

Szakdolgozat

Lipták Attila

Debreceni Egyetem
Informatikai Kar

Geometriai szerkesztések megvalósítása többféle program segítségével

Témavezető:

Nyakóné dr. Juhász Katalin
tudományos főmunkatárs

Készítette:

Lipták Attila
levelező informatika
tanárszak

Debrecen

2007

TARTALOMJEGYZÉK

Bevezetés	2
A szoftverek ismertetése	4
I. Érintő szerkesztése	5
I/1 Kör és pont felvétele	5
I/2 Szakasz felvétele	14
I/3 Szakaszfelező szerkesztése	15
I/4 Érintési pontok szerkesztése	18
I/5 Az érintők szerkesztése	18
II. Parabola szerkesztése	22
III. Transzformációk	30
III/1 Inverzió.....	30
III/2 Eltolás.....	34
Összegzés	40
Irodalomjegyzék	41

Bevezetés

Manapság a számítógép ismerete elengedhetetlen, az életünk részévé vált a családban éppúgy, mint a munkahelyünkön. Le kell ülnünk a számítógép elé és dolgoznunk vele. Az informatika önálló tantárgyként van jelen az oktatásban, de nem csupán ezeken az órákon használjuk a számítógépet, hanem a többi tanórán is lehetőségünk van rá. Ennek megvalósítását a manapság elterjedőben lévő digitális tábla is elősegíti,



valamint a középiskolák számára biztosított „zsúrkocsi-program”, a multimédiás bőrönd (laptop, projektor, hangszóró).

Az informatika még az „olcsó” tudománynak nevezett matematikát (csak papír és ceruza szükségeltetik hozzá) is bevonta a fejlődésbe, hiszen a számítógép másodpercek alatt több millió műveletet képes elvégezni. A matematika részét képezi a geometria, melynek fontos része a szerkesztés. Ezek pontossága, valamint láthatósága igen fontos a szerkesztett ábra leolvasásában. A hagyományos módon elkészített szerkesztésnél nem tudjuk megvizsgálni miként változik az ábránk egy-két pont helyzetének megváltoztatásakor. Ez problémát is jelenthet tanítási órán, amikor egy szerkesztést végzünk a táblánál, és a szerkesztés végéhez közeledve szembesülünk azzal a ténnyel, hogy nem fér el az ábránk. A szerkesztés újrakezdésével sok idő vész el.

Itt léphet be a számítógép a geometria tanításába. Léteznek olyan szoftverek, melyekkel geometriai szerkesztéseket végezhetünk el szinte ugyanolyan módon, mint papíron. E programok segítségével mindig van elegendő hely a szerkesztéshez, és lehetőségünk van más megoldások könnyed kereséséhez az úgynevezett bázispontok mozgatásával. Nem feltétlenül szükséges az órán a számítógép és a projektor használata, hiszen fóliára nyomtathatók a szerkesztés fázisai, valamint a szerkesztett ábra és így a már mindenhol megtalálható írásvetítő segítségével is be tudjuk mutatni a szerkesztést. A programok használatát a diákok is könnyen el tudják sajátítani. A programok kezelőfelülete és a rajtuk elhelyezkedő funkciókat jelző ikonok könnyű és egyértelmű használatot tesznek lehetővé. Dolgozatomban négy dinamikus geometriai szoftvert mutatok be, melyeket didaktikai szempontból hasonlítok össze. A vizsgálatban szereplő szoftverek a következők: Euklides, Cinderella, Cabri, Geogebra, de léteznek további szerkesztőprogramok is, mint például a Dr. Geo vagy a Kig. Azért választottam a bemutatásomhoz ezeket a programokat, mert mindegyikének létezik Windows operációs rendszerre írt változata, és ma a közoktatásban túlnyomóan ennek a rendszernek a használatát oktatják.

A szoftverek ismertetése

Legnagyobb múlttal rendelkezik a Cabri. 1988-ban jelent meg egy DOS operációs rendszeren alapuló szerkesztőprogrammal. Mi az úgynevezett *Cabri II plus* változatot vizsgáljuk, mely már Windows és Mac OS alapú, és több funkcióval van ellátva, mint elődje. Az Euklides és a Cinderella – a Cabri megjelenése után – közel 10 évvel később jelentek meg. Az Euklides első verziója után természetesen több újabb, módosított változat jelent meg, melyek közül mi a 2.4-es verzióval foglalkozunk. Sajnos úgy tűnik a szoftver fejlesztésével leálltak, mert az utóbbi időkben nem jelentek meg újabb változatok. A Cinderella és a Geogebra működéséhez Java futtató környezet szükséges, ezeknek a programoknak van Windows Mas OS és Linux operációs rendszerre írt változata is.

Dinamikus geometriai szoftver

Ez a fogalom még nem definiált. Leírjuk azokat a tulajdonságokat, melyeket egy ilyen szoftver mindenképpen tartalmaz. A dinamikus geometriai szoftver segítségével geometriai szerkesztéseket végezhetünk el szinte ugyanolyan módon és elven, ahogyan azt hagyományosan (papír, szerkesztőeszközök) végeznénk. Természetesen, a számítógép segítségét felhasználva, úgynevezett bázispontokat *interaktív módon* kezelhetünk, és ezáltal láthatjuk a változásokat a szerkesztett ábrán. Ez nagy segítség a szemléltetés szempontjából. A bázispontok mozgatásának egy fejlettebb változata az *animáció* készítése, ahol a kijelölt bázispont egy adott objektumon „fut” végig. *Nyomvonal* létrehozása, mely megmutatja, hogy egy adott pont milyen vonal mentén mozog. Talán ezek a legfőbb jellemzők, melyek meghatároznak egy dinamikus geometriai szoftvert.

Az összehasonlítás tényezői

Az összehasonlító vizsgálatot feladatokon keresztül végzem. A feladatok megoldása során minden egyes szerkesztési lépést külön-külön végrehajtok a programokkal. Így látható lesz, a program milyen módon valósítja meg az adott szerkesztési lépést. Főbb összehasonlítási szempontként említhetem az *interaktív adatkezelést*, az *animáció* készítését, a *nyomvonal* létrehozását, a *fóliák* alkalmazását, a szerkesztett ábra *képi megjelenítését*, a *jelöléseket*, valamint a *magyarázó szövegeket*.


I. Érintő szerkesztése


ADOTT EGY KÖR ÉS EGY KÜLSŐ P PONT. SZERKESSZÜK MEG A KÖR AZON ÉRINTŐIT, MELYEK ÁTHALADNAK A P PONTON.

Matematikai háttér: Az érintő merőleges az érintés pontba húzott sugárra. A szerkesztés során a Thalész-tételt alkalmazzuk, mely a következőt mondja ki: ha egy kör valamely átmérőjének két végpontját összekötjük a körvonal bármely más pontjával, akkor derékszögű háromszöget kapunk, és ennek ez az átmérő az átfogója. A mi esetünkben a háromszög egyik befogója a kör sugara lesz, a másik befogót meghosszabbítva a P ponton áthaladó érintőt fogunk kapni.

1. lépés: Kör és pont felvétele

Euklides

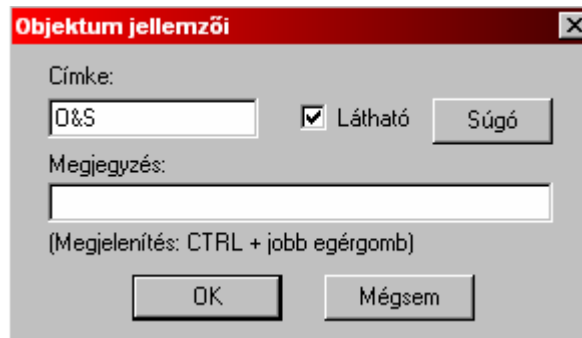
Alapállapotban egy pont felvételéhez nem szükséges  az ikont kiválasztani, hanem elegendő kétszer kattintani az egér bal gombjával.



A kör felvételéhez meg kell adni a kör középpontját, valamint egy kerületi pontját. Ezt a műveletet a következő ikon hajtja végre: 

Kört megadhatunk sugara vagy  átmérőjének végpontjai alapján is. 

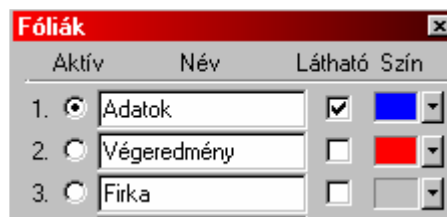
A funkció bekapcsolása után a kezelőfelület állapotsorában láthatjuk a segítő instrukciókat, vagy az aktuális utasítást váró szöveget.


Az objektumokat el lehet nevezni. Ezt alapállapotban az objektumra való kétszeri kattintással érhetjük el. Ekkor egy előugró ablakban a *címke* részhez beírhatjuk az objektum nevét, és a *megjegyzés* részhez rövid ismertetőt írhatunk. Az objektumok nevéhez alkalmazhatunk alsó index jelöléseket. Példaként nevezzük el az objektumunkat O_5 -nek! Az indexelni kívánt karakter előtt alkalmazzuk az „ALT GR + C” billentyűkombinációt. Ekkor megjelenik a „&” szimbólum, és az utána következő karaktert alsó indexként jelöli. Az Euklides engedélyezi, hogy több elemet azonos névvel lássunk el! Ez gyenge pontjának tekinthető, hiszen megtévesztő lehet a szerkesztés menetének leírásakor.



A címkék láthatóságához tegyük aktívvá az  ikont. A megjegyzés csak akkor látható, ha ráközelítünk az adott objektumra. Ehhez aktivizáljuk az eszköztáron lévő  ikont! A kör felvételéhez szükséges kerületi pontot nevezzük el M_S-nek, a körünket s-nek!


A szerkesztések áttekinthetőségéhez alkalmazhatunk **fóliákat**. A fóliákat el lehet nevezni és különböző színeket adhatunk neki. Ezt a funkciót az eszköztárról a Rétegeknél tudjuk elérni.



A fólia alkalmazását úgy kell elképzelni, mintha ténylegesen írásvetítő fóliára helyeznénk a szerkesztéseinket. Ezeket a rétegeket egyszerre is lehet látni, valamint kijelölhetjük külön-külön  azokat, amelyeket látni szeretnénk. A látható fóliákat egy 'pipa' jelzi (pl. Adatok). Tegyük aktívvá az adatainkat. A fóliák nagy segítséget adnak a több, nagyobb egységből álló szerkesztési lépések áttekintésében.

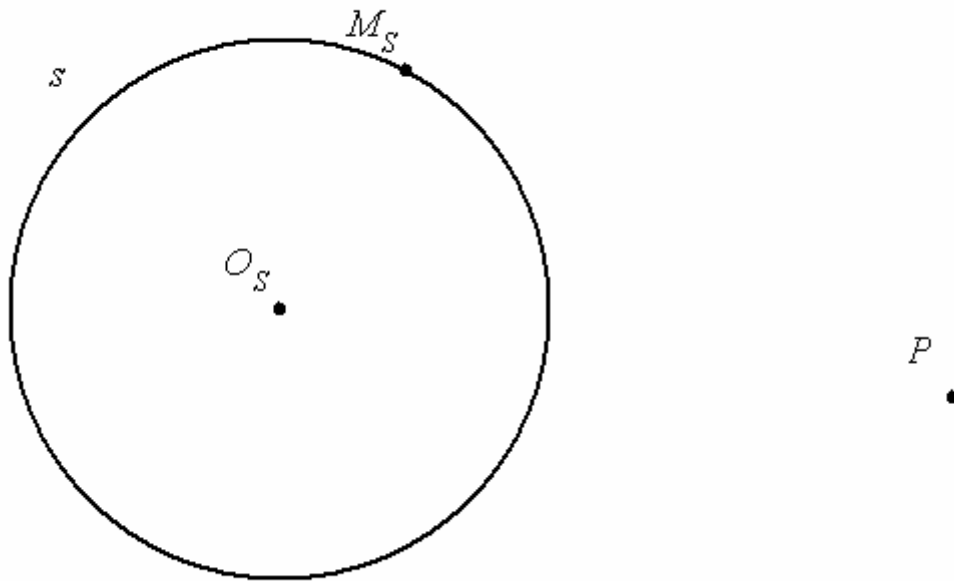
Az objektumok **vonalszínét** is  megadhatjuk.

Az aktív vonalszín a kezelő felületünk jobb alsó sorában láthatjuk.




A megszerkesztett ábrát lehetőségünk van képként elmenteni, amit szöveges környezetbe beilleszthetünk. Meg lehet határozni, hogy mekkora területet **exportálunk**, melyet az  ikon tesz lehetővé. A műveletet a Fájlménü *WMF export* paranccsal fejezhetjük be.

Nagyon előnyös a WMF (Windows Metafile) kiterjesztésű képmentés, hiszen ez a Windows operációs rendszernek egy szabványos fájlformátuma.

Példaként itt az első feladat adatfelvételei.



Cinderella


A kör megadására itt is többféle lehetőségünk van. Rajzolhatunk kört a középpontja körül , adott sugárral , valamint megadhatjuk a középpontját és egy  kerületi pontját. Alkalmazzuk az utóbbi módszert.


Egyedülálló módon ez a program tartalmaz egy körzőt is, mely használatakor meg kell adnunk a sugarat és a középpontot.




Az Euklideshez hasonlóan itt is találunk magyarázó szöveget az ún. állapotsoron. Az előző programmal ellentétben, itt nem kell elengedni az egér bal gombját a középpont megadása után, hanem nyomva tartva a kívánt nagyságig húzzuk, közben folyamatosan láthatjuk a körünk növekedését. A gomb elengedése után létrehozza a kört a kerületi pontjával együtt.

A kör létrehozását látványos módon oldja meg, de ez a gyerek számára zavaró is lehet. Hiszen egy kört csak akkor tudunk már megrajzolni, ha körzőnyílásba vettük a középpontjának és egy kerületi pontjának a távolságát.

Az új objektumokat (objektumtípusonként – pont, szakasz, egyenes, görbe) **automatikusan elnevezi**, mégpedig ábécé sorrendben.

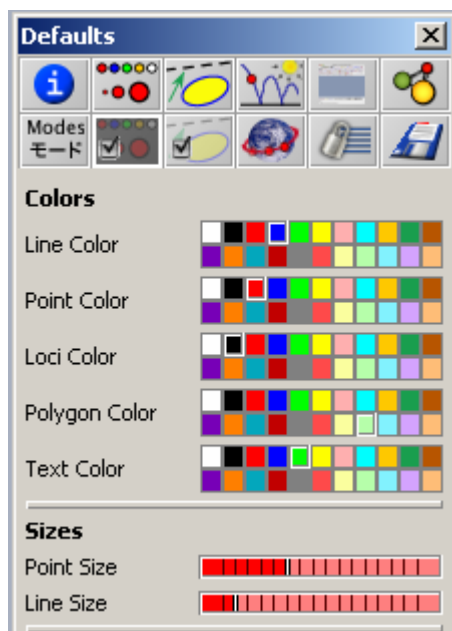
Az objektum átnevezéséhez be kell kapcsolnunk az  ikont, majd a megszokott módon az átnevezni kívánt objektumra rákattintani. Ez a program az előzővel ellentétben már nem engedi az objektumok azonos elnevezését, viszont nem tudunk megjegyzéseket és indexjelöléseket alkalmazni. Érdekes azonban, hogy körnek, illetve poligonnak is adhatunk nevet, de azok címkéit nem jeleníti meg. Ez a szerkesztés menetének leírásakor ugyancsak nehézséget okozhat.

Az **objektum tulajdonságainak** megváltoztatásához először ki kell jelölnünk az adott objektumot, amit az  ikonnal tehetünk meg.

Több azonos típusú objektumokat (pontok, egyenesek, kúpszeletek) egyszerre is ki tudunk jelölni. Ehhez ki kell választani az objektumok típusát jelző ikont:   

Az elemek kijelölését az  ikonnal lehet megszüntetni.

Az objektum(ok) tulajdonságait egy ablakban tudjuk beállítani, melyet a *Szerkesztés/Menüponttal* hívhatunk elő.



Itt értelemszerűen be tudjuk állítani az objektumok színét, és a címkék láthatóságának engedélyezését.

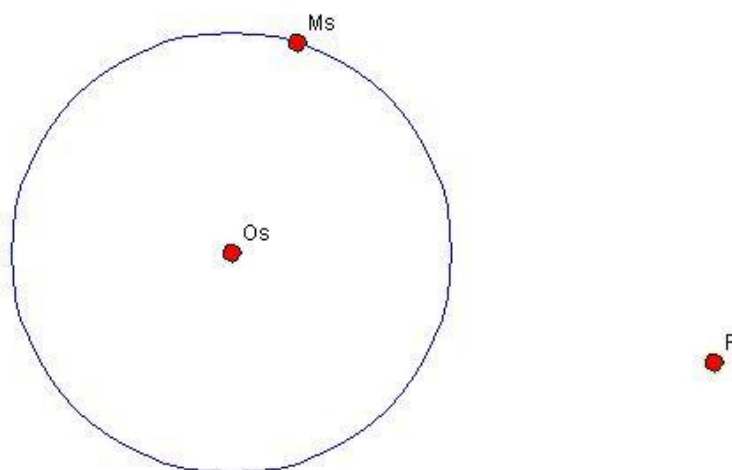
A következő beállítási módok nagyon egyedi megoldások:

- a *pont mérete* több fokozatban állítható, mellyel megkülönböztethetjük a fontos és kevésbé fontos pontokat;
- a *levágás*, mely az egyenest meghatározó két ponton túlmenően „levágja” az egyenes végeit. A *túlnyúlás* mértékét is be lehet állítani, melyet nullára állítva egy szakaszt eredményez;
- *rögzítés*, mely rögzíti az adott objektumot (nem mozgatható);
- a *háttér, szöveg, kiválasztás* színének megválasztása, mely a három alapszín (piros, zöld, kék) keverésével igen változatos színeket tudunk előállítani;
- a *láthatóság* funkcióval beállíthatjuk az adott objektum kontrasztját, mellyel teljesen el is lehet tüntetni (az Euklides ezt fóliák alkalmazásával teszi lehetővé).

Amint láhattuk, ez a program nem alkalmaz fóliákat. Az áttekinthetőséghez halványítani tudunk, de a szerkesztés egységeit nem tudjuk külön elhatárolni.


A Cinderella is lehetőséget ad nekünk, hogy szerkesztésünket szövegszerkesztő segítségével szövegbe ágyazzuk. Az Euklideshez képest sokkal több formátumban lehet exportálni a képet: html, pdf, bmp, jpg, tga, png. Egyetlen kis hiánya van, hogy nem lehet kijelölni az exportálni kívánt rajzrészletet. Minden esetben az egész ábrát exportálja.

Itt is nézzük meg, hogyan is exportál a szoftver:




Cabri

A program kezelőfelületén lévő ikonok száma miatt funkciókban szegényesebbnek tűnik az előző két programhoz képest, de ez senkit se tévesszen meg! A későbbiek folyamán majd meglátjuk, hogy méltó helyet foglal el a többiek mellett.

A kör felvételéhez kattintsunk az  ikonra. A kör megadását csak ezen a módon tudjuk végrehajtani. A kör középpontjának megadása után elengedhetjük az egér bal gombját, majd az egeret távolítva láthatjuk a körünk növekedését. A kívánt nagyságnál még egyet kattintva létrehozza a kört (kerületi pont nélkül).

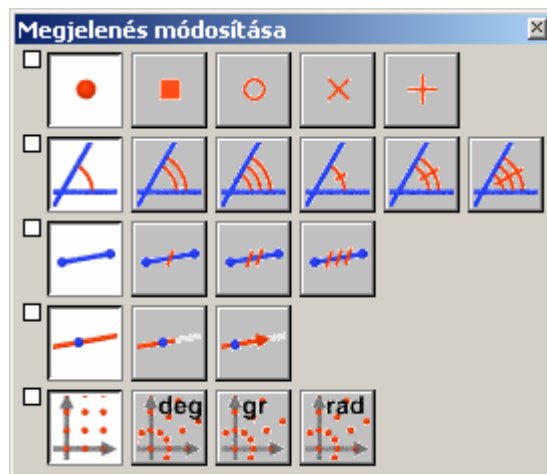
A könnyebb érthetőség miatt megmutatom, hogy az alapállapotban lévő ikonok melyik menü alá tartoznak.



A programban megfigyelhetjük, hogy itt automatikusan eltérő színűek a különböző típusú objektumok. Ezek a tulajdonságok előre be vannak állítva. Természetesen mi is beállíthatjuk a nekünk tetsző **színeket**, **vonaltípusokat**, sőt **pontformátumokat**. Ezeket az *Objektumok megjelenítése* menüvel érhetjük el, melyek közül alapértelmezésként az  ikon látható, mely a *Mutat/Rejt* funkciót látja el. Ha az ikont nyomva tartjuk az egér bal gombjával, akkor a legördülő menüből választhatjuk ki a változtatni kívánt tulajdonságot. Az eszköztáron mindig a legutoljára választott funkció ikonja látható.



Az ábránk színesebbé tételéhez a zárt objektumunkat ki is színezzük a *kitöltés* segítségével. A *Megjelenés módosítása* menüpontban sorban a következő megjelenítési tulajdonságokat állíthatjuk be: pont, szög szakasz, egyenes koordináta-rendszer.



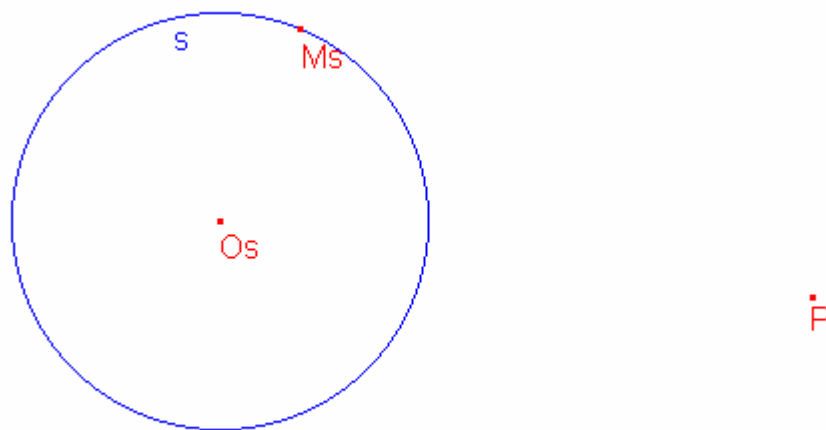
Észrevehetjük, hogyha az egerünk egy objektum közelébe ér, akkor a mutató mellett egy kis magyarázó szöveget láthatunk, hogy az egerünk mit is érzékel. Ez egy pontos kiválasztási módja az objektumoknak, valamint gyors segítséget ad az értelmezésben.

Címkét a *Tulajdonságok* ikonra kattintva tudunk létrehozni, mely alapesetben a következő: **AI**. Az előző két programtól eltérően a címke jóváhagyását nem az Enter billentyű lenyomásával tudjuk elérni (mert azzal csak sort emelünk), hanem a címke szerkesztőfelületén kívül eső részre kell kattintani. Indexelésre viszont itt sincs lehetőségünk.

Tipp: Több objektum egymás után való elnevezésekor gyorsabban tudunk haladni, ha a címke jóváhagyásakor a következő elnevezni kívánt objektumra kattintunk.


A Cabri programunk shareware változat, mely korlátozásokat tartalmaz. Többek közt, a **szerkesztett ábra mentése** is le van tiltva. De az ábrára (és részleteire) alkalmazhatjuk a *kivágás, másolás, beillesztés* módszerét.

A számítógép segítségével meg tudjuk mutatni a körök felvételét:




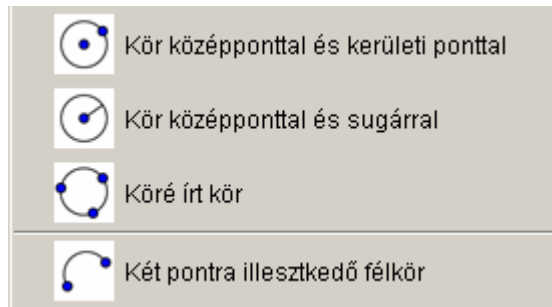
Geogebra

E program kezelőfelülete leginkább a Cabrihoz hasonlít. Ez jól látható az

eszköztáron is.  Minden eszköz

jobb alsó sarkában található egy nyíl, melyre kattintva további funkciók jelennek meg mint a Cabriban. Ez a funkció úgy is elérhető, hogy hosszan kattintottunk az eszköze.

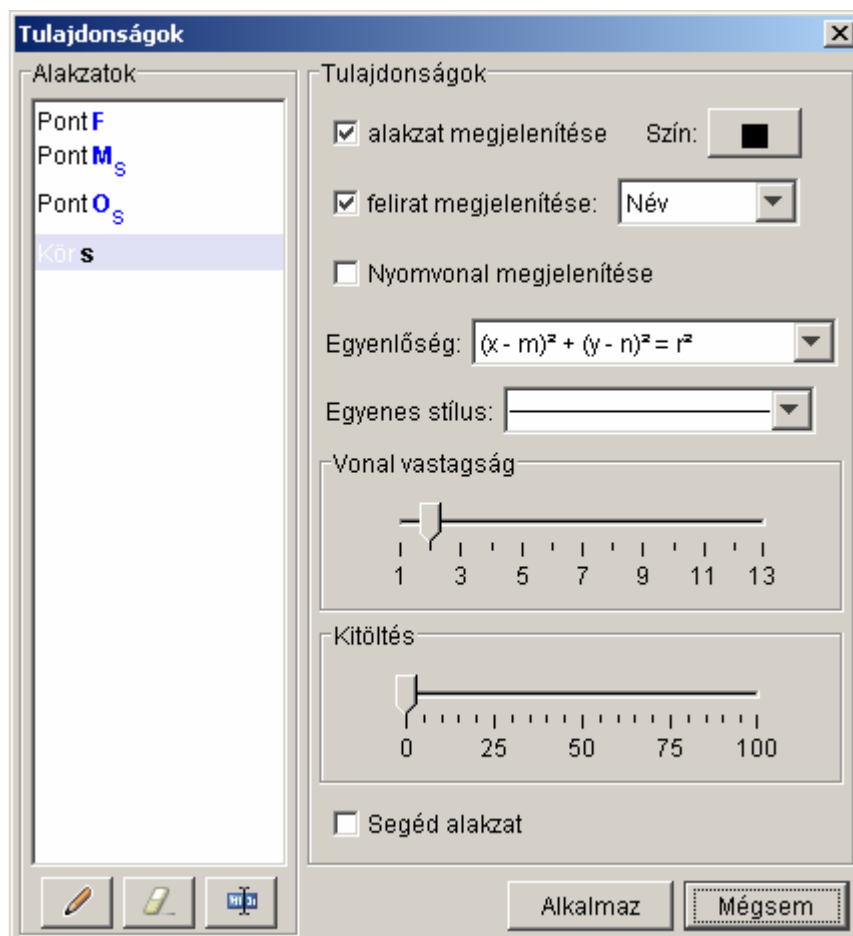
Pontot erre  az eszközre kattintva tudunk megadni. Kör megadására itt is több lehetőségünk van, és található egy eddig nem látott funkciót: a félkör rajzolást két pont megadásával.



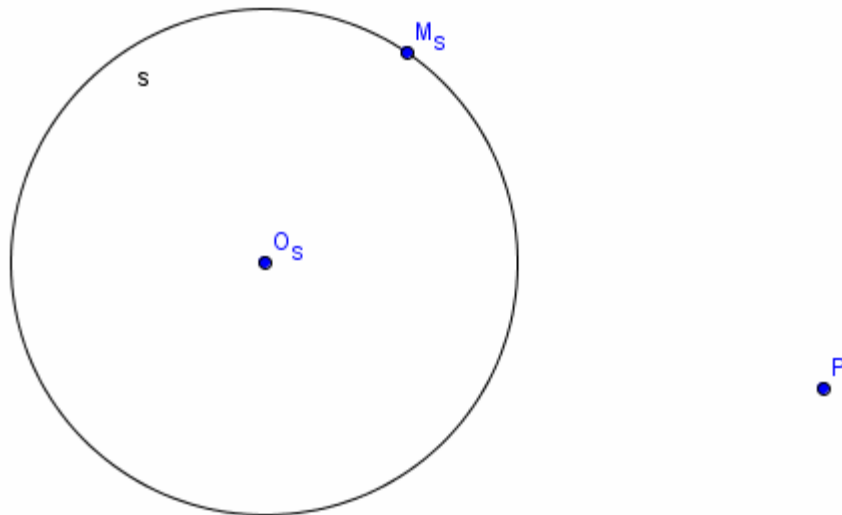
A körrajzolásnál, amikor sugár segítségével adjuk meg a kört. Miután megadtuk a kör középpontját megjelenik egy párbeszédablak, ahol meg lehet adni mekkora legyen a sugár.

Ebben a programban is el lehet nevezni az objektumokat, ha a jobb egérgombbal rákattintunk és ott az átnevezést választjuk. A Geogebra lehetőséget biztosít formulák használatára. Ehhez létre kell hozni egy egyszerű szöveget és a megjelenő ablakban a szöveg helyén a Latex szabályainak megfelelő formulákat lehet használni. Ez a mi esetünkben a következőképpen néz ki $O_S = O_{\{S\}}$.

Az objektumok helyi menüjében megtalálhatjuk az egyenletét is, mely az algebra oktatásban is igen jól használhatóvá teszi a programot, illetve a tulajdonságok menüpont alatt beállíthatjuk bármely alakzat színét, vonal stílusát, kitöltését.




Exportálásnál 4 lehetőségünk van: html, png eps és a negyedik lehetőséggel a rajzot a vágólapra másoljuk és valamilyen programmal a számunkra megfelelő formátumban elmentjük. Exportálás során megadható, hogy milyen arányba történjen az exportálás és az is, hogy milyen felbontással.




Itt látható az exportált kép.

2. lépés: Szakasz felvétele

Euklides

Az $O_S P$ szakasz megrajzolásához  eszközt kell választani, ezután meg kell adni a szakasz egyik illetve másik végpontját. Nem csupán akkor tudunk szakaszt rajzolni ha már vannak bázispontok a rajzlapon, mert ezeket a pontokat akkor is elhelyezhetjük, ha duplán kattintunk a rajzlapon. Ez a szakasz lesz majd a derékszögű háromszög átfogója. A szakasz csak akkor jelenik meg, ha már meghatároztuk annak mindkét végpontját.


Cinderella

Az $O_S P$ szakasz megrajzása előtt erre az ikonra  kell kattintani. A fő különbség az Euklidessel szemben, hogy szakaszrajzolást az egér bal gombjának lenyomására kezdi és annak felengedésével be is fejezi.


Cabri

A szakasz rajzolás során kattintanunk kell a szakasz kezdőpontjánál. Amennyiben egy már létező pontot szeretnénk választani kezdőpontnak akkor az egeret a ponthoz

közelíjük, ekkor az egérkurzor kézzé alakul és az „Ez a pont”, felirat jelenik meg. Ezután az egeret mozgatva a vonal rajzolódik majd a következő kattintással


meghatározzuk a szakasz végpontját. Az eszköztáron  így jelenik meg szakaszrajzoló eszköz.

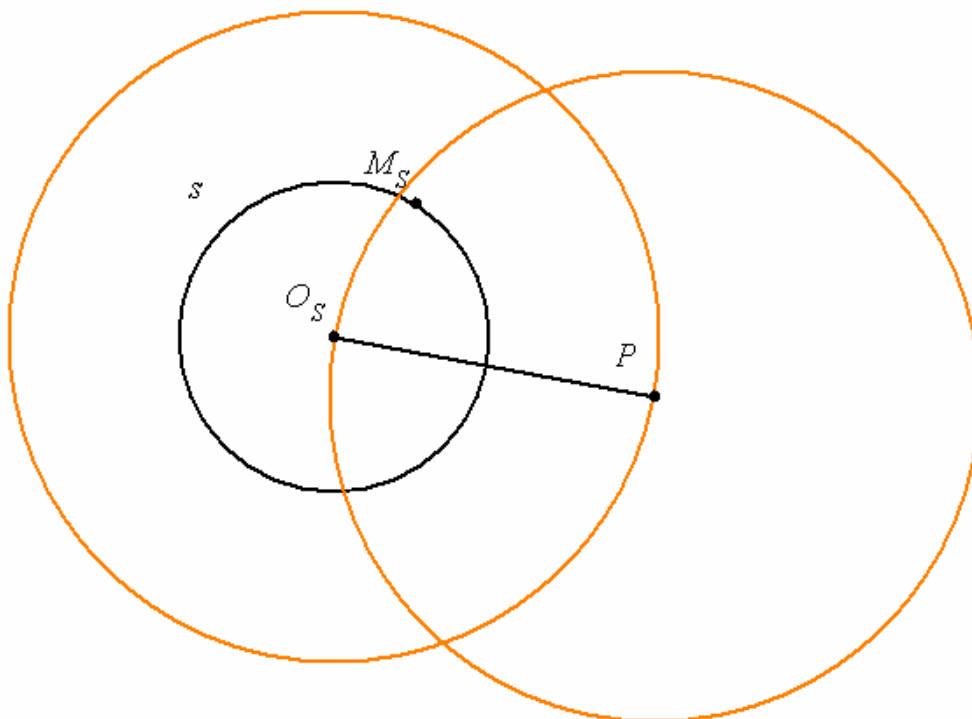
Geogebra


Ennek a programnak a rajzolási módja teljes mértékben megegyezik a Cabri rajzolási módjával, és az eszköztáron való megjelenése is igen hasonló .

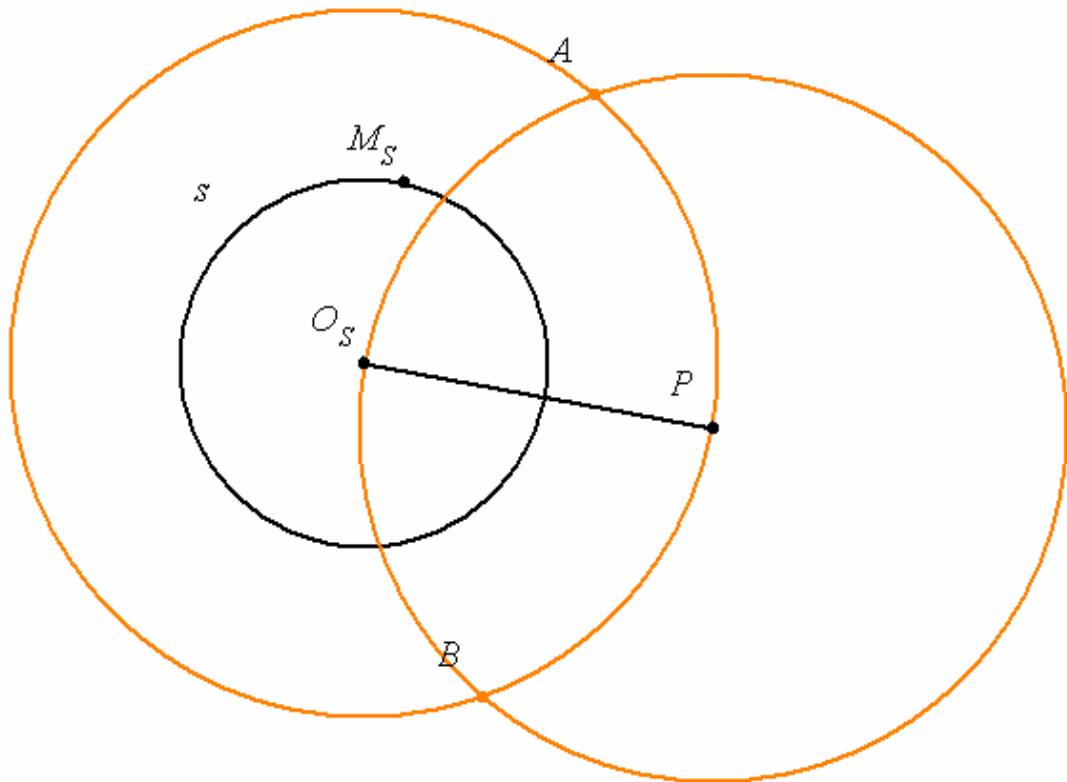
3. lépés: Szakaszfelező szerkesztése


Euklides

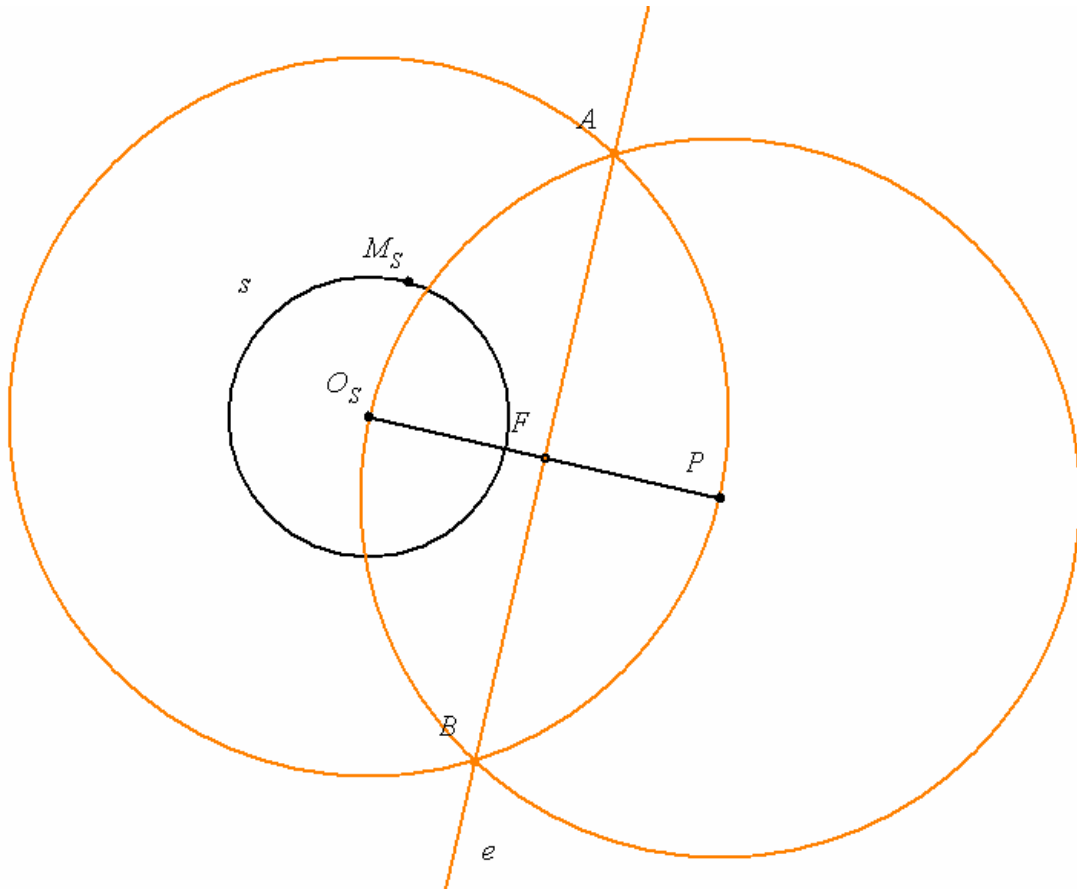
A szakasz felezésére a programnak beépített eszköze is létezik , melynek igen nagy hasznát vehetjük bonyolultabb alakzatok szerkesztésénél, hiszen kevesebb lépésből is végrehajthatjuk a szerkesztést. De nem célszerű magyarázatoknál használni, hiszen a tanulók nem látják hogyan került oda az az egyenes. A másik megoldáshoz körrajzolásra és egyenes rajzolásra lesz szükségünk. Első lépésben felvesszünk két egy O_S és egy P középpontú kört tetszőleges sugárral. Az egyszerűség kedvéért a kör sugarának az $O_S P$ szakaszt fogjuk választani.



Ezután meg kell határoznunk a két egyenesünk metszéspontját ebben a metszéspont  eszköz lesz a segítségünkre. Ezután a rajzlapon rá kell kattintanunk azokra az objektumokra amelyek metszéspontjait szeretnénk meghatározni. A mi esetünkben a két körre, ekkor a program jelölni fogja mindkét metszéspontot, melyeket A-nak és B-nek fogunk elnevezni.



Az egyenes két pontra eszköz segítségével megrajzoljuk a szakaszfelező merőlegest , melyet e -vel jelölünk és az e egyenes és az $O_s P$ szakasz metszéspontját F-el jelöljük.



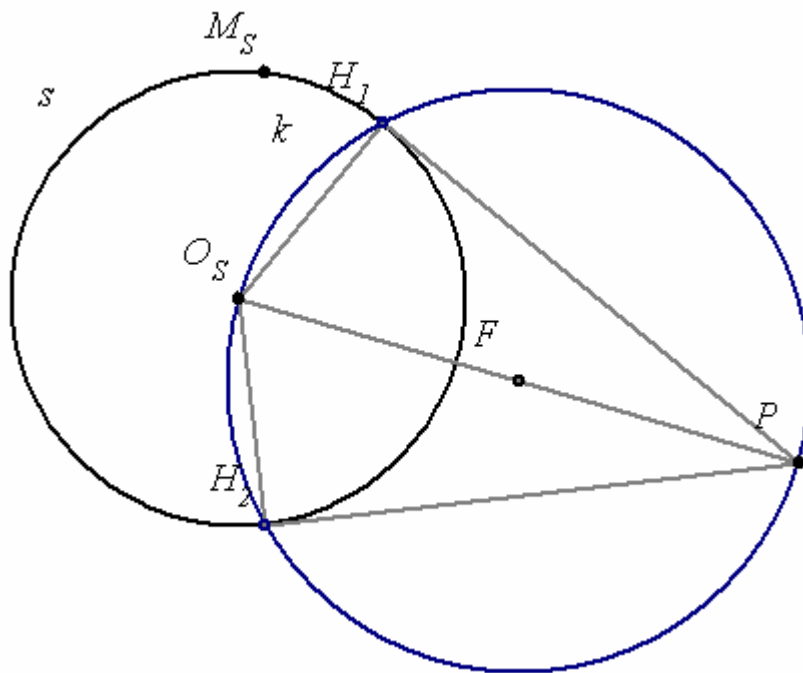
A metszéspont meghatározása, az egyenes rajzolása és a szakaszfelező, mint beépített eszköz mind a négy programban egyformán történik. Csak az eszköztáron való megjelenésük között van némi eltérés melyet az alábbi táblázat mutat.

	Metszéspont	Egyenes	Szakaszfelező
Euklides			
Cinderella			
Cabri			
Geogebra			

4. lépés: Érintési pontok szerkesztése

Ezeket a lépéseket mind a négy programban azonosan végezzük el a már megismert eszközök segítségével.

Először meg kell szerkesztenünk az F középpontú FP sugarú kört, mely az $O_s P$ szakasz Thalész köre. Nevezzük el ezt a kört k -nak, és a k és s körök metszéspontjait H_1 -nek és H_2 -nek. Valamint, a szemléletesség kedvéért a következő ábrán megszerkesztjük a két darab derékszögű háromszöget. ($O_s P H_1$, $O_s P H_2$)



5. lépés: Az érintők szerkesztése


Euklides

Ez a program rendelkezik egy egyedi szerkesztéssel. Ezzel a funkcióval létre tudjuk hozni az adott pontokból, az adott körökhöz tartozó **érintőket**. Ezt a funkciót a következő két ikon jelzi:

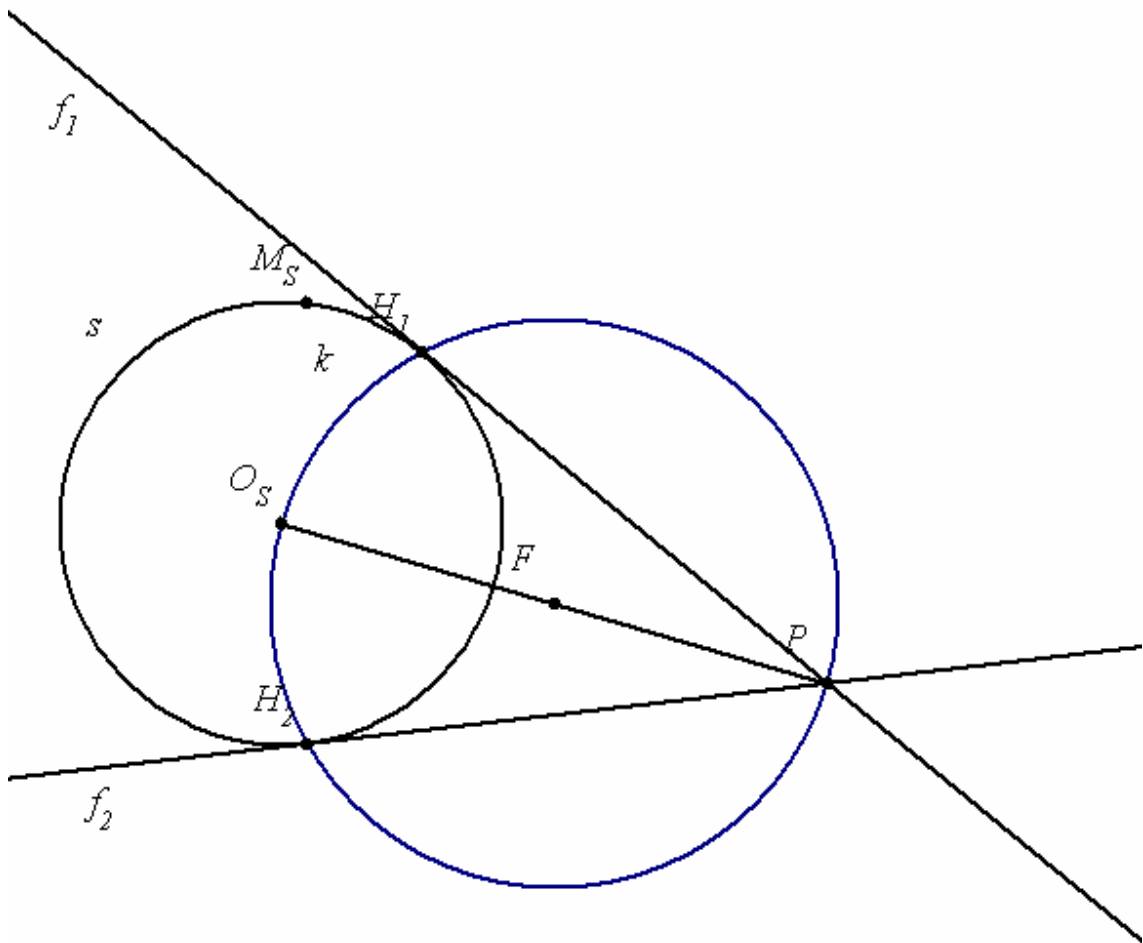
- érintő egyenesek
- érintő félegyenesek



Szerkesszük meg az érintőket és az érintési pontokat az adott utasítások alkalmazása nélkül.

A körök közös érintőegyenesei a következők lesznek, melyeket az ismert utasítással hajtunk végre: 

- $f_1(H_1, P)$
- $f_2(H_2, P)$




Cinderella

Az érintőegyenesek szerkesztéséhez most alkalmazzuk a másik módszert, amelyhez csak a kiindulási pont kell (természetesen az irányt nekünk kell meghatározni).




Ezt a módszert az ikon teszi lehetővé, mellyel az egyenest a másik módszerhez hasonlóan kell elvégezni.

Cabri

Az érintők létrehozásához alkalmazzuk a már megismert módot az  ikon aktiválása után.


Geogebra

Az Euklideshez hasonlóan ez a program is meg tudja szerkeszteni az érintőket egy lépésben. 

Interaktív adatkezelés


Feladatunk megoldásához mindösszesen 3 bázispontot használtunk fel. Ezek határozzák meg a többi pontok (metszéspontok) helyzetét. Ha ezek közül bármelyiket mozgatjuk, akkor láthatjuk, miként változik az ábránkon a kör és az érintőegyenesek helyzete.

Euklides

Az objektumok mozgatásához tegyük aktívvá az  ikont. Ekkor, ha egy (mozgatható) objektum közelébe érünk, akkor az egerünk egy kis „kezet” ábrázol. Így jelezve nekünk, hogy az adott objektumot mozgatni tudjuk (az egér bal gombjának nyomva tartása mellett).


Körünk helyének változtatását a körvonal megfogásával tudjuk végrehajtani.

Cinderella

Nem csak a bázispontok mozgatására van lehetőségünk, bár ezek mozgatása az őket létrehozó objektumok miatt igen csak korlátolt, ezt a mozgást az  (elem mozgatása) ikon teszi lehetővé. Itt nem jelez számunkra az egér, hogy az adott pont mozgatható-e, vagy sem. A mozgást viszont ugyanolyan módon kell elvégezni, mint az Euklidesnél.

Újabb érdekességet vehetünk észre: ha körünket kerületi pont nélkül hozzuk létre, akkor is tudjuk változtatni a (sugár) méretét a körvonal mozgatásával.

Cabri

Változtassuk az s körünk méretét. Először ez nem tűnik lehetségesnek, hiszen nincs kerületi pontunk. De a méret változtatáshoz a Cabrinak nincs is szüksége rá. Az  ikon aktívvá tétele után, a körvonalat „megfogva” (melyet ugyancsak egy kis kéz jelöl) lehet változtatni. Körünk helyének megváltoztatásához a kör középpontját kell elmozdítani.

Geogebra

Ebben a programban is csak a bázispontok, objektumok mozgathatók, és a program jelzi is azokat, melyeket arrébb tehetünk.

A Cinderellánál és a Cabrinál a kör méretét akkor is tudjuk változtatni, ha nincs kerületi pontunk, ezért ha a kör helyzetét szeretnénk módosítani, akkor ezt csak a középpontjának áthelyezésével tudjuk megtenni. Az Euklidesnél a kör helyének változtatásához a körvonalat kell megfogni (kerületi pont nélkül). A Geogebra-ban, ha nincs a körnek kerületi pontja, akkor a méretét csak úgy tudjuk megváltoztatni, ha a helyi menüben újradefiniáljuk a sugár hosszát, a kör áthelyezése a középpontjának mozgatásával történik (bázispont).



Cinderella mindkét módszert alkalmazza (attól függően, hogy van-e kerületi pontunk).


II. Parabola szerkesztése

LÁSSUK, HOGYAN IS TUDUNK MEGJELENÍTENI EGY PARABOLÁT, HA ADVA VAN A FÓKUSZA ÉS VEZÉREGYENESE.

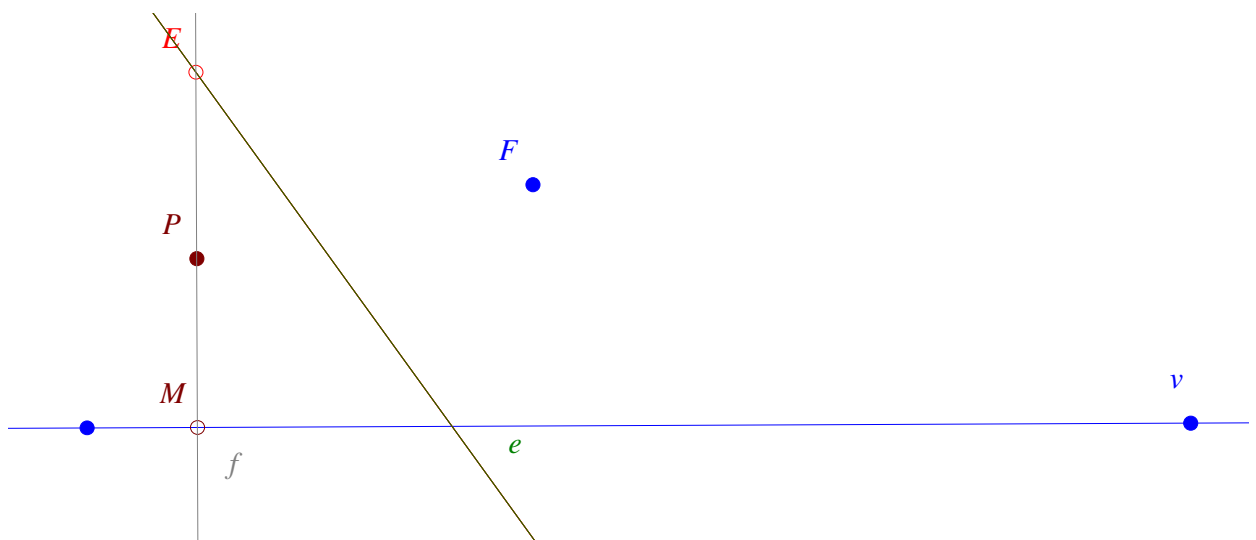
Euklides


Vegyük fel az F fókuszpontot, valamint a v vezéregyeneset, továbbá egy tetszőleges P pontot (ne illeszkedjen a v vezéregyenesre!), majd „vetítsük” a v egyenesre.

A vetítés  a transzformációk menüben helyezkedik el, melyet az aktuális ikonja  melletti nyitó nyílra kattintva érhetünk el. A funkció bekapcsolása után meg kell adnunk a vetíteni kívánt pontot (P), majd az objektumot, amire vetíteni akarjuk (v). A vetített pontot (M) úgy jelöli, mint egy metszéspontot.

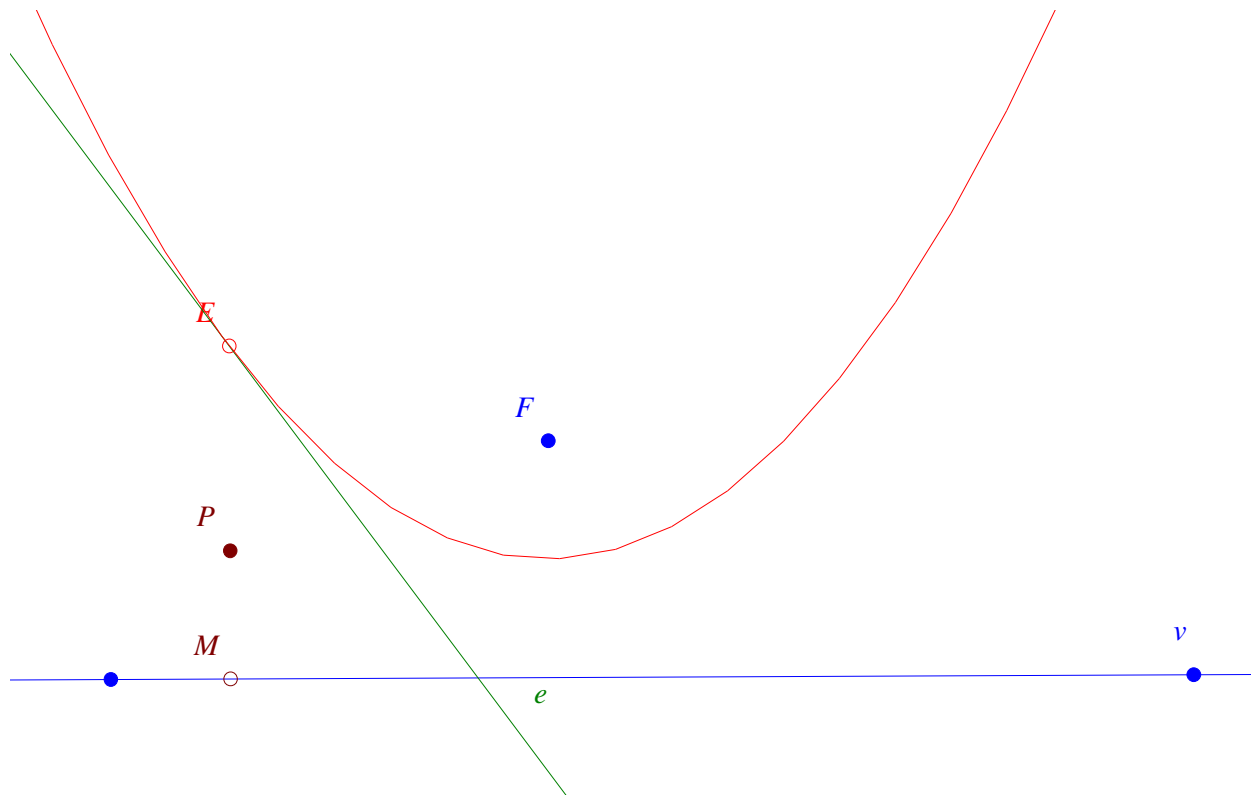
Hozzuk létre az M és F pont szakaszfelező merőlegesét, mely a parabola érintő egyenese lesz. Ehhez válasszuk ki az *egyenese* menüből az  ikont. Megadva a képzeletbeli szakasz végpontjait, létrehozza annak szakaszfelező merőlegesét. Jelöljük e -vel.

Az érintési pont meghatározásához állítsunk merőlegest az M pontba. Legyen ennek a merőleges egyenesnek a neve f . Az e és f egyenesek metszéspontja lesz az érintési pont (E).

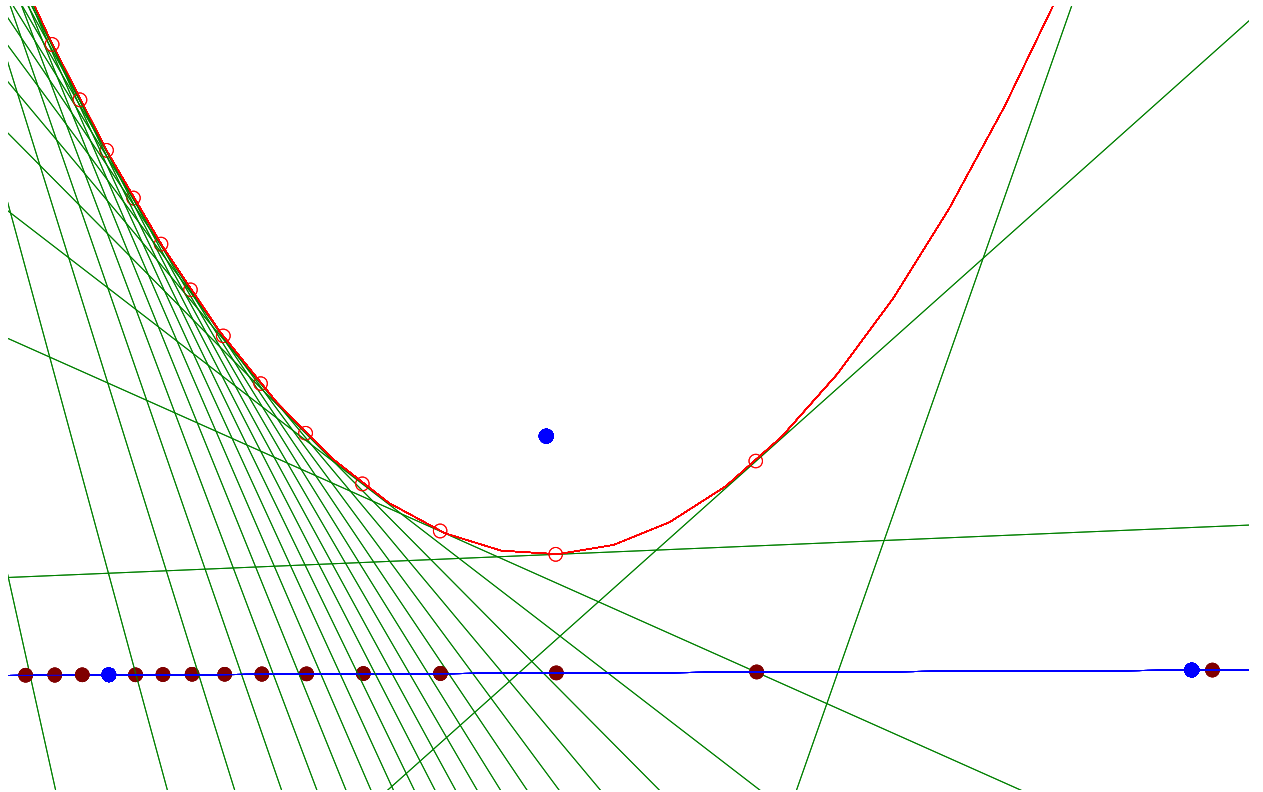


Ha mozgatjuk a P pontot, akkor láthatjuk, hogy az E érintési pont a képzeletbeli parabola ívét rajzolja le. Hogy ezt az ívet lássuk is, kövessük az E pont mozgását. Ehhez tegyük aktívvá a *Nyomvonal* nevű  ikont. Az állapotsoron lévő egyértelmű

instrukciókat követve, vagyis megadva a P pontot, mely a v vezéregyenesen fut végig és közben mutatja az E pont nyomvonalát, láthatjuk a parabolánkat.





Kétkedésünk eloszlatására, hogy az e egyenes valóban érintője a parabolának, animáljuk az ábránkat. A felső menüsorból válasszuk ki az *Animáció/Animáció beállítása* menüpontot! Megadva a mozgatni kívánt P pontot, valamint az e egyenest, melyen majd futni fog, máris láthatjuk a látványos animációt. Ez a verzió már képes a fázisok egyidejű mutatására is, melyet az *Animáció/Fázisok egyidejű mutatása* menüponttal érhetünk el.






Így már valóban látható állításunk helyessége.

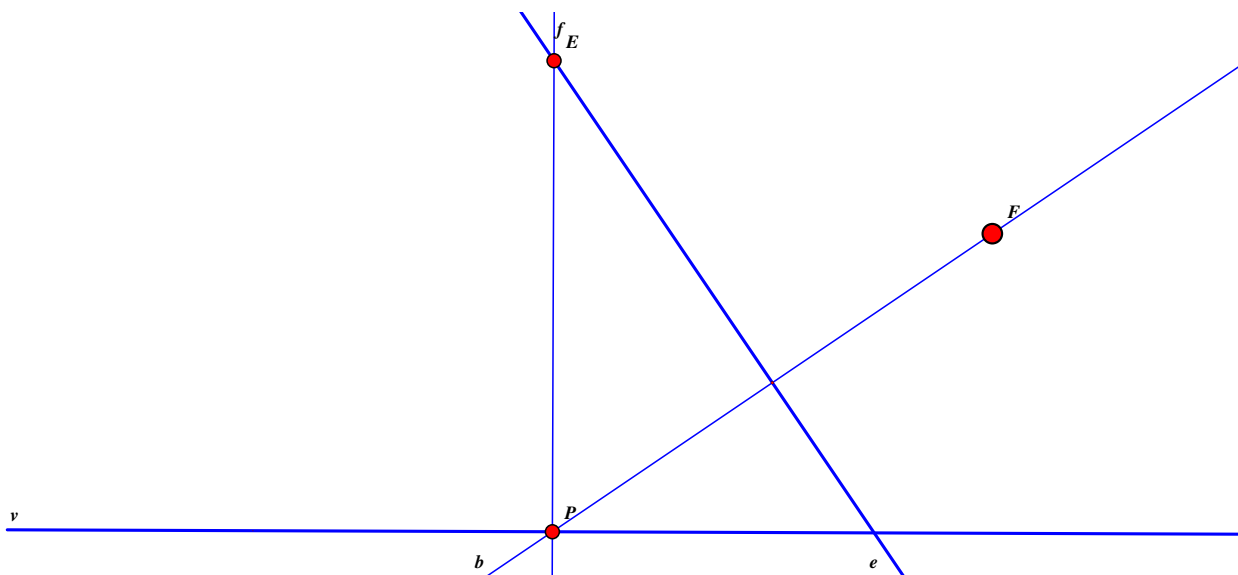
Cinderella


„Rajzoljuk” meg a v vezéregyenesét az  ikon segítségével. Az F fókusz pontot az  ikon aktiválása után hozhatjuk létre.


A Cinderellával nincs lehetőségünk vetítésre, de mégis tudunk pontot illeszteni objektumra. A létrehozott P pontot egyszerűen mozgassuk a v egyenesre, melyre való illeszkedését az egyenes kijelölésével láthatjuk.

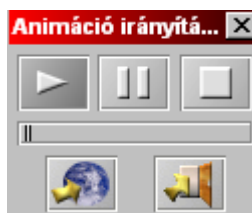
Hiányossága a programnak, hogy nem tudunk szakaszfelező merőleget szerkeszteni egy lépésben, az Euklidessel szemben. Egyenesre viszont tudunk merőleget állítani. Hozzuk létre a (PF) egyenest az előbbi módszerrel. Adjuk meg e két pont felezőpontját a már ismert  eljárással. A felezőpontra már megtudjuk szerkeszteni az e merőleges egyenest az  ikon segítségével. Hozzuk létre az f merőleges egyenest is.

Az E metszéspont létrehozásához tegyük aktívvá a  ikont és adjuk meg a metsző e és f egyeneseket.







A nyomvonal létrehozásához kattintsunk az  ikonra. Hasonló módon, mint az Euklidesnél, adjuk meg a P pontot, (a v vezéregyenest nem kell megadni, mert a P pont illeszkedik rá és rajta fog futni) valamint az E pontot, melynek nyomvonalára vagyunk kíváncsiak. Már is láthatjuk a parabolánkat.


Animálásra itt is van lehetőségünk melyet az  ikon teszi lehetővé. Az animációhoz elegendő csak a futópontunkat (P) megadni. Lejátszás közben megjelenik egy vezérlő menü, melyben elindíthatjuk, leállíthatjuk, szüneteltethetjük az animációnkat és a sebesség mértékét is beállíthatjuk vele.




Cabri


A v vezéregyenes felvételét a már ismert módon  végezzük el. Az F fókusz pont megadását az  ikon aktiválása után hajtsuk végre. A vetítést hasonlóan oldja meg, mint a Cinderella. A *Pont rajzolása* menüből válasszuk ki a *Pont az alakzaton*  funkciót, majd az egyenesre mutatva (ahol segítségként szöveggel is tájékoztat minket róla) kattintsunk rá. Ekkor létrehozta nekünk a P pontot, mely illeszkedik a v vezéregyenesre.

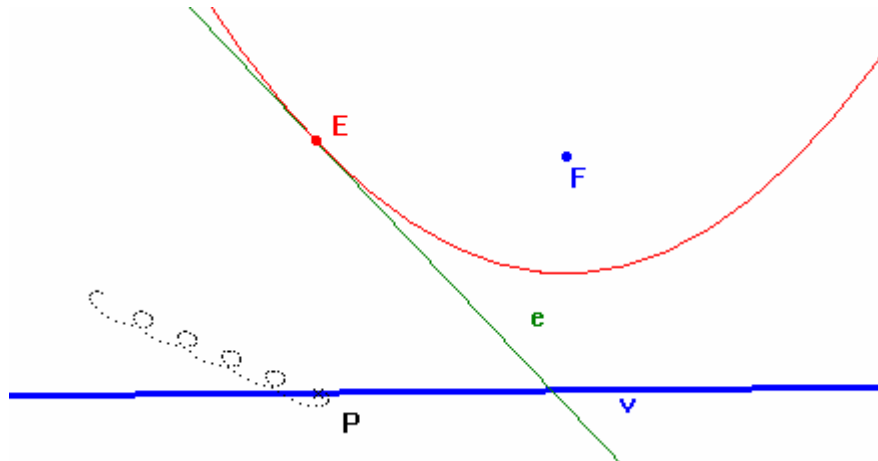
Az F , P pont által meghatározott képzeletbeli szakaszfelező merőleget a Szerkesztés menüből érhetjük el *Felezőmerőleges*  néven. Megadva a „szakasz” végpontjait, létrehozza a felezőmerőlegesét. A P pontba állított merőleges egyenest, ugyancsak a szerkesztés menüből érhetjük el.

Az E érintési pontot (metszéspontot) az  ikon aktiválása után hozzuk létre.

A nyomvonal létrehozásához kattintsunk a *Szerkesztés* menü *Mértani hely*  menüpontjára. (Figyelemre méltó, hogy a mértani helyet jelző ikon épp egy parabolát ábrázol!)

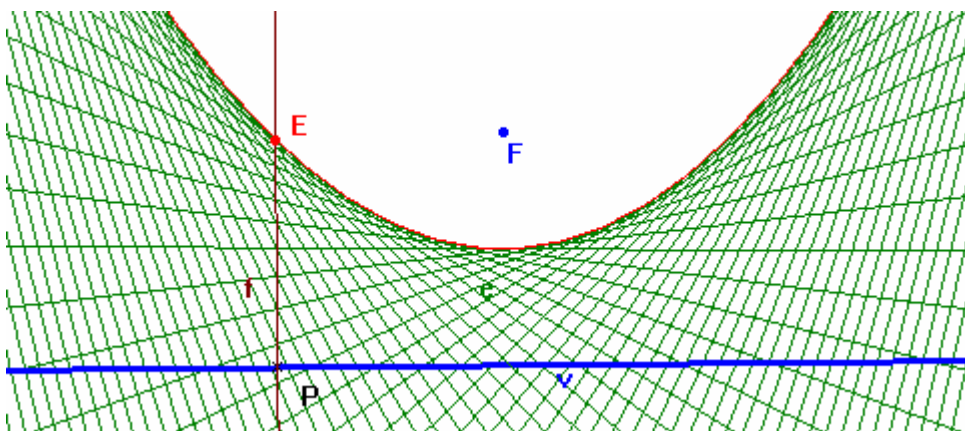
Az előző programokhoz képest itt fordítva kell megadni a mozgó és követett pontot. Először az E pontot kell megadni (melynek nyomvonalát akarjuk látni), majd a P pontot kell még megadnunk (amelynek mozgása során változni fog az E érintési pont helyzete). Ezek után megrajzolja nekünk a parabolát.

Az animáció funkciót a *Tulajdonságok* menüből érhetjük el, melyet az  ikon jelöl. Az animáció elindítását ez a program egészen egyedi módon valósítja meg. Egy kis játékosságot visz bele. Miután aktivizáltuk az animációt, kattintsunk rá a P pontra, majd a gomb nyomva tartása mellett mozgassuk el a mutatót. Mozgatás közben láthatjuk, hogy egy „rugót” húzunk a ponttól. Ennek elengedése után a „feszítés” irányával ellenkezőleg fog elmozdulni a pontunk (csak akkor, ha nincs vetítve valamilyen objektumra). Mintha egy biliárddáköval ütnénk meg, melynek ereje (animáció sebessége) a ponttól mért távolságtól függ.



Itt is van lehetőségünk az animáció fázisainak mutatására, de az Euklides-szel szemben itt mozgás közben láthatjuk mindezt, ami nagyobb élményt ad szemünknek. Ehhez aktívvá kel tennünk a *Tulajdonságok/Nyomkövetés Ki/Be* funkciót. Ekkor az eszköztáron egy „pipa” jelű ikont látunk . Ekkor meg kell adnunk azt az objektumot, melynek mozgását követni akarjuk. Esetünkben ez az *e* egyenes, kattintsunk rá. A szaggatott vonal futása jelzi a kijelölését. Ezek után válasszuk ki az animálás funkciót, és „lökjük el” a *P* pontunkat.

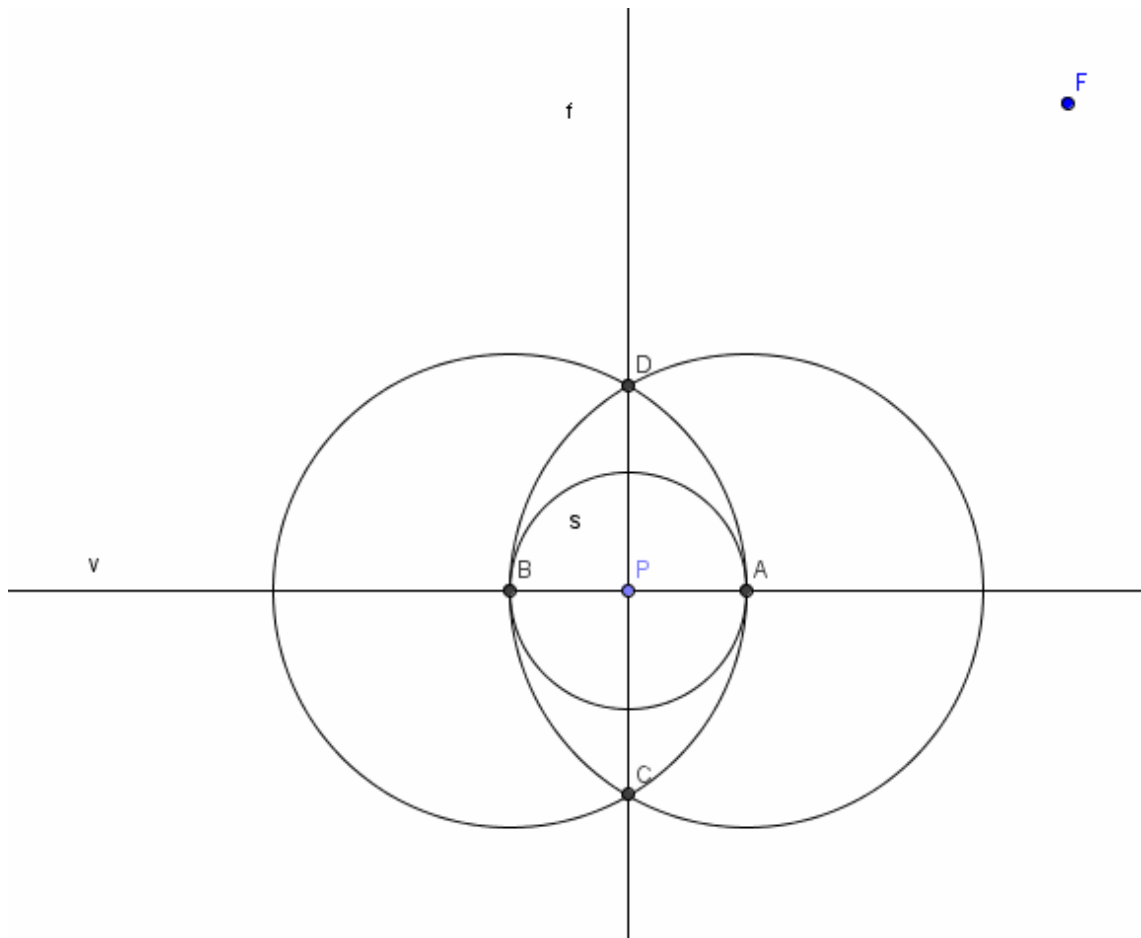
Ha hagyjuk futni, akkor egy ilyen szép ábrát kapunk:



Geogebra

Vegyük fel az F pontot a v vezéregyenesest. Nagyon fontos, hogy a P pontot a vezéregyenesen vegyük fel, mert ellenkező esetben nem tudjuk majd létrehozni a mértani helyet. Állítsunk merőlegest a v egyenesre a P ponton keresztül. Bár ez a program is rendelkezik ilyen eszközzel de ennél a szerkesztésnél a merőleges szerkesztését hagyományosan euklideszi módon végezzük el. Nagy előnye a programnak, hogy ha a kört a sugarával adjuk meg akkor a sugár mértékét nem megmutatni kell az egérrel, hanem a megjelenő párbeszédablakba beírni (mint ahogy ezt már korábban említettük).

Szerkesszünk egy kört melynek a középpontja P , meghatározzuk a metszéspontjait v -vel. Ezek legyenek A és B , valamint a kör s , ezt követően további két körre lesz szükségünk, melyek sugarának meg kell egyezniük és hosszabbnak kell hogy legyen, mint az s kör sugara, ezek középpontja az A és B pontok lesznek. A két kör metszéspontjait összekötve megkapjuk az f egyenest, mely merőleges v -re.

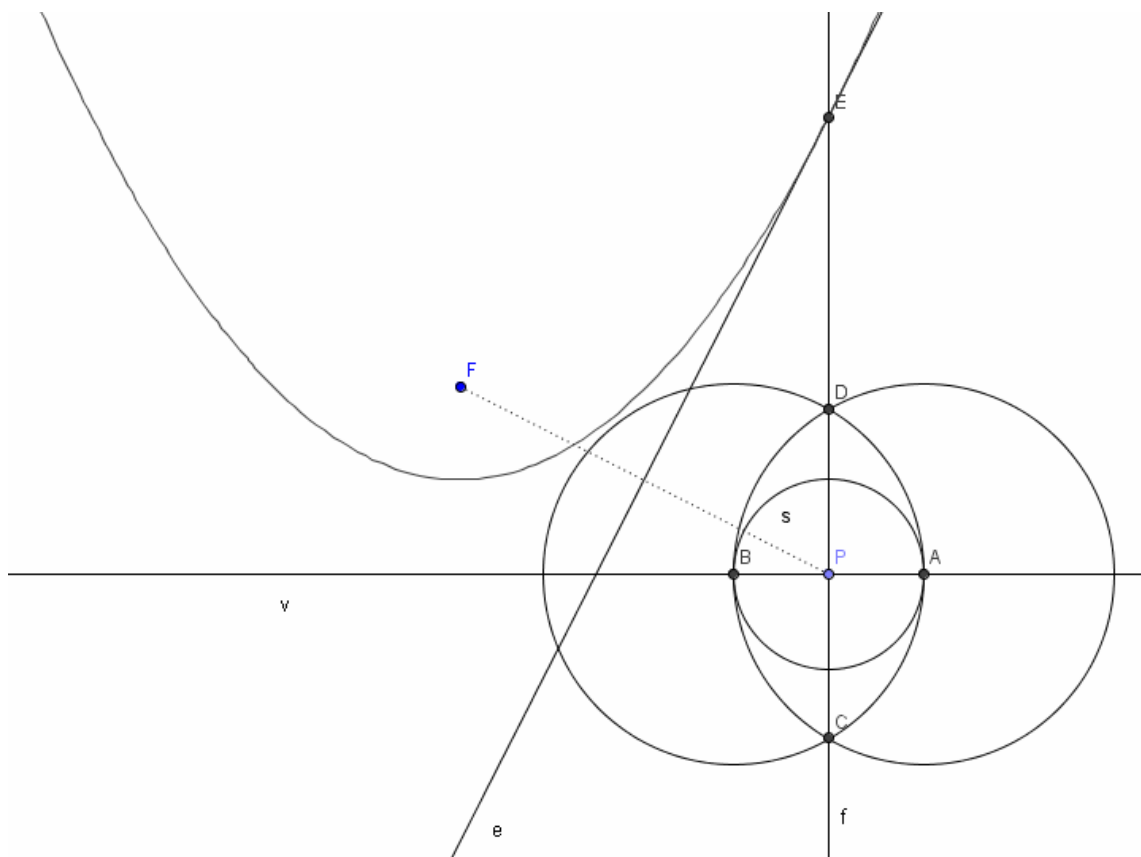


A többi lépést a program lehetőségeit kihasználva hajtjuk végre. Összekötjük az F pontot a P ponttal és megszerkesztjük az FP szakasz felezőmerőlegesét, e -t. Meghatározzuk az e és az f egyenesek metszéspontját E -t.

Ezután a mértani helyre kattintunk. Ki kell jelölni egy E pontot, amelynek a mértani helyére kíváncsiak vagyunk. Azután ki kell választani azt a P pontot, amelytől függ az E . Fontos, hogy a P pontnak illeszkedni kell egy alakzatra, jelen esetben egy szakaszra.

Ebben a programban sajnos nincs lehetőségünk animáció létrehozására.

Nézzük hát a szerkesztés eredményét:








III. Transzformációk

Az egyik transzformációt, mellyel foglalkozunk, nem tartalmazza a középiskolai tananyag. A többi transzformációtól való eltérő tulajdonságai miatt igen érdekes lehet a diákok számára egy- két példa bemutatása.

Ez a transzformáció az inverzió.

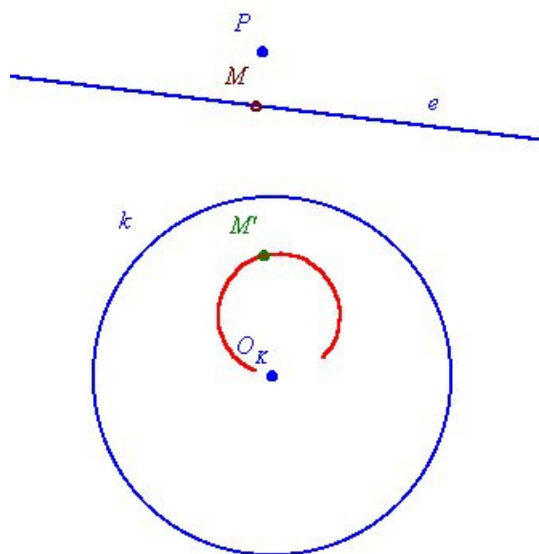
Euklides

Az Euklideszben több transzformációt elvégezhetünk néhány kattintással. A következő transzformációkat alkalmazhatjuk még: *Tengelyes tükrözés* , *Középpontos tükrözés* , *Eltolás* , *Elforgatás* , *Inverzió* .

1. Inverzió

Nézzük meg mi lesz az inverz képe egy egyenesnek!

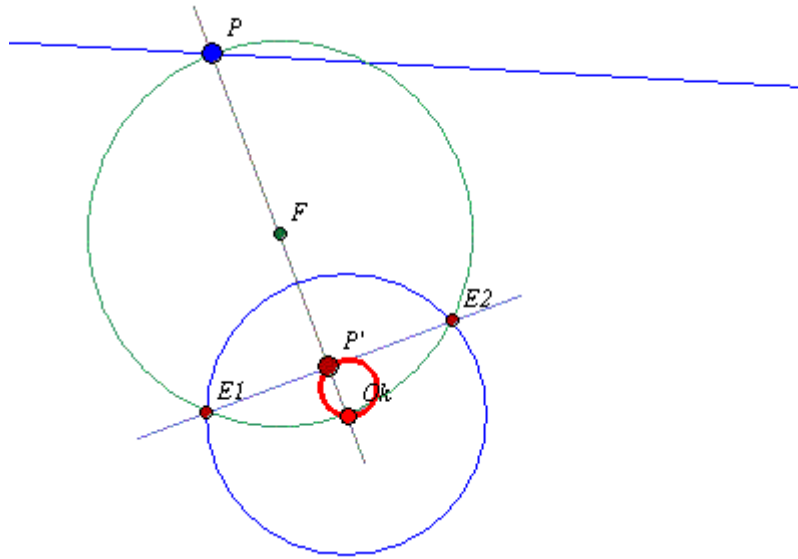
Hozzunk létre egy egyenest (e) és egy kört (k) – ne messék egymást –, majd egy tetszőleges P pontot vetítsünk (M) az e egyenesre. Ahhoz, hogy láthassuk az egyenesünk inverzét, invertálnunk kellene az „összes” pontját. Egy pontjának (M) inverzét hozzuk létre. Megadva az invertálni kívánt pontunkat, és az inverzió alapkörét (k), a program „megszerkesztette” nekünk az M' inverz pontot. Ahhoz, hogy lássuk az egyenes minden pontjának inverzét, kövessük egy egyenesbeli pont inverzének nyomvonalát! Hozzuk létre az M' pont nyomvonalát! Ekkor már láthatjuk, hogy az egyenesünk inverzének a képe egy, az inverzió pólusán átmenő kör (mely esetünkben teljes egészében a k kör belsejében helyezkedik el).



A nyomvonalunknak természetesen folytonosnak kell lennie, de amint láthatjuk, „el van szakadva”. Ez a program hiányossága. Ez a probléma még akkor is jelentkezik, ha úgy változtatjuk az egyenesünk helyzetét, hogy az inverz képe növekedjen. Ekkor ugyanis a nyomvonalunk nem csak „szét van szakítva”, hanem el is kezd négyszögesedni.

Cinderella


A Cinderellában nincs beépítve az inverzió szerkesztése, így szerkesztenünk kell. Felvéve az adatokat (e, k) , „tegyük” a P pontunkat az e egyenesre. Szerkesszük meg az érintési pontokat a P pontból, majd nevezzük el azokat $E1, E2$ -nek. A P pont inverze az $(E1, E2)$ egyenes (!), és az (OK, P) egyenesek metszéspontja lesz, jelöljük ezt a pontot P' -vel. Hozzuk létre a P' pont nyomvonalát!



Itt nem jelentkezik semmilyen probléma a nyomvonal ábrázolásában.

Cabri

Itt megtalálhatjuk ugyanazon transzformációkat, mint az Euklides-ben, sőt kiegészítve egy *Nyújtás* transzformációval.

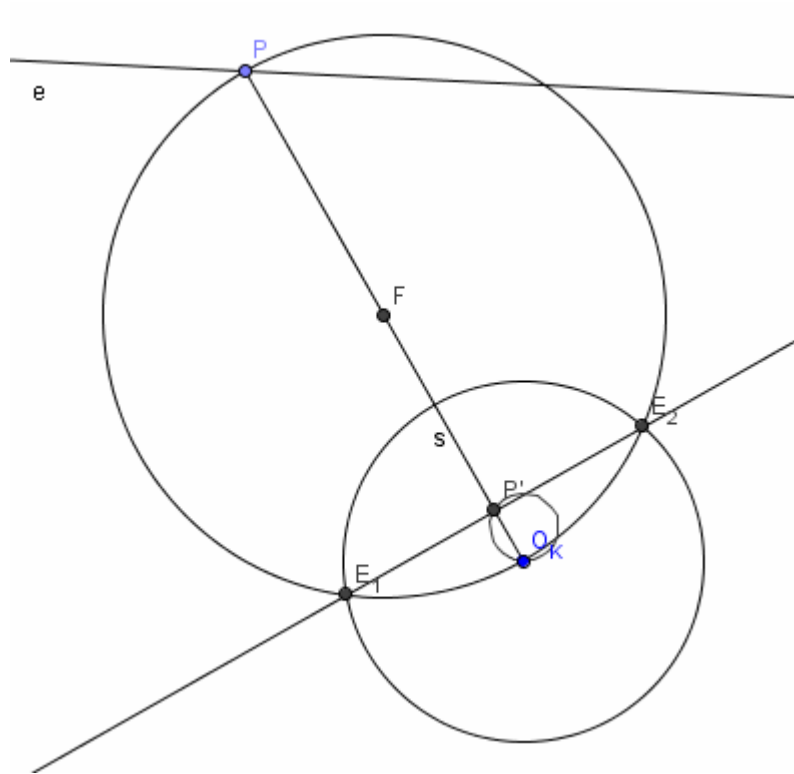
Adataink felvétele után aktiváljuk a „Pont az alakzaton” funkciót, és hozzuk létre a P pontunkat. Majd invertáljuk  a k körre. A nyomvonal létrehozásakor észrevehetjük, hogy a P' pont mozgásakor nem vonalat húz maga után, hanem a pont helyzetét rögzíti folyamatosan.

Geogebra

Ebben a programban is megtalálható az összes transzformáció, kivéve az inverziót.



A Cinderellánál már leírt módon megszerkesztve a P pont inverzét jól látható, hogy itt sem tökéletes a nyomvonal által leírt kör.



2. Eltolás

ROMBUSZ SZERKESZTÉSE ÉS ELTOLÁSA


A rombusz egyik szöge 60° , az oldala pedig tetszőleges hosszúságú.

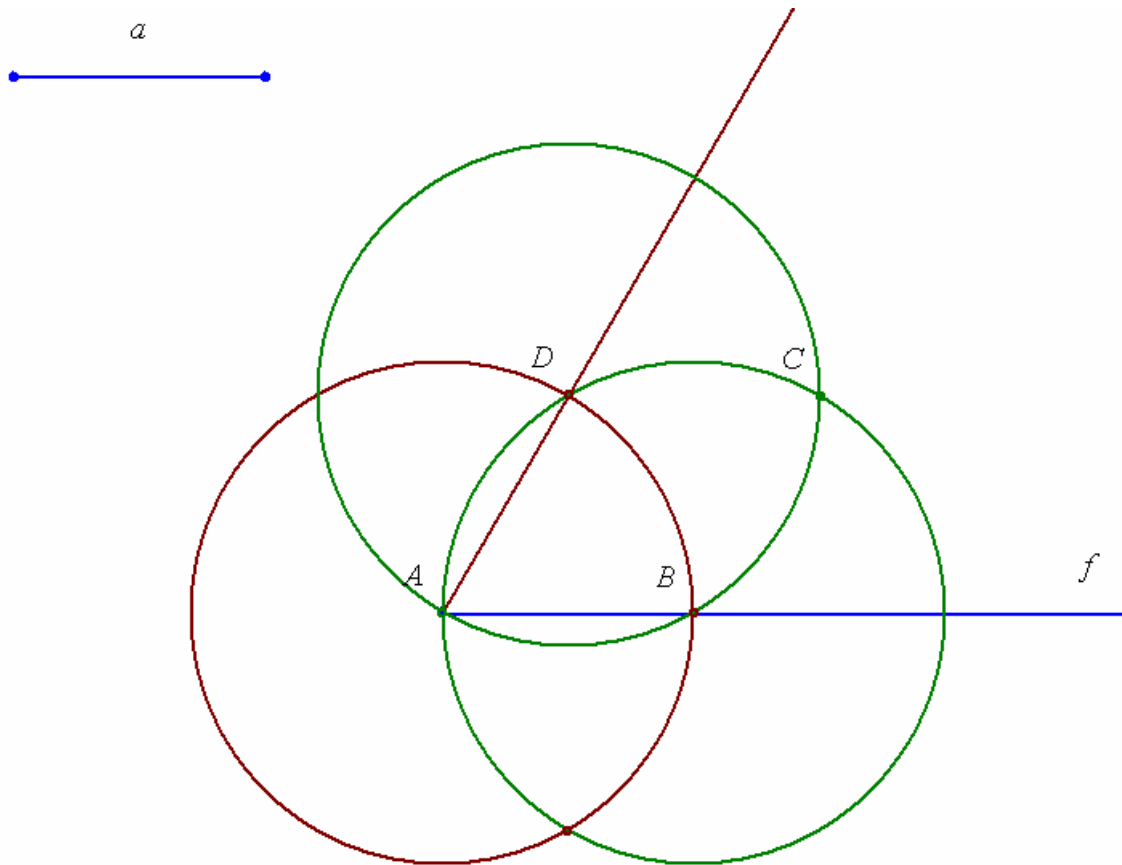
Az eltolás a Cinderella kivételével mindegyik programban megtalálható, mint beépített transzformáció, és ugyanez a helyzet a vektor megadásával is. A szögek mértékének konkrét megadására csak a Geogebra kínál lehetőséget, de egy kis ügyeskedéssel a Cinderellában is megtudjuk határozni a szögeket szerkesztés nélkül is.

Az első lépésünk egy szakasz felvétele (a), mely későbbiekben a rombusz oldalhossza lesz. Ezt követően felvesszünk az A kezdőpontú félegyenest és felmérjük rá az oldal hosszát. Ez a pont lesz a B, ezt követően a szakasz valamely végpontjánál (a mi esetünkbe A) megszerkesztjük a 60° -os szöget. Az általa alkotott félegyenesre felvesszük az a hosszát. A metszéspont lesz a D, ezt követően körívezünk (teljes kört rajzolunk mivel nem tudjuk megadni pontosan hol is lesz a két kör metszéspontja) a D és B pontokból az a hosszal, és a metszéspont lesz a C pont.

Ezután felvesszük az eltolás vektorát \underline{v} , párhuzamosokat szerkesztünk vele az A, B, C, D pontokon keresztül, és felmérjük a \underline{v} vektor hosszát a félegyenesekre. Így rendre megkapjuk az A', B', C', D' pontokat, melyek meghatározzák az eredeti rombusz \underline{v} vektor által eltolt képét.

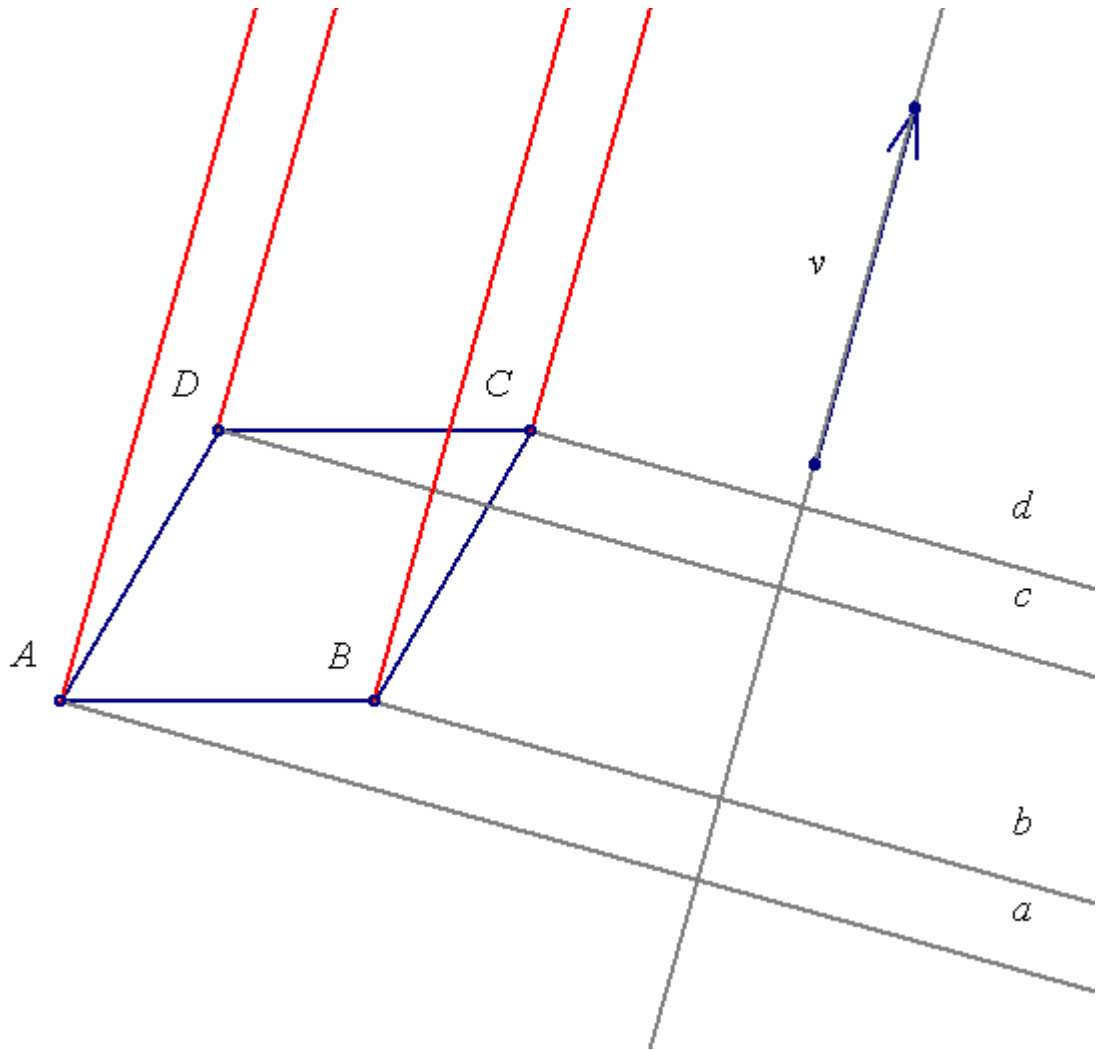
Euklides



Jól látható a következő ábrán, hogy a szerkesztés egyszerűbbé tételének érdekében, a 60° -os szög megszerkesztéséhez egy a oldalú kört használtunk, így egy távolság felmérését elhagyhattuk. A rombusz megrajzolásához használhatjuk a már megismert szakasz eszközt, de ekkor minden pontra kétszer kell kattintanunk. Helyette a  poligon eszközt fogjuk használni, melynek a lényege, hogy addig köti össze a program a pontokat, amíg nem találkozik a kiindulási ponttal.



A rombusz megszerkesztése után következik az eltolás. A \underline{v} vektorral párhuzamos egyeneseket (elegendő félegyeneseket) szerkesztünk.

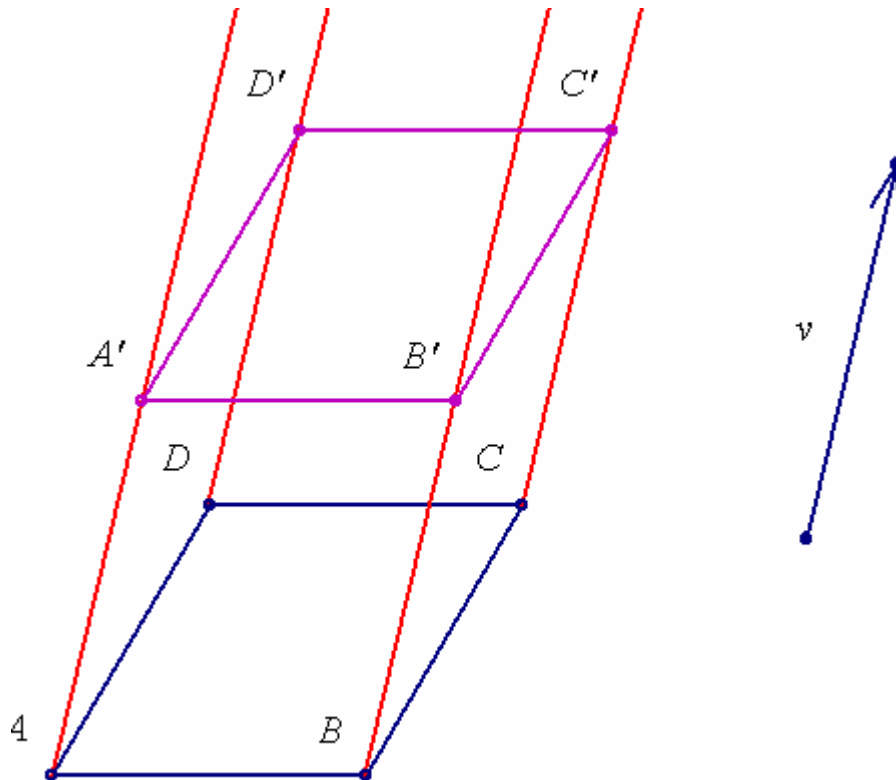
Ezt papíron úgy oldanánk meg, hogy meghosszabbítanánk a \underline{v} vektort és a rombusz csúcsaiból merőlegest állítanánk erre a vektorra. Ezeket az egyeneseket elneveznénk rendre a, b, c, d egyeneseknek és ezt követően ezekre az egyenesekre merőlegest állítanánk a hozzájuk tartozó pontokból.




Természetesen ennél sokkal egyszerűbb, ha a beépített  párhuzamos egyenest, vagy  párhuzamos félegyenest választjuk.

Ezután körívezünk a rombusz csúcaiból a \underline{v} vektor hosszával, és a metszéspontok meghatározzák az A' , B' , C' , D' pontokat.

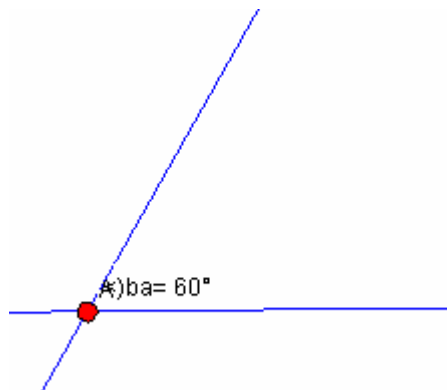
Nagyon jól szemléltethető a diákoknak, hogy a vektor hosszának és irányának változtatásával hogyan változik a rombusz képe.



Cinderella

Ebben a programban a kör sugarának a megadása történhet párbeszédablak, illetve körző  segítségével. A körzővel történő megadás esetében meg kell adni a kör sugarát egy szakasz két végpontjának segítségével, valamint a kör középpontját. Érdekessége a programnak, hogy nem lehet félegyenest szerkeszteni. Egy különleges lehetősége a programnak a mérés, ezt kihasználva könnyedén szerkeszthetünk 60° -os szöget.

Felvesszünk két egymást metsző egyenest, meghatározzuk a metszéspontjukat. Megmérjük az általuk bezárt szög mértékét, és az egyeneseket alkotó bázispontok segítségével könnyedén megtudunk határozni bármekkora szöget.



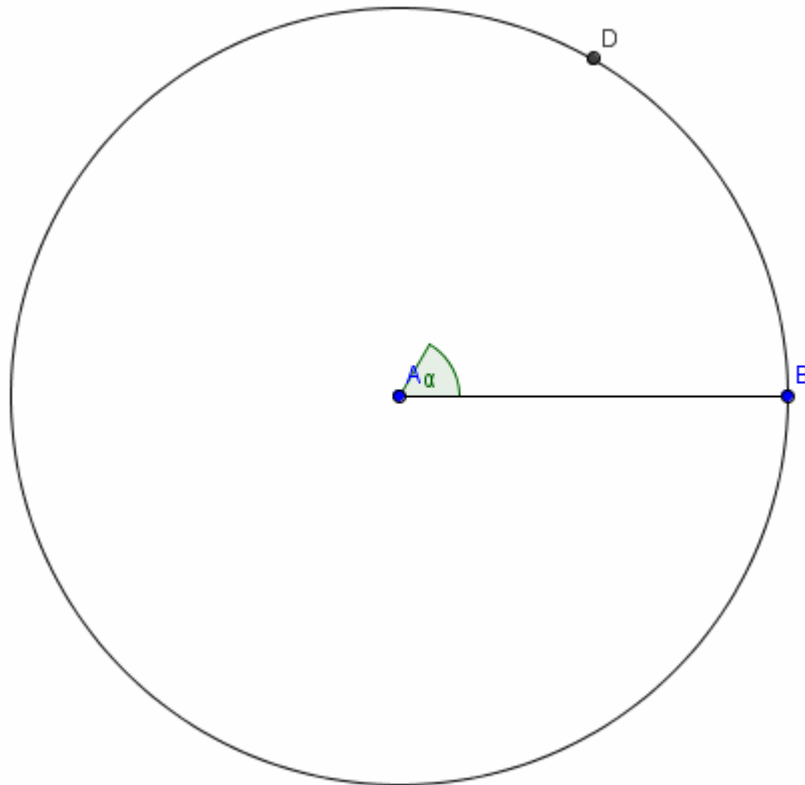
Cabri

A szögmérés és a körző eszközök használata megegyezik a már leírtakkal.

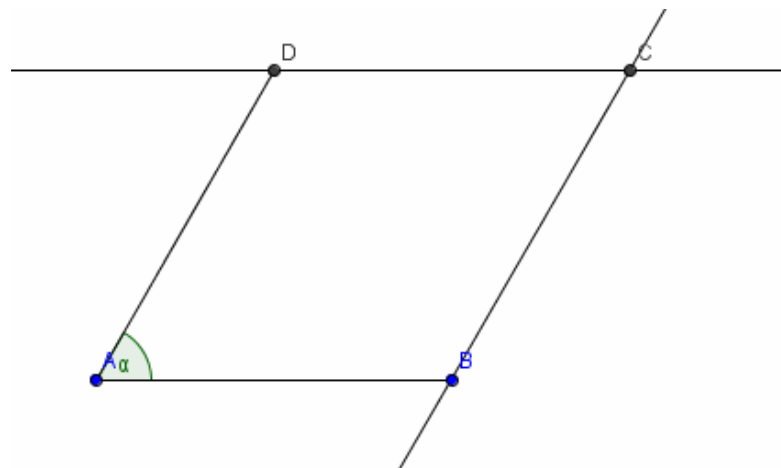
Geogebra





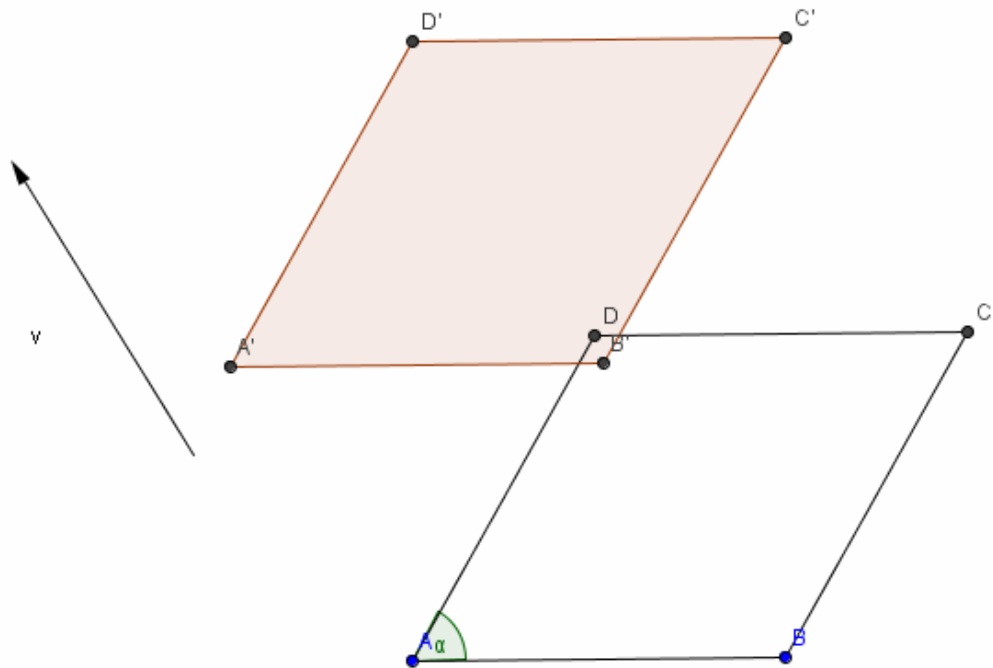
Felvesszük az AB szakaszt. Ezután kiválasztjuk a szög adott mérettel eszközt, megadjuk a 60° -ot. Ezt követően megjelenik egy pont melyre igaz, hogy ugyanolyan távol van az A ponttól mint a B pont, ez lesz a D pont.



Összekötjük az A és C pontokat. Ezután csak a negyedik pont meghatározása van hátra. Ehhez most kihasználjuk azt, hogy a rombusz oldalai párhuzamosak egymással, és így meghatározzuk a C pontot.



Ezt követően a beépített eszköz segítségével ( eltolás vektorral) pillanatok alatt meghatároztuk a képpontokat. Majd az Euklidesben megismert polinom itteni megfelelőjével ( sokszög) összekötöttük a pontokat.



Jól érzékelhető, hogy a beépített eszközök használatával sokkal gyorsabban és könnyebben szerkesztettük meg az alakzatot és a képét.

Összegzés

E néhány példa bemutatása során remélem, mindenkinek sikerült kialakítani egy képet magában a négy szoftverről. Nem lehet eldönteni, melyik jobb vagy rosszabb, melyik használhatóbb az oktatásban, mert mindegyik program rendelkezik olyan tulajdonságokkal, melyek egyediek – gondoljunk csak a Cinderella látványos megoldásaira. Remélem, az olvasónak sikerült egy olyan képet alkotnia a programokról, mely segíthet egy-egy feladat órán való megoldásához, a leginkább megfelelő program kiválasztásában. Természetesen e vizsgálat nem tartalmazza az összehasonlítás teljes egészét, de megpróbáltam a legszembetűnőbb különbségeket megmutatni.

Egyénileg tovább ismerkedve a szoftverekkel, igen érdekes tulajdonságokat és további különlegességeket ismerhetünk meg. Rendszeres használat során már észre sem vesszük hogy „tanulunk”, csak azt, hogy jó dolgozni velük. A szakdolgozatom záró gondolataként megállapíthatom, hogy ezek a szoftverek is arra valók, mint bármely más szoftver:

Megkönnyítik a munkánkat!

IRODALOMJEGYZÉK

A témában nem találtam szakirodalmat, így a programok súgóját, weboldalát használtam a programok megismeréséhez és bemutatásához.

A programok megtalálhatók az alábbi címeken, az euklides pedig az origó szoftverbázisában. <http://www.origo.hu/szoftverbazis/multimedia/oktato/euk20ins.html>

- cinderella.de
- www.cabri.com
- www.geogebra.org