Egyetemi doktori (PhD) értekezés tézisei

Parallelisms and Finsler structures

Aradi Bernadett

Témavezető: Dr. Szilasi József egyetemi docens

Debreceni Egyetem
Matematika- és Számítástudományok Doktori Iskola
Debrecen, 2015.

1. Előzmények, motiváció és célkitűzések

Euklidész V. posztulátumával kezdődően, a párhuzamosság fogalma és az ezzel kapcsolatos vizsgálatok kulcsszerepet játszottak a klasszikus geometria, majd később a differenciálgeometria – és általában az egész matematika fejlődésében. Azt is túlzás nélkül elmondhatjuk, hogy e vizsgálatok nélkül elképzelhetetlen a modern fizikai térelméletek létrejötte. Értekezésünk a párhuzamosság bizonyos differenciálgeometriai aspektusaival foglalkozik.

Motiváló példaként tekintsük az $\mathbb{R}^n$ n-dimenziós euklideszi teret. Ennek egy p pontbeli u és egy q pontbeli v érintővektorát – némi pontatlansággal – akkor mondjuk párhuzamosnak, ha u, v és a támadáspontjaikat összekötő szakasz egy paralelogramma három oldalát alkotja. Precíz megfogalmazásban: egy $u \in T_p\mathbb{R}^n$ és egy $v \in T_q\mathbb{R}^n$ érintővektort párhuzamosnak nevezünk, ha van olyan X konstans vektormező $\mathbb{R}^n$-en, hogy $X(p) = u$, $X(q) = v$. A lényeg itt az X vektormező konstans volta. Ez azt jelenti, hogy X megkapható az $(E_i)_{i=1}^n$ természetes n-élmező $\mathbb{R}$-*lineáris* kombinációjaként. (Emlékeztetünk rá, hogy $E_i(p) := (p, e_i)$; $(e_i)_{i=1}^n$ az $\mathbb{R}^n$ vektortér kanonikus bázisa.)

Tetszőlegesen választott $\mathbb{R}^n$-beli p, q pontok esetén legyen

$$\mathsf{P}_0(p,q)\colon T_p\mathbb{R}^n \to T_q\mathbb{R}^n,\ v \mapsto \mathsf{P}_0(p,q)(v) := X(q),$$

ahol X az a konstans vektormező $\mathbb{R}^n$-en, amelyre $X(p) = v$ teljesül. Ekkor érvényesek a következők:

(P_1) $\mathsf{P}_0(p,q) \in L(T_p\mathbb{R}^n, T_q\mathbb{R}^n)$, azaz $\mathsf{P}_0(p,q)$ lineáris leképezés a $T_p\mathbb{R}^n$ és a $T_q\mathbb{R}^n$ vektortér között.

(P_2) $\mathsf{P}_0(a,a) = 1_{T_a\mathbb{R}^n}$ és $\mathsf{P}_0(a,q)\circ\mathsf{P}_0(p,a) = \mathsf{P}_0(p,q)$ tetszőleges $a,p,q \in \mathbb{R}^n$ pontok esetén (*konzisztencia*).

(P_3) Megadva egy $v \in T_p\mathbb{R}^n$ érintővektort, az

$$\mathbb{R}^n \to T\mathbb{R}^n,\ q \mapsto \mathsf{P}_0(p,q)(v)$$

leképezés sima, és így vektormező $\mathbb{R}^n$-en (*simasági feltétel*).

Azt mondjuk, hogy a

$$\mathsf{P}_0\colon (p,q) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \mapsto \mathsf{P}_0(p,q) \in L(T_p\mathbb{R}^n, T_q\mathbb{R}^n)$$

leképezés az $\mathbb{R}^n$ euklideszi tér *természetes párhuzamosítása.*

Ez az egyszerű példa a következő axiomatikus megközelítést sugallja a párhuzamosság bevezetésére tetszőleges sima sokaságok általánosságában:

> Legyen egy M *sokaság abszolút párhuzamosítása* (vagy egyszerűen *párhuzamosítása*) *definíció szerint* lineáris leképezések egy olyan
>
> $$\mathsf{P}(p,q)\colon T_pM \to T_qM,\ (p,q) \in M \times M$$
>
> családja, amely eleget tesz a (P_2) konzisztencia- és a (P_3) simasági feltételnek.

Az *abszolút párhuzamosság* (németül „Fernparallelismus”) fogalmának ez az értelmezése tudomásunk szerint Werner Greub „Liesche Gruppen und affin zusammenhängende Mannigfaltigkeiten” című, 1961-ben publikált alapvető dolgozatában szerepelt először [19]. Greub dolgozatáéhoz hasonlóan fontosnak és inspirálónak találtuk Joseph A. Wolf egy 1972-ben két részletben publikált dolgozatát [54, 55]; ebben szintén a (P_1)–(P_3) feltételekkel van definiálva egy sokaságon az abszolút párhuzamosság fogalma. Az értekezésünkben alapul vett definíció a Greub–Halperin–Vanstone monográfiából [20, 21] származik, ahol a simasági feltételnek egy (P_3)-tól eltérő – de azzal ekvivalens – megfogalmazása szerepel. Itt jegyezzük meg, hogy az idézett monográfiában, problémák formájában, Greub említett dolgozatának több eredménye is megtalálható a vektornyalábok nyelvezetén megfogalmazva (a szükséges definíciók „lefordításával” együtt).

A párhuzamosság fogalmának a (P_1)–(P_3) axiómákon alapuló bevezetése rendelkezik egy komoly hátulütővel: a sokaságok többségének (mint például a páros-dimenziójú szféráknak) nemtriviális az érintőnyalábja, ezért nem adható meg rajtuk globális n-élmező – pedig az „abszolút párhuzamosság” és a „globális n-élmező” ugyanazon érem két oldala. Az abszolút párhuzamosítással ellátható sokaságok osztálya azonban még így is bőséges, hiszen például az összes Lie-csoport ebbe tartozik. Sőt, *minden* 3*-dimenziós irányítható sokaság párhuzamosítható* (ld. ezzel kapcsolatban Steenrod klasszikus művét [44], a modernebb megközelítést illetően pedig például a [43] dolgozatot).

Az abszolút párhuzamosság témájában az első jelentős munkát valószínűleg É. Cartan írta 1923-ban [8]. Ebben megmutatta, hogy (teljes) abszolút párhuzamosítás létezésének szükséges feltétele zérus görbületű konnexió létezése a sokaságon. A következő fontos lépéseket a párhuzamosított sokaságok finom struktúrájának feltárásában Cartan és Schouten tette meg [10, 11]. [10] dolgozatukban lapos konnexiók megadásával mutatták be abszolút párhuzamosság létezését Lie-csoportokon, a [11] dolgozatukban pedig lokális leírását és osztályozását adták azoknak a Riemann-sokaságoknak, amelyeken létezik a Riemann-struktúrával kompatibilis abszolút párhuzamosság. (A „kompatibilitás" itt azt jelentette, hogy a párhuzamosítás párhuzamos vektormezői konstans normájúak és az integrálgörbéik Riemann-geodetikusok.) J. A. Wolf észrevette, hogy Cartan és Schouten redukciós eljárásában vannak bizonyos hézagok. Ezeket már idézett [54, 55] dolgozatában rendbe tette, és egyben az elméletet kiterjesztette a pszeudo-Riemann esetre. Disszertációnkban továbblépünk az általánosítás irányában, és olyan párhuzamosított sokaságokat vizsgálunk, amelyek a párhuzamosítással kompatibilis (ill. erősen kompatibilis) Finsler-függvénnyel vannak ellátva.

Rövid történeti áttekintésünk zárásaként még egy fontos mozzanatot említünk. 1928-ban Einstein két dolgozatát is annak szentelte, hogy egy kompatibilis Riemann-metrikával ellátott párhuzamosított sokaságon kidolgozza a gravitáció- és elektromágnesesség egyesített elméletét [15, 16]. Érdekes ezzel kapcsolatban a következő, Eisenharttól vett idézet:

„Einstein nem tudott a szükséges matematikai ismeretek létezéséről, ezért maga fejlesztette ki őket. 'Az új egyesített térelmélet a következő matematikai felfedezésen alapul: létezik olyan, Riemann-metrikával és táv-párhuzamosítással ellátott, kontinuum, amely azonban nem euklideszi.' – mondta. Később feladta annak reményét, hogy ilyen alapon kielégítő elmélet dolgozható ki..." ([17], saját fordítás.)

Az élet azonban nem állt meg. Jelenleg is intenzív kutatások tárgya a párhuzamosított sokaságokon való gravitáció-elmélet, ill. egyesített térelmélet kiépítése. Kiderült többek között, hogy maga a klasszikus általános relativitáselmélet is átírható az abszolút párhuzamosságok vagy „telepárhuzamosságok" nyelvére, lásd pl. [5, 25, 33]. Ami talán még érdekesebb: van némi remény az ún. sötét energia rejtélyének megértésére a párhuzamosított sokaságokon alapuló térelmélet keretei között.

A párhuzamosított sokaságok irodalma igen gazdag. Igaz ez akkor is, ha eltekintünk a finom és mély differenciáltopológiai vonatkozásoktól, amelyeket értekezésünkben nem érintettünk. A források bőségének dacára, az általunk vizsgált kérdésekben nem találtunk olyan átfogó munkát (monográfiát vagy tankönyvet), amelyet egységes referenciaként használhattunk volna. Lépéseket téve egy ilyen feldolgozás irányába is, az értekezés 2. fejezetében megkíséreltük a párhuzamosított sokaságok *geometriájának* egy szisztematikus felépítését adni, és a szereplő – többnyire egyszerű – eredményeket teljes bizonyításukkal együtt bemutatni. Ily módon ez a fejezet különösebb eredetiségre nem tarthat számot, még sincs azonban minden újdonság nélkül. Kiemeljük ezek közül egy párhuzamosítás *csatolt Ehresmann-konnexió*jának bevezetését, amelynek birtokában közvetlenül jutunk a csatolt spray-hez. A párhuzamosítás fogalmának természetes gyengítése a *lefedő párhuzamosítás* (amely már minden sokaságon létezik); hasznosságára a 3. fejezetben derül fény. Disszertációnkban egy meglehetősen szofisztikált új fogalom a *konform-konjugált párhuzamosítások* fogalma. Ennek segítségével sikerült az értekezés 3. fejezetében elegendő feltételt találnunk arra, hogy egy Finsler-sokaság ún. Wagner-sokaság legyen.

2. Az értekezés tartalma és új eredményei

A könnyebb olvashatóság érdekében először is megadjuk az értekezésben gyakrabban alkalmazott jelölések egy rövid listáját.

(i) Az „M” végig egy n-dimenziós sima sokaságot jelöl, $C^\infty(M)$ az M-en értelmezett valós értékű sima függvények algebrája, $\mathrm{Diff}(M)$ az M sokaság diffeomorfizmus-csoportja.

(ii) T_pM jelöli M p-beli érintőterét.

(iii) $\tau\colon TM \to M$ az M sokaság érintőnyalábja. Az érintőnyaláb sima szelései M vektormezői, $\mathfrak{X}(M)$ az M vektormezői által alkotott $C^\infty(M)$-modulus.

(iv) Ha $\varphi\colon M \to N$ sokaságok közötti sima leképezés, akkor ennek deriváltja az a $\varphi_*\colon TM \to TN$ nyalábleképezés, amelynek egy T_pM érintőtérre való megszorítása a

$$(\varphi_*)_p(v)(h) := v(h \circ \varphi);\ v \in T_pM, h \in C^\infty(N)$$

előírással van értelmezve.

(v) Egy $X \in \mathfrak{X}(M)$ vektormező $\varphi \in \mathrm{Diff}(M)$ általi előretoltja a

$$\varphi_\# X := \varphi_* \circ X \circ \varphi^{-1}$$

vektormező.

(vi) A P szimbólum egy M-en adott párhuzamosítást jelöl. Ekkor (M, P) párhuzamosított sokaság, az $\mathfrak{X}_P(M) \subset \mathfrak{X}(M)$ valós vektortér pedig M P-párhuzamos vektormezőinek vektortere.

(vii) Tetszőleges $v \in T_pM$ érintővektor esetén v_P jelöli azt az egyetlen P-párhuzamos vektormezőt, amelyre $v_\mathsf{P}(p) = v$ teljesül.

(viii) A „G” mindig Lie-csoportot jelöl, amelynek e az egységeleme. A G Lie-csoport bal-, ill. jobb-invariáns vektormezőinek Lie-algebráját $\mathfrak{X}_L(G)$, ill. $\mathfrak{X}_R(G)$ jelöli.

(ix) $\mathsf{Lie}(G) := T_eG$ a G Lie-csoport Lie-algebrája, ellátva azzal a Lie-zárójellel, amelyet az $X \in \mathfrak{X}_L(G) \mapsto X(e) \in T_eG$ lineáris izomorfizmus indukál.

$\sim \circ \sim$

Most pedig fejezetenként áttekintjük a disszertáció tartalmát, kiemelve az értekezés új eredményeit.

1. fejezet. Előzmények. A disszertáció a szükséges előzmények tárgyalásával indul: rögzítjük az alapvető jelöléseket és terminológiát, valamint összegyűjtjük a későbbiekben felhasználásra kerülő eszközöket és eredményeket a sima sokaságok, Lie-csoportok, Lie-csoport és Lie-algebra hatások, valamint a Finsler-sokaságok elméletéből.

2. fejezet. Párhuzamosítások. E fejezet célja a párhuzamosítások elméletének szisztematikus tárgyalása. Elszórtan több munka is található a témakörben, lásd [7, 19, 20, 21, 54]. A bemutatott eredmények egy része tehát nem újdonság, a tárgyalás remélt értékei az újszerű megközelítésben, a párhuzamosításhoz csatolható geometriai struktúrák összekapcsolásában és számos esetben a korábbiaktól különböző bizonyítási módszerekben rejlenek. Kifejezetten új a „lefedő párhuzamosítás" és „konform-konjugált párhuzamosítások" fogalma. Ugyancsak új ebben a kontextusban a csatolt Ehresmann-konnexió használata, ami nagyban elősegítette az egységes tárgyalást.

Rátérve a részletekre, legyen $\mathcal{P} \to M \times M$ az a vektornyaláb, amelynek egy (p,q) pontpár feletti fibruma a p és q pontok érintőterei között ható lineáris leképezések $L(T_pM, T_qM)$ valós vektortere. Werner Greub és Joseph A. Wolf megközelítését követve [19, 20, 54], M egy *párhuzamosítás*án a $\mathcal{P} \to M \times M$ vektornyaláb olyan P sima szelését értjük, amelyre a

$$\mathsf{P}(r,q) \circ \mathsf{P}(p,r) = \mathsf{P}(p,q) \quad \text{és} \quad \mathsf{P}(p,p) = 1_{T_pM} \quad (p,q,r \in M)$$

feltételek teljesülnek. M egy *lefedő párhuzamosítás*a olyan $(\mathcal{U}_\alpha, \mathsf{P}^\alpha)_{\alpha\in\mathcal{A}}$ család, ahol $(\mathcal{U}_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{A}}$ nyílt lefedése M-nek, és tetszőleges $\alpha \in \mathcal{A}$ esetén P^α párhuzamosítás $\mathcal{U}_\alpha$-n. Egy párhuzamosítással ellátott sokaságot *párhuzamosított sokaság*nak nevezünk, a továbbiakban (M, P) mindig egy ilyen sokaságot jelöl.

P-párhuzamos vektormezők és n-élmezők. Egy M-en adott X vektormezőt P-*párhuzamos*nak mondunk, ha minden $p, q \in M$ pont esetén $\mathsf{P}(p,q)(X_p) = X_q$. Rögzítve egy $v \in T_pM$ érintővektort, a

$$v_\mathsf{P} \colon q \in M \mapsto v_\mathsf{P}(q) := \mathsf{P}(p,q)(v) \in T_qM$$

vektormező az az egyetlen P-párhuzamos vektormező M-en, amelyre teljesül, hogy $v_\mathsf{P}(p) = v$. Ha rögzítjük T_pM-nek egy $(b_i)_{i=1}^n$ bázisát, akkor az $E_i := (b_i)_\mathsf{P}$ (P-párhuzamos) vektormezők egy globális n-élmezőt szolgáltatnak az alapsokaságon; az így kapott n-élmezőt P-*hez csatolt*nak mondjuk. Megfordítva, ha $(E_i)_{i=1}^n$ egy globális n-élmező M-en, akkor a

$$\begin{aligned}&\mathsf{P} \colon (p,q) \in M \times M \mapsto \mathsf{P}(p,q) \in L(T_pM, T_qM)\\&\mathsf{P}(p,q)(v) = v^i E_i(q) \ \text{ ahol } \ v = v^i E_i(p) \in T_pM\end{aligned}$$

leképezés párhuzamosítása M-nek, és az E_i vektormezők P-párhuzamosak. „Egy párhuzamosítás és egy globális n-élmező egy sokaságon: ugyanazon érem két oldala.”

Következik ily módon, hogy a P-párhuzamos vektormezők generálják M vektormezőinek $C^\infty(M)$-modulusát, és egy

M-en adott vektormező pontosan akkor P-párhuzamos, ha egy P-párhuzamos n-élmező tagjaiból $\mathbb{R}$-lineárisan kombinálható. A P-párhuzamos vektormezők valós vektorterét $\mathfrak{X}_{\mathsf{P}}(M)$-mel jelöljük.

A P által generált Ehresmann-konnexió a

$$\mathcal{H}\colon TM \times_M TM \to TTM,\ (v,w) \mapsto \mathcal{H}(v,w) := (v_{\mathsf{P}})_*(w).$$

lineáris Ehresmann-konnexió. Ekkor az

$$S\colon TM \to TTM,\ v \mapsto S(v) := \mathcal{H}(v,v) = (v_{\mathsf{P}})_*(v)$$

vektormező affin spray M számára, amelyet a P *által generált* (vagy P*-hez csatolt*) spray-nek nevezünk.

Egy $\gamma\colon I \to M$ (sima) görbét (M,P) *geodetikusá*nak mondunk, ha

$$\mathsf{P}(\gamma(t_1),\gamma(t_2))\dot\gamma(t_1) = \dot\gamma(t_2) \quad \text{minden } t_1,t_2 \in I \text{ esetén.}$$

Egy M-beli görbe *pregeodetikusa* (M,P)-nek, ha paramétertranszformációval átparaméterezhető geodetikussá. Egy párhuzamosított sokaságot (vagy egyszerűen egy párhuzamosítást) akkor mondunk *teljes*nek, ha az összes geodetikusa értelmezve van a teljes valós számegyenesen.

Párhuzamosítások geodetikusaival kapcsolatban a következő egyszerűbb eredményeket nyertük:

(i) *(M,P) geodetikusai éppen a P-párhuzamos vektormezők integrálgörbéi (2.14. lemma).*

(ii) *Egy* P *párhuzamosítás akkor, és csak akkor, teljes, ha a* P*-párhuzamos vektormezők teljesek (2.15. következmény).*

(iii) *Egy párhuzamosítás geodetikusai egybeesnek az általa generált spray geodetikusaival (2.16. állítás és [7, Proposition 10.3.1]).*

P torziója (2.17. lemma és definíció)**.** Rögzítsünk tetszőlegesen egy $p \in M$ pontot. Ekkor a

$$\theta \colon q \in M \mapsto \theta_q \in L(T_qM, T_pM),\ \theta_q(w) := \mathsf{P}(q,p)(w) \in T_pM$$

leképezés T_pM-értékű 1-forma M-en. Azt a

$$T^{\mathsf{P}} \colon (X,Y) \in \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \mapsto T^{\mathsf{P}}(X,Y) \in \mathfrak{X}(M)$$

$(1,2)$-típusú tenzormezőt, amelyet a

$$(T^{\mathsf{P}}(X,Y))_q := \mathsf{P}(p,q)(d\theta)_q(X_q,Y_q), \quad q \in M,$$

előírás értelmez, P *torziójá*nak nevezzük. Ha X és Y P-párhuzamos vektormezők, akkor $T^{\mathsf{P}}(X,Y) = -[X,Y] = [Y,X]$.

2.19. lemma. *Annak szükséges és elégséges feltétele, hogy* P *torziója párhuzamos legyen, azaz teljesítse a*

$$\mathsf{P}(p,q)(T^{\mathsf{P}}(X,Y))_p = T^{\mathsf{P}}_q(\mathsf{P}(p,q)(X_p), \mathsf{P}(p,q)(Y_p)) \quad (p,q \in M)$$

feltételt, az, hogy $\mathfrak{X}_{\mathsf{P}}(M)$ *részalgebrája legyen az* $\mathfrak{X}(M)$ *Lie-algebrának.*

Lie-csoportok és párhuzamosításaik. Minden Lie-csoportnak természetes módon létezik két párhuzamosítása. G bal-párhuzamosítása a

$$\mathsf{P}_L\colon (p,q) \in G \times G \mapsto \mathsf{P}_L(p,q) := ((\lambda_{qp^{-1}})_*)_p \in L(T_pG, T_qG),$$

leképezés, ahol λ_a $(a \in G)$ az a elemmel való baleltolást jelenti. A Lie-csoport P_R jobb-párhuzamosítása analóg módon értelmezhető. Ekkor

$$\mathfrak{X}_{\mathsf{P}_L}(G) = \mathfrak{X}_L(G),\ \mathfrak{X}_{\mathsf{P}_R}(G) = \mathfrak{X}_R(G),$$

így (a 2.19. lemma miatt) P_L és P_R torziója is párhuzamos. A két párhuzamosítás geodetikusai megegyeznek: ezek a Lie-csoport egyparaméteres részcsoportjai, valamint ezek jobb-, illetve baleltoltjai. Ebből az is következik, hogy egy Lie-csoport természetes párhuzamosításai teljesek.

Az alábbi eredmény (lásd a 2.42. állítást és annak bizonyítását) egy klasszikus tétel részben új és részletes átfogalmazása. A fontosabb források [54, Proposition 2.5], továbbá [8, 19, 21, 27, 28].

Tegyük fel, hogy (M, P) összefüggő, teljes és párhuzamos torzióval rendelkező párhuzamosított sokaság. Rögzítsünk tetszőlegesen egy $p \in M$ pontot, és adjunk meg Lie-zárójelet az

$$[u,v] := [u_{\mathsf{P}}, v_{\mathsf{P}}]_p; \quad u, v \in T_pM$$

előírással T_pM-en. Legyen G az az összefüggő és egyszeresen összefüggő Lie-csoport, amelynek Lie-algebrája $\mathsf{Lie}(G) =$

$(T_pM, [\cdot,\cdot])$, és tekintsük G-nek a

$$T_pM = T_eG \to \mathfrak{X}(M),\ v \mapsto v_{\mathsf{P}}$$

Lie-algebra hatás által indukált

$$A\colon M \times G \to M,\ (m, g) \mapsto m \cdot g$$

jobboldali hatását M-en. Ekkor a G_p p-beli izotrópia-részcsoport diszkrét részcsoportja G-nek, és a $G_p \backslash G$ hányadossokaság kanonikusan diffeomorf M-mel a

$$G_p \backslash G \to M,\ G_p \cdot g \mapsto p \cdot g$$

leképezés által. Az $\mathfrak{X}_L(G)$ és $\mathfrak{X}_{\mathsf{P}}(M)$ Lie-algebrák természetes módon beazonosíthatók egymással.

P-invariáns kovariáns deriváltak. Egy, az (M, P) párhuzamosított sokaságon adott ∇ kovariáns deriváltat P-*invariáns*nak mondunk, ha

$$\nabla_X Y \in \mathfrak{X}_{\mathsf{P}}(M) \quad \text{minden } X, Y \in \mathfrak{X}_{\mathsf{P}}(M) \text{ esetén.}$$

A következő eredmény egy jól ismert tény (lásd, pl. [26, Chapter II, Proposition 1.4]) kézenfekvő általánosítása párhuzamosított sokaságok esetére.

2.21. és 2.22. állítás. *A $\nabla\colon \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ P-invariáns kovariáns deriváltak halmaza és az α $\mathfrak{X}_{\mathsf{P}}(M)$-en adott, $\mathfrak{X}_{\mathsf{P}}(M)$-értékű $\mathbb{R}$-bilineáris leképezések vektortere között egy-egyértelmű megfeleltetés létesíthető, amelyet az*

$$\alpha(X, Y) = \nabla_X Y, \quad \textit{minden } X, Y \in \mathfrak{X}_{\mathsf{P}}(M) \textit{ esetén,}$$

reláció karakterizál. Ekkor a következő természetes választások lehetségesek:

(A) $\underline{\alpha = 0}$ *Ekkor a* ∇ *kovariáns derivált lapos és*

$$T := \nabla \text{ torziója} = \mathsf{P} \text{ torziója}.$$

Az így nyert kovariáns deriváltat P indukált kovariáns deriváltj*ának nevezzük.*

(B) *Feltesszük, hogy* $\mathfrak{X}_{\mathsf{P}}(M)$ Lie-részalgebrája $\mathfrak{X}(M)$-nek. *Ekkor:*

(i) *Az*

$$\alpha(X, Y) := [X, Y], \quad \text{ha } X, Y \in \mathfrak{X}_{\mathsf{P}}(M)$$

feltétellel definiált α $\mathbb{R}$*-bilineáris leképezésnek megfelelő* ∇^+ *kovariáns derivált szintén lapos, a torziója pedig* $-T$.

(ii) *Ha az* α $\mathbb{R}$*-bilineáris leképezést az*

$$\alpha(X, Y) := \frac{1}{2}[X, Y], \quad \text{ha } X, Y \in \mathfrak{X}_{\mathsf{P}}(M)$$

előírással adjuk meg, akkor az ennek megfelelő ∇^0 *kovariáns derivált torziómentes, de nem lapos;* R^0 *görbületi tenzorára az*

$$R^0(X, Y)Z = -\frac{1}{4}[[X, Y], Z], \quad X, Y, Z \in \mathfrak{X}_{\mathsf{P}}(M),$$

kiszámítási formula érvényes.

2.23. állítás. *Egy (M, P) párhuzamosított sokaságon adott P-invaráns kovariáns deriválás geodetikusai pontosan akkor esnek egybe (M, P) geodetikusaival, ha a neki megfelelő $\mathbb{R}$-bilineáris leképezés ferdeszimmetrikus.*

2.24. következmény. *A ∇, ∇^+ és ∇^0 kovariáns deriváltak geodetikusai éppen (M, P) geodetikusai.*

2.25. következmény. *Tetszőlegesen kiválasztva egy $v \in T_pM$ érintővektort, egyértelműen létezik (M, P)-nek olyan γ maximális geodetikusa, amelyre $\dot{\gamma}(0) = v$ teljesül.*

Izomorfizmusok és automorfizmusok. Egy $\varphi\colon M \to \bar{M}$ diffeomorfizmust az (M, P) és $(\bar{M}, \bar{\mathsf{P}})$ párhuzamosított sokaság közötti *izomorfizmus*nak nevezünk, ha M minden p, q pontja esetén érvényes a

$$(\varphi_*)_q \circ \mathsf{P}(p, q) = \bar{\mathsf{P}}(\varphi(p), \varphi(q)) \circ (\varphi_*)_p$$

felcserélhetőség. Ekvivalens módon: minden $v \in TM$ érintővektor esetén

$$\varphi_* \circ v_{\mathsf{P}} = (\varphi_*(v))_{\bar{\mathsf{P}}} \circ \varphi.$$

Az (M, P) párhuzamosított sokaságnak egy önmagára való izomorfizmusát (M, P) (vagy P) *automorfizmusának* mondjuk, az automorfizmusok által alkotott csoportot $\mathrm{Aut}(\mathsf{P})$-vel jelöljük. Ennek egy részcsoportja

$$\mathrm{Sym}(\mathsf{P}) := \{\varphi \in \mathrm{Diff}(M) \mid \varphi_\# X = X \text{ ha } X \in \mathfrak{X}_{\mathsf{P}}(M)\},$$

amelynek elemeit (M, P) *szimmetriái*nak (vagy *transzlációi*nak) hívjuk.

Ha G összefüggő Lie-csoport, akkor

$$\mathrm{Sym}(\mathsf{P}_L) = \{\lambda_g \in \mathrm{Diff}(G) \mid g \in G\}.$$

Az $\mathrm{Aut}(\mathsf{P}_L)$ automorfizmus-csoport a bővebb csoport: ez tartalmazza a G elemeivel való jobbeltolásokat és konjugálásokat is.

2.34. és 2.35. állítás. *Az* $\mathrm{Aut}(\mathsf{P})$ *csoport a* P *által indukált kovariáns deriválás automorfizmus-csoportjának részcsoportja. Ha* M *összefüggő, akkor ez a két csoport egybeesik. Teljesül továbbá, hogy* $\mathrm{Aut}(\mathsf{P})$ *a* P *által generált spray automorfizmus-csoportjának is részcsoportja.*

Konjugált párhuzamosítások. Az M-en adott P_1 és P_2 párhuzamosítások *konjugáltak*, ha $X \in \mathfrak{X}_{\mathsf{P}_1}(M)$ és $Y \in \mathfrak{X}_{\mathsf{P}_2}(M)$ esetén $[X, Y] = 0$.

Összefüggő sokaságon minden párhuzamosításhoz legfeljebb egy konjugált párhuzamosítás létezik. Ha a P párhuzamosításhoz van konjugált párhuzamosítás, akkor P torzója párhuzamos. Megfordítva, ha egy (M, P) párhuzamosított sokaság torziója párhuzamos, akkor M minden pontjának van olyan környezete, amelyen létezik P-hez konjugált párhuzamosítás (2.44. és 2.46. lemma, ld. [20, Chapter IV, Problems]).

Konjugált párhuzamosításokkal kapcsolatban a következő egyszerűbb eredményeket nyertük:

(i) Ha P_1 *és* P_2 *konjugált párhuzamosítások* M*-en, akkor* ∇_1

és ∇_2 *indukált kovariáns deriváltjaik között a*

$$(\nabla_2)_X Y = (\nabla_1)_Y X + [X,Y]; \quad X, Y \in \mathfrak{X}(M)$$

összefüggés áll fenn, következésképpen P_1 *és* P_2 *torziója egymás ellentettje (2.45. és 2.50. lemma). A* P_1*-hez tartozó* ∇_1^+ *kovariáns deriválás (lásd fentebb (B)/(i)) létezik, és* $\nabla_2 = \nabla_1^+$ *(2.48. következmény).*

(ii) *A* P_1 *és* P_2 *konjugált párhuzamosítások ugyanazt a spray-t származtatják, és* M *összefüggősége esetén az automorfizmus-csoportjaik is megegyeznek (2.49. és 2.51. lemma).*

(iii) *Ha* P *és* $\bar{\mathsf{P}}$ *konjugált párhuzamosítások* M*-en, továbbá* X *olyan* P_1*-párhuzamos vektormező amelynek folyama a* $\varphi^X : \mathcal{D}_X \subset \mathbb{R} \times M \to M$ *leképezés, akkor*

$$((\varphi_t^X)_*)_p = \bar{\mathsf{P}}(p, (\varphi_t^X)_p) \quad \textit{minden } (t,p) \in \mathcal{D}_X \textit{ esetén}$$

(2.52. lemma).

Párhuzamosítások konform változtatása. Legyen σ pozitív, sima függvény M-en, és tekintsük M-nek egy P párhuzamosítását. Ekkor a

$$\widetilde{\mathsf{P}}\colon (p,q) \in M \times M \mapsto \widetilde{\mathsf{P}}(p,q) := \frac{\sigma(p)}{\sigma(q)} \mathsf{P}(p,q) \in L(T_pM, T_qM)$$

leképezés is párhuzamosítás M-en, amelyet a P párhuzamosítás σ konform faktorral való *konform változtatásának* nevezünk. A P által indukált ∇ és a $\widetilde{\mathsf{P}}$ által indukált $\widetilde{\nabla}$ kovariáns derivált, valamint ezek torziói között a

$$\widetilde{\nabla} = \nabla + d\sigma \otimes 1_{\mathfrak{X}(M)}, \quad \text{ill. a} \quad \widetilde{T} = T + d\sigma \wedge 1_{\mathfrak{X}(M)}$$

összefüggés áll fenn (2.56. állítás).

Legyen $\widetilde{\mathsf{P}}_1$ és $\widetilde{\mathsf{P}}_2$ a P_1, ill. P_2 párhuzamosítás σ faktorú konform változtatottja. Ha $\widetilde{\mathsf{P}}_1$ és $\widetilde{\mathsf{P}}_2$ konjugáltak, akkor azt mondjuk, hogy P_1 és P_2 (σ faktorú) *konform-konjugált párhuzamosítások*. A P_1 és a P_2 párhuzamosítás pontosan akkor áll ilyen kapcsolatban, ha minden $X \in \mathfrak{X}_{\mathsf{P}_1}(M)$ és $Y \in \mathfrak{X}_{\mathsf{P}_2}(M)$ esetén $[X,Y] = (d\sigma \wedge 1_{\mathfrak{X}(M)})(X,Y)$ (2.59. lemma).

3. fejezet. Finsler-függvények és párhuzamosítások.

Megállapodunk abban, hogy a további-
akban (M,F) Finsler-sokaság.

Tekintsünk egy P párhuzamosítást M-en. Az F Finsler-függvény *kompatibilis* P-vel, ha

$$F_q \circ \mathsf{P}(p,q) = F_p \text{ minden } p,q \in M \text{ esetén.}$$

Azt mondjuk, hogy F egy $(\mathcal{U}_\alpha, \mathsf{P}^\alpha)_{\alpha\in\mathcal{A}}$ *lefedő párhuzamosítással kompatibilis*, ha minden $\alpha \in \mathcal{A}$ esetén az F Finsler-függvény $\tau^{-1}(\mathcal{U}_\alpha)$ nyílt halmazra való leszűkítése kompatibilis P^α-val.

3.7. tétel. *Ha az F Finsler-függvény kompatibilis két konjugált párhuzamosítással, akkor a párhuzamosítások által generált (szükségképpen közös) spray éppen a Finsler-sokaság kanonikus spray-je.*

3.13. tétel. *Egy Finsler-sokaság pontosan akkor általánosított Berwald-sokaság, ha a Finsler-függvény kompatibilis egy lefedő* *párhuzamosítással.*

3.14. tétel. *Minden bal-invariáns Finsler-függvénnyel ellátott Lie-csoport általánosított Berwald-sokaság.*

3.17. tétel. *Tegyük fel, hogy M-en adva van két, ugyanazon $(\mathcal{U}_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{A}}$ nyílt lefedéshez tartozó lefedő párhuzamosítás, $(\mathcal{U}_\alpha, \mathsf{P}_1^\alpha)_{\alpha\in\mathcal{A}}$ és $(\mathcal{U}_\alpha, \mathsf{P}_2^\alpha)_{\alpha\in\mathcal{A}}$ oly módon, hogy*

(i) az F Finsler-függvény kompatibilis mindkét lefedő párhuzamosítással;

(ii) minden $\alpha \in \mathcal{A}$ esetén a P_1^α és P_2^α párhuzamosítások konjugáltak.

Ekkor (M, F) Berwald-sokaság.

3.19. tétel. *Tegyük fel, hogy M-en adva van két, ugyanazon $(\mathcal{U}_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{A}}$ nyílt lefedéshez tartozó lefedő párhuzamosítás, $(\mathcal{U}_\alpha, \mathsf{P}_1^\alpha)_{\alpha\in\mathcal{A}}$ és $(\mathcal{U}_\alpha, \mathsf{P}_2^\alpha)_{\alpha\in\mathcal{A}}$, eleget téve a következőknek:*

(i) az F Finsler-függvény kompatibilis mindkét lefedő párhuzamosítással;

(ii) minden $\alpha \in \mathcal{A}$ esetén a P_1^α és P_2^α párhuzamosítások konform-konjugáltak ugyanazzal a konform faktorral.

Ekkor (M, F) Wagner-sokaság.

Azt mondjuk, hogy egy, az M sokaságon adott P párhuzamosítás *erősen kompatibilis* az F Finsler-függvénnyel, ha kompatibilis vele, továbbá F és P pregeodetikusai megegyeznek.

3.21. tétel. *Ha egy M-en adott P párhuzamosítás kompatibilis az F Finsler-függvénnyel, akkor a következő állítások ekvivalensek:*

- *(i) F és P erősen kompatibilis;*
- *(ii) F és P geodetikusai megegyeznek;*
- *(iii) a P-párhuzamos vektormezők Killing-vektormezői a Finsler-sokaságnak.*

3.22. tétel. *Ha F erősen kompatibilis egy M-en adott P párhuzamosítással, akkor (M, F) Berwald-sokaság.*

3.23. következmény. *Ha F bal-invariáns Finsler-függvény egy G Lie-csoporton, és F pregeodetikusai az egyparaméteres részcsoportok valamint ezek eltoltjai, akkor (G, F) Berwald-sokaság.*

3.24. tétel (a párhuzamosított Finsler-sokaságok struktúratétele)**.** *Tegyük fel, hogy (M, P) teljes, összefüggő párhuzamosított sokaság, amelynek torziója párhuzamos. Ekkor érvényesek a következők:*

- *(i) M diffeomorf egy olyan $H \backslash G$ hányadossokasággal, ahol G összefüggő és egyszeresen összefüggő Lie-csoport, H pedig diszkrét részcsoportja G-nek;*
- *(ii) M párhuzamosítását a G Lie-csoport bal-párhuzamosítása származtatja.*

Amennyiben F P-vel erősen kompatibilis Finsler-függvény M-en, úgy (M, F) Berwald-sokaság és F-et egy G-n adott biinvariáns Finsler-függvény indukálja.

1 History, motivations and aims

Beginning with Euclid, the concept of a *parallelism* has played a key role in the history of geometry, and, later, differential geometry. More or less intuitively, in the Euclidean n-space $\mathbb{R}^n$ two tangent vectors $u \in T_p\mathbb{R}^n$ and $v \in T_q\mathbb{R}^n$ are parallel if u, v and the line segment between p and q 'form three sides of a parallelogram'. More precisely, u and v are parallel if there is a constant vector field X on $\mathbb{R}^n$ such that $X(p) = u$ and $X(q) = v$. 'Constant' means here that X can be linearly combined from the standard frame field

$$(E_i)_{i=1}^n,\ E_i(p) := (p, e_i)\ \left((e_i)_{i=1}^n \text{ is the canonical basis of } \mathbb{R}^n\right)$$

such that the coefficients of the linear combination are real numbers.

Given any two points p, q in $\mathbb{R}^n$, define the mapping

$$\mathsf{P}_0(p,q)\colon T_p\mathbb{R}^n \to T_q\mathbb{R}^n,\ v \mapsto \mathsf{P}_0(p,q)(v) := X(q),$$

where X is the constant vector field on $\mathbb{R}^n$ specified by $X(p) = v$. Then:

(P$_1$) $\mathsf{P}_0(p,q) \in L(T_p\mathbb{R}^n, T_q\mathbb{R}^n)$, i.e., $\mathsf{P}_0(p,q)$ is a linear mapping from $T_p\mathbb{R}^n$ to $T_q\mathbb{R}^n$.

(P$_2$) $\mathsf{P}_0(a,a) = 1_{T_a\mathbb{R}^n}$ and $\mathsf{P}_0(a,q) \circ \mathsf{P}_0(p,a) = \mathsf{P}_0(p,q)$ for all $a, p, q \in \mathbb{R}^n$ (*consistence*).

(P$_3$) Given a tangent vector $v \in T_p\mathbb{R}^n$, the mapping

$$\mathbb{R}^n \to T\mathbb{R}^n,\ q \mapsto \mathsf{P}_0(p,q)(v)$$

is smooth, and hence a vector field on $\mathbb{R}^n$ (*smoothness*).

We say that the mapping

$$\mathsf{P}_0\colon (p,q) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \mapsto \mathsf{P}_0(p,q) \in L(T_p\mathbb{R}^n, T_q\mathbb{R}^n)$$

is the *natural parallelism* of the Euclidean n-space $\mathbb{R}^n$.

This simple example suggests an axiomatic approach in the more general setting of smooth manifolds. Let us *define* an *absolute parallelism* (or simply *parallelism*) on a manifold M as a family

$$\mathsf{P}(p,q)\colon T_pM \to T_qM,\ (p,q) \in M \times M$$

of linear mappings between tangent spaces of M satisfying the consistency condition (P_2) and the smoothness condition (P_3) above.

Our earliest source for a definition of this sort for the notion 'absolute parallelism' ('Fernparallelismus' in German) is Werner Greub's fundamental paper entitled 'Liesche Gruppen und affin zusammenhängende Mannigfaltigkeiten' from 1961 [19]. In a similarly important and inspiring 1972 paper of Joseph A. Wolf [54, 55] we also find conditions (P_1)–(P_3) above as the axioms for 'absolute parallelism'. The definition of parallelism, taken as a base in our Thesis, is borrowed from the monograph of Greub, Halperin and Vanstone [20, 21]. Here the smoothness condition is expressed in a different, but equivalent manner. We note that in the Problems sections of this monograph most of the definitions and results from Greub's earlier paper [19] are translated to the language of vector bundles.

The axiomatic approach to parallelisms based on the requirements (P_1)–(P_3) has a serious drawback. Most manifolds (for instance, even-dimensional spheres) have a non-trivial tangent bundle, and hence have no global frame field – while 'absolute parallelism' and 'global frame field' are just two sides of the same coin. However, the class of manifolds with absolute parallelism is still quite large. All Lie groups, for example, belong to this class. It is also known that *every 3-dimensional, orientable smooth manifold is parallelizable* (see, e.g., Steenrod's classic book [44] or, for a modern proof, [43]).

The first paper in this theme was probably written by É. Cartan in 1923 [8]. There he proved that the vanishing of the curvature tensor of a connection is the necessary condition for the existence of a (complete) absolute parallelism. The next important steps towards understanding the fine structure of manifolds with parallelism were made by Cartan and Schouten [10, 11]. In reference [10] they defined flat connections on Lie groups, thus exhibiting their absolute parallelisms. In reference [11], a local description of parallelized manifolds with compatible Riemannian metric is presented, with some gaps. ('Compatibility' means here that the parallel vector fields of the parallelism have constant norm, and their integral curves are Riemannian geodesics.) In his above-mentioned paper, J. A. Wolf extended the work of Cartan and Schouten to compatible pseudo-Riemannian metrics, and completed their classification theorem. In this Thesis we take one step further and investigate parallelized manifolds endowed with compatible (and strongly compatible) Finsler functions.

Before concluding this brief historical overview, we have to mention still one important moment. In 1928, Einstein proposed a unified theory of gravitation and electromagnetism based upon a parallelizable manifold admitting a compatible Riemannian metric [15, 16]. Now we quote a paragraph of Eisenhart's paper [17]:

'He was unaware of the existence of the requisite mathematical knowledge and developed it anew. He said: "The new unitary field theory is based on the following mathematical discovery: There are continua with a Riemannian metric and distant parallelism which nevertheless are not euclidean." Later he gave up hope of founding a satisfactory theory on such a basis....'

Nevertheless, life has not stopped. Field theories based upon manifolds with absolute parallelism form a very active area of present day research. It turned out, among others, that classical general relativity can be recast into absolute parallelism or 'teleparallelism' language, see, e.g., [5, 25, 33]. What is maybe more interesting, there is some hope to understand such a mystery as 'dark energy' in this framework [51].

There is an extensive literature on manifolds with absolute parallelisms, even if one disregards (as we do) the delicate differential topological questions. However, until now, there has been no unified treatment of the subject. For this reason, in Chapter 2 of the Thesis we have tried to give a systematic introduction to the *geometry* of parallelized manifolds, and to present complete proofs of most results. So, although this chapter lays no claim to deep originality, it is no without novelties. For example, we associate to a parallelism an Ehresmann connection, and this leads immediately to the spray of the parallelism. As a natural weakening of the concept of parallelism, we speak of covering parallelisms. Their usefulness will become clear in Chapter 3.

We would like to emphasize that a covering parallelism exists on every manifold. A quite sophisticated new concept in our Thesis is the concept of conformally conjugate parallelisms. Using that, we obtain a sufficient condition for a Finsler manifold to be Wagnerian in Chapter 3.

2 Contents and new results

First, for convenience of the reader, we list some of our basic notation.

(i) The letter M stands for an n-dimensional smooth manifold, $C^\infty(M)$ denotes the real algebra of smooth real-valued functions on M, and $\mathrm{Diff}(M)$ is the group of diffeomorphisms of M onto itself.

(ii) The tangent space to M at a point $p \in M$ is T_pM.

(iii) The tangent bundle of M is $\tau\colon TM \to M$. A vector field on M is a smooth section of TM; the $C^\infty(M)$-module of vector fields is denoted by $\mathfrak{X}(M)$.

(iv) If $\varphi\colon M \to N$ is a smooth mapping between manifolds, its derivative is the bundle map $\varphi_*\colon TM \to TN$ whose restriction to T_pM is given by

$$(\varphi_*)_p(v)(h) := v(h \circ \varphi);\ v \in T_pM, h \in C^\infty(N).$$

(v) If $\varphi \in \mathrm{Diff}(M)$ and $X \in \mathfrak{X}(M)$, then

$$\varphi_\# X := \varphi_* \circ X \circ \varphi^{-1} \in \mathfrak{X}(M)$$

is the push-forward of X by φ.

(vi) The symbol P stands for a parallelism on M. Then (M, P) is a parallelized manifold, $\mathfrak{X}_P(M) \subset \mathfrak{X}(M)$ is the real vector space of P-parallel vector fields on M.

(vii) If $v \in T_pM$, then v_{P} is the unique P-parallel vector field such that $v_{\mathsf{P}}(p) = v$.

(viii) The letter G denotes a Lie group with unit element e. The Lie algebra of left (resp. right) invariant vector fields on G is denoted by $\mathfrak{X}_L(G)$ (resp. $\mathfrak{X}_R(G)$).

(ix) $\mathsf{Lie}(G) := T_eG$ is the Lie algebra of G, endowed with the Lie bracket induced by the linear isomorphism

$$X \in \mathfrak{X}_L(G) \mapsto X(e) \in T_eG.$$

$\sim \circ \sim$

Now we turn to summarizing the contents of the Thesis chapter by chapter, emphasizing the new results of the work.

Chapter 1. Preliminaries. In this chapter we fix our basic notation and terminology, and collect the necessary tools and results (or at least most of them) from the theories of smooth manifolds, Lie groups, Lie group and Lie algebra actions and Finsler manifolds.

Chapter 2. Parallelisms. Our aim in this chapter is to provide a systematic account on the general theory of parallelisms, whose elements can be found only in scattered form in some papers and books (mainly in refs. [7, 19, 20, 21, 54]). Thus most of the results presented here are not new, but our approach to their proofs is somewhat novel. The only truly new concepts introduced here are those of 'covering parallelism', 'conformally conjugate parallelisms' and 'associated Ehresmann connection'.

Coming to the details, let $\mathcal{P} \to M \times M$ be the vector bundle whose fibre at a point (p, q) is the real vector space $L(T_pM, T_qM)$ of linear mappings between the tangent spaces at p and q to M. Following ref. [20], by a *parallelism* on M we mean a smooth section P of $\mathcal{P} \to M \times M$ such that

$$\mathsf{P}(r, q) \circ \mathsf{P}(p, r) = \mathsf{P}(p, q) \text{ and } \mathsf{P}(p, p) = 1_{T_pM}; \quad p, q, r \in M.$$

A *covering parallelism* of M is a family $(\mathcal{U}_\alpha, \mathsf{P}^\alpha)_{\alpha\in\mathcal{A}}$, where $(\mathcal{U}_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{A}}$ is an open covering of M and P^α is a parallelism on $\mathcal{U}_\alpha$ for each $\alpha \in \mathcal{A}$. A *parallelized manifold* is a manifold together with a parallelism. There are some other possibilities to introduce a parallelism, which we also discuss in the Thesis. From now on, let (M, P) be a parallelized manifold.

P-parallel vector fields and frames. A vector field X on M is called P-*parallel* if $\mathsf{P}(p, q)(X_p) = X_q$ for all $p, q \in M$. Given a tangent vector $v \in T_pM$, the vector field

$$v_\mathsf{P} \colon q \in M \mapsto v_\mathsf{P}(q) := \mathsf{P}(p, q)(v) \in T_qM$$

is the unique P-parallel vector field such that $v_\mathsf{P}(p) = v$. If $(b_i)_{i=1}^n$ is a basis of T_pM, then the P-parallel vector fields $E_i := (b_i)_\mathsf{P}$ form a (global) frame field $(E_i)_{i=1}^n$ of M; we say that this frame field is *associated to* P. Conversely, if M admits a global frame field $(E_i)_{i=1}^n$, then the mapping

$$\mathsf{P}\colon (p,q) \in M \times M \mapsto \mathsf{P}(p,q) \in L(T_pM, T_qM)$$
$$\mathsf{P}(p,q)(v) = v^i E_i(q) \ \text{ if } \ v = v^i E_i(p) \in T_pM$$

is a parallelism on M, and the vector fields E_i are then P-parallel. Thus a parallelism and a global frame field on M are two sides of the same coin.

It follows that P-parallel vector fields generate the $C^\infty(M)$-module $\mathfrak{X}(M)$, and a vector field on M is P-parallel if, and only if, it is an $\mathbb{R}$-linear combination of the members of a P-parallel frame field. The real vector space of P-parallel vector fields is denoted by $\mathfrak{X}_{\mathsf{P}}(M)$.

The Ehresmann connection generated by P is the linear Ehresmann connection

$$\mathcal{H}\colon TM \times_M TM \to TTM,\ (v,w) \mapsto \mathcal{H}(v,w) := (v_{\mathsf{P}})_*(w).$$

Then the vector field

$$S\colon TM \to TTM,\ v \mapsto S(v) := \mathcal{H}(v,v) = (v_{\mathsf{P}})_*(v)$$

is an affine spray, called the *spray generated by* P.

A (smooth) curve $\gamma\colon I \to M$ is a *geodesic* of (M, P) if

$$\mathsf{P}(\gamma(t_1), \gamma(t_2))\dot\gamma(t_1) = \dot\gamma(t_2) \quad \text{for all } t_1, t_2 \in I.$$

A curve in M is a *pregeodesic* of (M, P) if it has a reparametrization as a geodesic. A parallelized manifold (or a parallelism) is called *complete* if all of its geodesics are defined on the entire real line.

We have the following results:

(i) *The geodesics of* (M, P) *are precisely the integral curves of* P*-parallel vector fields (Lemma 2.14).*

(ii) *The parallelism* P *is complete if, and only if, the* P*-parallel vector fields are complete (Corollary 2.15).*

(iii) *The geodesics of* P *and the geodesics of the spray associated to* P *coincide (Proposition 2.16 and Proposition 10.3.1 in [7]).*

Torsion of P (Lemma and definition 2.17)**.** Let $p \in M$ be an arbitrarily fixed point. The mapping

$$\theta \colon q \in M \mapsto \theta_q \in L(T_qM, T_pM), \;\; \theta_q(w) := \mathsf{P}(q,p)(w) \in T_pM$$

is a T_pM-valued 1-form on M. The *torsion* of P is the type $(1,2)$ tensor field

$$T^{\mathsf{P}} \colon (X,Y) \in \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \mapsto T^{\mathsf{P}}(X,Y) \in \mathfrak{X}(M)$$

given by

$$(T^{\mathsf{P}}(X,Y))_q := \mathsf{P}(p,q)(d\theta)_q(X_q, Y_q), \quad q \in M.$$

If $X, Y \in \mathfrak{X}_{\mathsf{P}}(M)$, then $T^{\mathsf{P}}(X,Y) = -[X,Y] = [Y,X]$.

Lemma 2.19. *The torsion of* P *is parallel, i.e., we have for all* $p, q \in M$ *the equality*

$$\mathsf{P}(p,q)(T^{\mathsf{P}}(X,Y))_p = T^{\mathsf{P}}_q(\mathsf{P}(p,q)(X_p), \mathsf{P}(p,q)(Y_p))$$

if, and only if, $\mathfrak{X}_{\mathsf{P}}(M)$ *is a subalgebra of the Lie algebra* $\mathfrak{X}(M)$*.*

Parallelisms and Lie groups. Every Lie group admits two natural parallelisms. The left parallelism on G is the mapping

$$\mathsf{P}_L\colon (p,q) \in G \times G \mapsto \mathsf{P}_L(p,q) := ((\lambda_{qp^{-1}})_*)_p \in L(T_pG, T_qG),$$

where λ_a $(a \in G)$ is the left translation by a. The right parallelism P_R on G is defined analogously. Then

$$\mathfrak{X}_{\mathsf{P}_L}(G) = \mathfrak{X}_L(G),\ \mathfrak{X}_{\mathsf{P}_R}(G) = \mathfrak{X}_R(G),$$

therefore (by Lemma 2.19) P_L and P_R have parallel torsions. The geodesics of P_L and P_R coincide: they are the one-parameter subgroups of G and their left and right translations. This implies that the natural parallelisms of a Lie group are complete.

The following result (see Proposition 2.42 and its proof) is a reformulation of a classical theorem for which we refer to [54, Proposition 2.5], and also [8, 19, 21, 27, 28].

Suppose that (M, P) *is a connected, complete parallelized manifold with parallel torsion. Choose and fix a point* $p \in M$*, and define a Lie bracket on* T_pM *by*

$$[u,v] := [u_{\mathsf{P}}, v_{\mathsf{P}}]_p; \quad u, v \in T_pM.$$

Let G *be the connected and simply connected Lie group such that* $\mathsf{Lie}(G) = (T_pM, [\cdot,\cdot])$*. Consider the right action*

$$A\colon M \times G \to M,\ (m,g) \mapsto m \cdot g$$

induced by the Lie algebra action

$$T_pM = T_eG \to \mathfrak{X}(M),\ v \mapsto v_{\mathsf{P}}.$$

Then the isotropy subgroup G_p of A at p is a discrete subgroup of G, and the quotient manifold $G_p\backslash G$ is canonically diffeomorphic to M by the mapping

$$G_p\backslash G \to M,\ G_p \cdot g \mapsto p \cdot g.$$

Then $\mathfrak{X}_L(G)$ and $\mathfrak{X}_{\mathsf{P}}(M)$ can be identified canonically.

P-invariant covariant derivatives. A covariant derivative ∇ on (M, P) is P-*invariant* if $\nabla_X Y \in \mathfrak{X}_{\mathsf{P}}(M)$ for all P-parallel vector fields X and Y.

The next observation is a transcription of a well-known result (see, e.g., [26], Proposition 1.4 in Chapter II) in the context of parallelized manifolds.

Proposition 2.21. *There is a one-to-one correspondence between the set of P-invariant covariant derivatives ∇ on (M, P) and the vector space of $\mathbb{R}$-bilinear mappings α on $\mathfrak{X}_{\mathsf{P}}(M)$ with values in $\mathfrak{X}_{\mathsf{P}}(M)$ such that*

$$\alpha(X, Y) = \nabla_X Y \quad \textit{for all } X, Y \in \mathfrak{X}_{\mathsf{P}}(M).$$

Then (see Proposition 2.22) the following natural choices are possible:

(A) $\alpha = 0$. In this case ∇ is flat and

$$T := \textit{torsion of } \nabla = \textit{torsion of } \mathsf{P}.$$

The covariant derivative specified in this way is called the covariant derivative induced by P*.*

(B) *Under the condition that $\mathfrak{X}_{\mathsf{P}}(M)$ is a Lie subalgebra of the Lie algebra $\mathfrak{X}(M)$:*

   (i) $\alpha(X,Y) := [X,Y]$ *for* $X,Y \in \mathfrak{X}_{\mathsf{P}}(M)$*. The corresponding covariant derivative ∇^+ is flat and its torsion is $-T$.*

   (ii) $\alpha(X,Y) := \frac{1}{2}[X,Y]$ *for* $X,Y \in \mathfrak{X}_{\mathsf{P}}(M)$*. The corresponding covariant derivative ∇^0 is torsion-free, and its curvature R^0 is given by*

$$R^0(X,Y)Z = -\frac{1}{4}[[X,Y],Z]; \quad X,Y,Z \in \mathfrak{X}_{\mathsf{P}}(M).$$

Proposition 2.23. *The geodesics of a P-invariant covariant derivative on (M,P) coincide with the geodesics of (M,P) if, and only if, the corresponding $\mathbb{R}$-bilinear mapping is skew-symmetric.*

Corollary 2.24. *The covariant derivatives ∇, ∇^+ and ∇^0 defined above have the same geodesics as (M,P).*

Corollary 2.25. *Given any tangent vector $v \in T_pM$, there is a unique maximal geodesic γ of (M,P) such that $\dot\gamma(0) = v$.*

Isomorphisms and automorphisms. An *isomorphism* of (M,P) onto a parallelized manifold $(\bar M,\bar{\mathsf{P}})$ is a diffeomorphism $\varphi\colon M \to \bar M$ such that

$$(\varphi_*)_q \circ \mathsf{P}(p,q) = \bar{\mathsf{P}}(\varphi(p),\varphi(q)) \circ (\varphi_*)_p \quad \text{for } p,q \in M.$$

Equivalently,

$$\varphi_* \circ v_{\mathsf{P}} = (\varphi_*(v))_{\bar{\mathsf{P}}} \circ \varphi \quad \text{for any } v \in TM.$$

An isomorphism of (M, P) onto itself is an *automorphism of* (M, P) (or of P). We write $\mathrm{Aut}(\mathsf{P})$ for the automorphism group of (M, P). A subgroup of $\mathrm{Aut}(\mathsf{P})$ is the group

$$\mathrm{Sym}(\mathsf{P}) := \{\varphi \in \mathrm{Diff}(M) \mid \varphi_\# X = X \text{ for all } X \in \mathfrak{X}_{\mathsf{P}}(M)\}$$

of *symmetries* (or *translations*) of (M, P).

If G is a connected Lie group, then

$$\mathrm{Sym}(\mathsf{P}_L) = \{\lambda_g \in \mathrm{Diff}(G) \mid g \in G\}.$$

The group $\mathrm{Aut}(\mathsf{P}_L)$ is larger than $\mathrm{Sym}(\mathsf{P}_L)$: it contains also the right translations and conjugations by the elements of G.

Propositions 2.34 and 2.35. *The group* $\mathrm{Aut}(\mathsf{P})$ *is a subgroup of the automorphism group of the covariant derivative induced by* P*. If* M *is connected, then these groups are equal. The group* $\mathrm{Aut}(\mathsf{P})$ *is a subgroup also of the automorphism group of the spray generated by* P*.*

Conjugate parallelisms. Two parallelisms P_1 and P_2 on M are *conjugate* if

$$[X, Y] = 0 \quad \text{for all } X \in \mathfrak{X}_{\mathsf{P}_1}(M) \text{ and } Y \in \mathfrak{X}_{\mathsf{P}_2}(M).$$

On a connected manifold every parallelism has at most one conjugate parallelism. If a parallelism P on M admits a conjugate parallelism, then the torsion of P is parallel. Conversely, if (M, P) is a parallelized manifold with parallel torsion, then every point of M has a neighbourhood in which a conjugate parallelism exists (Lemmas 2.44, 2.46, cf. [20], Chapter IV, Problems).

Here we can make the following observations:

(i) *If P_1 and P_2 are conjugate parallelisms on M, then their induced covariant derivatives ∇_1 and ∇_2 are related by*

$$(\nabla_2)_X Y = (\nabla_1)_Y X + [X, Y]; \quad X, Y \in \mathfrak{X}(M).$$

The torsions of these parallelisms differ in sign (Lemmas 2.45 and 2.50). The covariant derivative ∇_1^+ associated to P_1 (see (B)/(i) above) exists, and $\nabla_2 = \nabla_1^+$ (Corollary 2.48).

(ii) *Conjugate parallelisms generate the same spray, and, if M is connected, have the same automorphism group (Lemmas 2.49 and 2.51).*

(iii) *If P and $\bar{\mathsf{P}}$ are conjugate parallelisms on M, X is a P-parallel vector field, and $\varphi^X : \mathcal{D}_X \subset \mathbb{R} \times M \to M$ is the flow of X, then*

$$((\varphi_t^X)_*)_p = \bar{\mathsf{P}}(p, (\varphi_t^X)_p) \quad \textit{for any } (t, p) \in \mathcal{D}_X$$

(Lemma 2.52).

Conformal conjugacy. If P is a parallelism on M and σ is a positive smooth function on M, then the mapping

$$\widetilde{\mathsf{P}} \colon (p, q) \in M \times M \mapsto \widetilde{\mathsf{P}}(p, q) := \frac{\sigma(p)}{\sigma(q)} \mathsf{P}(p, q) \in L(T_p M, T_q M)$$

is also a parallelism on M, obtained by a *conformal change of* P *with conformal factor* σ. Then the covariant derivatives ∇ induced by P and $\widetilde{\nabla}$ induced by $\widetilde{\mathsf{P}}$ furthermore their torsions T and $\widetilde{T}$ are related by

$$\widetilde{\nabla} = \nabla + d\sigma \otimes 1_{\mathfrak{X}(M)} \quad \text{and} \quad \widetilde{T} = T + d\sigma \wedge 1_{\mathfrak{X}(M)},$$

respectively, where $d\sigma \wedge 1_{\mathfrak{X}(M)} := d\sigma \otimes 1_{\mathfrak{X}(M)} - 1_{\mathfrak{X}(M)} \otimes d\sigma$ (Proposition 2.56).

Two parallelisms P_1 and P_2 on M are called *conformally conjugate* with conformal factor $\sigma \in C^\infty(M)$ if the parallelisms $\widetilde{\mathsf{P}}_1$ and $\widetilde{\mathsf{P}}_2$, obtained from P_1 and P_2 by conformal change with conformal factor σ, are conjugate. This holds if, and only if,

$$[X,Y] = (d\sigma \wedge 1_{\mathfrak{X}(M)})(X,Y) \quad \text{for all } X \in \mathfrak{X}_{\mathsf{P}_1}(M), Y \in \mathfrak{X}_{\mathsf{P}_2}(M)$$

(Lemma 2.59).

Chapter 3. Finsler functions and parallelisms. Let (M,P) be a parallelized manifold. We say that a Finsler function F on TM is *compatible with* P if

$$F_q \circ \mathsf{P}(p,q) = F_p \quad \text{for all } (p,q) \in M \times M.$$

More generally, F is *compatible with a covering parallelism* $(\mathcal{U}_\alpha, \mathsf{P}^\alpha)_{\alpha\in\mathcal{A}}$ of M if $F \restriction \tau^{-1}(\mathcal{U}_\alpha)$ is compatible with P^α for all $\alpha \in \mathcal{A}$.

Theorem 3.7. *If M is a parallelizable manifold and a Finsler function on TM is compatible with two conjugate parallelisms,* *then their common generated spray is the canonical spray of the Finsler function.*

Theorem 3.13. *A Finsler manifold is a generalized Berwald manifold if, and only if, the Finsler function is compatible with a covering parallelism.*

Theorem 3.14. *A Lie group equipped with a left invariant Finsler function is a generalized Berwald manifold.*

As an application of Theorems 3.13 and 3.14, two examples of proper generalized Berwald manifolds are given, thus fulfilling a suggestion of Hashiguchi in [23]: '...find much more interesting examples'.

Theorem 3.17. *Suppose that there exist two covering parallelisms $(\mathcal{U}_\alpha, \mathsf{P}_1^\alpha)_{\alpha\in\mathcal{A}}$ and $(\mathcal{U}_\alpha, \mathsf{P}_2^\alpha)_{\alpha\in\mathcal{A}}$ (with the same open covering) of a Finsler manifold (M, F) such that*

- *(i) the Finsler function F is compatible with both covering parallelisms;*
- *(ii) for all $\alpha \in \mathcal{A}$, the parallelisms P_1^α and P_2^α are conjugate.*

Then (M, F) is a Berwald manifold.

Theorem 3.19. *Suppose that there exist two covering parallelisms $(\mathcal{U}_\alpha, \mathsf{P}_1^\alpha)_{\alpha\in\mathcal{A}}$ and $(\mathcal{U}_\alpha, \mathsf{P}_2^\alpha)_{\alpha\in\mathcal{A}}$ (with the same open covering) of a Finsler manifold (M, F) such that*

- *(i) the Finsler function F is compatible with both covering parallelisms;*

(ii) for all $\alpha \in \mathcal{A}$, the parallelisms P_1^α and P_2^α are conformally *conjugate with the same conformal factor σ.*

Then (M, F) is a Wagner manifold.

A Finsler function F is called *strongly compatible* with P if they are compatible and their pregeodesics coincide.

Theorem 3.21. *If P is a parallelism on M compatible with a Finsler function F for M, then the following conditions are equivalent:*

(i) F is strongly compatible with P;

(ii) the geodesics of P and F coincide;

(iii) the P-parallel vector fields are Killing vector fields of (M, F).

Theorem 3.22. *If P is a parallelism on M such that it is strongly compatible with a Finsler function F on TM, then (M, F) is a Berwald manifold.*

Corollary 3.23. *Let G be a Lie group endowed with a left invariant Finsler function F. If the pregeodesics of F are the one-parameter subgroups of G and their translations, then (G, F) is a Berwald manifold.*

Theorem 3.24 (Structure theorem of parallelized Finsler manifolds)**.** *Assume that (M, F) is a connected Finsler manifold such that there exists a complete parallelism P on M such that its torsion is parallel, and it is strongly compatible with F. Then:*

(i) M is diffeomorphic to $H\backslash G$, where H is a discrete subgroup of a simply connected Lie group G;

(ii) the parallelism P is induced by the left parallelism P_L on G;

(iii) the Finsler function F is induced by a bi-invariant Finsler function on the Lie group G (and hence, (M, F) is a Berwald manifold).

3 Tudományos munkásság

Referált kiadványokban megjelent dolgozatok

[i] B. Aradi, *Left invariant Finsler manifolds are generalized Berwald*, European Journal of Pure and Applied Mathematics **8**(1) (2015), 118–125.

[ii] B. Aradi and D. Cs. Kertész, *Isometries, submetries and distance coordinates on Finsler manifolds*, Acta Mathematica Hungarica **143**(2) (2014), 337–350.

[iii] B. Aradi and D. Cs. Kertész, *A characterization of holonomy invariant functions on tangent bundles*, Balkan Journal of Geometry and Its Applications **19**(2) (2014), 1–10.

Benyújtott, ill. előkészítés alatt álló dolgozatok

[iv] B. Aradi, M. Barzegari and A. Tayebi, *Conjugate and conformally conjugate parallelisms on Finsler manifolds*, benyújtva.

[v] B. Aradi and J. Szilasi, *Finsler functions for parallelized manifolds*, előkészítés alatt.

Fontosabb előadások

(1) *Some remarks on the covariant derivative introduced by W. Sarlet*, The 6th Bilateral Workshop on Differential Geometry and its Applications, Cseh Köztársaság, Ostrava, 2011. május 27-29.

(2) *Manifolds with gauge-compatible structures*, 9th Joint Conference on Mathematics and Computer Science, Magyarország, Siófok, 2012. február 9-12.

(3) *Some characterizations of Finsler norms and Jordan–Neumann type results*, The 9th International Students' Conference on Analysis, Lengyelország, Ustroń, 2013. február 2-5.

(4) *Distance coordinates on a Finsler manifold*, Colloquium on Differential Geometry and its Applications, Debrecen, 2013. augusztus 26-30.

(5) *Finsler functions on Lie groups*, Romanian-Hungarian Bilateral Workshop, Debrecen, 2014. június 4.

(6) *Left invariant Finsler functions on a Lie group*, The 11th International Students' Conference on Analysis, Lengyelország, Ustroń, 2015. január 31 – február 3.

(7) *Finsler functions on Lie groups*, Miniworkshop on Differential Geometry, Debrecen, 2015. február 11.

A dolgozat teljes irodalomjegyzéke

[1] B. Aradi, *Left invariant Finsler manifolds are generalized Berwald*, Eur. J. Pure Appl. Math. **8**(1) (2015), 118–125.

[2] B. Aradi, M. Barzegari and A. Tayebi, *Conjugate and conformally conjugate parallelisms on Finsler manifolds*, submitted.

[3] B. Aradi and D. Cs. Kertész, *Isometries, submetries and distance coordinates on Finsler manifolds*, Acta Math. Hungar. **143**(2) (2014), 337–350.

[4] B. Aradi and D. Cs. Kertész, *A characterization of holonomy invariant functions on tangent bundles*, Balkan J. Geom. Appl. **19**(2) (2014), 1–10.

[5] H. Arcos and J. Pereira, *Torsion gravity: A Reappraisal*, Int. J. Mod. Phys. D **13** (2004), 2193–2240.

[6] R. L. Bishop and S. I. Goldberg, *Tensor analysis on manifolds*, Dover, New York, 1980.

[7] F. Brickell and R. S. Clark, *Differentiable Manifolds*, Van Nostrand, London, 1970.

[8] É. Cartan, *Sur les variétés à connexion affine et la théorie de la relativité généralisée*, Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. **40** (1923), 325–412.

[9] É. Cartan, *La géométrie des groupes de transformations*, J. Math. Pures Appl. **6** (1927), 1–119.

[10] É. Cartan and J. A. Schouten, *On the geometry of the group manifold of simple and semisimple groups*, Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A **29** (1926), 803–815.

[11] É. Cartan and J. A. Schouten, *On Riemannian geometries admitting an absolute parallelism*, Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A **29** (1926), 933–946.

[12] R. Debever (ed.), *Élie Cartan–Albert Einstein: Letters on Absolute Parallelism, 1929-1932*, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1979.

[13] S. Deng and Z. Hou, *Positive definite Minkowski Lie algebras and bi-invariant Finsler metrics on Lie groups*, Geom. Dedicata **136** (2008), 191–201.

[14] J. Dieudonné, *Treatise on Analysis*, Vol. IV, Academic Press, New York, 1974.

[15] A. Einstein, *Riemann-Geometrie mit Aufrechterhaltung des Begriffes des Fernparallelismus*, Berichte Preuss. Akad. Wiss., Berlin (1928), 217–221.

[16] A. Einstein, *Neue Möglichkeit für eine einheitliche Feldtheorie von Gravitation und Elektrizität*, Berichte Preuss. Akad. Wiss., Berlin (1928), 224–227.

[17] L. P. Eisenhart, *Spaces admitting complete absolute parallelism*, Bull. Amer. Math. Soc. **39** (1933), 217–226.

[18] J. Gallier, *Notes on Differential Geometry and Lie groups*, book in progress, 2013,
http://www.cis.upenn.edu/~jean/gbooks/manif.html.

[19] W. Graeub, *Liesche Gruppen und affin zusammenhängende Mannigfaltigkeiten*, Acta Math. **106** (1961), 65–111.

[20] W. Greub, S. Halperin and R. Vanstone, *Connections, Curvature and Cohomology*, Vol. 1, Academic Press, New York and London, 1972.

[21] W. Greub, S. Halperin and R. Vanstone, *Connections, Curvature and Cohomology*, Vol. 2, Academic Press, New York and London, 1973.

[22] J. Grifone, *Structure presque-tangente et connexions, I*, Ann. Inst. Fourier Grenoble **22**(1) (1972), 287–334.

[23] M. Hashiguchi, *Some problems on generalized Berwald spaces*, Rep. Fac. Sci. Kagoshima **16** (1983), 59–63.

[24] M. Hashiguchi and Y. Ichijyō, *On conformal transformations of Wagner spaces*, Rep. Fac. Sci. Kagoshima **10** (1977), 19–25.

[25] K. Hayashi and T. Shirafuji, *New General Relativity*, Phys. Rev. D **19** (1979), 3524–3553.

[26] S. Helgason, *Differential Geometry, Lie Groups and Symmetric Spaces*, Academic Press, New York, 1978.

[27] N. Hicks, *A theorem on affine connexions*, Illinois J. Math. **3** (1959), 242–254.

[28] F. W. Kamber and Ph. Tondeur, *Flat Manifolds With Parallel Torsion*, J. Differential Geom. **4** (1968), 385–389.

[29] J. Hilgert and K.-H. Neeb, *Structure and Geometry of Lie Groups*, Springer, 2012.

[30] Y. Ichijyō, *Finsler manifolds modeled on a Minkowski space*, J. Math. Kyoto Univ. **16** (1976), 639–652.

[31] K. Izumi and Y. C. Ong, *Cosmological perturbation in $f(T)$ gravity revisited*, J. Cosmol. Astropart. Phys. **1306** (2013), 029.

[32] S. Kikuchi, *On the condition that a space with (α, β) metric be locally Minkowskian*, Tensor N.S. **33** (1979), 242–246.

[33] H. Kleinert, *New Gauge Symmetry in Gravity and the Evanescent Role of Torsion*, Electron. J. Theor. Phys. **24** (2010), 287–298.

[34] D. Latifi and A. Razavi, *Bi-invariant Finsler Metrics on Lie Groups*, Aust. J. Basic & Appl. Sci., **5**(12) (2011), 507–511.

[35] D. Laugwitz, *Differential and Riemannian Geometry*, Academic Press, New York, 1965.

[36] Jeffrey M. Lee, *Manifolds and Differential Geometry*, Graduate Studies in Mathematics, Vol. 107 (AMS), 2009.

[37] John M. Lee, *Introduction to Smooth Manifolds (2nd edition)*, Springer, 2013.

[38] R. L. Lovas, *On the Killing vector fields of generalized metrics*, SUT J. Math. **40**(2) (2004), 133–156.

[39] M. Matsumoto and H. Shimada, *On Finsler spaces with 1-form metric*, Tensor N.S. **32** (1978), 161–169.

[40] Z. Muzsnay and G. Thompson, *Inverse problem of the calculus of variations on Lie groups*, Differential Geom. Appl. **23** (2005), 257–281.

[41] B. O'Neill, *Semi-Riemannian Geometry*, Academic Press, New York, 1983.

[42] R. Palais, *A global formulation of the Lie theory of transformation groups*, Mem. Amer. Math. Soc. **22** (1957), 19–41.

[43] P. E. Parker, *On some theorems of Geroch and Stiefel*, J. Math. Phys. **25** (1984), 597–599.

[44] N. Steenrod, *The topology of Fiber Bundles*, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1951.

[45] Z. I. Szabó, *Positive definite Berwald spaces (Structure theorems on Berwald spaces)*, Tensor N.S. **35** (1981), 25–39.

[46] Sz. Szakál and J. Szilasi, *A new approach to generalized Berwald manifolds I*, SUT J. Math. **37** (2001), 19–41.

[47] J. Szilasi and Sz. Szakál, *A new approach to generalized Berwald manifolds II*, Publ. Math. Debrecen **60** (2001), 429–453.

[48] J. Szilasi, R. L. Lovas and D. Cs. Kertész, *Several ways to a Berwald manifold – and some steps beyond*, Extracta Math. **26** (2011), 89–130.

[49] J. Szilasi, R. L. Lovas and D. Cs. Kertész, *Connections, Sprays and Finsler Structures*, World Scientific, 2014.

[50] J. Szilasi and Cs. Vincze, *On conformal equivalence of Riemann–Finsler metrics*, Publ. Math. Debrecen **52** (1998), 167–185.

[51] M. I. Wanas and H. A. Hassan, *Torsion field and dark energy*, BSG Proc. **21** (2014), 201–208.

[52] F. W. Warner, *The Conjugate Locus of a Riemannian Manifold*, Amer. J. Math. **87** (1965), 575–604.

[53] C. Wendl, *Lecture Notes on Bundles and Connections*, 2008, http://www.homepages.ucl.ac.uk/~ucahcwe/connections.html.

[54] J. A. Wolf, *On the geometry and classification of absolute parallelisms I*, J. Differential Geom. **6** (1972), 317–342.

[55] J. A. Wolf, *On the geometry and classification of absolute parallelisms II*, J. Differential Geom. **7** (1972), 19–44.

Nyilvántartási szám: DEENK/227/2015.PL
Tárgy: PhD Publikációs Lista

Jelölt: Aradi Bernadett
Neptun kód: V1ZKGU
Doktori Iskola: Matematika- és Számítástudományok Doktori Iskola
MTMT azonosító: 10038639

A PhD értekezés alapjául szolgáló közlemények

Idegen nyelvű tudományos közlemény(ek) külföldi folyóiratban (2)

1. **Aradi, B.**: Left invariant Finsler manifolds are generalized Berwald.
   Eur. J Pure Appl. Math. 8 (1), 118-125, 2015. ISSN: 1307-5543.

2. **Aradi, B.**, Kertész, D.C.: A characterization of holonomy invariant functions on tangent bundles.
   Balk. J. Geom. Appl. 19 (2), 1-10, 2014. ISSN: 1224-2780.

További Közlemények

Idegen nyelvű közlemény(ek) hazai folyóiratban (1)

3. **Aradi, B.**, Kertész, D.C.: Isometries, submetries and distance coordinates on Finsler manifolds.
   Acta Math. Hung. 143 (2), 337-350, 2014. ISSN: 0236-5294.
   DOI: http://dx.doi.org/10.1007/s10474-013-0381-1
   IF:0.429

A közlő folyóiratok összesített impakt faktora: 0,429
A közlő folyóiratok összesített impakt faktora (az értekezés alapjául szolgáló közleményekre): 0

A DEENK a Jelölt által az iDEa Tudóstérbe feltöltött adatok bibliográfiai és tudománymetriai ellenőrzését a tudományos adatbázisok és a Journal Citation Reports Impact Factor lista alapján elvégezte.

Debrecen, 2015.10.28.

UNIVERSITY OF DEBRECEN
UNIVERSITY AND NATIONAL LIBRARY

Registry number: DEENK/227/2015.PL
Subject: Ph.D. List of Publications

Candidate: Bernadett Aradi
Neptun ID: V1ZKGU
Doctoral School: Doctoral School of Mathematical and Computational Sciences
MTMT ID: 10038639

List of publications related to the dissertation

Foreign language scientific article(s) in international journal(s) (2)

1. **Aradi, B.**: Left invariant Finsler manifolds are generalized Berwald.
   Eur. J Pure Appl. Math. 8 (1), 118-125, 2015. ISSN: 1307-5543.

2. **Aradi, B.**, Kertész, D.C.: A characterization of holonomy invariant functions on tangent bundles.
   Balk. J. Geom. Appl. 19 (2), 1-10, 2014. ISSN: 1224-2780.

List of other publications

Foreign language scientific article(s) in Hungarian journal(s) (1)

3. **Aradi, B.**, Kertész, D.C.: Isometries, submetries and distance coordinates on Finsler manifolds.
   Acta Math. Hung. 143 (2), 337-350, 2014. ISSN: 0236-5294.
   DOI: http://dx.doi.org/10.1007/s10474-013-0381-1
   IF:0.429

Total IF of journals (all publications): 0,429
Total IF of journals (publications related to the dissertation): 0

The Candidate's publication data submitted to the iDEa Tudóstér have been validated by DEENK on the basis of Web of Science, Scopus and Journal Citation Report (Impact Factor) databases.

28 October, 2015