Egyetemi doktori (PhD) értekezés tézisei

Lie derivatives and geometric vector fields in spray and Finsler geometry

Tóth Anna

Témavezető: Dr. Szilasi József

Debreceni Egyetem
Matematika- és Számítástudományok Doktori Iskola
Debrecen, 2015.

1. Előzmények, motiváció és célkitűzések

Disszertációnk célkitűzése hármas. Először is, a Finsler-nyalábokon történő Lie-deriválás kalkulatív apparátusának (részben újnak mondható) kidolgozása. Másodszor, ennek a Finsler-típusú Lie-deriváltnak az alkalmazása (kombinálva egyéb technikákkal) a spray-sokaságok görbületi kollineációinak tanulmányozására. Harmadjára, Finsler-sokaságokon adott projektív és konform (speciálisan homotetikus és Killing) vektormezők vizsgálata, különös tekintettel a közöttük fennálló kapcsolatokra.

A már említett „geometriai" vektormezők elméletének hatalmas irodalma van. Mike Crampint idézve: „A sprayk és Berwald-konnexiók transzformációs elmélete a múlt század közepe táján volt divatos – Yano „A Lie-deriváltak elmélete és alkalmazásai" című könyvének ([34]) VIII. fejezete kiváló áttekintést ad a kutatások állásáról 1957-ben – azonban mára kiment a divatból; a témát nemrégiben Lovas Rezső elevenített fel [17]. Egy Berwald-konnexió infinitézimális affin transzformációjának értelmezése nem teljesen magától értetődő, mert a Berwald-konnexió egy visszahúzott (ún. pull-back) nyalábon van definiálva (ténylegesen egy érintőnyaláb visszahúzottján). Úgy érezzük, hogy egy ilyen visszahúzott nyalábon adott szelés Lie-deriváltjának fogalmát még nem tették olyan gondos geometriai vizsgálatok tárgyává, mint amilyenre rászolgál. " (Lásd a [8] bevezetését; megjegyezzük, hogy itt az utalások – [17] és [34] – számozásában a Disszertáció irodalomjegyzékét követtük.) Crampin és Saunders az imént idézett cikkükben megkísérelték ezt a hiányt pótolni – és ezt mi is folytatjuk ebben a Disszertációban.

A történeti gyökerekhez visszatérve, megemlítjük, hogy már Yano is idézi monográfiájában Soós Gyula „Über Gruppen von Affinitäten und Bewegungen in Finslerschen Räumen" című fontos cikkét ([27]). A következő két évtized fontosabb fejleményeiről R. B. Misra 1981-ben írt, 1993-ban átdolgozott és aktualizált cikkében ([23]) találhatunk egy jó áttekintést. Matsumoto a Finsler-konnexiók általa kidolgozott elméletét használva egy kétrészes dolgozatában ([19], [20]) világosabbá tette és kijavította Yano [34] néhány korábbi eredményét. A modern (és relatíve modern, részben tenzor kalkuluson alapuló) irodalomból, Lovas Rezső munkáján kívül, H. Akbar-Zadeh és J. Grifone cikkeit érdemes megemlítenünk ([2], [3], [12], [13]). Grifone szisztematikusan alkalmazza a „$\tau_{TM} : TTM \to TM$ érintőnyaláb formalizmust" , kombinálva a vektorértékű differenciálformák Frölicher–Nijenhuis kalkulusával. Lovas a „pull-back formalizmust" használva fogalmazza meg és bizonyítja eredményeit. Jelen Disszertáció sok tekintetben Grifone és Lovas munkájának folytatása. Az elmélet nagyobb része az érintőnyaláb visszahúzottján kerül kifejtésre, de kiemelt szerepet játszanak benne az érintőnyaláb-geometria fogalmai és eszközei is, beleértve a TM-en adott vertikális kalkulust. Kétfajta Lie-deriválttal dolgozunk: az egyik a sokaságok tenzor-algebráján adott klasszikus Lie-derivált, míg a másik a Finsler-vektormezők *vetíthető* vektormezők szerinti Lie-deriváltja. (Kiderül, mint ahogy az várható is, hogy ezek szoros kapcsolatban állnak egymással.) Szükségünk van a Finsler-nyalábokon adott kovariáns deriváltak Lie-deriváltjára is, melyet abban az értelemben használunk, ahogy az [17]-ben bevezetésre került. Disszertációnkban definiáljuk egy $\mathcal{H}$ Ehresmann-konnexió Lie-deriváltjának a fogalmát is, ami lehetővé teszi, hogy szólhassunk $\mathcal{H}$-Killing vektormezőkről.

Azt mondjuk, hogy egy M sokaságon adott X vektormező görbületi kollineációja egy M fölötti spray egy $\mathbf{C}$ görbületi adatának, ha $\widetilde{\mathcal{L}}_{X^c}\mathbf{C} = 0$, ahol X^c az X vektormező teljes liftje és $\widetilde{\mathcal{L}}_{X^c}$ az X^c szerinti Finsler-típusú Lie-derivált. A görbületi kollineációk fontos szerepet játszanak a klasszikus téridők geometriájának és fizikájának tanulmányozása során; ebben a témában utalunk G. S. Hall kiváló könyvére ([14]), főleg annak utolsó fejezetére. A Disszertációnkban spray-sokságok kontextusában elvégzett ilyen jellegű vizsgálatok tudomásunk szerint teljesen újak.

2. Az értekezés tartalma és új eredményei

2.1 Jelölések és háttérismeretek

Annak érdekében, hogy Disszertációnk könnyebben olvasható legyen, az I.részében (2-7. fejezetek) összegyűjtöttük azokat a háttérismereteket, amelyekre a további fejezetekben végig támaszkodunk. E helyen először is ennek az előkészítő szakasznak adjuk egy rövid összefoglalását.

2.1.1 Legyen V egy R gyűrű fölötti modulus és legyen $k \in \mathbb{N}$. A $V^k \to \mathsf{R}$ (ill. $V^k \to V$) k-lineáris leképezések R-modulusára a $T_k(V)$ (ill. $T_k^1(V)$) jelölést használjuk; $T_0(V) := \mathsf{R}$, $T_0^1(V) := V$. Ekkor $T_1(V) =: V^*$ a V modulus duális modulusa, $T_1^1(V) =: \mathrm{End}(V)$ pedig V endomorfizmus gyűrűje.

2.1.2 M-mel mindvégig egy n-dimenziós sima sokaságot jelölünk, ahol $n \geqq 1$ vagy $n \geqq 2$. $C^\infty(M)$ az M sokaság sima függvényeinek gyűrűje, $\mathfrak{X}(M)$ az M fölötti vektormezők $C^\infty(M)$-modulusa. Alkalmazzuk a

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{T}_k(M) := T_k(\mathfrak{X}(M)), \quad \mathcal{T}_k^1(M) := T_k^1(\mathfrak{X}(M)),\\
&\mathcal{A}_k(V) := \{\alpha \in \mathcal{T}_k(M) |\ \alpha \text{ alternáló}\},\\
&\mathcal{A}_k^1(M) := \{\beta \in \mathcal{T}_k^1(M) |\ \beta \text{alternáló}\}
\end{aligned}
$$

jelöléseket. Ekkor $\mathcal{A}(M) := \oplus_{k=0}^n \mathcal{A}_k(M)$ az M sokaság Grassmann algebrája. Megállapodunk abban, hogy $\mathcal{A}_k(M)$ a 0 modulus, ha k negatív egész. Egy D $\mathbb{R}$-lineáris transzformáció r-edfokú ($r \in \mathbb{Z}$) gradált derivációja $\mathcal{A}(M)$-nek, ha $D(\mathcal{A}_k(M)) \subset D(\mathcal{A}_{k+r}(M))$ és

$$D(\alpha \wedge \beta) = (D\alpha) \wedge \beta + (-1)^{kr} \alpha \wedge D\beta; \quad \alpha \in \mathcal{A}_k(M),\ \beta \in \mathcal{A}(M);$$

itt az $\wedge$ szimbólum ékszorzatot jelöl. A Grassmann algebra klasszikus gradált derivációi az i_X helyettesítési operátor, az $\mathcal{L}_X$

Lie-derivált ($X \in \mathfrak{X}(M)$) és a d külső derivált; ezek foka rendre -1, 0 és 1.

2.1.3 Az M sokaság érintőnyalábja $\tau\colon TM \to M$, a hasított érintőnyalábja $\overset{\circ}{\tau}\colon \overset{\circ}{T}M \to M$. Az utóbbinál $\overset{\circ}{T}M$ az M sokaság nemzérus érintővektorai alkotta nyílt részhalmaza TM-nek, $\overset{\circ}{\tau} := \tau \upharpoonright \overset{\circ}{T}M$. Egy $\varphi\colon M \to N$ sima leképezés deriváltját φ_* jelöli, ez TM-et TN-be képezi le. Egy TM-en (vagy $\overset{\circ}{T}M$-en) adott ξ vektormező vetíthető, ha van olyan X vektormező M-en, hogy $\tau_* \circ \xi = X \circ \tau$. Ha speciálisan $\tau_* \circ \xi = o \circ \tau$, ahol $o \in \mathfrak{X}(M)$ a zérus vektormező, akkor ξ-t vertikálisnak mondjuk. Használjuk az

$$\mathfrak{X}_{\mathrm{proj}}(TM) := \{\xi \in \mathfrak{X}(TM) |\ \xi \text{ vetíthető}\},$$
$$\mathfrak{X}^{\mathsf{v}}(TM) := \{\xi \in \mathfrak{X}(TM) |\ \xi \text{ vertikális}\}.$$

jelöléseket.

2.1.4 Legyen $f \in C^\infty(M)$, $X \in \mathfrak{X}(M)$. Ekkor $f^{\mathsf{v}} := f \circ \tau$ az f függvény vertikális liftje TM-be, az

$$f^{\mathsf{c}}\colon TM \to \mathbb{R},\ v \mapsto f^{\mathsf{c}}(v) := v(f) \in \mathbb{R}$$

sima függvény pedig a teljes liftje. Az X vektormező $X^{\mathsf{v}} \in \mathfrak{X}^{\mathsf{v}}(TM)$ vertikális, ill. $X^{\mathsf{c}} \in \mathfrak{X}(TM)$ teljes liftje az az egyetlen vektormező TM-en, amelyre tetszőleges $f \in C^\infty(M)$ esetén

$$X^{\mathsf{v}} f^{\mathsf{c}} = (Xf)^{\mathsf{v}},\ X^{\mathsf{v}} f^{\mathsf{v}} = 0;\ X^{\mathsf{c}} f^{\mathsf{c}} = (Xf)^{\mathsf{c}},\ X^{\mathsf{c}} f^{\mathsf{v}} = (Xf)^{\mathsf{v}}.$$

Létezik egy és csak egy olyan $C \in \mathfrak{X}^{\mathsf{v}}(TM)$ vertikális vektormező, hogy $Cf^{\mathsf{c}} = f^{\mathsf{c}}$ minden $f \in C^\infty(M)$ függvényre; ez a Liouville vektormező TM-en. Egy $F \in C^\infty(\overset{\circ}{T}M)$ függvény k^+-homogén, ha $CF = kF$ ($k \in \mathbb{Z}$).

2.1.5 A TM, ill. $\overset{\circ}{T}M$ fölötti Finsler-nyaláb a

$$\pi\colon TM\times_M TM\to TM \text{ és } \overset{\circ}{\pi}\colon \overset{\circ}{T}M\times_M TM\to \overset{\circ}{T}M$$

vektornyaláb. Itt például a π nyaláb $v\in TM$ fölötti fibruma a $\{v\}\times T_{\tau(v)}M\cong T_{\tau(v)}M$ n-dimenziós valós vektortér. E vektornyalábok sima szeléseinek modulusát $\Gamma(\pi)$, ill. $\Gamma(\overset{\circ}{\pi})$ jelöli. $\Gamma(\pi)$ és $\Gamma(\overset{\circ}{\pi})$ elemeit Finsler vektormezőknek; a $T_k(\Gamma(\overset{\circ}{\pi}))\cup T_k^1(\Gamma(\overset{\circ}{\pi}))$ ($k\in\mathbb{N}$). modulusok elemeit $\overset{\circ}{T}M$-en adott Finsler vektormezőknek hívjuk. A következő tipográfiai megoldással élünk:

$X,Y,\dots$	–	vektormezők M-en,
$\xi,\eta,\dots$	–	vektormezők TM-en (vagy $\overset{\circ}{T}M$-en),
$\widetilde{X},\widetilde{Y},\dots$	–	Finsler vektormezők,
$\widehat{X},\widehat{Y},\dots$	–	bázikus Finsler vektormezők,
$\widetilde{\delta}$	–	$\Gamma(\pi)$ kanonikus szelése.

Itt $\widehat{X}(v):=(v,X(\tau(v)))$, $\widetilde{\delta}(v):=(v,v)$ $(v\in TM)$.

2.1.6 A $0\to\Gamma(\pi)\xrightarrow{\mathbf{i}}\mathfrak{X}(TM)\xrightarrow{\mathbf{j}}\Gamma(\pi)\to 0$ sor, ahol $\mathbf{i}(\widehat{X})=X^{\mathsf{v}}$; $\mathbf{j}(X^{\mathsf{v}})=0, \mathbf{j}(X^{\mathsf{c}})=\widehat{X}$ $(X\in\mathfrak{X}(M))$ $C^\infty(TM)$-homomorfizmusok egzakt sora. Így $\operatorname{Im}(\mathbf{i})=\operatorname{Ker}(\mathbf{j})=\mathfrak{X}^{\mathsf{v}}(TM)$, s közvetlenül adódik, hogy $C=\mathbf{i}(\widetilde{\delta})$. A $\mathbf{J}:=\mathbf{i}\circ\mathbf{j}$ endomorfizmus $\mathfrak{X}(TM)$ vertikális endomorfizmusa. Ez $\mathcal{A}(TM)$-nek egy $d_{\mathbf{J}}$ elsőfokú gradált derivációját indukálja, amely a

$$d_{\mathbf{J}}F:=dF\circ\mathbf{J},\quad d_{\mathbf{J}}dF:=dd_{\mathbf{J}}F\qquad (F\in C^\infty(TM))$$

előírással értelmezhető.

2.1.7 Alkalmazzuk a (kanonikus) vertikális derivált ∇^{v} operátorát, melynek definíciója a következő lépésekben adható meg:

$$\nabla^{\mathsf{v}}_{\widetilde{X}} F := (\mathbf{i}\widetilde{X})F \quad (F \in C^\infty(TM));$$
$$\nabla^{\mathsf{v}}_{\widetilde{X}} \widetilde{Y} := \mathbf{j}[\mathbf{i}\widetilde{X}, \eta], \quad \eta \in \mathfrak{X}(TM) \text{ olyan, hogy } \mathbf{j}\eta = \widetilde{Y};$$
$$(\nabla^{\mathsf{v}}_{\widetilde{X}} A)(\widetilde{Y}_1, \dots \widetilde{Y}_k) := \nabla^{\mathsf{v}}_{\widetilde{X}}(A(\widetilde{Y}_1, \dots, Y_k))$$
$$-\sum_{i=1}^{k} A(\widetilde{Y}_1, \dots, \nabla^{\mathsf{v}}_{\widetilde{X}} \widetilde{Y}_i, \dots \widetilde{Y}_k), \quad A \in T_k(\Gamma(\pi)) \cup T^1_k(\Gamma(\pi)).$$

2.1.8 Egy $\mathcal{H}\colon \Gamma(\mathring{\pi}) \to \mathfrak{X}(\mathring{T}M)$ $C^\infty(\mathring{T}M)$-lineáris leképezést $\mathring{T}M$-beli Ehresmann-konnexiónak nevezünk, ha $\mathbf{j} \circ \mathcal{H} = 1_{\Gamma(\mathring{\pi})}$. Adatai:

$$\mathbf{h} := \mathcal{H} \circ \mathbf{j}, \quad \mathbf{v} = 1_{\mathfrak{X}(\mathring{T}M)} - \mathbf{h} \text{ és } \mathcal{V} := \mathbf{i}^{-1} \circ \mathbf{v}$$

rendre a $\mathcal{H}$-hoz csatolt vertikális és horizontális projekció, valamint vertikális leképezés; $X^{\mathsf{h}} := \mathcal{H}(\widehat{X}) = \mathbf{h}X^{\mathsf{c}}$ az X vektormező ($\mathcal{H}-$)horizontális liftje. Az Ehresmann-konnexió homogén, ha $[C, X^{\mathsf{h}}] = 0$ minden $X \in \mathfrak{X}(M)$-re. A $\mathcal{H}$ által indukált ∇^{h} h-Berwald-derivált a következő lépésekben értelmezhető:

$$\nabla^{\mathsf{h}}_{\widetilde{X}} F := (\mathcal{H}\widetilde{X})F \ (F \in C^\infty(\mathring{T}M)); \quad \nabla^{\mathsf{h}}_{\widetilde{X}} \widetilde{Y} := \mathcal{V}[\mathcal{H}\widetilde{X}, \mathbf{i}\widetilde{Y}];$$
$$(\nabla^{\mathsf{h}}_{\widetilde{X}} A)(\widetilde{Y}_1, \dots, \widetilde{Y}_k) := \nabla^{\mathsf{h}}_{\widetilde{X}}(A(\widetilde{Y}_1, \dots, \widetilde{Y}_k))$$
$$-\sum_{i=1}^{k} A(\widetilde{Y}_1, \dots, \nabla^{\mathsf{h}}_{\widetilde{X}} \widetilde{Y}_i, \dots, \widetilde{Y}_k).$$

Ekkor a

$$\nabla\colon (\xi, \widetilde{Y}) \in \mathfrak{X}(\mathring{T}M) \times \Gamma(\mathring{\pi}) \mapsto \nabla_\xi \widetilde{Y} := \nabla^{\mathsf{v}}_{\mathcal{V}\xi} \widetilde{Y} + \nabla^{\mathsf{h}}_{\mathbf{j}\xi} \widetilde{Y} \in \Gamma(\mathring{\pi})$$

leképezés kovariáns derivált a $\mathring{\pi}$ vektornyalábon, a Berwald-derivált.

2.1.9 Egy $S\colon TM \to TTM$ leképezés szemispray M fölött, ha C^1-osztályú, $\overset{\circ}{T}M$ fölött sima, és eleget tesz a $\tau_{TM} \circ S = 1_{TM}$, $\mathbf{J}S = C$ feltételeknek. Ha – ráadásul – $[C, S] = S$, akkor S spray M fölött. Minden szemispray indukál egy $\mathcal{H}$ Ehresmann-konnexiót, melyre

$$\mathcal{H}(\widehat{X}) = \frac{1}{2}(X^{\mathsf{c}} + [X^{\mathsf{v}}, S]), \textit{ bármely } X \in \mathfrak{X}(M) \textit{ esetén.}$$

Ez a konnexió torziómentes abban az értelemben, hogy tetszőleges $\widetilde{X}, \widetilde{Y}$ Finsler-vektormezőkre

$$\nabla_{\mathcal{H}(\widetilde{X})}\widetilde{Y} - \nabla_{\mathcal{H}(\widetilde{Y})}\widetilde{X} = \mathbf{j}[\mathcal{H}(\widetilde{X}), \mathcal{H}(\widetilde{Y})] \quad (\overset{\circ}{T}M \text{ fölött}).$$

Amennyiben S spray, úgy $\mathcal{H}$ homogén, és azt mondjuk, hogy $\mathcal{H}$ az (M, S) spray-sokaság Berwald-konnexiója.

2.2 Eredmények

> *Új eredményeink a Disszertáció II-IV. részeiben (8-17. fejezetek) vannak kifejtve. Ezek közül a legfontosabbakat az alábbiakban az 1-15. tételek összegzik.*

2.2.1 Lie-deriváltak Finsler-nyalábokon Megadva egy vetíthető $\xi \in \mathfrak{X}(TM)$ vektormezőt, a Finsler-tenzormezők ξ szerinti Lie-deriváltját a következő lépésekben definiáljuk:

$$\widetilde{\mathcal{L}}_\xi F := \mathcal{L}_\xi F = \xi F \ (F \in C^\infty(TM)); \quad \widetilde{\mathcal{L}}_\xi \widetilde{Y} := \mathbf{i}^{-1}[\xi, \mathbf{i}\widetilde{Y}];$$
$$(\widetilde{\mathcal{L}}_\xi A)(\widetilde{Y}_1, \dots, \widetilde{Y}_k) := \widetilde{\mathcal{L}}_\xi(A(\widetilde{Y}_1, \dots, \widetilde{Y}_k))$$
$$- \sum_{i=1}^{k} A(\widetilde{Y}_1, \dots, \widetilde{\mathcal{L}}_\xi \widetilde{Y}_i, \dots, \widetilde{Y}_k),$$

itt $A \in T_k(\Gamma(\pi)) \cup T_k^1(\Gamma(\pi)$. Egy $\overset{\circ}{T}M$-beli $\mathcal{H}$ Ehresmann-konnexió $\widetilde{\mathcal{L}}_\xi \mathcal{H}$ Lie-deriváltját az

$$(\widetilde{\mathcal{L}}_\xi \mathcal{H})(\widetilde{Y}) := \mathcal{L}_\xi(\mathcal{H}(\widetilde{Y})) - \mathcal{H}(\widetilde{\mathcal{L}}_\xi \widetilde{Y}).$$

előírással értelmezzük; egy

$$D\colon \mathfrak{X}(TM) \times \Gamma(\pi) \to \Gamma(\pi),\ (\eta, \widetilde{Z}) \mapsto D_\eta \widetilde{Z}$$

kovariáns derivált ξ szerinti Lie-deriváltja az

$$\begin{cases} \widetilde{\mathcal{L}}_\xi D\colon \mathfrak{X}(TM) \times \Gamma(\pi),\ (\eta, \widetilde{Z}) \mapsto (\widetilde{\mathcal{L}}_\xi D)(\eta, \widetilde{Z}), \\ (\widetilde{\mathcal{L}}_\xi D)(\eta, \widetilde{Z}) := \widetilde{\mathcal{L}}_\xi (D_\eta \widetilde{Z}) - D_{[\xi,\eta]}\widetilde{Z} - D_\eta(\widetilde{\mathcal{L}}_\xi \widetilde{Z}). \end{cases}$$

leképezés. Levezettük a következő hasznos formulákat:

(1) $[\widetilde{\mathcal{L}}_\xi, \widetilde{\mathcal{L}}_\eta] = \widetilde{\mathcal{L}}_{[\xi,\eta]}$;
(2) $\widetilde{\mathcal{L}}_{X^{\mathsf{c}}} \widehat{Y} = \widehat{[X,Y]}$;
(3) $\widetilde{\mathcal{L}}_{X^{\mathsf{c}}} \widetilde{\delta} = 0$;
(4) $\widetilde{\mathcal{L}}_{X^{\mathsf{c}}} \upharpoonright \Gamma(\pi) = \nabla^{\mathsf{v}}_{\widehat{X}} \upharpoonright \Gamma(\pi)$;
(5) $\mathbf{i} \circ \widetilde{\mathcal{L}}_{X^{\mathsf{c}}} = \mathcal{L}_{X^{\mathsf{c}}} \circ \mathbf{i}$;
(6) $\widetilde{\mathcal{L}}_{X^{\mathsf{c}}} \circ \mathbf{j} = \mathbf{j} \circ \mathcal{L}_{X^{\mathsf{c}}}$;
(7) $\widetilde{\mathcal{L}}_{X^{\mathsf{c}}} \circ \nabla^{\mathsf{v}}_{\widehat{Y}} - \nabla^{\mathsf{v}}_{\widehat{Y}} \circ \widetilde{\mathcal{L}}_{X^{\mathsf{c}}} = \widetilde{\mathcal{L}}_{[X,Y]^{\mathsf{v}}}$;
(8) $\widetilde{\mathcal{L}}_{X^{\mathsf{h}}} \upharpoonright \Gamma(\mathring{\pi}) = \nabla^{\mathsf{h}}_{\widehat{X}} \upharpoonright \Gamma(\mathring{\pi})$;
(9) $\widetilde{\mathcal{L}}_{X^{\mathsf{c}}} \circ \nabla^{\mathsf{h}}_{\widehat{Y}} - \nabla^{\mathsf{h}}_{\widehat{Y}} \circ \widetilde{\mathcal{L}}_{X^{\mathsf{c}}} = \widetilde{\mathcal{L}}_{[X^{\mathsf{c}},Y^{\mathsf{h}}]}$.

A fenti formulákban $\xi, \eta \in \mathfrak{X}_{\mathrm{proj}}(TM)$; $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$. (8)-ban és (9)-ben föltesszük, hogy egy Ehresmann-konnexió is adva van $\mathring{T}M$-ben.

Megmutattuk, hogy $\widetilde{\mathcal{L}}_{X^{\mathsf{c}}} \widetilde{Y}$ eltűnésére a következő dinamikai interpretáció lehetséges:

1. Tétel *Legyen* (φ_t) *az* X *vektormező lokális folyama.* $\widetilde{\mathcal{L}}_{X^{\mathsf{c}}} \widetilde{Y} = 0$ *pontosan akkor teljesül, ha* $\widetilde{Y}$ *invariáns* X^{c} *folyamával szemben, azaz*

$$((\varphi_t)_* \times (\varphi_t)_*) \circ \widetilde{Y} = \widetilde{Y} \circ (\varphi_t)_*,$$

minden szóbajövő $t \in \mathbb{R}$ *esetén.*

2.2.2 $\mathcal{H}$-Killing vektormezők Legyen adva egy $\mathcal{H}$ Ehresmann-konnexió $\overset{\circ}{T}M$-en. Jegyezzük meg először is, hogy az

$$\widetilde{\mathcal{L}}_\xi \mathcal{H} \colon \Gamma(\overset{\circ}{\pi}) \to \mathfrak{X}(\overset{\circ}{T}M),\ \widetilde{Y} \mapsto (\widetilde{\mathcal{L}}_\xi \mathcal{H})(\widetilde{Y}) \quad (\xi \in \mathfrak{X}_{\mathrm{proj}}(\overset{\circ}{T}M))$$

leképezés $C^\infty(\overset{\circ}{T}M)$-lineáris. Tetszőleges $X \in \mathfrak{X}(M)$ vektormező esetén $\mathbf{j} \circ \widetilde{\mathcal{L}}_{X^{\mathsf{c}}} = 0$, ami mutatja, hogy egy Ehresmann-konnexió Lie-deriváltja már nem Ehresmann-konnexió.

Egy $X \in \mathfrak{X}(M)$ vektormezőt *$\mathcal{H}$-Killing vektormezőnek* nevezünk és azt írjuk, hogy $X \in \mathrm{Kill}_{\mathcal{H}}(M)$, ha $\mathcal{H}$ invariáns X lokális folyamával szemben, abban az értelemben, hogy minden szóbajövő valós t-re

$$(\varphi_t)_{**} \circ \mathcal{H} = \mathcal{H} \circ ((\varphi_t)_* \times (\varphi_t)_*).$$

(Itt az Ehresmann-konnexiót $\overset{\circ}{T}M \times_M TM \to T\overset{\circ}{T}M$ erős nyalábleképezésként interpretáljuk.) Megmutattuk a következőt:

2. Tétel *Egy $X \in \mathfrak{X}(M)$ vektormezőre az alábbi feltételek ekvivalensek:*

(1) *X $\mathcal{H}$-Killing vektormező,*

(2) *Ha X lokális folyama (φ_t), akkor minden szóbajövő t-re teljesül, hogy $(\varphi_t)_{**} \circ \mathbf{h} = \mathbf{h} \circ (\varphi_t)_{**}$,*

(3) $\widetilde{\mathcal{L}}_{X^{\mathsf{c}}} \mathcal{H} = 0$,

(4) $\mathcal{L}_{X^{\mathsf{c}}} \mathbf{h} = 0$.

Amennyiben (1)-(4) valamelyike – és így bármelyike fennáll, úgy

$$X^{\mathsf{c}} N^i_j = N^k_j \left(\frac{\partial X^i}{\partial u^k} \circ \tau \right) - N^i_k \left(\frac{\partial X^k}{\partial u^j} \circ \tau \right) - y^k \left(\frac{\partial^2 X^i}{\partial u^j \partial u^k} \circ \tau \right),$$

ahol az X^i függvények X komponensei M egy $(\mathcal{U}, (u^i)_{i=1}^n)$ térképére vonatkozóan, (N^i_j) pedig $\mathcal{H}$ Christoffel-szimbólumainak családja a TM-en indukált $(\tau^{-1}(\mathcal{U}), ((x^i)_{i=1}^n, (y^i)_{i=1}^n))$ térképre vonatkozóan.

2.2.3 Lie-szimmetriák Legyen S az M sokaság fölötti szemispray. Egy $X \in \mathfrak{X}(M)$ vektormező Lie-szimmetriája S-nek, ha S invariáns X^{c} lokális folyamával szemben, azaz $(\varphi_t)_{**} \circ S = S \circ (\varphi_t)_*$ minden szóbajövő t-re, ahol (φ_t) X lokális folyama. Ekkor azt írjuk, hogy $X \in \mathrm{Lie}_S(M)$. A klasszikus Lie-derivált dinamikai interpretációjából azonnal látható, hogy

$$X \in \mathrm{Lie}_S(M) \iff [X^{\mathsf{c}}, S] = 0.$$

Amennyiben $\mathcal{H}$ az S által indukált Ehresmann-konnexió, úgy $\mathrm{Lie}_S(M) \subset \mathrm{Kill}_{\mathcal{H}}(M)$.

3. Tétel *Legyen (M,S) spray-sokaság, ellátva a $\mathcal{H}$ Berwald-konnexióval és a $\mathcal{H}$ által indukált ∇ Berwald-deriválttal. Az M sokaság egy X vektormezőjére a következők ekvivalensek:*

(1) $X \in \mathrm{Lie}_S(M)$,	(6) $\mathcal{L}_{X^{\mathsf{c}}}\mathbf{v} = 0$,
(2) $[X^{\mathsf{c}}, S] = 0$,	(7) $\widetilde{\mathcal{L}}_{X^{\mathsf{c}}}\nabla = 0$,
(3) $X \in \mathrm{Kill}_{\mathcal{H}}(M)$,	(8) $[X^{\mathsf{c}}, Y^{\mathsf{h}}] = [X,Y]^{\mathsf{h}}$,
(4) $\widetilde{\mathcal{L}}_{X^{\mathsf{c}}}\mathcal{H} = 0$,	(9) $[\widetilde{\mathcal{L}}_{X^{\mathsf{c}}}, \widetilde{\mathcal{L}}_{Y^{\mathsf{h}}}] = \widetilde{\mathcal{L}}_{[X,Y]^{\mathsf{h}}}$,
(5) $\mathcal{L}_{X^{\mathsf{c}}}\mathbf{h} = 0$,	(10) $\widetilde{\mathcal{L}}_{X^{\mathsf{c}}} \circ \mathcal{V} = \mathcal{V} \circ \mathcal{L}_{X^{\mathsf{c}}}$.

Itt (8)-ban és (9)-ben $Y \in \mathfrak{X}(M)$ tetszőleges. Megjegyezzük, hogy (1), (5) és (7) ekvivalenciáját korábban Lovas Rezső már igazolta, ld. [17].

2.2.4 Görbületi kollineációk **(A)** Egy (M,S) spray-sokaság Jacobi endomorfizmusa (vagy affin elhajlási tenzora), fundamentális affin görbülete és affin görbülete rendre az a $\mathbf{K}$, $\mathbf{R}$, és $\mathbf{H}$ Finsler tenzormező, amelyet a

$$\begin{aligned}
\mathbf{K}(\widetilde{X}) &:= \mathcal{V}[S, \mathcal{H}(\widetilde{X})], \\
\mathbf{R}(\widetilde{X}, \widetilde{Y}) &:= \frac{1}{3}(\nabla^{\mathsf{v}}\mathbf{K}(\widetilde{X}, \widetilde{Y}) - \nabla^{\mathsf{v}}\mathbf{K}(\widetilde{Y}, \widetilde{X})), \\
\mathbf{H}(\widetilde{X}, \widetilde{Y})\widetilde{Z} &:= -\nabla^{\mathsf{v}}\mathbf{R}(\widetilde{Z}, \widetilde{X}, \widetilde{Y})
\end{aligned}$$

előírás értelmez. Ha $\mathbf{C} \in \{\mathbf{K}, \mathbf{R}, \mathbf{H}\}$ és $\widetilde{\mathcal{L}}_{X^c}\mathbf{C} = 0$, akkor azt mondjuk, hogy X *görbületi kollineációja* $\mathbf{C}$-nek.

4. Tétel *Egy $X \in \mathfrak{X}(M)$ vektormező pontosan akkor görbületi kollineációja az (M, S) spray-sokaság Jacobi endomorfizmusának, ha invariáns X (φ_t) lokális folyamával szemben, abban az értelemben, hogy*

$$((\varphi_t)_* \times (\varphi_t)_*) \circ \mathbf{K} = \mathbf{K} \circ ((\varphi_t)_* \times (\varphi_t)_*),$$

minden lehetséges valós t-re. (Itt $\mathbf{K}$-t a $\overset{\circ}{\pi}$ vektornyaláb erős nyalábendomorfizmusaként interpretáljuk.)

5. Tétel *Ha $X \in \mathrm{Lie}_S M$, akkor X görbületi kollineációja a $\mathbf{K}$, $\mathbf{R}$ és $\mathbf{H}$ tenzoroknak.*

(B) Egy, az S sprayből konstruált Finsler tenzormező projektíven invariáns, ha nem változik az S spray

$$S \rightsquigarrow S - 2PC, \quad P \in C^\infty(\overset{\circ}{T}M)\ 1^+\text{-homogén}$$

projektív változtatásai során. Egy (M, S) spray-sokaság alapvető projektíven invariáns tenzorai a $\mathbf{W}_1$, $\mathbf{W}_2$, $\mathbf{W}_3$ Weyl-tenzorok és a $\mathbf{D}$ Douglas tenzor. Ezek definíciói rendre a következők:

$$\begin{aligned}
\mathbf{W}_1 &:= \mathbf{K} - K\,1_{\Gamma(\overset{\circ}{\pi})} - \frac{1}{n+1}(\mathrm{tr}\nabla^{\mathsf{v}}\mathbf{K} - \nabla^{\mathsf{v}}K) \otimes \widetilde{\delta}, \\
\mathbf{W}_2(\widetilde{X}, \widetilde{Y}) &:= \frac{1}{3}(\nabla^{\mathsf{v}}\mathbf{W}_1(\widetilde{X}, \widetilde{Y}) - \nabla^{\mathsf{v}}\ \mathbf{W}_1(\widetilde{Y}, \widetilde{X})), \\
\mathbf{W}_3(\widetilde{X}, \widetilde{Y})\widetilde{Z} &:= \nabla^{\mathsf{v}}\mathbf{W}_2(\widetilde{Z}, \widetilde{X}, \widetilde{Y}), \\
\mathbf{D} &:= \mathbf{B} - \frac{1}{n-1}((\nabla^{\mathsf{v}}\mathrm{tr}\mathbf{B}) \otimes \widetilde{\delta} + (\mathrm{tr}\mathbf{B}) \odot 1_{\Gamma(\overset{\circ}{\pi})}).
\end{aligned}$$

Az első formulában $K := \frac{1}{n-1}\mathrm{tr}\mathbf{K}$, míg az utolsóban $\mathbf{B}$ a spray-sokaság Berwald-tenzora, amely megadható a $\mathbf{B}(\widehat{X}, \widehat{Y})\widehat{Z} := (\nabla^{\mathsf{v}}\nabla^{\mathsf{h}}\widehat{Z})(\widehat{X}, \widehat{Y})$ előírással, a $\odot$ szimbólum pedig numerikus faktor nélküli szimmetrikus szorzatot jelöl.

6. Tétel *Ha* $X \in \mathrm{Lie}_S(M)$, *akkor* $\widetilde{\mathcal{L}}_{X^c}\mathbf{W}_i = 0, \quad i \in \{1,2,3\}.$

7. Tétel *Ha* $X \in \mathrm{Lie}_S(M)$, *akkor* $\widetilde{\mathcal{L}}_{X^c}\mathbf{B} = 0$, *és ebből következően* $\widetilde{\mathcal{L}}_{X^c}\mathbf{D} = 0$.

2.2.5 Geometriai vektormezők Finsler-sokaságokon

Egy $F\colon TM \to \mathbb{R}$ pozitív, folytonos függvény M fölötti Finsler-függvény, ha $\overset{\circ}{T}M$-en sima, 1^+-homogén és a

$$g := \frac{1}{2}\nabla^{\mathsf{v}}\nabla^{\mathsf{v}}F^2 =: \nabla^{\mathsf{v}}\nabla^{\mathsf{v}}E$$

alaptenzor (fibrumonként) nemelfajuló. Egy Finsler-sokaság olyan (M,F) pár, amelyet egy M sokaság és egy M fölötti Finsler-függvény alkot. Néhány fontosabb adata:

(1) $\theta_g := \nabla^{\mathsf{v}}E$ vagy $\theta_E := d_{\mathbf{J}}E = \theta_g \circ \mathbf{j}$ az (M,F) Finsler-sokaság Hilbert 1-formája.

(2) $\omega_E := d\theta_E = dd_{\mathbf{J}}E$ – (M,F) fundamentális 2-formája.

(3) $w := \frac{1}{n!}(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\omega_E \wedge \cdots \wedge \omega_E$ (n tényező) – a Dazord-féle térfogati forma $\overset{\circ}{T}M$-en.

(4) (M,F) kanonikus spray-je az az S spray, amelyet $\overset{\circ}{T}M$ fölött az $i_S dd_{\mathbf{J}}E = -dE$ feltétel határoz meg. (M,F) $\mathcal{H}$-val jelölt kanonikus konnexiója az (M,S) spray-sokaság Berwald-konnexiója; ∇ a kanonikus konnexió által indukált Berwald-derivált.

(5) $\overset{\circ}{T}M$-en a $g^S(\xi,\eta) := g(\mathbf{j}\xi,\mathbf{j}\eta) + g(\mathcal{V}\xi,\mathcal{V}\eta)$ előírással értelmezett Riemann-metrika a Sasaki-Finsler metrika.

(6) $\mathcal{C}_\flat := \nabla^{\mathsf{v}}g = \nabla^{\mathsf{v}}\nabla^{\mathsf{v}}\nabla^{\mathsf{v}}E$ a Finsler-sokaság Cartan-tenzora; $\mathcal{C}$ a vele metrikusan ekvivalens $(1,2)$- típusú tenzor, amelyet a $g(\mathcal{C}(\widetilde{X},\widetilde{Y})\widetilde{Z}) = \mathcal{C}_\flat(\widetilde{X},\widetilde{Y},\widetilde{Z})$ formula értelmez.

(7) $\mathbf{L}_\flat := \nabla^{\mathsf{h}}g = \nabla^{\mathsf{h}}\nabla^{\mathsf{v}}\nabla^{\mathsf{v}}E$ a Landsberg-tenzor; $\mathbf{L}$ a vele metrikusan ekvivalens $(1,2)$-típusú tenzor, amelyet a $g(\mathbf{L}(\widetilde{X},\widetilde{Y})\widetilde{Z}) := \mathbf{L}_\flat(\widetilde{X},\widetilde{Y},\widetilde{Z})$ formula ad meg.

(8) D^C, D^{Ch} és D^{Hs} rendre a Cartan, a Chern-Rund és a

Hashiguchi-derivált (M,F)-en. Értelmezésük:

$$D_\xi^C \widetilde{Y} := \nabla_\xi \widetilde{Y} + \frac{1}{2}\mathcal{C}(\mathcal{V}\xi, \widetilde{Y}) + \frac{1}{2}\mathbf{L}(\mathbf{j}\xi, \widetilde{Y}),$$
$$D_\xi^{Ch} \widetilde{Y} := \nabla_\xi \widetilde{Y} + \frac{1}{2}\mathbf{L}(\mathbf{j}\xi, \widetilde{Y}), \quad D_\xi^{Hs} \widetilde{Y} := \nabla_\xi \widetilde{Y} + \frac{1}{2}\mathcal{C}(\mathcal{V}\xi, \widetilde{Y}).$$

Definíciók: Legyen $X \in \mathfrak{X}(M)$, és legyen (φ_t) X lokális folyama. Az X vektormező *Killing vektormezője* (M,F)-nek, ha a φ_t transzformációk megőrzik az érintővektorok Finsler normáját, azaz $F \circ (\varphi_t)_* = F$, minden szóbajövő t-re. Ha

$$\widetilde{\mathcal{L}}_{X^c} g = \sigma g, \text{ ahol } \sigma \in C^0(TM) \cap C^\infty(\overset{\circ}{T}M),$$

akkor azt mondjuk, hogy X *konform vektormező*, amelynek a *konform függvénye* σ. Ha a konform függvény konstans, *homotetikus vektormezőről* beszélünk. Az X vektormező *projektív vektormezője* (M,F)-nek, ha

$$[X^c, S] = \varphi C, \quad \varphi \in C^0(TM) \cap C^\infty(\overset{\circ}{T}M).$$

Jelölés: $\mathrm{Kill}_F(M)$, $\mathrm{Conf}_F(M)$, $\mathrm{Dil}_F(M)$ és $\mathrm{Proj}_F(M)$ rendre (M,F) Killing-, konform, homotetikus és projektív vektormezőinek halmaza.

8. Tétel (a) *Tetszőleges $X \in \mathfrak{X}(M)$ vektormező esetén*
(i) $(\widetilde{\mathcal{L}}_{X^c}\theta_g) \circ \mathbf{j} = \mathcal{L}_{X^c}\omega_E$;
(ii) $(\widetilde{\mathcal{L}}_{X^c} g)(\mathbf{j}\xi, \mathbf{j}\eta) = (\mathcal{L}_{X^c}\omega_E)(\mathbf{J}\xi, \eta)$;
(iii) $\widetilde{\mathcal{L}}_{X^c}\mathcal{C}_\flat = \nabla^{\mathsf{v}}(\widetilde{\mathcal{L}}_{X^c} g)$;
(iv) $g((\widetilde{\mathcal{L}}_{X^c}\mathcal{C})(\widehat{Y}, \widehat{Z}), \widehat{U}) = (\widetilde{\mathcal{L}}_{X^c}\mathcal{C}_\flat)(\widehat{Y}, \widehat{Z}, \widehat{U}) - (\widetilde{\mathcal{L}}_{X^c} g)(\mathcal{C}(\widehat{Y}, \widehat{Z}), \widehat{U})$;
(v) $g((\widetilde{\mathcal{L}}_{X^c}\mathbf{L})(\widehat{Y}, \widehat{Z}), \widehat{U}) = (\widetilde{\mathcal{L}}_{X^c}\mathbf{L}_\flat)(\widehat{Y}, \widehat{Z}, \widehat{U}) - (\widetilde{\mathcal{L}}_{X^c} g)(\mathbf{L}(\widehat{Y}, \widehat{Z}), \widehat{U})$.

(*b*) *Ha $X \in \mathrm{Lie}_S(M)$, akkor $\widetilde{\mathcal{L}}_{X^c}\mathbf{L}_\flat = \nabla^{\mathsf{h}}(\mathcal{L}_{X^c} g)$.*
(*c*) *Ha $X \in \mathrm{Kill}_F(M)$, akkor*

$$\widetilde{\mathcal{L}}_{X^c}\mathcal{C}_\flat = 0, \ \widetilde{\mathcal{L}}_{X^c}\mathcal{C} = 0, \quad \widetilde{\mathcal{L}}_{X^c}\mathbf{L}_\flat = 0, \ \widetilde{\mathcal{L}}_{X^c}\mathbf{L} = 0.$$

9. Tétel *Ha* $X \in \mathrm{Kill}_F(M)$ *és* $D \in \{\nabla, D^C, D^{Ch}, D^{Hs}\}$, *akkor* $\widetilde{\mathcal{L}}_{X^{\mathsf{c}}} D = 0$.

10. Tétel (a) *Ha* $X \in \mathrm{Conf}_F(M)$, *akkor* X *konform függvénye vertikális lift.* (b) *Egy* $X \in \mathfrak{X}(M)$ *vektormezőre a következők ekvivalensek:*

(i) $X \in \mathrm{Conf}_F(M)$,
(ii) $X^{\mathsf{c}} E = \sigma E$,
(iii) $\mathcal{L}_{X^{\mathsf{c}}} \theta_E = \sigma \theta_E$,
(iv) $\widetilde{\mathcal{L}}_{X^{\mathsf{c}}} \theta_g = \sigma \theta_g$,
(v) $\mathcal{L}_{X^{\mathsf{c}}} \omega_E = f^{\mathsf{v}} \omega_E + df^{\mathsf{v}} \wedge d_{\mathbf{J}} E, \quad f \in C^\infty(M)$.

Az (ii)-(iv) feltételekben $\sigma \in C^0(TM) \cap C^\infty(\overset{\circ}{T}M)$.

11. Tétel $X \in \mathrm{Conf}_F(M) \cap \mathrm{Lie}_S(M) \Longrightarrow X^{\mathsf{c}} \in \mathrm{Conf}_{g^s}(\overset{\circ}{T}M)$,

$$X^{\mathsf{c}} \in \mathrm{Conf}_{g^S}(\overset{\circ}{T}M) \Longrightarrow X \in \mathrm{Conf}_F(M).$$

12. Tétel $X \in \mathrm{Dil}_F(M) \Rightarrow X \in \mathrm{Lie}_S(M)$.

13. Tétel $X \in \mathrm{Proj}_F(M) \cap \mathrm{Conf}_F(M) \Rightarrow X \in \mathrm{Dil}_F(M)$.

14. Tétel $(X \in \mathrm{Proj}_F(M)$ *és* $\widetilde{\mathcal{L}}_{X^{\mathsf{c}}} w = 0) \Rightarrow X \in \mathrm{Lie}_S(M)$.

15. Tétel $(X \in \mathrm{Conf}_F(M)$ *és* $\widetilde{\mathcal{L}}_{X^{\mathsf{c}}} w = 0) \Rightarrow X \in \mathrm{Kill}_F(M)$.

1 History, motivations and aims

The aim of this Thesis is threefold. First, to elaborate a (partly new) calculative background for Lie derivatives in the framework of Finsler bundles. Second, to apply the Finslerian Lie derivative, combining with other technical tools, for studying curvature collineations in spray manifolds. Third, to study projective and conformal (in particular, homothetic and Killing) vector fields on a Finsler manifold and describe some interrelations between them.

The theory of the above-mentioned 'geometric' vector fields has a vast literature. Let us quote here Mike Crampin. 'The transformation theory of sprays and Berwald connections was in vogue towards the middle of last century – Chapter VIII of Yano's book 'The Theory of Lie Derivatives and its Applications' [34] gives an excellent survey on the state of the art in 1957 – but went out of fashion; the subject has been taken up again very recently by Lovas [17]. The definition of an infinitesimal affine transformation of a Berwald connection is not entirely straightforward, because a Berwald connection is defined on a pull-back bundle (a pull back of a tangent bundle in fact). We feel that a concept of the Lie derivative of a section of such a pull-back bundle has not received the careful geometrical consideration that it deserves.' (See the Introduction of [8]; the numbering of items [17], [34] corresponds to the References in our Thesis.) In their just cited paper, Crampin and Saunders make an attempt to remedy the defect – and we continue their attempts here.

Going back to the historical roots, we mention that Gy. Soós important paper 'Über Gruppen von Affinitäten und Bewegungen in Finslerschen Räumen'([27]) has already been quoted in Yano's monograph. A good overview of the developments of the next two decades can be found in R. B. Misra's paper [23], written in 1981, revised and updated in 1993. In a two-part paper, M. Matsumoto clarified and improved some results of Yano in the framework of his theory of Finsler connections ([19], [20]). From the modern (and relatively modern, partly tensor calculus based) literature, beside the paper of R. L. Lovas, H. Akbar-Zadeh and J. Grifone works ([2], [3], [12], [13]) are worth mentioning. Grifone applies systematically the '$\tau_{TM} : TTM \to TM$ tangent bundle formalism', combining with the Frölicher–Nijenhuis calculus of vector-valued differential forms; Lovas formulates and proves his results in terms of the 'pull-back formalism'. This Thesis, is some sense, is a continuation of Grifone's and Lovas's work. The greater part of the theory is developed on a *pull-back* of a tangent bundle, however, the concepts and techniques of the tangent bundle geometry, including vertical calculus on TM, play an eminent role in our analysis. We use two types of Lie derivatives: the classical Lie derivative on the tensor algebra of a manifold and the Lie derivative of Finsler tensor fields with respect to *projectable* vector fields. (It turns out, as is expect, that the two types are closely related.) We also need the Lie derivative of a covariant derivative on a Finsler bundle as it has been introduced in [17]. In this Thesis, we define the concept of the Lie derivative of an Ehresmann connection $\mathcal{H}$; after that we can speak about $\mathcal{H}$-Killing vector fields.

We say, roughly speaking, that a vector field X on a manifold M is a curvature collineation of a curvature object $\mathbf{C}$ of a spray manifold if $\widetilde{\mathcal{L}}_{X^{\mathsf{c}}}\mathbf{C} = 0$, where X^{c} is the complete lift of X and $\widetilde{\mathcal{L}}_{X^{\mathsf{c}}}$ is the Finslerian Lie derivative with respect to X^{c}. Curvature collineations play an important role in the study of geometry and physics of classical space-times; for an excellent account on the subject we refer to G. S. Hall's book [14], especially its last chapter. Similar investigations in the context of spray manifolds are new.

2 Contents and new results

2.1 Notation and background

To make the Thesis more readable, in its Part I (chapters 2-7) we briefly present the background material used throughout the other chapters. Here, first, we summarize the contents of this prepearatory part.

2.1.1 Let V be a module over a ring R and let $k \in \mathbb{N}$. The R-module of k-linear mappings $V^k \to \mathsf{R}$ (resp. $V^k \to V$) is denoted by $T_k(V)$ (resp. $T^1_k(V)$); $T_0(V) := \mathsf{R}$, $T^1_0(V) := V$. Then $T_1(V) =: V^*$ is the dual of V, $T^1_1(V) =: \mathrm{End}(V)$ is the ring of endomorphisms of V.

2.1.2 Throughout, M is an n-dimensional smooth manifold where $n \geqq 1$ or $n \geqq 2$. The symbols $C^\infty(M)$ and $\mathfrak{X}(M)$ stand for the ring of smooth functions on M and the $C^\infty(M)$-module of vector fields on M, respectively. We write

$$\begin{aligned}
&\mathcal{T}_k(M) := T_k(\mathfrak{X}(M)), \quad \mathcal{T}^1_k(M) := T^1_k(\mathfrak{X}(M)),\\
&\mathcal{A}_k(V) := \{\alpha \in \mathcal{T}_k(M) |\ \alpha \text{ is alternating}\},\\
&\mathcal{A}^1_k(M) := \{\beta \in \mathcal{T}^1_k(M) |\ \beta \text{ is alternating}\}.
\end{aligned}$$

Then $\mathcal{A}(M) := \oplus_{k=0}^n \mathcal{A}_k(M)$ is the Grassmann algebra of M. We agree that $\mathcal{A}_k(M) := \{0\}$ if k is a negative integer. An $\mathbb{R}$-linear transformation D is a graded derivation of $\mathcal{A}(M)$ of degree $r \in \mathbb{Z}$ if $D(\mathcal{A}_k(M)) \subset D(\mathcal{A}_{k+r}(M))$, and

$$D(\alpha \wedge \beta) = (D\alpha) \wedge \beta + (-1)^{kr} \alpha \wedge D\beta; \quad \alpha \in A_k(M),\ \beta \in \mathcal{A}(M),$$

where $\wedge$ denotes wedge product. The classical graded derivations of $\mathcal{A}(M)$ are the substitution operator i_X, the Lie derivative $\mathcal{L}_X$ ($X \in \mathfrak{X}(M)$) and the exterior derivative d of degree -1, 0 and 1, respectively.

2.1.3 The tangent bundle of M is $\tau\colon TM \to M$, the slit tangent bundle is $\overset{\circ}{\tau}\colon \overset{\circ}{T}M \to M$, where $\overset{\circ}{T}M \subset TM$ is the open set of nonzero tangent vectors to M and $\overset{\circ}{\tau} := \tau \restriction \overset{\circ}{T}M$. The derivative of a smooth mapping $\varphi\colon M \to N$ is denoted by φ_*, it maps TM into TN. A vector field ξ on TM (or on $\overset{\circ}{T}M$) is projectable if there exists a vector field X on M such that $\tau_* \circ \xi = X \circ \tau$. If $\tau_* \circ \xi = o \circ \tau$, where $o \in \mathfrak{X}(M)$ is the zero vector field, then ξ is called vertical. We use the notation

$$\mathfrak{X}_{\mathrm{proj}}(TM) := \{\xi \in \mathfrak{X}(TM) |\ \xi \text{ is projectable}\},$$
$$\mathfrak{X}^{\mathsf{v}}(TM) := \{\xi \in \mathfrak{X}(TM) |\ \xi \text{ is vertical}\}.$$

2.1.4 Let $f \in C^\infty(M)$, $X \in \mathfrak{X}(M)$. Then $f^{\mathsf{v}} := f \circ \tau \in C^\infty(TM)$ is the vertical lift of f, the smooth function

$$f^{\mathsf{c}}\colon TM \to \mathbb{R},\ v \mapsto f^{\mathsf{c}}(v) := v(f) \in \mathbb{R}$$

is the complete lift of f. The vertical lift $X^{\mathsf{v}} \in \mathfrak{X}^{\mathsf{v}}(TM)$ and the complete lift $X^{\mathsf{c}} \in \mathfrak{X}(TM)$ are the unique vector fields on TM such that for every smooth function f on M,

$$X^{\mathsf{v}} f^{\mathsf{c}} = (Xf)^{\mathsf{v}},\ X^{\mathsf{v}} f^{\mathsf{v}} = 0;\ X^{\mathsf{c}} f^{\mathsf{c}} = (Xf)^{\mathsf{c}},\ X^{\mathsf{c}} f^{\mathsf{v}} = (Xf)^{\mathsf{v}}.$$

The Liouville vector field $C \in \mathfrak{X}^{\mathsf{v}}(TM)$ is the unique vertical vector field on TM such that $Cf^{\mathsf{c}} = f^{\mathsf{c}}$ for all $f \in C^\infty(M)$. A function $F \in C^\infty(\overset{\circ}{T}M)$ is k^+-homogeneous if $CF = kF$ $(k \in \mathbb{Z})$.

2.1.5 The vector bundles

$$\pi\colon TM \times_M TM \to TM \text{ and } \overset{\circ}{\pi}\colon \overset{\circ}{T}M \times_M TM \to \overset{\circ}{T}M$$

are the Finsler bundles over TM and $\overset{\circ}{T}M$, respectively. The fibre, e.g., of π over $v \in TM$ is the n-dimensional real vector space $\{v\} \times T_{\tau(v)}M \cong T_{\tau(v)}M$. The modules of smooth sections of these vector bundles are denoted by $\Gamma(\pi)$ and $\Gamma(\overset{\circ}{\pi})$, respectively, and their elements are called Finsler vector fields. The elements of

$$T_k(\Gamma(\overset{\circ}{\pi})) \cup T^1_k(\Gamma(\overset{\circ}{\pi})) \ (k \in \mathbb{N})$$

are called Finsler tensor fields on $\overset{\circ}{T}M$. We use the following typography:

$$\begin{array}{ll}
X, Y, \ldots - & \text{vector fields on } M, \\
\xi, \eta, \ldots \quad - & \text{vector fields on } TM \text{ (or on } \overset{\circ}{T}M), \\
\widetilde{X}, \widetilde{Y}, \ldots - & \text{Finsler vector fields,} \\
\widehat{X}, \widehat{Y}, \ldots - & \text{basic Finsler vector fields,} \\
\widetilde{\delta} \qquad\quad - & \text{the canonical section in } \Gamma(\pi).
\end{array}$$

Here $\widehat{X}(v) := (v, X(\tau(v)))$, $\widetilde{\delta}(v) := (v, v)$ $(v \in TM)$.

2.1.6 We have the exact sequence of $C^\infty(TM)$-homomorphisms

$$0 \to \Gamma(\pi) \xrightarrow{\mathbf{i}} \mathfrak{X}(TM) \xrightarrow{\mathbf{j}} \Gamma(\pi) \to 0,$$

where $\mathbf{i}(\widehat{X}) = X^{\mathsf{v}}$; $\mathbf{j}(X^{\mathsf{v}}) = 0$, $\mathbf{j}(X^{\mathsf{c}}) = \widehat{X}$ $(X \in \mathfrak{X}(M))$, therefore

$$\operatorname{Im}(\mathbf{i}) = \operatorname{Ker}(\mathbf{j}) = \mathfrak{X}^{\mathsf{v}}(TM).$$

We have $C = \mathbf{i}(\widetilde{\delta})$. The vertical endomorphism of $\mathfrak{X}(TM)$ is $\mathbf{J} := \mathbf{i} \circ \mathbf{j}$. It induces graded derivation $d_{\mathbf{J}}$ of degree 1 of $\mathcal{A}(M)$ specified by

$$d_{\mathbf{J}} F := dF \circ \mathbf{J}, \quad d_{\mathbf{J}} dF := d d_{\mathbf{J}} F \qquad (F \in C^\infty(TM)).$$

2.1.7 We use the operator ∇^{v} of the (canonical) vertical derivative. It is defined in the following steps:

$$\nabla^{\mathsf{v}}_{\widetilde{X}} F := (\mathbf{i}\widetilde{X})F \ (F \in C^\infty(TM));$$
$$\nabla^{\mathsf{v}}_{\widetilde{X}} \widetilde{Y} := \mathbf{j}[\mathbf{i}\widetilde{X}, \eta], \ \eta \in \mathfrak{X}(TM) \text{ is such that } \mathbf{j}\eta = \widetilde{Y};$$
$$(\nabla^{\mathsf{v}}_{\widetilde{X}} A)(\widetilde{Y}_1, \dots \widetilde{Y}_k) := \nabla^{\mathsf{v}}_{\widetilde{X}}(A(\widetilde{Y}_1, \dots, Y_k))$$
$$-\sum_{i=1}^{k} A(\widetilde{Y}_1, \dots, \nabla^{\mathsf{v}}_{\widetilde{X}} \widetilde{Y}_i, \dots \widetilde{Y}_k), \quad A \in T_k(\Gamma(\pi)) \cup T^1_k(\Gamma(\pi)).$$

2.1.8 An Ehresmann connection in $\overset{\circ}{T}M$ is a $C^\infty(\overset{\circ}{T}M)$-linear mapping $\mathcal{H}\colon \Gamma(\overset{\circ}{\pi}) \to \mathfrak{X}(\overset{\circ}{T}M)$ such that $\mathbf{j} \circ \mathcal{H} = 1_{\Gamma(\overset{\circ}{\pi})}$.
Data: $\mathbf{h} := \mathcal{H} \circ \mathbf{j}$ and $\mathbf{v} = 1_{\mathfrak{X}(\overset{\circ}{T}M)} - \mathbf{h}$ are the horizontal and vertical projection associated to $\mathcal{H}$, $\mathcal{V} := \mathbf{i}^{-1} \circ \mathbf{v}$ is the vertical mapping, $X^{\mathsf{h}} := \mathcal{H}(\widehat{X}) = \mathbf{h}X^{\mathsf{c}}$ is the ($\mathcal{H}-$)horizontal lift of X. An Ehresmann connection $\mathcal{H}$ is homogeneous if $[C, X^{\mathsf{h}}] = 0$ for all $X \in \mathfrak{X}(M)$. The h-Berwald derivative ∇^{h} induced by $\mathcal{H}$ is defined in the following steps:

$$\nabla^{\mathsf{h}}_{\widetilde{X}} F := (\mathcal{H}\widetilde{X})F \ (F \in C^\infty(\overset{\circ}{T}M)); \quad \nabla^{\mathsf{h}}_{\widetilde{X}} \widetilde{Y} := \mathcal{V}[\mathcal{H}\widetilde{X}, \mathbf{i}\widetilde{Y}];$$
$$(\nabla^{\mathsf{h}}_{\widetilde{X}} A)(\widetilde{Y}_1, \dots, \widetilde{Y}_k) := \nabla^{\mathsf{h}}_{\widetilde{X}}(A(\widetilde{Y}_1, \dots, \widetilde{Y}_k))$$
$$-\sum_{i=1}^{k} A(\widetilde{Y}_1, \dots, \nabla^{\mathsf{h}}_{\widetilde{X}} \widetilde{Y}_i, \dots, \widetilde{Y}_k).$$

The mapping

$$\nabla\colon (\xi, \widetilde{Y}) \in \mathfrak{X}(\overset{\circ}{T}M) \times \Gamma(\overset{\circ}{\pi}) \mapsto \nabla_\xi \widetilde{Y} := \nabla^{\mathsf{v}}_{\mathcal{V}\xi} \widetilde{Y} + \nabla^{\mathsf{h}}_{\mathbf{j}\xi} \widetilde{Y} \in \Gamma(\overset{\circ}{\pi})$$

is a covariant derivative, the Berwald derivative on $\overset{\circ}{\pi}$.

2.1.9 A mapping $S\colon TM \to TTM$ is a semispray for M if it is of class C^1, smooth on $\overset{\circ}{T}M$ and satisfies the conditions $\tau_{TM} \circ S =$

1_{TM}, $\mathbf{J}S = C$. If $[C,S] = S$, then S is called a spray. Every semispray induces an Ehresmann connection $\mathcal{H}$ such that

$$\mathcal{H}(\widehat{X}) = \frac{1}{2}(X^{\mathsf{c}} + [X^{\mathsf{v}}, S]),\ X \in \mathfrak{X}(M).$$

This connection is torsion-free in the sense that

$$\nabla_{\mathcal{H}(\widetilde{X})}\widetilde{Y} - \nabla_{\mathcal{H}(\widetilde{Y})}\widetilde{X} = \mathbf{j}[\mathcal{H}(\widetilde{X}), \mathcal{H}(\widetilde{Y})];\ \widetilde{X}, \widetilde{Y} \in \Gamma(\mathring{\pi}).$$

If S is a spray, then $\mathcal{H}$ is a homogeneous and is called the Berwald connection of the spray manifold (M, S).

2.2 Results

> *Our new results are explained in Parts II-IV (chapters 8-17) of the Thesis. The most important of them are comprised Theorems 1-15 below.*

2.2.1 Lie derivatives on a Finsler bundle Given a projectable vector field $\xi \in \mathfrak{X}_{\mathrm{proj}}(TM)$, we define the Lie derivatives of Finsler tensor fields with respect to ξ in the following steps:

$$\widetilde{\mathcal{L}}_\xi F := \mathcal{L}_\xi F = \xi F\ (F \in C^\infty(TM));\quad \widetilde{\mathcal{L}}_\xi \widetilde{Y} := \mathbf{i}^{-1}[\xi, \mathbf{i}\widetilde{Y}];$$
$$(\widetilde{\mathcal{L}}_\xi A)(\widetilde{Y}_1, \dots, \widetilde{Y}_k) := \widetilde{\mathcal{L}}_\xi(A(\widetilde{Y}_1, \dots, \widetilde{Y}_k))$$
$$-\sum_{i=1}^{k} A(\widetilde{Y}_1, \dots, \widetilde{\mathcal{L}}_\xi \widetilde{Y}_i, \dots, \widetilde{Y}_k)$$

if $A \in T_k(\Gamma(\pi)) \cup T_k^1(\Gamma(\pi))$.

If $\mathcal{H}$ is an Ehresmann connection in $\mathring{T}M$, then we define its Lie derivative $\widetilde{\mathcal{L}}_\xi \mathcal{H}$ by $(\widetilde{\mathcal{L}}_\xi \mathcal{H})(\widetilde{Y}) := \mathcal{L}_\xi(\mathcal{H}(\widetilde{Y})) - \mathcal{H}(\widetilde{\mathcal{L}}_\xi \widetilde{Y})$. The Lie derivative of a covariant derivative

$$D\colon \mathfrak{X}(TM) \times \Gamma(\pi) \to \Gamma(\pi),\ (\eta, \widetilde{Z}) \mapsto D_\eta \widetilde{Z}$$

with respect to ξ is the mapping

$$\begin{cases} \widetilde{\mathcal{L}}_\xi D\colon \mathfrak{X}(TM) \times \Gamma(\pi) \to \Gamma(\pi),\ (\eta, \widetilde{Z}) \mapsto (\widetilde{\mathcal{L}}_\xi D)(\eta, \widetilde{Z}), \\ (\widetilde{\mathcal{L}}_\xi D)(\eta, \widetilde{Z}) := \widetilde{\mathcal{L}}_\xi (D_\eta \widetilde{Z}) - D_{[\xi,\eta]}\widetilde{Z} - D_\eta(\widetilde{\mathcal{L}}_\xi \widetilde{Z}). \end{cases}$$

We derived the useful formulae:

(1) $[\widetilde{\mathcal{L}}_\xi, \widetilde{\mathcal{L}}_\eta] = \widetilde{\mathcal{L}}_{[\xi,\eta]}$;
(2) $\widetilde{\mathcal{L}}_{X^{\mathsf{c}}} \widehat{Y} = \widehat{[X,Y]}$;
(3) $\widetilde{\mathcal{L}}_{X^{\mathsf{c}}} \widetilde{\delta} = 0$;
(4) $\widetilde{\mathcal{L}}_{X^{\mathsf{c}}} \restriction \Gamma(\pi) = \nabla^{\mathsf{v}}_{\widehat{X}} \restriction \Gamma(\pi)$;
(5) $\mathbf{i} \circ \widetilde{\mathcal{L}}_{X^{\mathsf{c}}} = \mathcal{L}_{X^{\mathsf{c}}} \circ \mathbf{i}$;
(6) $\widetilde{\mathcal{L}}_{X^{\mathsf{c}}} \circ \mathbf{j} = \mathbf{j} \circ \mathcal{L}_{X^{\mathsf{c}}}$;
(7) $\widetilde{\mathcal{L}}_{X^{\mathsf{c}}} \circ \nabla^{\mathsf{v}}_{\widehat{Y}} - \nabla^{\mathsf{v}}_{\widehat{Y}} \circ \widetilde{\mathcal{L}}_{X^{\mathsf{c}}} = \widetilde{\mathcal{L}}_{[X,Y]^{\mathsf{v}}}$;
(8) $\widetilde{\mathcal{L}}_{X^{\mathsf{h}}} \restriction \Gamma(\mathring{\pi}) = \nabla^{\mathsf{h}}_{\widehat{X}} \restriction \Gamma(\mathring{\pi})$;
(9) $\widetilde{\mathcal{L}}_{X^{\mathsf{c}}} \circ \nabla^{\mathsf{h}}_{\widehat{Y}} - \nabla^{\mathsf{h}}_{\widehat{Y}} \circ \widetilde{\mathcal{L}}_{X^{\mathsf{c}}} = \widetilde{\mathcal{L}}_{[X^{\mathsf{c}},Y^{\mathsf{h}}]}$.

In the formulas above, $\xi, \eta \in \mathfrak{X}_{\mathrm{proj}}(TM)$; X and Y are vector fields on M. In (8) and (9) we assume that an Ehresmann connection is also specified in $\mathring{T}M$.

We showed that the vanishing of $\widetilde{\mathcal{L}}_{X^{\mathsf{c}}} \widetilde{Y}$ has the following *dynamical interpretation*:

Theorem 1. *Let (φ_t) be the local flow of X. Then $\widetilde{\mathcal{L}}_{X^{\mathsf{c}}} \widetilde{Y} = 0$ if, and only if, $\widetilde{Y}$ is invariant under (φ_t), i.e.,*

$$((\varphi_t)_* \times (\varphi_t)_*) \circ \widetilde{Y} = \widetilde{Y} \circ (\varphi_t)_*,$$

for every stage φ_t of the flow.

2.2.2 $\mathcal{H}$-Killing vector fields Let an Ehresmann connection $\mathcal{H}\colon \Gamma(\mathring{\pi}) \to \mathfrak{X}(\mathring{T}M)$ be given. Note first that for every $\xi \in \mathfrak{X}_{\mathrm{proj}}(\mathring{T}M)$, the mapping $\widetilde{\mathcal{L}}_\xi \mathcal{H}\colon \Gamma(\mathring{\pi}) \to \mathfrak{X}(\mathring{T}M)$, $\widetilde{Y} \mapsto (\widetilde{\mathcal{L}}_\xi \mathcal{H})(\widetilde{Y})$ is $C^\infty(\mathring{T}M)$-linear. If $X \in \mathfrak{X}(M)$, then $\mathbf{j} \circ \widetilde{\mathcal{L}}_{X^{\mathsf{c}}} = 0$, so the Lie derivative of an Ehresmann connection is definitely not an Ehresmann connection. We say that a vector field X on M is *$\mathcal{H}$-Killing* and we write that $X \in \mathrm{Kill}_{\mathcal{H}}(M)$, if $\mathcal{H}$ is invariant under the local flow of X in the sense that $(\varphi_t)_{**} \circ \mathcal{H} = \mathcal{H} \circ ((\varphi_t)_* \times (\varphi_t)_*)$, for every stage φ_t of the flow of X. (Here $\mathcal{H}$ is interpreted as a strong bundle map from $\overset{\circ}{T}M \times_M TM$ in $T\overset{\circ}{T}M$.) We have proved:

Theorem 2. *For a vector field X on M, the following are equivalent:*

(1) *$X \in \mathrm{Kill}_{\mathcal{H}}(M)$, i.e., X is a $\mathcal{H}$-Killing vector field,*

(2) *For every stage φ_t of the local flow of X,*

$$(\varphi_t)_{**} \circ \mathbf{h} = \mathbf{h} \circ (\varphi_t)_{**},$$

where $\mathbf{h}$ is the horizontal projection associated to $\mathcal{H}$,

(3) $\widetilde{\mathcal{L}}_{X^{\mathsf{c}}}\mathcal{H} = 0$,

(4) $\mathcal{L}_{X^{\mathsf{c}}}\mathbf{h} = 0$.

If one (and hence all) of (1)-(4) is satisfied, then locally we have

$$X^{\mathsf{c}} N^i_j = N^k_j \left(\frac{\partial X^i}{\partial u^k} \circ \tau \right) - N^i_k \left(\frac{\partial X^k}{\partial u^j} \circ \tau \right) - y^k \left(\frac{\partial^2 X^i}{\partial u^j \partial u^k} \circ \tau \right),$$

where $X^i \in C^\infty(\mathcal{U})$ are the components of X relative to a chart $(\mathcal{U}, (u^i)_{i=1}^n)$ of M, and (N^i_j) is the family of Christoffel symbols of $\mathcal{H}$ relative to the induced chart $(\tau^{-1}(\mathcal{U}), ((x^i)_{i=1}^n, (y^i)_{i=1}^n))$ on TM.

2.2.3 Lie symmetries Let S be a semispray for M. A vector field X on M is a Lie symmetry of S, if S is invariant under the local flow of X^{c}, i.e., $(\varphi_t)_{**} \circ S = S \circ (\varphi_t)_*$ for every stage φ_t of the flow of X. Then we write $X \in \mathrm{Lie}_S(M)$. It is clear from the dynamical interpretation of the classical Lie derivative that

$$X \in \mathrm{Lie}_S(M) \iff [X^{\mathsf{c}}, S] = 0.$$

We have: $\mathrm{Lie}_S(M) \subset \mathrm{Kill}_{\mathcal{H}}(M)$, where $\mathcal{H}$ is the Ehresmann connection induced by S.

Theorem 3. *Let (M,S) be a spray manifold, endowed with the Berwald connection $\mathcal{H}$ and the Berwald derivative ∇ induced by $\mathcal{H}$. For a vector field X on M, the following are equivalent:*

$$\begin{array}{ll}
(1)\ X \in \mathrm{Lie}_S(M), & (6)\ \mathcal{L}_{X^{\mathsf{c}}}\mathbf{v} = 0, \\
(2)\ [X^{\mathsf{c}}, S] = 0, & (7)\ \widetilde{\mathcal{L}}_{X^{\mathsf{c}}}\nabla = 0, \\
(3)\ X \in \mathrm{Kill}_{\mathcal{H}}(M), & (8)\ [X^{\mathsf{c}}, Y^{\mathsf{h}}] = [X,Y]^{\mathsf{h}}, \\
(4)\ \widetilde{\mathcal{L}}_{X^{\mathsf{c}}}\mathcal{H} = 0, & (9)\ [\widetilde{\mathcal{L}}_{X^{\mathsf{c}}}, \widetilde{\mathcal{L}}_{Y^{\mathsf{h}}}] = \widetilde{\mathcal{L}}_{[X,Y]^{\mathsf{h}}}, \\
(5)\ \mathcal{L}_{X^{\mathsf{c}}}\mathbf{h} = 0, & (10)\ \widetilde{\mathcal{L}}_{X^{\mathsf{c}}} \circ \mathcal{V} = \mathcal{V} \circ \mathcal{L}_{X^{\mathsf{c}}}.
\end{array}$$

In conditions (8) and (9), Y is any vector field on M. We note that the equivalence of (1), (5) and (7) has already been proved by R. L. Lovas [17].

2.2.4 Curvature collineations Let (M,S) be a spray manifold.

(A) The Finsler tensor fields $\mathbf{K}$, $\mathbf{R}$, $\mathbf{H}$ defined by

$$\begin{aligned}
&\mathbf{K}(\widetilde{X}) := \mathcal{V}[S, \mathcal{H}(\widetilde{X})], \\
&\mathbf{R}(\widetilde{X}, \widetilde{Y}) := \frac{1}{3}(\nabla^{\mathsf{v}}\mathbf{K}(\widetilde{X}, \widetilde{Y}) - \nabla^{\mathsf{v}}\mathbf{K}(\widetilde{Y}, \widetilde{X})), \\
&\mathbf{H}(\widetilde{X}, \widetilde{Y})\widetilde{Z} := -\nabla^{\mathsf{v}}\mathbf{R}(\widetilde{Z}, \widetilde{X}, \widetilde{Y})
\end{aligned}$$

are the Jacobi endomorphism (or affine deviation), the fundamental affine curvature and the affine curvature of (M,S), respectively. If $\mathbf{C} \in \{\mathbf{K}, \mathbf{R}, \mathbf{H}\}$ and $\widetilde{\mathcal{L}}_{X^{\mathsf{c}}}\mathbf{C} = 0$, then we say that X is a *curvature collineation* of $\mathbf{C}$.

Theorem 4. *A vector field X on M is a curvature collineation of the Jacobi endomorphism of (M,S) if, and only if, $\mathbf{K}$ is invariant under the local flow of X in the sense that*

$$((\varphi_t)_* \times (\varphi_t)_*) \circ \mathbf{K} = \mathbf{K} \circ ((\varphi_t)_* \times (\varphi_t)_*)$$

for every stage φ_t of the local flow. (Here $\mathbf{K}$ *is interpreted as a strong bundle endomorphism of* $\overset{\circ}{\pi}$*.)*

Theorem 5. *If* $X \in \mathrm{Lie}_S M$*, then* X *is a curvature collineation of* $\mathbf{K}$*,* $\mathbf{R}$ *and* $\mathbf{H}$.

(B) A Finsler tensor field constructed from S is called projectively invariant if it remains invariant under the projective changes

$$S \rightsquigarrow S - 2PC, \quad P \in C^\infty(\overset{\circ}{T}M)$$

of S. The fundamental projectively invariant tensors of (M, S) are the Weyl tensors $\mathbf{W}_1$, $\mathbf{W}_2$, $\mathbf{W}_3$ and the Douglas tensor $\mathbf{D}$ defined as follows:

$$\begin{aligned}
&\mathbf{W_1} := \mathbf{K} - K\, 1_{\Gamma(\overset{\circ}{\pi})} - \frac{1}{n+1}(\mathrm{tr}\nabla^{\mathsf{v}}\mathbf{K} - \nabla^{\mathsf{v}}K) \otimes \widetilde{\delta},\\
&\mathbf{W_2}(\widetilde{X}, \widetilde{Y}) := \frac{1}{3}(\nabla^{\mathsf{v}}\mathbf{W_1}(\widetilde{X}, \widetilde{Y}) - \nabla^{\mathsf{v}}\ \mathbf{W_1}(\widetilde{Y}, \widetilde{X})),\\
&\mathbf{W_3}(\widetilde{X}, \widetilde{Y})\widetilde{Z} := \nabla^{\mathsf{v}}\mathbf{W_2}(\widetilde{Z}, \widetilde{X}, \widetilde{Y}),\\
&\mathbf{D} := \mathbf{B} - \frac{1}{n-1}((\nabla^{\mathsf{v}}\mathrm{tr}\mathbf{B}) \otimes \widetilde{\delta} + (\mathrm{tr}\mathbf{B}) \odot 1_{\Gamma(\overset{\circ}{\pi})}).
\end{aligned}$$

In the first formula $K := \frac{1}{n-1}\mathrm{tr}\mathbf{K}$ and in the last formula, $\mathbf{B}$ is the Berwald tensor of (M, S) given by $\mathbf{B}(\widehat{X}, \widehat{Y})\widehat{Z} := (\nabla^{\mathsf{v}}\nabla^{\mathsf{h}}\widehat{Z})(\widehat{X}, \widehat{Y})$, and the symbol $\odot$ means symmetric product without numerical factor.

Theorem 6. *If* $X \in \mathrm{Lie}_S(M)$*, then* $\widetilde{\mathcal{L}}_{X^{\mathsf{c}}}\mathbf{W}_i = 0, \quad i \in \{1, 2, 3\}$.

Theorem 7. *If* $X \in \mathrm{Lie}_S(M)$*, then* $\widetilde{\mathcal{L}}_{X^{\mathsf{c}}}\mathbf{B} = 0$*, which implies that* $\widetilde{\mathcal{L}}_{X^{\mathsf{c}}}\mathbf{D} = 0$.

2.2.5 Geometric vector fields on a Finsler manifold A positive continuous function $F\colon TM \to \mathbb{R}$ is a Finsler function for M if it is smooth on $\overset{\circ}{T}M$, 1^+-homogeneous and the fundamental tensor

$$g := \frac{1}{2}\nabla^{\mathsf{v}}\nabla^{\mathsf{v}}F^2 =: \nabla^{\mathsf{v}}\nabla^{\mathsf{v}}E$$

is fibrewise non-degenerate. A Finsler manifold is a pair (M, F) with M a manifold and F a Finsler function for M. First we recall some basic data:
(1) $\theta_g := \nabla^{\mathsf{v}}E$ or $\theta_E := d_{\mathbf{J}}E = \theta_g \circ \mathbf{j}$ – the Hilbert 1-form of (M, F).
(2) $\omega_E := d\theta_E = dd_{\mathbf{J}}E$ – the fundamental 2-form of (M, F).
(3) $w := \frac{1}{n!}(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\omega_E \wedge \cdots \wedge \omega_E$ (n factors) – the Dazord volume form of (M, F).
(4) The canonical spray of (M, F) is the unique spray S for M such that $i_S dd_{\mathbf{J}}E = -dE$ over $\overset{\circ}{T}M$. The canonical connection $\mathcal{H}$ of (M, F) is the Berwald connection of (M, S), ∇ stands for the Berwald derivative induced by $\mathcal{H}$.
(5) The Sasaki-Finsler metric g^S on $\overset{\circ}{T}M$ is given by

$$g^S(\xi, \eta) := g(\mathbf{j}\xi, \mathbf{j}\eta) + g(\mathcal{V}\xi, \mathcal{V}\eta).$$

(6) $\mathcal{C}_\flat := \nabla^{\mathsf{v}}g = \nabla^{\mathsf{v}}\nabla^{\mathsf{v}}\nabla^{\mathsf{v}}E$ is the Cartan-tensor of (M, F); the type $(1, 2)$ Cartan-tensor $\mathcal{C}$ is given by $g(\mathcal{C}(\widetilde{X}, \widetilde{Y})\widetilde{Z}) = \mathcal{C}_\flat(\widetilde{X}, \widetilde{Y}, \widetilde{Z})$.
(7) $\mathbf{L}_\flat := \nabla^{\mathsf{h}}g = \nabla^{\mathsf{h}}\nabla^{\mathsf{v}}\nabla^{\mathsf{v}}E$ is the Landsberg tensor of (M, F); the type $(1, 2)$ Landsberg tensor is given by $g(\mathbf{L}(\widetilde{X}, \widetilde{Y})\widetilde{Z}) = \mathbf{L}_\flat(\widetilde{X}, \widetilde{Y}, \widetilde{Z})$.
(8) D^C, D^{Ch} and D^{Hs} stand for the Cartan, the Chern-Rund and the Hashiguchi derivative on (M, F); they are given by

$$D^C_\xi\widetilde{Y} := \nabla_\xi\widetilde{Y} + \frac{1}{2}\mathcal{C}(\mathcal{V}\xi, \widetilde{Y}) + \frac{1}{2}\mathbf{L}(\mathbf{j}\xi, \widetilde{Y}),$$

$$D^{Ch}_\xi\widetilde{Y} := \nabla_\xi\widetilde{Y} + \frac{1}{2}\mathbf{L}(\mathbf{j}\xi, \widetilde{Y}), \quad D^{Hs}_\xi\widetilde{Y} := \nabla_\xi\widetilde{Y} + \frac{1}{2}\mathcal{C}(\mathcal{V}\xi, \widetilde{Y}).$$

Definitions: A vector field X on M is a *Killing vector field* of (M, F) if the stages φ_t of its local flow preserve the Finslerian norms of the tangent vectors to M, i.e., $F \circ (\varphi_t)_* = F$ for every possible $t \in \mathbb{R}$. If

$$\widetilde{\mathcal{L}}_{X^{\mathsf{c}}} g = \sigma g, \ \ \sigma \in C^0(TM) \cap C^\infty(\overset{\circ}{T}M),$$

then X is called a *conformal vector field* with conformal function σ. A conformal vector field is *homothetic* if its conformal function is constant. We say that X is a *projective vector field* if

$$[X^{\mathsf{c}}, S] = \varphi C, \quad \varphi \in C^0(TM) \cap C^\infty(\overset{\circ}{T}M).$$

Notation: $\mathrm{Kill}_F(M)$, $\mathrm{Conf}_F(M)$, $\mathrm{Dil}_F(M)$ and $\mathrm{Proj}_F(M)$ are the sets of Killing, conformal, homothetic and projective vector fields of (M, F), respectively.

Theorem 8. (a) *For every vector field X on M,*
(i) $(\widetilde{\mathcal{L}}_{X^{\mathsf{c}}} \theta_g) \circ \mathbf{j} = \mathcal{L}_{X^{\mathsf{c}}} \omega_E$;
(ii) $(\widetilde{\mathcal{L}}_{X^{\mathsf{c}}} g)(\mathbf{j}\xi, \mathbf{j}\eta) = (\mathcal{L}_{X^{\mathsf{c}}} \omega_E)(\mathbf{J}\xi, \eta)$;
(iii) $\widetilde{\mathcal{L}}_{X^{\mathsf{c}}} \mathcal{C}_\flat = \nabla^{\mathsf{v}}(\widetilde{\mathcal{L}}_{X^{\mathsf{c}}} g)$;
(iv) $g((\widetilde{\mathcal{L}}_{X^{\mathsf{c}}} \mathcal{C})(\widehat{Y}, \widehat{Z}), \widehat{U}) = (\widetilde{\mathcal{L}}_{X^{\mathsf{c}}} \mathcal{C}_\flat)(\widehat{Y}, \widehat{Z}, \widehat{U}) - (\widetilde{\mathcal{L}}_{X^{\mathsf{c}}} g)(\mathcal{C}(\widehat{Y}, \widehat{Z}), \widehat{U})$;
(v) $g((\widetilde{\mathcal{L}}_{X^{\mathsf{c}}} \mathbf{L})(\widehat{Y}, \widehat{Z}), \widehat{U}) = (\widetilde{\mathcal{L}}_{X^{\mathsf{c}}} \mathbf{L}_\flat)(\widehat{Y}, \widehat{Z}, \widehat{U}) - (\widetilde{\mathcal{L}}_{X^{\mathsf{c}}} g)(\mathbf{L}(\widehat{Y}, \widehat{Z}), \widehat{U})$.

(*b*) *If $X \in \mathrm{Lie}_S(M)$, then $\widetilde{\mathcal{L}}_{X^{\mathsf{c}}} \mathbf{L}_\flat = \nabla^{\mathsf{h}}(\mathcal{L}_{X^{\mathsf{c}}} g)$.*
(*c*) *If $X \in \mathrm{Kill}_F(M)$, then*

$$\widetilde{\mathcal{L}}_{X^{\mathsf{c}}} \mathcal{C}_\flat = 0, \ \ \widetilde{\mathcal{L}}_{X^{\mathsf{c}}} \mathcal{C} = 0, \widetilde{\mathcal{L}}_{X^{\mathsf{c}}} \mathbf{L}_\flat = 0, \ \ \widetilde{\mathcal{L}}_{X^{\mathsf{c}}} \mathbf{L} = 0.$$

Theorem 9. *If $X \in \mathrm{Kill}_F(M)$ and $D \in \{\nabla, D^C, D^{Ch}, D^{Hs}\}$, then $\widetilde{\mathcal{L}}_{X^{\mathsf{c}}} D = 0$.*

Theorem 10. (a) *If $X \in \mathrm{Conf}_F(M)$, then its conformal function is a vertical lift.*
(b) *For a vector field X on M, the following are equivalent:*
(i) *X is a conformal vector field,*

(ii) $X^{\mathsf{c}}E = \sigma E,$
(iii) $\mathcal{L}_{X^{\mathsf{c}}}\theta_E = \sigma\theta_E,$
(iv) $\widetilde{\mathcal{L}}_{X^{\mathsf{c}}}\theta_g = \sigma\theta_g,$
(v) $\mathcal{L}_{X^{\mathsf{c}}}\omega_E = f^{\mathsf{v}}\omega_E + df^{\mathsf{v}} \wedge d_{\mathbf{J}}E, \quad f \in C^\infty(M).$

In conditions (ii)-(iv), $\sigma \in C^0(TM) \cap C^\infty(\overset{\circ}{T}M)$.

Theorem 11. $X \in \mathrm{Conf}_F(M) \cap \mathrm{Lie}_S(M) \Longrightarrow X^{\mathsf{c}} \in \mathrm{Conf}_{g^s}(\overset{\circ}{T}M),$

$$X^{\mathsf{c}} \in \mathrm{Conf}_{g^S}(\overset{\circ}{T}M) \Longrightarrow X \in \mathrm{Conf}_F(M).$$

Theorem 12. $X \in \mathrm{Dil}_F(M) \Longrightarrow X \in \mathrm{Lie}_S(M).$

Theorem 13. $X \in \mathrm{Proj}_F(M) \cap \mathrm{Conf}_F(M) \Longrightarrow X \in \mathrm{Dil}_F(M).$

Theorem 14. $(X \in \mathrm{Proj}_F(M)$ *and* $\widetilde{\mathcal{L}}_{X^{\mathsf{c}}}\, w = 0) \Longrightarrow X \in \mathrm{Lie}_S(M).$

Theorem 15. $(X \in \mathrm{Conf}_F(M)$ *and* $\widetilde{\mathcal{L}}_{X^{\mathsf{c}}}\, w = 0) \Longrightarrow X \in \mathrm{Kill}_F(M).$

Hivatkozások

[1] R. Abraham, J. E. Marsden and T. Ratiu, *Manifolds, Tensor Analysis, and Applications*, 2nd edition, Springer-Verlag, New York and Berlin, 1988.

[2] H. Akbar-Zadeh, *Transformations infinitésimales conformes des variétés finsleriennes compactes*, Ann. Polon. Math. XXXVI (1979), 213–229.

[3] H. Akbar-Zadeh, *Champs de vecteurs projectifs sur le fibré unitaire*, J. Math. Pures Appl. **65** (1986), 47–79.

[4] B. Aradi and D. Cs. Kertész, *Isometries, submetries and distance coordinates on a Finsler manifold*, Acta Math. Hungar., **143** (2014), 337-350.

[5] W. Balmann, *Vector bundles and connections,* http://people.mpim-bonn.mpg.de/hwbllmnn/archiv/conncurv1999.pdf

[6] L. Berwald, *Ueber Finslersche und Cartansche Geometrie IV*, Ann. of Math. (2) **48** (1947), 755-781.

[7] I. Bucataru and R. Miron, *Finsler-Lagrange Geometry*, Editura Academiei Romane, Bucuresti, 2007.

[8] M. Crampin and D. J. Saunders, *Affine and projective transformations of Berwald connections,* Differential Geom. Appl. **25** (2007), 235-250.

[9] A. Frölicher and A. Nijenhuis, *Theory of vector valued differential forms*, Indag. Math. (N. S) **18** (1956), 338-359.

[10] W. Greub, *Linear Algebra* (4th edition), Springer, 1975.

[11] J. Grifone, *Structure presque-tangente et connexions, I.* Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **22** (1972), 287-334.

[12] J. Grifone, *Transformations infinitésimales conformes d'une variété finslerienne*, C.R. Acad. Sc. Paris **280**, série A (1975), 519–522.

[13] J. Grifone, *Sur les transformations infinitésimales conformes d'une variété finslérienne*, C.R. Acad. Sc. Paris **280**, série A (1975), 583—585.

[14] G. S. Hall, *Symmetries and Curvature Structure in General Relativity*, World Scientific, 2004.

[15] L. Huang and X. Mo, *On conformal fields of a Randers metric with isotropic S-curvature*, Illinois Journal of Math. **57** (2013), 685-696.

[16] S. Lang, *Fundamentals of Differential Geometry,* Springer, 1999.

[17] R. L. Lovas, *Affine and projective vector fields on spray manifolds*, Period. Math. Hungar. **48** (2004), 165-179.

[18] R. L. Lovas, *On the Killing vector fields of generalized metrics*, SUT J. Math. **40** (2004), 133-156.

[19] M. Matsumoto, *Theory of extended point transformations of Finsler spaces I*, Tensor N.S. **45** (1987), 109–115.

[20] M. Matsumoto, *Theory of extended point transformations of Finsler spaces II*, Tensor N.S. **47** (1988), 203–214.

[21] Y. Matsushima, *Differentiable Manifolds*, Marcel Dekker, New York, 1972.

[22] P. W. Michor, *Topics in Differential Geometry*, Graduate Studies in Mathematics **93**, AMS, 2008.

[23] R. B. Misra, *Groups of transformations in Finslerian spaces*, Internal Reports of the ICTP, Trieste, 1993.

[24] B. O'Neill, *Semi-Riemannian Geometry*, Academic Press, New York, 1983.

[25] B. O'Neill, *The Geometry of Kerr Black Holes*, Dover Publications, Inc., Mineola, New York, 2014.

[26] W. A. Poor, *Differential Geometric Structures*, Dover Publications, Inc. Mineola, New York, 2007

[27] Gy. Soós, *Über Gruppen von Affinitäten und Bewegungen in Finslerschen Räumen*, Acta Math. Hungar. **5** (1954), 73-83.

[28] J. Szilasi, *A Setting for Spray and Finsler Geometry*, In: *Handbook of Finsler Geometry* (Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2003) 1183–1426.

[29] J. Szilasi, R. L. Lovas and D. Cs. Kertész, *Connections, Sprays and Finsler Structures*, World Scientific, 2014.

[30] J. Szilasi, A. Tóth, *Conformal vector fields on Finsler manifolds*, Commun. Math. **19** (2011), 149-168.

[31] J. Szilasi and A. Tóth, *Curvature collineations in spray manifolds*, Balkan J. Geom. Appl. **17** (2012), 104-114.

[32] J. Szilasi and Cs. Vincze, *On conformal equivalence of Riemann-Finsler metrics*, Publ. Math. Debrecen, **52** (1998), 167-185.

[33] Tian Huang-jia, *Projective vector fields on Finsler manifolds*, Appl. Math. J. Chinese Univ. **29**(2) (2014), 217-229.

[34] K. Yano, *The Theory of Lie Derivatives and its Applications*, North-Holland, Amsterdam, 1957. and

3 Tudományos tevékenység

Előkészítés alatt álló dolgozatok

1. Lie derivatives of Finslerian covariant derivatives (publikálásra előkészítve)

2. $\mathcal{H}$-Killing fields (publikálásra előkészítve)

3. A Viviani tétel és problémamezője modern eszközökkel (GeoGebra) a középiskolai oktatásban (publikálásra előkészítve)

Előadások

1. Geometric vector fields on spray and Finsler manifolds, *The V-th International Conference of Differential Geometry and Dynamical Systems*; 6-9 October 2011, University Politehnica of Bucharest, Romania.

2. Lie derivatives along the tangent bundle projection and their applications, *The 6th Bilateral Workshop on Differential Geometry and its Applications* Ostrava, Czech Republic, 27 - 29 May, 2011.

3. A Viviani tétel és problémamezője modern eszközökkel (GeoGebra) a középiskolai oktatásban, *Varga Tamás Módszertani Napok 2014*, Budapest);

4. Madarat tolláról, embert profiljáról? (Sulinet IKT műhely roadshow; Educatio Nonprofit Kft., Debrecen, 2014)

5. Rendhagyó módszerek egy hagyományos kémiaórán (I. Természettudományos Oktatási Szakkiállítás, Budapest, 2013)

6. Projektmunka a kémiaórán - a levegő témakör feldolgozása (Digitális Pedagógus konferencia 2013, Budapest)

Registry number: DEENK/32/2015.PL
Subject: Ph.D. List of Publications

Candidate: Anna Tóth
Neptun ID: NVV7KP
Doctoral School: Doctoral School of Mathematical and Computational Sciences
MTMT ID: 10048785

List of publications related to the dissertation

Foreign language scientific article(s) in international journal(s) (2)

1. Szilasi, J., **Tóth, A.**: Curvature collineations in spray manifolds.
   Balk. J. Geom. Appl. 17 (2), 104-114, 2012. ISSN: 1224-2780.
   IF:0.806

2. Szilasi, J., **Tóth, A.**: Conformal vector fields on Finsler manifolds.
   Communications in Mathematics. 19, 149-168, 2011. ISSN: 1804-1388.

Total IF of journals (all publications): 0,806
Total IF of journals (publications related to the dissertation): 0,806

The Candidate's publication data submitted to the iDEa Tudóstér have been validated by DEENK on the basis of Web of Science, Scopus and Journal Citation Report (Impact Factor) databases.

18 February, 2015

Nyilvántartási szám: DEENK/32/2015.PL
Tárgy: PhD Publikációs Lista

Jelölt: Tóth Anna
Neptun kód: NVV7KP
Doktori Iskola: Matematika- és Számítástudományok Doktori Iskola
MTMT azonosító: 10048785

A PhD értekezés alapjául szolgáló közlemények

Idegen nyelvű tudományos közlemény(ek) külföldi folyóiratban (2)

1. Szilasi, J., **Tóth, A.**: Curvature collineations in spray manifolds.
   Balk. J. Geom. Appl. 17 (2), 104-114, 2012. ISSN: 1224-2780.
   IF:0.806

2. Szilasi, J., **Tóth, A.**: Conformal vector fields on Finsler manifolds.
   Communications in Mathematics. 19, 149-168, 2011. ISSN: 1804-1388.

A közlő folyóiratok összesített impakt faktora: 0,806
A közlő folyóiratok összesített impakt faktora (az értekezés alapjául szolgáló közleményekre): 0,806

A DEENK a Jelölt által az iDEa Tudóstérbe feltöltött adatok bibliográfiai és tudománymetriai ellenőrzését a tudományos adatbázisok és a Journal Citation Reports Impact Factor lista alapján elvégezte.

Debrecen, 2015.02.18.