

Egyetemi doktori (PhD) értekezés tézisei

A számítógépes görbe- és  
felületmodellezés néhány geometriai  
problémájának megoldása

Kunkli Roland Imre

Témavezető: Dr. Hoffmann Miklós



DEBRECENI EGYETEM  
Informatikai Tudományok Doktori Iskola  
Debrecen, 2014.



Synopsis of PhD thesis

Solutions for some geometrical  
problems of computer-aided design

Roland Imre Kunkli

Supervisor: Dr. Miklós Hoffmann



UNIVERSITY OF DEBRECEN  
Doctoral School of Informatics  
Debrecen, 2014.



# Tartalom/Contents

<b>1. A doktori értekezés előzményei és célkitűzései</b>	<b>1</b>
1.1. „Skinning” . . . . .	1
1.2. Szabadformájú görbék izooptikusai . . . . .	3
<b>2. Az értekezés új tudományos eredményei</b>	<b>5</b>
2.1. „Skinning” . . . . .	5
2.1.1. A probléma precízebb leírása . . . . .	5
2.1.2. A <i>skin</i> konstrukciója körök esetén . . . . .	7
2.1.3. Térbeli kiterjesztés gömbökre . . . . .	8
2.1.4. Biarc görbék használatának lehetőségei . . . . .	10
2.2. Bézier-görbék izooptikusaival kapcsolatos új eredményeink . . . . .	12
<b>3 Previous research and the motivation for the thesis</b>	<b>17</b>
3.1 „Skinning” . . . . .	17
3.2 Isoptics of free-form curves . . . . .	19
<b>4 The new scientific results of the thesis</b>	<b>21</b>
4.1 „Skinning” . . . . .	21
4.1.1 The precise definition of the problem . . . . .	21
4.1.2 The construction of the skin in 2D . . . . .	22
4.1.3 Generalization in 3D based on spheres . . . . .	23
4.1.4 Using biarc curves for skinning . . . . .	25
4.2 Our new approaches to determine isoptics of Bézier curves . . . . .	27
<b>Irodalomjegyzék/Bibliography</b>	<b>31</b>
<b>A. Kimeneti <i>skin</i>-ek/Our skinning results</b>	<b>39</b>
<b>B. Publikációs lista/List of publications</b>	<b>43</b>



# 1. A doktori értekezés előzményei és célkitűzései

## 1.1. „Skinning”

A geometriai adatok interpolációja központi fontosságú a számítógépes geometriai tervezésben. Amennyiben ezek az adatok pontok, számtalan, ma már szinte standardnak számító módszer közül választhatunk [21, 14, 43], és folyamatosan születnek eredmények az ilyen típusú interpoláló görbék alakváltoztatási lehetőségeinek feltárását illetően is [58, 59, 40, 19].

Napjainkban egyre inkább igény mutatkozik arra, hogy az interpoláció fogalmát tehát valamilyen formában kiterjesszük más típusú geometriai objektumok esetére is, említhetjük itt a kört, vagy akár a gömböt is. Mivel egy viszonylag új területről van szó, a szakmai terminológia kis kiegészítésre szorul. Angol szóhasználatban körök esetén gyakran olvasni „*2D ball skinning*”-ről, melynek során lényegében olyan görbepár megtalálása a cél, melyek a tekintett köröket rendre érintik egy-egy pontban, továbbá a görbétől elvárjuk, hogy kellően *simák* legyenek, vizuálisan kielégítő eredményt szolgáltatassanak. A probléma nyilván matematikailag precízebb megfogalmazásért kiált, azonban ez irányú kutatásaink megkezdéséig ez még nemzetközi szinten sem állt rendelkezésre.

Ilyen interpolációs módszereket alkotva lehetőségünk nyílna csőszerű struktúrák egyszerűbb tervezésére, lefedési problémák hatékony megoldására vagy molekulamodellizációs feladatok megkönnyítésére, természetesen ez utóbbi esetben már három dimenzióban értelmezve a problémát [13, 6]. Ez az igény egészen újnak számító publikációkban is tetten érhető, orvosi képfeldolgozásban történő felhasználás, konkrétan érmodellizációs problémák kapcsán [63, 54, 55]. A számítógépes animációkészítésben is találkozhatunk hasonló eszközzel, különböző karakterek létrehozásakor egy vázszerkezet megadása után származtathatjuk az azt beburkoló felületet [52].

A probléma első látásra nagyon közeli kapcsolatot mutat azzal,

amikor egy- vagy kétparaméteres görbesereg esetében keressük annak klasszikus értelemben vett burkológörbéjét. A megoldás ilyen esetben jól ismert [66, 5, 24], és a feladat térbe is kiterjeszthető, paraméteresen felírható gömbsorozat burkolójaként kaphatjuk például az angol terminológia szerint „*canal surfaces*”-ként említett csőfelületet, melyekkel Gaspard Monge foglalkozott [36] először. Az általunk vizsgált esetre tekinthetünk akár úgy is, mint a klasszikus értelemben vett burkoló tulajdonság diszkrét értelemben vett megfelelőjére, de esetünkben a jól ismert megoldások korántsem alkalmazhatóak ugyanolyan hatásokkal.

A számítások vonatkozásában jelentős előrelépést jelentett a témában Josef Hoschek doktori értekezése [20]. Azóta számos, javarészt közelítő módszereken alapuló, burkolók konstrukciójával foglalkozó közlemény jelent meg. Ezekről bővebben Farin könyvében [15] olvashatunk. Kör- illetve gömbsorozat esetében Peternellnek és Pottmannak egzakt módon sikerült racionális burkolót előállítaniuk [42], később hasonló eredmények születtek a ciklográfia felhasználásával is [41, 27]. Ezen módszerek közös jellemzője, hogy alkalmazásuk mellett erősen redukálódik a kezelhető adathalmazok száma.

Egy újnak mondható megközelítése a problémának a Slabugh és munkatársai által kitalált módszer [54, 55]. A szerzők egy iteratív technikával oldják meg a feladatot. Maga az iteráció előre definiált energiafüggvények minimalizálásán alapul. A módszerrel  $C^1$  folytonos görbepár vagy felület állítható elő, a folyamat egy kezdeti beállítást követően nem igényel felhasználói interakciót. De a módszerrel több probléma is adódik. Az érintési pontok vagy érintési körök esetében nem garantált, hogy az érinteni kívánt objektumok által meghatározott körlapok vagy gömbtestek ne tartalmazzák azokat. Ez különösen így van, amikor görbepár megtalálása a cél, és az egyes érintési pontok egy-egy kört tekintve egymás középpont körüli  $180^\circ$  fokos elforgatottjából megkaphatók. Ugyanezek a problémák a szerzők három dimenziós esetben adott megoldása esetében is fennállnak. Egy további gondot jelent, hogy az iteráció során a konvergencia ténye nem bizonyított, a használt lépésszám alkalmasint nagyon magas is lehet. Továbbá fontos kiemelni, hogy a folyamat minden módosítás ese-



tén újraindul, így megkérdőjeleződik a valós idejű felhasználhatóság. Szükséges még megemlíteni, hogy a használt energiafüggvényeknek a kialakítása sokszor csak többszöri kísérletezések után, szubjektív döntések eredményeként adódik.

Kutatásunk megkezdésekor elsődleges célunk az volt, hogy pontosan leírjuk azokat a bemeneti, illetve kimeneti adathalmazokat, adatokat, melyeket megengedettnek tekintünk a probléma szempontjából.

Ezután szerettünk volna egy olyan módszert kifejleszteni, amellyel az eddigieknél általánosabb adathalmazok is jól kezelhetők, és  $G^1$  folytonos megoldást szolgáltat. Fontos terveink között szerepelt, hogy a megtalálni kívánt módszer valós idejű tervezhetőséget biztosítson és a kialakított görbe vagy felület az eddig ismert módszerek eredményeihez képest sokkalta jobban legyen érzékeny a kiindulási objektumok sugarára, illetve azok egymáshoz képest történő elhelyezkedésére.

A fenti elgondolásokon alapulva e területen zajló kutatásunkat biarc görbékre vonatkozó analízisre is ki szeretnénk volna terjeszteni, ennek oka, hogy ezen görbetípus jól felhasználható a CNC technológia kapcsán.

## 1.2. Szabadformájú görbék izooptikusai

A számítógépes geometriai modellezés területén folyó kutatások jelentős részét képezik azok, melyek a már meglévő modellezési eszközök tulajdonságait igyekeznek minél jobban feltárni.

Adott görbe izooptikusának meghatározásával már több évszázada foglalkozik a tudomány, habár a szó első ízben Taylor munkájában [60] jelenik meg. Ahogy már többször említettük, jól ismert eredmények állnak rendelkezésünkre a klasszikus görbéink esetében. Különösen igaz ez a kúpszeletekre, például a parabolára, melynek izooptikusa általában hiperbolaív, vagy az  $\alpha = \pi/2$  speciális esetben annak directrix, ez utóbbi esetben ortooptikus görbéről beszélünk [33, 32]. Ezen klasszikus eredmények összefoglalását egészen új munkákban is részletesen megtalálhatjuk [39, 17]. Napjainkban a hiperbolikus sík izooptikusai is kutatás tárgyát képezik [10].

Egy sokkal elméletibb megközelítést találunk a problémára Cieslak munkájában [7], ahol konvex görbék bizonyos családja esetében azok tartófüggvényeit felhasználva juthatunk megoldáshoz. Ezen általános leírás további tulajdonságai, valamint görbék speciális osztályaihoz számolt izooptikusok szintén fellelhetők a szakirodalomban [7, 35, 57].

Az izooptikus görbét széles körben használják a mechanikában [64, 65] és egyéb területeken is.

Azonban számos olyan görbetípust ismerünk, melyek nem tartoznak az előbb említettek közé, és világszerte alkalmazzák őket a számítógéppel segített geometriai tervezésben. Ilyen görbék például a B-szplájn vagy NURBS görbék, továbbá fontos megjegyeznünk, hogy a mindenki által jól ismert Bézier-görbék is még mindig számos tervezőszoftver eszközkészletének részét képezik, egyszerű felépítésük és könnyű módosíthatóságuknak köszönhetően.

Munkánk során azt a fő célt tűztük ki, hogy képesek legyünk leírni és meghatározni egy megadott Bézier-görbe izooptikus görbéit azon a sejtésünkön alapulva, hogy a görbe húrjai fölött értelmezett látókörivek használata közelebb vihet bennünket a megoldáshoz és leegyszerűsítheti az adódó számításokat.

## 2. Az értekezés új tudományos eredményei

### 2.1. „Skinning”

Ezt a témát érintő munkáinkban [28, 30, 29] sikerült megoldást találnunk a felvázolt problémákra.

#### 2.1.1. A probléma precízebb leírása

Mint azt említettük, a probléma pontos megfogalmazása korántsem egyszerű feladat, a hasonló témában eddig mások által publikált cikkekben nem található erre nézve semmilyen pontos definíció. Továbbá fontos megjegyezni, hogy nem minden kör- vagy gömbsorozat tekinthető alkalmas inputnak a feladat szempontjából.

Azzal a céllal, hogy ezeket a hiányosságokat pótoljuk, Hoffmann Miklóssal közös cikkünkben [30] definiáltuk, milyen sorozatokat tekinthetünk a feladat szempontjából elfogadhatónak, illetve milyen feltételeket szabhatunk a keresett megoldásokra vonatkozóan:

**2.1. Definíció.** *Körök egy  $C = \{c_1, c_2, c_3, \dots, c_n\}$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) sorozatát feladatunk szempontjából megengedett bemenetnek mondjuk, ha teljesíti a következő feltételeket ( $d_i$  jelöli a  $c_i$  kör által meghatározott körlapot).*

- $d_i \not\subset \bigcup_{j=1, j \neq i}^n d_j, \quad i \in \{1, 2, \dots, n\}$
- $d_i \cap d_j = \emptyset, \quad i, j \in \{1, 2, \dots, n\}, j \notin \{i-2, i-1, i, i+1, i+2\}$
- ha  $d_{i-1} \cap d_{i+1} \neq \emptyset$ , akkor  $d_{i-1} \cap d_{i+1} \subset d_i$

**2.2. Definíció.** *Adott  $C = \{c_1, c_2, c_3, \dots, c_n\}$  megengedett körsorozat esetén kettő darab, legalább  $G^1$ -folytonos görbét keresünk (jelöljük ezeket  $\mathbf{s}(t)$ -vel, illetve  $\bar{\mathbf{s}}(t)$ -vel, ahol  $t \in [a, b]$ ), melyek rendelkeznek a következő tulajdonságokkal. A feltételeknek megfelelő görbepárt skinnek nevezzük.*

- Minden  $c_i$  kör esetén ( $i = 1, \dots, n$ ) létezik olyan  $\mathbf{p}_i \in c_i$  pont, melyre egyrészt igaz, hogy  $\mathbf{s}$ -nek is pontja, továbbá ebben a pontban a tekintett görbe, illetve kör érintőegyenese megegyezik. Analóg módon létezik  $\bar{\mathbf{p}}_i \in c_i$  pont, mely pontja  $\bar{\mathbf{s}}$ -nek is.
- Az  $\mathbf{s}$  görbe  $\mathbf{p}_i$  pontbeli érintővektorát jelöljük  $\mathbf{v}_i$ -vel. Ettől a vektortól elvárjuk, hogy amennyiben óramutató járásával ellentétes irányú  $90^\circ$ -os elforgatottját tekintjük, akkor a  $\mathbf{o}_i - \mathbf{p}_i$  vektorral (ahol  $\mathbf{o}_i$  jelöli  $c_i$  középpontját) ellentétes irányú vektort kapjunk. Analóg módon  $\bar{\mathbf{s}}$  érintővektorai esetében ez a forgatási irány óramutató járásával megegyező.

- $\mathbf{p}_i \notin \bigcup_{j=1, j \neq i}^n d_j$ , és  $\bar{\mathbf{p}}_i \notin \bigcup_{j=1, j \neq i}^n d_j$ ,  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$

**2.3. Definíció.** Gömbök egy  $S = \{s_1, s_2, s_3, \dots, s_n\}$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) sorozatát feladatunk szempontjából megengedett bemenetnek mondjuk, ha teljesíti a következő feltételeket. ( $g_i$  jelölje az  $s_i$  gömb által meghatározott gömbtestet.)

- $g_i \not\subset \bigcup_{j=1, j \neq i}^n g_j$ ,  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$
- $g_i \cap g_j = \emptyset$ ,  $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$ ,  $j \notin \{i-2, i-1, i, i+1, i+2\}$
- ha  $g_{i-1} \cap g_{i+1} \neq \emptyset$ , akkor  $g_{i-1} \cap g_{i+1} \subset g_i$

**2.4. Definíció.** Gömbök egy  $S = \{s_1, s_2, s_3, \dots, s_n\}$  ( $n \in \mathbb{N}$ ), az előző 2.3-es definíció értelmében megengedett mondott sorozata esetén olyan  $G^1$ -folytonos  $\hat{\mathbf{s}}(\phi, t)$   $\phi \in [0, 2\pi]$ ,  $t \in [a, b]$  burkolófelületet keresünk, amely teljesíti a következő feltételeket:

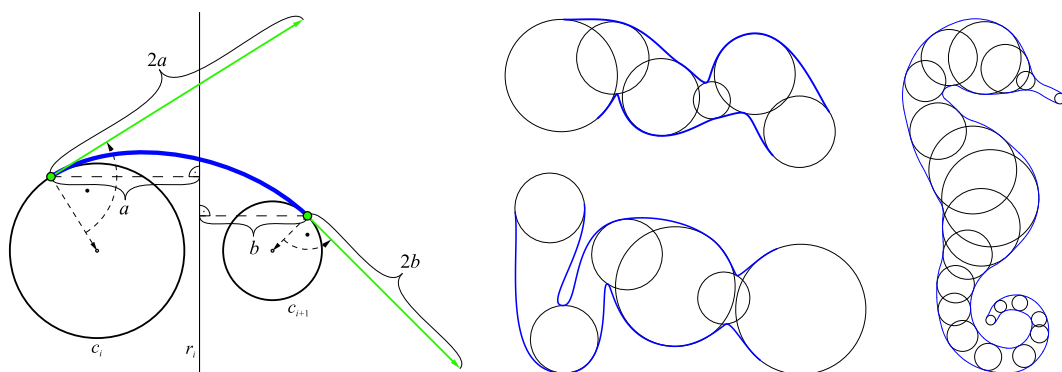
- $\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$  esetén létezik olyan  $\hat{\mathbf{s}}$  paramétervonalaként előálló  $\tilde{c}_i$  érintőkör, hogy az  $\hat{\mathbf{s}}$  burkolófelület és az  $s_i$  gömb közös érintősíkkal rendelkezik  $\tilde{c}_i$  minden pontjában.

- $\tilde{c}_i \not\subset \bigcup_{j=1, j \neq i}^n g_j$ ,  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ .

### 2.1.2. A *skin* konstrukciója körök esetén

A beburkoló görbékig az alábbiak szerint jutottunk el [28, 30]:

- Megvizsgáltuk, hogy egy adott sorozat megengedett-e. Ez egyszerű számolások után könnyen adódik.
- Az egyes  $c_i$  körökön ( $i = 1, \dots, n$ ) érintési pontokat lokalizáltunk először interpolációs megoldások segítségével [28], majd az Apollóniusz-feladat ciklografikus megoldására alapozva [30], ez utóbbi által automatikusan az elvárt tulajdonságú érintési pontokat kaphatjuk [25, 16].
- Az érintési pontokat két csoportra osztottuk,  $\mathbf{p}_i$  és  $\bar{\mathbf{p}}_i$  alappontjaira. Elsősorban azt használtuk ki, hogy három kör esetén a hatványpont és a kapott érintési pontok kollineárisak [25].
- A hatványvonal tulajdonságait kihasználva egy körök elhelyezkedésére kellően érzékeny érintővektor-konstrukciót alkottunk meg, így hoztuk létre a  $\mathbf{v}_i$  és  $\bar{\mathbf{v}}_i$  vektorokat.
- Végül Hermite-íveket definiáltunk az egyes körök között, a konstrukció garantálta a  $G^1$  folytonosságot.

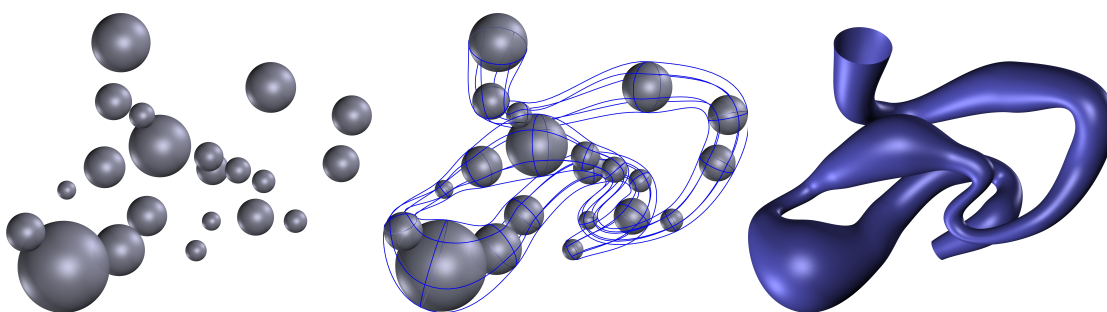


1. ábra. Az érintővektorok hosszának, az egyes szegmenseknek a meghatározása (balra), illetve az algoritmus néhány kimenete (jobbra).

### 2.1.3. Térbeli kiterjesztés gömbökre

A megoldást adó beburkoló felület előállításához a következő lépéseken keresztül jutottunk el [30]:

- Megvizsgáltuk, hogy egy adott gömbsorozat megengedett-e. Ez egyszerű számolások után szintén könnyen adódik.
- Az egyes  $s_i$  gömbökön ( $i = 1, \dots, n$ ) érintőköröket lokalizáltunk az Apollóniusz-feladat ciklografikus megoldására alapozva, ezáltal automatikusan az elvárt tulajdonságú érintési köröket pontokat kaphattuk.
- Az érintési körökön megfeleltetést hajtottunk végre annak érdekében, hogy megkapjuk az egyes felületet leíró görbeívek kezdő-, illetve végpontját.
- A hatványsík tulajdonságait kihasználva egy gömbök elhelyezkedésére kellően érzékeny érintővektor-konstrukciót alkottunk meg.
- Végül Hermite-ívek segítségével paramétereztük a felületdarabokat, a konstrukció garantálta a  $G^1$  folytonosságot.



2. ábra. A saját módszer egy nem koplanáris középpontokkal bíró gömbsorozat esetén kapott kimenete.

A felületet tehát egymáshoz  $G^1$  folytonosan kapcsolódó elemekből állíthatjuk elő a következőképpen:

Legyenek

$$m: \mathbb{R} \rightarrow \{-1, 1\} \quad \text{és} \quad p: \{s_i\} \rightarrow \{-1, 1\}$$

az alábbiak szerint definiált függvények, továbbá  $\mathbf{e} \parallel (\mathbf{w}_i - \tilde{\mathbf{o}}_i)$ ,  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ ,  $\mathbf{e} \in \mathbb{R}^3$ .

$$m(x) = \begin{cases} -1, & \text{ha } x < 0, \\ 1, & \text{egyébként} \end{cases}$$

$$p(s_i) = \begin{cases} m \left( \left\langle \frac{\mathbf{w}_i - \mathbf{o}_i}{\|\mathbf{w}_i - \mathbf{o}_i\|}, \frac{\mathbf{o}_{i+1} - \mathbf{o}_i}{\|\mathbf{o}_{i+1} - \mathbf{o}_i\|} \right\rangle \right), & \text{ha } i \neq n, \\ m \left( \left\langle \frac{\mathbf{w}_i - \mathbf{o}_i}{\|\mathbf{w}_i - \mathbf{o}_i\|}, \frac{\mathbf{o}_i - \mathbf{o}_{i-1}}{\|\mathbf{o}_i - \mathbf{o}_{i-1}\|} \right\rangle \right), & \text{egyébként} \end{cases}$$

$$\mathbf{z}_i = \tilde{\mathbf{o}}_i + \tilde{r}_i \cdot \frac{\mathbf{e} \times (p(s_i) \cdot (\mathbf{w}_i - \tilde{\mathbf{o}}_i))}{\|\mathbf{e} \times (p(s_i) \cdot (\mathbf{w}_i - \tilde{\mathbf{o}}_i))\|} \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Az egyes szegmensek:

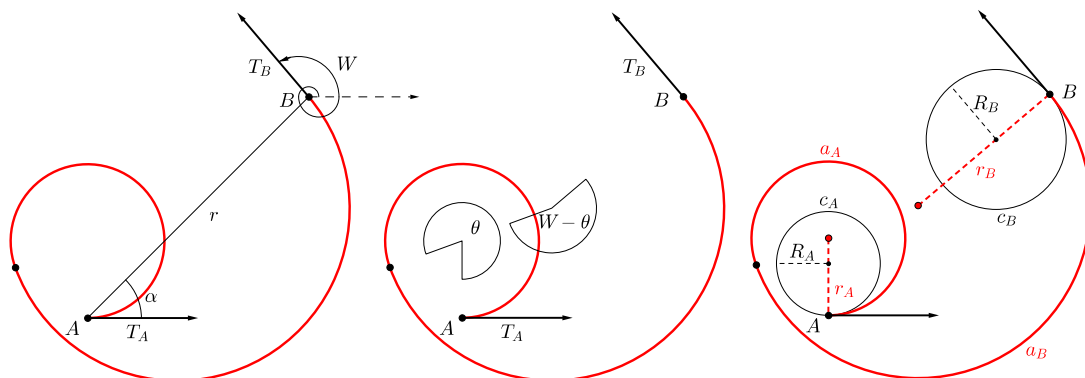
$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{s}}_i(\phi, t) = & H_0^3(t) \mathbf{z}_i(\phi) + H_1^3(t) \mathbf{z}_{i+1}(\phi) + \\ & H_2^3(t) \cdot p(s_i) \cdot 2 \cdot d(M_i, \mathbf{z}_i(\phi)) \cdot \frac{\mathbf{w}_i - \mathbf{z}_i(\phi)}{\|\mathbf{w}_i - \mathbf{z}_i(\phi)\|} + \\ & H_3^3(t) \cdot p(s_{i+1}) \cdot 2 \cdot d(M_i, \mathbf{z}_{i+1}(\phi)) \cdot \frac{\mathbf{w}_{i+1} - \mathbf{z}_{i+1}(\phi)}{\|\mathbf{w}_{i+1} - \mathbf{z}_{i+1}(\phi)\|} \end{aligned}$$

$$t \in [0, 1], \phi \in [0, 2\pi], i = 1, \dots, n - 1.$$

A 2. ábrán az algoritmusunk által nyert kimenetet láthatunk, a gömbök középpontjai nem illeszkednek egy síkra. Az A mellékletben eredményeink összehasonlításra kerültek Slabaugh és munkatársai módszerének kimenetével, ezt láthatjuk a 15. ábrán.

### 2.1.4. Biarc görbék használatának lehetőségei

Munkámban [29] részletes analízist végeztem arra vonatkozóan, hogyan lehet a Meek és Walton cikkében [34] ismertetett osztályozás alapján megfelelő feltételeket szabni a biarc görbével való beburkolás biztosítására egy konkrét (a cikkben ismertetett 1.3-as) esetben.



3. ábra. Biarc interpolációs ív definiáló adataival és felhasználása a feladatunkhoz (jobbra).

#### 2.1.4.1. $r_A > R_A$

$$K \doteq \frac{2R_A \sin\left(\frac{W}{2}\right) - \cos\left(\frac{W}{2} - \alpha\right)}{\sin\left(\frac{W}{2} - \alpha\right)}.$$

1. Ha  $K > 0$ , akkor  $0 < \theta < 2 \arctg \frac{1}{K}$ .
2. Ha  $K < 0$ , akkor  $0 < \theta < 2 \arctg \frac{1}{K} + 2\pi$ .
3. Ha  $K = 0$ , akkor  $0 < \theta < \pi$ .

#### 2.1.4.2. $r_B > R_B$

$$X_B \doteq \frac{2R_B \sin \frac{W}{2}}{r}$$



1. Ha a  $\cos \frac{\theta}{2} > 0$  feltételt szabjuk meg, azaz ha a  $[0, \pi]$  intervallumból kívánunk választani, a következő lehetőségeink adódnak:

(i) Ha  $X_B \cos \frac{W}{2} - \cos \alpha > 0$  és  $X_B \sin \frac{W}{2} - \sin \alpha \geq 0$ , akkor

$$0 < \theta < 2 \operatorname{arctg} \frac{X_B \sin \frac{W}{2} - \sin \alpha}{X_B \cos \frac{W}{2} - \cos \alpha}.$$

(ii) Ha  $X_B \cos \frac{W}{2} - \cos \alpha < 0$  és  $X_B \sin \frac{W}{2} - \sin \alpha \leq 0$ , akkor

$$2 \operatorname{arctg} \frac{X_B \sin \frac{W}{2} - \sin \alpha}{X_B \cos \frac{W}{2} - \cos \alpha} < \theta < \pi.$$

(iii) Ha  $X_B \sin \frac{W}{2} - \sin \alpha > 0$  és  $X_B \cos \frac{W}{2} - \cos \alpha \leq 0$ , akkor

$$0 < \theta < \pi.$$

2. Ha a  $\cos \frac{\theta}{2} < 0$  feltételt szabjuk meg, azaz ha a  $[\pi, 2\pi]$  intervallumból kívánunk választani, a következő lehetőségeink adódnak:

(i) Ha  $X_B \cos \frac{W}{2} - \cos \alpha > 0$  és  $X_B \sin \frac{W}{2} - \sin \alpha < 0$ , akkor

$$2 \operatorname{arctg} \frac{X_B \sin \frac{W}{2} - \sin \alpha}{X_B \cos \frac{W}{2} - \cos \alpha} + 2\pi < \theta < 2\pi.$$

(ii) Ha  $X_B \cos \frac{W}{2} - \cos \alpha < 0$  és  $X_B \sin \frac{W}{2} - \sin \alpha > 0$ , akkor

$$\pi < \theta < 2 \operatorname{arctg} \frac{X_B \sin \frac{W}{2} - \sin \alpha}{X_B \cos \frac{W}{2} - \cos \alpha} + 2\pi.$$

(iii) Ha  $X_B \cos \frac{W}{2} - \cos \alpha \leq 0$  és  $X_B \sin \frac{W}{2} - \sin \alpha < 0$ , akkor

$$\pi < \theta < 2\pi.$$

3. Ha  $\cos \alpha > \frac{R_B}{r} \sin W$ , akkor a  $\theta = \frac{\pi}{2}$  választás megengedett.

4. Ha  $\cos \alpha < \frac{R_B}{r} \sin W$ , akkor a  $\theta = 3\pi$  választás megengedett.

## 2.2. Bézier-görbék izooptikusaival kapcsolatos új eredményeink

Papp Ildikóval és Hoffmann Miklóssal közös cikkünkben [31] több tételt és következményt is közöltünk, többek között annak érdekében, hogy Bézier-görbék izooptikusait egy az eddigiektől merőben eltérő módon származtathassuk.

Tekintsünk egy  $\alpha$  szöget, továbbá legyen adott egy konvex, tetszőleges fokszámú  $\mathbf{s}(t)$   $t \in [0, 1]$  Bézier-görbe, valamint annak egy tetszőleges  $t_0$  paraméterhez tartozó  $\mathbf{s}(t_0)$  pontja.

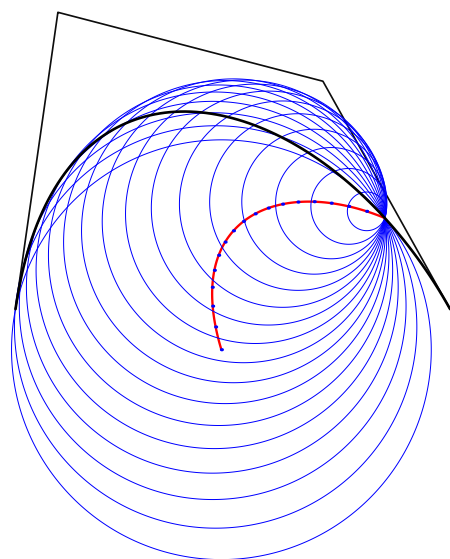
**2.1. Tétel.** *Az  $\alpha$  szöghöz tartozó,  $\overline{\mathbf{s}(t_0)\mathbf{s}(t)}$  görbehúrok fölé írt látókörívnek vagy nincs közös pontja a Bézier-görbe  $\alpha$  szöghöz tartozó izooptikus görbéjével, vagy pontosan egy közös pontja van azzal, mely pontban a görbe izooptikusának és a látókörívnek az érintőegyenese egymással megegyezik.*

**2.2. Tétel.** *Az  $\alpha$  szöghöz tartozó, a Bézier-görbe  $\overline{\mathbf{s}(t_0)\mathbf{s}(t)}$  húrjai fölé írt látókörívnek burkológörbéjének pontosan egy közös pontja van a Bézier-görbe  $\alpha$ -hoz tartozó izooptikus görbéjével, mely pontban az érintőegyenese is megegyezik.*

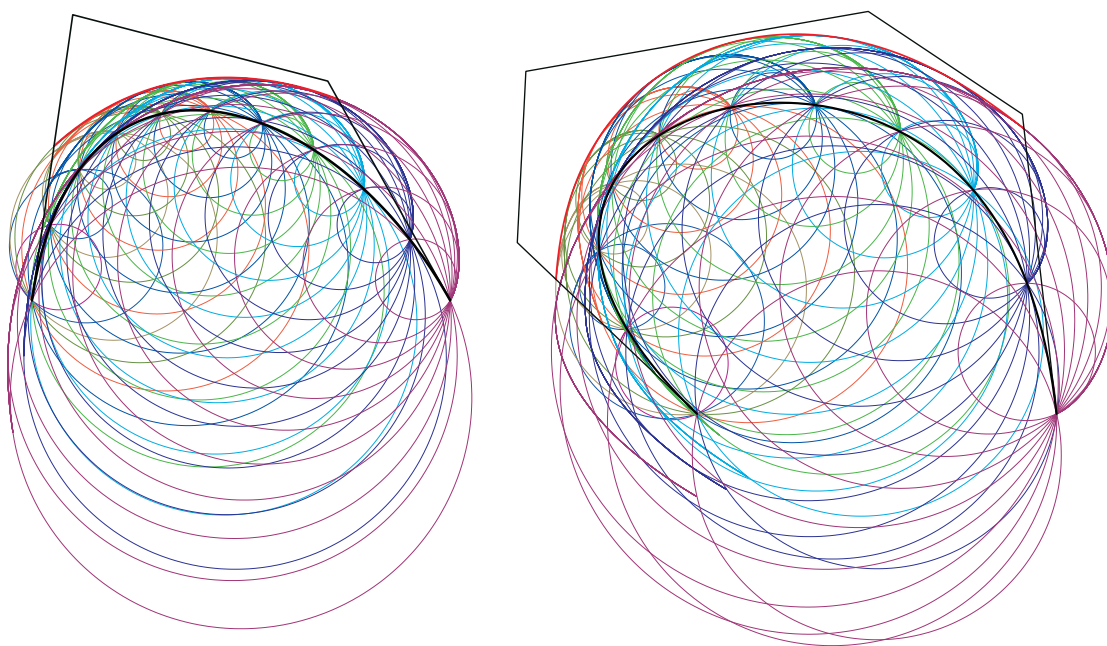
**2.3. Tétel.** *Bézier-görbe egy adott pontjából kiinduló húrok  $\alpha$  szöghöz tartozó látókörívének középpontja illeszkedik az eredeti görbéből egy forgatással és egy középpontos hasonlósági transzformációval előállítható Bézier-görbére. A paraméterérték a húrok előállításakor használt futóparaméter aktuális értékével egyenlő (lásd 4. ábra).*

**2.1. Következmény.** *Mivel a Bézier-görbe minden  $\mathbf{s}(t_0)$  pontja alapján generálható egy látókörívекből álló egyparaméteres görbecsalád, illetve annak burkológörbéje, a Bézier-görbe izooptikus görbéje előállítható ezen említett burkológörbék burkolójaként is (lásd 5. ábra).*

Cikkünkben [31] közöltük az említett látókörívcsereg burkolójának kiszámítási módját is.



4. ábra. A Bézier-görbe és a látóörívek középpontjának kapcsolata



5. ábra. Az izooptikus görbe, mint burkológörbék burkolója.

Legyen adott az  $\mathbf{s}(t)(s_x(t), s_y(t))$  Bézier-görbe,  $t \in [0, 1]$ , legyen  $t_0$  a paramétertartomány egy rögzített eleme, és vezessük be a következő jelöléseket.

$$D \doteq \sqrt{(s_y(t_0) - s_y(t))^2 + (s_x(t_0) - s_x(t))^2}$$

$$H \doteq (s_y(t_0) - s_y(t))(-s'_y(t)) + (s_x(t_0) - s_x(t))(-s'_x(t))$$

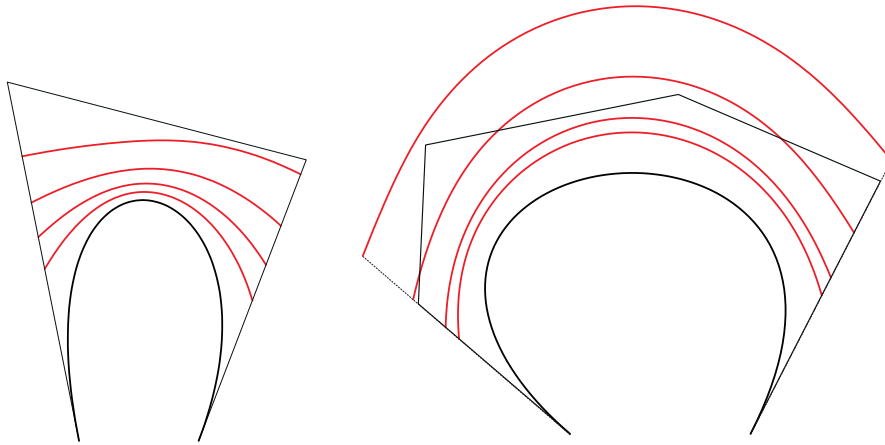
$$A \doteq -\frac{D}{4 \sin(\alpha)}(-s'_x(t) \cot(\alpha) + s'_y(t))$$

$$B \doteq -\frac{D}{4 \sin(\alpha)}(s'_y(t) \cot(\alpha) + s'_x(t))$$

$$C \doteq -\frac{H}{4 \sin^2(\alpha)}$$

$$U_1 \doteq -\arcsin\left(\frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}}\right) - \arcsin\left(\frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2}}\right)$$

$$U_2 \doteq \arcsin\left(\frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}}\right) - \arcsin\left(\frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2}}\right) - \pi$$



6. ábra. Kubikus és ötödfokú Bézier-görbe izooptikus görbéi megadott  $\alpha$  szögre vonatkozóan.  $\alpha = 60^\circ, 80^\circ, 100^\circ, 120^\circ$ .

Ekkor a görbe adott  $t_0$  paraméterértékhez tartozó pontján átmenő húrjai fölé írt látókörivek  $\mathbf{f}(t)(f_x(t), f_y(t))$  ( $t \in [0, 1]$ ) burkológörbéje az alábbiak szerint számítható ki.

Ha  $A \geq 0$ , akkor

$$f_x(t) = \frac{1}{2}((s_y(t) - s_y(t_0)) \cot(\alpha) + s_x(t) + s_x(t_0)) + \frac{D \cos(U_1)}{2 \sin(\alpha)}$$

$$f_y(t) = \frac{1}{2}((s_x(t_0) - s_x(t)) \cot(\alpha) + s_y(t) + s_y(t_0)) + \frac{D \sin(U_1)}{2 \sin(\alpha)},$$

míg  $A < 0$  esetén

$$f_x(t) = \frac{1}{2}((s_y(t) - s_y(t_0)) \cot(\alpha) + s_x(t) + s_x(t_0)) + \frac{D \cos(U_2)}{2 \sin(\alpha)}$$

$$f_y(t) = \frac{1}{2}((s_x(t_0) - s_x(t)) \cot(\alpha) + s_y(t) + s_y(t_0)) + \frac{D \sin(U_2)}{2 \sin(\alpha)}.$$

Különböző fokszám és  $\alpha$  szög esetén is közöltük kimeneteinket a problémára vonatkozóan (lásd 6. ábra).



## 3 Previous research and the motivation for the thesis

### 3.1 „Skinning”

Interpolation of geometric data sets is of central importance in CAGD. If geometric data consists of points, then we have several, now standard methods to interpolate them [14, 43, 21]. If, however, the data set consists of other types of objects (e.g. circles), interpolation is transferred to skinning, that is construction of a curve or surface which touches each of the objects and somehow bounds the given data.

It is important to note, that since this is a largely ill-posed problem, constraints have to be defined for the data set as well as for the desired solution.

This or similar problem – beside its theoretical interest – frequently arises in applications like designing tubular structures, covering problems, molecule modeling [6, 13]. Medical image processing applies these methods e.g. in blood vessel reconstruction [63, 55]. In computer animation, characters can also be constructed from a skeletal structure and a corresponding geometric skin [52].

The first and most natural approach of the problem would be the application of the deep theoretical knowledge of the computation of envelope curves and surfaces, dated back to Monge [36], who first dealt with canal surfaces. Skin is definitely not an envelope, since this latter notion is defined for continuous data set, for a one- or two-parameter family of curves or surfaces.

The problem can be considered as the discrete version of the classical envelope property. An important contribution of this topic with computational aspects is the PhD thesis of Josef Hoschek [20]. Since then a large number of papers have dealt with envelope design, most of them with numerical computation (for the survey see e.g. [15]). For circles and spheres, a recent exact solution is Peternell’s method which is based on a cyclographic approach [41].

Although the papers mentioned above do not deal with skinning, one may try to transfer the discrete data set to a one-parameter family of circles/spheres, having centers and radii as functions of a parameter. These functions can be achieved from the set of discrete data by classical interpolating methods in the space, but this way the set of new circles do not necessarily allow to create a skin which is touching all the given objects.

A recent approach to the skinning problem for circles and spheres is the method of Slabaugh et al [54, 55]. It is an iterative way to construct the desired curves or surfaces. The iteration itself is based on the minimization of a predefined energy function. The method provides energy-minimized,  $C^1$  continuous skin without any user interaction, which, in this sense, the optimal solution, if it exists. But the method also suffers from problems. The touching points are not guaranteed to be out of the circles, especially not for two-sided skin, when the two touching points at each circle are constrained to be separated by  $180^\circ$  degrees. There are simple configurations when it is theoretically impossible to find two diametrically opposite points on a circle being out of other given circles. The same problem arises in 3D-ball skinning, where Slabaugh's method allows only great circles as possible touching circles. A further problem is that the convergence of iteration to a global minimum is not proved and the number of iterations can be over 100 which is time consuming. Moreover, the process has to be restarted after any modification of data, thus this method is not suitable for real time modeling and adjustment.

Our first goal was to describe precisely what we call admissible input and output for the problem.

Then we wanted to develop a method with which we can solve the problem for a larger class of data sets than the above mentioned techniques, and which provides an at least  $G^1$  continuous curve or surface which can be modified in real time, and the shape is sensitive for the change of radii and positions of the data set as well.

Based on this idea in the next part of our research we wanted to analyze the problem of using biarc curves for 2D skinning. The reason why we thought this analysis useful is that biarc curves we



can describe shapes which can be processed by CNC machines.

## 3.2 Isoptics of free-form curves

In CAGD it is also very important to know the geometric properties of the existing modeling tools as much as possible.

The isoptic curve of a given curve has been studied since centuries, the first appearance of the word can be found in [60]. There are well-known results for classical curves, especially for conics, e.g. for the parabola, the isoptic curve of which is a hyperbola in general and its directrix in the special case of  $\alpha = \pi/2$ , when it is called orthoptic curve [33, 32]. For a recent overview of these classical results see e.g. [39, 17]. The isoptic curves in the hyperbolic plane are studied by Csima and Szirmai [10]. A more theoretical approach can be found in [7], where the isoptic curve of a certain class of convex curves is described by the help of its support function. Further properties of this general description and isoptic curves of special classes of curves have been studied in [7, 35, 57]. Isoptic curves are widely used in various problems of mechanisms (e.g. [64, 65]) and other fields. On the other hand there are standard types of curves which have been used in computer-aided geometric design world-wide. These curves are typically spline curves, like B-spline or NURBS curves, but Bézier curves are still in use in several softwares due to its simple form and flexible modification possibilities.

The purpose of our research was to describe the isoptic curve of Bézier curves based on our hypotheses, that the application of circular arcs can simplify the calculations.



## 4 The new scientific results of the thesis

### 4.1 „Skinning”

In [28, 30, 29] we solved the mentioned problems as follows.

#### 4.1.1 The precise definition of the problem

Since the problem of skinning is not necessarily defined in a unique way in the literature, we formally described in [30] what type of input is admissible for us and what type of output we are searching for.

**Definition 4.1** *A sequence of circles  $C = \{c_1, c_2, c_3, \dots, c_n\}$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) is called admissible configuration if the following conditions are fulfilled ( $d_i$  denotes the closed disk defined by circle  $c_i$ ):*

- $d_i \not\subset \bigcup_{j=1, j \neq i}^n d_j$ ,  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$
- $d_i \cap d_j = \emptyset$ ,  $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$ ,  $j \notin \{i-2, i-1, i, i+1, i+2\}$
- if  $d_{i-1} \cap d_{i+1} \neq \emptyset$ , then  $d_{i-1} \cap d_{i+1} \subset d_i$

**Definition 4.2** *Given an admissible configuration of circles  $C = \{c_1, c_2, c_3, \dots, c_n\}$ , we are looking for two, at least  $G^1$  continuous curves  $\mathbf{s}(t)$  and  $\bar{\mathbf{s}}(t)$ , called skins of the given circles satisfying the following requirements:*

- There is a point of contact  $\mathbf{p}_i \in c_i$  for all  $i = 1, \dots, n$  such that  $\mathbf{p}_i \in \mathbf{s}(t)$  and tangent lines of circle  $c_i$  and  $\mathbf{s}(t)$  are identical at  $\mathbf{p}_i$ . Analogously exist points  $\bar{\mathbf{p}}_i$  for  $\bar{\mathbf{s}}(t)$ .
- Tangent vector  $\mathbf{v}_i$  of skin  $\mathbf{s}(t)$  at  $\mathbf{p}_i$  can be rotated to the direction of the center of  $c_i$  by  $90^\circ$  in clockwise direction. Analogously this rotation is in counterclockwise direction for tangent vectors of  $\bar{\mathbf{s}}(t)$ .

- $\mathbf{p}_i \notin \bigcup_{j=1, j \neq i}^n d_j$ , and  $\bar{\mathbf{p}}_i \notin \bigcup_{j=1, j \neq i}^n d_j$ ,  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$

**Definition 4.3** *A sequence of spheres  $S = \{s_1, s_2, s_3, \dots, s_n\}$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) is called admissible configuration, if the following conditions are fulfilled ( $g_i$  denotes the closed ball defined by  $s_i$ .)*

- $g_i \not\subset \bigcup_{j=1, j \neq i}^n g_j$ ,  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$
- $g_i \cap g_j = \emptyset$ ,  $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$ ,  $j \notin \{i-2, i-1, i, i+1, i+2\}$
- if  $g_{i-1} \cap g_{i+1} \neq \emptyset$ , then  $g_{i-1} \cap g_{i+1} \subset g_i$

**Definition 4.4** *Given an admissible configuration of spheres  $S = \{s_1, s_2, s_3, \dots, s_n\}$ , we are looking for a  $G^1$  continuous surface  $\widehat{\mathbf{s}}(\phi, t)$  of the given spheres, called skin, satisfying the following requirements:*

- *There is a circle of contact (touching circle)  $\tilde{c}_i$  for all  $i = 1, \dots, n$  such that the skin  $\widehat{\mathbf{s}}(\phi, t)$  and sphere  $s_i$  have common tangent planes at each point of  $\tilde{c}_i$ . Circle  $\tilde{c}_i$  is an isoparametric curve of  $\widehat{\mathbf{s}}(\phi, t)$ .*
- $\tilde{c}_i \not\subset \bigcup_{j=1, j \neq i}^n g_j$ ,  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ .

#### 4.1.2 The construction of the skin in 2D

We constructed the skinning curves as follows [28, 30]:

- We checked if the given circles form an admissible configuration.
- We found appropriate points of contact for each circle  $c_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ . First we used interpolation techniques [28] for the localization, then we found the best solution [30] which is based on the cyclographical solution for the problem of Apollonius [25, 16].

- We separated the touching points into two classes based on the fact that the radical center and the touching points are collinear for three considered circles [25]. We denoted the left skin by  $\mathbf{p}_i$  and the right skin by  $\bar{\mathbf{p}}_i$ .
- We defined tangent vectors  $\mathbf{v}_i$  and  $\bar{\mathbf{v}}_i$  based on the properties of the radical line of the circles.
- We computed the skins, the construction guaranteed the  $G^1$  continuity.

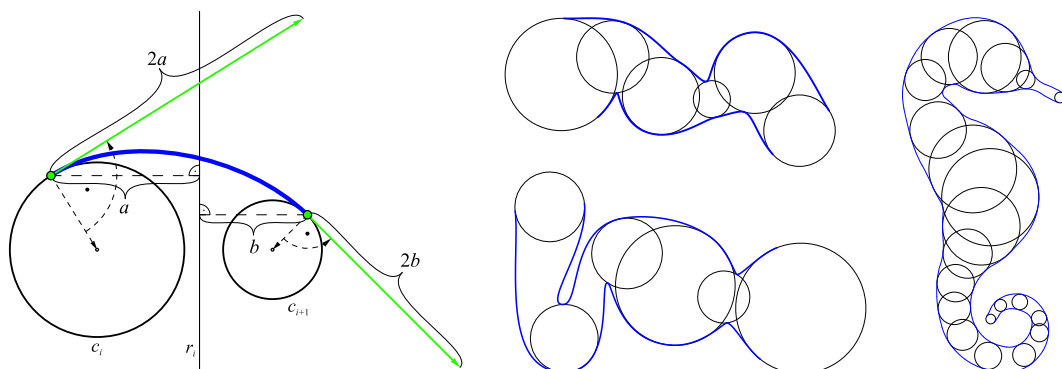


Figure 7: We determined the lengths of the touching vectors and the segments (left). Some outputs of our algorithm (right).

### 4.1.3 Generalization in 3D based on spheres

We constructed the skinning surface as follows [30]:

- We checked if the given spheres form an admissible configuration.
- We localized a touching circle on each sphere based on the solution for the Apollonian problem.

- We defined a correspondence between the points of the adjacent touching circles for getting the endpoints of the segments from which we built the skinning surface.
- We defined the touching vectors based on the properties of the radical plane of two spheres. With this idea we found a technique which can provide a solution which was sensitive enough for the location of the spheres.
- We parameterized the segments using Hermite-arcs, the construction guaranteed the  $G^1$  continuity.

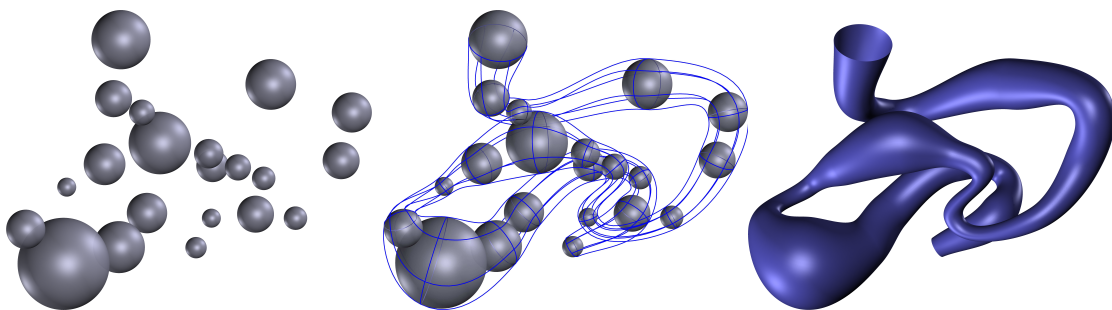


Figure 8: An output of our method, it is important to note that the centers are not coplanar.

We can construct the surface from segments connected by  $G^1$  continuity:

Let

$$m: \mathbb{R} \rightarrow \{-1, 1\} \quad \text{and} \quad p: \{s_i\} \rightarrow \{-1, 1\}$$

be functions defined as follows, furthermore  $\mathbf{e} \parallel (\mathbf{w}_i - \tilde{\mathbf{o}}_i)$ ,  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ ,  $\mathbf{e} \in \mathbb{R}^3$ .

$$m(x) = \begin{cases} -1, & \text{if } x < 0, \\ 1, & \text{else} \end{cases}$$

$$p(s_i) = \begin{cases} m \left( \left\langle \frac{\mathbf{w}_i - \mathbf{o}_i}{\|\mathbf{w}_i - \mathbf{o}_i\|}, \frac{\mathbf{o}_{i+1} - \mathbf{o}_i}{\|\mathbf{o}_{i+1} - \mathbf{o}_i\|} \right\rangle \right), & \text{if } i \neq n, \\ m \left( \left\langle \frac{\mathbf{w}_i - \mathbf{o}_i}{\|\mathbf{w}_i - \mathbf{o}_i\|}, \frac{\mathbf{o}_i - \mathbf{o}_{i-1}}{\|\mathbf{o}_i - \mathbf{o}_{i-1}\|} \right\rangle \right), & \text{else} \end{cases}$$

$$\mathbf{z}_i = \tilde{\mathbf{o}}_i + \tilde{r}_i \cdot \frac{\mathbf{e} \times (p(s_i) \cdot (\mathbf{w}_i - \tilde{\mathbf{o}}_i))}{\|\mathbf{e} \times (p(s_i) \cdot (\mathbf{w}_i - \tilde{\mathbf{o}}_i))\|} \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

The segments can be defined as follows.

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{s}}_i(\phi, t) &= H_0^3(t) \mathbf{z}_i(\phi) + H_1^3(t) \mathbf{z}_{i+1}(\phi) + \\ &H_2^3(t) \cdot p(s_i) \cdot 2 \cdot d(M_i, \mathbf{z}_i(\phi)) \cdot \frac{\mathbf{w}_i - \mathbf{z}_i(\phi)}{\|\mathbf{w}_i - \mathbf{z}_i(\phi)\|} + \\ &H_3^3(t) \cdot p(s_{i+1}) \cdot 2 \cdot d(M_i, \mathbf{z}_{i+1}(\phi)) \cdot \frac{\mathbf{w}_{i+1} - \mathbf{z}_{i+1}(\phi)}{\|\mathbf{w}_{i+1} - \mathbf{z}_{i+1}(\phi)\|} \\ &t \in [0, 1], \phi \in [0, 2\pi], i = 1, \dots, n - 1. \end{aligned}$$

A comparison between our results and the results of Slabaugh can be found in Appendix A (Figure 15).

#### 4.1.4 Using biarc curves for skinning

In [29] I carried out an analysis about the usage of biarcs for skinning problems based on the classification published in [34] (Case 1.3). I gave conditions to avoid intersections between the biarc curve and the circles.

##### 4.1.4.1 $r_A > R_A$

$$K \doteq \frac{\frac{2R_A \sin\left(\frac{W}{2}\right) - \cos\left(\frac{W}{2} - \alpha\right)}{r}}{\sin\left(\frac{W}{2} - \alpha\right)}.$$

1. If  $K > 0$ , then  $0 < \theta < 2 \arctg \frac{1}{K}$ .
2. If  $K < 0$ , then  $0 < \theta < 2 \arctg \frac{1}{K} + 2\pi$ .
3. If  $K = 0$ , then  $0 < \theta < \pi$ .

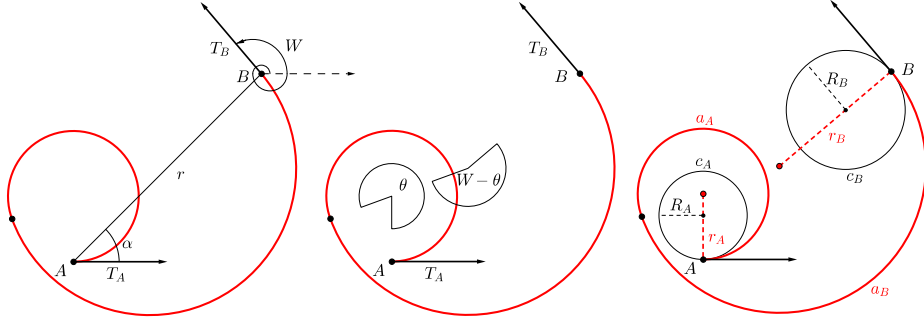


Figure 9: A biarc interpolation curve with its definitional data and its usage for the problem (right).

#### 4.1.4.2 $r_B > R_B$

$$X_B \doteq \frac{2R_B \sin \frac{W}{2}}{r}$$

1. If our condition is  $\cos \frac{\theta}{2} > 0$ , so we would like to choose an angle from interval  $[0, \pi]$ :

- (i) If  $X_B \cos \frac{W}{2} - \cos \alpha > 0$  and  $X_B \sin \frac{W}{2} - \sin \alpha \geq 0$ , then

$$0 < \theta < 2 \operatorname{arctg} \frac{X_B \sin \frac{W}{2} - \sin \alpha}{X_B \cos \frac{W}{2} - \cos \alpha}.$$

- (ii) If  $X_B \cos \frac{W}{2} - \cos \alpha < 0$  and  $X_B \sin \frac{W}{2} - \sin \alpha \leq 0$ , then

$$2 \operatorname{arctg} \frac{X_B \sin \frac{W}{2} - \sin \alpha}{X_B \cos \frac{W}{2} - \cos \alpha} < \theta < \pi.$$

- (iii) If  $X_B \sin \frac{W}{2} - \sin \alpha > 0$  and  $X_B \cos \frac{W}{2} - \cos \alpha \leq 0$ , then

$$0 < \theta < \pi.$$

2. If our condition is  $\cos \frac{\theta}{2} < 0$ , so we would like to choose an angle from interval  $[\pi, 2\pi]$ :



(i) If  $X_B \cos \frac{W}{2} - \cos \alpha > 0$  and  $X_B \sin \frac{W}{2} - \sin \alpha < 0$ , then

$$2 \operatorname{arctg} \frac{X_B \sin \frac{W}{2} - \sin \alpha}{X_B \cos \frac{W}{2} - \cos \alpha} + 2\pi < \theta < 2\pi.$$

(ii) If  $X_B \cos \frac{W}{2} - \cos \alpha < 0$  and  $X_B \sin \frac{W}{2} - \sin \alpha > 0$ , then

$$\pi < \theta < 2 \operatorname{arctg} \frac{X_B \sin \frac{W}{2} - \sin \alpha}{X_B \cos \frac{W}{2} - \cos \alpha} + 2\pi.$$

(iii) If  $X_B \cos \frac{W}{2} - \cos \alpha \leq 0$  and  $X_B \sin \frac{W}{2} - \sin \alpha < 0$ , then

$$\pi < \theta < 2\pi.$$

3. If  $\cos \alpha > \frac{R_B}{r} \sin W$ , then  $\theta = \frac{\pi}{2}$  is an admissible choice.

4. If  $\cos \alpha < \frac{R_B}{r} \sin W$ , then  $\theta = 3\pi$  is an admissible choice.

## 4.2 Our new approaches to determine isoptics of Bézier curves

In a joint work [31] with Ildikó Papp and Miklós Hoffmann we proved some theorems with which we are able to construct isoptics of Bézier curves in a new way.

Consider an angle  $\alpha$ , a convex Bézier-curve  $\mathbf{s}(t)$  ( $t \in [0, 1]$ ) of any degree and one of its points  $\mathbf{s}(t_0)$ .

**Theorem 4.1** *The  $\alpha$ -isoptic circular arcs associated to the chords  $\overline{\mathbf{s}(t_0)\mathbf{s}(t)}$  of the curve have either no common point to the  $\alpha$ -isoptic curve of the Bézier-curve, or have exactly one common point where the tangents are also of the same direction.*

**Theorem 4.2** *The envelope of the family of  $\alpha$ -circular arcs associated to the chords  $\overline{\mathbf{s}(t_0)\mathbf{s}(t)}$  of the Bézier curve has exactly one common point to the  $\alpha$ -isoptic curve of the Bézier curve, in which the tangent lines are also common.*

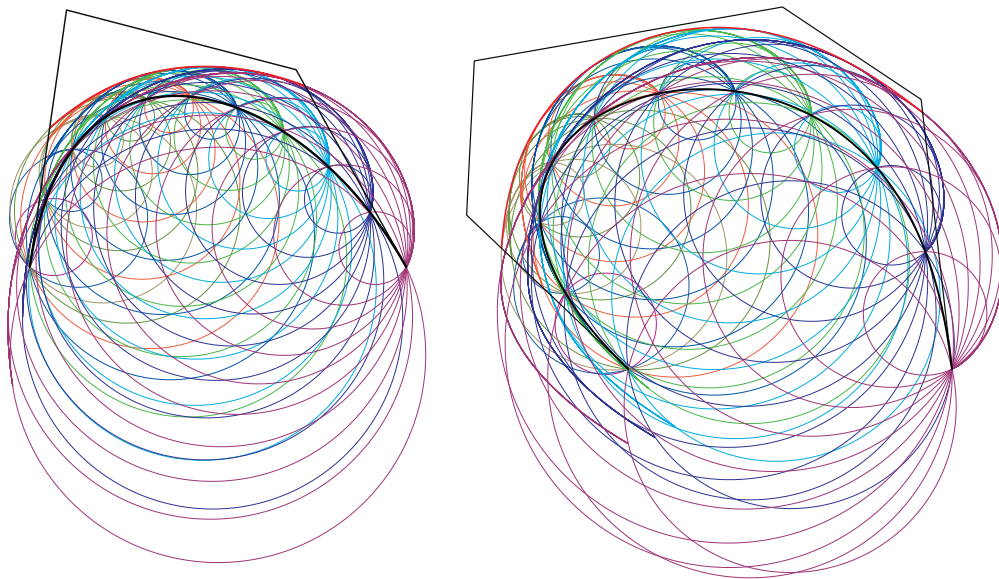


Figure 10: The isoptic curve as the envelope of envelopes.

**Theorem 4.3** *The locus of centers of the  $\alpha$ -isoptic circular arcs associated to the chords  $\mathbf{s}(t_0)\mathbf{s}(t)$  of the Bézier curve is also a Bézier curve obtained by a rotation and a homothety from the original one (see Figure 11).*

**Corollary 4.1** *Since each point  $\mathbf{s}(t_0)$  of the Bézier curve generates a family of circular arcs and their envelope, the isoptic curve of the Bézier curve can be obtained as the envelope of these envelopes (see Figure 10).*

In [31] we determined the equation of the envelope of the family of  $\alpha$ -circular arcs for a given  $t_0 \in [0, 1]$ .

Let us consider the  $\mathbf{s}(t)(s_x(t), s_y(t))$  Bézier curve,  $t \in [0, 1]$  and introduce the following notations:

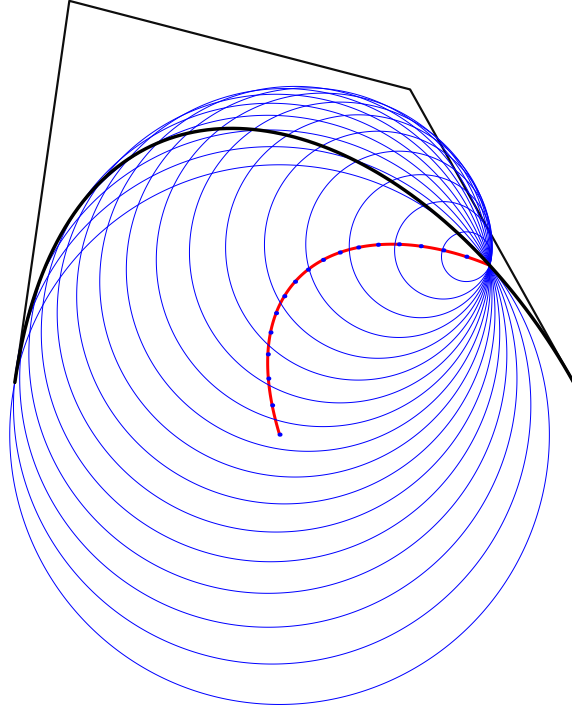


Figure 11: The locus of centers of the  $\alpha$ -isoptic circular arcs is also a Bézier curve.

$$D \doteq \sqrt{(s_y(t_0) - s_y(t))^2 + (s_x(t_0) - s_x(t))^2},$$

$$H \doteq (s_y(t_0) - s_y(t))(-s'_y(t)) + (s_x(t_0) - s_x(t))(-s'_x(t)),$$

$$A \doteq -\frac{D}{4 \sin(\alpha)}(-s'_x(t) \cot(\alpha) + s'_y(t)),$$

$$B \doteq -\frac{D}{4 \sin(\alpha)}(s'_y(t) \cot(\alpha) + s'_x(t)),$$

$$C \doteq -\frac{H}{4 \sin^2(\alpha)},$$

$$U_1 \doteq -\arcsin\left(\frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}}\right) - \arcsin\left(\frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2}}\right),$$

$$U_2 \doteq \arcsin\left(\frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}}\right) - \arcsin\left(\frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2}}\right) - \pi.$$

Then the envelope  $\mathbf{f}(t)(f_x(t), f_y(t))$  ( $t \in [0, 1]$ ) of the family of  $\alpha$ -circular arcs associated to the chords through  $s(t_0)$  can be calculated as follows.

If  $A \geq 0$ , then

$$f_x(t) = \frac{1}{2}((s_y(t) - s_y(t_0)) \cot(\alpha) + s_x(t) + s_x(t_0)) + \frac{D \cos(U_1)}{2 \sin(\alpha)}$$

$$f_y(t) = \frac{1}{2}((s_x(t_0) - s_x(t)) \cot(\alpha) + s_y(t) + s_y(t_0)) + \frac{D \sin(U_1)}{2 \sin(\alpha)}.$$

Else if  $A < 0$ , then

$$f_x(t) = \frac{1}{2}((s_y(t) - s_y(t_0)) \cot(\alpha) + s_x(t) + s_x(t_0)) + \frac{D \cos(U_2)}{2 \sin(\alpha)}$$

$$f_y(t) = \frac{1}{2}((s_x(t_0) - s_x(t)) \cot(\alpha) + s_y(t) + s_y(t_0)) + \frac{D \sin(U_2)}{2 \sin(\alpha)}.$$

For different  $\alpha$  angles we constructed some outputs for the original problem (see Figure 12).

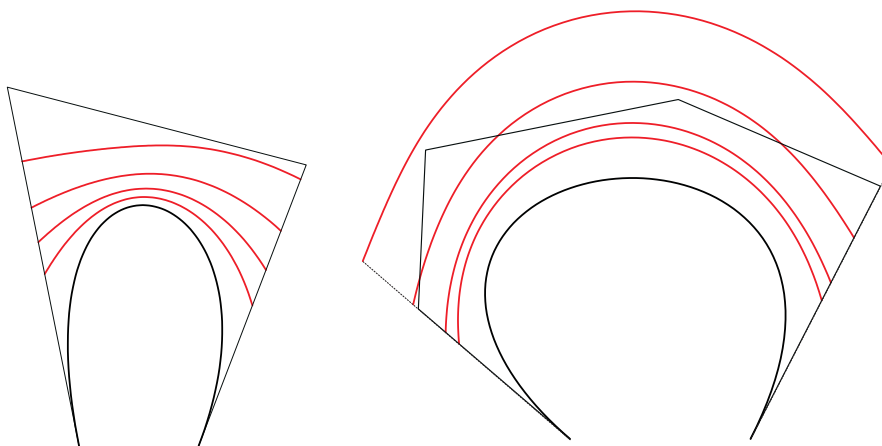


Figure 12:  $\alpha$ -isoptic curves of a cubic and a fifth order Bézier curve for  $\alpha = 60^\circ, 80^\circ, 100^\circ, 120^\circ$ .

## Irodalomjegyzék/Bibliography

- [1] M. Avriel: *Nonlinear Programming: Analysis and Methods*. Dover Books on Computer Science sorozat. 2003, Dover Publications.
- [2] Bácsó Sándor – Papp Ildikó: Ciklográfia példatár. [http://cgip.inf.unideb.hu/files/ciklografia\\_peldatar.pdf](http://cgip.inf.unideb.hu/files/ciklografia_peldatar.pdf), 2006. Elérés időpontja: 2013.09.10.
- [3] Bácsó Sándor – Papp Ildikó – Szabó József: *Projektív geometria*. Debrecen, 2006, Kossuth Egyetemi Kiadó.
- [4] K.M. Bolton: Biarc curves. *Computer-Aided Design*, 7. évf. (1975) 2. sz., 89–92. p.
- [5] J.W. Bruce – P.J. Giblin: *Curves and Singularities: A Geometrical Introduction to Singularity Theory*. 1992, Cambridge University Press.
- [6] H.-L. Cheng – X. Shi: Quality mesh generation for molecular skin surfaces using restricted union of balls. *Computational Geometry*, 42. évf. (2009) 3. sz., 196–206. p.
- [7] W. Cieślak – A. Miernowski – M. Mozgawa: Isoptics of a closed strictly convex curve. In *Global Differential Geometry and Global Analysis*. Lecture Notes in Mathematics sorozat, 1481. köt. 1991, Springer, 28–35. p.
- [8] G.W. Coakley: Analytical solutions of the ten problems in the tangencies of circles and also of the fifteen problems in the tangencies of spheres. *The Mathematical Monthly*, 2. évf. (1860), 116–126. p.
- [9] D. Cox – J. Little – D. O’Shea: *Ideals, Varieties, and Algorithms: An Introduction to Computational Algebraic Geometry and Commutative Algebra*. 2. kiad. 2006, Springer.

- [10] G. Csima – J. Szirmai: Isoptic curves in the hyperbolic plane. *Studies of the University of Žilina Mathematical Series*, 24. évf. (2010), 15–22. p.
- [11] J.H. Davenport – Y. Siret – E. Tournier: *Computer Algebra: Systems and Algorithms for Algebraic Computation*. 1988, Academic Press.
- [12] H. Dörrie: *100 Great Problems of Elementary Mathematics*. 1965, Dover Publications.
- [13] H. Edelsbrunner: Deformable smooth surface design. *Discrete and Computational Geometry*, 21. évf. (1999) 1. sz., 87–115. p.
- [14] G. Farin: *Curves and Surfaces for CAGD*. 5. kiad. 2001, Morgan Kaufmann.
- [15] G. Farin – J. Hoschek – M.-S. Kim: *Handbook of Computer Aided Geometric Design*. 2002, North Holland.
- [16] D. Gisch – J.M. Ribando: Apollonius’ Problem: A Study of Solutions and Their Connections. *American Journal of Undergraduate Research*, 3. évf. (2004) 1. sz., 15–26. p.
- [17] G. Glaeser – H.-P. Schröcker: *Handbook of Geometric Programming Using Open Geometry GL*. 2002, Springer.
- [18] Andy Hammerlindl – John Bowman – Tom Prince: Asymptote: the Vector Graphics Language. <http://asymptote.sourceforge.net/>. Elérés időpontja: 2013.11.15.
- [19] M. Hoffmann – I. Juhász: On interpolation by spline curves with shape parameters. In *Advances in Geometric Modeling and Processing*. Lecture Notes in Computer Science sorozat, 4975. köt. 2008, Springer, 205–214. p.
- [20] J. Hoschek: *Zur Ermittlung von Hüllgebilden in der Kinematik*. PhD értekezés (Technische Hochschule Darmstadt). 1964.

- [21] J. Hoschek – D. Lasser: *Fundamentals of Computer Aided Geometric Design*. 1997, CRC Press.
- [22] Juhász Imre: *Görbék és felületek modellezése*. 2011, Kelet-Magyarországi Informatikai Tananyag Tárház.
- [23] D. Kalman: Families of curves and their envelopes. [www.dankalman.net/ume/env/methods.pdf](http://www.dankalman.net/ume/env/methods.pdf). Elérés időpontja: 2013.03.31.
- [24] D. Kalman: *Uncommon Mathematical Excursions: Polynomia and Related Realms*. 2008, The Mathematical Association of America.
- [25] J.L. Krames: *Die Zyklographie*. Vorlesungen über Darstellende Geometrie sorozat, 2. köt. 1929, Deuticke.
- [26] Stephen F Krar – Arthur Gill: *CNC: Technology and Programming*. 1990, Gregg Division, McGraw-Hill.
- [27] N. Kruithof – G. Vegter: Envelope surfaces. In *Proceedings of the Annual Symposium on Computational Geometry 2006* (konferenciaanyag). 2006, 411–420. p.
- [28] R. Kunkli: Localization of touching points for interpolation of discrete circles. *Annales Mathematicae et Informaticae*, 36. évf. (2009) 1. sz., 103–110. p.
- [29] R. Kunkli: Biarc analysis for skinning of circles. *Annales Mathematicae et Informaticae*, 38. évf. (2011) 1. sz., 87–93. p.
- [30] R. Kunkli – M. Hoffmann: Skinning of circles and spheres. *Computer Aided Geometric Design*, 27. évf. (2010) 8. sz., 611–621. p.
- [31] R. Kunkli – I. Papp – M. Hoffmann: Isoptics of Bézier curves. *Computer Aided Geometric Design*, 30. évf. (2013) 1. sz., 78–84. p.

- [32] J.D. Lawrence: *A Catalog of Special Plane Curves*. 1972, Dover Publications.
- [33] G. Loria: *Spezielle algebraische und transzendente ebene Kurven: Theorie und Geschichte*. 2. köt. 1911, B. G. Teubner.
- [34] D.S. Meek – D.J. Walton: The family of biarcs that matches planar, two-point  $G^1$  Hermite data. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 212. évf. (2008) 1. sz., 31–45. p.
- [35] A. Miernowski – W. Mozgawa: Isoptics of pairs of nested closed strictly convex curves and Crofton-type formulas. *Beitrage zur Algebra und Geometrie*, 42. évf. (2001) 1. sz., 281–288. p.
- [36] G. Monge: *Application de l'analyse à la Géométrie*. 1850, Bachelier.
- [37] R.F. Muirhead: On the number and of the solutions of the Apollonius contact problem. In *Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society* (konferenciaanyag), 14. köt. 1895, Edinburgh Mathematical Society, 135–147. p.
- [38] A.W. Nutbourne – R.R. Martin: *Differential Geometry Applied to Curve and Surface Design, Volume 1: Foundations*. 1988, Ellis Horwood Limited.
- [39] B. Odehnal: Equioptic curves of conic sections. *Journal for Geometry and Graphics*, 14. évf. (2010) 1. sz., 29–43. p.
- [40] Y.-J. Pan – G.-J. Wang: Convexity-preserving interpolation of trigonometric polynomial curves with a shape parameter. *Journal of Zhejiang University SCIENCE A*, 8. évf. (2007) 8. sz., 1199–1209. p.
- [41] M. Peternell – B. Odehnal – M.L. Sampoli: On quadratic two-parameter families of spheres and their envelopes. *Computer Aided Geometric Design*, 25. évf. (2008) 4-5. sz., 342–355. p.



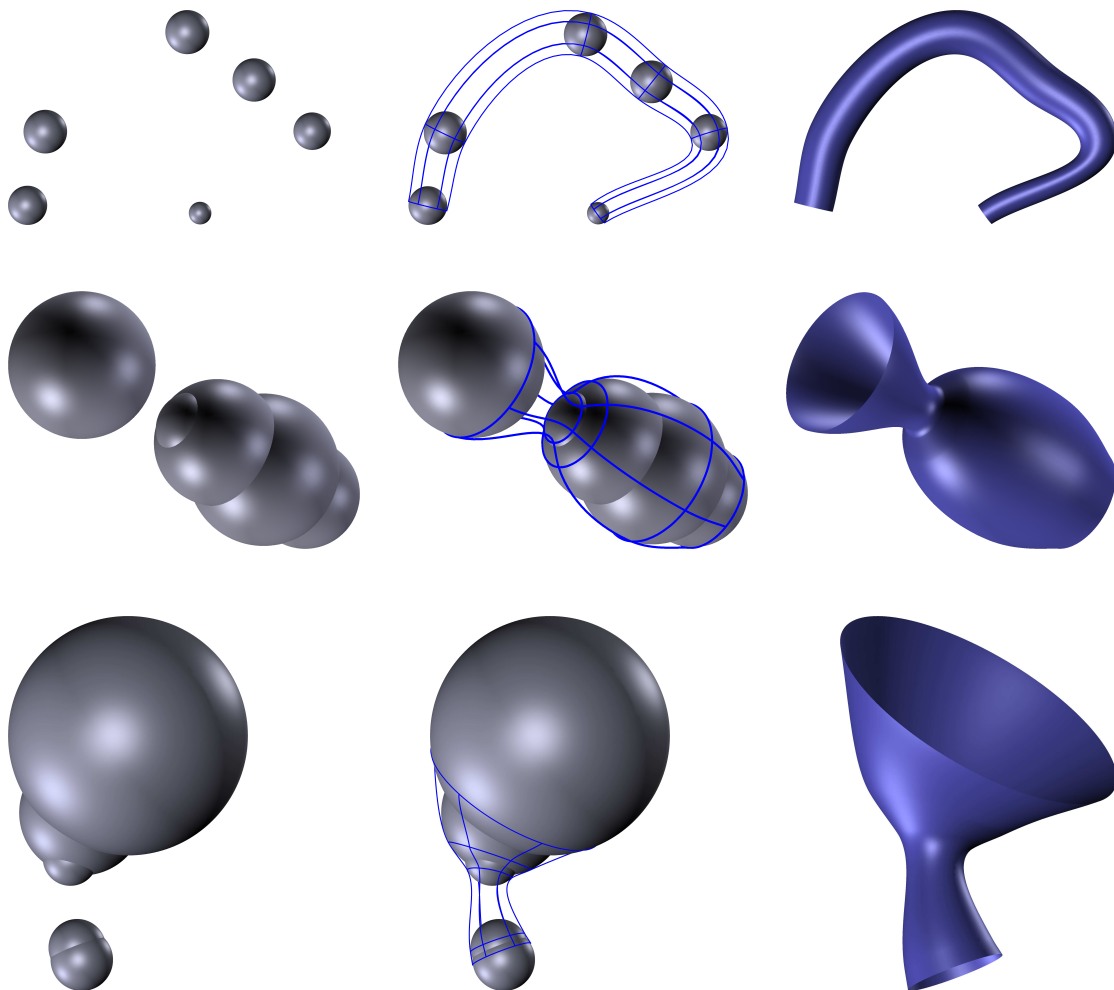
- [42] M. Peternell – H. Pottmann: A Laguerre geometric approach to rational offsets. *Computer Aided Geometric Design*, 15. évf. (1998) 3. sz., 223–249. p.
- [43] L. Piegl – W. Tiller: *The NURBS Book*. Monographs in Visual Communication sorozat. 2. kiad. 1996, Springer.
- [44] L.A. Piegl – W. Tiller: Biarc approximation of NURBS curves. *Computer-Aided Design*, 34. évf. (2001) 11. sz., 807–814. p.
- [45] M.J. Pratt: Cyclides in computer aided geometric design. *Computer Aided Geometric Design*, 7. évf. (1990) 1-4. sz., 221–242. p.
- [46] M.J. Pratt: Cyclides in computer aided geometric design II. *Computer Aided Geometric Design*, 12. évf. (1995) 2. sz., 131–152. p.
- [47] H. Prautzsch – W. Boehm – M. Paluszny: *Bézier and B-Spline Techniques*. 2002, Springer.
- [48] B. Rossignac, J. Whited – G. Slabaugh – T. Fang – G. Unal: Pearling: 3d interactive extraction of tubular structures from volumetric images. In *MICCAI Workshop: Interaction in Medical Image Analysis and Visualization* (konferenciaanyag). 2007.
- [49] G. Sandel: Zur Geometrie der Korbbogen. *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*, 17. évf. (1937) 5. sz., 301–302. p.
- [50] T. Schulz – B. Jüttler: Envelope computation in the plane by approximate implicitization. *Applicable Algebra in Engineering, Communications and Computing*, 22. évf. (2011) 4. sz., 265–288. p.
- [51] D. Shreiner – G. Sellers – J.M. Kessenich – B.M. Licea-Kane: *OpenGL Programming Guide: The Official Guide to Learning*

- OpenGL, Version 4.3 (8th Edition)*. 2013, Addison-Wesley Professional.
- [52] K. Singh–E. Kokkevis: Skinning characters using surface oriented free-form deformations. *Graphics Interface*, 2000., 35–42. p.
- [53] Z. Šír–R. Feichtinger–B. Jüttler: Approximating Curves and their Offsets using Biarcs and Pythagorean Hodograph Quintics. *Computer Aided Design*, 36. évf. (2006), 608–618. p.
- [54] G. Slabaugh–G. Unal–T. Fang–J. Rossignac–B. Whited: Variational skinning of an ordered set of discrete 2D balls. In *Advances in Geometric Modeling and Processing*. Lecture Notes in Computer Science sorozat, 4975. köt. 2008, Springer, 450–461. p.
- [55] G. Slabaugh–B. Whited–J. Rossignac–T. Fang–G. Unal: 3D ball skinning using PDEs for generation of smooth tubular surfaces. *Computer-Aided Design*, 42. évf. (2010) 1. sz., 18–26. p.
- [56] Strommer Gyula: *Geometria*. 1988, Nemzeti Tankönyvkiadó.
- [57] D. Szalkowski: Isoptics of open rosettes. *Annales Universitatis Mariae Curie-Skłodowska*, A59. évf. (2005), 119–128. p.
- [58] C.-L. Tai–B.A. Barsky–K.-F. Loe: An interpolation method with weight and relaxation parameters. *Curve and Surface Fitting: Saint-Malo*, 1999. évf. (2000), 393–402. p.
- [59] C.-L. Tai–G.-J. Wang: Interpolation with slackness and continuity control and convexity-preservation using singular blending. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 172. évf. (2004) 2. sz., 337–361. p.
- [60] C. Taylor: Note on a theory of orthoptic and isoptic loci. In *Proceedings of the Royal Society of London* (konferenciaanyag), 37. köt. 1884, Royal Society of London, 138–141. p.

- [61] R. Tornai: Measurement of visual smoothness of blending curves. *Annales Mathematicae et Informaticae*, 40. évf. (2012), 155–160. p.
- [62] T. Várady – P. Salvi – A. Rockwood: Transfinite surface interpolation with interior control. *Graphical Models*, 74. évf. (2012), 311–320. p.
- [63] B. Whited – J. Rossignac – G. Slabaugh – T. Fang – G. Unal: Pearling: 3D interactive extraction of tubular structures from volumetric images. *Interaction in Medical Image Analysis and Visualization*, 2007.
- [64] W. Wunderlich: Contributions to the geometry of cam mechanisms with oscillating followers. *Journal of Mechanisms*, 6. évf. (1971) 1. sz., 1–20. p.
- [65] W. Wunderlich: Kurven mit isoptischem Kreis. *Aequationes Mathematicae*, 6. évf. (1971) 1. sz., 71–81. p.
- [66] R.C. Yates: *Curves and Their Properties*. 1974, National Council of Teachers of Mathematics.

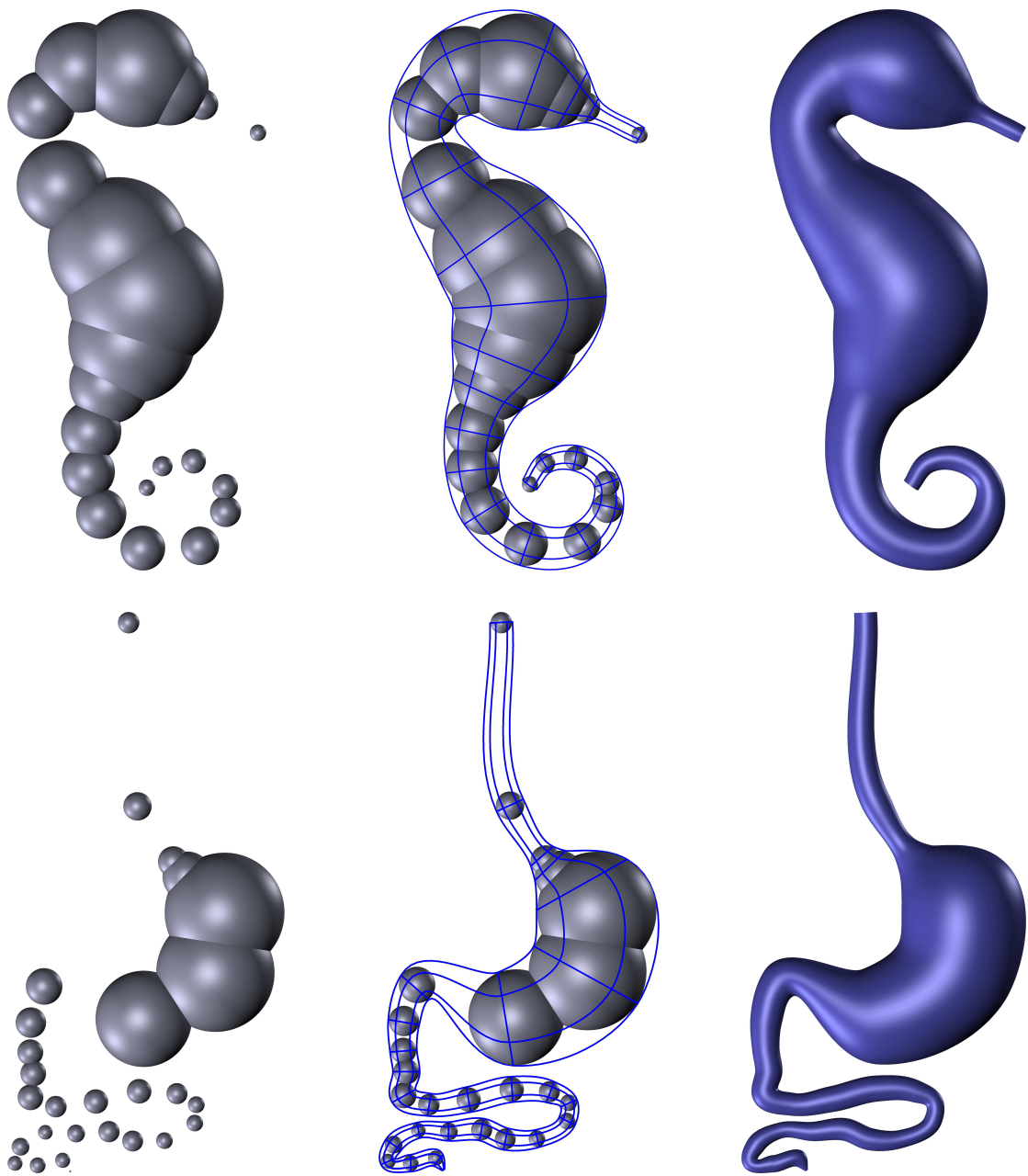


## A. Kimeneti *skin*-ek/Our skinning results



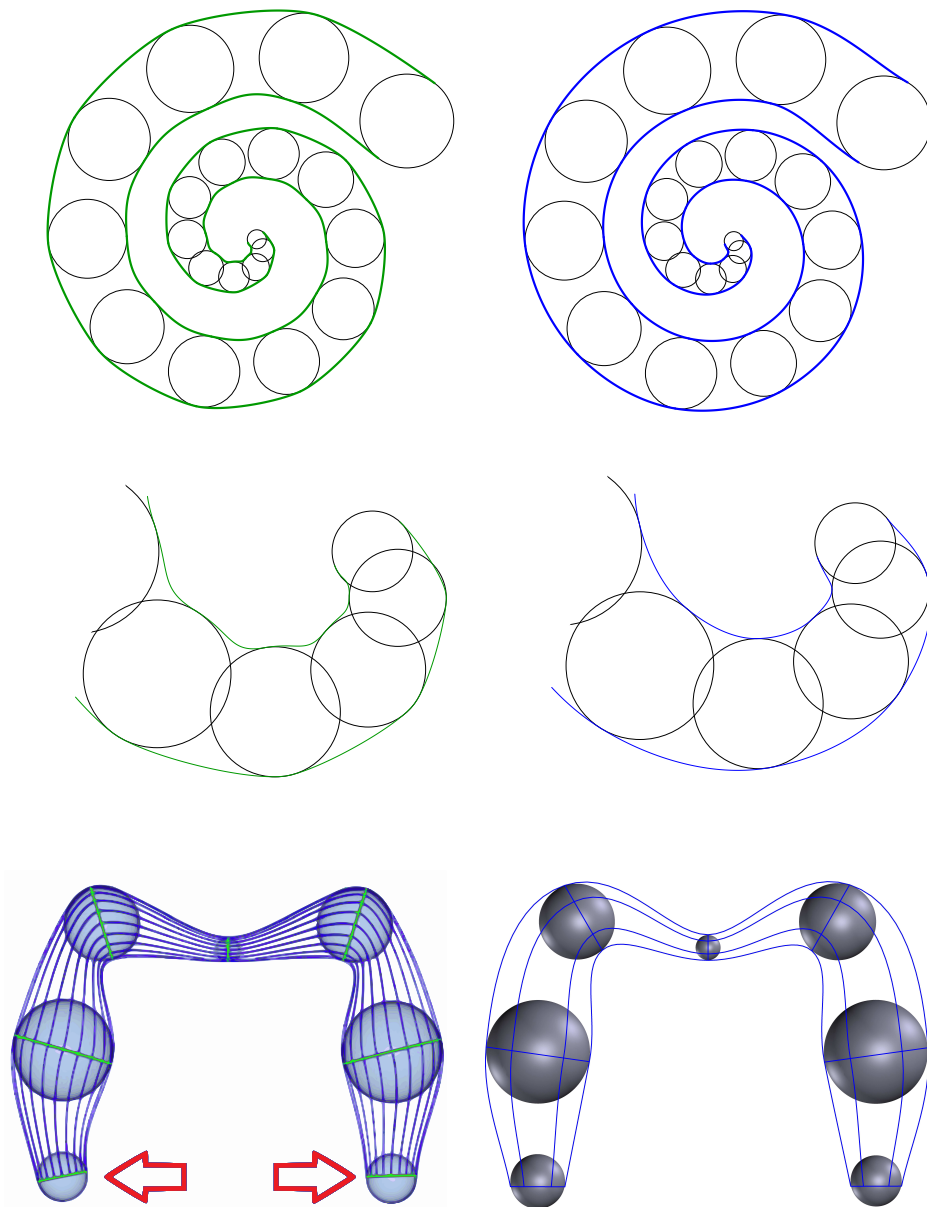
13. ábra. A saját fejlesztésű, gömbök burkolását megvalósító módszerünk néhány kimenete. A második és harmadik esetben érdemes megfigyelni, milyen alakváltozásokat valósíthatunk meg kis sugarú gömbök közbeékelésével./

With our method [30] we can enforce very small changes on the model by using spheres close to its neighbours (middle and bottom).



14. ábra. A saját fejlesztésű, gömbök burkolását megvalósító módszerünk további kimenetei. A módszerrel animációs karakterek is előállíthatók, illetve orvosi felhasználóságára látunk példát az alsó ábrákon./

With our method we can create animation characters, but we can use the method for medical 3D applications as well.



15. ábra. Slabaugh kimenetei (balra) és a saját kimeneteink (jobbra) síkbeli és térbeli esetben. Látható, hogy a mi módszerünkkel elkerülhetőek az indokolatlan kilengések (középen), illetve szimmetrikus kimenet biztosítható (lent)./

Slabaugh's results (left) have unnecessary torsions (middle) and they are often not symmetrical (bottom). Our results can be seen on the right.





## B. Publikációs lista/List of publications

### Referált folyóiratcikkek/

### Refereed journal papers

- [F1] R. Kunkli: Localization of touching points for interpolation of discrete circles. *Annales Mathematicae et Informaticae*, 36. évf. (2009) 1. sz., 103–110. p.
- [F2] R. Kunkli – M. Hoffmann: Skinning of circles and spheres. *Computer Aided Geometric Design*, 27. évf. (2010) 8. sz., 611–621. p.
- [F3] R. Kunkli: Biarc analysis for skinning of circles. *Annales Mathematicae et Informaticae*, 38. évf. (2011) 1. sz., 87–93. p.
- [F4] R. Kunkli – I. Papp – M. Hoffmann: Isoptics of Bézier curves. *Computer Aided Geometric Design*, 30. évf. (2013) 1. sz., 78–84. p.
- [F5] J. Szabó – R. Kunkli: The Generalization of Szabó’s Theorem for Rectangular Cuboids and an Application. *Journal for Geometry and Graphics*, 17. évf. (2013) 2. sz., 213–222. p.
- [F6] F. Nagy – R. Kunkli: Method for computing angle constrained isoptic curves for surfaces. *Annales Mathematicae et Informaticae*, 42. évf. (2013), 65–70. p.
- [F7] K. Bana – K. Kruppa – R. Kunkli – M. Hoffmann: KSpheres - an efficient algorithm for joining skinning surfaces. *Computer Aided Geometric Design*, 2014. DOI: 10.1016/j.cagd.2014.08.003.

## Konferenciakötetben megjelent cikkek/ Conference papers

- [K1] R. Kunkli – M. Hoffmann: Kör- és gömbsorozatok interpolációja. In L. Szirmay-Kalos – G. Renner (szerk.): *VI. Magyar Számítógépes Grafika és Geometria Konferencia, Budapest, 2014. február 21–22.* (konferenciaanyag). 2012, Neumann János Számítógéptudományi Társaság, 145–149. p.
- [K2] K. Kruppa – K. Bana – R. Kunkli – M. Hoffmann: Creating connection between skinning surfaces. In L. Szirmay-Kalos – G. Renner (szerk.): *VII. Magyar Számítógépes Grafika és Geometria Konferencia, Budapest, 2014. február 19–20.* (konferenciaanyag). 2014, Neumann János Számítógéptudományi Társaság, 46–51. p.

## További konferencia-előadások/ Other conference talks

- [E1] R. Kunkli – M. Hoffmann: Skinning of circles using biarcs. 8<sup>th</sup> International Conference on Applied Informatics (ICAI 2010), Eger, Magyarország, 2010. január.
- [E2] R. Kunkli: Skinning of circles using biarcs. The 7<sup>th</sup> Conference of PhD Students in Computer Science (CSCS 2010), Szeged, Magyarország, 2010. június.
- [E3] R. Kunkli – M. Hoffmann: Skinning of spheres. 2<sup>nd</sup> Croatian Conference on Geometry and Graphics (CCGG 2010), Šibenik, Horvátország, 2010. szeptember.
- [E4] R. Kunkli – M. Hoffmann: Skinning of circles by biarcs. Conference on Geometry – Theory and Applications (CGTA 2011), Vorau, Ausztria, 2011. június.

- [E5] R. Kunkli – I. Papp – M. Hoffmann: Iso-optics of Bézier curves. 1<sup>st</sup> International Conference on Applied Geometry and Graphics (GeoGra 2012), Budapest, Magyarország, 2012. január.
- [E6] R. Kunkli – I. Papp – M. Hoffmann: Isoptics of free-form curves. 16<sup>th</sup> Scientific-Professional Colloquium on Geometry and Graphics, Baška, Horvátország, 2012. szeptember.
- [E7] R. Kunkli: Skinning of Spheres using Biarcs. Conference on Geometry – Theory and Applications (CGTA 2013), Ljubljana, Szlovénia, 2013. június.
- [E8] J. Szabó – R. Kunkli: The generalization of Szabó’s Theorem for rectangular cuboids with an example application. 17<sup>th</sup> Scientific-Professional Colloquium on Geometry and Graphics, Rastoke, Horvátország, 2013. szeptember.