a következő: ha egy μ és egy ν kompakt tartójú mérték ugyanazzal az általánosított momentum sorozattal rendelkeznek egy adott $(\varphi_k)_{k=0}^{\infty}$ általánosított momentumfüggvény sorozatra nézve, akkor következik-e, hogy a két mérték megegyezik?

Az egyértelműségi probléma megoldását polinomiális és Sturm–Liouville hipercsoportokon az alábbi eredmények tartalmazzák.

8.1. Polinomiális hipercsoportok.

TÉTEL 8.1. *Legyen $K = (\mathbb{N}, P_n)$ egy polinomiális hipercsoport, μ egy véges tartójú mérték $\mathbb{N}$-en és legyen $(\varphi_k)_{k=0}^{\infty}$ egy általánosított momentumfüggvény sorozat K-n. Ha $\varphi_1 \neq 0$ és*

$$\int_{\mathbb{N}} \varphi_k(n) \, d\mu(n) = 0 \tag{12}$$

teljesül minden $k = 0, 1, 2, \ldots,$ esetén, akkor $\mu = 0$.

KÖVETKEZMÉNY 8.1. *Legyen $K = (\mathbb{N}, P_n)$ egy polinomiális hipercsoport, μ, ν véges tartójú mértékek $\mathbb{N}$-en, $(\varphi_k)_{k=0}^{\infty}$ pedig egy általánosított momentumfüggvény sorozat K-n. Ha $\varphi_1 \neq 0$ és a μ és ν mértékek általánosított momentumai az adott általánosított momentumfüggvény sorozatra vonatkozóan rendre megegyeznek, akkor $\mu = \nu$.*

8.2. Sturm–Liouville hipercsoportok. Az előbbiekhez hasonlóan, a momentum probléma egyértelműségét Sturm–Liouville hipercsoportokon vizsgálva az alábbi eredmények kaphatók.

TÉTEL 8.2. *Legyen $K = (\mathbb{R}_0, A)$ egy Sturm–Liouville hipercsoport, μ egy kompakt tartójú mérték $\mathbb{R}_0$-on és legyen $(\varphi_k)_{k=0}^{\infty}$ egy általánosított momentumfüggvény sorozat*

K-n. Ha $\varphi_1 \neq 0$ és

$$\int_{\mathbb{R}_0} \varphi_k(x)\, d\mu(x) = 0 \tag{13}$$

teljesül minden $k = 0, 1, 2, \ldots,$ esetén, akkor $\mu = 0$.

KÖVETKEZMÉNY 8.2. *Legyen $K = (\mathbb{R}_0, A)$ egy Sturm–Liouville hipercsoport, μ, ν kompakt tartójú mértékek $\mathbb{R}_0$-on és legyen $(\varphi_k)_{k=0}^{\infty}$ egy általánosított momentumfüggvény sorozat K-n. Ha $\varphi_1 \neq 0$, valamint a μ és a ν mértékek általánosított momentumai az adott általánosított momentumfüggvény sorozatra vonatkozóan rendre megegyeznek, akkor $\mu = \nu$.*

9. FELTÉTELES FÜGGVÉNYEGYENLETEK ÉS ALKALMAZÁSAIK

Ebben a fejezetben leírjuk az exponenciális és additív függvényeket néhány kétpont tartójú hipercsoporton. Ezeknek a hipercsoportoknak a részletes tárgyalása [**1**]-ben található. Vizsgálatainkat és eredményeinket feltételeket tartalmazó függvényegyenletek megoldásával kapjuk meg. Az egyenletek regularitási feltételeit a [**3**] ereményei, illetve azok felhasználásával kapható új eredmények szolgáltatják. Módszerünk más, hasonló esetekben is alkalmazható.

9.1. Feltételes d'Alembert-típusú függvényegyenletek.

TÉTEL 9.1. *Legyen $f : [0, 1] \to \mathbb{C}$ folytonos függvény az $f(0) = 1$ feltétellel és*

$$f(x + y) + f(x - y) = 2f(x)f(y)\,, \tag{14}$$

ahol $0 \leq y \leq x$ és $x + y \leq 1$. Ekkor létezik olyan λ komplex szám, hogy f az alábbi alakban írható

$$f(x) = \cosh \lambda x \tag{15}$$

minden $0 \leq x \leq 1$ esetén.

TÉTEL 9.2. *Legyen $f : [0, +\infty[\to \mathbb{C}$ folytonos függvény az $f(0) = 1$ feltétellel és*

$$f(x + y) + f(x - y) = 2f(x)f(y)\,, \tag{16}$$

ahol $0 \leq y \leq x$. Ekkor létezik olyan λ komplex szám, hogy f az alábbi alakban írható

$$f(x) = \cosh \lambda x \tag{17}$$

minden $x \geq 0$ esetén.

9.2. Feltételes norma-négyzet egyenletek.

TÉTEL 9.3. *Legyen $f : [0,1] \to \mathbb{C}$ folytonos függvény és*

$$f(x+y) + f(x-y) = 2f(x) + 2f(y)\,, \tag{18}$$

ahol $0 \le y \le x$ és $x + y \le 1$. Ekkor létezik olyan λ komplex szám, hogy f az alábbi alakban írható

$$f(x) = \lambda x^2 \tag{19}$$

minden $0 \le x \le 1$ esetén. Továbbá, az f függvény pontosan akkor valós, ha λ valós szám.

TÉTEL 9.4. *Legyen $f : [0, +\infty[\to \mathbb{C}$ folytonos függvény és*

$$f(x+y) + f(x-y) = 2f(x) + 2f(y)\,, \tag{20}$$

ahol $0 \le y \le x$. Ekkor létezik olyan λ komplex szám, hogy f az alábbi alakban írható

$$f(x) = \lambda x^2 \tag{21}$$

minden $x \ge 0$ esetén. Továbbá, az f függvény pontosan akkor valós, ha λ valós szám.

9.3. Exponenciális és additív függvények két-pont tartójú hipercsoportokon.

9.3.1. *A $K_1 = ([0,1], *)$ hipercsoport.* Legyen K_1 a $[0,1]$ intervallumon definiált hipercsoport, melyen a konvolúció

$$\delta_x * \delta_y = \frac{1}{2}\delta_{x+y} + \frac{1}{2}\delta_{|x-y|}$$

módon van értelmezve. Ez a hipercsoport egydimenziós, kompakt típusú ([**1**], 3.4.6 példa). Az additív függvények az

$$a(x+y) + a(|x-y|) = 2a(x) + 2a(y) \qquad (0 \le x, y \le 1) \tag{22}$$

egyenlet megoldásai.

TÉTEL 9.5. *Legyen K_1 a fent definiált hipercsoport. Az $a : [0,1] \to \mathbb{C}$ folytonos függvény K_1-en pontosan akkor additív, ha létezik olyan λ komplex szám, hogy*

$$a(x) = \lambda x^2 \tag{23}$$

teljesül minden $0 \le x \le 1$ esetén.

A konvolúció definíciója alapján K_1-en a folytonos $m : [0,1] \to \mathbb{C}$ nem nulla függvény, akkor és csak akkor exponenciális, ha

$$m(x+y) + m(x-y) = 2m(x)m(y) \qquad (0 \le y \le x,\ x + y \le 1)\,. \tag{24}$$

TÉTEL 9.6. *Legyen K_1 a fent definiált hipercsoport. Az $m : [0,1] \to \mathbb{C}$ folytonos függvény K_1-en pontosan akkor exponenciális, ha létezik olyan λ komplex szám, hogy*

$$m(x) = \cosh \lambda x \tag{25}$$

teljesül $0 \le x \le 1$ esetén.

9.3.2. *A* $K_2 = ([0, +\infty[, *)$ *hipercsoport.* A K_2 hipercsoport a $[0, +\infty[$ nemnegatív valós számokon definiált a

$$\delta_x * \delta_y = \frac{1}{2}\delta_{x+y} + \frac{1}{2}\delta_{x-y} \qquad (0 \leq y < x)$$

konvolúcióval. A $K_2 = ([0, +\infty[, *)$ hipercsoport egydimenziós, nem kompakt típusú ([**1**], 3.4.5 példa). Az additív függvények az

$$a(x+y) + a(x-y) = 2a(x) + 2a(y) \qquad (0 \leq y < x) \tag{26}$$

egyenlet megoldásai.

Tétel 9.7. *Legyen* K_2 *a fent definiált hipercsoport. Az* $a : [0, +\infty[\to \mathbb{C}$ *folytonos függvény* K_2*-n pontosan akkor additív, ha létezik olyan* λ *komplex szám, hogy*

$$a(x) = \lambda x^2 \tag{27}$$

teljesül minden $x \geq 0$ *esetén.*

A K_2 hipercsoport exponenciálisait az alábbi tétel írja le.

Tétel 9.8. *Legyen* K_2 *a fent definiált hipercsoport. Az* $m : [0, +\infty[\to \mathbb{C}$ *folytonos függvény* K_2*-n pontosan akkor exponenciális, ha létezik olyan* λ *komplex szám, hogy*

$$m(x) = \cosh \lambda x \tag{28}$$

teljesül minden $x \geq 0$ *esetén.*

9.3.3. *A* cosh*-hipercsoport.* Tekintsük a nemnegatív valós számokat egy hipercsoport alaphalmazának, és legyen a konvolúció az alábbi

$$\delta_x * \delta_y = \frac{\cosh(x+y)}{2\cosh x \cosh y}\delta_{x+y} + \frac{\cosh(|x-y|)}{2\cosh x \cosh y}\delta_{|x-y|}\,.$$

Ez a hipercsoport egy két-pont tartójú hipercsoport, melyet cosh-*hipercsoport*nak nevezünk ([**1**]) és $K_3 = ([0, +\infty[, *)$ módon jelölünk. Ha bevezetjük az

$$\tilde{m}(t) = \cosh(t)\, m(t)$$

helyettesítést, akkor az exponenciálisokat a következő egyenlet írja le

$$\cosh(x+y)\, m(x+y) + \cosh(|x-y|)\, m(|x-y|) =$$
$$= 2\left(\cosh(x)\, f(x)\right)\left(\cosh(y)\, f(y)\right),$$

amely az alábbi alakra írható át

$$\tilde{m}(x+y) + \tilde{m}(|x-y|) = 2\,\tilde{m}(x) + \tilde{m}(y).$$

Tétel 9.9. *Legyen* K_3 *a* cosh*-hipercsoport. Ekkor az* $m : [0, +\infty[\to \mathbb{C}$ *folytonos függvény* K_3*-on pontosan akkor exponenciális, ha létezik olyan* λ *komplex szám, hogy*

$$m(x) = \frac{\cosh \lambda x}{\cosh x} \tag{29}$$

teljesül minden $x \geq 0$ *esetén.*

Az additív függvények egyenletét az

$$\cosh(x+y)\,a(x+y) + \cosh(x-y)\,a(x-y) =$$
$$= 2\,\cosh x \cosh y\, a(x) + 2\,\cosh x \cosh y\, a(y) \quad (0 \le y \le x)$$

egyenletből kapjuk. Differenciáljuk az előbbi egyenletet az „ y ” változó szerint kétszer, ezt követően pedig alkalmazzuk az $y = 0$ és $\lambda = a''(0)$ helyettesítéseket, ekkor az $a(0) = 0$ és $a'(0) = 0$ feltételekből az

$$a''(x) + 2\frac{\sinh x}{\cosh x}\, a'(x) = \lambda$$

egyenletet kapjuk, amelynek megoldásai a cosh-hipercsoport additív függvényei.

TÉTEL 9.10. *Legyen* K_3 *a* cosh-*hipercsoport. Ekkor az* $a : [0, +\infty[\to \mathbb{C}$ *folytonos függvény* K_3*-on pontosan akkor additív, ha létezik olyan* λ *komplex szám, hogy*

$$a''(x) + \frac{2\sinh x}{\cosh x} a'(x) = \lambda \tag{30}$$

teljesül minden $x \ge 0$ *esetén.*

Ennek az egyenletnek a megoldásai speciális Bessel-függvények.

Bibliography

[1] W. R. Bloom and H. Heyer. *Harmonic analysis of probability measures on hypergroups*, volume 20 of *de Gruyter Studies in Mathematics*. Walter de Gruyter & Co., Berlin, 1995.

[2] C. F. Dunkl. The measure algebra of a locally compact hypergroup. *Trans. Amer. Math. Soc.*, (179):331–348, 1973.

[3] A. Járai. *Regularity properties of functional equations in several variables*, volume 8 of *Advances in Mathematics (Springer)*. Springer, New York, 2005.

[4] R. I. Jewett. Spaces with an abstract convolution of measures. *Advances in Math.*, 18(1):1–101, 1975.

[5] Á. Orosz and L. Székelyhidi. Moment functions on polynomial hypergroups in several variables. *Publ. Math. Debrecen*, 65(3-4):429–438, 2004.

[6] Á. Orosz and L. Székelyhidi. Moment functions on polynomial hypergroups. *Arch. Math. (Basel)*, 85(2):141–150, 2005.

[7] Á. Orosz and L. Székelyhidi. Moment functions on Sturm-Liouville hypergroups. *Ann. Univ. Sci. Budapest. Sect. Comput.*, 29:141–156, 2008.

[8] R. Spector. Apercu de la théorie des hypergroupes. *Analyse harmonique sur les groupes de Lie, Sém. Nancy-Strasbourg, 1973-75, Lecture Notes in Math.*, (497):643–673, 1975.

[9] L. Székelyhidi. Spectral analysis and spectral synthesis on polynomial hypergroups. *Monatsh. Math.*, 141(1):33–43, 2004.

[10] L. Székelyhidi. Functional equations on Sturm-Liouville hypergroups. *Math. Pannonica*, 17(2):169–182, 2006.

[11] L. Székelyhidi. Spectral synthesis on multivariate polynomial hypergroups. *Monatsh. Math.*, 153(2):145–152, 2008.

[12] H. Zeuner. Moment functions and laws of large numbers on hypergroups. *Math. Z.*, 211(3):369–407, 1992.

Publications of the author

1. L. Székelyhidi and L. Vajday, *Spectral analysis on commutative hypergroups*, Aequationes Math., vol. **80** (1-2), 223–226, 2010.
2. L. Székelyhidi and L. Vajday, *A moment problem on some types of hypergroups*, Ann. Funct. Anal. 3 no. 2, 58–65, 2012.
3. L. Székelyhidi and L. Vajday, *Spectral analysis and moment functions*, to appear in Jour. Inf. Math. Sci., 4 no. 2, 185–188, 2012.
4. L. Székelyhidi and L. Vajday, *Functional equations on the $SU(2)$-hypergroup*, Math. Pannonica, to appear
5. L. Székelyhidi and L. Vajday, *On conditional functional equations with applications on hypergroups*, submitted
6. L. Vajday, *Exponential monomials on Sturm–Liouville hypergroups*, Banach J. Math. Anal., 4 no. 2, 139–146, 2010.
7. L. Vajday, *Moment property of exponential monomials on Sturm–Liouville hypergroups*, Ann. Funct. Anal. 1 no. 2, 57–63, 2010.

Talks delivered by the author

1. *Spektrálszintézis Sturm–Liouville hipercsoportok véges dimenziós varietásain*, XXIX. Országos Tudományos Diákköri Konferencia,
   Szombathely, Hungary, April 7–9, 2009.
2. *Spectral Analysis on Sturm–Liouville Hypergroups*, VI. International Student Conference on Analysis,
   Síkfőkút, Hungary, January 30– February 3, 2010.
3. *A Moment Problem on Hypergroups II.*, The Eleventh Katowice-Debrecen Winter Seminar on Functional Equations and Inequalities,
   Wisła-Małinka, Poland, February 2–5, 2011.
4. *Moment Property of Exponential Monomials on Sturm–Liouville Hypergroups*, VII. International Student Conference on Analysis,
   Wisła, Poland, February 5–8, 2011.
5. *Spectral Analysis Using Moment Functions on Commutative Hypergroups*, Summer Symposium in Real Analysis XXXV.,
   Budapest, Hungary, June 5–11, 2011.
6. *Functional Equations on Special Hypergroups*, The Twelfth Debrecen-Katowice Winter Seminar on Functional Equations and Inequalities,
   Hajdúszoboszló, Hungary, January 25–28, 2012.

7. *Functional Equations on the $SU(2)$-hypergroup*, VIII. International Students Conference on Analysis,
   Noszvaj, Hungary, January 28–31, 2012.