Szerző:

Dr. Kézi Csaba Gábor

Az elektronikus tananyag elkészítését a Pallas Athéné Domus Animae Alapítvány támogatta.

Szakmai lektor: Dr. Kocsis Imre Tibor

ISBN 978-963-490-005-4

Kiadó: Debreceni Egyetem, Műszaki Kar

(Pallas Athéné Domus Animae Alapítvány támogatásával)

DIFFERENCIÁL- ÉS INTEGRÁLSZÁMÍTÁS GAZDASÁGI ALKALMAZÁSOKKAL

Dr. Kézi Csaba Gábor

PADA

PALLAS ATHÉNÉ
DOMUS ANIMAE
ALAPÍTVÁNY

Előszó

Az oktatási segédanyag elkészülését a Pallas Athéné Domus Animae Alapítvány támogatta.

A tananyag célja kettős. Az egyik cél az, hogy segítse a gazdasági képzésben részt vevő hallgatók Gazdasági matematika I. vizsgájára való felkészítését. Tematikájában, felépítésében jól illeszkedik a Gazdasági matematika I. nevű tantárgyhoz, így ahhoz akár tankönyvként is használható.

A jegyzet három fő fejezetet tartalmaz. Minden fejezet rövid elméleti összefoglalóval kezdődik, melyet részletesen kidolgozott feladatok követnek. A feladatok között megtalálhatóak az egyszerűbb típusfeladatok, melyek megoldásával kellő ismeretet szerezhetnek a hallgatók az adott témakör elsajátításához, valamint megtalálhatóak a feladatok között a bonyolultabbak összetettebbek is, azok számára, akik mélyebben el szeretnének merülni az adott témakörben.

A tananyag másik célja, hogy felkészülését a hallgatókat azokra a későbbi félévek során hallgatott tantárgyakra (mikroökonómia, makroökonómia, nemzetközi gazdaságtan, stb.), amelyek erőteljesen építenek a matematika órán megszerzett ismeretanyagra. Emiatt a jegyzet sok olyan feladatot is tartalmaz, amely ilyen irányú alkalmazásokra helyezi a hangsúlyt.

A jegyzet három fő fejezete közül az első a függvény fogalmának kiépítését, a függvényekkel kapcsolatos alapfogalmakat, a differenciálhányados fogalmának előkészítését tartalmazza. A második fejezet a differenciálszámítás fogalmait mutatja be és ehhez kapcsolódó a differenciálszámítás közgazdasági alkalmazásiról szól. A harmadik fejezet az integrálszámítás témakörét dolgozza fel.

A tananyag összesen 209 részletesen kidolgozott feladatot tartalmaz.

A jegyzet lektorálásáért köszönettel tartozom Dr. Kocsis Imre tanszékvezető főiskolai tanárnak, aki hasznos észrevételekkel segítette munkámat.

Köszönettel tartozom Édesanyámnak és Páromnak, akik mindig mellettem állnak és segítenek.

Dr. Kézi Csaba Gábor
egyetemi adjunktus

1. fejezet

Függvénytani alapfogalmak és gazdasági alkalmazásaik

1.1. Halmazelméleti alapfogalmak

Elméleti összefoglaló

1.1.1. **Megjegyzés.** A halmaz, elem, eleme fogalmakat nem definiáljuk, adottnak tekintjük. A halmaz bizonyos jól meghatározott, különböző objektumok összességét jelenti. A halmazt alkotó objektumok a halmaz elemei. Egy halmazban minden elem csak egyszer fordulhat elő és az elemek sorrendje tetszőleges. Egy halmazt akkor tekintünk adottnak, ha minden elemről egyértelműen el tudjuk dönteni, hogy benne van-e a halmazban.

A halmazokat latin nagybetűkkel, a halmaz elemeit latin kisbetűkkel jelöljük.

Azt a tényt, hogy az a elem *eleme* az A halmaznak az $a \in A$ jelöléssel fejezzük ki, míg ennek tagadására az $a \notin A$ jelölést használjuk.

Halmazokat megadhatunk az elemeinek felsorolásával, például

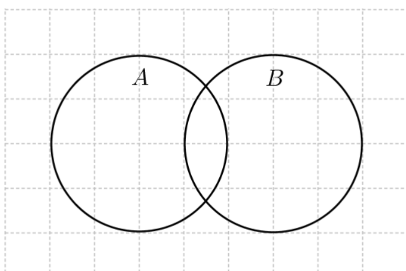
$$A = \{1;\ 2;\ 3\}$$

vagy valamilyen tulajdonságokkal, például

$$B = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\},$$

amit úgy olvasunk ki, hogy az A halmaz azokat az x valós számokat tartalmazza, melyekre teljesül az a tulajonság, hogy $x > 0$, vagyis a pozitív valós számokat.

A halmazokat síkbeli tartományokkal is szokás jelölni. Ilyenkor minden halmaznak egy zárt vonallal határolt tartomány felel meg. A halmaz elemeit a tartomány belüli pontok jelentik. Az ilyen módon elkészített ábrákat *Venn-diagram*nak nevezzük.



1.1.2. **Definíció.** *Üreshalmaz*nak nevezzük azt a halmazt, melynek egyetlen eleme sincs. Jele: $\emptyset$.

1.1.3. **Definíció.** Azt mondjuk, hogy az A és B halmazok *egyenlőek*, ha az elemeik ugyanazok. Jele: $A = B$. Ennek tagadására az $A \neq B$ jelölést használjuk.

1.1.4. **Definíció.** Azt mondjuk, hogy az A halmaz *részhalmaz*a a B halmaznak, ha az A halmaz minden eleme a B halmaznak is eleme. Jele: $A \subset B$. Az A halmaz valódi részhalmaza B-nek, ha A részhalmaza B-nek, de $A \neq B$.

1.1.5. **Definíció.** Egy halmaz összes részhalmazaiból képzett halmazt az adott halmaz *hatványhalmaz*ának nevezzük. Jele: $\mathcal{P}(A)$.

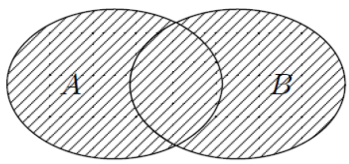
1.1.6. **Definíció.** Azt mondjuk, hogy az A és B hamlazok *diszjunkt*ak, ha nincs közös elemük.

A következő definícióban néhány műveletet definiálunk a halmazok között.

1.1.7. **Definíció.** Legyen $H \neq \emptyset$ (alaphalmaz) és $A, B, C \subset H$.

(1) Az A és B halmazok *unió*ján azt az $A \cup B$-vel jelölt halmazt értjük, melynek elemei legalább az egyik halmaznak elemei, azaz

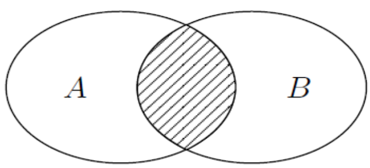
$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ vagy x} \in \text{B}\}.$$



$A \cup B$

(2) Az A és B halmazok *metszet*én azt az $A \cap B$-vel jelölt halmazt értjük, melynek elemei mindkét halmaznak elemei, azaz

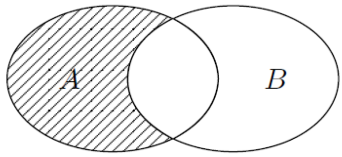
$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ és } x \in B\}.$$



$A \cap B$

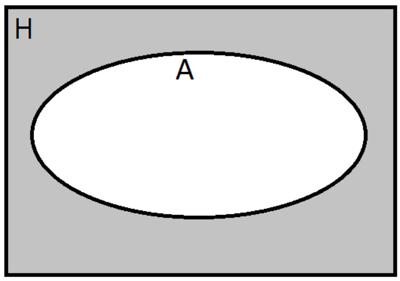
(3) Az A *különbség* B halmazon azt az $A \setminus B$-vel jelölt halmazt értjük, melynek elemei A-nak elemi, de B-nek nem elemei, azaz

$$A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ és } x \notin B\}.$$



$A \setminus B$

(4) Az A halmaz H halmazra vonatkozó *komplementer*én azt az $\overline{A}$ halmazt értjük, melynek elemei az A halmaznak nem elemei, de a H alaphalmaznak elemei.



1.1.8. **Definíció.** Az

$$\mathbb{N} = \{1;\ 2;\ 3\ ...\}$$

halmazt a *természetes számok halmazá*nak nevezzük. A természetes számok halmazának eleme az 1 szám és ha $n \in \mathbb{N}$, akkor $(n+1) \in \mathbb{N}$.

A

$$\mathbb{Z} = -\mathbb{N} \cup \mathbb{N} \cup \{0\} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$$

halmazt az *egész számok halmazá*nak nevezzük.

*Racionális számok halmazá*nak nevezzük azt a számhalmazt, amelynek elemei előállnak két egész szám hányadosaként. Jele: $\mathbb{Q}$.

*Valós számok halmazá*nak nevezzük a számegyenes pontjainak megfeleltethető számhalmazt. Jelölés: $\mathbb{R}$.

*Irracionális számok halmazá*nak nevezzük a racionális számok halmazának a valós számok halmazára vonatkozó komplementerét, azaz azokat a valós számokat, amelyek nem állnak elő két egész szám hányadosaként. Jele: $\mathbb{Q}^\star$.

Megjegyezzük, hogy a valós számok halmazának definíciója csak egy szemléletes „beazonosítás”, a valós számok halmazának intuitív fogalmára építő megfogalmazás. A valós számok halmazának precíz definíciója a testaxiómkra, rendezési axiómákra és a teljességi axiómára épül, amit itt az egyszerűség kedvéért tulajdonságokként mutatunk be.

1.1.9. **Megjegyzés.** A természetes számok halmazából az összeadás és a szorzás művelete nem vezet ki, vagyis két természetes szám összege, illetve két természetes szám szorzata is természetes szám. Azonban kivezet a kivonás, ami azt jelenti, hogy két természetes szám különbsége nem mindig lesz természetes szám.

Az egész számok halmazából az összeadás, a kivonás és a szorzás művelete nem vezet ki, vagyis két egész szám összege, különbsége, illetve két egész szám szorzata is egész szám. Azonban kivezet az osztás, ami azt jelenti, hogy két egész hányadosa nem mindig lesz egész szám.

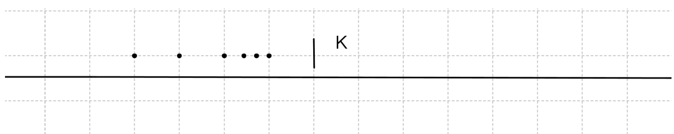
A racionális számok halmazából az összeadás, a kivonás, a szorzás és az osztás művelete nem vezet ki, vagyis két racionális szám összege, különbsége, szorzata és két nullától különböző racionális szám hányadosa is racionális szám. A racionális számok halmazából kivezet a gyökvonás, ami azt jelenti, hogy egy racionális szám négyzetgyöke nem mindig lesz racionális.

A racionális számok halmaza részhalmazként tartalmazza az egész számok és a természetes számok halmazát, pontosabban $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$.

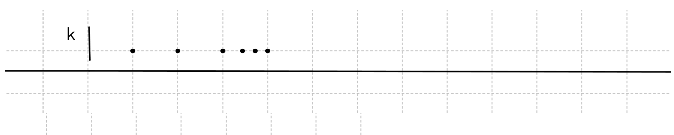
A valós számok halmazára teljesül, hogy

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}^\star.$$

1.1.10. **Definíció.** Az $A \subset \mathbb{R}$ halmaz *felülről korlátos*, ha létezik olyan K valós szám, amely nagyobb vagy egyenlő minden A-beli elemnél. Ekkor a K-t az A halmaz egy *felső korlát*jának mondjuk.



Az $A \subset \mathbb{R}$ halmaz *alulról korlátos*, ha létezik olyan k valós szám, amely kisebb vagy egyenlő minden A-beli elemnél. Ekkor a k-t az A halmaz egy *alsó korlát*jának mondjuk.



Azt mondjuk, hogy az $A \subset \mathbb{R}$ halmaz *korlátos*, ha alulról és felülről is korlátos.

Ha az A halmaz felülről korlátos, akkor az A felső korlátainak legkisebbikét az A *pontos felső korlát*jának vagy *szuprémum*ának nevezzük. Jele: $\sup A$.

Ha a pontos felső korlát eleme is a halmaznak, azaz $\sup A \in A$, akkor azt *maximum*nak mondjuk. Jele $\max A$.

Ha az A halmaz alulról korlátos, akkor az A alsó korlátainak legnagyobbikát az A *pontos alsó korlát*jának vagy *infimum*ának nevezzük. Jele: $\inf A$.

Ha a pontos alsó korlát eleme is a halmaznak, azaz $\inf A \in A$, akkor azt *minimum*nak mondjuk. Jele $\min A$.

1.1.11. **Megjegyzés.** Az infimum és szuprémum létezését az úgynevezett teljességi tulajdonság garantálja, amely szerint a valós számok halmazának minden nem üres, felülről korlátos részhalmazának van pontos felső korlátja.

Kidolgozott feladatok

1. **Feladat.** Tekintsük a

$$H = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8\}$$

alaphalmazt és az

$$A = \{2; 3; 5\}\,, \quad B = \{1; 2; 5; 8\}$$

halmazokat!

a) Készítsünk Venn-diagramot!

b) Adjuk meg az $A \cup B$ halmazt!

c) Adjuk meg az $A \cap B$ halmazt!,

d) Adjuk meg az $A \setminus B$ halmazt!

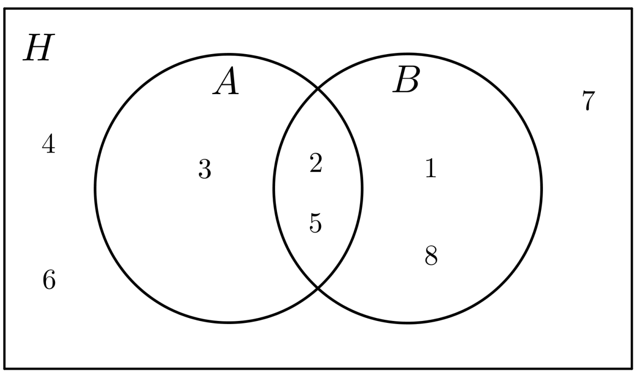
e) Adjuk meg a $B \setminus A$ halmazt!

f) Határozzuk meg az $\overline{A}$ halmazt!

g) Határozzuk meg a $\overline{B}$ halmazt!

<u>**Megoldás**</u>:

a) A Venn-diagram az alábbi:



b) A két halmaz uniójába azok az elemek tartoznak, amelyek legalább az egyik halmaznak elemei, így

$$A \cup B = \{1; 2; 3; 5; 8\}.$$

c) Két halmaz metszetébe azok az elemek tartoznak, amelyek mindkét halmaznak elemei, így
$$A \cap B = \{2; 5\}.$$

d) Az $A \setminus B$ halmaz elemei azok az elemek, amelyek az A halmaznak elemei, de a B halmaznak nem elemei, így
$$A \setminus B = \{3\}.$$

e) A $B \setminus A$ halmaz elemei azok az elemek, amelyek a B halmaznak elemei, de az A halmaznak nem elemei, így
$$B \setminus A = \{1; 8\}.$$

f) Az A halmaz komplementerébe azok az elemek tartoznak, amelyek az A halmaznak nem elemei, de az alaphalmaznak elemei, így
$$\overline{A} = \{1; 4; 6; 7; 8\}.$$

g) A B halmaz komplemeneterébe azok az elemek tartoznak, amelyek a B halmaznak nem elemei, de az alaphalmaznak elemei, így
$$\overline{B} = \{3; 4; 6; 7\}.$$

2. **Feladat.** Határozzuk meg az
$$A = \{1; 2; 3\}$$
halmaz összes részhalamzát! Adjuk meg az A halmaz hatványhalmazát!

Megoldás:

A keresett részhalmazok:
$$\{1\}; \{2\}; \{3\}; \{1; 2\}; \{1; 3\}; \{2; 3\}; \{1; 2; 3\}, \emptyset.$$
Az A halmaz hatványhalmaza az A összes részhalmazát tartalmazó halmaz, tehát
$$\mathcal{P}(A) = \big\{\{1\}; \{2\}; \{3\}; \{1; 2\}; \{1; 3\}; \{2; 3\}; \{1; 2; 3\}, \emptyset\big\}.$$

3. **Feladat.** Tekintsük az
$$A = \{x \in \mathbb{Z} \,|\, x^2 - x - 6 \leq 0\}$$
és a
$$B = \{x \in \mathbb{N} \,|\, 2x - 12 < 0\}$$
halmazokat!

a) Adjuk meg az A halmazt elemeinek felsorolásával!

b) Adjuk meg a B halmazt elemeinek felsorolásával!
c) Adjuk meg az $A \cup B$ halmazt!
d) Adjuk meg az $A \cap B$ halmazt!
e) Adjuk meg az $A \setminus B$ halmazt!
f) Adjuk meg a $B \setminus A$ halmazt!

Megoldás:

a) Első lépésben megoldjuk az

$$x^2 - x - 6 \leq 0$$

egyenlőtlenséget. Ehhez először megkeressük az

$$f(x) = x^2 - x - 6$$

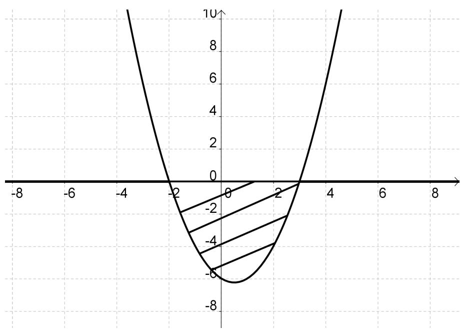
függvény zérushelyeit, ezért megoldjuk az

$$x^2 - x - 6 = 0$$

egyenletet. A másodfokú egyenlet megoldóképletét alkalmazva azt kapjuk, hogy

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot (-6)}}{2} = \frac{1 \pm 5}{2},$$

amiből $x_1 = -2$, illetve $x_2 = 3$ adódik. Ezek segítségével felvázoljuk az előbb definiált $f(x)$ függvény grafikonját:



Ebből leolvasható az egyenlőtlenség megoldása:

$$x \in [-2; 3].$$

Az intervallumba eső egész számok, vagyis az A halmaz:

$$A = \{-2; -1; 0; 1; 2; 3\}.$$

b) Most megoldjuk a $2x - 12 < 0$ egyenlőtlenséget. Mindkét oldalhoz 12-t hozzáadva, majd mindkét oldalt elosztva 2-vel

$$\begin{aligned} 2x - 12 &< 0 \\ 2x &< 12 \\ x &< 6 \end{aligned}$$

adódik, így a B halmaz:

$$B = \{1; 2; 3; 4; 5\}.$$

c) Az A és B halmazok uniója:

$$A \cup B = \{-2; -1; 0; 1; 2; 3; 4; 5\}.$$

d) Az A és B halmazok metszete:

$$A \cap B = \{1; 2; 3\}.$$

e) Az $A \setminus B$ halmaz:

$$A \setminus B = \{-2; -1; 0\}.$$

f) A $B \setminus A$ halmaz:

$$B \setminus A = \{4; 5\}.$$

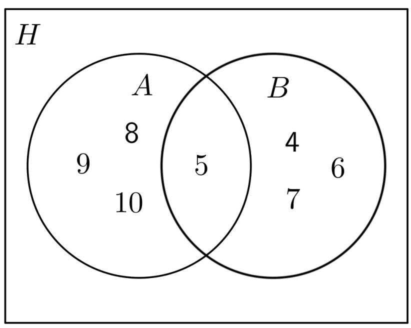
4. **Feladat.** Az A és B halmazok uniója, különbsége, illetve metszete:

$$\begin{aligned} &A \cup B = \{4;\ 5;\ 6;\ 7;\ 8;\ 9;\ 10\}; \\ &A \setminus B = \{8;\ 9;\ 10\}; \\ &A \cap B = \{5\}. \end{aligned}$$

Határozzuk meg az A és a B halmazokat!

Megoldás:

Venn diagramon ábrázolva a halmazokat az alábbi adódik:



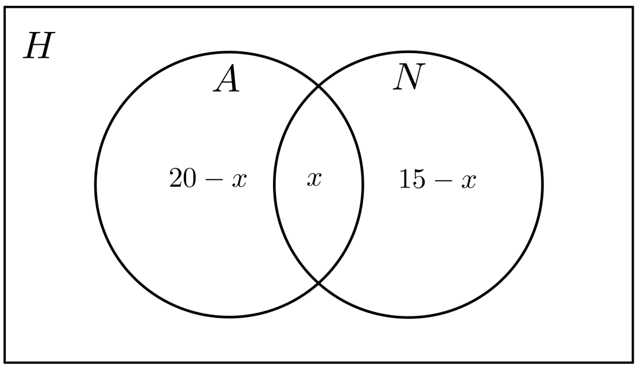
Leolvasható, hogy az A halmaz, illetve a B halmaz:

$$A = \{5; 8; 9; 10\}; \quad B = \{4; 5; 6; 7\}.$$

5. **Feladat.** Két cég együtt 26 darab terméket állít elő. Ebből 20 darab terméket az „A” cég, 15 darab terméket az „N” cég gyárt. Ezek közül hány darab olyan termék van, amelyet csak az „N” cég gyárt?

Megoldás:

A feladatot Venn-diagram segítségével is megoldhatjuk. Tegyük fel, hogy x darab olyan terméket van, amelyet mindkét cég gyárt. Ekkor csak azon termékek száma, amelyet csak az A cég gyárt $20-x$, azon termékek száma, amelyet csak az N cég gyárt $15-x$. Az említetteknek megfelelő Venn-diagram:



Megjegyezzük, hogy a Venn-diagramban most nem a halmaz elemi láthatóak, hanem a megfelelő halmazok elemszáma.
Tehát:

$$(20-x) + x + (15-x) = 26 \qquad \Rightarrow \qquad -x + 35 = 26$$

egyenlethez jutunk, amiből azt kapjuk, hogy $x = 9$, így 9 darab olyan termék van, amelyet az A és az N cég is gyárt. Tehát $15 - 9 = 6$ darab olyan termék van, amelyet kizárólag az N cég gyárt.

6. **Feladat.** Jelentse a H alaphalmaz azon Magyarországon élő személyek halmazát, akik adót fizetnek. Legyen az A halmaz azon adófizetők halmaza, akik legalább 5 millió forintos évi jövedelemmel rendelkeznek. Legyen a B halmaz azon adófizetők halmaza, akik legfeljebb 10 millió forintos évi jövedelemmel rendelkeznek.

a) Mit jelent az $A \cap B$ halmaz?

b) Mit jelent az $A \cup B$ halmaz?

c) Mit jelent az $A \setminus B$ halmaz?

d) Mit jelent az $A \setminus B$ halmaz?

Megoldás:

a) Az $A \cap B$ halmazba azok az adófizetők tartoznak, akik mindkét tulajdonsággal rendelkeznek, tehát az $A \cap B$ halmaz azokat az adófizetők jelenti, akik legalább 5 millió és legfeljebb 10 millió forint közötti éves jövedelemmel rendelkeznek.

b) Az $A \cup B$ halmazba azok az adófizetők tartoznak, akik legalább az egyik tulajdonsággal rendelkeznek, tehát az $A \cup B$ halmaz azokat az adófizetők jelenti, akik legalább 5 millió vagy legfeljebb 10 millió forint közötti éves jövedelemmel rendelkeznek, amely halmaz minden magyarországi adófizetőt tartalmaz.

c) Az $A \setminus B$ halmaz azon adófizetőket jelenti, akik 10 millió forintnál nagyobb éves jövedelemmel rendelkeznek.

d) A $B \setminus A$ halmaz azon adófizetőket jelenti, akik 5 millió forintnál kevesebb éves jövedelemmel rendelkeznek.

7. **Feladat.** Vizsgáljuk meg az

$$A = \left\{ 3 + \frac{2}{n} \,\middle|\, n \in \mathbb{N} \right\}$$

halmazt korlátosság szempontjából!

Megoldás:

Az

$$A = \left\{ 3 + \frac{2}{n} \,\middle|\, n \in \mathbb{N} \right\} = \left\{ 5; 4; 3 + \frac{2}{3}; 3 + \frac{1}{2} \dots \right\}$$

halmaz

- alulról korlátos, mert minden $x \in A$ esetén $x \leq 5$;
- felülről korlátos, mert minden $x \in A$ esetén $x > 3$;
- korlátos, mert alulról és felülről is korlátos;
- infimuma: 3;
- szuprémuma: 5;
- minimuma: nincs;
- maximuma: 5.

8. **Feladat.** Vizsgáljuk meg az

$$A = \left\{ (-2)^n \,\middle|\, n \in \mathbb{N} \right\}$$

halmazt korlátosság szempontjából!

<u>**Megoldás**</u>:

Az

$$A = \left\{ (-2)^n \,\middle|\, n \in \mathbb{N} \right\} = \{-2; 4; -8; 16; \ldots\}$$

halmaz

- nem alulról korlátos;
- nem felülről korlátos;
- nem korlátos;
- infimuma: nincs;
- szuprémuma: nincs;
- minimuma: nincs;
- maximuma: nincs.

9. **Feladat.** Tekintsük az

$$A = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x^2 - 7x + 10 \leq 0\}$$

és a

$$B = \left\{ x \in \mathbb{R} \,\middle|\, \frac{x+2}{x-3} > 2 \right\}$$

halmazokat!

a) Adjuk meg az A halmazt intervallumként vagy intervallumok uniójaként!

b) Határozzuk meg az $A \cap \mathbb{N}$ halmazt!

c) Adjuk meg a B halmazt intervallumként vagy intervallumok uniójaként!

d) Adjuk meg az $A \cup B$ halmazt!

e) Adjuk meg az $A \cap B$ halmazt!

f) Korlátos-e az A halmaz?

g) Határozzuk meg az A halmaz infimumát!

h) Határozzuk meg az A halmaz szuprémumát!

i) Határozzuk meg az A halmaz minimumát!

j) Határozzuk meg az A halmaz maximumát!

<u>**Megoldás**</u>:

a) Az $x^2 - 7x + 10 \leq 0$ egyenlőtlenség megoldásához tekintsük először az $f(x) = x^2 - 7x + 10$ függvényt. Ennek zérushelyei:

$$x_{1,2} = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 40}}{2} = \frac{7 \pm 3}{2},$$

így a függvény grafikonjából leolvasható, hogy

$$A = [2; 5].$$

b) Az $A \cap \mathbb{N}$ halmaz:

$$\{2; 3; 4; 5\}.$$

c) Az

$$\frac{x+2}{x-3} > 2$$

egyenlőtlenség megoldásához először nullára rendezzük az egyenlőtlenséget:

$$\frac{x+2}{x-3} > 2 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{-x+8}{x-3} > 0.$$

Ezt követően megvizsgáljuk, hogy egy tört hogy lehet pozitív. Két esetben: vagy úgy, hogy a számláló és a nevező is pozitív, vagy úgy, hogy a számláló és a nevező is negatív. Az első esetben $x < 8$ és $x > 3$ adódik, a második esetben pedig $x > 8$ és $x < 3$. Az első esetben a megoldáshalmaz $]3; 8[$, a második esetben ellentmondásra jutunk, így a B halmaz:

$$B =]3; 8[.$$

d) Az A és B halmazok uniója:

$$A \cup B = [2; 8[.$$

e) Az A és B halmazok metszete:

$$A \cap B =]3; 5].$$

f) Az A halmaz korlátos, mert alulról és felülről is korlátos.

g) Az A halmaz infimuma 2;

h) Az A halmaz szuprémuma: 5;

i) Az A halmaz minimuma: 2;

j) Az A halmaz maximuma: 5.

1.2. Függvényekkel kapcsolatos alapfogalmak

Elméleti összefoglaló

A függvények mind az elméleti, mind az alkalmazott matematika, így a gazdasági matematika területén is, kulcsfontosságú szerepet töltenek be.

A gazdasági matematikában többek között megjelenik a keresleti függvény, kínálati függvény, költségfüggvény, bevételi függvény, nyereség (profit) függvény fogalma. Ebben a fejezetben függvények fogalmát vezetjük be és a legfontosabb tulajdonságait tárgyaljuk.

Ebben a szakaszban a D halmaz a valós számok halmazának egy tetszőleges, nem üres részhalmazát jelöli.

1.2.1. **Definíció.** Legyenek A és B halmazok. Ekkor az $(a;b)$ szimbólumot *rendezett elempár*nak nevezzük, ha $a \in A$ és $b \in B$. Az $(a;b) = (c;d)$ egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha $a = c$ és $b = d$.

Az A és B halmaz *Descartes-szorzat*án azt az $A \times B$-vel jelölt halmazt értjük, melynek elemei olyan rendezett elempárokból állnak, melyek első tagja az A, második tagja a B halmazból való, azaz

$$A \times B = \{(a;\, b) \mid a \in A,\, b \in B\}.$$

Két halmaz Descartes-szorzatának bármely részhalmazát *reláció*nak nevezzük.

Legyenek A és B halmazok. Az $f \subset A \times B$ relációt *függvény*nek nevezzük, ha az A halmaz minden eleme legfeljebb egy B halmazbeli elemmel áll relációban.

Az A halmazt a függvény *értelmezési tartomány*ának nevezzük. Az f függvény értelmezési tartományát D_f-el is szokás jelölni.

1.2.2. **Megjegyzés.** Ha az f reláció függvény, akkor az $f \subset A \times B$ jelölés helyett az $f\colon A \to B$ jelölést használjuk. Ha $(x;y) \in f$, akkor azt úgy jelöljük, hogy $f(x) = y$, és úgy olvassuk ki, hogy az f függvény x helyen felvett helyettesítési értéke y, vagy hogy az f függvény az x elemhez az y elemet rendeli hozzá.

1.2.3. **Definíció.** Az $f\colon D \to \mathbb{R}$ függvény *értékkészlet*e az $f(x)$ függvényértékek halmaza. Az értékkészletet R_f-el is szokás jelölni:

$$R_f = \{y \mid f(x) = y\}.$$

Az $f\colon D \to \mathbb{R}$ függvény *grafikon*jának nevezzük az

$$\operatorname{graf}(f) = \{(x; y) \mid x \in D\}$$

halmazt.

Az $f\colon D \to \mathbb{R}$ függvénynek az $x_0 \in D$ helyen *zérushely*e van, ha $f(x_0) = 0$.

1.2.4. **Definíció.** Az $f\colon D \to \mathbb{R}$ függvény

- *alulról korlátos*, ha az értékkészlete alulról korlátos;
- *felülről korlátos*, ha az értékkészlete felülről korlátos;
- *korlátos*, ha az értékkészlete korlátos.

Az $f\colon D \to \mathbb{R}$ függvény *infimum*a, illetve *szuprémum*a az értékkészletének infimuma, illetve szuprémuma.

1.2.5. **Definíció.** Az $f\colon D \to \mathbb{R}$ függvény

- *monoton növekvő*, ha minden $x_1, x_2 \in D$ esetén, melyre $x_1 < x_2$, teljesül, hogy $f(x_1) \leq f(x_2)$;
- *monoton csökkenő*, ha minden $x_1, x_2 \in D$ esetén, melyre $x_1 < x_2$, teljesül, hogy $f(x_1) \geq f(x_2)$;
- *szigorúan monoton növekvő*, ha minden $x_1, x_2 \in D$, $x_1 < x_2$ esetén $f(x_1) < f(x_2)$;
- *szigorúan monoton csökkenő*, ha minden $x_1, x_2 \in D$, $x_1 < x_2$ esetén $f(x_1) > f(x_2)$.

1.2.6. **Definíció.** Az $f\colon D \to \mathbb{R}$ függvénynek az x_0 helyen

- *maximuma* van, ha $f(x) \leq f(x_0)$ minden $x \in D$ esetén, azaz ha $f(x_0)$ az f értékkészletének legnagyobb eleme;
- *minimuma* van, ha $f(x) \geq f(x_0)$ minden $x \in D$ esetén, azaz ha $f(x_0)$ az f értékkészletének legkisebb eleme;
- *szélsőérték*e van, ha minimuma vagy maximuma van az x_0 helyen.

1.2.7. **Definíció.** Az x_0 valós szám $\varepsilon > 0$ sugarú környezetén az

$$]x_0 - \varepsilon; x_0 + \varepsilon[$$

intervallumot értjük.

1.2.8. **Definíció.** Az $f\colon D \to \mathbb{R}$ függvénynek az x_0 helyen

- *lokális (helyi) maximum*a van, ha létezik olyan $\varepsilon > 0$ valós szám, amelyre $f(x) \leq f(x_0)$ teljesül minden $x \in]x_0 - \varepsilon; x_0 + \varepsilon[$ esetén, azaz ha f-nek van olyan környezete, amelyben $f(x_0)$ a legnagyobb függvényérték;

- *lokális (helyi) minimuma* van, ha létezik $\varepsilon > 0$ valós szám úgy, hogy $f(x) \geq f(x_0)$ minden $x \in]x_0 - \varepsilon; x_0 + \varepsilon[$ esetén, azaz ha f-nek van olyan környezete, amelyben $f(x_0)$ a legkisebb függvényérték;
- *lokális szélsőértéke* van, ha lokális minimuma vagy lokális maximuma van az x_0 helyen.

1.2.9. **Megjegyzés.** Ha létezik olyan ε pozitív valós szám, hogy az $f\colon D \to \mathbb{R}$ függvény monoton csökkenő az $[x_0 - \varepsilon; x_0]$ intervallumon és monoton növekvő az $[x_0, x_0 + \varepsilon]$ intervallumon, akkor f-nek az x_0 helyen lokális minimuma van.

Ha létezik olyan ε pozitív valós szám, hogy az $f\colon D \to \mathbb{R}$ függvény monoton növekvő az $[x_0 - \varepsilon; x_0]$ intervallumon és monoton csökkenő az $[x_0; x_0 + \varepsilon]$ intervallumon, akkor f-nek az x_0 helyen lokális maximuma van.

1.2.10. **Definíció.** Legyen I egy nyílt intervallum. Az $f\colon I \to \mathbb{R}$ függvény

- *konvex*, ha minden $u, v \in I$, $u < v$ esetén az $\big(u; f(u)\big)$ és $\big(v; f(v)\big)$ pontokat összekötő szakasz az f függvény felett halad, azaz ha minden $u, v \in I$ és minden $t \in [0; 1]$ esetén

$$f\big(t \cdot u + (1-t) \cdot v\big) \leq t \cdot f(u) + (1-t) \cdot f(v).$$

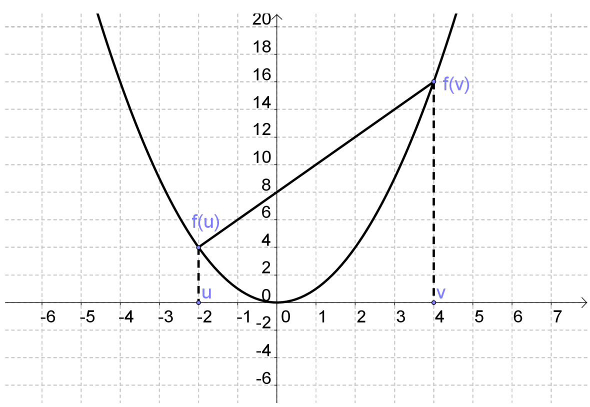
A

$$t \cdot u + (1-t) \cdot v \qquad t \in [0; 1]$$

a számegyenesen az u és v értékeket összekötő szakasz.
Az

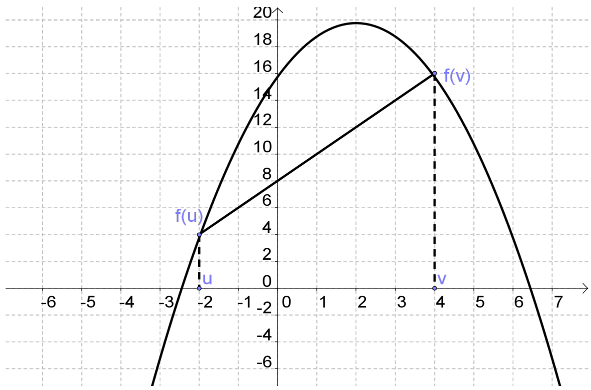
$$f\big(t \cdot u + (1-t) \cdot v\big) \qquad t \in [0; 1]$$

az $\big(u; f(u)\big)$ és $\big(v; f(v)\big)$ pontokat összekötő szakasz.



- *konkáv*, ha minden $u, v \in I$, $u < v$ esetén az $\big(u; f(u)\big)$ és $\big(v; f(v)\big)$ pontokat összekötő szakasz az f függvény alatt halad, azaz ha minden $u, v \in I$ és minden $t \in [0; 1]$ esetén

$$f\big(t \cdot u + (1-t) \cdot v\big) \geq t \cdot f(u) + (1-t) \cdot f(v).$$



1.2.11. **Definíció.** Legyen I nyílt intervallum. Azt mondjuk, hogy az $f\colon I \to \mathbb{R}$ függvénynek az $x_0 \in I$ helyen *inflexiós hely*e van, ha x_0-ban megváltozik a konvexitása, azaz létezik $\varepsilon > 0$ úgy, hogy az $[x_0 - \varepsilon; x_0]$ intervallumon f konkáv és az $[x_0; x_0 + \varepsilon]$ intervallumon konvex, vagy az $[x_0 - \varepsilon; x_0]$ intervallumon f konvex és az $[x_0; x_0 + \varepsilon]$ intervallumon konkáv.

1.2.12. **Definíció.** Legyen a D halmaz szimmetrikus az origóra, ami azt jelenti, hogy ha $x \in D$, akkor $-x \in D$.

Azt mondjuk, hogy az $f\colon D \to \mathbb{R}$ függvény

- *páros*, ha $f(-x) = f(x)$ minden $x \in D$ esetén;
- *páratlan*, ha $f(-x) = -f(x)$ minden $x \in D$ esetén.

1.2.13. **Megjegyzés.** Egy függvény

- pontosan akkor páros, ha a grafikonja tengelyesen szimmetrikus az y tengelyre;
- pontosan akkor páratlan, ha a grafikonja középpontosan szimmetrikus az origóra.

1.2.14. **Definíció.** Azt mondjuk, hogy az $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény *periódikus*, ha van olyan $p \in \mathbb{R}$ pozitív valós szám, hogy minden $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$f(x+p) = f(x).$$

Ha az f függvény periódikus, akkor végtelen sok megfelelő p érték van. Ha a definícióban meghatározott tulajdonságú p értékek halmazának van legkisebb eleme, akkor ezt a számot az f függvény *periódus*ának nevezzük.

1.2.15. **Definíció.** Az $f\colon D \to \mathbb{R}$ és a $g\colon D \to \mathbb{R}$ függvények

- *összege* $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$, $x \in D$;
- *különbsége* $(f-g)(x) = f(x) - g(x)$, $x \in D$;
- *szorzata* $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$, $x \in D$;
- *hányadosa* $\dfrac{f}{g}(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$, ha $g(x) \neq 0$, $x \in D$ esetén.

Az előbbiekben definiált műveleteket szokás pontonkénti műveleteknek is nevezni.

1.2.16. **Definíció.** Az $f\colon D \to B \subset \mathbb{R}$ függvény

- *injektív*, ha különböző elemekhez különböző elemeket rendel, azaz, ha minden $x_1, x_2 \in D$, $x_1 \neq x_2$ esetén $f(x_1) \neq f(x_2)$;
- *szürjektív*, ha minden értékkészletbeli elem megjelenik képként, azaz ha $R_f = B$;
- *bijektív*, ha injektív és szürjektív.

1.2.17. **Megjegyzés.** Az, hogy egy függvény injektív szemléletesen azt jelenti, hogy ha a függvény grafikonját „vízszintes vonalakkal elmetsszük, akkor mindenhol legfeljebb egy metszéspontot kapunk”.

1.2.18. **Definíció.** Azt mondjuk, hogy az $f\colon D \to \mathbb{R}$ függvény *invertálható*, ha az inverze is függvény.

1.2.19. **Megjegyzés.** A definíció alapján nyilvánvaló, hogy egy $f\colon D \to \mathbb{R}$ függvény pontosan akkor invertálható, ha injektív.

1.2.20. **Definíció.** Legyenek D és H a valós számok halmazának tetszőleges részhalmazai, továbbá f, illetve g a D, illetve H halmazon értelmezett valós értékű függvények. Tegyük fel, hogy az f függvény értékkészlete részhalmaza a g függvény értelmezési tartományának. A g és f függvények *kompozíció*ján vagy *összetett függvény*én a $g \circ f\colon D \to \mathbb{R}$

$$g \circ f(x) = g\big(f(x)\big)$$

függvényt értjük.

1.2.21. **Megjegyzés.** Fontos megjegyezni, hogy általában

$$f \circ g \neq g \circ f,$$

vagyis a függvények kompozíciója, mint művelet nem kommutatív.

1.2.22. **Példa.** Ha $f(x) = \sin x$ és $g(x) = 4x + 10$, akkor

$$f \circ g(x) = f\big(g(x)\big) = \sin(4x + 10)$$

és

$$g \circ f(x) = g\big(f(x)\big) = 4 \cdot \sin x + 10.$$

1.2.23. **Megjegyzés.** Ha az $f\colon D \to \mathbb{R}$ függvény invertálható, és az inverze f^{-1}, akkor

$$f \circ f^{-1}(x) = f^{-1} \circ f(x) = x.$$

1.2.24. **Megjegyzés.** Ha az $f\colon D \to \mathbb{R}$ függvény invertálható, akkor

$$\big(f^{-1}\big)^{-1}(x) = f(x).$$

Kidolgozott feladatok

10. **Feladat.** Adjuk meg az $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 2x$ függvény helyettesítési értékét az $x = 2$ helyen!

Megoldás:

A helyettesítési érték:

$$f(2) = 2^2 + 2 \cdot 2 = 4 + 4 = 8.$$

11. **Feladat.** Tekintsük az

$$f(x) = 2x - x^2$$

függvényt! Számoljuk ki az

$$f(a+3) - f(a-3)$$

értéket, ha $a \in \mathbb{R}$ paraméter.

Megoldás:

Mivel

$$\begin{aligned} f(a+3) &= 2 \cdot (a+3) - (a+3)^2 = 2a + 6 - (a^2 + 6a + 9) = \\ &= 2a + 6 - a^2 - 6a - 9 = -a^2 - 4a - 3, \end{aligned}$$

továbbá

$$\begin{aligned} f(a-3) &= 2 \cdot (a-3) - (a-3)^2 = 2a - 6 - (a^2 - 6a + 9) = \\ &= 2a - 6 - a^2 + 6a - 9 = -a^2 + 8a - 15, \end{aligned}$$

ezért

$$\begin{aligned} f(a+3) - f(a-3) &= -a^2 - 4a - 3 - (-a^2 + 8a - 15) = \\ &= -a^2 - 4a - 3 + a^2 - 8a + 15 = -12a + 12. \end{aligned}$$

12. **Feladat.** Tekintsük az $f\colon]-\infty; 0] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{-x}$ függvényt! Adjuk meg az értelmezési tartománynak azt az elemét, amelyre a függvényérték 2.

Megoldás:

Azt az x értéket keressük, amelyre $\sqrt{-x} = 2$ teljesül. Az egyenlet mindkét oldalát négyzetre emelve azt kapjuk, hogy $-x = 4$. A keresett szám tehát az $x = -4$.

13. **Feladat.** Tekintsük az $f\colon \mathbb{R} \setminus \{3\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x-3}$ függvényt!

a) Adjuk meg az f függvény helyettesítési értékét az $x = 4$ helyen!

b) Adjuk meg az értelmezési tartománynak azt az elemét, amelyre a függvényérték 2.

c) Adjuk meg azokat az x valós számokat, amelyekre a függvényérték negatív!

Megoldás:

a) Az f függvény helyettesítési értékét az $x = 4$ helyen:

$$f(4) = \frac{1}{4-3} = 1.$$

b) Az értelmezési tartománynak azt az elemét, amelyre a függvényérték 2 az $f(x) = 2$ egyenlet megoldása adja:

$$\frac{1}{x-3} = 2 \qquad \Rightarrow \qquad 1 = 2x - 6,$$

azaz $x = 3,5$.

c) Azokat az x valós számokat keressük, amelyre $f(x) < 0$, azaz az

$$\frac{1}{x-3} < 0$$

egyenlőtlenség megoldását. Mivel a számláló negatív szám, ezért a tört csak úgy lehet negatív, ha a nevező pozitív, azaz ha $x - 3 > 0$, ami ekvivalens azzal, hogy $x > 3$, így a keresett valós számok a $]3; \infty[$ intervallum elemei.

14. **Feladat.** Határozzuk meg a valós számok halmazának azt a legbővebb részhalmazát, amelyen az

$$f(x) = \sqrt{6 - 2x}$$

függvény értelmezve van!

Megoldás:

Mivel páros gyökkitevőjű gyök alatt csak nemnegatív szám állhat, ezért az értelmezési tartomány megadásához meg kell oldanunk a

$$6 - 2x \geq 0$$

egyenlőtlenséget, amiből azt kapjuk, hogy $x \leq 3$, így az értelmezési tartomány a $]-\infty; 3]$ intervallum.

15. **Feladat.** Határozzuk meg a valós számok halmazának azt a legbővebb részhalmazát, amelyen az

$$f(x) = \sqrt{4 - x^2}$$

függvény értelmezve van!

<u>**Megoldás**</u>:

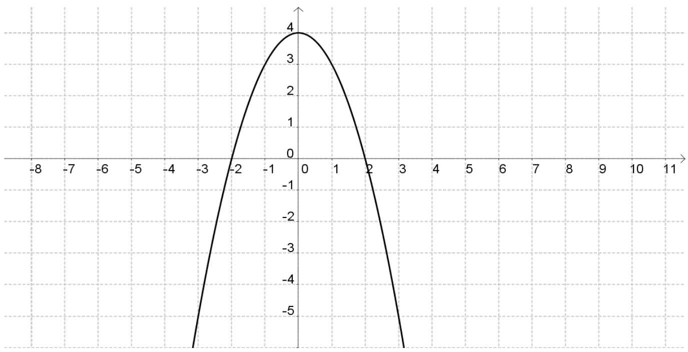
Mivel páros gyökkitevőjű gyök alatt csak pozitív szám állhat, ezért az értelmezési tartomány megadásához meg kell oldanunk a

$$4 - x^2 \geq 0$$

egyenlőtlenséget. Az egyenlőtlenséget grafikusan oldjuk meg. Ehhez első lépésben meghatározzuk az $x \mapsto 4 - x^2$ függvény zérushelyeit:

$$\begin{aligned} 4 - x^2 &= 0 \\ 4 &= x^2 \\ \pm 2 &= x. \end{aligned}$$

Ezután felvázoljuk az $x \mapsto 4 - x^2$ függvény grafikonját:



Leolvashatjuk, hogy az egyenlőtlenség megoldása és így egyben az $f(x)$ függvény értelmezési tartománya:

$$D_f \colon x \in [-2; 2].$$

16. **Feladat.** Határozzuk meg a valós számok halmazának azt a legbővebb részhalmazát, amelyen az

$$f(x) = \lg(4 - 2x)$$

függvény értelmezve van!

<u>**Megoldás**</u>:

Tudjuk, hogy a logaritmus függvény csak pozitív számokra értelmezhető, így logaritmus mögötti kifejezésnek pozitívnak kell lenni, azaz meg kell oldanunk a

$$4 - 2x > 0$$

egyenlőtlenséget, amiből azt kapjuk, hogy $x < 2$, így a függvény értelmezési tartománya a $]-\infty; 2[$ intervallum.

17. **Feladat.** Vizsgáljuk meg paritás szempontjából az

$$f(x) = \frac{x^2}{\sin 5x}$$

függvényt!

Megoldás:

Felhasználva, hogy a szinusz függvény páratlan, azaz $\sin(-x) = -\sin x$, azt kapjuk, hogy

$$f(-x) = \frac{(-x)^2}{\sin(-5x)} = \frac{x^2}{-\sin 5x} = \\ = -\frac{x^2}{\sin 5x} = -f(x),$$

így a függvény páratlan.

18. **Feladat.** Vizsgáljuk meg paritás szempontjából szerint az

$$f(x) = \frac{x^4}{\cos 2x}$$

függvényt!

Megoldás:

Felhasználva, hogy a koszinusz függvény páros, azaz $\cos(-x) = \cos x$, azt kapjuk, hogy

$$f(-x) = \frac{(-x)^4}{\cos(-2x)} = \frac{x^4}{\cos 2x} = f(x),$$

így a függvény páros.

19. **Feladat.** Vizsgáljuk meg paritás szempontjából az

$$f(x) = x^2 + \frac{1}{x^2}$$

függvényt!

Megoldás:

Mivel
$$f(-x) = (-x)^2 + \frac{1}{(-x)^2} = x^2 + \frac{1}{x^2} = f(x),$$
így a függvény páros.

20. **Feladat.** Tekintsük az $f(x) = \sin x$ és a $g(x) = x^2 + 7x - 3$ függvényeket!

a) Határozzuk meg az $f \circ g$ összetett függvényt!

b) Határozzuk meg az $g \circ f$ összetett függvényt!

Megoldás:

a) Az összetett függvény definícióját használva azt kapjuk, hogy
$$f \circ g(x) = f\big(g(x)\big) = f(x^2 + 7x - 3) = \sin(x^2 + 7x - 3).$$

b) Az összetett függvény definícióját használva azt kapjuk, hogy
$$\begin{aligned} g \circ f(x) = g\big(f(x)\big) = g(\sin x) &= (\sin x)^2 + 7 \cdot \sin x - 3 \\ &= \sin^2 x + 7 \cdot \sin x - 3. \end{aligned}$$

21. **Feladat.** Tekintsük az $f(x) = 2^x$ és a $g(x) = 4x + 1$ függvényeket!

a) Határozzuk meg az $f \circ g$ összetett függvényt!

b) Határozzuk meg az $g \circ f$ összetett függvényt!

Megoldás:

a) Az összetett függvény definícióját használva azt kapjuk, hogy
$$f \circ g(x) = f\big(g(x)\big) = f(4x + 1) = 2^{4x+1}.$$

b) Az összetett függvény definícióját használva azt kapjuk, hogy
$$g \circ f(x) = g\big(f(x)\big) = g(2^x) = 4 \cdot 2^x + 1.$$

22. **Feladat.** Tekintsük az $f(x) = \sqrt{x}$ és a $g(x) = x + 7$ függvényeket!

a) Határozzuk meg az $f \circ g$ összetett függvényt!

b) Határozzuk meg az $g \circ f$ összetett függvényt!

c) Határozzuk meg az $f \circ f$ összetett függvényt!

d) Határozzuk meg az $g \circ g$ összetett függvényt!

e) Adjuk meg a valós számok halmazának azt a legbővebb részhalmazát, amelyen az összetett függvények értelmezve vannak!

f) Oldjuk meg az $f \circ g(x) = g \circ f(x)$ egyenletet!

Megoldás:

a) Az összetett függvény definícióját használva azt kapjuk, hogy
$$f \circ g(x) = f\big(g(x)\big) = f(x+7) = \sqrt{x+7}.$$

b) Az összetett függvény definícióját használva azt kapjuk, hogy
$$g \circ f(x) = g\big(f(x)\big) = g(\sqrt{x}) = \sqrt{x} + 7.$$

c) Az összetett függvény definícióját használva azt kapjuk, hogy
$$f \circ f(x) = f\big(f(x)\big) = f(\sqrt{x}) = \sqrt{\sqrt{x}} = \sqrt[4]{x}.$$

d) Az összetett függvény definícióját használva azt kapjuk, hogy
$$g \circ g(x) = g\big(g(x)\big) = g(x+7) = x + 14.$$

e) Az $f \circ g$ függvény értelmezési tartománya:
$$D_{f \circ g} = [-7; \infty[.$$

A $g \circ f$ függvény értelmezési tartománya:
$$D_{g \circ f} = [0; \infty[.$$

f) Megoldjuk a
$$\sqrt{x+7} = \sqrt{x} + 7$$
egyenletet. Mindkét oldalt négyzetre emelve, majd elvégezve az összevonásokat és megfelelően rendezve az egyenletet
$$\begin{aligned} x + 7 &= (\sqrt{x} + 7)^2 \\ x + 7 &= x + 14 \cdot \sqrt{x} + 49 \\ -42 &= 14 \cdot \sqrt{x} \end{aligned}$$
adódik, ami ellentmondás, ugyanis az egyenlet bal oldalán negatív számot kaptunk, míg a jobb oldalon egy szám négyzetgyökének pozitív számszorosa szerepel, ami pozitív.

23. **Feladat.** Tekintsük az $f(x) = \dfrac{1}{x}$ és a $g(x) = x^2 + 2$ függvényeket.

a) Határozzuk meg az $f \circ g$ összetett függvényt!

b) Határozzuk meg a $g \circ f$ összetett függvényt!

c) Határozzuk meg az $f \circ f$ összetett függvényt!

d) Határozzuk meg a $g \circ g$ összetett függvényt!

<u>**Megoldás**</u>:

a) Az $f \circ g$ összetett függvény:

$$f \circ g(x) = f\big(g(x)\big) = f(x^2+2) = \frac{1}{x^2+2}.$$

b) Az $g \circ f$ összetett függvény:

$$g \circ f(x) = g\big(f(x)\big) = g\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x^2} + 2.$$

c) Az $f \circ f$ összetett függvény:

$$f \circ f(x) = f\big(f(x)\big) = f\left(\frac{1}{x}\right) = x.$$

d) A $g \circ g$ összetett függvény:

$$g \circ g(x) = g\big(g(x)\big) = g(x^2+2) = (x^2+2)^2 + 2.$$

24. **Feladat.** Bontsuk fel két függvény összetételére az

$$f(x) = \frac{1}{x^2+4}$$

függvényt! Adjuk meg, hogy melyik a külső és melyik a belső függvény!

<u>**Megoldás**</u>:

Ha az $f(x)$ függvényt

$$f(x) = k \circ b(x)$$

alakban írjuk fel, akkor $k(x)$ a külső függvény és $b(x)$ a belső függvény, ahol

$$k(x) = \frac{1}{x},$$

és

$$b(x) = x^2 + 4.$$

25. **Feladat.** Tekintsük az $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x + 4$ függvényt!

a) Invertálható-e az függvény?

b) Ha igen, határozzuk meg az inverzét!

c) Ábrázoljuk közös koordinátarendszerben az f függvényt és az inverzét!

d) Mi a geometriai kapcsolat a függvény és inverze között?

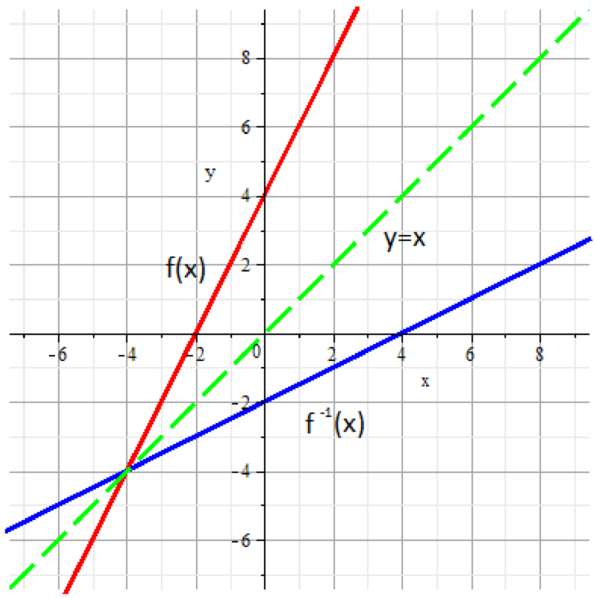
<u>**Megoldás**</u>:

Az f függvény grafikonja egy egyenes, amiből azonnal látszik, hogy injektív, azaz különböző elemekhez különböző elemeket rendel, így invertálható.

Meghatározzuk az inverz függvényt:

$$\begin{aligned} f(x) &= 2x+4 \\ y &= 2x+4 && f(x) \text{ helyére } y\text{-t írunk} \\ x &= 2y+4 && (\text{megcseréljük } x\text{-et és } y\text{-t}) \\ y &= \frac{x-4}{2} && (\text{kifejezzük } y\text{-t}) \\ f^{-1}(x) &= \frac{x-4}{2}. \end{aligned}$$

A függvény és az inverz függvény grafikonja:



Geometriailag egy függvény inverzét úgy határozhatjuk meg, hogy a függvényt tükrözzük az $y = x$ egyenletű egyenesre.

26. **Feladat.** Egy termék x darabjának előállítási költsége forintban kifejezve:

$$C(x) = 100x \cdot \sqrt{x} + 500.$$

a) Mennyi lesz a költség, ha 9 darab terméket gyártunk?

b) Mennyi lesz a költség, ha 16 darab terméket gyártunk?

c) Mennyivel növekszik a költség, ha az eredetileg tervezett a darab helyett $a+1$ darab terméket gyártunk?

d) Hány darab terméket tudunk előállítani 100 500 forintból?

<u>**Megoldás**</u>:

a) Ha 9 darab terméket gyártunk, akkor

$$C(9) = 100 \cdot 9 \cdot \sqrt{9} + 500 = 3\,200\,\mathrm{Ft}.$$

b) Ha 16 darab terméket gyártunk, akkor

$$C(9) = 100 \cdot 16 \cdot \sqrt{16} + 500 = 6\,900\,\mathrm{Ft}.$$

c) Ha a darab terméket gyártunk, akkor a költség

$$C(a) = 100a \cdot \sqrt{a} + 500.$$

Ha $a+1$ darab terméket gyártunk, akkor a költség

$$C(a+1) = 100 \cdot (a+1) \cdot \sqrt{a+1} + 500.$$

A költség növekedése:

$$\begin{aligned} C(a+1) - C(a) &= 100 \cdot (a+1) \cdot \sqrt{a+1} + \\ &\quad + 500 - 100a \cdot \sqrt{a} - 500 = \\ &= 100 \cdot \big((a+1) \cdot \sqrt{a+1} - a \cdot \sqrt{a}\big). \end{aligned}$$

d) Meg kell oldanunk a

$$100\,500 = 100x \cdot \sqrt{x} + 500$$

egyenletet. Az egyenlet mindkét oldalából vonjunk ki 500-at, majd a kapott egyenlet mindkét oldalát osszuk 100-zal. Ekkor azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} 100\,500 &= 100x \cdot \sqrt{x} + 500 \\ 100\,000 &= 100x \cdot \sqrt{x} \\ 1\,000 &= x \cdot \sqrt{x}. \end{aligned}$$

Emeljük négyzetre az egyenlet mindkét oldalát. Ekkor azt kapjuk, hogy

$$1\,000\,000 = x^3.$$

Köbgyököt vonva mindkét oldalból azt kapjuk, hogy $x = 100$. Tehát 100 darab terméket tudunk előállítani 100 500 forintból.

1.3. Elemi függvények és transzformációik

Elméleti összefoglaló

1.3.1. **Definíció.** Az

$$f(x) = m \cdot x + b$$

függvényt *elsőfokú függvény*nek mondjuk. Az m valós számot a függvény *meredekség*ének hívjuk. A függvény *irányszög*én azt a $0 \leq \alpha < \pi$ szöget értjük, amelyre $m = \mathrm{tg}\alpha$ teljesül. Az elsőfokú függvények grafikonja egyenes.

Az $f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$ függvényt *másodfokú függvény*nek nevezzük. A másodfokú függvények grafikonja parabola.

Általánosan, ha $a_0, a_1, \ldots, a_n$ tetszőleges valós számok és $a_n \neq 0$, akkor a

$$P(x) = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot x + a_0$$

függvényt *n-edfokú polinomfüggvény*nek vagy n*-edfokú polinom*nak nevezzük.

Az $f(x)$ függvényt *racionális törtfüggvény*nek nevezzük, ha léteznek olyan $p(x)$ és nem azonosan zérus $q(x)$ polinomok, hogy

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}.$$

Amennyiben $0 < a \neq 1$ valós szám, akkor az $f(x) = a^x$ függvényt *exponenciális függvény*nek nevezzük.

Megjegyezzük, hogy az $f(x) = a^x$ bármely valós kitevős hatványa értelmezhető, de a precíz definíció magasabb szintű ismereteket igényel.

A későbbiekben többször fogunk találkozni az

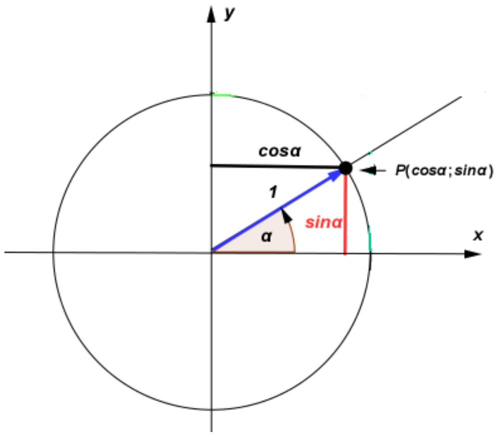
$$f(x) = \mathrm{e}^x$$

függvénnyel, ahol e az úgynevezett Euler-féle szám, a természetes alapú logaritmus alapszáma ($\mathrm{e} \approx 2,718$). Ez a függvény rendkívül fontos szerepet tölt be a gazdasági számításokban.

Az $f(x) = a^x$ függvény inverzét $f^{-1}(x) = \log_a x$ a*-alapú logaritmus függvény*nek mondjuk.

Speciálisan szokás alkalmazni az $\lg x = \log_{10} x$ és az $\ln x = \log_e x$ jelöléseket.

1.3.2. **Definíció.** Legyen x egy tetszőleges valós szám. A koordinátarendszer $(1;0)$ koordinátájú vektorának origó körüli x radián szöggel való elforgatásával keletkezett vektor első koordinátáját (abszcisszáját) *koszinusz*nak, második koordinátáját (ordinátáját) *szinusz*nak nevezzük.



Tangens függvénynek nevezzük a

$$\mathrm{tg}x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

függvényt.

Kotangens függvénynek nevezzük a

$$\mathrm{ctg}x = \frac{\cos x}{\sin x}$$

függvényt.

A következő megjegyzésben összefoglaljuk a függvénytranszformációkat.

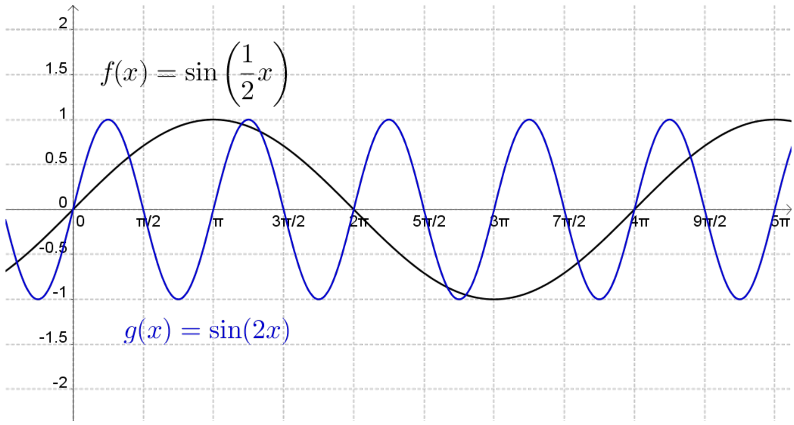
1.3.3. **Megjegyzés.** Ha $u \in \mathbb{R}$ és $x + u \in D_f$, akkor az $f(x + u)$ függvény grafikonja az f függvény grafikonjának x tengely irányú eltolásával keletkezik. Az eltolás mértéke $|u|$. Ha $u > 0$, akkor az eltolás balra, ha $u < 0$, akkor az eltolás jobbra történik.

Ha $v \in \mathbb{R}$ és $x \in D_f$, akkor az $f(x) + v$ függvény grafikonja az f függvény grafikonjának y tengely irányú eltolásával keletkezik. Az eltolás mértéke $|v|$. Ha $v > 0$, akkor az eltolás felfelé, ha $v < 0$, akkor az eltolás lefelé történik.

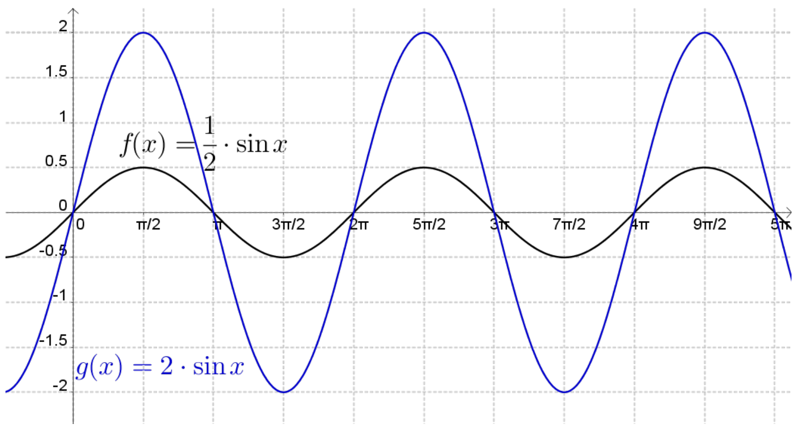
Ha $c \in \mathbb{R}$ és $c \cdot x \in D_f$, akkor az $f(c \cdot x)$ függvény grafikonja az f függvény grafikonjának x tengely irányú c-szeres „zsugorításával” keletkezik, ha $c > 1$ és a $1/c$-szeres „nyújtásával” keletkezik, ha $0 < c < 1$.

Ha $k \in \mathbb{R}$, akkor a $k \cdot f(x)$ függvény grafikonja az f függvény grafikonjának y tengely irányú k-szoros „nyújtásával” keletkezik, ha $k > 1$ és $1/k$-szoros „zsugorításával” keletkezik, ha $0 < k < 1$.

1.3.4. **Példa.** Az $f(x) = \sin\left(\frac{1}{2}x\right)$ és a $g(x) = \sin(2x)$ függvények grafikonjai:



1.3.5. **Példa.** Az $f(x) = \dfrac{1}{2}x \cdot \sin x$ és a $g(x) = 2 \cdot \sin x$ függvények grafikonjai:



Kidolgozott feladatok

A következő feladatokban a függvény elemzése alatt azt értjük, hogy megadjuk a valós számok halmazának legbővebb részhalmazát, amelyen a függvény értelmezve van, értékkészletét, monotonitását, szélsőértékét, zérushelyét, korlátosságát, paritását, periodicitását, invertálhatóságát, konvexitását.

27. **Feladat.** Az $f(x) = m \cdot x + b$ függvény grafikonjára illeszkednek a $(-2; 5)$ és $(3; -5)$ pontok. Határozzuk meg az m és b értékeket, majd ábrázoljuk és elemezzük a kapott függvényt!

Megoldás:

A függvény -2 pontbeli helyettesítési értéke 5, ezért teljesül, hogy

$$5 = -2m + b.$$

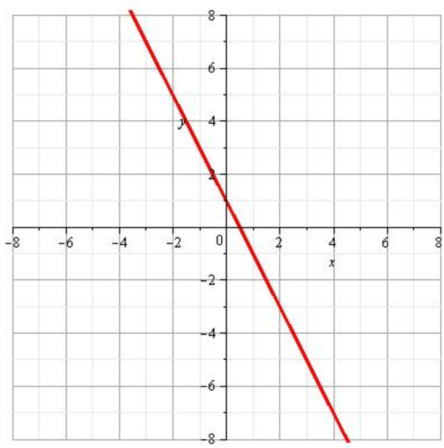
A függvény 3 helyettesítési értéke a 3 helyen -5, ezért

$$-5 = 3m + b.$$

A kapott egyenletrendszert megoldva megkapjuk az m és b értékeket. A két egyenletet kivonva egymásból $10 = -5m$ adódik, amiből $m = -2$.
Ezt visszahelyettesítve például az első egyenletbe azt kapjuk, hogy $b = 1$. Tehát a keresett függvény

$$f(x) = -2x + 1.$$

Ez a függvény $1/2$-nél metszi az x-tengelyt, és 1-nél metszi az y tengelyt. Ez alapján fel tudjuk rajzolni a függvény grafikonját:



A grafikon alapján elemezhetjük a függvényt:

- értelmezési tartomány: $x \in \mathbb{R}$;
- értékkészlet: $y \in \mathbb{R}$;
- monotonitás: szigorúan monoton csökkenő;
- szélsőérték: nincs;
- zérushely: $x = \frac{1}{2}$;
- korlátosság: nem korlátos;
- paritás: nem páros, nem páratlan;
- periodicitás: nem periodikus;
- invertálhatóság: invertálható;
- konvexitás: konvex és konkáv is.

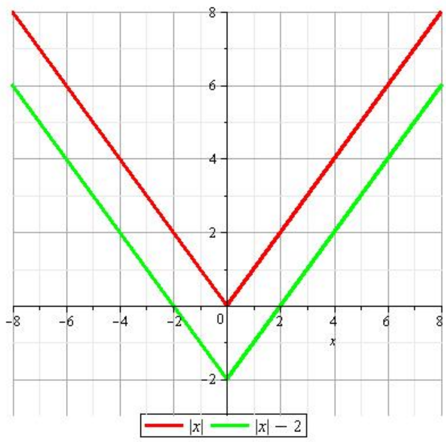
28. **Feladat.** Ábrázoljuk függvénytranszformációs lépések segítségével az

$$f(x) = |x| - 2$$

függvényt, majd elemezzük azt!

Megoldás:

A függvény grafikonja:



A függvény grafikonja alapján elemezhetjük a függvényt:

- értelmezési tartomány: $D_f : x \in \mathbb{R}$;
- értékkészlet: $R_f : y \geq -2$;

- monotonitás: ha $x \leq 0$, akkor szigorúan monoton csökkenő; ha $x \geq 0$, akkor szigorúan monoton növekvő;
- szélsőérték: minimuma van, minimum hely $x = 0$, minimum érték $y = -2$;
- zérushely: $x_1 = -2$, $x_2 = 2$;
- korlátosság: alulról korlátos, felülről nem korlátos, tehát nem korlátos;
- paritás: páros, mert a grafikon szimmetrikus az y tengelyre;
- periodicitás: nem periodikus;
- invertálhatóság: nem invertálható;
- konvexitás: konvex.

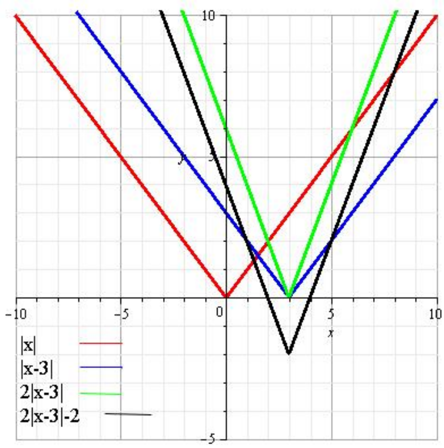
29. **Feladat.** Ábrázoljuk függvénytranszformációs lépések segítségével az

$$f(x) = 2 \cdot |x - 3| - 2$$

függvényt, majd elemezzük azt!

Megoldás:

A függvény grafikonja:



A grafikon alapján elemezhetjük a függvényt:

- értelmezési tartomány: $x \in \mathbb{R}$;
- értékkészlet: $y \geq -2$;
- monotonitás: ha $x \leq 3$, akkor szigorúan monoton csökkenő; ha $x \geq 3$, akkor szigorúan monoton növekvő;

- szélsőérték: minimuma van, minimum hely $x = -3$, minimum érték $y = -2$;
- zérushely: $x_1 = 2$, $x_2 = 4$;
- korlátosság: alulról korlátos;
- paritás: nem páros, nem páratlan;
- periodicitás: nem periodikus;
- invertálhatóság: nem invertálható;
- konvexitás: konvex.

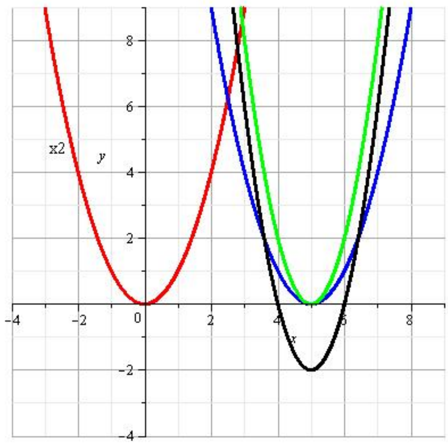
30. **Feladat.** Ábrázoljuk függvénytranszformációs lépések segítségével az

$$f(x) = 2 \cdot (x-5)^2 - 2$$

függvényt, majd elemezzük azt!

Megoldás:

A függvény grafikonja:



A grafikon alapján elemezhetjük a függvényt:

- értelmezési tartomány: $x \in \mathbb{R}$;
- értékkészlet: $y \geq -2$;
- monotonitás: ha $x \leq 5$, akkor szigorúan monoton csökkenő;
  ha $x \geq 5$, akkor szigorúan monoton növekvő;
- szélsőérték: minimuma van, minimum hely $x = 5$, minimum érték $y = -2$;
- zérushely: $x_1 = 4$, $x_2 = 6$;

- korlátosság: alulról korlátos;
- paritás: nem páros, nem páratlan;
- periodicitás: nem periodikus;
- invertálhatóság: nem invertálható;
- konvexitás: konvex.

31. **Feladat.** Ábrázoljuk és elemezzük az

$$f(x) = x^2 + 4x + 6$$

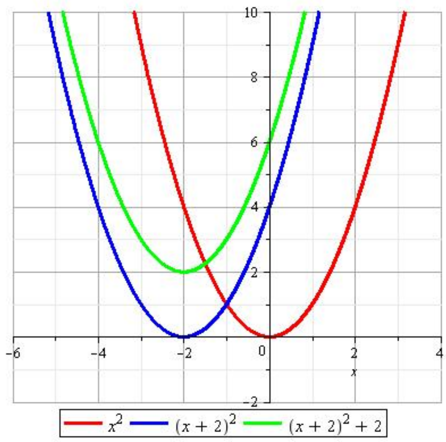
függvényt!

Megoldás:

Első lépésben teljes négyzetté alakítunk:

$$f(x) = x^2 + 4x + 6 = (x + 2)^2 - 4 + 6 = (x + 2)^2 + 2.$$

A függvény grafikonja:



A grafikon alapján elemezhetjük a függvényt:

- értelmezési tartomány: $x \in \mathbb{R}$;
- értékkészlet: $y \geq 2$;
- monotonitás: ha $x \leq -2$, akkor szigorúan monoton csökkenő; ha $x \geq -2$, akkor szigorúan monoton növekvő;
- szélsőérték: minimuma van, minimum hely: $x = -2$, minimum érték $y = 2$;
- zérushely: nincs;

- korlátosság: alulról korlátos;
- paritás: nem páros, nem páratlan;
- periodicitás: nem periodikus;
- invertálhatóság: nem invertálható;
- konvexitás: konvex.

32. **Feladat.** Ábrázoljuk és elemezzük az

$$f(x) = -2x^2 + 8x - 3$$

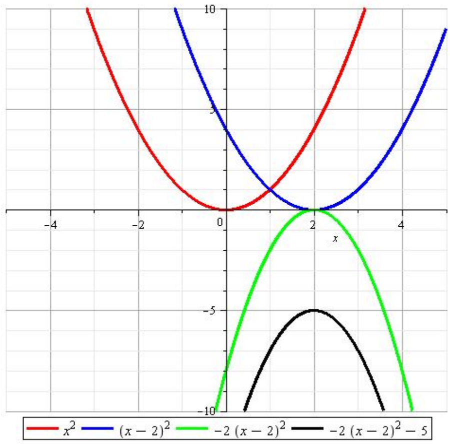
függvényt!

Megoldás:

Első lépésben teljes négyzetté alakítunk:

$$f(x) = -2x^2 + 8x - 3 = -2(x^2 - 4x) - 3 = -2[(x-2)^2 - 4] - 3 =$$
$$= -2(x-2)^2 - 5.$$

A függvény grafikonja:



A grafikon alapján elemezhetjük a függvényt:

- értelmezési tartomány: $x \in \mathbb{R}$;
- értékkészlet: $y \leq -5$;
- monotonitás: ha $x \leq 2$, akkor szigorúan monoton növekvő; ha $x \geq 2$, akkor szigorúan monoton csökkenő;
- szélsőérték: maximuma van, maximum hely: $x = 2$, minimum érték $y = -5$;

- zérushely: nincs;
- korlátosság: felülről korlátos;
- paritás: nem páros, nem páratlan;
- periodicitás: nem periodikus;
- invertálhatóság: nem invertálható;
- konvexitás: konkáv.

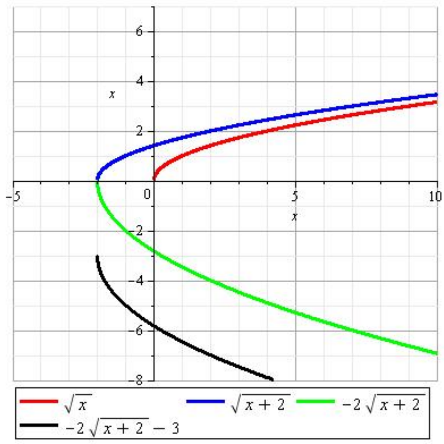
33. **Feladat.** Ábrázoljuk és elemezzük az

$$f(x) = -2\sqrt{x+2} - 3$$

függvényt!

Megoldás:

A grafikon alapján elemezhetjük a függvényt:



- értelmezési tartomány: $x \geq -2$;
- értékkészlet: $y \leq -3$;
- monotonitás: szigorúan monoton csökkenő;
- szélsőérték: maximuma van, maximum hely: $x = -2$, maximum érték $y = -3$;
- zérushely: nincs;
- korlátosság: felülről korlátos;
- paritás: nem páros, nem páratlan;
- periodicitás: nem periodikus;

- invertálhatóság: invertálható;
- konvexitás: konkáv.

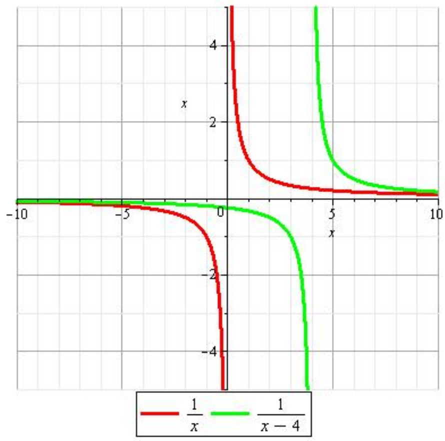
34. **Feladat.** Ábrázoljuk és elemezzük az

$$f(x) = \frac{1}{x-4}$$

függvényt!

<u>**Megoldás**</u>:

A függvény grafikonja:



A grafikon alapján elemezhetjük a függvényt:

- értelmezési tartomány: $x \in \mathbb{R} \setminus \{4\}$;
- értékkészlet: $y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$;
- monotonitás: szigorúan monoton csökkenő;
- szélsőérték: nincs;
- zérushely: nincs;
- korlátosság: nem korlátos;
- paritás: nem páros, nem páratlan;
- periodicitás: nem periodikus;
- invertálhatóság: invertálható;
- konvexitás: ha $x \in]-\infty; 4[$, akkor konkáv, ha $x \in]4; \infty[$, akkor konvex.

35. **Feladat.** Ábrázoljuk és elemezzük az

$$f(x) = \frac{x+1}{x+2}$$

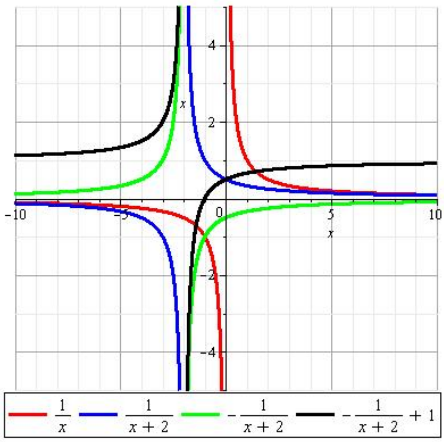
függvényt!

Megoldás:

Az

$$\frac{x+1}{x+2} = \frac{x+2-1}{x+2} = 1 - \frac{1}{x+2} = -\frac{1}{x+2} + 1$$

átalakítás után függvénytranszformációs lépésekkel ábrázolhatjuk a függvényt:



A grafikon alapján elemezhetjük a függvényt:

- értelmezési tartomány: $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2\}$;
- értékkészlet: $y \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$;
- monotonitás: szigorúan monoton növekvő;
- szélsőérték: nincs;
- zérushely: az
$$\frac{x+1}{x+2} = 0$$
egyenlet megoldásához a nevezővel szorzunk, amiből $x + 1 = 0$ adódik, így azt kapjuk, hogy $x = -1$;
- korlátosság: nem korlátos;
- paritás: nem páros, nem páratlan;

- periodicitás: nem periodikus;
- invertálhatóság: invertálható;
- konvexitás: ha $x \in]-\infty; -2[$, akkor konvex, ha $x \in]-2; \infty[$, akkor konkáv.

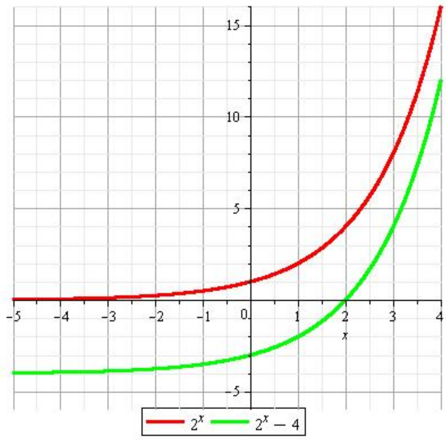
36. **Feladat.** Ábrázoljuk és elemezzük az

$$f(x) = 2^x - 4$$

függvényt!

Megoldás:

A függvény grafikonja:



A grafikon alapján elemezhetjük a függvényt:

- értelmezési tartomány: $x \in \mathbb{R}$;
- értékkészlet: $y > -4$;
- monotonitás: szigorúan monoton növekvő;
- szélsőérték: nincs;
- zérushely: $x = 2$;
- korlátosság: alulról korlátos;
- paritás: nem páros, nem páratlan;
- periodicitás: nem periodikus;
- invertálhatóság: invertálható;
- konvexitás: konvex.

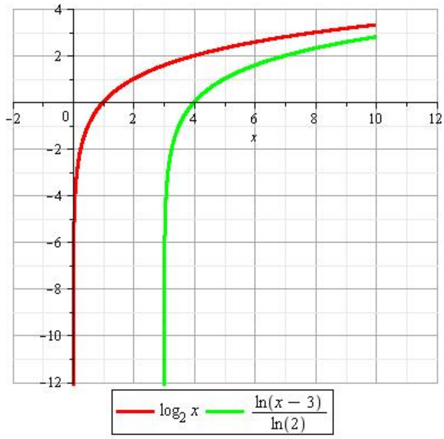
37. **Feladat.** Ábrázoljuk és elemezzük az

$$f(x) = \log_2(x-3)$$

függvényt!

<u>**Megoldás**</u>:

A függvény grafikonja:



A grafikon alapján elemezhetjük a függvényt:

- értelmezési tartomány: $x > 3$;
- értékkészlet: $y \in \mathbb{R}$;
- monotonitás: szigorúan monoton növekvő;
- szélsőérték: nincs;
- zérushely: $x = 4$;
- korlátosság: nem korlátos;
- paritás: nem páros, nem páratlan;
- periodicitás: nem periodikus;
- invertálhatóság: invertálható;
- konvexitás: konkáv.

1.4. Függvények a közgazdaságtanban

Elméleti összefoglaló.

Egy vállalat termelési költségei több tényezőtől függnek. Például a technológiától, a felhasznált alapanyagok árától, a bérek kifizetésétől, az üzemeltetéstől, az adótól, a termelés mennyiségétől.

1.4.1. **Definíció.** *Fix költség*nek nevezzük azokat a költségeket, amelyek a termelés mennyiségétől függetlenek. Például ilyenek a bérleti díjak, a hitelkamatok, vagy az olyan egyszeri beruházások, mint például egy gyártósor és az alapanyagok megvásárlása ahhoz, hogy a gyártási folyamatot el tudjuk kezdeni. A fix költséget szokás FC-vel jelölni (fix cost).

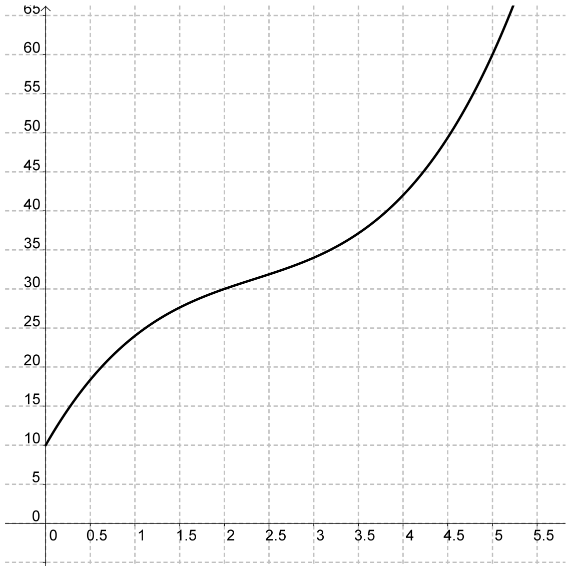
*Változó költség*nek hívjuk azokat a költségeket, amelyek függnek a gyártott mennyiségtől. Például ilyen lehet a dolgozók bére, az anyagköltség, energiaköltség. A változó költséget szokás VC-vel jelölni (variable cost).

*Költségfüggvény*nek mondjuk azt a függvényt, amely megadja, hogy a termelt mennyiség függvényében mennyi lesz a teljes költségünk, azaz a termelt mennyiséghez hozzárendeli a termelés teljes költségét. A költségfüggvényt szokás $C(q)$-val vagy $TC(q)$-val jelölni (total cost).

Sok esetben a teljes költségfüggvényt olyan

$$C(q) = a \cdot q^3 + b \cdot q^2 + c \cdot q + d$$

harmadfokú függvénnyel szokás modellezni, amelyre $a > 0$, $b < 0$, $c > 0$ és $d > 0$ teljesül. Egy ilyen függvény esetén $C(0) = d$ pozitív, ugyanis ez jelenti a fix költséget. A termelés növekedésével a költség nő. A költség növekedésének üteme kezdetben gyorsabb (ami azt jelenti, hogy a függvény konkáv), majd a növekedés üteme csökken az alkalmazott technológia egyre jobb kihasználtsága miatt. Ezt követően egy bizonyos pont (az inflexiós pont) után a költség ismét gyorsuló mértékben nő (konvexé válik a függvény), ugyanis a technikai keretek a további növekedés számára már szűknek bizonyulhatnak, vagy egyszerűen a kifizetett túlóra díjai már annyira magasak, hogy a költség extrém magassá válik. Egy ilyen függvényt mutat az alábbi grafikon:



1.4.2. **Megjegyzés.** A korábbi jelöléseket megtartva:

$$C(q) = FC + VC(q).$$

1.4.3. **Definíció.** *Átlagos fixköltség*nek nevezzük egy termék egy egységére jutó fix költségét.

1.4.4. **Megjegyzés.** Ha egy termékből q mennyiséget gyártunk, akkor az átlagos költség:

$$AC(q) = \frac{C(q)}{q}.$$

1.4.5. **Megjegyzés.** Ha egy termékből q mennyiséget gyártunk, akkor az átlagos változó költség:

$$AVC(q) = \frac{VC(q)}{q}.$$

1.4.6. **Definíció.** A termelésből származó összes *bevétel* az eladott mennyiség és a termék egységárának a szorzata. A termék árát p-vel, az eladott mennyiséget q-val jelölve, a fent leírtak a $p \cdot q$ összefüggéssel írhatóak le. A teljes bevételt R-el vagy TR-el szokás jelölni (revenue).

A *keresleti függvény* egy termék minden lehetséges árához hozzárendeli a hozzá tartozó keresett mennyiséget. A függvényt $D(p)$-vel (demand) vagy $f(p)$-vel szokás jelölni.

1.4.7. **Megjegyzés.** A keresleti függvény általában monoton csökkenő, azaz növelve az árat, a belőle keresett mennyiség csökken.

Ha $f(p)$ egy keresleti függvény, vagyis az $f(p)$ függvény megadja, hogy a p ár mellett mennyi az adott termék iránti kereslet, akkor a termék eladásából származó teljes bevétel:

$$R(p) = p \cdot f(p).$$

1.4.8. **Definíció.** A keresleti függvény inverzét *inverz keresleti függvény*nek nevezzük. Az inverz keresleti függvény minden egyes mennyiségegységhez hozzárendeli azt az árat, amely mellett a vizsgált személy vagy csoport még éppen hajlandó az adott terméket megvásárolni. Az említett árat *rezervációs ár*nak nevezzük.

1.4.9. **Definíció.** Ha egy termékből q mennyiséget gyártunk, akkor az *átlagbevétel*:

$$AR = \frac{R(q)}{q}.$$

1.4.10. **Definíció.** *Profit*nak vagy *nyereség*nek nevezzük a bevétel és költség különbségét:

$$\Pi(q) = R(q) - C(q).$$

1.4.11. **Definíció.** *Fedezeti pont*nak nevezzük azt a termelési szintet, amelyhez tartozó profit értéke zérus.

1.4.12. **Megjegyzés.** Azon termelési mennyiség esetén, amikor a profit zérus, a bevételi függvény és költségfüggvény értéke azonos.

Az átlagköltség függvény minimuma a fedezeti pont.

1.4.13. **Definíció.** *Üzembezárási pont*nak nevezzük az átlagos változó költség függvény minimumát.

1.4.14. **Definíció.** A *kínálat* egy vagy több termék azon mennyisége, amivel az általunk vizsgált személy vagy vállalat rendelkezik, és azt adott ár mellett eladni is hajlandó. Kézenfekvőnek tűnik, hogy minden lehetséges árszinthez az emellett érvényes kínálatot rendeljük hozzá, létrehozva így a *kínálati függvény*t. Ezt $S(p)$-vel jelölhetjük (supply), ahol p az adott termék ára.

1.4.15. **Megjegyzés.** A vállalatok kínálati függvényei monoton növekvőek, vagyis az ár emelkedésével a kínált mennyiség is nő.

1.4.16. **Definíció.** A keresleti és kínálati függvény metszéspontját *egyensúlyi pont*nak hívjuk. Az egyensúlyi ponthoz tartozó mennyiséget *egyensúlyi mennyiség*nek, az egyensúlyi ponthoz tartozó árat *egyensúlyi ár*nak nevezzük.

Amikor a kereslet nagyobb, mint a kínálat, *túlkereslet*ről vagy más szóval *hiány*ról beszélünk. Ha a kínálat nagyobb, mint a kereslet, akkor *túlkínálat*ról beszélünk, ilyenkor *felesleg* keletkezik.

1.4.17. **Definíció.** *Hasznossági függvény*nek nevezzük azt a függvényt, amely a gazdaság egy szereplőjének (vagy bizonyos esetekben a társadalom egészének) meghatározott javakhoz kapcsolódó preferenciáit matematikai eszközökkel modellezi.

1.4.18. **Megjegyzés.** A hasznossági függvénytől elvárjuk, hogy monoton növekvő és konkáv legyen. Lényegében az azt jelenti, hogy ha az általunk vizsgált termékből többet vásárolunk, akkor az nagyobb hasznosságot eredményez, továbbá a növekvő mennyiségekhez „egyre kevésbé növekvő” hasznot rendel. A hasznossági függvényt $U(x)$-el jelöljük (utility).

Kidolgozott feladatok.

38. **Feladat.** Egy termék iránti keresleti függvény

$$f(p) = 100 - 10p.$$

A termék árát euro-ban, a termék iránti keresletet ezer darabban értjük.

a) Adjuk meg a bevételi függvényt!

b) Milyen ár esetén lesz a bevétel maximális?

c) A maximális bevétel esetén hány terméket adunk el?

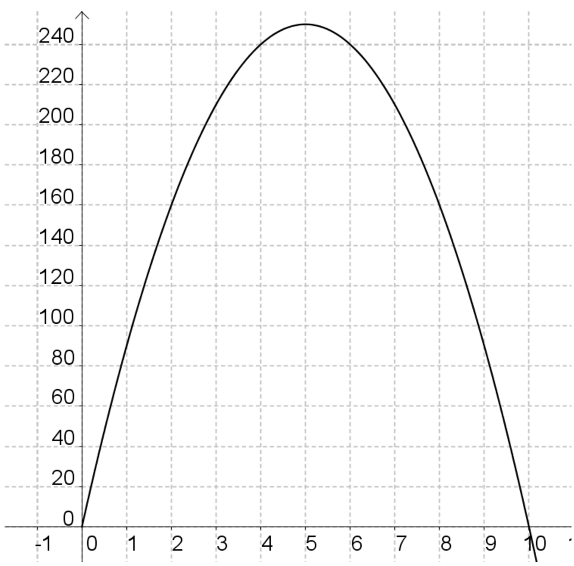
Megoldás:

a) Ekkor a bevételi függvény

$$R(p) = p \cdot f(p) = p \cdot (100 - 10p) = 100p - 10p^2.$$

b) A kérdés, hogy milyen árat válasszunk a terméknek ahhoz, hogy a bevételünk maximális legyen. Az $R(p)$ függvény maximumának meghatározásához elsőként teljes négyzetté alakítjuk a függvényt:

$$R(p) = -10 \cdot (p^2 - 10p) = -10 \cdot [(p-5)^2 - 25] =$$
$$= -10 \cdot (p-5)^2 + 250.$$



A fenti függvénynek akkor van maximuma, ha $p = 5$. Azt kaptuk tehát, hogy 5 euro ár esetén lesz a legnagyobb a bevételünk.

c) Abban az esetben, amikor maximális a bevételünk

$$q = f(5) = 100 - 10 \cdot 5 = 50,$$

így $50\,000$ darab terméket kell legyártunk. Ebben az esetben jutunk tehát a legnagyobb bevételhez, ami

$$R(5) = 5 \cdot f(5) = p \cdot q = 250.$$

39. **Feladat.** Egy vállalat teljes költségfüggvénye:

$$C(q) = q^3 - 4q^2 + 10q + 10,$$

ahol q a vállalat által termelt mennyiség ezer darabban. A költséget ezer euróban értjük.

a) Adjuk meg a fix költséget!

b) Adjuk meg a változó költség függvényt!

c) Adjuk meg az átlagköltség függvényt!

d) Határozzuk meg az átlagos fix költség függvényt!

e) Határozzuk meg az átlagos változó költség függvény!

f) Adjuk meg az üzembezárási pontot!

Megoldás:

a) Mivel

$$C(0) = 10,$$

ezért a fix költség $10\,000$ euro.

b) A változó költség függvény:

$$VC(q) = q^3 - 4q^2 + 10q.$$

c) Az átlagköltség függvény:

$$AC(q) = \frac{C(q)}{q} = q^2 - 4q + 10 + \frac{10}{q}.$$

d) Az átlagos fix költség függvény:

$$AFC(q) = \frac{10}{q},$$

e) Az átlagos változó költség függvény:

$$AVC(q) = q^2 - 4q + 10.$$

f) Mivel

$$AVC(q) = q^2 - 4q + 10 = (q - 2)^2 + 6,$$

ezért a függvény minimuma: $q = 2$, így 2 000 darab termék jelenti azt a termelési mennyiséget, amely az üzem bezárási pont.

40. **Feladat.** Egy termék keresleti függvénye:

$$f(p) = 150 - 3p,$$

kínálati függvénye:

$$S(p) = 2p - 20.$$

Az árat euro-ban értjük, a mennyiséget darabban. Határozzuk meg az egyensúlyi árat!

Megoldás:

Az egyensúlyi árat az

$$f(p) = S(p)$$

egyenlet megoldása adja:

$$150 - 3p = 2p - 20$$
$$170 = 5p,$$

amiből azt kapjuk, hogy $p = 34$ euro. Ekkor az egyensúlyi mennyiség:

$$q = f(34) = S(34) = 150 - 3 \cdot 34 = 48,$$

tehát $q = 48$ darab termék az egyensúlyi mennyiség.

41. **Feladat.** Egy termék keresleti függvénye

$$f(p) = 150 - 3p,$$

kínálati függvénye

$$S(p) = 2p - 20.$$

Mindkét esetben a mennyiséget darabban, az árat forintban értjük.

a) Határozzuk meg az egyensúlyi árat és az egyensúlyi mennyiséget!

b) Ábrázoljuk közös koordinátarendszerben a keresleti és kínálati függvényt, jelöljük az egyensúlyi mennyiséget és az egyensúlyi árat!

Megoldás:

a) Az egyensúlyi árat a keresleti és kínálati függvény metszéspontja adja. Tehát az egyensúlyi árat az $f(p) = S(p)$ egyenlet megoldásával kapjuk meg:

$$150 - 3p = 2p - 20.$$

Az egyenlet rendezése után

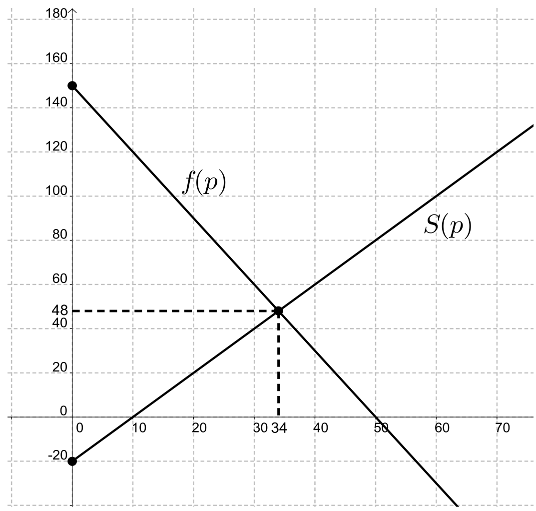
$$5p = 170$$

adódik, amiből azt kapjuk, hogy az egyensúlyi ár $p = 34$. Az egyensúlyi mennyiségre

$$f(34) = 150 - 3 \cdot 34 = 48$$

adódik.

b) A keresleti és kínálati függvény grafikonja:



42. **Feladat.** Egy szupermarket egy bizonyos típusú DVD-lejátszóból egy hónap alatt 3 000 darabot értékesít 485 \$ áron. Amennyiben az árat 20 \$-ral csökkentik, úgy az eladott mennyiség 250 darabbal növekszik. Az eladott mennyiség és az eladási ár között elsőfokú függvénykapcsolatot feltételezünk!

a) Határozzuk meg a keresleti függvényt!

b) Adjuk meg azt az árat, amelyhez tartozó kereslet 0 darab!

c) Adjuk meg az inverz keresleti függvényt!

<u>**Megoldás**</u>:

a) A keresleti függvényt

$$f(p) = a \cdot p + b$$

alakban keressük. A függvény grafikonjára illeszkednek a $(485; 3\,000)$ és a $(465; 3\,250)$ pontok, így teljesülnek a

$$3\,000 = 485a + b$$

és a

$$3\,250 = 465a + b$$

egyenletek. Az első egyenletből kivonva a másodikat azt kapjuk, hogy

$$250 = -20a \qquad \Rightarrow \qquad a = -\frac{250}{20} = -12,5.$$

Ezt behelyettesítve az első egyenletbe

$$3\,000 = -485 \cdot 12,5 + b \qquad \Rightarrow \qquad b = 9\,062,5$$

adódik. A keresleti függvény tehát:

$$f(p) = -12,5p + 9\,062,5.$$

b) Valójában a keresleti függvény zérushelyét keressük, vagyis az $f(p) = 0$ egyenlet megoldását:

$$-12,5p + 9\,062,5 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad p = 725.$$

Azt kaptuk tehát, hogy $725\,\$$-os ár esetén már senki sem vásárolja meg a terméket.

c) A keresleti mennyiséget q-val jelölve, az előbbiek felhasználásával felírhatjuk a

$$q = -12,5p + 9\,062,5$$

összefüggést. Az inverz keresleti függvény meghatározásához valójában a fenti egyenletből kell kifejeznünk a p-t:

$$p = \frac{q - 9\,062,5}{-12,5} \qquad \Rightarrow \qquad p = -0,08q + 725.$$

Az inverz keresleti függvény tehát:

$$f^{-1}(q) = -0,08q + 725.$$

43. **Feladat.** Egy termék keresleti függvénye

$$f(p) = 200 - p,$$

kínálati függvénye

$$S(p) = p.$$

a) Határozzuk meg az egyensúlyi árat és az egyensúlyi mennyiséget!

b) Adjuk meg a bevételi függvényt!

Megoldás:

a) Az egyensúlyi árat a keresleti függvény és a kínálati függvény metszéspontja, pontosabban a

$$200 - p = p$$

egyenlet megoldása adja. Ebből azt kapjuk, hogy $p = 100$. Az egyensúlyi mennyiséget úgy kapjuk meg, hogy kiszámoljuk például a kínálati függvény $p = 100$ helyen vett helyettesítési értékét. Ekkor azt kapjuk, hogy

$$S(100) = 100.$$

b) A bevételi függvény:

$$R(p) = p \cdot f(p) = 200p - p^2.$$

44. **Feladat.** Egy termék keresleti függvénye

$$f(p) = 600 - 10p,$$

ahol az árat $-ban, a keresleti mennyiséget pedig darabban értjük.

a) Adjuk meg a bevételi függvényt!

b) Milyen ár esetén lesz maximális a bevételünk?

Megoldás:

a) A bevételi függvény

$$R(p) = p \cdot f(p) = 600p - 10p^2.$$

b) A bevételi függvényt teljes négyzetté alakítva azt kapjuk, hogy

$$R(p) = -10 \cdot (p^2 - 60p) = -10 \cdot (p - 30)^2 + 9\,000.$$

Ennek a függvénynek $p = 30$ esetén van maximuma, így azt kaptuk, hogy 30$-os ár esetén lesz maximális a bevételünk. Ekkor a keresleti mennyiség:

$$f(30) = 600 - 10 \cdot 30 = 300\,[\mathrm{db}].$$

45. **Feladat.** Egy termék iránti keresletet az ár függvényében modellezzük elsőfokú függvénnyel. Azt is tudjuk, hogy amennyiben a termék ára $80\,\mathrm{Ft}$, úgy a termék iránti kereslet $1400\,[\mathrm{db}]$, továbbá, ha a termék ára $50\,\mathrm{Ft}$, akkor a termék iránti kereslet $2000\,[\mathrm{db}]$. Ugyenezen termék esetén, ha a termék ára $80\,\mathrm{Ft}$, akkor a kínálat $750\,[\mathrm{db}]$, ha a termék ára $50\,\mathrm{Ft}$, akkor a kínálat $375\,[\mathrm{db}]$. A kínálati függvényt szintén elsőfokú függvénnyel modellezzük.

a) Írjuk fel a keresleti függvényt!

b) Írjuk fel a kínálati függvényt!
c) Adjuk meg a bevételi függvényt!
d) Határozzuk meg, milyen ár esetén lesz a bevételünk maximális!
e) Határozzuk meg a maximális bevételt biztosító ár esetén a bevételt!
f) Számoljuk ki az egyensúlyi árat és az egyensúlyi mennyiséget!
g) Ábrázoljuk közös koordinátarendszerben a keresleti függvényt és a kínálati függvényt!

Megoldás:

a) Mivel a keresett függvény elsőfokú, ezért

$$f(p) = a \cdot p + b$$

alakban keressük. A függvény grafikonjára illeszkednek a $(80; 1400)$, valamint az $(50; 2000)$ pontok, így egyrészt teljesül, hogy $f(80) = 1400$, másrészt $f(50) = 2000$, amiből a

$$80a + b = 1400$$
$$50a + b = 2000$$

egyentetrendszerhez jutunk. Az első egyenletből kivonva a másodikat azt kapjuk, hogy $30a = -600$, tehát $a = -20$. A kapott értéket behelyettesítve például az első egyenletbe

$$80 \cdot (-20) + b = 1400 \quad \Rightarrow \quad b = 3000$$

adódik. A kapott eredmények felhasználásával azt kapjuk, hogy a keresleti függvény

$$f(p) = -20p + 3000.$$

b) Mivel a kínálati függvény elsőfokú, ezért azt

$$S(p) = c \cdot p + d$$

alakban keressük. A függvény grafikonjára illeszkednek a $(80; 750)$, valamint az $(50; 375)$ pontok, így egyrészt $S(80) = 750$, másrészt $S(50) = 375$, amiből a

$$80a + b = 750$$
$$50a + b = 375$$

egyenletrendszerhez jutunk. Az első egyenletből kivonva a másodikat azt kapjuk, hogy $30a = 375$, így $a = 12,5$. A kapott értéket behelyettesítve például az első egyenletbe

$$80 \cdot 12,5 + b = 750 \quad \Rightarrow \quad b = -250$$

adódik. A kapott eredmények felhasználásával azt kapjuk, hogy a kínálati függvény:

$$S(p) = 12,5p - 250.$$

c) A bevételt a termék egységárának és a termék iránti keresletnek a szorzata adja:

$$R(p) = p \cdot f(p) = p \cdot (-20p + 3000) = -20p^2 + 3\,000p.$$

d) Teljes négyzetté alakítva az előbbi függvényt

$$\begin{aligned} R(p) = -20 \cdot (p^2 - 150p) &= -20 \cdot \big((p-75)^2 - 5\,625\big) = \\ &= -20 \cdot (p-75)^2 + 11\,250 \end{aligned}$$

adódik. Ezt felhasználva azt kapjuk, hogy

$$p = 75\,[\mathrm{Ft}]$$

esetén lesz maximális a bevételünk. Ekkor

$$f(75) = -20 \cdot 75 + 3\,000 = 1\,500,$$

így a keresleti mennyiség $1\,500\,[\mathrm{db}]$.

e) A maximális bevételt biztosító ár esetén a bevétel

$$R(75) = 20 \cdot (75 - 75)^2 + 11\,250 = 11\,250.$$

A maximális bevétel tehát $11\,250[\mathrm{Ft}]$.

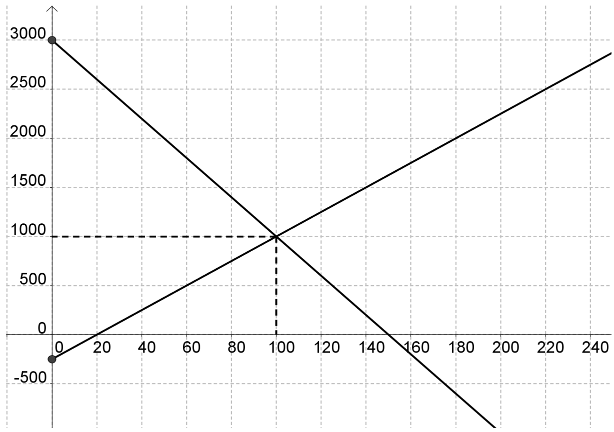
f) Az egyensúlyi árat az $f(p) = S(p)$ egyenlet megoldása adja:

$$-20p + 3\,000 = 12,5p - 250 \qquad \Rightarrow \qquad 32,5p = 3\,000.$$

Az egyensúlyi ár tehát $p = 100\,[\mathrm{Ft}]$. Az egyensúlyi mennyiség:

$$f(100) = -20 \cdot 100 + 3\,000 = 1\,000\,[\mathrm{db}].$$

g) A keresleti és a kínálati függvény grafikonja:



46. **Feladat.** Egy termék keresleti függvénye

$$f(p) = 110 - 5p.$$

a) Adjuk meg az inverz keresleti függvényt!

b) Ábrázoljuk közös koordinátarendszerben a keresleti függvényt és az inverz keresleti függvényt!

Megoldás:

a) Keressük azt az $f^{-1}(q)$ függvényt, amelyre

$$f\big(f^{-1}(q)\big) = q$$

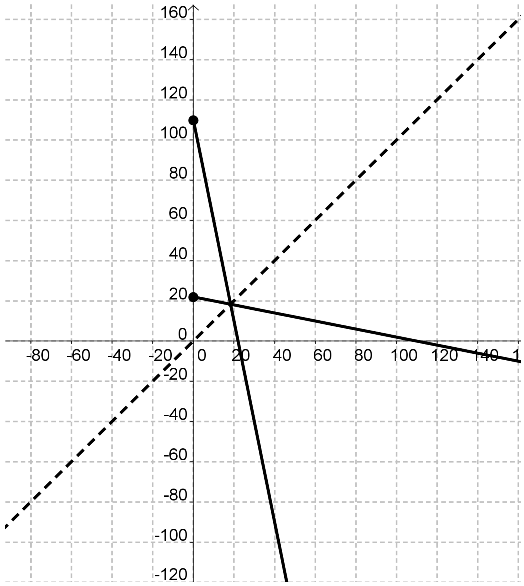
teljesül. Felhasználva $f(p)$ definícióját azt kapjuk, hogy

$$110 - 5 \cdot f^{-1}(q) = q.$$

A kapott egyenletből $f^{-1}(q)$-t kifejezve azt kapjuk, hogy

$$f^{-1}(q) = \frac{q - 110}{-5} = 22 - \frac{1}{5}q.$$

b) A függvények grafikonjai:



47. **Feladat.** Egy vállalat (teljes) költségfüggvénye

$$C(q) = q^3 - 20q^2 + 10q + 1\,100,$$

ahol a költséget ezer forintban, a darabszámot ezer darabban értjük.

a) Adjuk meg a fix költséget!

b) Határozzuk meg a változó költség függvényt!

c) Adjuk meg az átlag költség függvényt!

d) Határozzuk meg az átlagos fix költség függvényt!

e) Adjuk meg az átlagos változó költség függvényt!

<u>**Megoldás**</u>:

a) A fix költség: $FC = 1\,100\,000\,\mathrm{Ft}$.

b) A változó költség függvény:

$$VC(q) = q^3 - 20q^2 + 10q.$$

c) Az átlag költség függvény:

$$AC(q) = \frac{C(q)}{q} = q^2 - 20q + 10 + \frac{1\,100}{q}.$$

d) Az átlagos fix költség: $AFC = \frac{1\,100}{q}$.

e) Az átlagos változó költség függvény:

$$AVC(q) = q^2 - 20q + 10.$$

48. **Feladat.** Egy termék inverz keresleti függvénye

$$f^{-1}(q) = 400 - 5q.$$

Ugyanezen termékhez tartozó (teljes) költségfüggvény

$$C(q) = 20q^2 + 100.$$

A keresletet ezer darabban, a költséget ezer forintban értjük.

a) Adjuk meg a keresleti függvényt!

b) Határozzuk meg a bevételi függvényt!

c) Írjuk fel a profitfüggvényt!

d) Ábrázoljuk a profitfüggvényt!

e) Hány darab termék eladása esetén lesz a nyereség maximális?

<u>**Megoldás**</u>:

a) A keresleti függvényt úgy kapjuk meg, hogy a

$$p = 400 - 5q$$

egyenletből kifejezzük q-t:

$$q = \frac{400 - p}{5}.$$

A keresleti függvény tehát:

$$f(p) = 80 - \frac{1}{5}p.$$

b) A bevétel az eladott mennyiség függvényében:

$$R^\star(q) = p \cdot q = (400 - 5q) \cdot q = 400q - 5q^2.$$

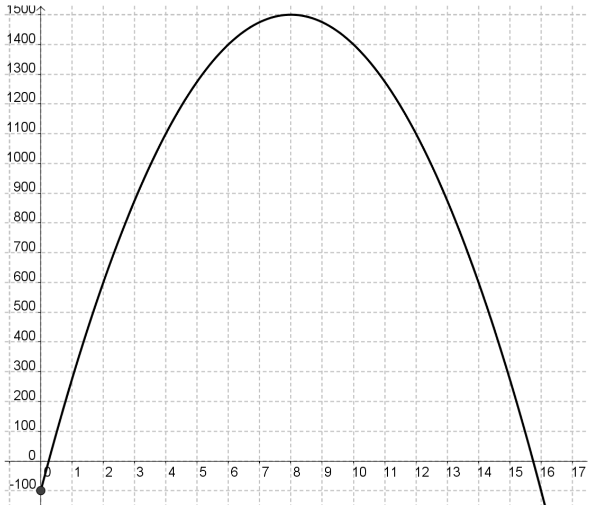
c) A profitfüggvény

$$\Pi(q) = R^\star(q) - C(q) = (400q - 5q^2) - (20q^2 + 100) =$$
$$= -25q^2 + 400q - 100.$$

d) A profitfüggvényt teljes négyzetté alakítva azt kapjuk, hogy

$$\Pi(q) = -25 \cdot (q^2 - 16q + 4) = -25 \cdot \big((q - 8)^2 - 60\big) =$$
$$= -25 \cdot (q - 8)^2 + 1\,500.$$

Ezt felhasználva a profitfüggvény grafikonja:



e) A profitfüggvény maximum helye: $q = 8$, így $8\,000$ darab termék esetén lesz maximális a nyereségünk. Ekkor a maximális nyereség $1\,500\,000\,[\mathrm{Ft}]$.

49. **Feladat.** Egy vállalat (teljes) költségfüggvénye

$$C(q) = 500 + 140q,$$

ahol a költséget ezer forintban, a darabszámot ezer darabban értjük. A bevétel ezer forintban az

$$R(q) = 200q - q^2$$

függvény adja meg.

a) Vázoljuk fel a $C(q)$ függvény grafikonját!

b) Mennyibe kerül $2\,000$ darab termék előállítása?

c) Hány darab terméket tudunk előállítani $1\,900\,000$ forintból?

d) Adjuk meg a fix költséget!

e) Határozzuk meg a változó költség függvényt!

f) Adjuk meg az átlag költség függvényt!

g) Határozzuk meg az átlagos fix költség függvényt!

h) Adjuk meg az átlagos változó költség függvényt!

i) Vázoljuk fel a $C(q)$ függvénnyel közös koordinátarendszerben a $R(q)$ függvény grafikonját!

j) Mennyi lesz a bevételünk $2\,000$ darab termék gyártása esetén?

k) Adjuk meg a profitfüggvényt!

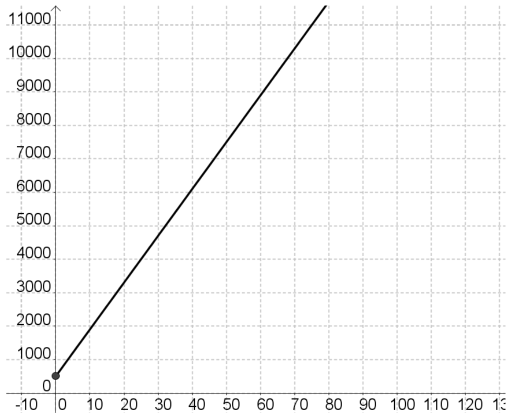
l) Hány darab terméket gyártsunk ahhoz, hogy a nyereségünk a lehető legnagyobb legyen?

m) Vázoljuk fel a profitfüggvény grafikonját!

n) Hány darab termék gyártása esetén lesz a bevétel nagyobb, mint a költség?

Megoldás:

a) A $C(q)$ függvény grafikonja:



b) A költség függvény $q = 2$ helyen vett helyettesítési értéke

$$C(2) = 500 + 140 \cdot 2 = 780,$$

így 2 000 darab termék előállítása 780 000 forintba kerül.

c) Az

$$1\,900 = 500 + 140q$$

egyenletet kell megoldanunk. Az egyenlet mindkét oldalából vonjunk ki 500-at, majd az egyenlet mindkét oldalát osszuk el 140-nel. Ekkor azt kapjuk, hogy

$$1\,900 = 500 + 140q \qquad \Rightarrow \qquad 1\,400 = 140q \qquad \Rightarrow \qquad q = 10,$$

tehát 10 000 darab térmeket tudunk előállítani.

d) A fix költség $FC = 500\,000$ forint.

e) A változó költség függvény:

$$VC(q) = 140q.$$

f) Az átlag költség függvény:

$$AC(q) = \frac{C(q)}{q} = 140 + \frac{500}{q}.$$

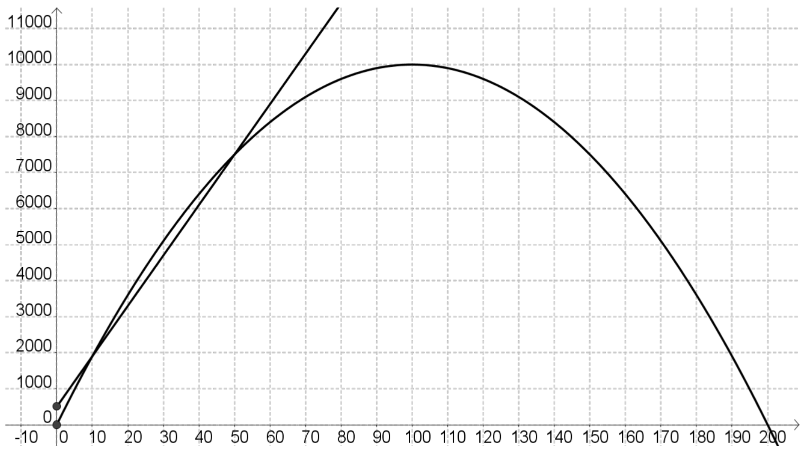
g) Az átlagos fix költség:

$$AFC = \frac{500}{q}.$$

h) Az átlagos változó költség függvény:

$$AVC(q) = 140.$$

i) A $C(q)$ és $R(q)$ függvény grafikonja:



j) Mivel

$$R(2) = 200 \cdot 2 - 2^2 = 396,$$

ezért 2 000 darab termék gyártása esetén 396 000 forint lesz a bevételünk.

k) A profitfüggvény:

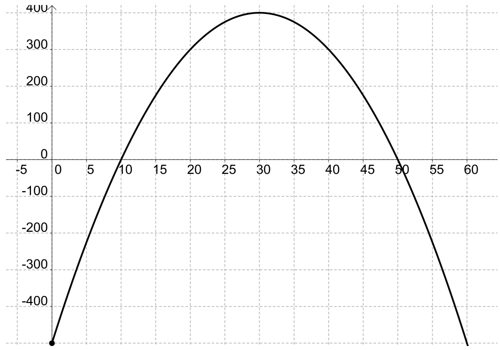
$$\Pi(q) = R(q) - C(q) = (200q - q^2) - (500 - 140q) =$$
$$= -q^2 + 60q - 500.$$

l) A profitfüggvényt teljes négyzetté alakítva azt kapjuk, hogy

$$\Pi(q) = -(q^2 - 60q) - 500 = -\big((q-30)^2 - 900\big) - 500 =$$
$$= -(q-30)^2 + 900 - 500 = -(q-30)^2 + 400.$$

A $\Pi(q)$ függvény maximum helye $q = 30$-nál van, így 30 000 darab termék gyártása esetén lesz a legnagyobb a nyereségünk. Ekkor a maximális profit 400 000 forint.

m) A profitfüggvény grafikonja:



n) A bevétel pontosan akkor nagyobb, mint a költség, amikor a profitfüggvény pozitív értékét vesz fel. Ezt az előbbi függvény grafikonjából is leolvashatjuk. Azt kapjuk, hogy

$$q \in]10; 50[$$

esetén teljesül a kívánt feltétel, így ha azt szeretnénk, hogy nagyobb legyen a bevétel, mint a költség, akkor $10\,000$ darabnál több és $50\,000$ darabnál kevesebb terméket kell gyártanunk.

50. **Feladat.** Egy termék iránti keresleti függvény

$$f(p) = \frac{8\,000}{p},$$

a kínálati függvény

$$S(p) = 40p - 400 \qquad (p \geq 10).$$

A menyiséget darabban, az árat ezer dollárban értjük.

a) Határozzuk meg az egyensúlyi mennyiséget és az egyensúlyi árat!

b) Ábrázoljuk a keresleti függvényt és a kínálati függvényt közös koordinátarendszerben! Jelöljük az egyensúlyi pontot!

Megoldás:

a) Meg kell oldanunk az $f(p) = S(p)$, vagyis az

$$\frac{8\,000}{p} = 40p - 400$$

egyenletet. A nevezővel szorozva mindkét oldalt, azt kapjuk, hogy

$$8\,000 = 40p^2 - 400p.$$

Az egyenletet nullára rendezve és mindkét oldalt osztva 40-nel

$$p^2 - 10p - 20 = 0$$

adódik. A másodfokú egyenlet megoldóképletét alkalmazva azt kapjuk, hogy

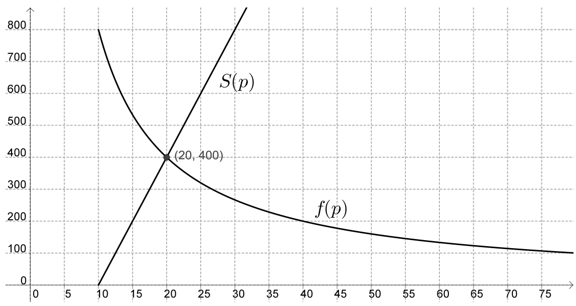
$$p_{1,2} = \frac{10 \pm \sqrt{100 + 800}}{2} = \frac{10 \pm 30}{2}.$$

Tehát $p_1 = 20$, illetve $p_2 = -10$. Mivel $p > 0$, ezért az egyensúlyi ár $10\,000$ dollár.
Mivel

$$f(20) = \frac{8\,000}{20} = 400,$$

ezért egyensúlyi mennyiség 400 darab.

b) A keresleti és kínálati függvények:



1.5. Sorozatok a közgazdaságtanban

Elméleti összefoglaló

1.5.1. **Definíció.** Egy természetes számok halmazán értelmezett valós értékű függvényt *valós számsorozat*nak nevezünk. Az

$$a\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$$

sorozat esetén a sorozat $n \in \mathbb{N}$ helyen felvett helyettesítési értékére a függvényeknél megszokott $a(n)$ jelölés helyett az a_n jelölést szokás használni, amit úgy olvasunk ki, hogy a *sorozat n-edik tagja* vagy úgy, hogy a sorozat *n-edik eleme*.

1.5.2. **Definíció.** Az a_n sorozat

- *monoton növekvő*, ha minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $a_n \leq a_{n+1}$;
- *monoton csökkenő*, ha minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $a_n \geq a_{n+1}$;
- *szigorúan monoton növekvő*, ha minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $a_n < a_{n+1}$;
- *szigorúan monoton csökkenő*, ha minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $a_n > a_{n+1}$.

1.5.3. **Példa.** Az $a_n = \dfrac{1}{n}$ sorozat szigorúan monoton csökkenő.

1.5.4. **Definíció.** Az a_n sorozat

- *felülről korlátos*, ha létezik olyan K valós szám, hogy $a_n \leq K$ minden $n \in \mathbb{N}$ esetén;
- *alulról korlátos*, ha létezik olyan k valós szám, hogy $a_n \geq k$ minden $n \in \mathbb{N}$ esetén;
- *korlátos*, ha alulról és felülről korlátos.

1.5.5. **Megjegyzés.** Az a_n sorozat szuprémuma, infimuma, maximuma, minimuma a függvényeknél megismert módon értelmezhető.

1.5.6. **Definíció.** Az a_n sorozat *konvergens* és a *határértéke* a, ha az a szám bármely környezetén kívül csak véges sok eleme van a sorozatnak, azaz ha bármely potitív ε esetén létezik olyan *küszöbindex*nek nevezett $n_0 \in \mathbb{N}$ természetes szám, melyre minden $n \geq n_0$ esetén $|a_n - a| < \varepsilon$. Jelölés: $\lim\limits_{n\to\infty} = a$ vagy $a_n \to \infty a$.

Ha az a_n sorozat nem konvergens, akkor azt mondjuk, hogy *divergens*.

A bevezetett tulajdonságok alapján igazolhatóak az alábbi tételek:

1.5.7. **Tétel.** (1) Ha egy sorozatnak van határértéke, akkor az egyértelmű.

Ha egy sorozat konvergens, akkor korlátos. Az állítás megfordítása azonban nem igaz, azaz van olyan sorozat, amelyik korlátos, de nem konvergens.

(2) Ha egy sorozat monoton növekvő és felülről korlátos, akkor konvergens és határértéke a pontos felső korlátja.

(3) Ha egy sorozat monoton csökkenő és alulról korlátos, akkor konvergens és határértéke a pontos alsó korlátja.

A következő tételben a határértéknek az alapműveletekkel való kapcsolatát adjuk meg.

1.5.8. **Tétel.** Ha a_n és b_n konvergens és az a_n sorozat határértéke a, a b_n sorozat határértéke b és $\lambda \in \mathbb{R}$, akkor

- $a_n + b_n$ konvergens sorozat és a határértéke $a + b$;
- $a_n \cdot b_n$ konvergens sorozat és a határértéke $a \cdot b$;
- $\lambda \cdot a_n$ konvergens sorozat és a határértéke $\lambda \cdot a$;
- ha $b_n \neq 0$ (minden $n \in \mathbb{N}$ esetln) és $b \neq 0$, akkor $\dfrac{a_n}{b_n}$ konvergens sorozat és a határértéke $\dfrac{a}{b}$.

A következő tételben néhány nevezetes határértéket adunk meg.

1.5.9. **Tétel.** Nevezetes határértékek:

- Az $a_n = \dfrac{1}{n^k}$ sorozat határértéke minden $k > 0$ esetén 0.
- Az $a_n = \sqrt[n]{a}$ sorozat határértéke minden $a > 0$ esetén 1.
- Az $a_n = \sqrt[n]{n}$ sorozat határértéke 1.
- Az $a_n = q^n$ sorozat határértéke $-1 < q < 1$ esetén 0.
- Az $a_n = q^n$ sorozat határértéke $q \leq -1$ esetén nem létezik.
- Az $a_n = q^n$ sorozat határértéke $q > 1$ esetén nem létezik, de a sorozat végtelenhez „tart”.
- Az $a_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$ sorozat határértéke az e szám $(\mathrm{e} \approx 2,718)$.
- Az $a_n = \dfrac{\sin \frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}$ sorozat határértéke: 1.

Folytonos jóváírású kamatos kamatozású betét:

Ha T_0 kezdőtőkét p százalékos kamatra elhelyezünk egy bankba, akkor t év elteltével

$$T_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^t$$

összegre kamatozik a pénzünk abban az esetben, ha a felkamatozott pénzünket t éven belül nem vesszük ki a bankból. Ezt a kamatozást *diszkrét idejű kamatos kamatozású befektetés*nek nevezzük.

Amennyiben a bank évente 365-ször teszi hozzá a pénzünkhöz a kamatot, azaz napi kamatot kapunk tőkésítéssel, akkor évente 365-ször $\frac{p}{365}$ százalékos kamatot kapunk, így t év múlva

$$T_0 \cdot \left(1 + \frac{\frac{p}{100}}{365}\right)^{365 \cdot t}$$

pénzünk lesz a bankban.

Általánosan, ha a bank évente n-szer teszi hozzá a pénzünkhöz a kamatot, akkor évente n-szer $\frac{p}{n}$ százalékos kamatot kapunk, így t év múlva

$$T_0 \cdot \left(1 + \frac{\frac{p}{100}}{n}\right)^{n \cdot t}$$

pénzünk lesz. Egy befektetés annál jövedelmezőbb, minél nagyobb az n értéke. A gyakorlatban nem lehet az n tetszőlegesen nagy, de ennek ellenére elvégezhetjük az előbbi formulában az $n \to \infty$ határátmenetet. Ebben az esetben *folytonos jóváírású kamatos kamatozásról beszélünk*:

$$\lim_{n \to \infty} T_0 \cdot \left(1 + \frac{\frac{p}{100}}{n}\right)^{n \cdot t} = \lim_{n \to \infty} T_0 \cdot \left[\left(1 + \frac{1}{\frac{100n}{p}}\right)^{\frac{100n}{p}}\right]^{\frac{p}{100n} \cdot n \cdot t} =$$

$$= T_0 \cdot \mathrm{e}^{\frac{p}{100} \cdot t}.$$

Kidolgozott feladatok

51. **Feladat.** Tekintsük az
$$a_n = \frac{n}{n+1}$$
sorozatot!

a) Vizsgáljuk meg a sorozatot monotonitás szempontjából!
b) Korlátos-e a sorozat? Adjuk meg a sorozat infimumát és szuprémumát is!
c) Adjuk mega sorozat minimumát és maximumát!
d) Konvergenes-e a sorozat?
e) Ha konvergens, akkor hanyadik elemtől kezdve esnek a sorozatelemek a határérték $\varepsilon = \dfrac{1}{10}$ sugarú környezetébe, azaz $\varepsilon = \dfrac{1}{10}$-hez határozzuk meg a küszöbindexet!

Megoldás:

a) Kiszámoljuk az
$$a_{n+1} - a_n$$
különbséget. Ehhez először meghatározzuk az a_{n+1}-et, azaz a sorozat $n+1$-edik tagját:
$$a_{n+1} = \frac{n+1}{(n+1)+1} = \frac{n+1}{n+2}.$$
Most felírjuk az $a_{n+1} - a_n$ differenciát, majd elvégezzük a közös nevezőre hozást, a zárójelek felbontását, végül összevonjuk az egynemű tagokat:
$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= \frac{n+1}{n+2} - \frac{n}{n+1} = \\ &= \frac{(n+1)^2 - n\cdot(n+2)}{(n+1)\cdot(n+2)} = \\ &= \frac{n^2+2n+1-n^2-2n}{(n+1)\cdot(n+2)} = \\ &= \frac{1}{(n+1)\cdot(n+2)}. \end{aligned}$$
A kapott kifejezés minden $n \in \mathbb{N}$ esetén pozitív, így
$$a_{n+1} - a_n > 0 \qquad \Rightarrow \qquad a_{n+1} > a_n.$$
amiből azt jelenti, hogy a sorozat szigorúan monton növekvő.

b) Mivel a sorozat szigorúan monoton növekvő, ezért alulról korlátos, pontos alsó korlátja az első eleme, azaz

$$\inf(a_n) = a_1 = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}.$$

Mivel

$$a_n = \frac{n}{n+1} = \frac{n+1-1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1} < 1,$$

ezért a sorozat felülről korlátos, pontos felső korlátja $\sup(a_n) = 1$.
A sorozat korlátos, mert alulról és felülről is korlátos.

c) A sorozat minimuma 1, maximuma nem létezik.

d) Mivel a sorozat monoton növekvő és felülről korlátos, ezért konvergens, pontos felső korlátja a határértéke, azaz

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 1.$$

e) A küszöbindex meghatározásához az

$$|a_n - a| < \varepsilon$$

egyenlőtlenség legkisebb pozitív egész megoldását keressük, ahol a a sorozat határértéke. Az adatok behelyettesítése után azt kapjuk, hogy

$$\left|\frac{n}{n+1} - 1\right| < \frac{1}{10}.$$

Közös nevezőre hozva

$$\left|\frac{n-(n+1)}{n+1}\right| < \frac{1}{10}$$
$$\left|\frac{n-n-1}{n+1}\right| < \frac{1}{10}$$
$$\left|\frac{-1}{n+1}\right| < \frac{1}{10}$$

adódik. Az abszolútérték definíciója miatt azt kapjuk, hogy

$$\frac{1}{n+1} < \frac{1}{10},$$

amiből $10 < n+1$, azaz $n > 9$ adódik, így a küszöbindex $n_0 = 10$.

52. **Feladat.** Tekintsük az

$$a_n = \frac{2n+1}{3n+2}$$

sorozatot!

a) Vizsgáljuk meg a sorozatot monotonitás szempontjából!

b) Korlátos-e a sorozat?

c) Adjuk meg a sorozat infimumát és szuprémumát!

d) Konvergenes-e a sorozat?

e) Ha konvergens, akkor hanyadik elemtől kezdve esnek a sorozatelemek a határérték $\varepsilon = \dfrac{1}{100}$ sugarú környezetébe, azaz $\varepsilon = \dfrac{1}{100}$-hoz határozzuk meg a küszöbindexet!

Megoldás:

a) Kiszámoljuk az

$$a_{n+1} - a_n$$

különbséget. Ehhez először meghatározzuk az a_{n+1}-et, azaz a sorozat $n+1$-edik tagját:

$$a_{n+1} = \frac{2(n+1)+1}{3(n+1)+2} = \frac{2n+3}{3n+5}.$$

Most felírjuk az $a_{n+1} - a_n$ differenciát, majd elvégezzük a közös nevezőre hozást, a zárójelek felbontását, végül összevonjuk az egynemű tagokat:

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= \frac{2n+3}{3n+5} - \frac{2n+1}{3n+2} = \\ &= \frac{(2n+3)\cdot(3n+2) - (3n+5)\cdot(2n+1)}{(3n+5)\cdot(3n+2)} = \\ &= \frac{6n^2+13n+6-6n^2-13n-5}{(3n+5)\cdot(3n+2)} = \\ &= \frac{1}{(3n+5)\cdot(3n+2)}. \end{aligned}$$

A kapott kifejezés minden $n \in \mathbb{N}$ számra pozitív, így

$$a_{n+1} - a_n > 0,$$

amiből következik, hogy a sorozat szigorúan monton növekvő.

b) Mivel a sorozat szigorúan monoton növekvő, ezért alulról korlátos, pontos alsó korlátja az első eleme, azaz

$$\inf(a_n) = a_1 = \frac{2 \cdot 1 + 1}{3 \cdot 1 + 2} = \frac{3}{5}.$$

Mivel

$$a_n = \frac{2n+1}{3n+2} = \frac{2}{3} \cdot \frac{n + \frac{1}{2}}{n + \frac{2}{3}} = \frac{2}{3} \cdot \frac{n + \frac{2}{3} - \frac{1}{6}}{n + \frac{2}{3}} =$$

$$= \frac{2}{3} \cdot \left(1 - \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{n + \frac{2}{3}}\right) = \frac{2}{3} - \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{n + \frac{2}{3}} < \frac{2}{3},$$

felülről korlátos, pontos felső korlátja $\sup(a_n) = \frac{2}{3}$.
A sorozat korlátos, mert alulról és felülről is korlátos.

c) A sorozat minimuma $\dfrac{3}{5}$, maximuma nem létezik.

d) Mivel a sorozat monoton növekvő és felülről korlátos, ezért konvergens, pontos felső korlátja a határértéke, azaz

$$\lim_{n \to \infty} a_n = \frac{2}{3}.$$

e) A küszöbindex meghatározásához az

$$|a_n - a| < \varepsilon$$

egyenlőtlenség legkisebb pozitív egész megoldását keressük, ahol a a sorozat határértéke. Az adatok behelyettesítve azt kapjuk, hogy

$$\left| \frac{2n+1}{3n+2} - \frac{2}{3} \right| < \frac{1}{100}.$$

Közös nevezőre hozva

$$\left| \frac{3 \cdot (2n+1) - 2 \cdot (3n+2)}{3(3n+2)} \right| < \frac{1}{100}$$

$$\left| \frac{6n + 3 - 6n - 4}{9n+6} \right| < \frac{1}{100}$$

$$\left| \frac{-1}{9n+6} \right| < \frac{1}{100}$$

adódik. Az abszolútérték elvégzése után azt kapjuk, hogy

$$\frac{1}{9n+6} < \frac{1}{100},$$

így $100 < 9n + 6$, tehát $\frac{94}{9} < n$, ami azt jelenti, hogy a küszöbindex $n_0 = 11$.

53. **Feladat.** Tekintsük az

$$a_n = 2^n$$

sorozatot!

a) Vizsgáljuk meg a sorozatot monotonitás szempontjából!
b) Korlátos-e a sorozat?
c) Adjuk meg a sorozat infimumát és szuprémumát!
d) Konvergenes-e a sorozat?

Megoldás:

a) Kiszámoljuk az

$$a_{n+1} - a_n$$

különbséget. Ehhez először meghatározzuk az a_{n+1}-et, azaz a sorozat $n+1$-edik tagját:

$$a_{n+1} = 2^{n+1} = 2 \cdot 2^n.$$

Most felírjuk az $a_{n+1} - a_n$ differenciát:

$$a_{n+1} - a_n = 2 \cdot 2^n - 2^n = 2^n.$$

A kapott kifejezés minden $n \in \mathbb{N}$ számra pozitív, így

$$a_{n+1} - a_n > 0,$$

amiből következik, hogy a sorozat szigorúan monton növekvő.

b) Mivel a sorozat szigorúan monoton növekvő, ezért alulról korlátos, pontos alsó korlátja az első eleme, azaz

$$\inf(a_n) = a_1 = 2^1 = 2.$$

A sorozat felülről nem korlátos, így nem korlátos.

c) A sorozat minimuma 2, maximuma nem létezik.

d) A sorozat nem konvergens,

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty.$$

54. **Feladat.** Határozzuk meg az

$$a_n = \frac{n^2 + 3n + 5}{4n^2 - 7n + 6}$$

sorozat határértékét!

Megoldás:

Osszuk el a számlálót és a nevezőt a nevezőben lévő legnagyobb fokszámú taggal, azaz n^2-tel. Ekkor azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{n^2 + 3n + 5}{4n^2 - 7n + 6} = \\ &= \frac{1 + \frac{3}{n} + \frac{5}{n^2}}{4 - \frac{7}{n} + \frac{6}{n^2}} \to \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

55. **Feladat.** Határozzuk meg az

$$a_n = \frac{3n^2 + 6n + 7}{6n^3 - 9n + 5}$$

sorozat határértékét!

Megoldás:

Osszuk el a számlálót és a nevezőt a nevezőben lévő legnagyobb fokszámú taggal, azaz n^3-nal:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{3n^2 + 6n + 7}{6n^3 - 9n + 5} = \\ &= \frac{\frac{3}{n} + \frac{6}{n^2} + \frac{7}{n^3}}{6 - \frac{9}{n^2} + \frac{5}{n^3}} \to 0. \end{aligned}$$

56. **Feladat.** Határozzuk meg az

$$a_n = \frac{4n^2 + 7n - 8}{3n + 5}$$

sorozat határértékét!

Megoldás:

Osszuk el a számlálót és a nevezőt a nevezőben lévő legnagyobb fokszámú taggal, azaz n-nel:

$$a_n = \frac{4n^2 + 7n - 8}{3n + 5} = \frac{4n + 7 - \frac{8}{n}}{3 + \frac{5}{n}} \to \infty.$$

57. **Feladat.** Határozzuk meg az

$$a_n = \sqrt{9n^2 + 7n + 3} - 3n$$

sorozat határértékét!

<u>**Megoldás**</u>:

Bővítsük a sorozatot

$$\sqrt{9n^2 + 7n + 3} + 3n$$

kifejezéssel:

$$a_n = \sqrt{9n^2 + 7n + 3} - 3n = \left(\sqrt{9n^2 + 7n + 3} - 3n\right) \cdot \frac{\sqrt{9n^2 + 7n + 3} + 3n}{\sqrt{9n^2 + 7n + 3} + 3n}.$$

A szorzás és az összevonás után azt kapjuk, hogy

$$a_n = \frac{9n^2 + 7n + 3 - 9n^2}{\sqrt{9n^2 + 7n + 3} + 3n} = \frac{7n + 3}{\sqrt{9n^2 + 7n + 3} + 3n}.$$

Ezután a nevezőben lévő legnagyobb fokszámú taggal osszuk el a számlálót és a nevezőt:

$$a_n = \frac{7 + \frac{3}{n}}{\sqrt{9 + \frac{7}{n} + \frac{3}{n^2}} + 3} \to \frac{7}{6}.$$

58. **Feladat.** Határozzuk meg az

$$a_n = \sqrt{36n^2 + 8n + 7} - 6n$$

sorozat határértékét!

<u>**Megoldás**</u>:

Bővítsük a sorozatot a

$$\sqrt{36n^2 + 8n + 7} + 6n$$

kifejezéssel:

$$a_n = \sqrt{36n^2 + 8n + 7} - 6n = \left(\sqrt{36n^2 + 8n + 7} - 6n\right) \cdot \frac{\sqrt{36n^2 + 8n + 7} + 6n}{\sqrt{36n^2 + 8n + 7} + 6n}.$$

A szorzás és az összevonás elvégzése után azt kapjuk, hogy

$$a_n = \frac{36n^2 + 8n + 7 - 36n^2}{\sqrt{36n^2 + 8n + 7} + 6n} = \frac{8n + 7}{\sqrt{36n^2 + 8n + 7} + 6n}.$$

A nevezőben lévő legnagyobb fokszámú taggal osszuk el a számlálót és a nevezőt:

$$a_n = \frac{8 + \frac{7}{n}}{\sqrt{36 + \frac{8}{n} + \frac{7}{n^2}} + 6} \to \frac{8}{6+6} = \frac{2}{3}.$$

59. **Feladat.** Határozzuk meg az

$$a_n = \frac{2^{n+1} + 3^n}{3^{n+1}}$$

sorozat határértékét!

Megoldás:

Felhasználva a hatványozás azonosságait azt kapjuk, hogy

$$a_n = \frac{2^{n+1} + 3^n}{3^{n+1}} = \frac{2 \cdot 2^n + 3^n}{3 \cdot 3^n}.$$

A számlálót és nevezetőt is osszuk el 3^n-nel:

$$a_n = \frac{2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n + 1}{3}.$$

Felhasználva, hogy $q^n \to 0$, ha $-1 < q < 1$, azt kapjuk, hogy

$$a_n \to \frac{1}{3}.$$

60. **Feladat.** Határozzuk meg az

$$a_n = \left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{n+3}$$

sorozat határértékét!

Megoldás:

A sorozat határértékét a

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

nevezetes határértékre vezetjük vissza:

$$a_n = \left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{n+3} = \left(\frac{n+2-1}{n+2}\right)^{n+3} = \left(1 - \frac{1}{n+2}\right)^{n+3} =$$

$$= \left(1 + \frac{-1}{n+2}\right)^{n+3} = \left[\left(1 + \frac{1}{-n-2}\right)^{-n-2}\right]^{\frac{n+3}{-n-2}} \to e^{-1} = \frac{1}{e},$$

ugyanis

$$\frac{n+3}{-n-2} \to -1.$$

61. **Feladat.** Határozzuk meg a

$$a_n = \left(\frac{2n+1}{2n+5}\right)^{3n+2}$$

sorozat határértékét!

<u>**Megoldás**</u>:

A sorozat határértékét a

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e}$$

nevezetes határértékre vezetjük vissza:

$$a_n = \left(\frac{2n+1}{2n+5}\right)^{3n+2} = \left(\frac{2n+5-4}{2n+5}\right)^{3n+2} = \left(1-\frac{4}{2n+5}\right)^{3n+2} =$$

$$= \left(1+\frac{-4}{2n+5}\right)^{3n+2} = \left[\left(1+\frac{1}{\frac{2n+5}{-4}}\right)^{\frac{2n+5}{-4}}\right]^{\frac{-4}{2n+5}\cdot(3n+2)} \to e^{-6} = \frac{1}{\mathrm{e}^6},$$

ugyanis

$$\frac{n+3}{-n-2} \to -1.$$

62. **Feladat.** Határozzuk meg az r sugarú kör területét a körbe írt szabályos n-szögek területeinek határértékét!

<u>**Megoldás**</u>:

A kör területét a körbe írt szabályos n-szögek területeinek határértékét fogjuk kiszámolni. A szabályos n-szög egy háromszögének területe a trigonometrikus területképlet szerint

$$T_\triangle = \frac{r^2\cdot\sin\frac{2\pi}{n}}{2}.$$

Ebből azt kapjuk, hogy a szabályos n oldalú sokszög területe:

$$T = n\cdot\frac{r^2\cdot\sin\frac{2\pi}{n}}{2} = r^2\cdot\frac{\sin\frac{2\pi}{n}}{\frac{2\pi}{n}}\cdot\pi \to r^2\pi,$$

ugyanis

$$\lim_{n\to\infty} n \cdot \sin\frac{1}{n} = 1.$$

63. **Feladat.** Egy bankba elhelyezünk 100 000 forintot. Mennyi pénzünk lesz 1 év múlva, ha a tőkésítés módja

a) évenkénti ;

b) félévenkénti ;

c) havonkénti ;

d) naponkénti ;

e) folytonos.

Megoldás:

a) Évenkénti tőkésítés esetén:

$$100\,000 \cdot \left(1 + \frac{5}{100}\right) = 105\,000\,\mathrm{Ft}.$$

b) Félévenkénti tőkésítés esetén:

$$100\,000 \cdot \left(1 + \frac{\frac{5}{100}}{2}\right)^2 = 105\,062\,\mathrm{Ft}.$$

c) Havonkénti tőkésítés esetén:

$$100\,000 \cdot \left(1 + \frac{\frac{5}{100}}{12}\right)^{12} = 105\,116\,\mathrm{Ft}.$$

d) Naponkénti tőkésítés esetén:

$$100\,000 \cdot \left(1 + \frac{\frac{5}{100}}{365}\right)^{365} = 105\,127\,\mathrm{Ft}.$$

e) Folytonos tőkésítés esetén:

$$100\,000 \cdot \mathrm{e}^{\frac{5}{100}} = 105\,127\,\mathrm{Ft}.$$

Érdemes megjegyezni, hogy jelen esetben a napokénti tőkésítéssel kapott érték és a folytonos kamatozású érték esetén már olyan kicsi a különbség, hogy a forintra kerekített érték már azonos.

1.6. Függvények folytonossága és határértéke

Elméleti összefoglaló

1.6.1. **Definíció.** Legyen $D \subset \mathbb{R}$ és $f\colon D \to \mathbb{R}$, legyen továbbá x_0 a D halmaz torlódási pontja, azaz olyan pont, amelynek bármely környezetében van D-beli elem. Azt mondjuk, hogy az f függvénynek létezik a *határérték*e az x_0 helyen és az egyenlő A-val, ha minden $x_n \to x_0$, $x_n \in D$ sorozat esetén az $f(x_n)$ függvényértékek sorozata $f(x_0)$-hoz konvergál. Jelölése: $\lim\limits_{x \to x_0} = A$.

Az f függvény bal oldali határértéke az x_0 helyen A, ha minden $x_n \to x_0$, $x_n \in D$, $x_n < x_0$ sorozat esetén az $f(x_n)$ függvényértékek sorozata $f(x_0)$-hoz konvergál. Jele: $\lim\limits_{x \to x_0-} = A$.

Az f függvény jobb oldali határértéke az x_0 helyen A, ha minden $x_n \to x_0$, $x_n \in D$, $x_n > x_0$ sorozat esetén az $f(x_n)$ függvényértékek sorozata $f(x_0)$-hoz konvergál. Jele: $\lim\limits_{x \to x_0+} = A$.

1.6.2. **Tétel.** Egy függvénynek akkor létezik a határértéke az x_0 helyen, ha ott a bal oldali és jobb oldali határértéke megegyezik.

1.6.3. **Definíció.** Az $f\colon D \to \mathbb{R}$ függvény folytonos az x_0 helyen, ha az x_0 helyen létezik a határértéke az f függvénynek és határték megegyezik az x_0-beli helyettesítési értékkel, azaz $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

A következő tételben megadjuk a határértéknek az alapműveletekkel való kapcsolatát.

1.6.4. **Tétel.** Ha az f és g függvényeknek az x_0 helyen létezik határértéke és az f függvény határértéke A, a g függvény határértéke B az x_0 helyen és $\lambda \in \mathbb{R}$, akkor

- az $f + g$ függvénynek létezik határértéke az x_0 helyen és az egyenlő $A + B$-vel;
- az $f \cdot g$ függvénynek létezik határértéke az x_0 helyen és az egyenlő $A \cdot B$-vel;
- az $\lambda \cdot f$ függvénynek létezik határértéke az x_0 helyen és az egyenlő $\lambda \cdot A$-val;
- ha $g(x) \neq 0$ és $B \neq 0$, akkor $\dfrac{f}{g}$ függvénynek létezik határértéke az x_0 helyen és az egyenlő $\frac{A}{B}$-vel.

A következő tételben néhány nevezetes határértéket adunk meg.

1.6.5. Tétel. Nevezetes határértékek:

- Az $f(x) = \dfrac{1}{x^k}$ függvény határértéke a végtelenben minden $k > 0$ esetén 0.
- Az $f(x) = x^n$ függvény határértéke a végtelenben $-1 < q < 1$ esetén 0.
- Az $f(x) = x^n$ függvény határértéke a végtelenben $q \leq -1$ esetén nem létezik.
- Az $f(x) = x^n$ függvény határértéke a végtelenben $q > 1$ esetén végtelen.
- Az $f(x) = \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x$ függvény határértéke a végtelenben az e szám.

Kidolgozott feladatok

64. **Feladat.** Határozzuk meg a

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2+3x-5}{2x^2+5x-2}$$

határértéket!

<u>**Megoldás**</u>:

A nevezőben lévő legnagyobb fokszámú taggal osztjuk a számlálót és a nevezőt is. Ekkor azt kapjuk, hogy

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2+3x-5}{2x^2+5x-2} = \lim_{x\to\infty} \frac{1+\frac{3}{x}-\frac{5}{x^2}}{2+\frac{5}{x}-\frac{2}{x^2}} = \\ = \frac{3+0-0}{2+0-0} = \frac{3}{2}.$$

65. **Feladat.** Határozzuk meg a

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3x^2+8x-1}{5x^3-2x+4}$$

határértéket!

<u>**Megoldás**</u>:

A nevezőben lévő legnagyobb fokszámú taggal osztjuk a számlálót és a nevezőt is. Ekkor

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3x^2+8x-1}{5x^3-2x+4} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{3}{x}+\frac{8}{x^2}-\frac{1}{x^3}}{5+\frac{2}{x^2}+\frac{4}{x^3}} = \frac{0+0-0}{5+0+0} = 0.$$

66. **Feladat.** Határozzuk meg a

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{5x^2+7x+2}{7-5x}$$

határértéket!

<u>**Megoldás**</u>:

A nevezőben lévő legnagyobb fokszámú taggal osztjuk a számlálót és a nevezőt is. Ekkor

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{5x^2+7x+2}{7-5x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{5x+7+\frac{2}{x}}{\frac{7}{x}-5} = \infty.$$

67. **Feladat.** Határozzuk meg a

$$\lim_{x\to 2} \frac{3x^2+1}{7-3x}$$

határértéket!

<u>**Megoldás**</u>:

A függvény folytonos, így

$$\lim_{x\to 2} \frac{3x^2+1}{7-3x} = \frac{3\cdot 2^2+1}{7-3\cdot 2} = \frac{13}{1} = 13.$$

68. **Feladat.** Határozzuk meg a

$$\lim_{x\to 3}(x^2-8x+5)$$

határértéket!

<u>**Megoldás**</u>:

A függvény folytonos, így

$$\lim_{x\to 3}(x^2-8x+5) = 3^2-8\cdot 3+5 = 9-24 = -10.$$

69. **Feladat.** Határozzuk meg a

$$\lim_{x\to 1}(3x+2)$$

határértéket!

<u>**Megoldás**</u>:

A függvény folytonos, így

$$\lim_{x\to 1}(3x+2) = 3\cdot 1+2 = 5.$$

70. **Feladat.** Határozzuk meg a

$$\lim_{x\to 5} \frac{x^2-25}{x-5}$$

határértéket!

<u>**Megoldás**</u>:

Felhasználva, hogy

$$a^2-b^2 = (a-b)(a+b)$$

azt kapjuk, hogy

$$\lim_{x\to 5}\frac{x^2-25}{x-5}=\lim_{x\to 5}\frac{(x-5)\cdot(x+5)}{x-5}=\lim_{x\to 5}(x+5)=5+5=10.$$

71. **Feladat.** Határozzuk meg a

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2+x}{x}$$

határértéket!

Megoldás:

Emeljünk ki a számlálóban x-et, majd egyszerűsítsünk. Ekkor azt kapjuk, hogy

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2+x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot(x+2)}{x}=\lim_{x\to 0}(x+2)=0+2=2.$$

72. **Feladat.** Határozzuk meg a

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-2x+1}{x-1}$$

határértéket!

Megoldás:

A számlálóban az x^2-2x+1 kifejezést átalakítva, majd egyszerűsítve a kapott törtet azt kapjuk, hogy

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-2x+1}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)^2}{x-1}=\lim_{x\to 1}(x-1)=0.$$

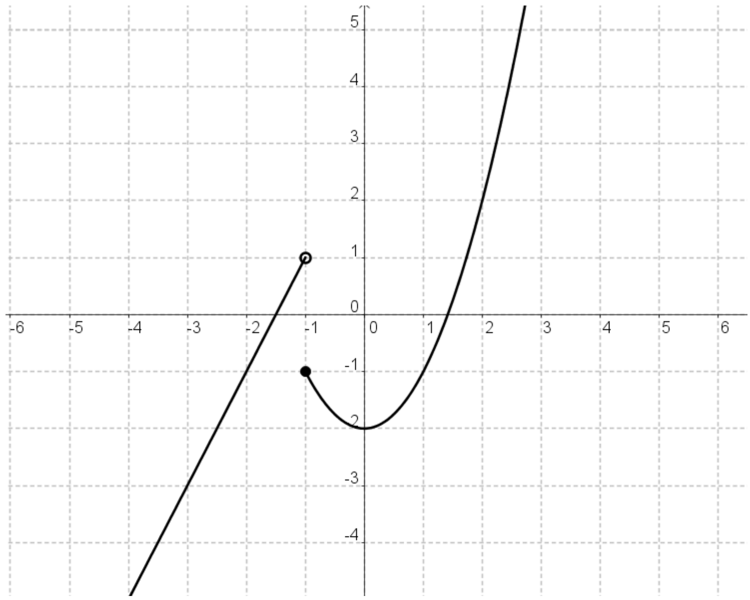
73. **Feladat.** Tekintsük az

$$f(x)=\begin{cases}2x+3, & \text{ha } x\le -1\\ x^2-2, & \text{ha } x>-1\end{cases}$$

függvényt! Vázoljuk fel a függvény grafikonját! Határozzuk meg a valós számok halmazának azt a legbővebb részhalmazát, ahol a függvény értelmezhető! Határozzuk meg a függvény értékkészletét, zérushelyét! Adjuk meg a függvény szélsőértékének típusát, helyét és értékét! Folytonos-e a függvény? Ha nem, adjuk meg a szakadási helyeit, valamint a szakadási helyekben a bal- és jobb oldali határértéket! Adjuk meg a függvény $-\infty$-beli és ∞-beli határértékét!

Megoldás:

A függvény grafikonja:



A függvény grafikonjáról leolvasva:

- értelmezési tartomány: $\mathbb{R}$
- értékkészlet: $\mathbb{R}$
- zérushely: $x_1 = -1,5$, $x_2 = \sqrt{2}$
- a függvénynek lokális minimuma van, a lokális minimum helye: $x = 0$, értéke $y = -2$;
- nem folytonos, szakadási helye: $x = -1$
- a függvény bal oldali, illetve jobb oldali határértéke a szakadási helyen:

$$\lim_{x\to -1-} f(x) = 1;$$
$$\lim_{x\to -1+} f(x) = -1.$$

- a függvény $-\infty$-beli, illetve ∞-beli határértéke:

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = -\infty;$$
$$\lim_{x\to \infty} f(x) = \infty.$$

A zérushely meghatározásához az $x^2 - 2 = 0$, illetve a $2x + 3 = 0$ egyenletet kellett megoldanunk a megfelelő értelmezési tartományon.

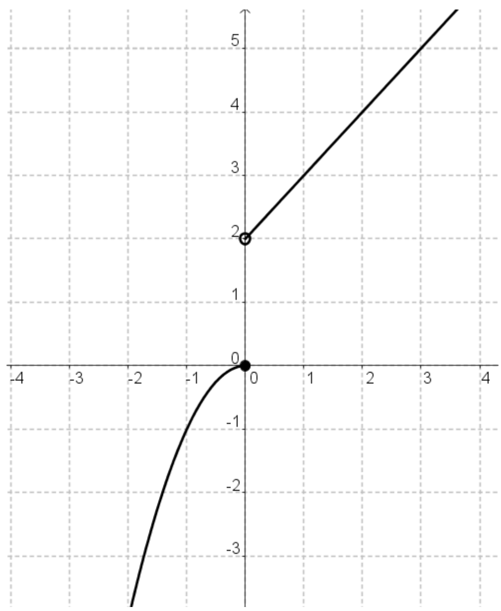
74. **Feladat.** Vázoljuk fel az

$$f(x) = \begin{cases} -x^2, & \text{ha } x < 0 \\ x+2, & \text{ha } x \geq 0 \end{cases}$$

függvény grafikonját! Határozzuk meg a valós számok halmazának azt a legbővebb részhalmazát, ahol a függvény értelmezhető! Határozzuk meg a függvény értékkészletét, zérushelyét! Folytonos-e a függvény? Ha nem, adjuk meg a szakadási helyeit, valamint a szakadási helyekben a bal- és jobb oldali határértéket! Adjuk meg a függvény $-\infty$-beli és ∞-beli határértékét!

Megoldás:

A függvény grafikonja:



A függvény grafikonjáról leolvasva:

- értelmezési tartomány: $\mathbb{R}$;
- értékkészlet: $\mathbb{R}\setminus]0;2]$;
- zérushely: nincs;
- nem folytonos, szakadási helye: $x = 0$;

- a függvény bal oldali, illetve jobb oldali határértéke a szakadási helyen:

$$\lim_{x \to 0-} f(x) = 0;$$
$$\lim_{x \to 0+} f(x) = 2;$$

- a függvény $-\infty$-beli, illetve $+\infty$-beli határértéke:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty;$$
$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty.$$

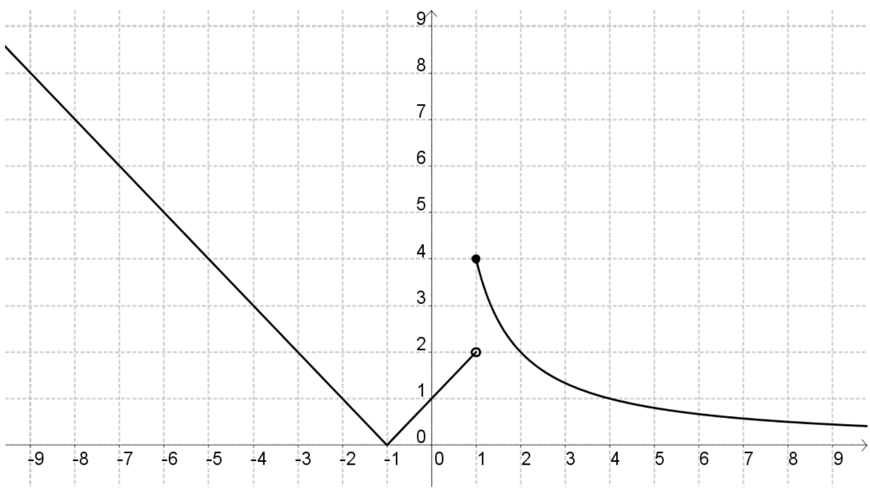
75. **Feladat.** Vázoljuk fel az

$$f(x) = \begin{cases} |x+1|, & \text{ha } x < 1 \\ \frac{4}{x}, & \text{ha } x \geq 1 \end{cases}$$

függvényt grafikonját! Határozzuk meg a valós számok halmazának azt a legbővebb részhalmazát, ahol a függvény értelmezhető! Határozzuk meg a függvény értékkészletét, zérushelyét! Folytonos-e a függvény? Ha nem, adjuk meg a szakadási helyeit, valamint a szakadási helyekben a bal- és jobb oldali határértéket! Adjuk meg a függvény $-\infty$-beli és ∞-beli határértékét!

<u>**Megoldás**</u>:

A függvény grafikonja:



A függvény grafikonjáról leolvasva:

- értelmezési tartomány: $\mathbb{R}$;
- értékkészlet: $[0, \infty[$;
- zérushely: $x = -1$;
- nem folytonos, szakadási helye: $x = 1$;
- a függvény bal oldali, illetve jobb oldali határértéke a szakadási helyen:

$$\lim_{x \to 1-} f(x) = 2;$$
$$\lim_{x \to 1+} f(x) = 4;$$

- a függvény $-\infty$-beli, illetve $+\infty$-beli határértéke:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \infty;$$
$$\lim_{x \to \infty} f(x) = 0.$$

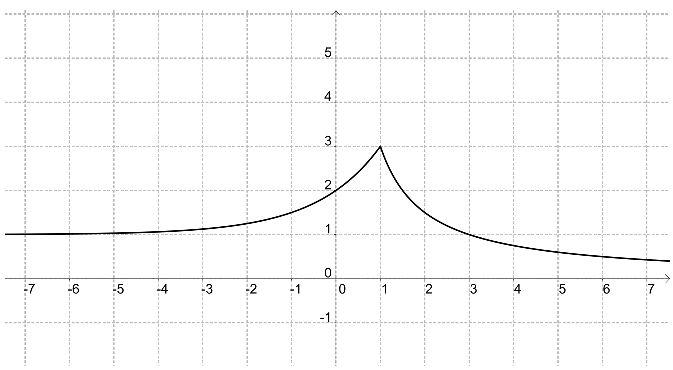
76. **Feladat.** Vázoljuk fel az

$$f(x) = \begin{cases} 2^x + 1, & \text{ha } x < 1 \\ \frac{3}{x}, & \text{ha } x \geq 1 \end{cases}$$

függvényt grafikonját! Határozzuk meg a valós számok halmazának azt a legbővebb részhalmazát, ahol a függvény értelmezhető! Határozzuk meg a függvény értékkészletét, zérushelyét! Folytonos-e a függvény? Ha nem, adjuk meg a szakadási helyeit, valamint a szakadási helyekben a bal- és jobb oldali határértéket! Adjuk meg a függvény $-\infty$-beli és ∞-beli határértékét!

<u>**Megoldás**</u>:

A függvény grafikonja:



A függvény grafikonja alapján:

- értelmezési tartomány: $\mathbb{R}$;
- értékkészlet: $]0,3]$;
- zérushely: nincs;
- folytonos, azaz szakadási helye nincs;
- a függvény $-\infty$-beli, illetve $+\infty$-beli határértéke:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0;$$
$$\lim_{x\to\infty} f(x) = 0.$$

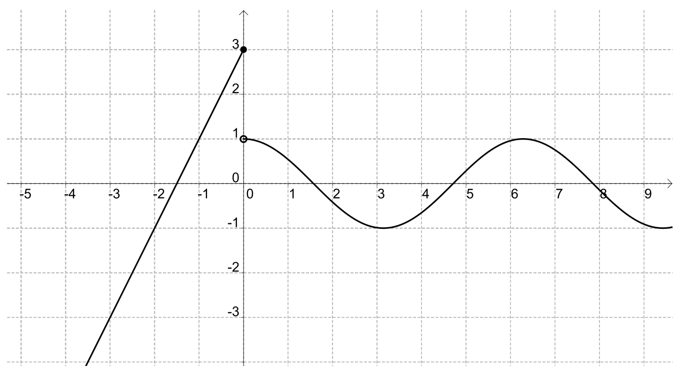
77. **Feladat.** Vázoljuk fel az

$$f(x) = \begin{cases} 2x+3, & \text{ha } x \le 0 \\ \cos x, & \text{ha } x > 0 \end{cases}$$

függvény grafikonját! Határozzuk meg a valós számok halmazának azt a legbővebb részhalmazát, ahol a függvény értelmezhető! Határozzuk meg a függvény értékkészletét! Folytonos-e a függvény? Ha nem, adjuk meg a szakadási helyeit, valamint a szakadási helyekben a bal és jobb oldali határértéket! Adjuk meg a függvény $-\infty$-beli és ∞-beli határértékét!

Megoldás:

A függvény grafikonja:



A függvény grafikonja alapján:

- értelmezési tartomány: $\mathbb{R}$;
- értékkészlet: $]-\infty,3]$;
- nem folytonos, szakadási helye: 0;

- a függvény bal oldali, illetve jobb oldali határértéke a szakadási helyen:

$$\lim_{x \to 0-} f(x) = 3;$$
$$\lim_{x \to 0+} f(x) = 1;$$

- a függvény $-\infty$-beli határértéke:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty.$$

A ∞-beli határérték nem létezik.

2. fejezet

A differenciálszámítás gazdasági alkalmazásai

2.1. A differenciálhányados fogalmának bevezetése

Elméleti összefoglaló

Ebben a fejezetben, ha mást nem mondunk I egy rögzített nyílt intervallumot jelöl.

2.1.1. **Definíció.** Tekintsük az $f\colon I \to \mathbb{R}$ függvényt és legyenek x_1 és x_2 olyan valós számok, melyekre $x_1, x_2 \in I$ és $x_1 \neq x_2$. Az f függvény $\big(x_1; f(x_1)\big)$ és $\big(x_2; f(x_2)\big)$ pontjaihoz tartozó *differenciahányados*án az

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

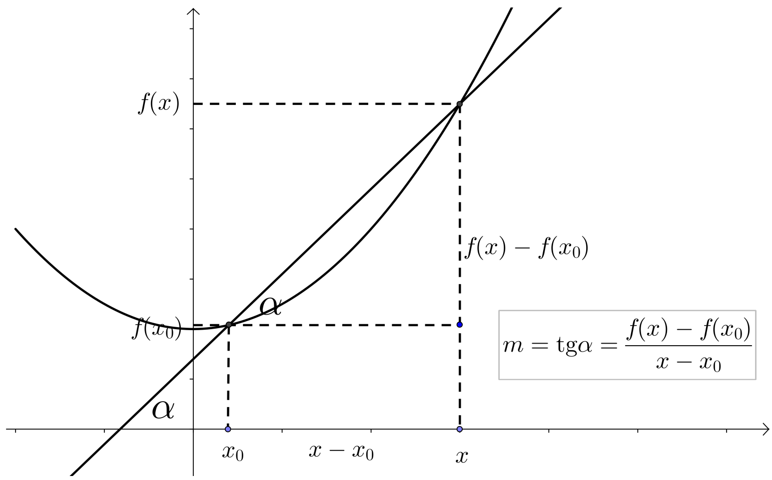
hányadost értjük.

2.1.2. **Definíció.** Legyen $x_0 \in I$. Az $f\colon I \to \mathbb{R}$ függvény x_0 helyhez tartozó *differenciahányados függvény*e a

$$d(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}, \qquad x \in I \setminus \{x_0\}$$

függvény.

2.1.3. **Megjegyzés.** A differenciahányados geometria jelentése az $\big(x_0; f(x_0)\big)$, $\big(x; f(x)\big)$ pontokon áthaladó szelő meredeksége.



2.1.4. **Definíció.** Azt mondjuk, hogy az $f\colon I \to \mathbb{R}$ függvény *differenciálható* az $x_0 \in I$ helyen, ha a differenciahányados függvényének létezik az x_0 helyen határértéke, és az véges, azaz létezik és véges az

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

határérték. Ekkor ezt a határértéket az f függvény x_0-beli *differenciálhányados*ának, vagy *derivált*jának nevezzük.

Azt mondjuk, hogy az f függvény *differenciálható*, ha értelmezési tartományának minden pontjában differenciálható.

Jelölések: $f'(x_0),\ \dfrac{df}{dx}(x_0),\ \dot{f}(t),\ \dfrac{d}{dx}f(x_0)$.

Az $x \mapsto f(x)$ függvényt *derivált függvény*nek is nevezzük.

2.1.5. **Megjegyzés.** Megmutatható, hogy az $f\colon I \to \mathbb{R}$ függvény pontosan akkor differenciálható az $x_0 \in I$ helyen, ha létezik a

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

határéték, és véges.

2.1.6. **Megjegyzés.** Amennyiben $C(q)$ egy költség függvény és az előbbi megjegyzésben $h = 1$, akkor a

$$C(q + 1) - C(q) \approx C'(q)$$

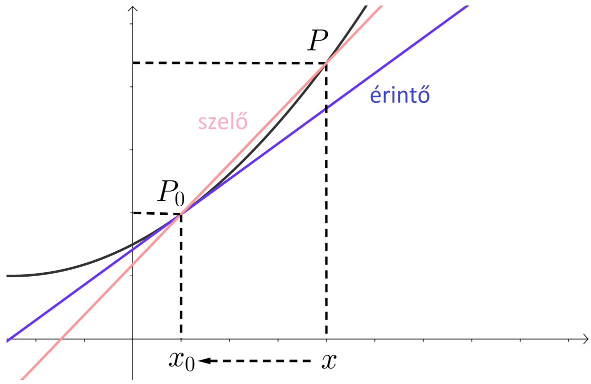
azt jelenti, hogy mennyivel változik a költség, ha az eredetileg tervezett q mennyiség helyett $q + 1$ mennyiséget állítunk elő.

2.1.7. **Definíció.** Ha az $f\colon I \to \mathbb{R}$ függvény differenciálható az $x_0 \in I$ helyen, akkor az

$$y = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$$

egyenletű egyenest az f függvény $\big(x_0; f(x_0)\big)$ pontbeli *érintő egyenes*ének, vagy egyszerűen *érintő*jének mondjuk.

2.1.8. **Megjegyzés.** A differenciálhányados geometriai jelentése a függvény grafikonjának az $P_0 = \big(x_0; f(x_0)\big)$ pontjába húzott érintő egyenesének meredeksége.


P
érintő
szelő
P_0
x_0
x

Kidolgozott feladatok

78. **Feladat.** Tekintsük az $f(x) = x^2$ függvényt és legyen $x_0 = 2$.

a) Határozzuk meg az f függvény differenciahányados függvényének legegyszerűbb alakját az x_0 helyen!

b) A kapott eredményt felhasználva adjuk meg az f függvény differenciálhányadosának értékét az x_0 helyen!

c) Határozzuk meg az f függvény grafikonjának $\big(x_0; f(x_0)\big)$ pontjába húzott e érintő egyenesének meredekségét!

d) Írjuk fel az e egyenes egyenletét!

e) Adjuk meg az e egyenes irányszögét!

<u>**Megoldás**</u>:

a) Mivel

$$f(x_0) = f(2) = 2^2 = 4,$$

ezért a differenciahányados függvény $x \neq 2$ esetén:

$$d(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{x^2 - 2^2}{x - 2} = \frac{(x-2)\cdot(x+2)}{x-2} = x + 2.$$

b) A differenciálhányados az x_0 helyen:

$$f'(2) = \lim_{x \to 2}(x+2) = 4.$$

c) Az érintő egyenes meredeksége:

$$m = f'(2) = 4.$$

d) Az egyenes egyenletét

$$y = m \cdot x + b = 4x + b$$

alakban keressük. Az egyenes illeszkedik a $\big(2; f(2)\big) = (2; 4)$ pontra, így

$$4 = 4 \cdot 2 + b \qquad \Rightarrow \qquad b = -4,$$

tehát az egyenes egyenlete

$$y = 4x - 4.$$

e) Az e egyenes irányszöge:

$$\operatorname{tg}\alpha = 4 \qquad \Rightarrow \qquad \alpha \approx 75{,}96^\circ.$$

79. **Feladat.** Tekintsük az $f(x) = \frac{1}{x}$ függvény és legyen $x_0 = 2$.

a) Határozzuk meg az f függvény differenciahányados függvényének legegyszerűbb alakját az x_0 helyen!

b) A kapott eredményt felhasználva adjuk meg az f függvény differenciálhányadosának értékét az x_0 helyen!

c) Határozzuk meg az f függvény grafikonjának $\big(x_0; f(x_0)\big)$ pontjába húzott e érintő egyenesének meredekségét!

d) Írjuk fel az e egyenes egyenletét!

e) Adjuk meg az e egyenes irányszögét!

Megoldás:

a) A differenciahányados függvény:

$$d(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{2}}{x - 2} = \frac{2 - x}{2x \cdot (x-2)} = -\frac{1}{2x}.$$

b) A differenciálhányados az $x_0 = 2$ helyen:

$$f'(2) = \lim_{x \to 2} -\frac{1}{2x} = -\frac{1}{4}.$$

c) Az érintő egyenes meredeksége:

$$m = f'(2) = -\frac{1}{4}.$$

d) Az érintő egyenes egyenlete:

$$y = -\frac{1}{4}x + b.$$

Az egyenes illeszkedik a $\big(2; f(2)\big) = \big(2; \frac{1}{2}\big)$ pontra, így

$$\frac{1}{2} = -\frac{1}{4} \cdot 2 + b \qquad \Rightarrow \qquad b = 1,$$

tehát az egyenes egyenlete:

$$y = -\frac{1}{4}x + 1.$$

e) Az egyenes irányszöge:

$$\operatorname{tg} \alpha = -\frac{1}{4} \qquad \Rightarrow \qquad \alpha \approx 165,96°.$$

80. **Feladat.** Tekintsük az $f(x) = \sqrt{x}$ függvény és legyen $x_0 = 4$.

a) Határozzuk meg az f függvény differenciahányados függvényének legegyszerűbb alakját az x_0 helyen!

b) A kapott eredményt felhasználva adjuk meg az f függvény differenciálhányadosának értékét az x_0 helyen!

c) Határozzuk meg az f függvény grafikonjának $\big(x_0; f(x_0)\big)$ pontjába húzott e érintő egyenesének meredekségét!

d) Írjuk fel az e egyenes egyenletét!

e) Adjuk meg az e egyenes irányszögét!

Megoldás:

a) A differenciahányados függvény:

$$d(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{\sqrt{x} - \sqrt{4}}{x - 2} = \frac{\sqrt{x} - 2}{(\sqrt{x} - 2) \cdot (\sqrt{x} + 2)} = \frac{1}{\sqrt{x} + 2}.$$

b) A differenciálhányados az $x_0 = 2$ helyen:

$$f'(4) = \lim_{x \to 4} \frac{1}{\sqrt{x} + 2} = \frac{1}{4}.$$

c) Az érintő egyenes meredeksége:

$$m = f'(4) = \frac{1}{4}.$$

d) Az érintő egyenes egyenlete:

$$y = \frac{1}{4}x + b.$$

Az egyenes illeszkedik a $\big(4; f(4)\big) = (4; 2)$ pontra, így

$$2 = \frac{1}{4} \cdot 4 + b \qquad \Rightarrow \qquad b = 1,$$

tehát az egyenes egyenlete:

$$y = \frac{1}{4}x + 1.$$

e) Az egyenes irányszöge:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{4} \qquad \Rightarrow \qquad \alpha \approx 14,04^\circ.$$

81. **Feladat.** Egy hűtőbe tett üdítőital hőmérsékletét a

$$T(t) = \frac{300}{3t^2 + 2t + 10}\,[^\circ\mathrm{C}]$$

függvény írja le, ahol t a hűtőbe helyezéstől eltelt időt jelenti órában.

a) Határozzuk meg, hogy hány [°C]-os volt az üdítőital, amikor betettük a hűtőbe?

b) Hány [°C]-os volt az üdítőital egy óra elteltével?

c) Mennyi a hőmérsékletváltozás átlagos gyorsasága az első két órában?

Megoldás:

a) Mivel

$$T(0) = \frac{300}{3 \cdot 0^2 + 2 \cdot 0 + 10} = \frac{300}{10} = 30,$$

ezért az üdítőital 30[°C]-os volt, amikor betettük a hűtőbe.

b) Mivel

$$T(1) = \frac{300}{3 \cdot 1^2 + 2 \cdot 1 + 10} = \frac{300}{15} = 20,$$

ezért 20[°C]-os volt az üdítőital egy óra elteltével.

c) A hőmérsékletváltozás átlagos gyorsasága az első két órában

$$\frac{T(2) - T(0)}{2 - 0} = \frac{\frac{300}{3 \cdot 2^2 + 2 \cdot 2 + 10} - 30}{2} \approx -9,23 \left[\frac{^\circ\mathrm{C}}{\mathrm{h}}\right].$$

82. **Feladat.** Tekintsük az $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$ függvényt!

a) Adjuk meg a az $f(x+h)$ függvényértéket!

b) Határozzuk meg az $\dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$ hányadost és egyszerűsítsük a kapott törtet!

c) Határozzuk meg az $f(x)$ függvény deriváltját a

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

definíció felhasználásával!

Megoldás:

a) Az $f(x+h)$ függvényérték:

$$f(x+h) = (x+h)^3 = x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3.$$

b) Felhasználva az előbb kapott eredményt azt kapju, hogy

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{x^3+3x^2h+3xh^2+h^3-x^3}{h} =$$
$$= \frac{3x^2h+3xh^2+h^3}{h} = \frac{h\cdot(3x^2+3xh+h^2)}{h} =$$
$$= 3x^2+3xh+h^2.$$

c) Az f függvény deriváltja:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}(3x^2+3xh+h^2) = 3x^2.$$

2.2. Deriválási szabályok

Elméleti összefoglaló

Megadjuk az elemi függvények deriváltjait.

2.2.1. **Tétel.** Konstans függvény deriváltja nulla, azaz ha $c \in \mathbb{R}$ és $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = c$, akkor minden $x \in \mathbb{R}$ esetén $f'(x) = 0$.

Az $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x$ függvény deriváltja $f'(x) = 1$.

Legyen $n \in \mathbb{N}$ tetszőleges, rögzített. Az $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^n$ függvény deriváltja $f'(x) = n \cdot x^{n-1}$.

Az $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin x$ függvény deriváltja $f'(x) = \cos x$.

Az $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \cos x$ függvény deriváltja $f'(x) = -\sin x$.

Az $f(x) = \operatorname{tg} x$ függvény deriváltja $f'(x) = \dfrac{1}{\cos^2 x}$.

Az $f(x) = \operatorname{ctg} x$ függvény deriváltja $f'(x) = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$.

Az $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^x$ függvény deriváltja $f'(x) = e^x$.

Az $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = a^x$ $(a > 0)$ függvény deriváltja $f'(x) = a^x \cdot \ln a$.

A $f\colon]0;\infty[\to \mathbb{R}$, $f(x) = \ln x$ függvény deriváltja $f'(x) = \dfrac{1}{x}$.

Ha $a > 0$ és $a \neq 1$, akkor az $f\colon]0;\infty[\to \mathbb{R}$, $f(x) = \log_a x$ függvény deriváltja $f'(x) = \dfrac{1}{x \ln a}$.

Az alábbi tételben a deriválásra vonatkozó műveleti szabályokat adjuk meg.

2.2.2. **Tétel.** Ha az $f, g\colon I \to \mathbb{R}$ függvények differenciálhatóak az $x_0 \in I$ helyen, akkor $f + g$ is differenciálható x_0-ban és

$$(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0).$$

Ha $f\colon I \to \mathbb{R}$ differenciálható az $x_0 \in I$ helyen és $c \in \mathbb{R}$, akkor $c \cdot f$ is differenciálható x_0-ban és $(c \cdot f)'(x_0) = c \cdot f'(x_0)$.

Ha az $f, g\colon I \to \mathbb{R}$ függvények differenciálhatóak az $x_0 \in I$ helyen, akkor $f \cdot g$ is differenciálható x_0-ban és

$$(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0).$$

Ha az $f, g\colon I \to \mathbb{R}$ függvények differenciálhatóak az $x_0 \in I$ helyen, továbbá $g(x) \neq 0$ $(x \in I)$, akkor $\frac{f}{g}$ is differenciálható x_0-ban és

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0) \cdot g(x_0) - f(x_0) \cdot g'(x_0)}{\big(g(x_0)\big)^2}.$$

Legyenek I és J nyílt intervallumok. Ha a $g\colon I \to J$ függvény differenciálható az x_0 helyen, továbbá az $f\colon J \to \mathbb{R}$ függvény differenciálható a $g(x_0)$ helyen, akkor az $f \circ g\colon I \to \mathbb{R}$ összetett függvény is differenciálható az x_0 helyen és

$$(f \circ g)'(x_0) = f'\big(g(x_0)\big) \cdot g'(x_0).$$

Összetett függvényt tehát úgy deriválunk, hogy először deriváljuk a külső függvényt, abba a változó helyére beírjuk az eredeti belső függvényt, majd az így kapott eredményt megszorozzuk a belső függvény deriváltjával.

Kidolgozott feladatok

83. **Feladat.** Deriváljuk az $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 1$ függvényt!

megoldás:

Felhasználva, hogy összeget tagonként deriválhatunk, továbbá, hogy függvény számszorosának deriváltja a derivált számszorosa (azaz a számszorzó differenciáláskor változatlan marad)

$$f'(x) = (2x^3)' + (3x^2)' - 1' = 2 \cdot (x^3)' + 3 \cdot (x^2)' - 1' =$$
$$= 2 \cdot 3x^2 + 3 \cdot 2x - 0 = 6x^2 + 6x.$$

84. **Feladat.** Deriváljuk az $f(x) = x^7 + 8x^2 - 3$ függvényt!

Megoldás:

Felhasználva az összeadásra, illetve konstansszorzóra vonatkozó deriválási szabályokat azt kapjuk, hogy

$$f'(x) = (x^7)' + (8x^2)' - 3' = 7x^6 + 16x.$$

85. **Feladat.** Deriváljuk az $f(x) = x + \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2}$ függvényt!

Megoldás:

Felhasználva, hogy $\frac{1}{x} = x^{-1}$, továbbá, hogy $\frac{1}{x^2} = x^{-2}$, majd az összeget tagonként deriválva

$$f'(x) = 1 - x^{-2} - 2x^{-3} = 1 - \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x^3}$$

adódik.

86. **Feladat.** Deriváljuk az $f(x) = x^2 + \sqrt{x} + \sqrt[3]{x}$ függvényt!

Megoldás:

A $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$, illetve a $\sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$ azonosságok felhasználása után az összeget tagonként deriválva azt kapjuk, hogy

$$f'(x) = 2x + \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} = 2x + \frac{1}{2 \cdot \sqrt{x}} + \frac{1}{3 \cdot \sqrt[3]{x^2}}.$$

87. **Feladat.** Deriváljuk az $f(x) = 3^x \cdot \log_2 x$ függvényt!

Megoldás:

A szorzat deriválási szabályát felhasználva azt kapjuk, hogy

$$f'(x) = 3^x \cdot \ln 3 \cdot \log_2 x + 3^x \cdot \frac{1}{x \cdot \ln 2} = 3^x \cdot \ln 3 \cdot \log_2 x + \frac{3^x}{x \cdot \ln 2}.$$

88. **Feladat.** Deriváljuk az $f(x) = 4^x \cdot \lg x$ függvényt!

Megoldás:

A szorzat deriválási szabálya szerint

$$f'(x) = 4^x \cdot \ln 4 \cdot \lg x + 4^x \cdot \frac{1}{x \cdot \ln 10}.$$

89. **Feladat.** Deriváljuk az $f(x) = \dfrac{2^x}{\log_3 x}$ függvényt!

Megoldás:

Felhasználva a hányados függvényre vonatkozó deriválási szabályt

$$f'(x) = \frac{(2^x)' \cdot \log_3 x - 2^x \cdot (\log_3 x)'}{\log_3^2 x} = \frac{2^x \cdot \ln 2 \cdot \log_3 x - 2^x \cdot \frac{1}{x \cdot \ln 3}}{\log_3^2 x}$$

adódik.

90. **Feladat.** Deriváljuk az $f(x) = \dfrac{x^2 + \sqrt[7]{x}}{x^3}$ függvényt!

Megoldás:

Felhasználva a $\sqrt[7]{x} = x^{\frac{1}{7}}$ azonosságot, majd alkalmazva a hányados deriválási szabályát

$$f'(x) = \frac{\left(2x + \frac{1}{7}x^{-\frac{6}{7}}\right) \cdot x^3 - \left(x^2 + \sqrt[7]{x}\right) \cdot 3x^2}{x^6}.$$

91. **Feladat.** Deriváljuk az $f(x) = \dfrac{x^2 + 3x - 1}{\mathrm{e}^x}$ függvényt.

Megoldás:

Felhasználva a hányados függvény deriválási szabályát

$$f'(x) = \frac{(x^2 + 3x - 1)' \cdot \mathrm{e}^x - (x^2 + 3x - 1) \cdot (\mathrm{e}^x)'}{(\mathrm{e}^x)^2} =$$

$$= \frac{(2x + 3) \cdot \mathrm{e}^x - (x^2 + 3x - 1) \cdot \mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^{2x}}$$

A számlálóban e^x-et kiemelve, majd elvégezve az egyszerűsítést

$$f'(x) = \frac{(2x+3)\cdot \mathrm{e}^x - (x^2+3x-1)\cdot \mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^{2x}} =$$
$$= \frac{\mathrm{e}^x \cdot (2x+3-x^2-3x+1)}{\mathrm{e}^{2x}} = \frac{4-x-x^2}{\mathrm{e}^x}.$$

92. **Feladat.** Deriváljuk az $f(x) = (x^2+7x+2)\cdot \sin x$ függvényt!

<u>**Megoldás**</u>:

Felhasználva a szorzat függvény deriválási szabályát

$$f'(x) = (x^2+7x+2)' \cdot \sin x + (x^2+7x+2)\cdot (\sin x)' =$$
$$= (2x+7)\cdot \sin x + (x^2+7x+2)\cdot \cos x.$$

93. **Feladat.** Deriváljuk az $f(x) = x^2 \cdot \sin x \cdot 5^x$ függvényt!

<u>**Megoldás**</u>:

Ha $u(x)$, $v(x)$ és $w(x)$ differenciálható függvények, akkor

$$\big(u(x)\cdot v(x)\cdot w(x)\big)' = u'(x)\cdot v(x)\cdot w(x) + u(x)\cdot v'(x)\cdot w(x) + u(x)\cdot v(x)\cdot w'(x).$$

Ezt felhasználva azt kapjuk, hogy

$$f'(x) = (x^2)'\cdot \sin x \cdot 5^x + x^2\cdot(\sin x)'\cdot 5^x + x^2\cdot \sin x\cdot(5^x)' =$$
$$= 2x\cdot \sin x\cdot 5^x + x^2\cdot \cos x\cdot 5^x + x^2\cdot \sin x\cdot 5^x\cdot \ln 5.$$

94. **Feladat.** Deriváljuk az $f(x) = \ln(\sin x)$ függvényt!

<u>**Megoldás**</u>: A külső függvény az $\ln x$, a belső függvény a $\sin x$. Először deriváljuk a külső függvényt, amire $\frac{1}{x}$ adódik, majd abba „beírjuk” az eredeti belső függvényt, végül a kapott eredményt szorozzuk a belső függvény deriváltjával.
Legyen $k(x) = \ln x$ és $b(x) = \sin x$. Ekkor $k'(x) = \frac{1}{x}$ és $b'(x) = \cos x$. Az f függvény deriváltja tehát:

$$f'(x) = k'\big(b(x)\big)\cdot b'(x) = \frac{1}{\sin x}\cdot(\sin x)' =$$
$$= \frac{1}{\sin x}\cdot \cos x = \operatorname{ctg} x.$$

95. **Feladat.** Deriváljuk az $f(x) = \ln(x^2+5x-1)$ függvényt!

<u>**Megoldás**</u>: A külső függvény az $\ln x$, a belső függvény x^2+5x-1. Először deriváljuk a külső függvényt, amire $\frac{1}{x}$ adódik, majd abba „beírjuk” az eredeti

belső függvényt, végül a kapott eredményt szorozzuk a belső függvény deriváltjával.
Legyen $k(x) = \ln x$ és $b(x) = x^2+5x-1$. Ekkor $k'(x) = \frac{1}{x}$ és $b'(x) = 2x+5$.
Az f függvény deriváltja tehát:

$$f'(x) = k'\big(b(x)\big) \cdot b'(x) = \frac{1}{x^2+5x-1} \cdot (2x+5) = \frac{2x+5}{x^2+5x-1}.$$

96. **Feladat.** Deriváljuk az $f(x) = \mathrm{e}^{x^2}$ függvényt!

Megoldás:

A külső függvény az e^x, a belső függvény az x^2. A külső függvény deriváltja e^x, ebbe „beírjuk" az eredeti belső függvényt, végül a kapott eredményt szorozzuk a belső függvény deriváltjával.
Legyen $k(x) = \mathrm{e}^x$ és $b(x) = x^2$. Ekkor $k'(x) = \mathrm{e}^x$ és $b'(x) = 2x$. Az f függvény deriváltja tehát:

$$f'(x) = k'\big(b(x)\big) \cdot b'(x) = \mathrm{e}^{x^2} \cdot 2x.$$

97. **Feladat.** Deriváljuk az $f(x) = (3x+20)^{100}$ függvényt!

Megoldás:

A külső függvény az x^{100}, a belső függvény $3x+20$. A külső függvény deriváltja $100 \cdot x^{99}$. Ebbe „beírjuk" az eredeti belső függvényt, végül a kapott eredményt szorozzuk a belső függvény deriváltjával. Legyen $k(x) = \mathrm{e}^x$ és $b(x) = x^2$. Ekkor $k'(x) = x^{100}$ és $b'(x) = 100 \cdot x^{99}$. Az f függvény deriváltja tehát:

$$f'(x) = k'\big(b(x)\big) \cdot b'(x) = 100 \cdot (3x+20)^{99} \cdot (3x+20)' =$$
$$= 100 \cdot (3x+20)^{99} \cdot 3 = 300 \cdot (3x+20)^{99}.$$

98. **Feladat.** Deriváljuk az $f(x) = \operatorname{tg}(x^2+x)$ függvényt!

Megoldás:

Külső függvény a $\operatorname{tg} x$, belső függvény az x^2+x. A külső függvény deriváltja $\frac{1}{\cos^2 x}$, amibe „beírva" az eredeti belső függvényt: $\frac{1}{\cos^2(x^2+x)}$. A belső függvény deriváltja $2x+1$. Tehát:

$$f'(x) = \frac{1}{\cos^2(x^2+x)} \cdot (2x+1) = \frac{2x+1}{\cos^2(x^2+x)}.$$

99. **Feladat.** Deriváljuk az $f(x) = \mathrm{e}^{x^2+3x-4}$ függvényt!

Megoldás:

Külső függvény az e^x, belső függvény az x^2+3x-4. A külső függvény deriváltja e^x, amibe „beírva” az eredeti belső függvényt: e^{x^2+3x-4}. A belső függvény deriváltja $2x+3$. Tehát:

$$f'(x) = \mathrm{e}^{x^2+3x-4} \cdot (2x+3).$$

100. **Feladat.** Deriváljuk az $f(x) = \sqrt{x^2+12x-3}$ függvényt!

Megoldás:

Felhasználva, hogy $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$, a külső függvény az $x^{\frac{1}{2}}$, belső függvény az $x^2+12x-3$. A külső függvény deriváltja $\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$, amibe „beírva” az eredeti belső függvényt: $\frac{1}{2}(x^2+12x-3)^{-\frac{1}{2}}$. A belső függvény deriváltja $2x+12$. Tehát:

$$f'(x) = \frac{1}{2}(x^2+12x-3)^{-\frac{1}{2}} \cdot (2x+12) = \frac{x+6}{\sqrt{x^2+12x-3}}.$$

101. **Feladat.** Deriváljuk az $f(x) = (2x+1)^3 \cdot \sin(x^4)$ függvényt!

Megoldás:

A szorzat és összetett függvény deriválási szabályát alkalmazzuk. Vezessük be az $u(x) = (2x+1)^3$ és $v(x) = \sin(x^4)$ függvényeket!
Az u függvény külső függvénye: $k_u(x) = x^3$, az u függvény belső függvénye: $b_u(x) = 2x+1$. A külső függvény deriváltja $k_u'(x) = 3x^2$, a belső függvény deriváltja $b_u'(x) = 2$. Ezt felhasználva azt kapjuk, hogy

$$u'(x) = k_u'\big(b_u(x)\big) \cdot b_u'(x) = 3 \cdot (2x+1)^2 \cdot 2 = 6 \cdot (2x+1)^2.$$

A v függvény külső függvénye: $k_v(x) = \sin x$, a v függvény belső függvénye: $b_v(x) = x^4$. A külső függvény deriváltja $k_v'(x) = \cos x$, a belső függvény deriváltja $b_v'(x) = 4x^3$. Ezt felhasználva azt kapjuk, hogy

$$v'(x) = \cos(x^4) \cdot 4x^3.$$

Mivel

$$\big(u(x) \cdot v(x)\big)' = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x),$$

ezért

$$f'(x) = 6 \cdot (2x+1)^2 \cdot \sin(x^4) + (2x+1)^3 \cdot 4x^3 \cdot \cos(x^4).$$

102. **Feladat.** Deriváljuk az

$$f(x) = \frac{\sin(\sqrt{x}) + \sqrt{\sin x}}{\mathrm{e}^{2x}}$$

függvényt!

<u>**Megoldás**</u>:

Vezessük be az

$$u(x) = \sin(\sqrt{x})$$
$$v(x) = \sqrt{\sin x} = (\sin x)^{\frac{1}{2}}$$
$$w(x) = \mathrm{e}^{2x}$$

jelöléseket.
Az u függvény külső függvénye: $k_u(x) = \sin x$, az u függvény belső függvénye: $b_u(x) = \sqrt{x}$. A külső függvény deriváltja $k'_u(x) = \cos x$, a belső függvény deriváltja $b'_u(x) = \frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}}$. Ezt felhasználva azt kapjuk, hogy

$$u'(x) = \cos(\sqrt{x}) \cdot \frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}} = \frac{\cos(\sqrt{x})}{2 \cdot \sqrt{x}}.$$

A v függvény külső függvénye: $k_v(x) = \sqrt{x}$, a v függvény belső függvénye: $b_v(x) = \sin x$. A külső függvény deriváltja $k'_v(x) = \frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}}$, a belső függvény deriváltja $b'_v(x) = \frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}}$. Ezt felhasználva azt kapjuk, hogy

$$v'(x) = \frac{1}{2}(\sin x)^{-\frac{1}{2}} \cdot \cos x = \frac{\cos x}{2 \cdot \sqrt{\sin x}}.$$

A w függvény külső függvénye: $k_w(x) = \mathrm{e}^x$, a w függvény belső függvénye: $b_w(x) = 2x$. A külső függvény deriváltja $k'_w(x) = \mathrm{e}^x$, a belső függvény deriváltja $b'_w(x) = 2$. Ezt felhasználva azt kapjuk, hogy

$$w'(x) = \mathrm{e}^{2x} \cdot 2 = 2 \cdot \mathrm{e}^{2x}.$$

Az összeg és hányados függvény deriválási szabálya szerint azt kapjuk, hogy

$$f'(x) = \frac{\big(u(x) + v(x)\big)' \cdot w(x) - \big(u(x) + v(x)\big) \cdot w'(x)}{v^2(x)} =$$
$$\frac{\big(u'(x) + v'(x)\big) \cdot w(x) - \big(u(x) + v(x)\big) \cdot w'(x)}{v^2(x)} =$$
$$= \frac{\left(\frac{\cos(\sqrt{x})}{2 \cdot \sqrt{x}} + \frac{\cos x}{2 \cdot \sqrt{\sin x}}\right) \cdot \mathrm{e}^{2x} - \big(\sin(\sqrt{x}) + \sqrt{\sin x}\big)\, \mathrm{e}^{2x} \cdot 2}{\mathrm{e}^{4x}}.$$

103. **Feladat.** Legyenek f és g differenciálható függvények, melyek helyettesítési értékét, valamint a deriváltfüggvények helyettesítési értékét az $x = 1; 2; 3$ helyen az alábbi táblázat mutatja:

x	1	2	3
$f(x)$	3	1	1
$f'(x)$	1	4	2
$g(x)$	2	1	4
$g'(x)$	4	2	3

Legyen $p(x) = f(x) \cdot g(x)$ és $h(x) = g \circ f(x)$. Határozzuk meg a $p'(3)$ és $h'(2)$ értékeket!

Megoldás:

Felhasználva a szorzatfüggvény deriválási szabályát azt kapjuk, hogy

$$p'(3) = f'(3) \cdot g(3) + f(3) \cdot g'(3) = 2 \cdot 4 + 1 \cdot 3 = 11.$$

Az összetett függvény deriválási szabálya szerint

$$h'(2) = g'\big(f(2)\big) \cdot f'(2) = g'(1) \cdot 4 = 4 \cdot 4 = 16.$$

adódik.

104. **Feladat.** Tekintsük az $f(x) = x \cdot \sin 2x$ függvényt! Határozzuk meg az $f'(\pi)$ értéket!

Megoldás:

A szorzat és összetett függvény deriválási szabályát alkalmazva azt kapjuk, hogy

$$f'(x) = \sin 2x + 2x \cdot \cos 2x.$$

Ekkor $f'(\pi) = \sin 2\pi + 2\pi \cdot \cos 2\pi = 2\pi$.

105. **Feladat.** Tekintsük az

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 8}}$$

függvényt! Határozzuk meg az $f'(3)$ értéket!

Megoldás:

A hányados és összetett függvény deriválási szabályát alkalmazva azt kapjuk, hogy

$$f'(x) = \frac{\sqrt{x^2-8} - x \cdot \frac{1}{2} \cdot (x^2-8)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x}{x^2-8} = \frac{\sqrt{x^2-8} - \frac{x^2}{\sqrt{x^2-8}}}{x^2-8} =$$
$$= \frac{x^2-8-x^2}{\sqrt{x^2-8} \cdot (x^2-8)} = \frac{-8}{(x^2-8)^{\frac{3}{2}}}.$$

Ezt felhasználva $f'(3) = -8$.

106. **Feladat.** Tekintsük az

$$f(x) = \frac{\sqrt[3]{x^2+7x+8} \cdot 3^{\cos x}}{\lg(6x+1)+1}$$

függvényt! Határozzuk meg az $f'(0)$ értéket!

Megoldás:

Vezessük be az

$$u(x) = \sqrt[3]{x^2+7x+8};$$
$$v(x) = 3^{\cos x};$$
$$w(x) = \lg(6x+1)+1$$

jelöléseket!
Az $u(x)$ függvény

- külső függvénye: $k_u(x) = \sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$;
- belső függvénye: $b_u(x) = x^2 + 7x + 8$.

Ekkor

- a külső függvény deriváltja: $k_u'(x) = \dfrac{1}{3} \cdot x^{-\frac{2}{3}}$;
- a belső függvény deriváltja: $b_u'(x) = 2x + 7$.

Az összetett függvény deriválási szabálya szerint:

$$u'(x) = k_u'\big(b_u(x)\big) \cdot b_u'(x) = \frac{1}{3} \cdot (x^2+7x+8)^{-\frac{2}{3}} \cdot (2x+7).$$

A $v(x)$ függvény

- külső függvénye: $k_v(x) = 3^x$;
- belső függvénye: $b_v(x) = \cos x$.

Ekkor

- a külső függvény deriváltja: $k_v'(x) = 3^x \cdot \ln 3$;
- a belső függvény deriváltja: $b_v'(x) = -\sin x$.

Az összetett függvény deriválási szabálya szerint:

$$v'(x) = k_v'\big(b_v(x)\big) \cdot b_v'(x) = 3^{\cos x} \cdot \ln 3 \cdot (-\sin x).$$

Az $w(x)$ függvény első tagját jelöljük w_1-gyel. Ekkor

- külső függvénye: $k_{w_1}(x) = \lg x$;
- belső függvénye: $b_{w_1}(x) = 6x + 1$.

Ekkor

- a külső függvény deriváltja: $k_{w_1}'(x) = \dfrac{1}{x \cdot \ln 10}$;
- a belső függvény deriváltja: $b_{w_1}'(x) = 6$.

Az összetett függvény deriválási szabálya szerint:

$$w_1'(x) = k_{w_1}'\big(b_{w_1}(x)\big) \cdot b_{w_1}'(x) = \frac{1}{(6x+1) \cdot \ln 10} \cdot 6 = \frac{6}{(6x+1) \cdot \ln 10}.$$

Mivel a $w(x)$ függvény második tagjának deriváltja nulla, ezért

$$w'(x) = w_1'(x).$$

Felhasználva a szorzat és hányados függvény deriválási szabályát azt kapjuk, hogy

$$f'(x) = \frac{[u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)] \cdot w(x) - \big(u(x) \cdot v(x)\big) \cdot w'(x)}{w^2(x)}.$$

Tehát

$$f'(0) = \frac{[u'(0) \cdot v(0) + u(0) \cdot v'(0)] \cdot w(0) - \big(u(0) \cdot v(0)\big) \cdot w'(0)}{w^2(0)}.$$

Mivel

$$\begin{aligned} u(0) &= \sqrt[3]{0^2 + 7 \cdot 0 + 8} = 2; \\ v(0) &= 3^{\cos 0} = 3; \\ w(0) &= \lg(6 \cdot 0 + 1) + 1 = 1, \end{aligned}$$

továbbá

$$\begin{aligned} u'(0) &= \frac{1}{3} \cdot (0^2 + 7 \cdot 0 + 8)^{-\frac{2}{3}} \cdot (2 \cdot 0 + 7) = \frac{1}{3} \cdot \frac{7}{4} = \frac{7}{12}; \\ v'(0) &= 3^{\cos 0} \cdot \ln 3 \cdot (-\sin 0) = 0; \\ w'(0) &= \frac{6}{(6 \cdot 0) \cdot \ln 10} = \frac{6}{\ln 10}. \end{aligned}$$

Tehát azt kapjuk, hogy

$$f'(0) = \frac{\left(\frac{7}{12} \cdot 3 + 2 \cdot 0\right) \cdot 1 - (2 \cdot 3) \cdot \frac{6}{\ln 10}}{1} = \frac{7}{4} - \frac{36}{\ln 10}.$$

107. **Feladat.** Tekintsük az

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2 + x + 16} \cdot \mathrm{e}^{\sin x}}{\cos^2 x \cdot 3^{\operatorname{tg} x}}$$

függvényt! Határozzuk meg az $f'(0)$ értéket!

Megoldás:

Vezessük be az

$$u(x) = \sqrt{x^2 + x + 16};$$
$$v(x) = \mathrm{e}^{\sin x};$$
$$w(x) = \cos^2 x;$$
$$z(x) = 3^{\operatorname{tg} x}$$

jelöléseket!
Az $u(x)$ függvény

- külső függvénye: $k_u(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$;
- belső függvénye: $b_u(x) = x^2 + x + 16$.

Ekkor

- a külső függvény deriváltja: $k_u'(x) = \frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}}$;
- a belső függvény deriváltja: $b_u'(x) = 2x + 1$.

Az összetett függvény deriválási szabálya szerint:

$$u'(x) = k_u'\big(b_u(x)\big) \cdot b_u'(x) = \frac{1}{2} \cdot (x^2 + x + 16)^{-\frac{1}{2}} \cdot (2x + 1) = \frac{2x + 1}{2 \cdot \sqrt{x^2 + x + 16}}.$$

A $v(x)$ függvény

- külső függvénye: $k_v(x) = \mathrm{e}^x$;
- belső függvénye: $b_v(x) = \sin x$.

Ekkor

- a külső függvény deriváltja: $k_v'(x) = \mathrm{e}^x$;
- a belső függvény deriváltja: $b_v'(x) = \cos x$.

Az összetett függvény deriválási szabálya szerint:

$$v'(x) = k_v'\big(b_v(x)\big) \cdot b_v'(x) = \mathrm{e}^{\sin x} \cdot \cos x.$$

Az $w(x)$ függvényr

- külső függvénye: $k_w(x) = x^2$;
- belső függvénye: $b_w(x) = \cos x$.

Ekkor

- a külső függvény deriváltja: $k_w'(x) = 2x$;
- a belső függvény deriváltja: $b_w'(x) = -\sin x$.

Az összetett függvény deriválási szabálya szerint:

$$w'(x) = k_w'\big(b_w(x)\big) \cdot b_w'(x) = 2\cos x \cdot (-\sin x).$$

A $z(x)$ függvény

- külső függvénye: $k_z(x) = 3^x$;
- belső függvénye: $b_z(x) = \operatorname{tg} x$.

Ekkor

- a külső függvény deriváltja: $k_z'(x) = 3^x \cdot \ln 3$;
- a belső függvény deriváltja: $b_z'(x) = \dfrac{1}{\cos^2 x}$.

Az összetett függvény deriválási szabálya szerint:

$$z'(x) = k_z'\big(b_z(x)\big) \cdot b_z'(x) = \frac{3^{\operatorname{tg} x} \cdot \ln 3}{\cos^2 x}.$$

Felhasználva a szorzat és hányados függvény deriválási szabályát azt kapjuk, hogy

$$f'(x) = \frac{[u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)] \cdot w(x)}{\big(w(x) \cdot z(x)\big)^2} - \\ - \frac{\big(u(x) \cdot v(x)\big) \cdot \big(w'(x) \cdot z(x) + w(x) \cdot z'(x)\big)}{\big(w(x) \cdot z(x)\big)^2}.$$

Tehát

$$f'(0) = \frac{[u'(0) \cdot v(0) + u(0) \cdot v'(0)] \cdot w(0)}{\big(w(0) \cdot z(0)\big)^2} - \\ - \frac{\big(u(0) \cdot v(0)\big) \cdot \big(w'(0) \cdot z(0) + w(0) \cdot z'(0)\big)}{\big(w(0) \cdot z(0)\big)^2}.$$

Mivel

$$
\begin{aligned}
u(0) &= \sqrt{0^2+0+16} = 4;\\
v(0) &= \mathrm{e}^{\sin 0} = 1;\\
w(0) &= \cos^2 0 = 1;\\
z(0) &= 3^{\mathrm{tg} 0} = 1,
\end{aligned}
$$

továbbá

$$
\begin{aligned}
u'(0) &= \frac{2\cdot 0+1}{2\cdot\sqrt{0^2+0+16}} = \frac{1}{8};\\
v'(0) &= \mathrm{e}^{\sin 0}\cdot\cos 0 = 1;\\
w'(0) &= 2\cos 0\cdot(-\sin 0) = 0;\\
z'(0) &= \frac{3^{\mathrm{tg}\, 0}\cdot\ln 3}{\cos^2 0} = \ln 3.
\end{aligned}
$$

Tehát azt kapjuk, hogy

$$
f'(0) = \frac{\left(\frac{1}{8}\cdot 1+4\cdot 1\right)\cdot 1-4(0+\ln 3)}{1} = \frac{33}{8}-4\cdot\ln 3.
$$

108. **Feladat.** Adjuk meg az $f(x)=x\cdot\mathrm{e}^x$ függvény deriváltjának zérushelyét!

Megoldás:

A függvény deriváltja:

$$
f'(x) = \mathrm{e}^x + x\cdot\mathrm{e}^x = \mathrm{e}^x\cdot(1+x).
$$

A derivált függvény zérushelyét az

$$
\mathrm{e}^x\cdot(1+x) = 0
$$

egyenlet megoldása adja. Mivel azonban $\mathrm{e}^x\neq 0$, ezért $1+x=0$, így $x=-1$.

109. **Feladat.** Határozzuk meg az $f(x)=x^2\cdot\mathrm{e}^x$ függvény deriváltjának zérushelyét!

Megoldás:

A függvény deriváltja:

$$
f'(x) = 2x\cdot\mathrm{e}^x + x^2\cdot\mathrm{e}^x = \mathrm{e}^x\cdot(x^2+2x).
$$

A derivált függvény zérushelyét az

$$
\mathrm{e}^x\cdot(x^2+2x) = 0.
$$

egyenlet megoldása adja. Mivel azonban $\mathrm{e}^x \neq 0$, ezért $x^2 + 2x = 0$, azaz $x \cdot (x + 2) = 0$, amiből $x_1 = 0$, illetve $x_2 = -2$ adódik.

110. **Feladat.** Határozzuk meg az $f(x) = x^2 \cdot \ln x$ függvény deriváltjának zérushelyét!

<u>**Megoldás**</u>:

A függvény deriváltja:

$$f'(x) = 2x \cdot \ln x + x^2 \cdot \frac{1}{x} = 2x \cdot \ln x + x.$$

A derivált függvény zérushelyét a

$$2x \cdot \ln x + x = 0$$

egyenlet megoldása adja. Ha kiemelünk x-et, akkor az

$$x \cdot (2 \ln x + 1) = 0$$

egyenlethez jutunk. Egy szorzat úgy lehet 0, ha valamelyik tényezője 0, így $x = 0$, vagy $2 \ln x + 1 = 0$ adódik. Az x értéke nem lehet 0, mivel az nem eleme az $\ln x$ függvény értelmezési tartományának, így csak $2 \ln x + 1 = 0$ teljesülhet. Mindkét oldalból 1-et kivonva, majd az egyenletet 2-vel osztva

$$2 \ln x = -1 \quad \Rightarrow \quad \ln x = -\frac{1}{2}$$

adódik, amiből a logaritmus definícióját felhasználva azt kapjuk, hogy

$$x = \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}}.$$

2.3. A differenciálhányados fogalmának gazdasági értelmezése

Elméleti összefoglaló

2.3.1. **Definíció.** Legyen $C(q)$ egy vállalat adott termékére vonatkozó költségfüggvénye és $q_1 < q_2$ olyan valós számok, hogy q_1 és q_2 is eleme a $C(q)$ értelmezési tartományának. Ekkor az *átlagköltség* az

$$AC(q) = \frac{C(q_2) - C(q_1)}{q_2 - q_1}$$

differenciahányados.

Amennyiben $R(q)$ egy vállalat adott termékére vonatkozó bevételi függvénye és $q_1 < q_2$ olyan valós számok, hogy q_1 és q_2 is eleme az $R(q)$ értelmezési tartományának, akkor az *átlagbevétel* vagy *átlagos bevétel* az

$$AR(q) = \frac{R(q_2) - R(q_1)}{q_2 - q_1}$$

differenciahányados.

Amennyiben $\Pi(q)$ egy vállalat adott termékére vonatkozó profit függvénye és $q_1 < q_2$ olyan valós számok, hogy q_1 és q_2 is eleme a $\Pi(q)$ értelmezési tartományának, akkor az *átlagprofit (átlagnyereség)* vagy *átlagos profit (átlagos nyereség)* az

$$A\Pi(q) = \frac{\Pi(q_2) - \Pi(q_1)}{q_2 - q_1}$$

differenciahányados.

2.3.2. **Definíció.** Legyen $C(q)$ egy vállalat adott termékére vonatkozó költségfüggvénye és q_0 olyan valós szám, amely eleme a $C(q)$ értelmezési tartományának. Ekkor a *határ költség* az

$$MC(q_0) = C'(q_0)$$

differenciálhányados. A határköltség megmutatja, hogyan változik az összköltség, ha a termelést egy egységgel növeljük.

Amennyiben $R(q)$ egy vállalat adott termékére vonatkozó bevételi függvénye és q_0 olyan valós szám, amely eleme az $R(q)$ értelmezési tartományának, akkor a *határ bevétel* az

$$MR(q_0) = R'(q_0)$$

differenciálhányados. A határbevétel megmutatja, hogyan változik az összbevétel, ha a termelést egy egységgel növeljük.

Amennyiben $\Pi(q)$ egy vállalat adott termékére vonatkozó profit függvénye és q_0 olyan valós szám, hogy q_0 eleme a $\Pi(q)$ értelmezési tartományának, akkor a *határprofit (határ nyereség)* az

$$M\Pi(q) = \Pi'(q_0)$$

differenciálhányados. A határprofit megmutatja, hogyan változik az össznyereség, ha a termelést egy egységgel növeljük.

2.3.3. **Megjegyzés.** A profit függvény és a határprofit deiníciója alapján:

$$M\Pi(q) = \Pi'(q) = \big(R(q) - C(q)\big)' = R'(q) - C'(q).$$

Kidolgozott feladatok

111. **Feladat.** [**31**] Legyen C egy vállalat adott termékére vonatkozó költségfüggvénye, amely függvény megadja q egységnyi termék előállítási költségét:

$$C(q) = q^2 + 4q + 20, \qquad q > 0.$$

a) Mennyi lesz a költség, hogy az előállított termék mennyisége 10 egység?

b) Mennyi a költség átlagos változása, ha az előállított termékek mennyiségét 100 egységről 102 egységre növeljük!

c) Mennyi a határköltség 100 egység termék gyártása esetén?

Megoldás:

a) Ha az előállított mennyiség 10 egység, akkor a költség

$$C(10) = 10^2 + 4 \cdot 10 + 20 = 160.$$

b) A költség átlagos változása a megfelelő differenciahányados:

$$\frac{C(102) - C(100)}{102 - 100} = \frac{102^2 + 4 \cdot 102 + 20 - (100^2 + 4 \cdot 100 + 20)}{2},$$

amit kiszámolva 206 egység adódik.

c) A $C(q)$ függvény deriváltja:

$$C'(q) = 2q + 4,$$

így a határköltség $q = 100$ esetén

$$C'(100) = 2 \cdot 100 + 4 = 204,$$

ami azt jelenti, hogy ha a termelést 100 egységről 1 egységgel növeljük, akkor az előállítási költség 204 egységgel fog növekedni.

112. **Feladat.** [**34**] Tegyük föl, hogy $8 \leq q \leq 30$ darab radiátor előállítási költségét a

$$C(q) = q^3 - 6q^2 + 15q$$

függvény adja meg (€-ban), míg a q darab radiátor eladásából származó bevételt az

$$R(q) = q^3 - 3q^2 + 12q$$

függvény írja le. Üzemünk naponta 10 darab radiátort állít elő.

a) Határozzuk meg a határköltséget!

b) Határozzuk meg a határbevételt!

c) Írjuk fel a profit függvényt!

d) Határozzuk meg a határprofitot!

Megoldás:

a) Mivel

$$C'(q) = 3q^2 - 12q + 15,$$

ezért

$$C'(10) = 3 \cdot 10^2 - 12 \cdot 10 + 15 = 195.$$

Tehát a határköltség 195 €.

b) Mivel

$$R'(q) = 3q^2 - 6q + 12,$$

ezért a határbevétel:

$$R'(10) = 3 \cdot 10^2 - 6 \cdot 10 + 12 = 252$$

Tehát a határbevétel 252 €.

c) A profit függvény:

$$\Pi(q) = R(q) - C(q) = q^3 - 3q^2 + 12q - (q^3 - 6q^2 + 15q) =$$
$$= q^3 - 3q^2 + 12q - q^3 + 6q^2 - 15q = 3q^2 - 3q.$$

d) A $\Pi(q)$ függvény deriváltja:

$$\Pi'(q) = 6q - 3.$$

A határprofit:

$$\Pi'(10) = 60 - 3 = 57.$$

Tehát a határprofit 57 €.

113. **Feladat.** Egy vállalat teljes költségét leíró függvény:

$$C(q) = 10q^2 + 20q + 30.$$

Az eladásából származó bevételt az

$$R(q) = \frac{1\,000q}{\mathrm{e}^q}$$

függvény írja le. Az előállított mennyiséget ezer darabban, a bevételt és a költséget ezer forintban értjük.

a) Határozzuk meg a profit függvényt!

b) Számoljuk ki a költséget, ha 500 darab terméket gyártunk!

c) Számoljuk ki a bevételt, ha 500 darab terméket gyártunk!

d) Számoljuk ki a nyereséget, ha 500 darab terméket gyártunk!

e) Határozzuk meg a határköltséget $1\,000$ darab termék gyártása esetén!

f) Határozzuk meg a határbevételt 500 darab termék gyártása esetén!

<u>**Megoldás**</u>:

a) A profit függvény:

$$\Pi(q) = R(q) - C(q) = \frac{1\,000q}{\mathrm{e}^q} - 10q^2 - 20q - 30.$$

b) Mivel

$$C(0,5) = 10 \cdot 0,5^2 + 20 \cdot 0,5 + 30 = 42,5,$$

ezért a költség 500 darab termék gyártása esetén: $42\,500\,\mathrm{forint}$.

c) Mivel

$$R(0,5) = \frac{100 \cdot 0,5}{\mathrm{e}^{0,5}} = 30,33,$$

ezért a költség 500 darab termék gyártása esetén: $30\,330\,\mathrm{forint}$.

d) A nyereség 500 darab termék gyártása esetén

$$\Pi(0,5) = R(0,5) - C(0,5) = 30,33 - 42,5 = -12,17,$$

ami azt jelenti, hogy $12\,170$ forint veszteség lesz.

e) Mivel

$$C'(q) = 2q + 2,$$

ezért

$$C'(1) = 2 + 2 = 4.$$

Tehát a határköltség $4\,000$ forint.

f) Mivel

$$R'(q) = \frac{100 \cdot \mathrm{e}^q - 100q \cdot \mathrm{e}^q}{\mathrm{e}^{2q}} = \frac{\mathrm{e}^q \cdot (100 - 100q)}{\mathrm{e}^{2q}} = \frac{100 - 100q}{\mathrm{e}^q},$$

ezért a határbevétel:

$$R'(1) = 0$$

Tehát a határbevétel 0.

2.4. Magasabb rendű deriváltak, L'Hospital-szabály

Elméleti összefoglaló

2.4.1. **Definíció.** Ha az $f\colon I \to \mathbb{R}$ függvény differenciálható az I intervallumon, továbbá a deriváltja differenciálható az $x_0 \in I$ helyen, akkor azt mondjuk, hogy f *kétszer differenciálható* x_0-ban. Jelölés:

$$\big(f'(x_0)\big)' = f''(x_0).$$

Ha az $f\colon I \to \mathbb{R}$ függvény $k-1$-szer differenciálható az I intervallumon, továbbá a $k-1$-edrendű deriváltja differenciálható az $x_0 \in I$ helyen, akkor azt mondjuk, hogy f *k-szor differenciálható* x_0-ban. Jelölés:

$$\big(f^{(k-1)}(x_0)\big)' = f^{(k)}(x_0).$$

2.4.2. **Tétel.** (L'Hospital-szabály.)
Legyen $-\infty \le a < b \le \infty$, $f, g\colon]a;b[\to \mathbb{R}$, és legyen $a \le x_0 \le b$. Ha f és g differenciálható függvények az $]a;b[\setminus\{x_0\}$ halmazon és $g'(x) \neq 0$ minden $x \in]a;b[$-re, továbbá

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = 0 \qquad \text{vagy} \qquad \lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = \infty,$$

továbbá létezik a $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ véges vagy végtelen határérték, akkor létezik a $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ határérték is és

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

2.4.3. **Megjegyzés.** Az előbbi tétel akkor is érvényben marad, ha

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = -\infty$$

vagy

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty \text{ és } \lim_{x\to x_0} g(x) = \infty$$

vagy

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \infty \text{ és } \lim_{x\to x_0} g(x) = -\infty.$$

2.4.4. **Megjegyzés.** A L'Hospital-szabály „$\frac{0}{0}$” vagy „$\frac{\infty}{\infty}$” alakú határérték meghatározására használható, azonban megfelelő helyettesítéssel más alakú függvények határértéke is kiszámolható a segítségével.
Ha a határérték „$0 \cdot \infty$” alakú, azaz ha f és g olyan függvények, hogy $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$ és $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \pm\infty$, akkor az egyik lehetőségünk, hogy

$$\lim_{x\to x_0} f(x) \cdot g(x) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}},$$

ami már $\frac{0}{0}$ alakú, ugyanis $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$ és mivel $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \pm\infty$, ezért $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{1}{g(x)} = 0$. A másik lehetőség, hogy

$$\lim_{x\to x_0} f(x) \cdot g(x) = \lim_{x\to x_0} \frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}},$$

ami már $\frac{\infty}{\infty}$ alakú, ugyanis $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \infty$ és mivel $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$, ezért $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{1}{f(x)} = \pm\infty$.
Ha a határérték 0^0 alakú, azaz ha f és g olyan függvények, hogy $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$ és $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0$, akkor a

$$\lim_{x\to x_0} f(x)^{g(x)}$$

határérték úgy számolható, hogy elvégezzük a

$$\lim_{x\to x_0} f(x)^{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \mathrm{e}^{\ln f(x)^{g(x)}} = \lim_{x\to x_0} \mathrm{e}^{g(x)\cdot\ln f(x)}$$

átalakítást és ekkor már $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)\cdot\ln f(x)$ egy $0\cdot(-\infty)$ alakú határérték, amire már alkalmazható a korábban leírt eljárás.

Kidolgozott feladatok

114. **Feladat.** Számoljuk ki az $f(x) = x^3 + 8x^2 - 2x + 1$ függvény harmadik deriváltját!

Megoldás:

A függvény deriváltja
$$f'(x) = 3x^2 + 16x - 2,$$
a második derivált
$$f''(x) = 6x + 16,$$
a harmadik derivált
$$f'''(x) = 6.$$

115. **Feladat.** Számoljuk ki az $f(x) = \ln x$ függvény n-edik deriváltját!

Megoldás:

A függvény első deriváltja
$$f'(x) = \frac{1}{x} = x^{-1},$$
a második deriváltja
$$f''(x) = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2},$$
a harmadik deriváltja
$$f'''(x) = 2x^{-3} = \frac{2}{x^3}.$$
Ebből megsejthető, hogy az n-edik derivált
$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n+1} \cdot (n-1)!}{x^n}.$$

116. **Feladat.** Számoljuk ki az $f(x) = \sqrt{x}$ függvény negyedik deriváltját!

Megoldás:

A függvény deriváltja
$$f'(x) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{x}}.$$

A második derivált

$$f''(x) = -\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}} = -\frac{1}{4\cdot\sqrt{x^3}}.$$

A harmadik derivált

$$f'''(x) = \frac{3}{8}x^{-\frac{5}{2}} = \frac{3}{8\cdot\sqrt{x^5}}.$$

A negyedik derivált

$$f^{iv}(x) = -\frac{15}{16}x^{-\frac{7}{2}} = -\frac{15}{16\cdot\sqrt{x^7}}.$$

117. **Feladat.** Számoljuk ki az $f(x) = \sin x$ függvény n-edik deriváltját!

<u>**Megoldás**</u>:

A függvény deriváltja $f'(x) = \cos x$, második deriváltja $f''(x) = -\sin x$, harmadik deriváltja $f'''(x) = -\cos x$, negyedik deriváltja $f^{(4)}(x) = \sin x$. Innentől kezdve ugyanezek a deriváltak ismétlődnek, így

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} \sin x, & \text{ha } n = 4k \text{ (azaz, ha } n \text{ osztható 4-el)} \\ \cos x, & \text{ha } n = 4k+1 \text{ (azaz, ha } n \text{ 4-el osztva 1 maradékot ad)} \\ -\sin x, & \text{ha } n = 4k+2 \text{ (azaz, ha } n \text{ 4-el osztva 2 maradékot ad)} \\ -\cos x, & \text{ha } n = 4k+3 \text{ (azaz, ha } n \text{ 4-el osztva 3 maradékot ad).} \end{cases}$$

118. **Feladat.** Tekintsük az $f(x) = x^2 \cdot \ln x$ függvényt! Határozzuk meg az $f'''(1)$ értéket!

<u>**Megoldás**</u>:

A függvény első deriváltja

$$f'(x) = 2x\cdot\ln x + x^2\cdot\frac{1}{x} = 2x\cdot\ln x + x = x\cdot(2\ln x + 1).$$

A második derivált

$$f''(x) = 2\ln x + 1 + x\cdot\frac{2}{x} = 2\ln x + 3.$$

A harmadik derivált

$$f'''(x) = \frac{2}{x},$$

így $f'''(1) = 2\cdot 1 = 2$.

119. **Feladat.** Számoljuk ki az $f(t) = \mathrm{e}^{1-2t^3}$ függvény második deriváltját!

Megoldás:

Az összetett függvény deriválási szabálya szerint

$$f'(t) = \mathrm{e}^{1-2t^3} \cdot (-6t^2).$$

Legyen most $u(t) = \mathrm{e}^{1-2t^3}$ és $v(t) = -6t^2$. Ekkor a szorzat függvény deriválási szabályát alkalmazva

$$\begin{aligned} f'(t) &= u'(t) \cdot v(t) + u(t) \cdot v'(t) = \\ &= \mathrm{e}^{1-2t^3} \cdot (-6t^2) \cdot (-6t^2) + \mathrm{e}^{1-2t^3} \cdot (-12t) = \\ &= \mathrm{e}^{1-2t^3} \cdot 36t^4 - \mathrm{e}^{1-2t^3} \cdot 12t = \mathrm{e}^{1-2t^3} \cdot (36t^4 - 12t). \end{aligned}$$

120. **Feladat.** Határozzuk meg az $f(t) = \ln(1 + t^2)$ függvény második deriváltjának zérushelyeit!

Megoldás:

Az összetett függvény deriválási szabályát alkalmazva

$$f'(t) = \frac{1}{1+t^2} \cdot 2t = \frac{2t}{1+t^2}.$$

A hányados függvény deriválási szabályát alkalmazva

$$f''(t) = \frac{2 \cdot (1+t^2) - 2t \cdot 2t}{(1+t^2)^2} = \frac{2 - 2t^2}{(1+t^2)^2}.$$

Meg kell oldanunk az $f''(t) = 0$ egyenletet. Egy tört csak akkor lehet 0, ha a számlálója 0, így a $2 - 2t^2 = 0$ egyenletet kell megoldanunk, amiből $t_1 = -1$, illetve $t_2 = 1$ adódik.

121. **Feladat.** Számoljuk ki a $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x}$ határértéket!

Megoldás:

Külön kiszámolva a számláló határértékét és külön a nevezőét

$$\lim_{x \to 0} \sin x = \sin 0 = 0 \qquad\qquad \lim_{x \to 0} x = 0$$

adódik, így mind a számláló, mind a nevező határértéke 0, tehát alkalmazható a L'Hospital-szabály:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\big(\sin x\big)'}{x'} = \lim_{x \to 0} \frac{\cos x}{1} = 1.$$

122. **Feladat.** Számoljuk ki a $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2-5x+6}{x^2-9}$ határértéket!

Megoldás:

A számláló határértéke

$$\lim_{x\to 3}(x^2-5x+6) = 3^2 - 5\cdot 3 + 6 = 0,$$

a nevező határértéke

$$\lim_{x\to 3}(x^2-9) = 9-9 = 3^2 - 9 = 0,$$

így azt kaptuk, hogy mind a számláló, mind a nevező határértéke 0, tehát alkalmazható a L'Hospital-szabály:

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-5x+6}{x^2-9} = \lim_{x\to 3}\frac{2x-5}{2x} = \frac{1}{6}.$$

123. **Feladat.** Számoljuk ki a $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 4x}{5x}$ határértéket!

Megoldás:

Külön kiszámolva a számláló határértékét és külön a nevezőét

$$\lim_{x\to 0} \sin 4x = \sin 0 = 0 \qquad\qquad \lim_{x\to 0} 5x = 5\cdot 0 = 0$$

adódik, így mind a számláló, mind a nevező határértéke 0, tehát alkalmazható a L'Hospital-szabály:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{5x} = \lim_{x\to 0}\frac{\big(\sin 4x\big)'}{(5x)'} = \lim_{x\to 0}\frac{4\cos 4x}{5} = \frac{4}{5}.$$

124. **Feladat.** Számoljuk ki a $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 2x}{\sin 4x}$ határértéket!

Megoldás:

Külön kiszámolva a számláló határértékét és külön a nevezőét

$$\lim_{x\to 0} \sin 2x = \sin 0 = 0 \qquad\qquad \lim_{x\to 0} \sin 4x = \sin 0 = 0$$

adódik, így mind a számláló, mind a nevező határértéke 0, tehát alkalmazható a L'Hospital-szabály:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{\sin 4x} = \lim_{x\to 0}\frac{\big(\sin 2x\big)'}{\big(\sin 4x\big)'} = \lim_{x\to 0}\frac{2\cos 2x}{4\cos 4x} = \frac{1}{2}.$$

125. **Feladat.** Számoljuk ki a $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\mathrm{e}^x}{\sin 3x}$ határértéket!

Megoldás:

Külön kiszámolva a számláló határértékét és külön a nevezőét

$$\lim_{x\to 0} (1-\mathrm{e}^x) = 1-\mathrm{e}^0 = 0 \qquad\qquad \lim_{x\to 0} \sin 3x = \sin 0 = 0$$

adódik, így mind a számláló, mind a nevező határértéke 0, tehát alkalmazható a L'Hospital-szabály:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\mathrm{e}^x}{\sin 3x} = \lim_{x\to 0} \frac{-\mathrm{e}^x}{3\cos 3x} = -\frac{1}{3}.$$

126. **Feladat.** Számoljuk ki a $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-7^{3x}}{x}$ határértéket!

Megoldás:

Külön kiszámolva a számláló határértékét és külön a nevezőét

$$\lim_{x\to 0} (1-7^{3x}) = 1-1 = 0 \qquad\qquad \lim_{x\to 0} x = 0$$

adódik, így mind a számláló, mind a nevező határértéke 0, tehát alkalmazható a L'Hospital-szabály:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-7^{3x}}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{-3\cdot 7^{3x}\cdot \ln 7}{1} = -3\ln 7.$$

127. **Feladat.** Számoljuk ki a $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos 2x}{1-\cos 3x}$ határértéket!

Megoldás:

A számláló határértéke

$$\lim_{x\to 0} (1-\cos 2x) = 1-\cos 0 = 1-1 = 0,$$

a nevező határértéke

$$\lim_{x\to 0} 1-\cos 3x = 1-\cos 0 = 1-1 = 0,$$

így azt kaptuk, hogy mind a számláló, mind a nevező határértéke 0, tehát alkalmazható a L'Hospital-szabály:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos 2x}{1-\cos 3x} = \lim_{x\to 0} \frac{\left(1-\cos 2x\right)'}{\left(1-\cos 3x\right)'} = \lim_{x\to 0} \frac{2\sin 2x}{3\sin 3x}.$$

A kapott tört számlálójának és nevezőjének szintén 0 a határértéke, így ismételten alkalmaznunk kell a L'Hospital-szabályt:

$$\lim_{x\to 0} \frac{2\sin 2x}{3\sin 3x} = \frac{4\cos 2x}{9\cos 3x} = \frac{4}{9}.$$

128. **Feladat.** Számoljuk ki a

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\mathrm{e}^{3x}}{x^2}$$

határértéket!

Megoldás:

A számláló határértéke

$$\lim_{x\to\infty} \mathrm{e}^{3x} = \infty,$$

a nevező határértéke

$$\lim_{x\to\infty} x^2 = \infty,$$

így azt kaptuk, hogy mind a számláló, mind a nevező határértéke ∞, tehát alkalmazható a L'Hospital-szabály:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\mathrm{e}^{3x}}{x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{\mathrm{e}^{3x}\cdot 3}{2x}.$$

A kapott tört számlálójának és nevezőjének szintén ∞ a határértéke, így ismételten alkalmaznunk kell a L'Hospital-szabályt:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\mathrm{e}^{3x}\cdot 3}{2x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\mathrm{e}^{3x}\cdot 9}{2} = \infty.$$

2.5. Differenciálható függvények vizsgálata

Elméleti összefoglaló

Ebben a fejezetben a következő rövidítésekkel élünk:

mon.	monotonitás
konv.	konvexitás
lok. min.	lokális minimum
lok. max.	lokális maximum
i.p.	inflexiós pont
n.é.	nincs értelmezve

2.5.1. **Tétel.** Legyen $f\colon I \to \mathbb{R}$ differenciálható függvény. Az f függvény pontosan akkor monoton növekvő I-n, ha minden $x \in I$ esetén $f'(x) \geq 0$.

Az f függvény pontosan akkor monoton csökkenő I-n, ha minden $x \in I$ esetén $f'(x) \leq 0$.

2.5.2. **Tétel.** Az $f\colon I \to \mathbb{R}$ kétszer differenciálható függvény pontosan akkor konvex I-n, ha $f''(x) \geq 0$ minden $x \in I$ esetén.

Az $f\colon I \to \mathbb{R}$ kétszer differenciálható függvény pontosan akkor konkáv I-n, ha $f''(x) \leq 0$ minden $x \in I$ esetén.

2.5.3. **Megjegyzés.** Ha az $f\colon I \to \mathbb{R}$ függvénynek az $x_0 \in I$ helyen megváltozik a konvexitása, akkor f-nek az x_0 helyen *inflexiós hely*e van. Ilyenkor az $\big(x_0; f(x_0)\big)$ pontot *inflexiós pont*nak nevezzük.

2.5.4. **Megjegyzés.** Teljes függvényvizsgálat alatt azt értjük, amikor a következő lépéseket hajtjuk végre:

1. Meghatározzuk a valós számok halmazának azt a legbővebb részhalmazát, ahol a függvény értelmezhető.
2. Meghatározzuk a függvény zérushelyeit.
3. Kiszámoljuk a függvény első deriváltját, majd annak zérushelyeit, amelyek segítségével megvizsgáljuk a függvényt monotonitás és lokális szélsőérték szerint.
4. Kiszámoljuk a függvény második deriváltját, majd annak zérushelyeit, amelyek segítségével megvizsgáljuk a függvényt konvexitás szempontjából és meghatározzuk az inflexiós helyeket.
5. Kiszámoljuk a határértékeket az értelmezési tartomány határpontjaiban.

6. Felvázoljuk a függvény grafikonját.
7. Meghatározzuk a függvény értékkészletét.
8. Megvizsgáljuk a függvény korlátosságát.
9. Megvizsgáljuk a függvény paritását.
10. Megadjuk a függvény abszolút (globális) szélősérték helyeit és értékeit.

Kidolgozott feladatok

129. **Feladat.** Végezzük el az $f(x) = x^3 - 3x$ függvény teljes függvényvizsgálatát!

Megoldás:

1) Értelmezési tartomány: $x \in \mathbb{R}$.

2) A zérushelyet az $f(x) = 0$ egyenlet megoldásával kapjuk:

$$x^3 - 3x = 0,$$

amiből x-et kiemelve azt kapjuk, hogy

$$x \cdot (x^2 - 3) = 0.$$

Egy szorzat pontosan akkor nulla, ha valamelyik tényezője nulla, így $x = 0$, vagy $x^2 - 3 = 0$, ez utóbbiból $x = \sqrt{3}$, vagy $x = -\sqrt{3}$. Így a függvénynek három zérushelye van, a 0, $\sqrt{3}$ és $-\sqrt{3}$.

3) A függvény deriváltja:

$$f'(x) = 3x^2 - 3.$$

Meghatározzuk ennek zérushelyeit, azaz megoldjuk a $3x^2 - 3 = 0$ egyenletet:

$$3x^2 = 3 \quad \Rightarrow \quad 3x^2 = 3 \quad \Rightarrow \quad x^2 = 1,$$

amiből azt kapjuk, hogy $x = \pm 1$. Az első derivált előjelét táblázatban foglaljuk össze:

x	$]-\infty;-1[$	$x=-1$	$]-1;1[$	$x=1$	$]1;\infty[$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	lok. max.	$\searrow$	lok. min.	$\nearrow$
$f(x)$		2		-2	

4) A függvény második deriváltja:

$$f''(x) = 6x.$$

Ennek zérushelye, azaz a $6x = 0$ egyenlet megoldása $x = 0$. Ennek megfelelően táblázatba foglalva megvizsgáljuk a második derivált előjelét, amiből következtethetünk a függvény konvexitására:

x	$]-\infty;0[$	0	$]0;\infty[$
$f''(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	konkáv	i.p.	konvex
$f(x)$		0	

5) Határérték az értelmezési tartomány határpontjaiban:
Az értelmezési tartomány határpontjai $-\infty$ és ∞. Mindkét határértéket úgy kaphatjuk meg, hogy emeljük ki a polinom függvény legnagyobb fokszámú tagját:

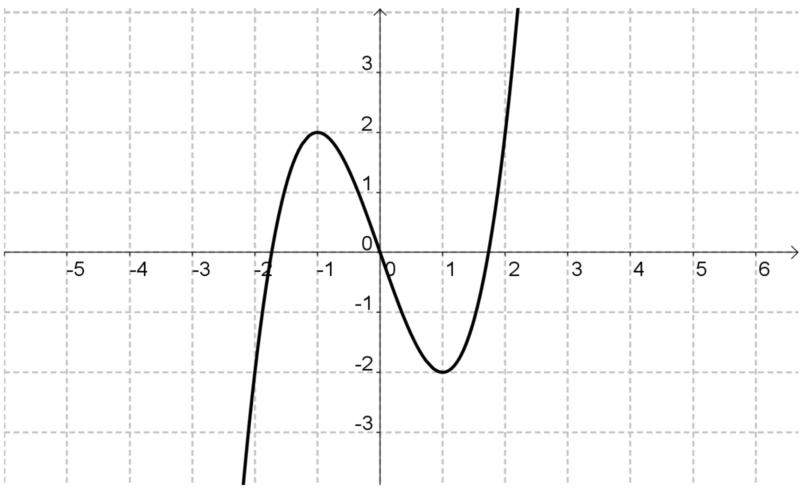
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}(x^3-3x) = \lim_{x\to-\infty} x^3\cdot\left(1-\frac{3}{x^2}\right) = -\infty;$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty}(x^3-3x) = \lim_{x\to\infty} x^3\cdot\left(1-\frac{1}{x^2}\right) = \infty.$$

6) A függvény ábrázolásához készítünk egy összefoglaló táblázatot, az előző két táblázat alapján.

	$x<-1$	$-1<x<0$	$0<x<1$	$x>1$
Mon.	$\nearrow$	$\searrow$	$\searrow$	$\nearrow$
Konv.	konkáv	konkáv	konvex	konvex

Ennek segítségével fel tudjuk vázolni a függvény grafikonját:



7) Értékkészlet: $y \in \mathbb{R}$.

8) Korlátosság: nem korlátos.

9) Paritás: páratlan, mert szimmetrikus az origóra.

10) Abszolút (globális) szélsőérték: nincs.

130. **Feladat.** Végezzük el az $f(x) = (x-2)\cdot(x+1)^2$ függvény teljes függvényvizsgálatát!

Megoldás:

1) Értelmezési tartomány: $x \in \mathbb{R}$.

2) A zérushelyet az $f(x) = 0$ egyenlet megoldásával kapjuk:

$$(x-2)\cdot(x+1)^2 = 0.$$

Egy szorzat pontosan akkor nulla, ha valamelyik tényezője nulla, így $x-2=0$, amiből $x=2$, vagy $(x+1)^2 = 0$, amiből $x=-1$. Így a függvénynek kettő darab zérushelye van, a -1 és a 2.

3) Mielőtt deriváljuk a függvényt elvégezzük a nevezetes azonosságot és felbontjuk a zárójelet:

$$\begin{aligned} f(x) &= (x-2)\cdot(x+1)^2 = (x-2)\cdot(x^2+2x+4) = \\ &= x^3+2x^2+x-2x^2-4x-2 = x^3-3x-2. \end{aligned}$$

A függvény deriváltja:

$$f'(x) = 3x^2 - 3.$$

Meghatározzuk ennek zérushelyeit, azaz megoldjuk a $3x^2-3=0$ egyenletet:

$$3x^2 = 3 \quad \Rightarrow \quad 3x^2 = 3 \quad \Rightarrow \quad x^2 = 1,$$

amiből azt kapjuk, hogy $x = \pm 1$. Az első derivált előjelét táblázatban foglaljuk össze:

x	$]-\infty;-1[$	$x=-1$	$]-1;1[$	$x=1$	$]1;\infty[$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	lok. max.	$\searrow$	lok. min.	$\nearrow$
$f(x)$		0		-4	

4) A függvény második deriváltja:

$$f''(x) = 6x.$$

Ennek zérushelye, azaz a $6x = 0$ egyenlet megoldása $x = 0$. Ennek megfelelően táblázatba foglalva megvizsgáljuk a második derivált előjelét:

	$x < 0$	$x = 0$	$x > 0$
$f''(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	konkáv	i.p.	konvex
$f(x)$		-2	

5) Határérték az értelmezési tartomány határpontjaiban:

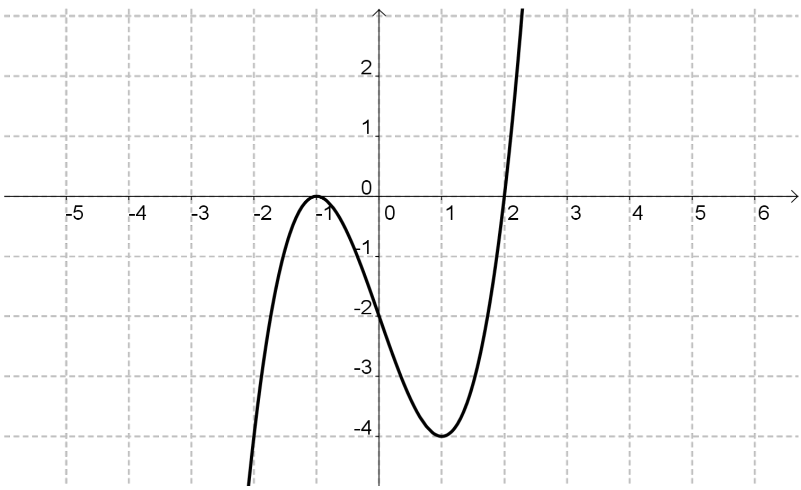
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}(x^3 - 3x - 2) = \lim_{x\to-\infty} x^3 \cdot \left(1 - \frac{3}{x^2} - \frac{2}{x^3}\right) = -\infty;$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty}(x^3 - 3x - 2) = \lim_{x\to\infty} x^3 \cdot \left(1 - \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x^3}\right) = \infty.$$

6) A függvény ábrázolásához készítünk egy összefoglaló táblázatot, az előző két táblázat alapján.

	$x < -1$	$-1 < x < 0$	$0 < x < 1$	$x > 1$
Mon.	$\nearrow$	$\searrow$	$\searrow$	$\nearrow$
Konv.	konkáv	konkáv	konvex	konvex

Ennek segítségével fel tudjuk vázolni a függvény grafikonját:



7) Értékkészlet: $y \in \mathbb{R}$.

8) Korlátosság: nem korlátos.

9) Paritás: nem páros és nem páratlan.

10) Abszolút (globális) szélsőérték: nincs.

131. **Feladat.** Végezzük el az $f(x) = x^4 - 4x^3$ függvény teljes függvényvizsgálatát!

Megoldás:

1) Értelmezési tartomány: $x \in \mathbb{R}$.

2) A zérushelyet az $f(x) = 0$ egyenlet megoldásával kapjuk:

$$x^4 - 4x^3 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad x^3 \cdot (x - 4) = 0.$$

Egy szorzat pontosan akkor nulla, ha valamelyik tényezője nulla, így $x = 0$, vagy $x = 4$.

3) A függvény deriváltja:

$$f'(x) = 4x^3 - 12x^2.$$

Meghatározzuk ennek zérushelyeit, azaz megoldjuk a $4x^3 - 12x^2 = 0$ egyenletet. Ebből x^2-et kiemelve

$$x^2 \cdot (4x - 12) = 0,$$

adódik, ami csak úgy lehet, ha $x^2 = 0$, azaz $x = 0$, vagy $4x - 12 = 0$, amiből $4x = 12$, így $x = 3$. Az első derivált előjelét táblázatban foglaljuk össze:

x	$]-\infty;0[$	0	$]0;3[$	3	$]3;\infty[$
$f'(x)$	$-$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	nincs lok. sz. é.	$\searrow$	lok. min.	$\nearrow$
$f(x)$		0		27	

4) A függvény második deriváltja:

$$f''(x) = 12x^2 - 24x.$$

Ennek zérushelye, azaz a $12x^2 - 24x = 0$ egyenletet kell megoldanunk. Ha x-et kiemelünk, akkor $x \cdot (12x - 24) = 0$ adódik. Egy szorzat úgy lehet 0, ha valamelyik tényezője 0, így $x = 0$ vagy $12x - 24 = 0$, amiből $x = 2$. Ennek megfelelően táblázatba foglalva megvizsgáljuk a második derivált előjelét:

x	$]-\infty;0[$	0	$]0;2[$	2	$]2;\infty[$
$f''(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	konvex	i.p.	konkáv	i.p.	konvex
$f(x)$		0		-16	

5) Határérték az értelmezési tartomány határpontjaiban:

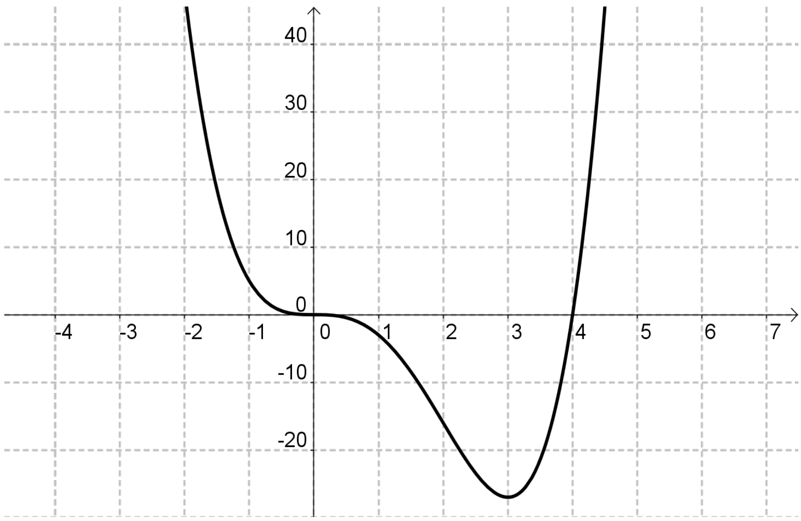
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}(x^4-4x^3) = \lim_{x\to-\infty} x^4\cdot\left(1-\frac{4}{x}\right) = \infty;$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty}(x^4-4x^3) = \lim_{x\to\infty} x^4\cdot\left(1-\frac{4}{x}\right) = \infty.$$

6) A függvény ábrázolásához készítünk egy összefoglaló táblázatot, az előző két táblázat alapján.

	$x<0$	$0<x<2$	$2<x<3$	$x>3$
Mon.	$\searrow$	$\searrow$	$\searrow$	$\nearrow$
Konv.	konvex	konkáv	konvex	konvex

Ennek segítségével fel tudjuk vázolni a függvény grafikonját:



7) Értékkészlet: $y\in[-27;\infty[$.

8) Korlátosság: alulról korlátos, felülről nem korlátos.

9) Paritás: nem páros és nem páratlan.

10) Abszolút (globális) szélsőérték: minimuma van, minimum hely: $x = 3$, minimum érték: $y = -27$.

132. **Feladat.** Végezzük el az $f(x) = \ln(1 + x^2)$ függvény teljes függvényvizsgálatát!

Megoldás:

1) Értelmezési tartomány: $x \in \mathbb{R}$.

2) A zérushelyet az $f(x) = 0$ egyenlet megoldásával kapjuk:

$$\ln(1 + x^2) = 0,$$

amiből $1 + x^2 = 1$, így $x = 0$ adódik.

3) A függvény deriváltja:

$$f'(x) = \frac{1}{1 + x^2} \cdot 2x = \frac{2x}{1 + x^2}.$$

Ennek zérushelye $x = 0$.
Az első derivált előjelét táblázatban foglaljuk össze:

x	$]-\infty; 0[$	0	$]0; \infty[$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	lok. min.	$\nearrow$
$f(x)$		$\ln 1 = 0$	

4) A függvény második deriváltja:

$$f''(x) = \frac{2 \cdot (1 + x^2) - 2x \cdot 2x}{(1 + x^2)^2} = \frac{-2x^2 + 2}{(1 + x^2)^2}$$

Ennek zérushelyei,

$$\frac{-2x^2 + 2}{(1 + x^2)^2} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad -2x^2 + 2 = 0,$$

így $x = \pm 1$. Ennek megfelelően táblázatba foglalva megvizsgáljuk a második derivált előjelét:

x	$]-\infty; -1[$	-1	$]-1; 1[$	1	$]1; \infty[$
$f''(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	konkáv	i.p.	konvex	i.p.	konkáv
$f(x)$		$\ln 2$		$\ln 2$	

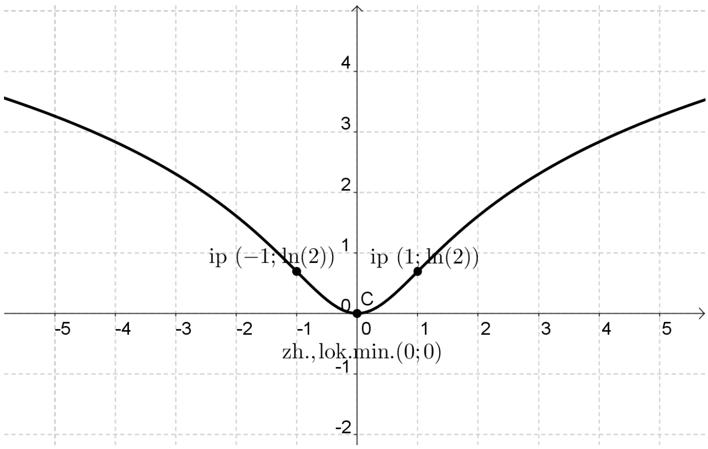
5) Határérték az értelmezési tartomány határpontjaiban:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \ln(1+x^2) = \infty;$$
$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \ln(1+x^2) = \infty.$$

6) A függvény ábrázolásához készítünk egy összefoglaló táblázatot az előző két táblázat alapján.

	$x<-1$	$-1<x<0$	$0<x<1$	$x>1$
Mon.	$\searrow$	$\searrow$	$\nearrow$	$\nearrow$
Konv.	konkáv	konvex	konvex	konkáv

Ennek segítségével fel tudjuk vázolni a függvény grafikonját:



7) Értékkészlet: $y \in [0;\infty[$.

8) Korlátosság: a függvény alulról korlátos, felülről nem korlátos, így nem korlátos.

9) Paritás: páros, mert a grafikonja szimmetrikus az y-tengelyre, azaz minden $x \in \mathbb{R}$ esetén $f(-x) = f(x)$.

10) Abszolút (globális) szélsőérték: minimum hely: $x = 0$, minimum érték: $y = 0$.

133. **Feladat.** Végezzük el az $f(x) = (x+3)\cdot \mathrm{e}^{-x}$ függvény teljes függvényvizsgálatát!

<u>**Megoldás**</u>:

1) Értelmezési tartomány: $x \in \mathbb{R}$.

2) A zérushelyet az $f(x) = 0$ egyenlet megoldásával kapjuk:

$$(x+3) \cdot \mathrm{e}^{-x} = 0,$$

amiből $x = -3$, ugyanis egy szorzat csak úgy lehet 0, ha valamelyik tényezője 0, azonban e^{-x} sehol sem 0.

3) A függvény deriváltja

$$f'(x) = \mathrm{e}^{-x} \cdot (-1) \cdot (x+3) + \mathrm{e}^{-x} = \mathrm{e}^{-x} \cdot (-x-2).$$

Ennek zérushelyeit, azaz az $\mathrm{e}^{-x} \cdot (-x-2) = 0$ egyenlet egyetlen megoldása $x = -2$, ugyanis e^{-x} sehol sem 0. Az első derivált előjelét táblázatban foglaljuk össze:

x	$]-\infty;-2[$	-2	$]-2;\infty]$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\nearrow$	lok. max.	$\searrow$
$f(x)$		e^2	

4) A függvény második deriváltja:

$$f''(x) = \mathrm{e}^{-x} \cdot (-1) \cdot (-x-2) + \mathrm{e}^{-x} \cdot (-1) = \mathrm{e}^{-x} \cdot (x+1).$$

Ennek zérushelyei, azaz a $\mathrm{e}^{-x} \cdot (x+1) = 0$ egyenlet megoldása $x = -1$. Ennek megfelelően táblázatba foglalva megvizsgáljuk a második derivált előjelét:

x	$]-\infty;-1[$	-1	$]-1;\infty[$
$f''(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	konkáv	i.p.	konvex
$f(x)$		2e	

5) Határérték az értelmezési tartomány határpontjaiban:

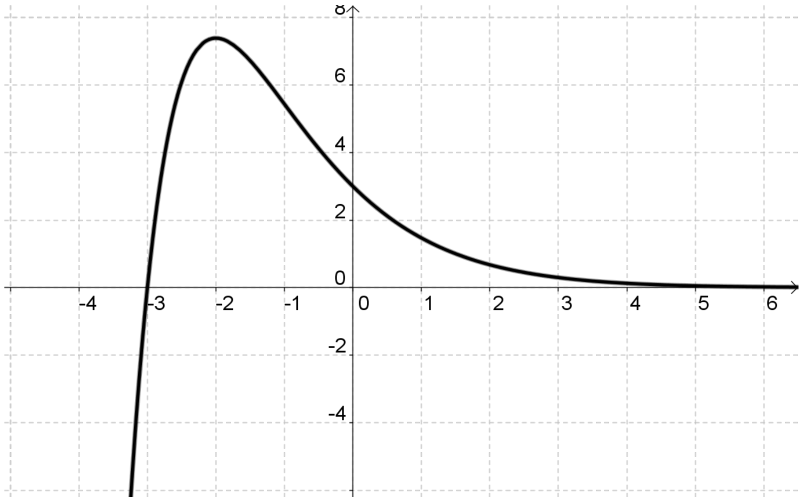
$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \mathrm{e}^{-x} \cdot (x+3) = -\infty;$$

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} \mathrm{e}^{-x} \cdot (x+3) = \lim_{x \to \infty} \frac{x+3}{\mathrm{e}^x} = \lim_{x \to \infty} \frac{1}{\mathrm{e}^x} = 0.$$

6) A függvény ábrázolásához készítünk egy összefoglaló táblázatot az előző két táblázat alapján.

	$x < -2$	$-2 < x < -1$	$x > -1$
Mon.	$\nearrow$	$\searrow$	$\searrow$
Konv.	konkáv	konkáv	konvex

Ennek segítségével fel tudjuk vázolni a függvény grafikonját:



7) Értékkészlet: $y \leq \mathrm{e}^2$.

8) Korlátosság: a függvény felülről korlátos, alulról nem korlátos.

9) Paritás: nem páros, nem páratlan.

10) Abszolút (globális) szélsőérték: maximum hely: $x = -2$, maximum érték: $y = \mathrm{e}^2$.

134. **Feladat.** Végezzük el az $f(x) = x \cdot \ln x$ függvény teljes függvényvizsgálatát!

Megoldás:

1) Értelmezési tartomány: $x \in]0; \infty[$.

2) Zérushely: az $x \cdot \ln x = 0$ egyenletet kell megoldanunk. Egy szorzat úgy lehet 0, ha valamelyik tényezője 0, így $x = 0$ vagy $\ln x = 0$. Azonban $x = 0$ nem eleme az értelmezési tartománynak, így csak $\ln x = 0$ teljesülhet, amiből $x = 1$ adódik.

3) A függvény deriváltja:

$$f'(x) = 1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x} = \ln x + 1.$$

Az $\ln x + 1 = 0$ egyenletet kell megoldanunk. Átrendezve $\ln x = -1$ adódik, amiből azt kapjuk, hogy $x = \mathrm{e}^{-1}$. Az első derivált előjelét táblázatban foglaljuk össze:

x	$]-\infty; \mathrm{e}^{-1}[$	e^{-1}	$]\mathrm{e}^{-1}; \infty[$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	lok. min.	$\nearrow$
$f(x)$		$-\frac{1}{e}$	

4) A függvény második deriváltja:

$$f''(x) = \frac{1}{x},$$

aminek nincs zérushelye, így a függvény vagy mindenhol konvex vagy mindenhol konkáv. Mivel $x > 0$, ezért $\frac{1}{x} > 0$, így f értelmezési tartományának minden pontjában konvex.

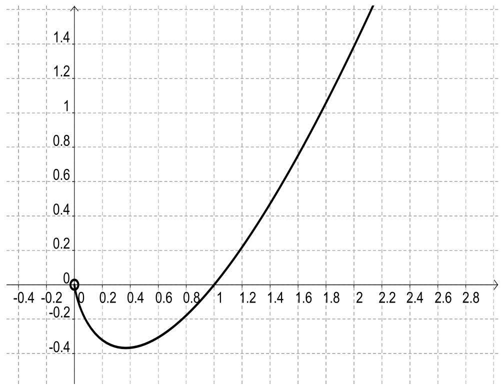
5) Határérték az értelmezési tartomány határpontjaiban: a 0 pontban a jobboldali határértéket L'Hospital-szabály alkalmazásával kapjuk:

$$\lim_{x \to 0+} f(x) = \lim_{x \to 0+} x \cdot \ln x = \lim_{x \to 0+} \frac{\ln x}{x^{-1}} = \lim_{x \to 0+} \frac{\frac{1}{x}}{-x^{-2}} =$$
$$= \lim_{x \to 0+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \to 0+} -\frac{1}{x} \cdot \left(x^2\right) = \lim_{x \to 0+} -x = 0.$$

A ∞-beli határérték

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty.$$

6) A függvény grafikonja:



7) Értékkészlet: $y \in \left[\frac{1}{\mathrm{e}} \cdot \ln \frac{1}{\mathrm{e}}; \infty\right[= \left[-\frac{1}{\mathrm{e}}, \infty\right[$.

8) Korlátosság: a függvény alulról korlátos, de felülről nem korlátos, így nem korlátos.

9) Abszolút (globális) szélsőérték: minimum hely: $x = \frac{1}{\mathrm{e}}$, minimum érték: $y = -\frac{1}{\mathrm{e}}$.

10) Invertálhatóság: invertálható, mert különböző elemekhez különböző elemeket rendel.

135. **Feladat.** Végezzük el az $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$ függvény teljes függvényvizsgálatát!

megoldás:

1) Értelmezési tartomány: $x \in \mathbb{R}$.

2) A zérushelyet az $f(x) = 0$ egyenlet megoldásával kapjuk:

$$f(x) = \frac{x}{x^2+1} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad x = 0.$$

3) A függvény deriváltja:

$$f'(x) = \frac{x^2+1-x\cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{-x^2+1}{(x^2+1)^2}.$$

Meghatározzuk a derivált zérushelyeit:

$$\frac{-x^2+1}{(x^2+1)^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad -x^2+1=0 \quad \Rightarrow \quad x^2=1,$$

amiből azt kapjuk, hogy $x = \pm 1$. Továbbá

$$f(-1) = \frac{-1}{(-1)^2+1} = -\frac{1}{2},$$

illetve

$$f(1) = \frac{1}{1^2+1} = \frac{1}{2},$$

Az első derivált előjelét táblázatban foglaljuk össze:

x	$]-\infty;-1[$	-1	$]-1;1[$	1	$]1;\infty[$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$	lok. min.	$\nearrow$	lok. max.	$\searrow$
$f(x)$		$-\frac{1}{2}$.		$\frac{1}{2}$	

4) A függvény második deriváltja:

$$f''(x) = \frac{-2x\cdot(x^2+1)^2 - (-x^2+1)\cdot 2\cdot(x^2+1)\cdot 2x}{(x^2+1)^4} =$$
$$= \frac{(x^2+1)(-2x^3-2x+4x^3-4x)}{(x^2+1)^4} = \frac{2x^3-6x}{(x^2+1)^3}.$$

Mivel

$$\frac{2x^3-6x}{(x^2+1)^3} = 0 \quad\Rightarrow\quad 2x^3-6x=0 \quad\Rightarrow\quad 2x\cdot(x^2-3)=0,$$

ezért a második derivált zérushelyei: $x_1 = 0$, $x_2 = -\sqrt{3}$, $x_3 = \sqrt{3}$. Az f függvény helyettesítési értékei ezeken a helyeken:

$$f(-\sqrt{3}) = \frac{-\sqrt{3}}{3+1} = \frac{-\sqrt{3}}{4}$$
$$f(0) = \frac{0}{0^2+1} = 0$$
$$f(\sqrt{3}) = \frac{-\sqrt{3}}{3+1} = \frac{-\sqrt{3}}{4}.$$

Táblázatba foglalva megvizsgáljuk a második derivált előjelét:

x	$]-\infty;<-\sqrt{3}[$	$-\sqrt{3}$	$]-\sqrt{3};0[$	0
$f''(x)$	$-$	0	$+$	0
$f(x)$	konkáv	i.p.	konvex	i.p.
$f(x)$		$\frac{-\sqrt{3}}{4}$		0

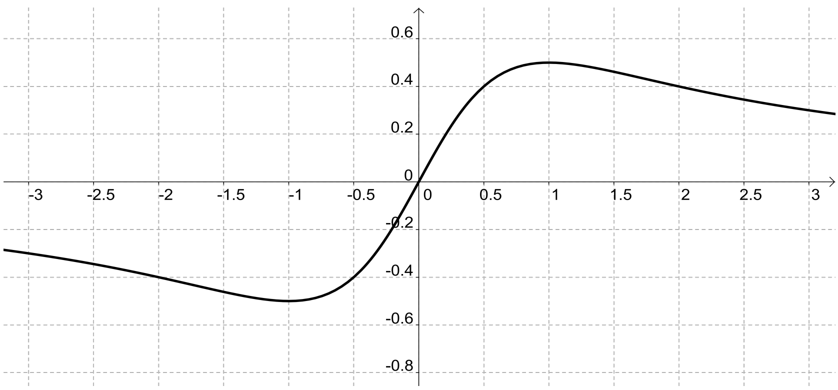
x	$]0;\sqrt{3}[$	$\sqrt{3}$	$]\sqrt{3};\infty[$
$f''(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	konkáv	i.p.	konvex
$f(x)$		$\frac{-\sqrt{3}}{4}$	

5) Határérték az értelmezési tartomány határpontjaiban:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{x^2+1} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x+\frac{1}{x}} = 0;$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{x^2+1} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x+\frac{1}{x}} = 0.$$

6) Az előbbiek felhasználásával fel tudjuk vázolni a függvény grafikonját:



7) Értékkészlet: $y \in \left[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right]$.

8) Korlátosság: korlátos.

9) Paritás: páratlan, mert szimmetrikus az origóra.

10) Abszolút (globális) szélsőérték: minimum hely: $x=-1$, maximum hely: $x=1$.

136. **Feladat.** Végezzük el az $f(x) = x + \frac{1}{x}$ függvény teljes függvényvizsgálatát!

<u>megoldás</u>:

1) Értelmezési tartomány: $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

2) A zérushelyet az $f(x) = 0$ egyenlet megoldásával kapjuk:

$$x + \frac{1}{x} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad x^2 + 1 = 0,$$

így nincs zérushelye a függvénynek.

3) A függvény deriváltja:

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2}.$$

Ennek zérushelyei, azaz az $x^2 - 1 = 0$ egyenlet megoldása:

$$1 = x^2,$$

amiből $x = -1$, $x = 1$. Az első derivált előjelét táblázatban foglaljuk össze. (Egy függvény ott is válthat előjelet, ahol nincs értelmezve!)

x	$]-\infty;-1[$	-1	$]-1;0[$	0	$]0;1[$	1	$]1;\infty[$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	n. é.	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	lok. max.	$\searrow$	n. é.	$\searrow$	lok. min.	$\nearrow$
$f(x)$		-2		n. é.		2	

4) A függvény második deriváltja:

$$f''(x) = \frac{2}{x^3}.$$

Ennek nincs zérushelye, mert egy tört csak akkor nulla, ha a számlálója nulla, azonban $2 \neq 0$, így a függvénynek nincs inflexiós pontja, továbbá második derivált csak $x = 0$-ban válthat előjelet.

x	$]-\infty;0[$	0	$]0;\infty[$
$f''(x)$	$-$	n. é.	$+$
$f(x)$	konkáv	n. é.	konvex

5) Határérték az értelmezési tartomány határpontjaiban:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} x + \frac{1}{x} = -\infty.$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} x + \frac{1}{x} = \infty.$$

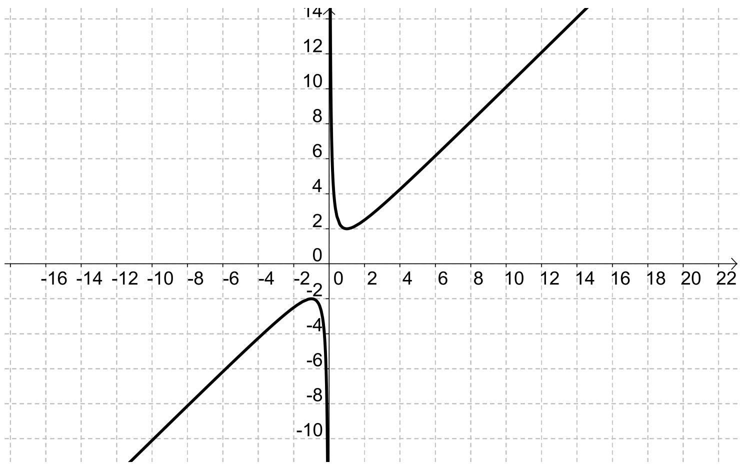
$$\lim_{x\to 0-} f(x) = \lim_{x\to 0-} x + \frac{1}{x} = \lim_{n\to\infty} -\frac{1}{n} - n = -\infty.$$

$$\lim_{x\to 0+} f(x) = \lim_{x\to 0+} x + \frac{1}{x} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} + n = \infty.$$

6) A függvény ábrázolásához készítünk egy összefoglaló táblázatot, az előző két táblázat alapján.

	$x < -1$	$-1 < x < 0$	$0 < x < 1$	$x > 1$
Mon.	$\nearrow$	$\searrow$	$\searrow$	$\nearrow$
Konv.	konkáv	konkáv	konvex	konvex

Ennek segítségével fel tudjuk vázolni a függvény grafikonját:



7) Értékkészlet: $y \in \mathbb{R}\backslash]-2;2[$.

8) Korlátosság: a függvény felülről nem korlátos, alulról nem korlátos.

9) Paritás: páratlan.

10) Abszolút (globális) szélsőérték hely: nincs.

2.6. Gazdasági függvények vizsgálata

137. **Feladat.** Valamely termék q mennyiségének előállítási költsége

$$C(q) = q^3 - 9q^2 + 15q + 30 \qquad (0 \leq q \leq 7).$$

Az előállított mennyiséget ezer darabban, az előállítási költséget millió forintban értjük.

a) Adjuk meg a C függvény deriváltját, azaz a határköltség függvényt!

b) Vizsgáljuk meg monotonitás és szélsőérték szempontjából a C függvényt!

c) Adjuk meg a C függvény második deriváltját!

d) Vizsgáljuk meg konvexitás és inflexiós pont szempontjából a C függvény!

e) Vázoljuk fel a C függvény grafikonját!

f) Elemezzük gazdasági szempontból a költségfüggvényt!

Megoldás:

a) A C függvény deriváltja:

$$C'(q) = 3q^2 - 18q + 15.$$

b) A derivált függvény zérushelyei a

$$3q^2 - 18q + 15 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad q^2 - 6q + 5 = 0$$

egyenlet megoldásai. A másodfokú egyenlet megoldóképletét alkalmazva azt kapjuk, hogy

$$q_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 4 \cdot 5}}{2} = \frac{6 \pm 4}{2},$$

tehát $q_1 = 1$, illetve $q_2 = 5$. A C függvény helyettesítési értéke a q_1 és q_2 helyeken:

$$C(1) = 1 - 9 + 15 + 30 = 37,$$

továbbá

$$C(5) = 5^3 - 9 \cdot 5^2 + 15 \cdot 5 + 30 = 5.$$

Az első derivált előjeleit tartalmazó táblázat:

q	$]0;1[$	1	$]1;5[$	5	$]5;7[$
$C'(q)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$C(q)$	$\nearrow$	lok. max.	$\searrow$	lok. min.	$\nearrow$
$C(q)$		37		5	

c) A függvény második deriváltja:

$$C''(q) = 6q - 18.$$

d) A második derivált zérushelye a

$$6q - 18 = 0$$

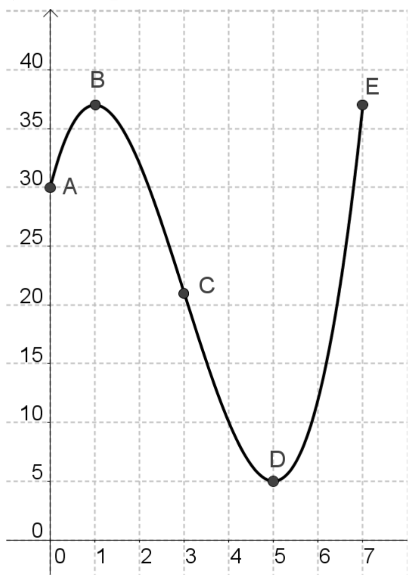
egyenlet megoldása. Tehát $q = 3$. A C függvény helyettesítési értéke a $q = 3$ helyen:

$$C(3) = 21.$$

A második derivált előjeleit tartalmazó táblázat:

q	$]0;3[$	3	$]3;7[$
$C'(q)$	$-$	0	$+$
$C(q)$	konkáv	i.p.	konvex
$C(q)$		21	

e) A C függvény grafikonján $A = (0;30)$ jelöli a függvény értelmezési tartományának kezdőpontjához tartozó grafikonpontot, $B = (1;37)$ jelöli a globális maximumot. A $C = (3;21)$ pont az inflexiós pont, $D = (5;5)$ a globális minimum, és $E = (8;37)$ a függvény értelmezési tartományának végpontjához tartozó grafikonbeli pont, ami egyben globális maximum is. A függvény grafikonjának képe:



f) A függvény grafikonjából és a korábbi számolásokból leolvasható, hogy a költségünk akkor lesz a lehető legkisebb, ha 5 ezer darab terméket állítunk elő. Ebben az esetben 5 millió forintos költséggel kell számolnunk.

138. **Feladat.** Valamely termék q mennyiségének előállításához tartozó bevételi függvény:

$$R(q) = \sqrt{q} \cdot (10 - q) \qquad (0 \leq q \leq 16).$$

Az előállított mennyiséget ezer darabban, a bevételt millió forintban értjük.

a) Adjuk meg az R függvény deriváltját, azaz a határköltség függvényt!

b) Vizsgáljuk meg monotonitás és szélsőérték szempontjából az R függvényt!

c) Adjuk meg az R függvény második deriváltját!

d) Vizsgáljuk meg konvexitás és inflexiós pont szempontjából az R függvényt!

e) Vázoljuk fel az R függvény grafikonját!

f) Elemezzük gazdasági szempontból a költségfüggvényt!

Megoldás:

a) Az R függvény deriváltja:

$$\begin{aligned} R'(q) &= \left(\sqrt{q} \cdot (10 - q)\right)' = \left(q^{\frac{1}{2}} \cdot (10 - q)\right)' = \\ &= \frac{1}{2} q^{-\frac{1}{2}} \cdot (10 - q) + q^{\frac{1}{2}} \cdot (-1) = \\ &= 5q^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} q^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} q^{-\frac{1}{2}} = 5q^{-\frac{1}{2}} - \frac{3}{2} \cdot q^{\frac{1}{2}} = \frac{5}{\sqrt{q}} - \frac{3}{2} \cdot \sqrt{q}. \end{aligned}$$

b) Megoldjuk az

$$\frac{5}{\sqrt{q}} - \frac{3}{2} \cdot \sqrt{q} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad 10 - 3q = 0$$

egyenletet, amiből azt kapjuk, hogy $q = \frac{10}{3}$.

c) A függvényérték a $q = \frac{10}{3}$ helyen:

$$R\left(\frac{10}{3}\right) = \sqrt{\frac{10}{3}} \cdot \left(10 - \frac{10}{3}\right) \approx 12,17.$$

Az első derivált előjelét táblázatban foglaljuk össze:

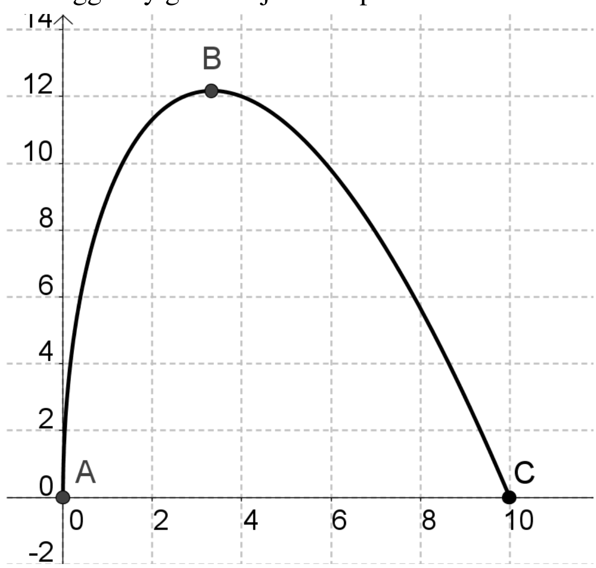
q	$]0; \frac{10}{3}[$	$\frac{10}{3}$	$]\frac{10}{3}; 10[$
$R'(q)$	$+$	0	$-$
$R(q)$	$\nearrow$	lok. max.	$\searrow$
$R(q)$		$12,17$	

d) A függvény második deriváltja:

$$R''(q) = \left(5q^{-\frac{1}{2}} - \frac{3}{2} \cdot q^{\frac{1}{2}}\right)' = -\frac{5}{2}q^{-\frac{3}{2}} - \frac{3}{4}x^{-\frac{1}{2}} = -\frac{5}{2\sqrt{q^3}} - \frac{3}{4\sqrt{x}}.$$

e) Az R'' függvény értelmezési tartományának minden pontjában negatív, így az R függvény értelmezési tartományának minden pontjában konkáv, következésképp nincs inflexiós pontja.

f) Az R függvény grafikonján $A = (0; 0)$ jelöli a függvény értelmezési tartományának kezdőpontjához tartozó grafikonpontot, $B = (1; 37)$ jelöli a globális maximumot. A $C = (10; 0)$ pont a függvény értelmezési tartományának végpontjához tartozó grafikonbeli pont, ami egyben globális minimum is. A függvény grafikonjának képe:



g) A függvény grafikonjából és a korábbi számolűsokból, hogy a bevételünk akkor lesz a lehető legnagyobb, ha 3 333 darab terméket állítunk elő. Ebben az esetben 12 170 000 forintos bevétellel számolhatunk. Ha 3 333 terméknél többet gyártunk, akkor a bevételünk egyre csökkenni fog, míg 10 000 darab termék gyárátsánál már 0 lesz. Ez azzal magyarázható, hogy a piac telítődik, így hiába gyártunk nagyon „sok” terméket, egy idő után már vesztégessé válik a gazdaságunk.

139. **Feladat.** Egy csatornából kifolyó vizet egy 100 literes hordóban gyűjtik össze. Az összegyűlt víz egy részét öntözésre használják, így a hordóból tovább vezetik egy kis kert földjére. A hordóban lévő folyadék mennyisége az idő függvényében a

$$Q(t) = 2t^3 - 21t^2 + 60t$$

függvény szerint alakul a $[0; 6]$ időintervallumban, ahol t a megfigyelés óta eltelt napok számát jelenti.

a) Mennyi folyadék volt a hordóban a megfigyelés kezdetén és mennyi volt a megfigyelés végén?
b) Adjuk meg, hogy a megfigyelés után 1 nappal hány liter folyadék volt a hordóban?
c) Adjuk meg a változási gyorsaságot az idő függvényében!
d) Mennyi a folyadék szintjének változási gyorsasága a folyamat kezdete után 1, illetve 2 nappal?
e) Melyik időintervallumban növekszik, illetve csökken a folyadék szintje?
f) Mikor maximális, illetve minimális a tárolt folyadék mennyisége a megfigyelés során, illetve mennyi a hordóban lévő maximális és a minimális mennyiségű folyadék?
g) Vázoljuk fel az $Q(t)$ függvény grafikonját a megfigyelés teljes időintervallumában!

Megoldás:

a) Mivel

$$Q(0) = 2 \cdot 0^3 - 21 \cdot 0^2 + 60 \cdot 0 = 0,$$

ezért a megfigyelés kezdetén a hordó üres volt. A megfigyelés végén

$$Q(6) = 2 \cdot 6^3 - 21 \cdot 6^2 + 60 \cdot 6 = 36$$

liter folyadék volt a hordóban.

b) A megfigyelés után 1 nappal

$$Q(1) = 2 \cdot 1^3 - 21 \cdot 1^2 + 60 \cdot 1 = 2 - 21 + 60 = 41$$

liter folyadék volt a hordóban.

c) A változási gyorsaság az idő függvényében
$$Q'(t) = 6t^2 - 42t + 60.$$

d) A folyadék szintjének változási gyorsasága a folyamat kezdete után 1 nappal
$$Q'(1) = 6 \cdot 1^2 - 42 \cdot 1 + 60 = 6 - 42 + 60 = 24,$$
illetve 2 nappal
$$Q'(2) = 6 \cdot 2^2 - 42 \cdot 2 + 60 = 24 - 84 + 60 = 0.$$

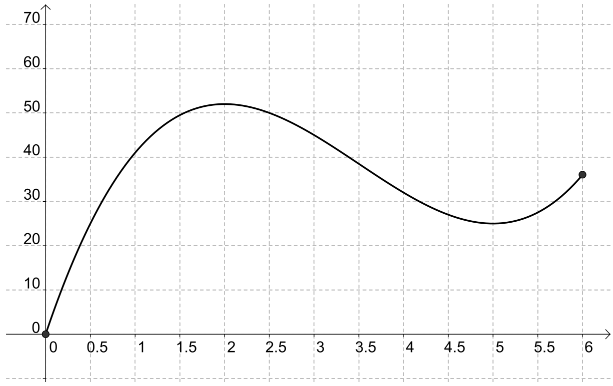
e) Megkeressük a derivált függvény zérushelyeit, azaz megoldjuk a
$$6t^2 - 42t + 60 = 0$$
egyenletet, aminek mindkét oldalát 6-al oszthatjuk, így
$$t^2 - 7t + 10 = 0$$
egyenlethez jutunk. A másodfokú egyenlet megoldóképletének felhasználásával azt kapjuk, hogy
$$t_{1,2} = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 40}}{2} = \frac{7 \pm 3}{2},$$
amiből az adódik, hogy $t = 2$, illetve $t = 5$. Az első derivált előjeleit táblázatba foglaljuk:

t	$]0;2[$	2	$]2;5[$	5	$]5;6[$
$Q'(t)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$Q(t)$	$\nearrow$	lok. max.	$\searrow$	lok. min.	$\nearrow$

A megfigyelés kezdetétől 2 napon keresztül növekedett a hordóban lévő folyadék mennyisége, majd a következő 3 napban csökkent, ezt követően a megfigyelés végig ismét növekedett a folyadék szintje.

f) Az előző táblázatban láthatjuk, hogy a stacionárius helyek $t = 2$, illetve $t = 5$. Kiszámoljuk ezeken a helyeken a függvény értékeket
$$Q(2) = 2 \cdot 2^3 - 21 \cdot 2^2 + 60 \cdot 2 = 52$$
$$Q(5) = 2 \cdot 5^3 - 21 \cdot 5^2 + 60 \cdot 5 = 25.$$
Figyelembe véve, hogy a megfigyelés kezdetén 0, a megfigyelés végén 36 liter folyadék volt a hordóban azt kaptuk, hogy a legkevesebb folyadék a megfigyelés kezdetén volt (ekkor üres volt a hordó), a legtöbb folyadék (52 liter) a megfigyelés utáni 2. nap volt a hordóban.

g) A $Q(t)$ függvény grafikonja:



2.7. Szélsőértékszámítási feladatok a közgazdaságtanban

Elméleti összefoglaló

2.7.1. **Tétel.** Legyen $f\colon I \to \mathbb{R}$ kétszer differenciálható függvény az $x_0 \in I$ helyen és $f'(x_0) = 0$. Ekkor

- ha $f''(x_0) > 0$, akkor a függvénynek az x_0 helyen lokális minimuma van;
- ha $f''(x_0) < 0$, akkor a függvénynek az x_0 helyen lokális maximuma van.

2.7.2. **Tétel.** Az előbbi állítás általánosítása az alábbi:
Ha az $f\colon I \to \mathbb{R}$ függvény n-szer differenciálható és $x_0 \in I$ olyan, hogy

$$f'(x_0) = f''(x_0) = \ldots = f^{(n-1)}(x_0) = 0,$$

továbbá $f^{(n)}(x_0) \neq 0$, akkor

- ha n páratlan, akkor f-nek x_0-ban nincs lokális szélsőértéke;
- ha n páros és $f^{(n)}(x_0) > 0$, akkor f-nek x_0-ban lokális minimuma van;
- ha n páros és $f^{(n)}(x_0) < 0$, akkor f-nek x_0-ban lokális maximuma van.

2.7.3. **Megjegyzés.** Egy zárt intervallumon értelmezett függvény globális szélsőértékeit az alábbi módon is meghatározhatjuk:

Tekintsük az $f\colon [a;b] \to \mathbb{R}$ folytonos függvényt, és tegyük fel, hogy f leszűkítése az $]a;b[$ nyílt intervallumra akárhányszor differenciálható. Ekkor f-nek biztosan létezik maximuma és minimuma is, melyeket az alábbi módon határozhatunk meg:

1. Deriváljuk az f függvényt!
2. Oldjuk meg az $f'(x) = 0$ egyenletet, ezáltal meghatározva az f stacionárius helyeit!
3. Számoljuk ki a függvényértékeket a stacionárius helyeken, valamint határozzuk meg az $f(a)$ és $f(b)$ függvényértékeket! A kiszámolt értékek közül a legkisebb a függvény abszolút minimuma, a legnagyobb a függvény abszolút maximuma.

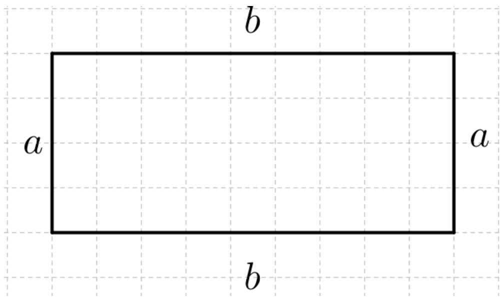
2.7.4. **Megjegyzés.** Fontos megjegyezni azt is, hogy ha egy nyílt intervallumon értelmezett folytonos függvénynek egyetlen lokális minimuma (maximuma) van, akkor az egyben globális minimum (maximum) is.

Kidolgozott feladatok

140. **Feladat.** Egy téglalap kerülete $100\,\mathrm{m}$. Határozzuk meg az oldalait úgy, hogy a területe maximális legyen!

<u>**Megoldás**</u>:

Legyenek a téglalap oldalai a és b.



Ekkor a kerület:

$$K = 2a + 2b,$$

így jelen esetben

$$2a + 2b = 100 \qquad \Rightarrow \qquad a + b = 50 \qquad \Rightarrow \qquad b = 50 - a.$$

Ezt felhasználva a téglalap területe:

$$T = a \cdot b = (50 - a) \cdot a = 50a - a^2.$$

Ez egy a-tól függő függvény, így jelöljük $T(a)$-val. Szélsőérték ott lehet, ahol a függvény deriváltja 0. Tehát meg kell oldanunk az $T'(a) = 0$ egyenletet:

$$T'(a) = 50 - 2a,$$

ami pontosan akkor 0, ha $a = 25$. Ekkor

$$b = 50 - a = 50 - 25 = 25.$$

Számoljuk ki a T függvény második deriváltját:

$$T''(a) = -2 < 0.$$

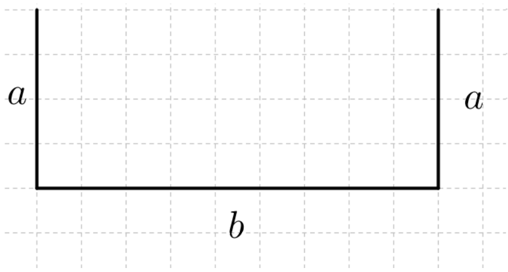
Tehát $T''(a) < 0$, így lokális maximum hely van az $a = 25$ helyen. Mivel ez az egyetlen lokális szélsőérték hely, így egyben globális maximum hely is. Tehát a téglalap területe akkor maximális, ha az oldalai $a = 25\,[\mathrm{m}]$ és $b = 25\,[\mathrm{m}]$. Ekkor a maximális terület:

$$T = a \cdot b = 25^2 = 625\,\mathrm{m}^2.$$

141. **Feladat.** Tűzfal melletti téglalap alakú kert kerülete $400\,\mathrm{m}$. Határozzuk meg a kert oldalait úgy, hogy a területe a lehető legnagyobb legyen!

Megoldás:

Legyenek a téglalap oldalai a és b.



Ekkor a kerülete:

$$K = 2a + b,$$

így jelen esetben

$$2a + b = 400 \qquad \Rightarrow \qquad b = 400 - 2a.$$

Ezt felhasználva a téglalap területe:

$$T = a \cdot b = a \cdot (400 - 2a) = 400a - 2a^2.$$

Ez egy a-tól függő függvény, ezért jelöljük $T(a)$-val. Szélsőérték ott lehet, ahol a függvény deriváltja 0. Tehát meg kell oldanunk az $T'(a) = 0$ egyenletet:

$$T'(a) = 400 - 4a,$$

ami pontosan akkor zérus, ha $a = 100$. Ekkor

$$b = 400 - 2a = 400 - 200 = 200.$$

Számoljuk ki a T függvény második deriváltját:

$$T''(a) = -4 < 0.$$

Mivel $T''(a) < 0$, ezért $a = 100$ lokális maximum hely, azonban ez az egyetlen lokális szélsőérték helye a függvénynek, így ez egyben globális maximum hely is. Tehát a téglalap területe akkor maximális, ha $a = 100\,\mathrm{m}$ és $b = 200\,\mathrm{m}$. Ekkor a maximális terület:

$$T = a \cdot b = 100 \cdot 200 = 20\,000\,\mathrm{m}^2.$$

142. **Feladat.** Egy téglalap alakú kert területe $400\,\mathrm{m}^2$. Határozzuk meg az oldalait úgy, hogy a kerülete a lehető legkisebb legyen!

Megoldás:

Legyenek a téglalap oldalai a és b. Ekkor a területe $T = a \cdot b$, ami jelen esetben $400\,\mathrm{m}^2$. Ebből kifejezve az egyik ismeretlent azt kapjuk, hogy

$$b = \frac{400}{a}.$$

Ezt behelyettesítve a kerületbe

$$K = 2a + 2a = 2a + \frac{800}{a}$$

adódik, aminek a deriváltja:

$$K'(a) = 2 - \frac{800}{a^2}.$$

Szélsőérték ott lehet, ahol az első deriváltnak zérushelye van:

$$2 - \frac{800}{a^2} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad 800 = 2a^2 \qquad \Rightarrow \qquad a = \pm 20.$$

A geometriai tartalom miatt csak az $a = 20$ megoldás értelmezhető. A K függvény második deriváltja:

$$K''(a) = \frac{1600}{a^3},$$

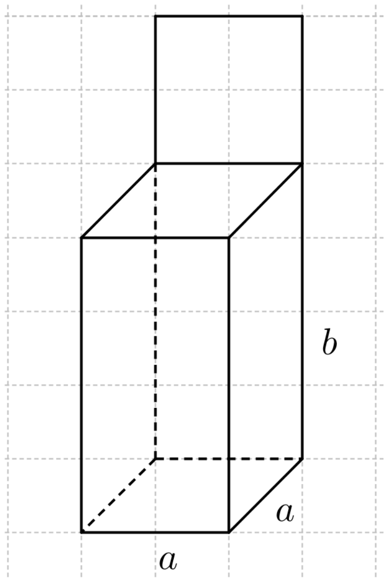
ami $a = 20$ esetén pozitív, így a K függvénynek lokális minimum van az adott helyen, azonban mivel ez az egyetlen lokális szélsőérték hely, így egyben abszolút szélsőérték hely is. Tehát a minimális kerület:

$$K = 2a + 2b = 80\,\mathrm{m}.$$

143. **Feladat.** Felül nyitott négyzet alapú egyenes hasáb felszíne $75\,\mathrm{dm}^2$. Határozzuk meg az éleit úgy, hogy a térfogata a lehető legnagyobb legyen!

Megoldás:

Jelöljük a hasáb alapéleit a-val, oldaléleit b-vel.



A hasáb felszíne:

$$A = a^2 + 4ab = 75.$$

Ebből kifejezve a b ismeretlent azt kapjuk, hogy

$$b = \frac{75 - a^2}{4a}.$$

Ezt behelyettesítjük a térfogat képletébe:

$$V = a^2 \cdot b = a^2 \cdot \frac{75 - a^2}{4a} = \frac{75a - a^3}{4},$$

amit deriválva

$$V'(a) = \frac{75 - 3a^2}{4}$$

adódik. Ennek zérushelye $a = \pm 5$, de a geometriai tartalom miatt -5 nem megoldás, így $a = 5\,\mathrm{dm}$. Ekkor

$$b = \frac{75 - 5^2}{4 \cdot 5} = \frac{50}{20} = 2,5\,\mathrm{dm}.$$

A V függvény második deriváltja

$$V''(a) = -\frac{3a}{2},$$

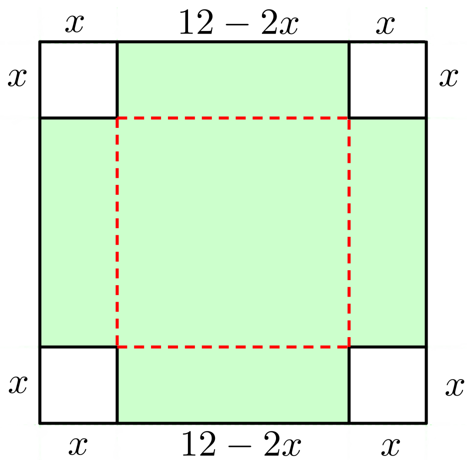
ami $a = 5$ esetén negatív, így valóban maximum van az adott helyen. Ekkor a maximális térfogat:

$$V = a^2 \cdot b = 25 \cdot 2,5 = 62,5\,\mathrm{dm}^3.$$

144. **Feladat.** Egy 12 centiméter oldalhosszúságú bádog lemezből nyitott tetejű dobozt kell készítenünk úgy, hogy sarkaiból négyzeteket vágunk ki, az oldalakat pedig felhajtjuk. Mekkora négyzeteket vágjunk ki a sarkokból, hogy a doboz űrtartalma a lehető legnagyobb legyen?

Megoldás:

Tegyük fel, hogy a négyzet sarkaiból x centimétert vágunk le.



A kapott test térfogata:

$$V(x) = (12 - 2x)^2 \cdot x = (144 - 48x + 4x^2) \cdot x = 4x^3 - 48x^2 + 144x.$$

A V függvény értelmezési tartománya a $[0, 6]$ zárt intervallum. Szélsőérték az értelmezési tartomány határpontjaiban lehet, vagy ott, ahol a függvény deriváltja zérus. Mivel

$$V'(x) = 12x^2 - 96x + 144,$$

ezért a

$$12x^2 - 96x + 144 = 0$$

egyenletet kell megoldanunk. Az egyenletet 12-vel végigosztva

$$x^2 - 8x + 12 = 0$$

adódik. Az egyenletet a másodfokú egyenlet megoldóképletével megoldva

$$x_{1,2} = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 4 \cdot 12}}{2} = \frac{8 \pm 4}{2},$$

azaz $x_1 = 6$ és $x_2 = 2$ adódik. A V függvény második deriváltja:

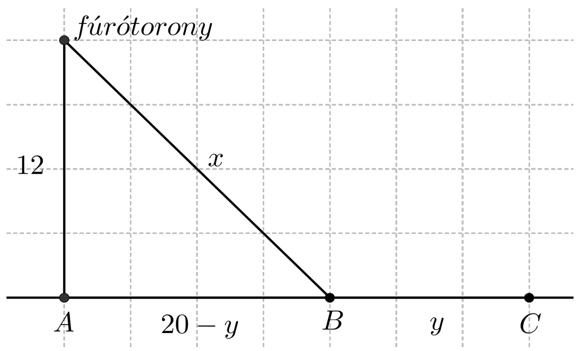
$$V''(x) = 24x - 96 \qquad \Rightarrow \qquad V''(2) = -48 < 0,\ V''(6) = 48 > 0.$$

Tehát az $x = 2$ helyen lokális maximum van, az $x = 6$ helyen lokális minimum van a V függvénynek. Továbbá $V(0) = 0$, $V(2) = 32 - 192 + 288 = 128$, $V(6) = 0$. Azt kaptuk tehát, hogy az $x = 2$ helyen van globális maximum hely, melynek értéke 128. Azaz ahhoz, hogy a keletkezett doboz térfogata maximális legyen, a széleitől 2 cm-re kell felhajtanunk a bádoglemezt. Ekkor a maximális térfogat $V = 128\,\mathrm{cm}^3$.

145. **Feladat.** Csővezetéket kell lefektetni a tengeri fúrótorony és a parti finomító között. A torony 12 kilométerre van a parttól. A finomító a part mentén 20 kilométerre, délre található. A víz alatt futó vezeték költsége 500 000 dollár/kilométer, míg a szárazföldön futó vezetéké 300 000 dollár/kilométer. Mi a legkevésbé költséges megoldás, azaz hogyan helyezzük el a csővezetéket ahhoz, hogy a legkevesebb legyen a költség?

Megoldás:

Legyen a víz alatti vezetékszakasz hossza x, a szárazföldön futóé pedig y.



Első lépésben az x és az y között szeretnénk matematikai kapcsolatot találni. Ehhez Pitagorasz tételét kell felírnunk, amely szerint:

$$x^2 = 12^2 + (20 - y)^2.$$

A kapott egyenlet mindkét oldalából gyököt vonva azt kapjuk, hogy

$$x = \sqrt{144 + (20 - y)^2}.$$

Ebben a modellben csak a pozitív gyöknek van értelme. A csővezeték költsége dollárban számítva

$$C = 500\,000x + 300\,000y,$$

amibe behelyettesítve az előbbi x azt kapjuk, hogy

$$C(y) = 500\,000 \cdot \sqrt{144 + (20 - y)^2} + 300\,000y.$$

A gyökös kifejezést átírva törtkitevőjű hatvány alakra

$$C(y) = 500\,000 \cdot \left(144 + (20 - y)^2\right)^{\frac{1}{2}} + 300\,000y.$$

adódik. A $C(y)$ függvény deriváltja:

$$C'(y) = 500\,000 \cdot \frac{1}{2}\left(144 + (20 - y)^2\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2 \cdot (20 - y) \cdot (-1) + 300\,000.$$

Elvégezve az egyszerűsítést

$$C'(y) = -500\,000 \cdot \frac{20 - y}{\sqrt{144 + (20 - y)^2}} + 300\,000$$

adódik. A derivált függvény zérushelye(i) a

$$-500\,000 \cdot \frac{20 - y}{\sqrt{144 + (20 - y)^2}} + 300\,000 = 0$$

egyenlet megoldása(i). Az egyenlet megoldásához első lépésben az egyenlet mindkét oldalát szorozzuk a közös nevezővel és az egyik tagot vigyük át a másik oldalra. Ekkor azt kapjuk, hogy

$$500\,000 \cdot (20 - y) = 300\,000\sqrt{144 + (20 - y)^2}.$$

Az egyenlet mindkét oldalát osszuk 300 000-rel:

$$\frac{5}{3} \cdot (20 - y) = \sqrt{144 + (20 - y)^2}.$$

Az egyenlet mindkét oldalát emeljük négyzetre:

$$\frac{25}{9} \cdot (20 - y)^2 = 144 + (20 - y)^2.$$

Vegyünk el mindkét oldalból a $(20-y)^2$ kifejezést:

$$\frac{16}{9}\cdot(20-y)^2 = 144.$$

Az egyenlet mindkét oldalát osszuk el $\frac{16}{9}$-del:

$$(20-y)^2 = 81 \qquad \Rightarrow \qquad 20-y = \pm 9,$$

amiből $y_1 = 11$, $y_2 = 29$. Az $y = 29$ nem megoldás, mert nem eleme a C függvény értelmezési tartományának, így $y = 11$. Kiszámolva $[0;20]$ intervallum határpontjaiban és az $y = 11$ helyen függvényértéket azt kapjuk, hogy

$$C(0) = 11\,661\,900;$$
$$C(11) = 10\,800\,000;$$
$$C(20) = 12\,000\,000.$$

Tehát a legolcsóbb megoldás költsége

$$10\,800\,000$$

dollár. Ezt úgy érjük el, hogy a vezeték a finomítótól 11 kilométerre ér partot.

146. **Feladat.** Egy 1 literes henger alakú hordó méreteit hogyan válasszuk meg ahhoz, hogy a felszíne a lehető legkisebb legyen!

Megoldás:

A henger alapkörének a sugarát jelöljük r-el, a henger magasságát M-el. Ekkor a henger térfogata:

$$V = r^2\cdot\pi\cdot M.$$

Jelen esetben $V = 1\,000\,\mathrm{cm}^3$, azaz

$$1\,000 = r^2\cdot\pi\cdot M \qquad \Rightarrow \qquad M = \frac{1000}{\pi\cdot r^2}.$$

A henger felszíne:

$$A = 2\cdot r^2\cdot\pi + 2\cdot r\cdot\pi\cdot M.$$

Ebbe behelyettesítve az M-et:

$$A(r) = 2\cdot r^2\cdot\pi + 2\cdot r\cdot\pi\cdot\frac{1000}{\pi\cdot r^2} = 2\cdot r^2\cdot\pi + \frac{2000}{r}.$$

A függvény értelmezési tartománya $r > 0$. Az A függvény deriváltja:

$$A'(r) = 4\cdot r\cdot\pi - \frac{2000}{r^2}.$$

Szélsőérték ott lehet, ahol a függvény deriváltja 0. Ezért megoldjuk az

$$4 \cdot r \cdot \pi - \frac{2000}{r^2} = 0$$

egyenletet. Mindkét oldalt r^2-el szorozva, majd r-et kifejezve

$$4r^3 \cdot \pi - 2000 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad r = \sqrt[3]{\frac{500}{\pi}} \approx 5,42$$

adódik. Az A függvény második deriváltja:

$$A''(r) = 4\pi + \frac{4000}{r^3},$$

ami minden pozitív r esetén pozitív, így a függvény mindenhol konvex, tehát globális minimuma van az $r \approx 5,42$ helyen. Ekkor:

$$M = \frac{1000}{\pi \cdot r^2} \approx \frac{1000}{\pi \cdot 5,42^2} = 10,84\,\mathrm{cm}.$$

147. **Feladat.** Egy hajó üzemeltetési költségeit a fűtőanyag fogyasztás és egyéb kiadások képezik. Az óránként felhasznált fűtőanyag A értéke függ a sebességtől. Az összefüggést az $A = 0,03v^3$ képlet adja meg, ahol v a sebesség $\mathrm{km/h}$-ban mérve. Az egyéb kiadások óránként 480 dollárt tesznek ki. Milyen sebességgel haladjon a hajó, hogy a kilométerenkénti költség a lehető legkisebb legyen?

Megoldás:

Ha a hajó sebessége $v\,\mathrm{km/h}$, akkor 1 óra alatt v kilométert tesz meg és ekkor a költség $A + 480$ dollár. Ekkor 1 kilométer út költsége:

$$C(v) = \frac{A + 480}{v} = \frac{0,03v^3 + 480}{v}.$$

A C függvény deriváltja:

$$C'(v) = \frac{0,09v^3 - (0,03v^3 + 480)}{v^2} = \frac{0,06v^3 - 480}{v^2} = 0,06v - \frac{480}{v^2}.$$

A derivált függvény zérushelye a

$$0,06v^3 - 480 = 0$$

egyenlet megoldása. Az egyenletet rendezve $v^3 = 8\,000$ adódik, amiből azt kapjuk, hogy $v = 20$. Mivel

$$C''(v) = 0,06 + \frac{960}{v^3} \qquad \Rightarrow \qquad C''(20) > 0,$$

ezért C-nek lokális minimum helye van a $v = 20$ helyen, ami egyben globális minimum hely is. Tehát azt kaptuk, hogy $20\,\mathrm{km/h}$ sebesség esetén lesz a hajó üzemeltetési költsége minimális.

148. **Feladat.** Egy horgászbotok gyártásával foglalkozó cég költség függvénye:

$$C(q) = q^3 - 10q^2 + 20q \qquad (0 \leq q \leq 10)$$

függvénnyel, ahol q a legyártott horgászbotok darabszámát jelenti ezer darabban. Határozzuk meg, hogy hány darab horgászbotot gyártsunk ahhoz, hogy az átlagköltség a lehető legkisebb legyen!

Megoldás:

Az átlagköltség függvény:

$$AC(q) = \frac{C(q)}{q} = q^2 - 10q + 20.$$

Ennek a függvénynek a deriváltja:

$$AC'(q) = 2q - 10,$$

amely pontosan akkor zérus, ha $q = 5$. Mivel

$$AC''(q) = 2 > 0,$$

ezért a $q = 5$ helyen minimuma van az AC függvénynek. Tehát azt kaptuk, hogy ötezer darab horgászbot gyártása esetén lesz az átlagos költség mininmális.

149. **Feladat.** Egy termék értékesítéséből származó bevételi függvény:

$$R(q) = 4 \cdot \sqrt{q}.$$

A termék előállításához tartozó költségfüggvény:

$$C(q) = 2q^2.$$

A q mennyiséget darabszámot ezer darabban értjük. Hány darabot gyártsunk a termékből, ha azt szeretnénk, hogy a nyereség a lehető legnagyobb legyen? Adjuk meg a maximális profitot is! (Az árat mindenhol ezer euróban értjük.)

Megoldás:

A nyereségfüggvény:

$$\Pi(q) = R(q) - C(q) = 4 \cdot \sqrt{q} - 2q^2.$$

A függvénynek ott lehet szélsőérték helye, ahol a deriváltja zérus. A $\Pi(q)$ függvény deriváltja:

$$\Pi'(q) = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot q^{-\frac{1}{2}} - 4q = \frac{2}{\sqrt{q}} - 4q.$$

Meghatározzuk a $\Pi'(q)$ függvény zérushelyét:

$$\frac{2}{\sqrt{q}} - 4q = 0 \qquad \Rightarrow \qquad 2 = 4q \cdot \sqrt{q}.$$

Emeljük négyzetre a kapott egyenlet mindkét oldalát, majd fejezzük ki az q változót. Ekkor azt kapjuk, hogy

$$4 = 16q^3 \qquad \Rightarrow \qquad q \approx 0,63.$$

Mivel

$$\Pi''(q) = -q^{-\frac{3}{2}} - 4 < 0$$

és $q \approx 0,63$ az egyetlen lokális maximum hely, ezért egyben globális maximum hely is. Azt kaptuk tehát, hogy 630 terméket kell gyártanunk ahhoz, hogy a lehető legnagyobb profitot érjük el. Ekkor

$$P(0,63) \approx 2,38,$$

tehát 2 380 euró lesz a (maximális) nyereségünk.

150. **Feladat.** [**34**] Egy termék bevételi függvénye

$$B(q) = 9q,$$

költségfüggvénye

$$C(q) = q^3 - 6q^2 + 15q,$$

ahol a q mennyiséget ezer darabban értjük, a bevételt és a költséget pedig ezer euroban. Van-e olyan termelési szint, amely maximalizálja a nyereséget?

Megoldás:

A nyereségfüggvény:

$$\Pi(q) = B(q) - C(q) = -q^3 + 6q^2 - 6q.$$

A $\Pi(q)$ függvény deriváltja

$$\Pi'(q) = -3q^2 + 12q - 6.$$

Ennek zérushelyei, azaz a

$$-3q^2 + 12q - 6 = 0$$

egyenlet megoldásai:

$$q_1 = 2 - \sqrt{2} \approx 0,586 \qquad q_2 = 2 + \sqrt{2} \approx 3,414.$$

A Π függvény második deriváltja:

$$\Pi''(q) = -6q + 12,$$

így egyrészt

$$\Pi(2 - \sqrt{2}) = -6 \cdot (2 - \sqrt{2}) + 12 > 0,$$

másrészt

$$\Pi(2 + \sqrt{2}) = -6 \cdot (2 + \sqrt{2}) + 12 < 0,$$

így a $2 - \sqrt{2}$ helyen minimum, a $2 + \sqrt{2}$ helyen maximum van. Azt kaptuk tehát, hogy $3\,414$ darab termék esetén lesz maximális a nyereség.

151. **Feladat.** [**9**] Valamely termék nyereség függvénye:

$$\Pi(q) = -4q^2 + 250q - 270,$$

költség függvénye:

$$C(x) = 70x + 2,$$

ahol q az előállított termékek számát jelenti. Határozzuk meg, hogy q mely értéke esetén lesz a bevétel maximális?

Megoldás:

Jelöljük a bevételi függvényt $R(q)$-val. Ekkor

$$\Pi(q) = R(q) - C(x) \qquad \Rightarrow \qquad R(q) = \Pi(q) + C(q).$$

Behelyettesítve a megfelelő függvényeket azt kapjuk, hogy

$$R(q) = -4q^2 + 320q - 268.$$

Az $R(q)$ függvény deriváltja

$$R'(q) = -8q + 320,$$

aminek az egyetlen zérushelye $q = 40$. Mivel

$$R''(q) = -8 < 0,$$

ezért a $q = 40$ helyen valóban maximuma van az $R(q)$ függvénynek. Azt kaptuk tehát, hogy 40 darab termék esetén lesz maximális a bevétel. Ekkor a maximális bevétel:

$$R(40) = -4 \cdot 40^2 + 320 \cdot 40 - 268 = 6\,132.$$

152. **Feladat.** [**9**] Egy termék bevételi függvénye:

$$R(q) = q \cdot \sqrt{6\,900 - 0,2q},$$

ahol q a gyártott termék darabszámát jelenti, a bevételt pedig forintban értjük. Állapítsuk meg, hogy milyen q érték esetén lesz a bevételi függvény értéke maximális!

Megoldás:

Az $R(q)$ függvény deriváltja:

$$\begin{aligned} R'(q) &= \sqrt{6\,900 - 0,2q} + q \cdot \frac{1}{2} \cdot (6\,900 - 0,2q)^{-\frac{1}{2}} \cdot (-0,2) = \\ &= \sqrt{6\,900 - 0,2q} - \frac{0,1q}{\sqrt{6\,900 - 0,2q}}. \end{aligned}$$

Az $R'(q)$ függvény zérushelyét kell megkeresnünk, azaz meg kell oldanunk a

$$\sqrt{6\,900 - 0,2q} - \frac{0,1q}{\sqrt{6\,900 - 0,2q}} = 0$$

egyeneletet. Ha mindkét oldalt szorozzuk a nevezővel, akkor azt kapjuk, hogy

$$6\,900 - 0,3x = 0,$$

így $x = 23\,000$. Az első derivált előjeleit táblázatban foglaljuk össze:

q	$]0; 23\,000[$	$23\,000$	$]23\,000; \infty[$
$R'(q)$	$+$	0	$-$
$R(q)$	$\nearrow$	lok. max.	$\searrow$

A $q = 23\,000$ az egyetlen szélsőérték, így az globális maximum hely is egyben. Azt kaptuk tehát, hogy $23\,000$ darab terméket kell gyártanunk ahhoz, hogy a bevétel maximális legyen. Ekkor a maximális bevétel:

$$R(23\,000) = 23\,000 \cdot \sqrt{6\,900 - 0,2 \cdot 23\,000} \approx 1\,103\,041\,\mathrm{Ft}.$$

153. **Feladat.** Egy adott termék esetén az inverz keresleti függvény:

$$f^{-1}(q) = 60 - 0,015q$$

függvény írja le. Hány darab terméket gyártsunk ahhoz, hogy a bevételi függvény értéke maximális legyen? A bevételt forintban értjük.

Megoldás:

A bevételi függvény:

$$R(q) = q \cdot f^{-1}(q) = q \cdot (60 - 0,015q) = 60q - 0,015q^2.$$

Az $R(q)$ függvény deriváltja:

$$R'(q) = 60 - 0,03q.$$

Az $R'(q)$ függvény zérushelye:

$$60 - 0,03q = 0 \qquad \Rightarrow \qquad q = 2\,000.$$

Mivel

$$R''(q) = -0,03 < 0,$$

így a $q = 2\,000$ helyen valóban maximuma van az $R(q)$ függvénynek. Azt kaptuk tehát, hogy 2 000 darab termék esetén lesz maximális a bevétel. Ekkor a maximális bevétel:

$$R(q) = 60 \cdot 2\,000 - 0,015 \cdot 2\,000^2 = 60\,000\,\mathrm{Ft}.$$

154. **Feladat.** [**14**] Egy cég nyereségének függvénye:

$$\Pi(q) = -2q^3 + 216q^2 - 4\,320q - 20\,000$$

dollárban, ahol q a legyártott és értékesített termékek darabszámát jelenti. Adjuk meg, hogy milyen q érték esetén lesz maximális a bevétel!

Megoldás:

A Π függvény deriváltja:

$$\Pi'(q) = -6q^2 + 432q - 4\,320.$$

A $\Pi'(x)$ függvény zérushelyének megkeresése az első feladatunk:

$$-6q^2 + 432q - 4\,320 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad q^2 - 72q + 720 = 0.$$

A másodfokú egyenlet megoldóképletét felhasználva azt kapjuk, hogy

$$q_{1,2} = \frac{72 \pm \sqrt{72^2 - 2\,880}}{2} = \frac{72 \pm 48}{2},$$

így $q_1 = 12$, illetve $q_2 = 60$. A $\Pi(q)$ függvény második deriváltja:

$$\Pi''(q) = -12q + 432,$$

így egyrészt $\Pi''(12) > 0$, másrészt $\Pi''(60) < 0$, így Π-nek a $q = 60$ helyen van maximuma. Azt kaptuk tehát, hogy 60 darab termék értékesítése esetén lesz maximális a nyereség. Ekkor:

$$\Pi(60) = -2 \cdot 60^3 + 216 \cdot 60^2 - 4\,320 \cdot 60 - 20\,000 = 66\,400.$$

Tehát a maximális nyereség 66 400 dollár.

155. **Feladat.** [**14**] Egy új illatszer esetén a szakemberek a

$$f(x) = \frac{10x}{16 + x^2}$$

keresleti függvényt valószínűsítik, ahol p az eladási árat jelenti euróban, $f(x)$ pedig az eladott mennyiséget ezer flakonban. Határozzuk meg, hogy hány euro esetén lesz maximális a kereslet? Mekkora ez a maximális kereslet?

<u>**Megoldás**</u>:

Az $f(p)$ függvény deriváltja:

$$f'(x) = \frac{10 \cdot (16 + x^2) - 10x \cdot 2x}{(16 + x^2)^2} = \frac{160 - 10x^2}{(16 + x^2)^2}.$$

Az $f'(x)$ függvény pontosan akkor zérus, ha

$$160 - 10x^2 = 0.$$

Figyelembe véve, hogy $x > 0$ kell, hogy teljesüljön, az előbbi egyenletből azt kapjuk, hogy $x = 4$.
Az első derivált előjelét táblázatba foglalva

	$0 < x < 4$	$x = 4$	$x > 4$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\nearrow$	lok. max.	$\searrow$

adódik. Az értelmezési tartományban $x = 4$ az egyetlen lokális szélsőérték és mivel $f(0) = 0$, így $x = 4$ globális maximum hely is egyben. Azt kaptuk tehát, hogy $x = 4$ eurós ár esetén lesz maximális a kereslet, és ekkor az elérhető legnagyobb kereslet

$$f(4) = \frac{10 \cdot 4}{16 + 4^2} = 1,25,$$

azaz 1 250 flakon.

156. **Feladat.** [**14**] Egy mosógépeket gyártó cég termelésének összköltsége dollárban kifejezve

$$C(q) = q^2 + 750q + 2\,500,$$

ahol q a napi termelést jelenti. Hány darab termék esetén lesz a mosógépenkénti átlagköltség minimális?

Megoldás:

Az átlagköltség függvény:

$$AC(q) = \frac{C(q)}{q} = q + 750 + \frac{2\,500}{q}.$$

Ennek a függvénynek keressük a minimumát. Az $AC(q)$ függvény deriváltja:

$$AC'(q) = 1 - \frac{2\,500}{q^2}.$$

Ennek a zérushelye $d > 0$ miatt $q = 50$. Az $AC'(q)$ előjeleit táblázatban foglaljuk össze:

q	$]0; 50[$	50	$]50; \infty[$
$AC'(q)$	$-$	0	$+$
$AC(q)$	$\searrow$	lok. min.	$\nearrow$

Azt kaptuk tehát, hogy $q = 50$ darab termék értékesítése esetén lesz a legkisebb az átlagköltség.

157. **Feladat.** Valamely termék iránti keresletet az

$$f(x) = \mathrm{e}^{1-0{,}02x}$$

függvény ad meg, ahol x a termék árát jelenti (euróban), $f(x)$ a hozzá tartozó keresletet jelenti (darabban). Milyen ár esetén lesz maximális a bevétel?

Megoldás:

A bevételi függvény:

$$R(x) = x \cdot f(x) = x \cdot \mathrm{e}^{1-0{,}02x}.$$

Az $R(x)$ függvény deriváltja:

$$R'(x) = \mathrm{e}^{1-0{,}02x} + x \cdot \mathrm{e}^{1-0{,}02x} \cdot (-0,02) = \mathrm{e}^{1-0{,}02x} \cdot (1 - 0,02x),$$

ami pontosan akkor zérus, ha $x = 50$. Az $R'(x)$ függvény előjeleit táblázatba foglaljuk:

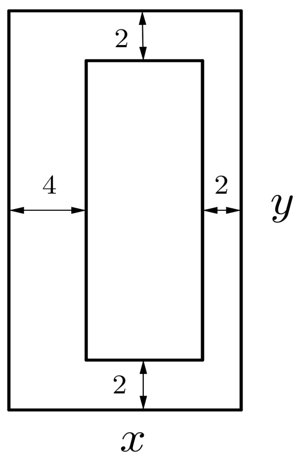
p	$]0;50[$	50	$]50;\infty[$
$R'(x)$	$+$	0	$-$
$R(x)$	$\nearrow$	lok. max.	$\searrow$

Azt kaptuk tehát, hogy 50 euro egységár esetén lesz a bevétel a lehető legnagyobb.

158. **Feladat.** (A 2008. májusi emelt szintű matematika érettségi 8. feladata alapján.)
A könyvkiadó szerkesztője egy könyv nyomtatási formáját tervezi. Minden lap alsó, felső és külső szélén kettő centiméteres margót szeretne hagyni, a belső szélen a kötés miatt négy centiméterest. A teljes lap területe $600\,\mathrm{cm}^2$. Mekkorák legyenek a lap méretei, ha a szerkesztő a lehető legnagyobb nyomtatási területet szeretné elérni a lapokon?

Megoldás:

Legyen egy lap két szomszédos oldalának hossza x és y.



A teljes lap területe $x \cdot y = 600$, amiből $y = \dfrac{600}{x}$ következik. A hasznos terület:

$$f(x) = (x-6)\cdot(y-4) = xy - 4x - 6y + 24 =$$
$$= 600 - 4x - \frac{3600}{x} + 24 = 624 - 4x - \frac{3600}{x}.$$

A függvény értelmezési tartománya: $x \in [6; 150]$.
A függvény deriváltja:

$$f'(x) = -4 + \frac{3600}{x^2}.$$

Ennek zérushelyei:

$$-4 + \frac{3600}{x^2} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{3600}{x^2} = 4 \qquad \Rightarrow \qquad x^2 = 900,$$

így $x = \pm 30$. Az értelmezési tartományba eső egyetlen megoldás: $x = 30$.

$$f''(x) = -\frac{7200}{x^3} \qquad \Rightarrow \qquad f''(30) = -\frac{7200}{30^3} < 0,$$

és az f függvény értéke az értelmezési tartomány határain zérus, ezért $x = 30$-ban maximuma van f-nek. Ekkor

$$y = \frac{600}{30} = 20.$$

Azt kaptuk tehát, hogy a lap oldalait $20\,\mathrm{cm}$-nek és $30\,\mathrm{cm}$-nek kell választani.

159. **Feladat.** (A 2010. májusi emelt szintű matematika érettségi 3. feladata alapján.)
Két európai nagyváros között egy repülőket üzemeltető társaság járatokat közlekedtet. Ezek a járatok legalább 10 utas esetén indulnak, és a gépek legfeljebb 36 utas szállítására alkalmasak. A társaság javítani szeretné a járatok kihasználtságát. Többek között mérlegelik a következő szabály szerinti üzemeltetést: 20 vagy annál kevesebb utas esetén fejenként 16 000 Ft-ért indítanak gépet; 20 fő feletti létszám esetén az összes utas számára annyiszor 400 Ft-tal csökken a 16 000 forintos viteldíj, amennyivel a létszám meghaladja a húszat. Adjuk meg annak a B függvénynek az a hozzárendelési utasítását, amelynél q az utasok számát, $R(q)$ pedig a társaság bevételét jelöli q utassal indított járat esetén! Határozzuk meg a függvény értelmezési tartományát! Adjuk meg, hogy hány utas esetén lesz a repülőtársaság bevétele egy járaton a legnagyobb, és mekkora ez a maximális bevétel?

Megoldás:

Ha $10 \leq x \leq 20$ és q egész szám, akkor $B(q) = 16\,000q$.
Ha $20 < x \leq 36$ és q egész szám, akkor

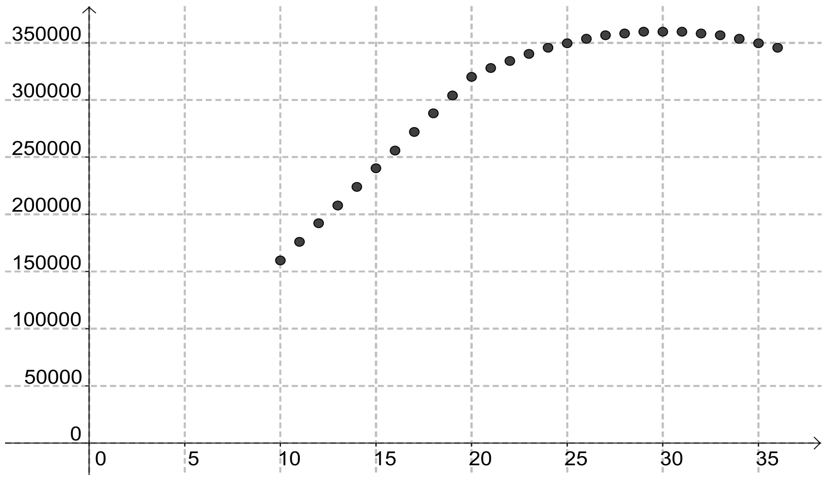
$$R(q) = 16\,000q - 400 \cdot (q - 20) \cdot q = -400q^2 + 24\,000q.$$

Vezessük be az U és V halmazokat az alábbi definícióval:

$$U = \{q \in \mathbb{N} \,|\, 10 \leq q \leq 20\}$$
$$V = \{q \in \mathbb{N} \,|\, 21 \leq q \leq 36\}.$$

Ennek megfelelően a függvény hozzárendelési szabálya:

$$R(q) = \begin{cases} 16\,000q, & \text{ha} \quad q \in U \\ -400q^2 + 24\,000q, & \text{ha} \quad q \in V \end{cases}.$$



Az így kapott bevételi függvény nem differenciálható, pontosabban mivel az értelmezési tartományának nincs belső pontja, ezért nincs értelme differenciálhatóságról beszélni. Ezért vezessük be az

$$U^\star = \{q \in \mathbb{R} \,|\, 10 \leq q \leq 20\}$$
$$V^\star = \{q \in \mathbb{R} \,|\, 20 < q \leq 36\}.$$

halmazokat és tekintsük a

$$R^\star(q) = \begin{cases} 16\,000q, & \text{ha} \quad q \in U^\star \\ -400q^2 + 24\,000q, & \text{ha} \quad q \in V^\star \end{cases}$$

függvényt! Ekkor $R^\star(q)$ már differenciálható függvény. Az $U^\star$ tartományon a maximumérték az $U^\star$ halmaz egyik határpontjában van:

$$16\,000 \cdot 20 = 320\,000.$$

A $V^\star$ tartományon a derivált függvény

$$-800q + 24\,000,$$

amelynek zérushelye $q = 30$-nál van. Ezen a helyen a függvényérték:

$$R(30) = -400 \cdot 30^3 + 24\,000 \cdot 30 = 360\,000.$$

A globális maximum hely tehát $q = 30$, továbbá mivel

$$R(20) = 320\,000 < 360\,000 = R(30),$$

ezért az R függvénynek is maximum helye az $q = 30$. Következésképpen, azt kaptuk, hogy 30 utas esetén lesz maximális a bevétel, és az elérhető legnagyobb bevétel 360 000 Ft.

160. **Feladat.** (A 2010. októberi emelt szintű matematika érettségi 7. feladata alapján.)
Egy kozmetikumokat gyártó vállalkozás nagy tételben gyárt egyfajta krémet. A termelés teljes havi mennyisége (q kilogramm) 100 és 700 kg közé esik, amelyet egy megállapodás alapján a gyártás hónapjában el is adnak egy nagykereskedőnek. A megállapodás azt is tartalmazza, hogy egy kilogramm krém eladási ára: $(36 - 0,03q)$ euró. A krémgyártással összefüggő havi kiadás (költség) is függ a havonta eladott mennyiségtől. A krémgyártással összefüggő összes havi kiadást (költséget) az

$$C(q) = 0,0001q^3 - 30,12q + 13\,000$$

függvény adja meg, szintén euróban.

a) Adjuk meg a havi bevételt megadó függvény hozzárendelési szabályát!

b) Számoljuk ki, hogy hány kilogramm krém eladása esetén lesz az eladásból származó havi bevétel a legnagyobb!

c) Mekkora a legnagyobb havi bevétel?

d) Adjuk meg a nyereségfüggvényt!

e) Hány kilogramm krém értékesítése esetén lesz a lehető legnagyobb a nyereség?

f) Adjuk meg a krémgyártással elérhető legnagyobb havi nyereséget!

Megoldás:

a) Az eladásból származó havi bevétel:

$$R(q) = q \cdot (36 - 0,03q) = -0,03q^2 + 36q.$$

b) Az $R(q)$ függvény deriváltja:

$$R'(q) = -0,06q + 36,$$

amelynek zérushelye $q = 600$. Mivel $R(q)$ egy „lefelé nyíló” parabola, ezért a $q = 600$ globális maximum hely, következésképpen a legnagyobb bevételt 600 kg termék értékesítése esetén lehet elérni.

c) Az elérhető legnagyobb bevétel:

$$R(600) = -0,03 \cdot 600^2 + 36 \cdot 600 = 10\,800 \,\text{euró}.$$

d) A havi nyereség a havi bevétel és havi kiadás különbségével egyenlő, ennek megfelelően a nyereségfüggvény:

$$\begin{aligned}\Pi(q) &= -0,03q^2 + 36q - (0,0001q^3 - 30,12q + 13\,000) = \\ &= -0,0001q^3 - 0,03q^2 + 66,12q - 13\,000.\end{aligned}$$

A függvény értelmezési tartománya: $[100; 700]$.

e) A $\Pi(q)$ függvény deriváltja:

$$\Pi'(q) = -0,0003q^2 - 0,06q + 66,12,$$

melynek zérushelye az

$$-0,0003q^2 - 0,06q + 66,12 = 0$$

egyenlet megoldása, amely ekvivalens az

$$q^2 + 200q - 220\,400 = 0$$

egyenlet megoldásával. A másodfokú egyenlet megoldóképletének felhasználásával

$$q_{1,2} = \frac{-200 \pm \sqrt{200^2 - 4 \cdot (-220\,400)}}{2} = \frac{-200 \pm 960}{2}$$

adódik, amiből azt kapjuk, hogy $q_1 = -580$ és $q_2 = 380$. A $\Pi(q)$ függvény zárt intervallumon értelmezett valós értékű függvény, s mint ilyennek létezik globális szélsőértéke az intervallum határpontjaiban vagy azokon a helyeken, ahol a derivált zérus. Ezeken a helyeken a függvényértékek:

$$\Pi(0) = -13\,000 \quad \Pi(380) = 2306,4 \quad \Pi(700) = -15\,716,$$

így a maximum hely 380.

f) A $\Pi(q)$ függvény maximum értéke

$$\Pi(380) = 2\,306, 4.$$

Azt kaptuk tehát, hogy az elérhető legnagyobb havi nyereség $2306, 4$ euró.

161. **Feladat.** (A 2013. októberi emelt szintű matematika érettségi 6. feladata alapján.)
Egy teherszállító taxikat üzemeltető társaság egyik, elsősorban városi forgalomban alkalmazott kocsijának teljes működtetési költsége két részből tevődik össze: az üzemeltetési költség x $[\mathrm{km/h}]$ átlagsebesség esetén

$$400 + 0, 8x$$

forint kilométerenként, továbbá a gépkocsivezető alkalmazása $2\,200$ Ft óránként. Mekkora átlagsebesség esetén minimális a kocsi kilométerenkénti működtetési költsége? A választ $[\mathrm{km/h}]$-ban, egészre kerekítve adjuk meg!

Megoldás:

Ha x $[\mathrm{km/h}]$ a sebesség, akkor 1 óra alatt x kilométert teszünk meg, ez esetben a gépkocsivezető díja $2\,200$ Ft, így 1 kilométer alatt a gépkocsivezető díja $\frac{2\,200}{x}$ Ft, tehát az összköltség

$$C(x) = 400 + 0, 8x + \frac{2\,200}{x}.$$

A $C(x)$ függvény deriváltja

$$C'(x) = 0, 8 - \frac{2\,200}{x^2},$$

amelynek zérushelye a

$$0, 8x^2 - 2\,200 = 0$$

egyenlet megoldása, amiből $x > 0$ miatt $x \approx 52$ adódik. Mivel

$$C''(x) = \frac{4\,400}{x^3}$$

és $C''(52) > 0$, ezért C-nek 52-ben lokális minimum helye van, mivel azonban ez az egyetlen stacionárius pontja C-nek, ezért $x \approx 52$ globális minimum hely is.
Tehát (egészre kerekítve) 52 $[\mathrm{km/h}]$ átlagsebesség esetén minimális a kocsi kilométerenkénti működtetési költsége.

2.8. Elaszticitás

Elméleti összefoglaló

2.8.1. **Motiváció.** A közgazdaságtanban gyakran vizsgált kérdés, hogy összefüggő mennyiségek esetén az egyik 1%-os megváltozása a másik hány $\%$-os megváltozását vonja maga után. Ezt az úgynevezett *elaszticitás* mutatja.

Lehetséges, hogy arra vagyunk kíváncsiak, hogy valamely termék árának megváltozása hogyan hat a termék keresletére. Ilyenkor megnézhetjük, hogy hány darabbal változik meg a termék iránti kereslet, ha 1 forinttal nő az ár. Ebben az esetben egy konkrét számot kapunk, ami a kereslet változása darabszámban. Sok esetben nem megfelelő az árral szembeni érzékenységét a keresletnek ilyen módon mérni, mivel míg egy autó 1 forintos árnövekedése jelentéktelen, addig 1 csésze kávé árának 1 forintos növekedése jelentősebb.

A probléma az, hogy a keresletnek az árváltozástól való függését, a termék iránti keresletet és az árat ugyanazzal a mértékkel mérjük. Ezek a nehézségek elkerülhetőek, ha relatív változásokat használunk, tehát ha azt vizsgáljuk, hogy hány százalékkal változik a kereslet, ha 1%-kal nő az ár. Az így kapott számot nevezzük a kereslet *árrugalmasság*ának vagy *elaszticitás*ának, ami független lesz attól, hogy milyen mértékkel mértük a termék árát és a kereslet mennyiségét.

Az $f(x)$ függvény jelentse egy termék iránti keresletet az ár függvényében. Az $f(x)$ *abszolút változás*a

$$\Delta f(x) = f(x+\Delta x) - f(x),$$

relatív változása

$$\frac{\Delta f(x)}{f(x)} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{f(x)}.$$

A kereslet mennyisége *relatív változás*ának és az ár relatív változásának hányadosa

$$\frac{\frac{\Delta f(x)}{f(x)}}{\frac{\Delta x}{x}} = \frac{x}{f(x)} \cdot \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{x}{f(x)} \cdot \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Az ár egy százalékkal nő, ha $\Delta x = \frac{x}{100}$. Ekkor

$$\frac{\Delta x}{x} = \frac{1}{100},$$

amit az előző képletbe behelyettesítve a kereslet mennyiségének százalékos megváltozását kapjuk. Az előbbiekben definiált szám függ az árváltozástól és az x ártól is, de egységmentes, tehát nem számít, hogy a termék mennyiségét tonnában vagy kilogrammban mérjük, és hogy az ár dollárban vagy forintban van-e megadva.

Az f függvény *elaszticitás*át egy adott pontban úgy definiáljuk, hogy az független legyen x megváltozásától. Ekkor f-nek az x pontban vett elaszticitását az

$$\frac{x}{f(x)} \cdot \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

hányados határértékeként definiáljuk, midőn $\Delta x \to 0$. Ekkor a differenciálhányados definíciója szerint az elaszticitásra az

$$E(x) = \frac{x}{f(x)} \cdot f'(x)$$

összefüggés adódik.

2.8.2. **Definíció.** Legyen $f\colon I \to \mathbb{R}$ differenciálható függvény. Az

$$E(x) = \frac{x}{f(x)} \cdot f'(x)$$

függvény megmutatja, hogy ha az x értékét 1%-kal változtatjuk, akkor hány százalékkal változik az $f(x)$ értéke.

Az $E(x)$ függvényt az f függvény *elaszticitás függvény*ének nevezzük.

2.8.3. **Megjegyzés.** Például, ha egy termék iránti keresletet az x forintos ár függvényében az $f(x)$ függvény ír le, akkor az elaszticitás megmutatja, hogy ha 1%-kal növeljük (csökkentjük) a termék árát, akkor várhatóan hány százalékkal változik az iránta való kereslet.

2.8.4. **Definíció.** Legyen $f\colon I \to \mathbb{R}$ differenciálható függvény. Azt mondjuk, hogy az $f(x)$ függvény

- *rugalmatlan*, ha $0 < |E(x)| < 1$;
- *egységnyi rugalmasságú*, ha $|E(x)| = 1$;
- *rugalmas*, ha $|E(x)| > 1$.

2.8.5. **Megjegyzés.** A közgazdaságtanban rendkívül fontosak azok a függvények, amelyeknek az elaszticitása állandó érték. Ilyenek például az ún. *Cobb-Douglas típusú függvény*ek. A közgazdaságtan különböző területein, így a mikroökonómiai fogyasztás- és termeléselméletben, valamint a makroökonómiában is széles körben használatosak ezek a függvények. Elsőként Knut Wicksell svéd közgazdász alkalmazta őket, elnevezésük mégis az amerikai Charles Cobb matematikus és Paul Douglas közgazdász nevéből származik. Legyenek a és b adott, valós számok, és tekintsük az

$$f(x) = a \cdot x^b$$

függvényt. Ekkor $f'(x) = a \cdot b \cdot x^{b-1}$, ezért az elaszticitás

$$E(x) = \frac{x}{f(x)} \cdot f'(x) = \frac{x}{a \cdot x^b} \cdot a \cdot b \cdot x^{b-1} = \frac{a \cdot b \cdot x \cdot x^{b-1}}{a \cdot x^b} = b,$$

így az elaszticitás értéke nem függ az x értékétől.

Kidolgozott feladatok

162. **Feladat.** Egy árucikk iránti keresletet az x ártól függően az

$$f(x) = \frac{100}{x+5}$$

függvény adja meg. Írjuk fel az elaszticitás függvényt! Hány százalékkal változik a kereslet, ha az áru 5 Ft-os árát 1%-kal emelik, illetve 3%-kal csökkentik?

Megoldás:

Első lépésben kiszámoljuk az f függvény deriváltját:

$$f'(x) = \frac{-100}{(x+5)^2}.$$

Ezt felhasználva felírjuk az elaszticitás függvényt:

$$E(x) = \frac{x}{f(x)} f'(x) = \frac{x}{\frac{100}{x+5}} \cdot \frac{-100}{(x+5)^2} = x \cdot \frac{x+5}{100} \cdot \frac{-100}{(x+5)^2} = \frac{-x}{x+5}.$$

Mivel a termék ára 5 Ft, ezért kiszámoljuk az $E(5)$ értéket:

$$E(5) = \frac{-5}{5+5} = -\frac{1}{2}.$$

Ez azt jelenti, hogy ha 1%-kal nő az ár, akkor várhatóan fél százalékkal csökken a termék iránti kereslet. Másrészt, ha 3%-kal csökken az ár, akkor várhatóan $3 \cdot 0,5\% = 1,5\%$-kal nő a termék iránti kereslet.

163. **Feladat.** Egy termékből eladott mennyiség az

$$f(x) = 10 + \frac{5\,000}{x}$$

függvénnyel adható meg, ahol x a termék ára. Hány százalékkal változna az eladott mennyiség, ha a termék 1 000 Ft-os árát 3%-kal növelik?

Megoldás:

Első lépésben kiszámoljuk az f függvény deriváltját:

$$f'(x) = \frac{-5\,000}{x^2}.$$

Ezt felhasználva felírjuk az elaszticitás függvényt:

$$E(x) = \frac{x}{f(x)} \cdot f'(x) = \frac{x}{10 + \frac{5\,000}{x}} \cdot \frac{-5\,000}{x^2} = \frac{x}{\frac{10x+5\,000}{x}} \cdot \frac{-5\,000}{x^2} =$$
$$= x \cdot \frac{x}{10x + 5\,000} \cdot \frac{-5\,000}{x^2} = -\frac{5\,000}{10x + 5\,000}.$$

A termék ára 1 000 Ft, ezért kiszámoljuk az $E(1\,000)$ értéket:

$$E(1\,000) = -\frac{5\,000}{10\,000 + 5\,000} = -\frac{1}{3}.$$

Ez azt jelenti, hogy ha 3%-kal növeljük a termék árát, akkor várhatóan $3 \cdot \frac{1}{3}\%$-kal, azaz 1%-kal fog csökkenni a termék iránti kereslet.

164. **Feladat.** A raktározási költség a raktározott mennyiség (x) és egy állandó költség függvénye az $f(x) = 40x + 8\,000$ képlet szerint. Hány százalékkal változik a raktározási költség, ha 200 termék helyett 2%-kal kevesebb terméket tárolnak?

Megoldás:

Első lépésben kiszámoljuk az f függvény deriváltját:

$$f'(x) = 40.$$

Ezt felhasználva az elaszticitás függvény

$$E(x) = \frac{x}{f(x)} \cdot f'(x) = \frac{x}{40x + 8\,000} \cdot 40 = \frac{40x}{40x + 8\,000}.$$

Kiszámoljuk az $E(200)$ értéket

$$E(200) = \frac{40 \cdot 200}{40 \cdot 200 + 8\,000} = \frac{1}{2}.$$

Így ha 2%-kal kevesebb terméket raktározunk, akkor $2 \cdot \frac{1}{2} = 1\%$-kal csökken a raktározási költség.

165. **Feladat.** Tegyük föl, hogy egy termék keresletét az

$$f(x) = 800 \cdot x^{-1{,}5}$$

függvény írja le. Határozzuk meg az f elaszticitását!

Megoldás:

Az f függvény deriváltja

$$f'(x) = 800 \cdot (-1,5) \cdot x^{-2,5} = -12.000 \cdot x^{-2,5}.$$

Így az elaszticitás

$$E(x) = \frac{x}{f(x)} \cdot f'(x) = \frac{x}{800 \cdot x^{-1,5}} \cdot (-12.000 \cdot x^{-2,5}) = -1,5.$$

Tehát az elaszticitás $-1,5$, vagyis az ár 1%-os növekedése várhatóan a kereslet nagyságának $1,5\%$-os csökkentését eredményezi.

166. **Feladat.** Valamely áru iránti kereslet az

$$f(x) = 4 \cdot \mathrm{e}^{-0,2x+8}$$

keresleti függvénnyel írható le, ahol x az egységárat (ezer Ft/kg), $f(x)$ pedig a hozzá tartozó keresletet jelenti (kg). Hogyan változik a kereslet, ha az egységárat a 9.000 Ft/kg egységárról 1%-kal növeljük?

Megoldás:

Az f függvény deriváltja

$$f'(x) = 4 \cdot \mathrm{e}^{-0,2x+8} \cdot (-0,2) = -0,8 \cdot \mathrm{e}^{-0,2x+8}.$$

Az elaszticitás függvény

$$E(x) = \frac{x}{f(x)} \cdot f'(x) = \frac{x}{4 \cdot \mathrm{e}^{-0,2x+8}} \cdot \left(-0,8 \cdot \mathrm{e}^{-0,2x+8}\right) = -0,2x.$$

Ezen függvény helyettesítési értéke az $x = 90$ helyen:

$$E(9) = -9 \cdot 0,2 = -1,8.$$

Azaz ha a termék egységárát 1%-kal növeljük, akkor a termék iránti kereslet várhatóan $1,8\%$-kal fog csökkenni.

167. **Feladat.** Egy étteremben egy új ételspecialitást vezetnek be. Az előzetes számítások alapján a keresletet leíró függvény képlete:

$$f(x) = x^2 \cdot \mathrm{e}^{-x^2},$$

ahol x az egységárat jelenti ezer Ft-ban, $f(x)$ pedig a havonta ebből a specialitásból várhatóan értékesítendő adagok számát ezer darabban megadva. Számoljuk ki a keresleti függvénynek az $x = 2$ pontjához tartozó elaszticitását, és értelmezzük a kapott eredményt!

Megoldás:

Az f függvény deriváltja

$$f'(x) = 2x\mathrm{e}^{-x^2} + x^2 \cdot \mathrm{e}^{-x^2} \cdot (-2x) = \mathrm{e}^{-x^2} \cdot (2x - 2x^3).$$

Az elaszticitás függvény

$$\begin{aligned} E(x) &= \frac{x}{f(x)} \cdot f'(x) = \frac{x}{x^2 \cdot \mathrm{e}^{-x^2}} \cdot \mathrm{e}^{-x^2} \cdot (2x - 2x^3) = \\ &= \frac{2x - 2x^3}{x} = 2 - 2x^2. \end{aligned}$$

A függvény helyettesítési értéke az $x = 2$ helyen

$$E(2) = 2 - 2 \cdot 2^2 = -6.$$

A kapott eredmény azt jelenti, hogy ha az adagok egységárát 1%-kal növelik, akkor az irántuk való kereslet várhatóan 6%-kal fog csökkenni.

2.9. Összetett gazdasági feladatok

168. **Feladat.** Egy vállalat adott termék iránti keresleti függvénye:

$$f(x) = 20 - x.$$

A költségfüggvény:

$$C(q) = q^3 + 4q + 10.$$

A költségnél a mennyiséget ezer darabban, a költséget millió forintban értjük.
A kínálati függvény:

$$S(x) = 4x.$$

A termék x egységárát a keresleti és kínálati függvény esetében is ezer forintban értjük.

a) Mennyibe kerül ezer termék előállítása?
b) Mennyibe kerül kétezer termék előállítása?
c) Mennyibe kerül háromezer termék előállítása?
d) Számoljuk ki a fix költséget!
e) Adjuk meg a változó költséget!
f) Adjuk meg az átlagköltséget!
g) Számoljuk ki az átlagos fix költséget!
h) Adjuk meg az átlagos változó költséget!
i) Vázoljuk fel a költségfüggvény grafikonját!
j) Adjuk meg az inverz keresleti függvény hozzárendelési szabályát!
k) Adjuk meg a bevételi függvény hozzárendelési szabályát!
l) Adjuk meg a nyereségfüggvény hozzárendelési szabályát!
m) Ábrázoljuk a keresleti függvényt!
n) Ábrázoljuk a bevételi függvényt!
o) Milyen kibocsátás esetén lesz maximális a bevétel?
p) Mennyi a maximális bevétel?
q) Adjuk meg a határköltséget!
r) Adjuk meg a határbevételt!
s) Adjuk meg a határprofitot!
t) Adjuk meg a profitmaximumot biztosító kibocsátási szintet!
u) Adjuk meg a maximális profitot!
v) Profitmaximum esetén határozzuk meg a piaci árat!

w) Ábrázoljuk a profitfüggvényt!

x) Ábrázoljuk közös koordinátarendszerben a keresleti függvényt és a kínálati függvényt!

y) Adjuk meg az egyenesúlyi árat!

z) Adjuk meg az egyenesúlyi mennyiséget!

α) Határozzuk meg a keresleti függvény elaszticitását profitmaximum esetén!

β) Rajzoljuk fel a keresleti függvény elaszticitás függvényét!

Megoldás:

a) Mivel
$$C(1) = 1^3 + 4 \cdot 1 + 10 = 15,$$
ezért ezer darab termék előállítása 15 000 000 forintba kerül.

b) Mivel
$$C(2) = 2^3 + 4 \cdot 2 + 10 = 26,$$
ezért kétezer darab termék előállítása 26 000 000 forintba kerül.

c) Mivel
$$C(3) = 3^3 + 4 \cdot 3 + 10 = 49,$$
ezért kétezer darab termék előállítása 49 000 000 forintba kerül.

d) A fix költség
$$FC = C(0) = 0^3 + 4 \cdot 0 + 10 = 10,$$
tehát 10 000 000 forint.

e) A változó költség:
$$VC(q) = q^3 + 4q.$$

f) Az átlagköltség:
$$AC(q) = \frac{C(q)}{q} = \frac{q^3 + 4q + 10}{q} = q^2 + 4 + \frac{10}{q}.$$

g) Az átlagos fix költség:
$$AFC(q) = \frac{FC}{q} = \frac{10}{q}.$$

h) Az átlagos változó költség:
$$AVC(q) = \frac{VC(q)}{q} = q^2 + 4.$$

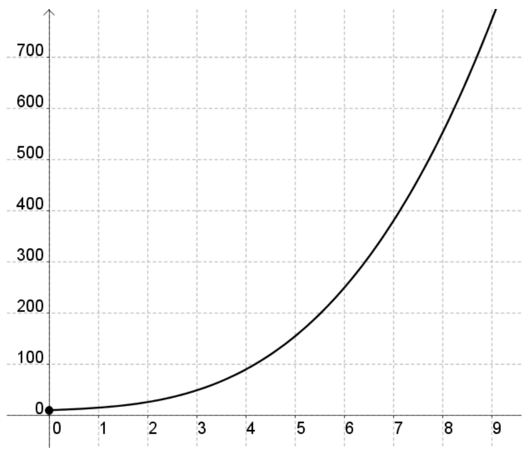
i) Mivel

$$C'(q) = 3q^2 + 4,$$

ami minden $q \geq 0$ esetén pozitív, ezért a $C(q)$ függvény minden q esetén szigorúan monoton növekvő.
Mivel

$$C''(q) = 6q,$$

melynek zérushelye $q = 0$, ezért a $C(q)$ függvénynek a $q = 0$ helyen van inflexiós pontja. A $C(q)$ függvény $q \geq 0$ esetén konvex, így értelmezési tartományának minden pontjában konvex. A függvény grafikonja:



j) Az inverz keresleti függvény a keresleti függvény inverze, így

$$f^{-1}(q) = 20 - q.$$

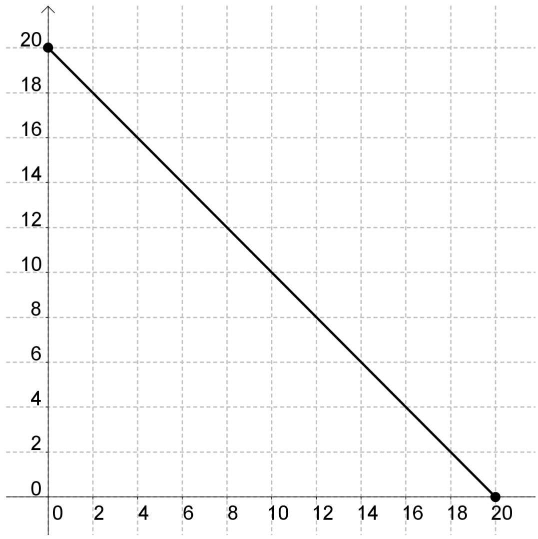
k) A bevételi függvény:

$$R(q) = q \cdot (20 - q) = 20q - q^2.$$

l) A nyereségfüggvény:

$$\begin{aligned}\Pi(q) = R(q) - C(q) &= 20q - q^2 - (q^3 + 4q + 10) = \\ &= 20q - q^2 - q^3 - 4q - 10 = -q^3 - q^2 + 16q - 10.\end{aligned}$$

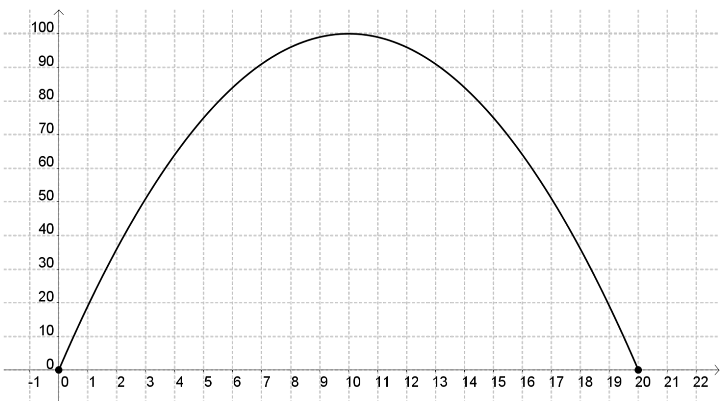
m) A keresleti függvény grafikonja:



n) A bevételi függvény grafikonjának felvázolásához első lépésben teljes négyzetté alakítunk:

$$R(q) = 20q - q^2 = -(q^2 - 20q) = -\big((q-10)^2 - 100\big) =$$
$$= -(q-10)^2 + 100.$$

Függvénytranszformációs lépések után a függvény garfikonja:



o) A bevételi függvény grafikonjából leolvasható, hogy $q = 10$ esetén lesz maximális a bevétel. Tehát $10\,000$ darab termék gyártása esetén érjük el a legnagyobb bevételt.

p) Mivel
$$R(10) = 100,$$
ezért a legnagyobb bevétel 100 000 000 forint.

q) A határköltség:
$$C'(q) = 3q^2 + 4.$$

r) A határbevétel:
$$R'(q) = -2q + 20.$$

s) A határprofit:
$$\Pi'(q) = -3q^2 - 2q + 16.$$

t) A $\Pi'(q) = 0$ egyenlet megoldását keressük:
$$-3q^2 - 2q + 16 = 0.$$
A másodfokú egyenlet megoldóképletét felhasználva azt kapjuk, hogy
$$q_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 192}}{-6} = \frac{2 \pm 14}{-6}.$$
így $q_1 = -\frac{8}{3}$, illetve $q = 2$. Figyelembe véve a profitfüggvény értelmezési tartományát azt kapjuk, hogy $q = 2$.
Mivel
$$\Pi''(q) = -6q - 2$$
és
$$\Pi''(2) = -6 \cdot 2 - 2 = -14 < 0,$$
így azt kapjuk, hogy 2 000 termék esetén lesz maximális a nyereség.

u) A maximális profit
$$\Pi(2) = -2^3 - 2^2 + 16 \cdot 2 - 10 = -8 - 4 + 32 - 10 = 12.$$
Tehát a maximális nyereség 12 000 000 forint.

v) Ha $q = 2$, akkor az inverz keresleti függvény
$$f^{-1}(2) = 20 - 2 = 18,$$
így nyereségmaximum esetetén a piaci ár 18 000 forint.

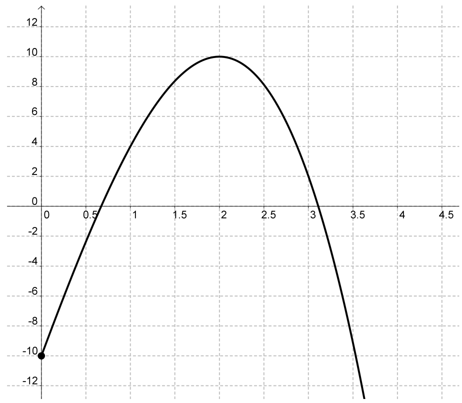
w) A nyereségfüggvény deriváltjának zérushelyei $q = -\frac{8}{3}$, illetve $q = 2$. Az derivált függvény előjelét táblázatban foglaljuk össze:

q	$]0;2[$	2	$]2;\infty[$
$\Pi'(q)$	$+$	0	$-$
$\Pi(q)$	$\nearrow$	lok. max.	$\searrow$
$f(x)$		12	

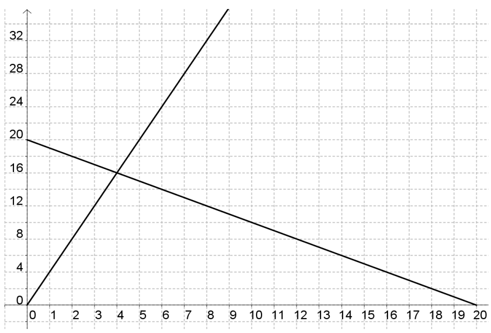
A profitfüggvény második deriváltja:

$$\Pi''(q) = -6q - 2,$$

amely minden $q > 0$ esetén negatív, így a proftfüggvény konkáv. A függvény grafikonja:



x) A keresleti és kínálati függvény grafikonjai, amit Marshall-keresztnek is neveznek:



y) Az egyensúlyi ár a keresleti és kínálati függvény metszéspontja, azaz a

$$20 - x = 4x$$

egyenlet megoldása, így $x = 4$. Tehát az egyensúlyi ár $4\,000$ forint.

z) Az egyensúlyi mennyiség:

$$S(4) = f(4) = 16,$$

tehát $16\,000$ darab.

α) Az elaszticitás függvény:

$$E(x) = \frac{x}{f(x)} \cdot f'(x) = \frac{x}{20 - x} \cdot (-1) = -\frac{x}{20 - x}.$$

Profitmaximum esetén az egységár $x = 18$, így

$$E(18) = -\frac{18}{20 - 18} = -9.$$

Mivel

$$|E(18)| = 9 > 1,$$

ezért a keresleti függvény rugalmas. A kapott eredmény azt jelenti, hogy ha az egységárat 1%-kal növeljük, akkor a kereslet 9%-kal csökken.

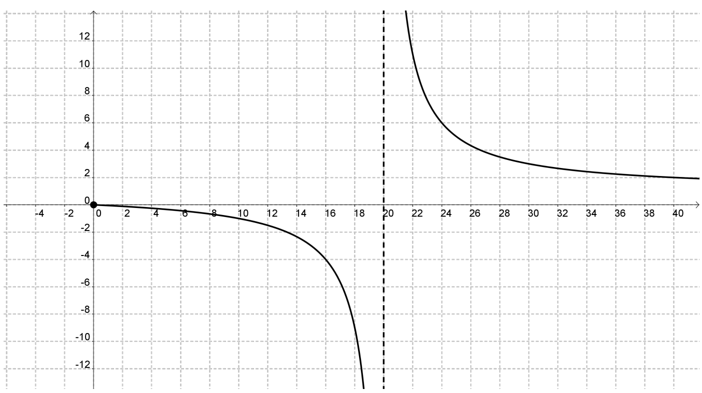
β) Az elaszticitás függvény:

$$E(x) = \frac{x}{x - 20}.$$

Átalakítva:

$$E(x) = \frac{x - 20 + 20}{x - 20} = 1 + \frac{20}{x - 20}.$$

A függvény grafikonja:



169. **Feladat.** Egy vállalat adott termék iránti keresleti függvénye:

$$f(x) = \frac{100}{x^2}.$$

A költségfüggvény:

$$C(q) = 2q + 10.$$

A költségnél a mennyiséget ezer darabban, a költséget millió forintban értjük. A kínálati függvény:

$$S(x) = \frac{x}{80}.$$

A termék x egységárát a keresleti és kínálati függvény esetében is ezer forintban értjük.

a) Mennyibe kerül ezer termék előállítása?
b) Mennyibe kerül kétezer termék előállítása?
c) Mennyibe kerül háromezer termék előállítása?
d) Számoljuk ki a fix költséget!
e) Adjuk meg a változó költséget!
f) Adjuk meg az átlagköltséget!
g) Számoljuk ki az átlagos fix költséget!
h) Adjuk meg az átlagos változó költséget!
i) Vázoljuk fel a költségfüggvény grafikonját!
j) Adjuk meg az inverz keresleti függvény hozzárendelési szabályát!
k) Adjuk meg a bevételi függvény hozzárendelési szabályát!
l) Adjuk meg a nyereségfüggvény hozzárendelési szabályát!
m) Ábrázoljuk a keresleti függvényt!
n) Ábrázoljuk a bevételi függvényt!
o) Milyen kibocsátás esetén lesz maximális a bevétel?
p) Mennyi a maximális bevétel?
q) Adjuk meg a határköltséget!
r) Adjuk meg a határbevételt!
s) Adjuk meg a határprofitot!
t) Adjuk meg a profitmaximumot biztosító kibocsátási szintet!
u) Adjuk meg a maximális profitot!
v) Profitmaximum esetén határozzuk meg a piaci árat!
w) Ábrázoljuk a profitfüggvényt!

x) Ábrázoljuk közös koordinátarendszerben a keresleti függvényt és a kínálati függvényt!

y) Adjuk meg az egyenesúlyi árat!

z) Adjuk meg az egyenesúlyi mennyiséget!

$\alpha)$ Határozzuk meg a keresleti függvény elaszticitását profitmaximum esetén!

$\beta))$ Rajzoljuk fel a keresleti függvény elaszticitás függvényét!

Megoldás:

a) Mivel
$$C(1) = 2 \cdot 1 + 10 = 12,$$
ezért ezer darab termék előállítása 12 000 000 forintba kerül.

b) Mivel
$$C(2) = 2 \cdot 2 + 10 = 14,$$
ezért kétezer darab termék előállítása 14 000 000 forintba kerül.

c) Mivel
$$C(3) = 2 \cdot 3 + 10 = 16,$$
ezért kétezer darab termék előállítása 16 000 000 forintba kerül.

d) A fix költség
$$FC = C(0) = 2 \cdot 0 + 10 = 10,$$
tehát 10 000 000 forint.

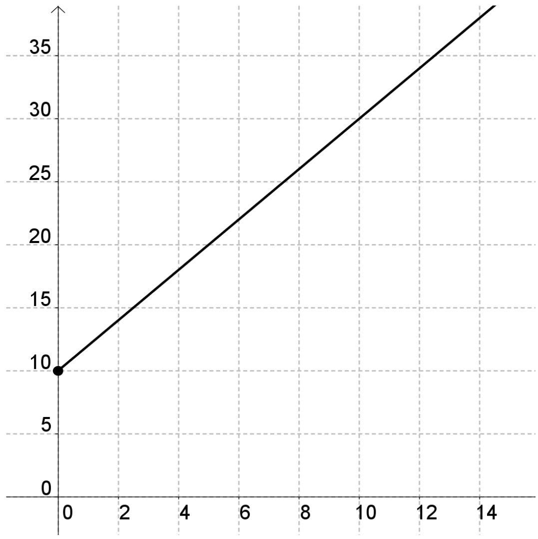
e) A változó költség:
$$VC(q) = 2q.$$

f) Az átlagköltség:
$$AC(q) = \frac{C(q)}{q} = \frac{2q+10}{q} = 2 + \frac{10}{q}.$$

g) Az átlagos fix költség:
$$AFC(q) = \frac{10}{q}.$$

h) Az átlagos változó költség:
$$AVC(q) = \frac{VC(q)}{q} = 2.$$

i) A költségfüggvény grafikonja:



j) Az inverz keresleti függvény a keresleti függvény inverze, így a

$$q = \frac{100}{x^2}$$

egyenletből kell az x-et kifejeznünk:

$$q \cdot x^2 = 100 \qquad \Rightarrow \qquad x^2 = \frac{100}{q},$$

így $x > 0$ és $q > 0$ miatt

$$f^{-1}(q) = \frac{10}{\sqrt{q}}.$$

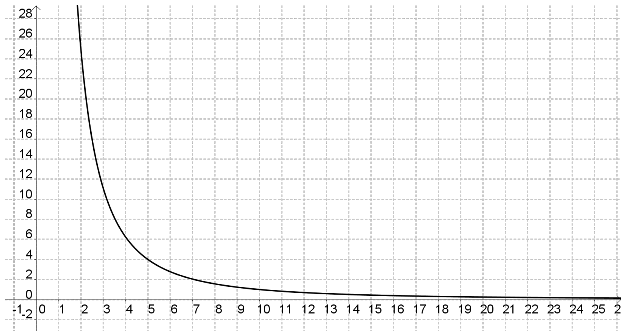
k) A bevételi függvény:

$$R(q) = q \cdot \frac{10}{\sqrt{q}} = 10 \cdot \sqrt{q}.$$

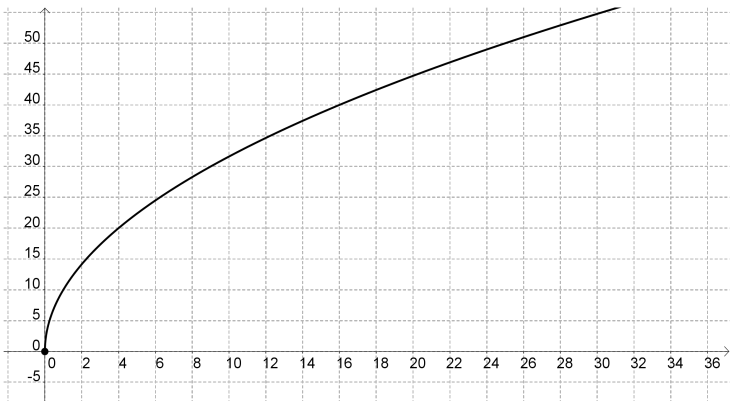
l) A nyereségfüggvény:

$$\Pi(q) = 10 \cdot \sqrt{q} - 2q - 10.$$

m) A keresleti függvény grafikonja:



n) A bevételi függvény garfikonja:



o) A bevételi függvény felülről nem korlátos, így nincs maximuma.

p) Nem létezik elérhető legnagyobb bevétel.

q) A határköltség:

$$C'(q) = 2.$$

r) A határbevétel:

$$R'(q) = 10 \cdot \frac{1}{2} \cdot q^{-\frac{1}{2}} = \frac{5}{\sqrt{q}}.$$

s) A határprofit:

$$\Pi'(q) = \frac{5}{\sqrt{q}} - 2.$$

t) A $\Pi'(q) = 0$ egyenlet megoldását keressük:

$$\frac{5}{\sqrt{q}} - 2 = 0.$$

Az egyenlet megoldásához a közös nevezővel szorzunk:

$$2 \cdot \sqrt{q} = 5,$$

majd az egyenlet mindkét oldalát négyetre emeljük:

$$4q = 25,$$

így $q = 6,25$. Mivel

$$\Pi''(q) = -\frac{5}{2} \cdot q^{-\frac{3}{2}} < 0,$$

ezért azt kapjuk, hogy 625 darab termék gyártása esetén lesz maximális a nyereség.

u) A maximális profit

$$\Pi(6,25) = 10 \cdot \sqrt{6,25} - 2 \cdot 6,25 - 10 = 2,5.$$

Tehát a maximális nyereség 2 500 000 forint.

v) Ha $q = 6,25$, akkor az inverz keresleti függvény

$$f^{-1}(6,25) = \frac{10}{\sqrt{6,25}} = \frac{10}{2,5} = 4,$$

így nyereségmaximum esetetén a piaci ár 4 000 forint.

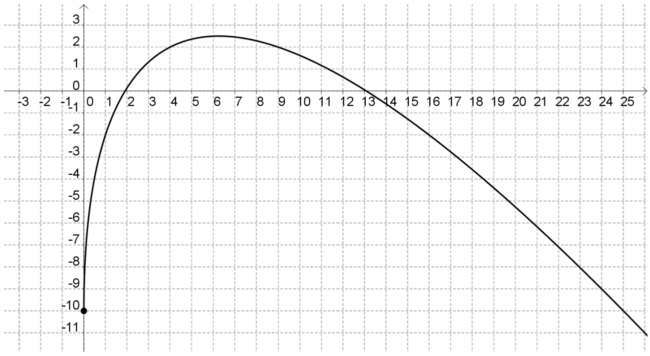
w) A nyereségfüggvény deriváltjának zérushelye $q = 6,25.$ Az derivált függvény előjelét táblázatban foglaljuk össze:

q	$]0;6,25[$	$6,25$	$]6,25;\infty[$
$\Pi'(q)$	$+$	0	$-$
$\Pi(q)$	$\nearrow$	lok. max.	$\searrow$
$f(x)$		12	

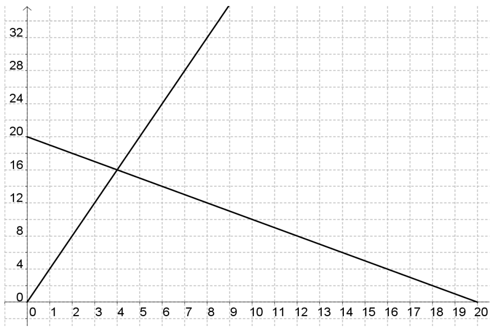
A profitfüggvény második deriváltja:

$$\Pi''(q) = -\frac{5}{2} \cdot q^{-\frac{3}{2}} < 0,$$

amely minden $q > 0$ esetén negatív, így a proftfüggvény konkáv. A függvény grafikonja:



x) A keresleti és kínálati függvény grafikonjai, amit Marshall-keresztnek is neveznek:



y) Az egyensúlyi ár a keresleti és kínálati függvény metszéspontja, azaz a
$$\frac{100}{x^2} = \frac{80}{x}$$
egyenlet megoldása. A közös nevezővel szorozva
$$8\,000 = x^3$$
adódik, amiből azt kapjuk, hogy $x = 20$. Tehát az egyensúlyi ár $20\,000$ forint.

z) Az egyensúlyi mennyiség:
$$S(20) = f(20) = \frac{20}{80} = 0,25,$$
tehát 250 darab.

α) Mivel
$$f'(x) = -200x^{-3} = -\frac{200}{x^3},$$

ezért az elaszticitás függvény:

$$E(x) = \frac{x}{f(x)} \cdot f'(x) = \frac{x}{\frac{100}{x^2}} \cdot \left(-\frac{200}{x^3}\right) =$$
$$= \frac{x \cdot x^2}{100} \cdot \frac{-100}{x^3} = -2.$$

Minden pontban, így a profitmaximum esetén is az elaszticitás -2.
Mivel

$$|E(x)| = 2 > 1,$$

ezért a keresleti függvény rugalmas. A kapott eredmény azt jelenti, hogy ha az egységárat 1%-kal növeljük, akkor a kereslet 2%-kal csökken.

$\beta)$ Az elaszticitás függvény a konstans -2 függvény.

3. fejezet

Az integrálszámítás gazdasági alkalmazásokkal

3.1. Primitív függvény, határozatlan integrál fogalma

Elméleti összefoglaló

Ebben a fejezetben, ha mást nem mondunk, akkor I a valós számok halmazának egy pozitív hosszúságú részintervallumát jelöli.

3.1.1. **Definíció.** Ha az $F\colon I \to \mathbb{R}$ függvény differenciálható és $F'(x) = f(x)$ minden $x \in I$ esetén, akkor azt mondjuk, hogy F az f függvény *primitív függvény*e.

3.1.2. **Megjegyzés.** Ha $F(x)$ primitív függvénye az $f(x)$ függvénynek, akkor minden $c \in \mathbb{R}$ esetén $F(x) + c$ is primitív függvénye az $f(x)$ függvénynek. Tehát, ha egy függvénynek van primitív függvénye, akkor végtelen sok van, melyek csak egy (additív) konstansban térnek el egymástól.

3.1.3. **Definíció.** Az f függvény összes primitív függvényének halmazát az f függvény *határozatlan integrálja*nak nevezzük. Jele: $\int f(x)\,\mathrm{d}x$.

3.1.4. **Tétel.** Ha $f(x)$ és $g(x)$ olyan függvények, amelyeknek létezik primitív függvénye, akkor

$$\int \big(f(x) + g(x)\big)\,\mathrm{d}x = \int f(x)\,\mathrm{d}x + \int g(x)\,\mathrm{d}x.$$

3.1.5. **Tétel.** Ha $f(x)$ olyan függvény, amelynek létezik primitív függvénye és $k \in \mathbb{R}$, akkor

$$\int k \cdot f(x)\,\mathrm{d}x = k \cdot \int f(x)\,\mathrm{d}x.$$

3.1.6. **Tétel.** Az $f(x) = x^n$ függvény határozatlan integrálja $n \neq -1$ esetén

$$\int x^n\,\mathrm{d}x = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c.$$

3.1.7. **Tétel.** a) $\displaystyle\int k\,\mathrm{d}x = k \cdot x + c$;

b) $\displaystyle\int \cos x\,\mathrm{d}x = \sin x + c$;

c) $\displaystyle\int \sin x\,\mathrm{d}x = -\cos x + c$;

d) $\displaystyle\int \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x + c$;

e) $\displaystyle\int \mathrm{a}^x \,\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{a}^x}{\ln a} + c;$

f) $\displaystyle\int \frac{1}{x} \,\mathrm{d}x = \ln |x| + c;$

g) $\displaystyle\int \frac{1}{x \cdot \ln a} \,\mathrm{d}x = \log_a |x| + c;$

h) $\displaystyle\int \frac{1}{\cos^2 x} \,\mathrm{d}x = \operatorname{tg} x + c;$

i) $\displaystyle\int -\frac{1}{\sin^2 x} \,\mathrm{d}x = \operatorname{ctg} x + c;$

Kidolgozott feladatok

170. **Feladat.** Határozzuk meg az

$$\int 2x + 2\,\mathrm{d}x$$

határozatlan integrált!

Megoldás:

A határozatlan integrál tulajdonságai alapján:

$$\int 2x + 2\,\mathrm{d}x = \int 2x\,\mathrm{d}x + \int 2\,\mathrm{d}x = x^2 + 2x + c.$$

171. **Feladat.** Határozzuk meg az

$$\int 6x^2 + 4x - 2\,\mathrm{d}x$$

határozatlan integrált!

Megoldás:

A határozatlan integrál tulajdonságai alapján:

$$\int 6x^2 + 4x - 2\,\mathrm{d}x = \int 6x^2\,\mathrm{d}x + \int 4x\,\mathrm{d}x - \int 2\,\mathrm{d}x = \\ = 2x^3 + 2x^2 - 2x + c.$$

172. **Feladat.** Határozzuk meg az

$$f(x) = \frac{2}{x^2} + \frac{6}{x^3}$$

függvény azon $F(x)$ primitív függvényét, melyre teljesül, hogy

$$F(1) = 2.$$

Megoldás:

Az algebrai átalakítások és a határozatlan integrál tulajdonságai alapján:

$$F(x) = \int \frac{2}{x^2} + \frac{6}{x^3}\,\mathrm{d}x = \int \left(2x^{-2} + 6x^{-3}\right)\mathrm{d}x = \int 2x^{-2}\,\mathrm{d}x + 6x^{-3}\,\mathrm{d}x = \\ = 2\cdot\frac{x^{-1}}{-1} + 6\cdot\frac{x^{-2}}{-2} + c = -\frac{2}{x} - \frac{3}{x^2} + c.$$

Mivel $F(1) = 2$, ezért

$$-\frac{2}{1} - \frac{3}{1} + c = 2 \qquad \Rightarrow \qquad x = 7,$$

így a keresett függvény:

$$F(x) = -\frac{2}{x} - \frac{2}{x^2} + 7.$$

173. **Feladat.** Határozzuk meg az

$$\int \frac{x^2 + x}{\sqrt{x}} \, \mathrm{d}x$$

határozatlan integrált!

<u>**Megoldás**</u>:

Felhasználva, hogy

$$\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}},$$

továbbá a határozatlan integrál tulajdonságait, azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2 + x}{\sqrt{x}} \, \mathrm{d}x &= \int \frac{x^2 + x}{x^{\frac{1}{2}}} \, \mathrm{d}x = \int \frac{x^2}{x^{\frac{1}{2}}} + \frac{x}{x^{\frac{1}{2}}} \, \mathrm{d}x = \\ &= \int x^{\frac{3}{2}} + x^{\frac{1}{2}} \, \mathrm{d}x = \frac{2}{5} \cdot x^{\frac{5}{2}} + \frac{2}{3} \cdot x^{\frac{3}{2}} + c = \\ &= \frac{2}{5} \cdot \sqrt{x^5} + \frac{2}{3} \cdot \sqrt{x^3} + c.\end{aligned}$$

174. **Feladat.** Határozzuk meg az

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} + \frac{2}{\sin^2 x} \, \mathrm{d}x$$

határozatlan integrált!

<u>**Megoldás**</u>:

A határozatlan integrál tulajdonságai alapján:

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\cos^2 x} + \frac{2}{\sin^2 x} \, \mathrm{d}x &= \int \frac{1}{\cos^2 x} \, \mathrm{d}x + \int \frac{2}{\sin^2 x} \, \mathrm{d}x = \\ &= \operatorname{tg} x - 2 \cdot \operatorname{ctg} x + c.\end{aligned}$$

175. **Feladat.** Határozzuk meg az

$$\int \mathrm{tg}^2\, x \,\mathrm{d}x$$

határozatlan integrált!

<u>**Megoldás**</u>:

Felhasználva, hogy

$$\mathrm{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x},$$

továbbá azt, hogy

$$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$$

azt kapjuk, hogy

$$\int \mathrm{tg}^2\, x \,\mathrm{d}x = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x =$$
$$= \int \frac{1}{\cos^2 x} - 1 \,\mathrm{d}x = \mathrm{tg}\, x - x + c.$$

176. **Feladat.** Határozzuk meg az

$$\int \mathrm{ctg}^2\, x \,\mathrm{d}x$$

határozatlan integrált!

<u>**Megoldás**</u>:

Felhasználva, hogy

$$\mathrm{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x},$$

továbbá azt, hogy

$$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$$

azt kapjuk, hogy

$$\int \mathrm{ctg}^2\, x \,\mathrm{d}x = \int \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1-\sin^2 x}{\sin^2 x}\,\mathrm{d}x =$$
$$= \int \frac{1}{\sin^2 x} - 1 \,\mathrm{d}x = -\mathrm{ctg}\, x - x + c.$$

177. **Feladat.** Határozzuk meg az

$$\int \frac{\cos 2x}{\sin x + \cos x}\,\mathrm{d}x$$

határozatlan integrált!

Megoldás:

Felhasználva, hogy

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x,$$

továbbá a határozatlan integrál tulajdonságai alapján azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}\int \frac{\cos 2x}{\sin x + \cos x}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\sin x + \cos x}\,\mathrm{d}x = \\ &= \int \frac{(\cos x - \sin x)\cdot(\cos x + \sin x)}{\sin x + \cos x}\,\mathrm{d}x = \\ &= \int \cos x - \sin x\,\mathrm{d}x = \sin x + \cos x + c.\end{aligned}$$

178. **Feladat.** Tekintsük az

$$f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$$

függvényt!

a) Adjuk meg az $f(x)$ azon $F(x)$ primitív függvényét, amelyre $F(2) = 10$ teljesül!

b) Ábrázoljuk az előbbi $F(x)$ függvényt!

Megoldás:

a) Mivel

$$x^2 - 4 = (x - 2)\cdot(x + 2),$$

ezért

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2 - 4}{x - 2}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{(x - 2)\cdot(x + 2)}{x - 2}\,\mathrm{d}x = \int x + 2\,\mathrm{d}x = \\ &= \int x\,\mathrm{dx} + \int 2\,\mathrm{dx} = \frac{x^2}{2} + 2x + c.\end{aligned}$$

Mivel

$$F(2) = 10,$$

ezért

$$10 = \frac{2^2}{2} + 2\cdot 2 + c \qquad \Rightarrow \qquad c = 4,$$

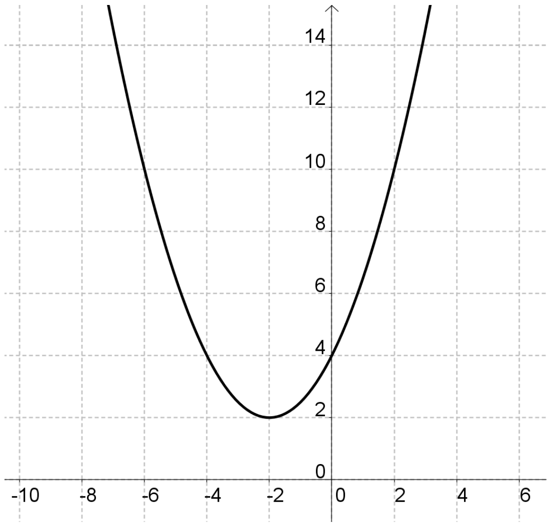
így a keresett $F(x)$ függvény:

$$F(x) = \frac{x^2}{2} + 2x + 4.$$

b) Mivel

$$F(x) = \frac{1}{2} \cdot \left(x^2 + 4x + 8\right) = \frac{1}{2} \cdot \left((x+2)^2 - 4 + 8\right) =$$
$$= \frac{1}{2} \cdot (x+2)^2 + 2,$$

ezért függvénytranszformációs lépésekkel is ábrázolható a függvény:



179. **Feladat.** Határozzuk meg az

$$f(x) = \frac{3}{x^2} + \frac{3}{x}$$

függvény azon $F(x)$ primitív függvényét, melyre teljesül, hogy

$$F(1) = 3.$$

<u>**Megoldás**</u>:

Az algebrai átalakítások és a határozatlan integrál tulajdonságai alapján:

$$F(x) = \int \frac{3}{x^2} + \frac{3}{x} \, \mathrm{d}x = \int \left(3x^{-2} + \frac{3}{x}\right) \mathrm{d}x =$$
$$= -3 \cdot \frac{x^{-1}}{-1} + 3 \cdot \ln|x| + c = -\frac{3}{x} + 3 \cdot \ln|x| + c.$$

Mivel $F(1) = 3$, ezért

$$-\frac{3}{1} + 3 \cdot \ln|1| + c = 0 \qquad \Rightarrow \qquad c = 3,$$

így a keresett függvény:

$$F(x) = -\frac{3}{x} + 3 \cdot \ln|x| + 3.$$

180. **Feladat.** Határozzuk meg az

$$\int 3^x + 5^x \,\mathrm{d}x$$

határozatlan integrált!

Megoldás:

Felhasználva, hogy összeget tagonként integrálhatunk azt kapjuk, hogy

$$\int 3^x + 5^x \,\mathrm{d}x = \int 3^x \,\mathrm{d}x + \int 5^x \,\mathrm{d}x = \frac{3^x}{\ln 3} + \frac{5^x}{\ln 5} + c.$$

3.2. Helyettesítéses és parciális integálás

Elméleti összefoglaló

Ebben a fejezetben, ha mást nem mondunk, akkor I és J a valós számok halmazának pozitív hosszúságú részintervallumait jelölik. Továbbá c tetszőleges valós számot jelöl.

3.2.1. **Tétel.** (Parciális integrálás.)
Ha az $f\colon I \to \mathbb{R}$ és $f\colon I \to \mathbb{R}$ függvények differenciálhatóak, továbbá létezik az

$$\int f(x) \cdot g'(x)\,\mathrm{d}x$$

integrál, akkor létezik az

$$\int f'(x) \cdot g(x)\,\mathrm{d}x$$

is és

$$\int f'(x) \cdot g(x)\,\mathrm{d}x = f(x) \cdot g(x) - \int f(x) \cdot g'(x)\,\mathrm{d}x$$

3.2.2. **Megjegyzés.** Legyenek α, β valós számok, $P(x)$ egy polinom.
Parciális integrálással elvégezhetőek az alábbi integrálások:

a) $\displaystyle\int P(x) \cdot \sin(\alpha x + \beta)\,\mathrm{d}x$;

b) $\displaystyle\int P(x) \cdot \cos(\alpha x + \beta)\,\mathrm{d}x$;

c) $\displaystyle\int P(x) \cdot \mathrm{e}^{\alpha x + \beta}\,\mathrm{d}x$;

d) $\displaystyle\int P(x) \cdot \mathrm{a}^{\alpha x + \beta}\,\mathrm{d}x$.

Ezekben az esetekben a parciális integrálás képletében a $g(x) = P(x)$ és
$f'(x) = \sin(\alpha x + \beta)$ vagy
$f'(x) = \cos(\alpha x + \beta)$ vagy
$f'(x) = \mathrm{e}^{\alpha x + \beta}$ vagy
$f'(x) = \mathrm{a}^{\alpha x + \beta}$
választással kell élnünk.

3.2.3. **Megjegyzés.** Legyen $a > 0$, $a \neq 1$ valós szám, $P(x)$ egy polinom. Parciális integrálással elvégezhetőek az alábbi integrálások:

$$\int P(x) \cdot \log_a x \,\mathrm{d}x$$

Ezekben az esetekben a parciális integrálás képletében az $f'(x) = P(x)$ és $g(x) = \log_a x$ választással kell élnünk.

3.2.4. **Tétel.** (Helyettesítéses integrál.)
Ha a $g\colon I \to J$ függvény differenciálható és létezik az $f\colon J \to \mathbb{R}$ függvény primitív függvénye, akkor létezik az

$$\int \big(f \circ g(x)\big) \cdot g'(x) \,\mathrm{d}x$$

integrál és

$$\int \big(f \circ g(x)\big) \cdot g'(x) \,\mathrm{d}x = \int f \circ g(x) \,\mathrm{d}x.$$

3.2.5. **Megjegyzés.** Az előbbi tételben bevezetve az

$$F(x) = \int f(x) \,\mathrm{d}x$$

jelölést azt kapjuk, hogy

$$\int f\big(g(x)\big) \cdot g'(x) \,\mathrm{d}x = F\big(g(x)\big).$$

Kidolgozott feladatok

181. **Feladat.** Határozzuk meg az

$$\int x \cdot \mathrm{e}^x \, \mathrm{d}x$$

határozatlan integrált!

Megoldás:

A parciális integrálás képletében az $f'(x) = \mathrm{e}^x$ és $g(x) = x$ jelöléssel élünk. Ekkor az $f'(x)$ függvény egy primitív függvénye:

$$f(x) = \int \mathrm{e}^x \, \mathrm{d}x = \mathrm{e}^x.$$

Továbbá

$$g'(x) = 1.$$

A parciális integrálás tételét alkalmazva azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}\int x \cdot \mathrm{e}^x \, \mathrm{d}x &= x \cdot \mathrm{e}^x - \int \mathrm{e}^x \, \mathrm{d}x = \\ &= x \cdot \mathrm{e}^x - \mathrm{e}^x + c = \mathrm{e}^x \cdot (x-1) + c,\end{aligned}$$

ahol $c \in \mathbb{R}$ tetszőleges valós szám.

182. **Feladat.** Határozzuk meg az

$$\int x \cdot \cos x \, \mathrm{d}x$$

határozatlan integrált!

Megoldás:

A parciális integrálás képletében az $f'(x) = \cos x$ és $g(x) = x$ jelöléssel élünk. Ekkor az $f'(x)$ függvény egy primitív függvénye:

$$f(x) = \int \cos x \, \mathrm{d}x = \sin x.$$

Továbbá

$$g'(x) = 1.$$

A parciális integrálás tételét alkalmazva azt kapjuk, hogy

$$\int x \cdot \cos x \, \mathrm{d}x = x \cdot \sin x - \int \sin x \, \mathrm{d}x = \\ = x \cdot \sin x + \cos x + c.$$

183. **Feladat.** Határozzuk meg az

$$\int x \cdot \sin x \, \mathrm{d}x$$

határozatlan integrált!

Megoldás:

A parciális integrálás képletében az $f'(x) = \sin x$ és $g(x) = x$ jelöléssel élünk. Ekkor az $f'(x)$ függvény egy primitív függvénye:

$$f(x) = \int \sin x \, \mathrm{d}x = -\cos x.$$

Továbbá

$$g'(x) = 1.$$

A parciális integrálás tételét alkalmazva azt kapjuk, hogy

$$\int x \cdot \sin x \, \mathrm{d}x = -x \cdot \cos x + \int \cos x \, \mathrm{d}x = \\ = -x \cdot \cos x + \sin x + c.$$

184. **Feladat.** Határozzuk meg az

$$\int (8x - 2) \cdot \mathrm{e}^x \, \mathrm{d}x$$

határozatlan integrált!

Megoldás:

A parciális integrálás képletében az $f'(x) = \mathrm{e}^x$ és $g(x) = 8x - 2$ jelöléssel élünk. Ekkor az $f'(x)$ függvény egy primitív függvénye:

$$f(x) = \int \mathrm{e}^x \, \mathrm{d}x = \mathrm{e}^x.$$

Továbbá

$$g'(x) = 8.$$

A parciális integrálás tételét alkalmazva azt kapjuk, hogy

$$\int (8x-2)\cdot \mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x = (8x-2)\cdot \mathrm{e}^x - \int 8\cdot \mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x =$$
$$= (8x-2)\cdot \mathrm{e}^x - 8\cdot \mathrm{e}^x + c = \mathrm{e}^x \cdot (8x-10) + c.$$

185. **Feladat.** Határozzuk meg az

$$\int (2x+3)\cdot \cos x \,\mathrm{d}x$$

határozatlan integrált!

<u>**Megoldás**</u>:

A parciális integrálás képletében az $f'(x) = \cos x$ és $g(x) = (2x+3)$ jelöléssel élünk. Ekkor az $f'(x)$ függvény egy primitív függvénye:

$$f(x) = \int \cos x \,\mathrm{d}x = \sin x.$$

Továbbá

$$g'(x) = 2.$$

A parciális integrálás tételét alkalmazva azt kapjuk, hogy

$$\int (2x+3)\cdot \cos x \,\mathrm{d}x = (2x+3)\cdot \sin x - \int 2\cdot \sin x \,\mathrm{d}x =$$
$$= (2x+3)\cdot \sin x + 2\cdot \cos x + c.$$

186. **Feladat.** Határozzuk meg az

$$\int 4x\cdot \sin x \,\mathrm{d}x$$

határozatlan integrált!

<u>**Megoldás**</u>:

A parciális integrálás képletében az $f'(x) = \sin x$ és $g(x) = 4x$ jelöléssel élünk. Ekkor az $f'(x)$ függvény egy primitív függvénye:

$$f(x) = \int \sin x \,\mathrm{d}x = -\cos x.$$

Továbbá

$$g'(x) = 4.$$

A parciális integrálás tételét alkalmazva azt kapjuk, hogy

$$\int 4x \cdot \sin x \,\mathrm{d}x = -4x \cdot \cos x + \int 4 \cdot \cos x \,\mathrm{d}x =$$
$$= -4x \cdot \cos x + 4 \cdot \sin x + c.$$

187. **Feladat.** Határozzuk meg az

$$\int (x^2 + 7x - 1) \cdot \cos x \,\mathrm{d}x$$

határozatlan integrált!

<u>**Megoldás**</u>:

Mivel $x^2 + 7x - 1$ egy másodfokú polinom, ezért a parciális integrálás tételét kétszer kell alkalmaznunk.

A parciális integrálás képletében az

$$f_1'(x) = \cos x$$

és

$$g_1(x) = x^2 + 7x - 1$$

jelöléssel élünk. Ekkor az $f_1'(x)$ függvény egy primitív függvénye:

$$f_1(x) = \int \cos x \,\mathrm{d}x = \sin x.$$

Továbbá

$$g_1'(x) = 2x + 7.$$

A parciális integrálás tételét alkalmazva

$$\int f_1'(x) \cdot g_1(x) \,\mathrm{d}x = f_1(x) \cdot g_1(x) - \int f_1(x) \cdot g_1'(x) \,\mathrm{d}x$$

adódik, amiből behelyettesítés után azt kapjuk, hogy

$$\int (x^2 + 7x - 1) \cdot \cos x \,\mathrm{d}x = (x^2 + 7x - 1) \cdot \sin x - \int (2x + 7) \cdot \sin x \,\mathrm{d}x.$$

A kapott

$$\int (2x + 7) \cdot \sin x \,\mathrm{d}x$$

integál kiszámolása szintén parciális integrálással történik. Legyen

$$f_2'(x) = \sin x$$

és

$$g_2(x) = 2x + 7.$$

Ismételten alkalmazva a parciális integrálás képletét

$$\int f_2'(x) \cdot g_2(x)\,\mathrm{d}x = f_2(x) \cdot g_2(x) - \int f_2(x) \cdot g_2'(x)\,\mathrm{d}x$$

adódik, amiből behelyettesítés után azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}\int (2x+7) \cdot \sin x\,\mathrm{d}x &= -(2x+7) \cdot \cos x + \int 2 \cdot \cos x\,\mathrm{d}x = \\ &= -(2x+7) \cdot \cos x + 2 \cdot \sin x.\end{aligned}$$

Tehát

$$\begin{aligned}&\int (x^2+7x-1) \cdot \cos x\,\mathrm{d}x = \\ &(x^2+7x-1) \cdot \sin x - \int (2x+7) \cdot \sin x\,\mathrm{d}x = \\ &= (x^2+7x-1) \cdot \sin x - \big(-(2x+7) \cdot \cos x + 2 \cdot \sin x\big) = \\ &= (x^2+7x-1) \cdot \sin x + (2x+7) \cdot \cos x - 2 \cdot \sin x.\end{aligned}$$

188. **Feladat.** Határozzuk meg az

$$\int x \cdot \ln x\,\mathrm{d}x$$

határozatlan integrált!

Megoldás:

A parciális integrálás képletében az $f'(x) = x$ és $g(x) = \ln x$ jelöléssel élünk. Ekkor az $f'(x)$ függvény egy primitív függvénye:

$$f(x) = \int x\,\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2}.$$

Továbbá

$$g'(x) = \frac{1}{x}.$$

A parciális integrálás tételét alkalmazva azt kapjuk, hogy

$$\int x \cdot \ln x\,\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2} \cdot \ln x - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x.$$

Elvégezve az egyszerűsítést, majd felhasználva, hogy

$$\int x\,\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2} + c,$$

azt kapjuk, hogy

$$\frac{x^2}{2} \cdot \ln x - \int \frac{x}{2}\,\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2} \cdot \ln x - \frac{x^2}{4} + c.$$

189. **Feladat.** Határozzuk meg az

$$\int \ln x\,\mathrm{d}x$$

határozatlan integrált!

Megoldás:

A parciális integrálás képletében az $f'(x) = 1$ és $g(x) = \ln x$ jelöléssel élünk. Ekkor az $f'(x)$ függvény egy primitív függvénye:

$$f(x) = \int 1\,\mathrm{d}x = x.$$

Továbbá

$$g'(x) = \frac{1}{x}.$$

A parciális integrálás tételét alkalmazva azt kapjuk, hogy

$$\int \ln x\,\mathrm{d}x = x \cdot \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = x \cdot \ln x - x + c.$$

190. **Feladat.** Határozzuk meg az

$$\int \sin(2x+1)\,\mathrm{d}x$$

határozatlan integrált!

Megoldás:

Bevezetve a

$$2x + 1 = t$$

helyettesítést, amiből

$$x = \frac{t-1}{2},\ \text{továbbá}\ \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \left(\frac{t-1}{2}\right)' = \frac{1}{2}$$

adódik, a helyettesítéses integrálás tételét alkalmazva azt kapjuk, hogy

$$\int \sin(2x+1)\,\mathrm{d}x = \int \sin t \cdot \frac{1}{2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2} \cdot \int \sin t\,\mathrm{d}t =$$

$$= -\frac{1}{2} \cdot \cos t\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{2} \cdot \cos(2x+1) + c.$$

191. **Feladat.** Határozzuk meg az

$$\int \cos(5x-2)\,\mathrm{d}x$$

határozatlan integrált!

<u>**Megoldás**</u>:

Bevezetve a

$$5x-2=t$$

helyettesítést, amiből

$$x=\frac{t+2}{5},\ \text{továbbá}\ \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\left(\frac{t+2}{5}\right)'=\frac{1}{5}$$

adódik, a helyettesítéses integrálás tételét alkalmazva azt kapjuk, hogy

$$\int \cos(5x-2)\,\mathrm{d}x=\int \cos t\cdot\frac{5}{2}\,\mathrm{d}t=\frac{5}{2}\cdot\int \cos t\,\mathrm{d}t=$$
$$=\frac{5}{2}\cdot\sin t\,\mathrm{d}t=\frac{5}{2}\cdot\sin(5x-2)+c.$$

192. **Feladat.** Határozzuk meg az

$$\int \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$$

határozatlan integrált!

<u>**Megoldás**</u>:

Bevezetve a $\sqrt{x}=t$ helyettesítést, amiből

$$x=t^2,\ \text{továbbá}\ \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=(t^2)'=2t,$$

az integrál az alábbi módon írható át:

$$\int \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x=\int \frac{\sin t}{t}\cdot 2t\,\mathrm{d}t=2\cdot\int \sin t\,\mathrm{d}t=$$
$$=-2\cdot\cos t+c.$$

Visszahelyettesítve t helyére $\sqrt{x}$-et azt kapjuk, hogy a keresett integrál

$$\int \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x=-2\cdot\cos\sqrt{x}+c.$$

193. **Feladat.** Határozzuk meg az

$$\int \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$$

határozatlan integrált!

Megoldás:

Bevezetve a $\sqrt{x} = t$ helyettesítést, amiből

$$x = t^2, \text{ továbbá } \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = (t^2)' = 2t,$$

az integrál az alábbi módon írható át:

$$\int \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\cos t}{t} \cdot 2t\,\mathrm{d}t = 2 \cdot \int \cos t\,\mathrm{d}t = \\ = 2 \cdot \sin t + c.$$

Visszahelyettesítve t helyére $\sqrt{x}$-et azt kapjuk, hogy a keresett integrál

$$\int \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = 2 \cdot \sin\sqrt{x} + c.$$

3.3. Primitív függvények gazdasági alkalmazásai

Elméleti összefoglaló.

3.3.1. **Tétel.** Amennyiben adott az $MC(q)$ határköltség függvény, és az FC fixköltség, akkor a $C(q)$ költségfüggvény az $MC(q)$ azon primitív függvénye, amelyre $C(0) = FC$ teljesül.

3.3.2. **Tétel.** Amennyiben adott az $MR(q)$ határbevételi függvény, akkor az $R(q)$ bevételi függvény az $MR(q)$ azon primitív függvénye, amelyre $R(0) = 0$ teljesül, hiszen természetes feltételezés az, hogy ha $q = 0$, azaz nem termelünk, akkor $R(0) = 0$, tehát a bevétel is 0.

Kidolgozott feladatok.

194. **Feladat.** Egy vállalat adott termékéhez tartozó határbevételi függvénye:

$$MR(q) = 2\,000 - 20q - 3q^2.$$

A termelt mennyiséget darabban, a bevételt ezer forintban értjük.

a) Adjuk meg a bevételi függvényt!

b) Határozzuk meg az inverz keresleti függvényt!

c) Adjuk meg a keresleti függvényt!

d) Ábrázoljuk a keresleti függvényt!

<u>**Megoldás**</u>:

a) A határbevételi függvény primitív azon $R(q)$ primitív függvényét keressük, amelyre $R(0) = 0$, hiszen ha 0 darab terméket termelünk, akkor a bevételünk is 0. Egyrészt

$$\begin{aligned} R(q) &= \int 2\,000 - 20q - 3q^2 \,\mathrm{d}q = \\ &= \int 2\,000 \,\mathrm{d}q - \int 20q \,\mathrm{d}q - \int 3q^2 \,\mathrm{d}q = \\ &= 2\,000q - 10q^2 - q^3 + c. \end{aligned}$$

Másrészt $R(0) = 0$, így

$$2\,000 \cdot 0 - 10 \cdot 0^2 - 0^3 + c = 0,$$

amiből azt kapjuk, hogy $c = 0$. Tehát a bevételi függvény:

$$R(q) = -q^3 - 10q^2 + 2\,000q.$$

b) Amennyiben $f^{-1}(q)$ az inverz keresleti függvény, úgy

$$R(q) = q \cdot f^{-1}(q),$$

amiből azt kapjuk, hogy az inverz keresleti függvény:

$$f^{-1}(q) = \frac{R(q)}{q} = \frac{-q^3 - 10q^2 + 2\,000q}{q} = -q^2 - 10q + 2\,000.$$

c) A keresleti függvény az inverz keresleti függvény inverze.
Egy függvény és az inverze között fennáll az

$$f^{-1}\big(f(x)\big) = x$$

kapcsolat. Ezt felhasználva azt kapjuk, hogy

$$-\big(f(x)\big)^2 - 10 \cdot f(x) + 2\,000 = x.$$

Ezt az egyenletet kell megoldanunk $f(x)$-re. Az egyenletet nullára rendezve

$$-\big(f(x)\big)^2 - 10 \cdot f(x) + 2\,000 - x = 0 \qquad (x \geq 0)$$

adódik. A másodfokú egyenlet megoldóképletének alkalmazásával azt kapjuk, hogy

$$f(x)_{1,2} = \frac{10 \pm \sqrt{100 - 4 \cdot (-1) \cdot (2\,000 - x)}}{-2} = \frac{10 \pm \sqrt{8\,100 - 4x}}{-2}.$$

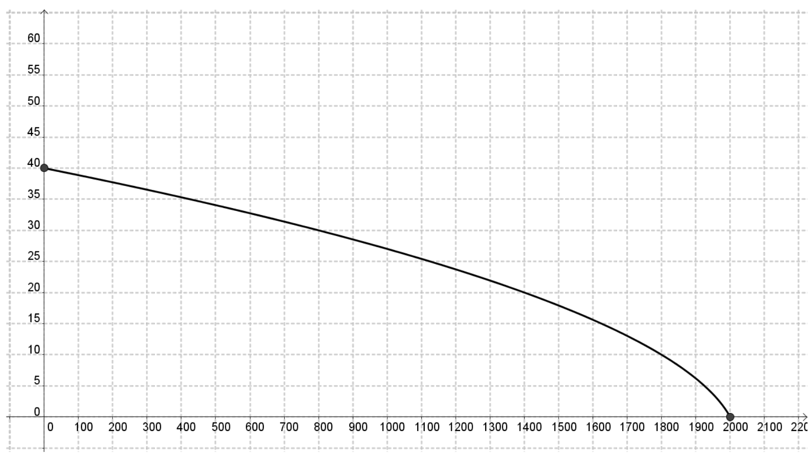
A gyökjel alól kiemelve, majd egyszerűsítve azt kapjuk, hogy

$$f(x)_{1,2} = \frac{10 \pm 2 \cdot \sqrt{2\,025 - x}}{-2} = -5 \pm \sqrt{2\,025 - x}.$$

Mivel $x \geq 0$ és $f(x) \geq 0$, ezért a keresleti függvény

$$f(x) = -5 + \sqrt{2\,025 - x}.$$

d) A keresleti függvény grafikonja:



195. **Feladat.** Egy vállalat adott termékhez tartozó határköltség függvénye:

$$MC(q) = 0,000001 \cdot (0,002q^2 - 25q + 0,2).$$

A fixköltség $FC = 4\,000$ dollár. Mennyibe kerül $10\,000$ darab termék előállítása?

<u>**Megoldás**</u>:

A költségfüggvény a határköltség függvény azon $C(q)$ primitív függvénye, amelyre $C(0) = FC$ teljesül. Felhasználva a határozatlan integrál tulajdonságait azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} C(q) &= \int 0,000001 \cdot (0,002q^2 - 25q + 0,2)\,\mathrm{d}q = \\ &= 0,000001 \cdot \int (0,002q^2 - 25q + 0,2)\,\mathrm{d}q = \\ &= 0,000001 \cdot \left(\int 0,002q^2\,\mathrm{d}q - \int 25q\,\mathrm{d}q + \int 0,2\,\mathrm{d}q \right) = \\ &= 0,000001 \cdot \left(0,002 \cdot \frac{q^3}{3} - 25 \cdot \frac{q^2}{2} + 0,2q \right) + c. \end{aligned}$$

Mivel $C(0) = 4\,000$, ezért azt kapjuk, hogy

$$c = 4\,000,$$

így a költségfüggvény:

$$C(q) = 0,000001 \cdot \left(0,002 \cdot \frac{q^3}{3} - 25 \cdot \frac{q^2}{2} + 0,2q \right) + 4\,000.$$

Ezt felhasználva azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} C(10\,000) = 0,000001 \cdot \left(0,002 \cdot \frac{10\,000^3}{3} - 25 \cdot \frac{10\,000^2}{2} + 0,2 \cdot 10\,000 \right) + \\ + 4\,000 = 5416,67\,\$. \end{aligned}$$

196. **Feladat.** Egy vállalat adott termékéhez tartozó határbevételi függvény:

$$MR(q) = 100 - 3q^2.$$

A termelt mennyiséget ezer darabban, a bevételt ezer forintban értjük.

a) Adjuk meg a bevételi függvényt!

b) Határozzuk meg az inverz keresleti függvényt!

c) Határozzuk meg a keresleti függvényt!

d) Adjuk meg a keresleti függvény elaszticitás függvényét!

e) Ha a termék 75 forintos egységárat 3%-kal növeljük, akkor hogyan változik a kereslet?

Megoldás:

a) A bevételi függvény a határbevételi függvény azon $R(q)$ primitív függvénye, amelyre $R(0) = 0$ teljesül. A határozatlan integrál tulajdonságai alapján:

$$R(q) = \int 100 - 3q^2 \,\mathrm{d}q = \int 100 \,\mathrm{d}q - \int 3q^2 \,\mathrm{d}q = \\ = 100q - q^3 + c.$$

Mivel $R(0) = 0$, ezért

$$-100 \cdot 0 - 0^3 + c = 0 \qquad \Rightarrow \qquad c = 0,$$

ezért a bevételi függvény:

$$R(q) = 100q - q^3.$$

b) Amennyiben $f^{-1}(q)$ az inverz keresleti függvény, úgy

$$R(q) = q \cdot f^{-1}(q),$$

amiből azt kapjuk, hogy az inverz keresleti függvény:

$$f^{-1}(q) = \frac{R(q)}{q} = \frac{-q^3 + 100q}{q} = -q^2 + 100.$$

c) A keresleti függvény az inverz keresleti függvény inverze.
Egy függvény és az inverze között fennáll az

$$f^{-1}\big(f(x)\big) = x$$

kapcsolat. Ezt felhasználva azt kapjuk, hogy

$$-\big(f(x)\big)^2 + 100 = x.$$

Ebből $x \geq 0$ és $f(x) \geq 0$ miatt azt kapjuk, hogy a keresleti függvény

$$f(x) = \sqrt{100 - x}.$$

d) Mivel

$$f'(x) = \frac{-1}{2 \cdot \sqrt{100 - x}},$$

ezért az elaszticitás függvény:

$$E(x) = \frac{x}{f(x)} \cdot f'(x) = \frac{x}{\sqrt{100 - x}} \cdot \frac{-1}{2 \cdot \sqrt{100 - x}}.$$

Elvégezve az algebrai átalakításokat azt kapjuk, hogy

$$E(x) = \frac{-x}{200 - 2x}.$$

e) Ha $x = 75$, akkor

$$E(75) = \frac{-75}{200 - 2 \cdot 75} = -1,5.$$

Tehát ha a termék 75 forintos egységárat 3%-kal növeljük, akkor a kereslet $3 \cdot 1,5 = 4,5\%$-kal csökken.

197. **Feladat.** Egy vállalat adott termékhez tartozó határköltség függvénye:

$$MC(q) = 0,003q^2 - 0,4q + 40.$$

A fixköltség $FC = 5\,000$ dollár. Adjuk meg az átlagköltséget $q = 100$ esetén!

Megoldás:

A költségfüggvény a határköltség függvény azon $C(q)$ primitív függvénye, amelyre $C(0) = FC$ teljesül. Felhasználva a határozatlan integrál tulajdonságait azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} C(q) &= \int 0,003q^2 - 0,4q + 40 \,\mathrm{d}q = \\ &= \int 0,003q^2 \,\mathrm{d}q - \int 0,4q \,\mathrm{d}q + \int 40 \,\mathrm{d}q = \\ &= 0,001q^3 - 0,2q^2 + 40q + c. \end{aligned}$$

Mivel $C(0) = 5\,000$, ezért

$$c = 5\,000,$$

így azt kapjuk, hogy a költségfüggvény

$$C(q) = 0,001q^3 - 0,2q^2 + 40q + 5\,000.$$

Az átlagköltség függvény:

$$AC(q) = \frac{C(q)}{q} = 0,001q^2 - 0,2q + 40 + \frac{5\,000}{q}.$$

Ha $q = 500$, akkor az átlagköltség:

$$AC(500) = 0,001 \cdot 500^2 - 0,2 \cdot 500 + 40 + \frac{5\,000}{500} = 80.$$

198. **Feladat.** Egy vállalat adott termékhez tartozó határköltség függvénye:

$$MC(q) = 10 - \frac{100}{q+10}.$$

Tudjuk továbbá, hogy az átlagköltség $q = 100$ esetén

$$AC(100) = 50.$$

Határozzuk meg a fixköltséget!

Megoldás:

A költségfüggvény a határköltség függvény azon $C(q)$ primitív függvénye, amelyre $C(0) = FC$ teljesül. Felhasználva a határozatlan integrál tulajdonságait azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} C(q) &= \int 10 - \frac{100}{q+10}\,\mathrm{d}q = \\ &= \int 10\,\mathrm{d}q - \int \frac{100}{q+10}\,\mathrm{d}q = \\ &= 10q - 100 \cdot \ln(q+10) + c. \end{aligned}$$

Ezt felhasználva azt kapjuk, hogy az átlag költség függvény

$$AC(q) = \frac{C(q)}{q} = 10 - 100 \cdot \frac{\ln(q+10)}{q} + \frac{c}{q}.$$

Mivel $AC(100) = 50$, ezért

$$50 = 10 - \frac{100 \cdot \ln 110}{100} + \frac{c}{100}.$$

Az egyenletet megoldva

$$c = 400 + 100 \cdot \ln 110 \approx 870$$

adódik. Mivel

$$FC = C(0) = c,$$

ezért a fixköltség

$$FC = 870.$$

3.4. Riemann-integrál fogalmának bevezetése

Elméleti összefoglaló

3.4.1. **Definíció.** Legyen $a < b$ és tekintsük az $[a; b]$ intervallumot. Legyen

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b.$$

Ekkor a

$$d = \big\{[x_0; x_1]; [x_1; x_2]; \ldots; [x_{n-1}; x_n]; \big\}$$

intervallumhalmazt az $[a; b]$ intervallum *bosztásá*nak vagy *felosztásá*nak nevezzük.

Az $x_0; x_1; \ldots; x_n$ valós számokat *osztópontok*nak mondjuk.

Az $[a; b]$ intervallum összes beosztásainak halmazát $\mathcal{D}[a; b]$ módon jelöljük.

3.4.2. **Definíció.** Legyen $f\colon [a; b] \to \mathbb{R}$ korlátos függvény és

$$d = \big\{[x_{i-1}; x_i] \,\big|\, i = 1, 2, \ldots, n\big\}$$

az $[a; b]$ intervallum egy beosztása.
Vezessük be az

$$m_i = \inf_{x \in [x_{i-1}; x_i]} f(x) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

és az

$$M_i = \sup_{x \in [x_{i-1}; x_i]} f(x) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

jelöléseket.

Megjegyezzük, hogy ha az f függvény folytonos is, akkor

$$m_i = \min_{x \in [x_{i-1}; x_i]} f(x) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

és

$$M_i = \max_{x \in [x_{i-1}; x_i]} f(x) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

3.4.3. **Definíció.** Ha az $f\colon [a;b] \to \mathbb{R}$ függvény korlátos és

$$d = \big\{[x_{i-1}; x_i] \,\big|\, i = 1, 2, \ldots, n\big\}$$

az $[a;b]$ intervallum egy beosztása, akkor

$$s(f;d) = \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot (x_i - x_{i-1}),$$

illetve az

$$S(f;d) = \sum_{i=1}^{n} M_i \cdot (x_i - x_{i-1}),$$

összegeket az f függvény d beosztásához tartozó *alsó integrálközelítő összegé*nek, illetve *felső integrálközelítő összegé*nek nevezzük.
Az

$$\mathcal{O}(f;d) = S(f;d) - s(f;d)$$

értéket az f függvény d beosztásához tartozó *oszcillációs összegé*nek nevezzük.

3.4.4. **Definíció.** Az $f\colon [a;b] \to \mathbb{R}$ függvény alsó integrálközelítő összegei halmazának pontos felső korlátját az f függvény *alsó integrál*jának nevezzük:

$$\int_{\underline{a}}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x = \sup_{d \in \mathcal{D}[a;b]} s(f;d).$$

Az $f\colon [a;b] \to \mathbb{R}$ függvény felső integrálközelítő összegei halmazának pontos alsó korlátját az f függvény *felső integrál*jának nevezzük:

$$\int_{a}^{\overline{b}} f(x)\,\mathrm{d}x = \inf_{d \in \mathcal{D}[a;b]} S(f;d).$$

3.4.5. **Definíció.** Azt mondjuk, hogy az $f\colon [a;b] \to \mathbb{R}$ függvény Riemann-integrálható, ha

$$\int_{\underline{a}}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{a}^{\overline{b}} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Közös értéküket az f függvény *Riemann-integrálján*ak nevezzük. Jele:

$$\int_{a}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

3.4.6. **Tétel.** Minden $f\colon [a;b] \to \mathbb{R}$ folytonos függvény Riemann-integrálható.

3.4.7. **Megjegyzés.** Nem-negatív értékű, folytonos függvény Riemann-integráljának geometriai jelentése a függvény grafikonjának az x-tengellyel bezárt területe.

3.4.8. **Tétel.** Legyenek $f, g\colon [a;b] \to \mathbb{R}$ Riemann-integrálható függvények. Ekkor

$$\int_a^b \big(f(x) + g(x)\big)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

3.4.9. **Tétel.** Legyen $f\colon [a;b] \to \mathbb{R}$ Riemann-integrálható függvény és $k \in \mathbb{R}$. Ekkor

$$\int_a^b k \cdot f(x)\,\mathrm{d}x = k \cdot \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

3.4.10. **Tétel.** Legyenek $f, g\colon [a;b] \to \mathbb{R}$ Riemann-integrálható függvények és $f(x) \leq g(x)$ minden $x \in [a;b]$ esetén. Ekkor

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

3.4.11. **Definíció.** Legyen $f\colon [a;b] \to \mathbb{R}$ Riemann-integrálható függvény. Az

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \qquad (x \in [a;b])$$

függvényt az f függvény *területmérő függvény*ének vagy *felső határ függvényének* mondjuk.

A következőben ismertetett tétel az úgynevezett Newton-Leibniz tétel, amely kapcsolatot teremt a primitív függvény és a Riemann-integrál között. Megadja, hogy (bizonyos feltételek mellett) hogyan lehet kiszámolni egy függvény Riemann-integrálját a függvény primitív függvényének segítségével.

3.4.12. **Tétel.** Ha az $f\colon [a;b] \to \mathbb{R}$ függvény Riemann-integrálható, továbbá az $F\colon [a;b] \to \mathbb{R}$ függvény folytonos az $[a;b]$ intervallumon és differenciálható az $]a;b[$ intervallumon, továbbá $F'(x) = f(x)$ minden $x \in]a;b[$ esetén, akkor

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \big[F(x)\big]_a^b = F(b) - F(a).$$

Az előbbi tétel szerint egy függvény Riemann-integálját megkaphatjuk úgy, hogy a függvény primtív függvényének kiszámoljuk a helyettesítési értékét a Riemann-integrál felső és alsó határán, majd képezzük a kapott értékek különbségét.

Kidolgozott feladatok

199. **Feladat.** Tekintsük az $f\colon [0;1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ függvényt! A $[0;1]$ intervallumot öt egyenlő részre osztjuk.

a) Adjuk meg az f függvény megadott felosztásához tartozó alsó integrálközelítő összeget!

b) Vázoljuk fel az f függvény grafikonját és szemléltessük az előbbi eredményt!

c) Adjuk meg az f függvény megadott felosztásához tartozó felső integrálközelítő összeget!

d) Vázoljuk fel az f függvény grafikonját és szemléltessük az előbbi eredményt!

e) Adjuk meg f függvény megadott felosztásához tartozó oszcillációs összeget!

<u>**Megoldás**</u>:

a) Ha a $[0;1]$ intervallumot 5 egyenlő részre osztjuk fel, akkor a keletkezett részintervallumok hossza $\dfrac{1}{5} = 0,2$, így a felosztás által keletkezett osztópontok halmaza:

$$D = \{0; 0,2; 0,4; 0,6; 0,8; 1\},$$

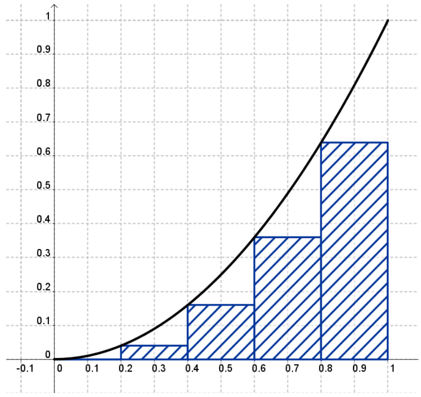
A felosztásnak megfelelő részintervallumok halmaza:

$$d = \big\{[0; 0,2]; [0,2; 0,4]; [0,4; 0,6]; [0,6; 0,8]; [0,8; 1]\big\}.$$

Az alsó integrálközelítő összeg:

$$\begin{aligned} s(f,d) &= 0 \cdot 0,2 + 0,2^2 \cdot 0,2 + 0,4^2 \cdot 0,2 + \\ &+ 0,6^2 \cdot 0,2 + 0,8^2 \cdot 0,2 = \\ &= 0,2 \cdot (0,04 + 0,16 + 0,36 + 0,64) = \\ &= 0,2 \cdot 1,2 = 0,24. \end{aligned}$$

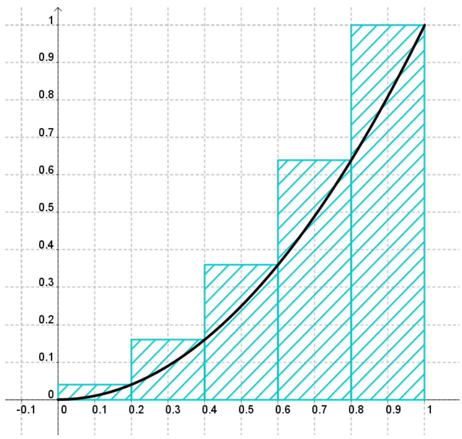
b) A függvény grafikonja és az alsó integrálközelítő összegek:



c) A felső integrálközelítő összeg:

$$S(f,d) = 0,2^2 \cdot 0,2 + 0,4^2 \cdot 0,2 + 0,6^2 \cdot 0,2 + 0,8^2 \cdot 0,2 + 1^2 \cdot 0,2 =$$
$$= 0,2 \cdot (0,04 + 0,16 + 0,36 + 0,64 + 1) = 0,2 \cdot 2,2 = 0,44.$$

d) A függvény grafikonja és az alsó integrálközelítő összegek:



e) Az oszcillációs összeg:

$$\mathcal{O}(f;d) = S(f;d) - s(f;d) = 0,44 - 0,24 = 0,2.$$

200. **Feladat.** Tekintsük az $f\colon [1;4] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{4}{x}$ függvényt! Az $[1;4]$ intervallumot négy egyenlő részre felosztva adjuk meg a felosztáshoz tartozó alsó integrálközelítő összeget és felső integrálközelítő összeget!

a) Adjuk meg az f függvény megadott felosztásához tartozó alsó integrálközelítő összeget!

b) Vázoljuk fel az f függvény grafikonját és szemléltessük az előbbi eredményt!

c) Adjuk meg az f függvény megadott felosztásához tartozó felső integrálközelítő összeget!

d) Vázoljuk fel az f függvény grafikonját és szemléltessük az előbbi eredményt!

e) Adjuk meg az f függvény d felosztásához tartozó oszcillációs összeget!

Megoldás:

a) A felosztás által keletkezett osztópontok halmaza:

$$D = \{1; 2; 3; 4\},$$

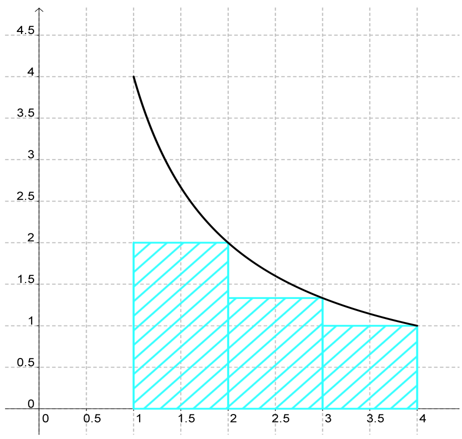
A felosztásnak megfelelő részintervallumok halmaza:

$$d = \big\{[1; 2]; [2; 3]; [3; 4]\big\}.$$

Az alsó integrálközelítő összeg:

$$s(f, d) = 1 \cdot 2 + 1 \cdot \frac{4}{3} + 1 \cdot 1 = 2 + \frac{4}{3} + 1 = \frac{13}{3}.$$

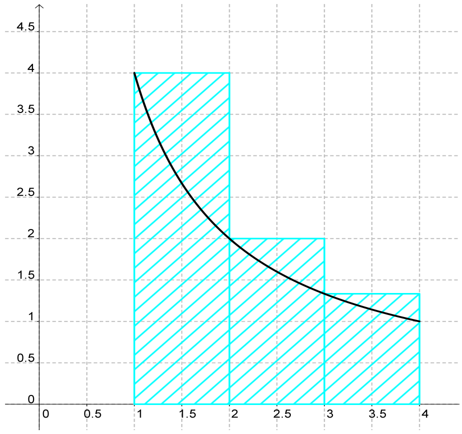
b) A függvény grafikonja és az alsó integrálközelítő összegek:



c) A felső integrálközelítő összeg:

$$S(f, d) = 1 \cdot 4 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot \frac{4}{3} = 4 + 2 + \frac{4}{3} = \frac{22}{3}.$$

d) A függvény grafikonja és a felső integrálközelítő összegek:



e) Az oszcillációs összeg:

$$\mathcal{O}(f;d) = S(f;d) - s(f;d) = \frac{22}{3} - \frac{13}{3} = 3.$$

201. **Feladat.** Számoljuk ki az

$$\int_{-1}^{2} x^2 - 3x + 2\,\mathrm{d}x$$

értékét a Newton-Leibniz tétel segítségével!

Megoldás:

A Riemann-integrál tulajdonságai alapján

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{2} x^2 - 3x + 2\,\mathrm{d}x &= \int_{-1}^{2} x^2\,\mathrm{d}x - \int_{-1}^{2} 3x\,\mathrm{d}x + \int_{-1}^{2} 2\,\mathrm{d}x = \\ &= \left[\frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + 2x\right]_{-1}^{2} = \left(\frac{2^3}{3} - 3\cdot\frac{2^2}{2} + 2\cdot 2\right) - \\ &- \left(\frac{(-1)^3}{3} - 3\cdot\frac{(-1)^2}{2} + 2\cdot(-1)\right) = \\ &= \left(\frac{8}{3} - 6 + 4\right) - \left(-\frac{1}{3} - \frac{3}{2} - 2\right) = \frac{9}{2}.\end{aligned}$$

202. **Feladat.** Számoljuk ki az

$$\int_0^3 3x^2 + 6x - 4\,\mathrm{d}x$$

értékét a Newton-Leibniz tétel segítségével!

<u>**Megoldás**</u>:

A Riemann-integrál tulajdonságai alapján azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}\int_0^3 3x^2 + 6x - 4\,\mathrm{d}x &= \int_0^3 3x^2\,\mathrm{d}x + \int_0^3 6x\,\mathrm{d}x - \int_0^3 4\,\mathrm{d}x = \\ &= \left[x^3 + 3x^2 - 4x\right]_0^3 = \left(3^3 + 3\cdot 3^2 - 4\cdot 3\right) - \\ &- \left(0^3 + 3\cdot 0^2 - 4\cdot 0\right) = \\ &= 27 + 27 - 12 = 42.\end{aligned}$$

3.5. Terület- és térfogatszámítás

Elméleti összefoglaló

Az integrálszámítás két fontos alkalmazása a két függvény grafikonja által bezárt terület és a forgástest térfogatának kiszámolása.

3.5.1. **Tétel.** Ha $g(x) \geq f(x) \geq 0$, akkor az $y = f(x)$, $y = g(x)$, $x = a$, $x = b$ alakzatok által határolt zárt síkrész területe:

$$T = \int\limits_a^b g(x) - f(x)\,\mathrm{d}x.$$

3.5.2. **Tétel.** Ha az $f(x)$ folytonos függvény grafikonját megforgatjuk az x-tengely körül, akkor a keletkezett forgástest térfogata:

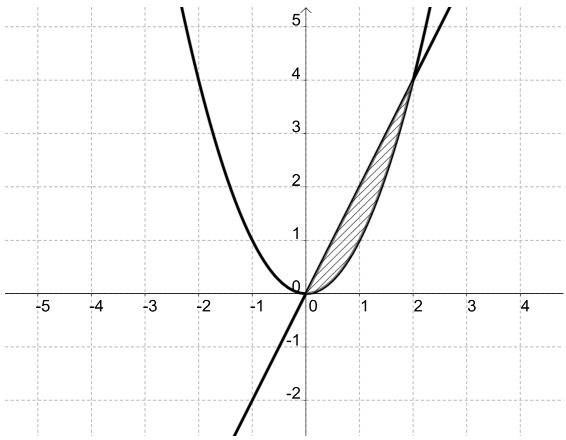
$$V = \pi \cdot \int\limits_a^b \big(f(x)\big)^2\,\mathrm{d}x.$$

Kidolgozott feladatok

203. **Feladat.** Számoljuk ki az $f(x) = x^2$ és $g(x) = 2x$ függvények által közrezárt területet!

Megoldás:

Felvázoljuk a két függvény grafikonját közös koordinátarendszerben:



Először megoldjuk az $f(x) = g(x)$ egyenletet:

$$x^2 = 2x$$
$$x^2 - 2x = 0$$
$$x \cdot (x - 2) = 0,$$

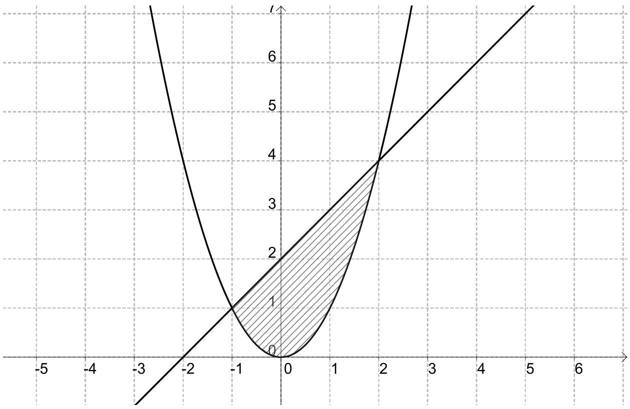
amiből $x = 0$ vagy $x = 2$ adódik. Így a keresett terület:

$$T = \int_0^2 2x - x^2 \, \mathrm{d}x = \left[x^2 - \frac{x^3}{3} \right]_0^2 =$$
$$= 4 - \frac{8}{3} = \frac{12 - 8}{3} = \frac{4}{3}.$$

204. **Feladat.** Számoljuk ki az $f(x) = x^2$ és $g(x) = x + 2$ függvények által közrezárt területet!

Megoldás:

Felvázoljuk a két függvény grafikonját közös koordinátarendszerben:



Először megoldjuk az $f(x) = g(x)$ egyenletet, azaz az

$$x^2 = x + 2$$

egyenletet. Ezt nullára rendezve azt kapjuk, hogy

$$x^2 - x - 2 = 0.$$

A másodfokú egyenlet megoldóképletét alkalmazva azt kapjuk, hogy

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2},$$

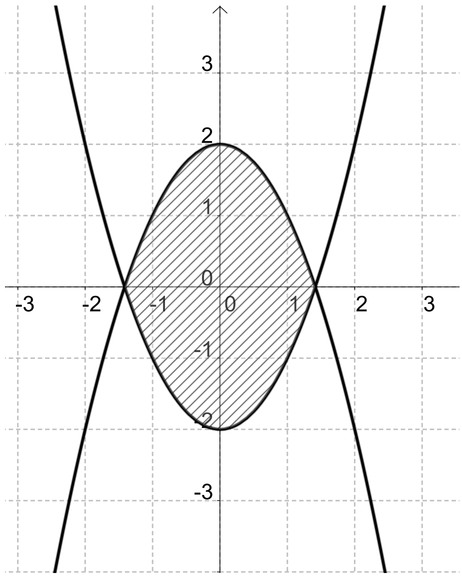
amiből $x_1 = -1$, illetve $x_2 = 2$ adódik.
A keresett terület:

$$T = \int_{-1}^{2} x + 2 - x^2 \,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^2}{2} + 2x - \frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{2} =$$
$$= \left(\frac{2^2}{2} + 2 \cdot 2 - \frac{2^3}{3}\right) - \left(\frac{(-1)^2}{2} + 2 \cdot (-1) - \frac{(-1)^3}{3}\right) = 4,5.$$

205. **Feladat.** Számoljuk ki az $f(x) = x^2 - 2$ és $g(x) = 2 - x^2$ függvények által közrezárt területet!

<u>**Megoldás**</u>:

Felvázoljuk a két függvény grafikonját közös koordinátarendszerben:



Először megoldjuk az $f(x) = g(x)$ egyenletet:

$$x^2 - 2 = 2 - x^2$$
$$x^2 = 4,$$

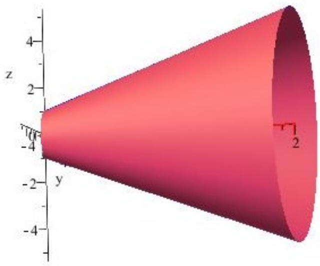
amiből $x = -2$ vagy $x = 2$ adódik. Így a keresett terület:

$$\begin{aligned}
T &= \int_{-2}^{2} (2 - x^2) - (x^2 - 2)\,\mathrm{d}x = \int_{-2}^{2} (4 - 2x^2)\,\mathrm{d}x = \\
&= \left[4x - \frac{2x^3}{3}\right]_{-2}^{2} = \\
&= \left(4 \cdot 2 - 2 \cdot \frac{2^3}{3}\right) - \left(4 \cdot (-2) - \frac{(-2)^3}{3}\right) = \\
&= \frac{8}{3} - \left(-\frac{8}{3}\right) = \frac{16}{3}.
\end{aligned}$$

206. **Feladat.** Számoljuk ki az $f(x) = 2x + 1$ függvénynek a $[0, 2]$ intervallumon az x-tengely körüli megforgatásával keletkező forgástest térfogatát!

<u>**Megoldás**</u>:

Felrajzolva a forgástestet azt kapjuk, hogy



A forgástest térfogata:

$$V = \pi \cdot \int_0^2 (2x+1)^2 \, \mathrm{d}x = \pi \cdot \left[\frac{(2x+1)^3}{6} \right]_0^2 =$$

$$= \pi \cdot \left(\frac{(2 \cdot 2 + 1)^3}{6} \right) - \pi \cdot \left(\frac{(2 \cdot 0 + 1)^3}{6} \right) =$$

$$= \pi \cdot \frac{124}{6} = \frac{62}{3} \cdot \pi.$$

3.6. A Riemann-integrál gazdasági alkalmazásai

Elméleti összefoglaló

A *fogyasztói többlet* a mikroökonómiában fontos fogalom. Egy jószág megvásárlásakor fellépő többlet annak a maximális pénzösszegnek, amit a vásárló (fogyasztó) a termékért még éppen hajlandó megfizetni, valamint a termék tényleges vételárának a különbsége. A fogyasztói többlet tehát pénzben fejezi ki azt a „többletet", „hasznot", amit a fogyasztó nyer a jószág megvásárlásával.

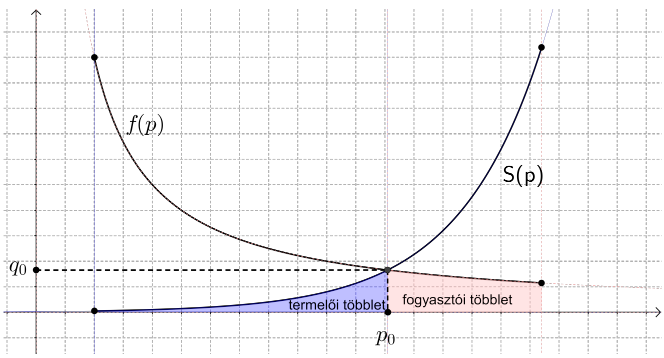
Hasonlóan definiálható a *termelői többlet* is.

Amennyiben f egy vállalat adott termékéhez tartozó keresleti függvény és S a kínálati függvény. Továbbá p_0 az egyensúlyi ár és q_0 az egyensúlyi mennyiség, akkor a termelői többlet:

$$\int_{p_{min}}^{p_0} f(p)\,\mathrm{dp},$$

a *fogyasztói többlet*:

$$\int_{p_0}^{p_{max}} S(p)\,\mathrm{dp}.$$

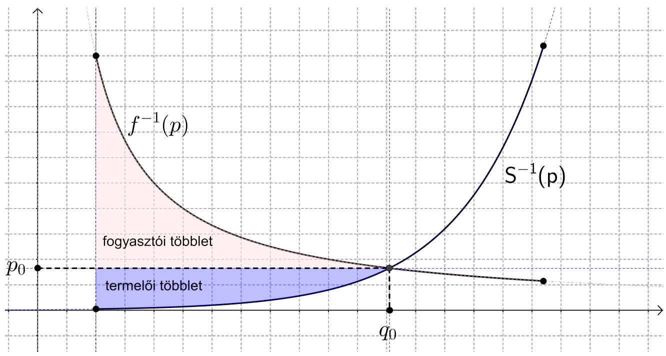


Amennyiben f^{-1} egy vállalat adott termékéhez tartozó inverz keresleti függvény és S^{-1} az inverz kínálati függvény. Továbbá p_0 az egyensúlyi ár és q_0 az egyensúlyi mennyiség, akkor a termelői többlet:

$$p_0 \cdot q_0 - \int_{q_{min}}^{q_0} f^{-1}(q)\,\mathrm{dq},$$

a fogyasztói többlet:

$$\int_{q_{min}}^{q_0} S^{-1}(q)\,\mathrm{dq} - p_0 \cdot q_0.$$



Amennyiben $MC(q)$ egy határköltség függvény és $q_1 < q_2$ olyan valós számok, hogy q_1 és q_2 eleme az $MC(q)$ értelmezési tartományának, úgy az

$$\int_{q_1}^{q_2} MC(q)\,\mathrm{dq}$$

érték azt adja meg, hogy mennyivel nő a költség, ha a q_1 mennyiség helyett q_2 mennyiséget állítunk elő.

Kidolgozott feladatok

207. **Feladat.** Egy vállalat adott termékéhez tartozó keresleti függvénye:

$$f(p) = 2\,000 - 20p \qquad (10 \le p \le 100),$$

kínálati függvénye

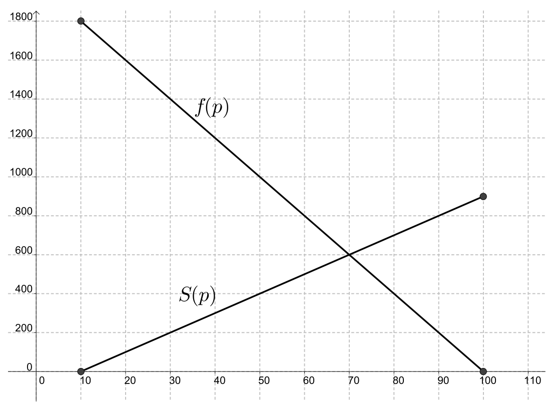
$$S(p) = 10p - 100 \qquad (10 \le p \le 100).$$

Az árakat dollárban értjük, a mennyiséget darabban.

a) Ábrázoljuk közös koordinátarendszerben a keresleti és kínálati függvényeket!
b) Számoljuk ki az egyensúlyi árat és az egyensúlyi mennyiséget!
c) Jelöljük az előbbi koordinátarendszerben az egyensúlyi mennyiséget, az egyensúlyi árat, a termelői többletet és a fogyasztói többletet!
d) Számoljuk ki a termelői többletet!
e) Számoljuk ki a fogyasztói többletet!

Megoldás:

a) A keresleti és a kínálati függvény grafikonja:



b) Az egyensúlyi árat az

$$f(p) = S(p)$$

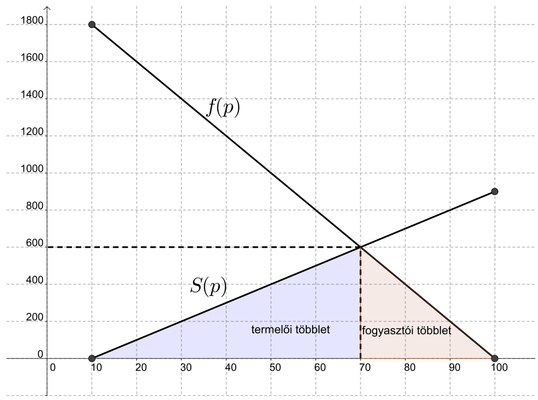
egyenlet megoldása adja. Mivel

$$10p - 100 = 2\,000 - 20p \qquad \Rightarrow \qquad p = 70,$$

ezért az egyensúlyi ár 70 dollár. Ezt felhasználva az egyensúlyi mennyiség

$$f(70) = 10 \cdot 70 - 100 = 600\,\mathrm{darab}.$$

c) Az alábbi ábra mutatja az egyensúlyi árat, az egyensúlyi mennyiséget, a termelői többletet és a fogyasztói többletet.



d) Mivel

$$\int_{10}^{70} 10p - 100\,\mathrm{d}p = [5p^2 - 100p]_{10}^{70} =$$

$$= 5 \cdot 70^2 - 100 \cdot 70 - (5 \cdot 10^2 - 100 \cdot 10) = 18\,000,$$

ezért a termelői többlet $18\,000$ dollár.

e) Mivel

$$\int_{70}^{100} 2\,000 - 20p\,\mathrm{d}p = [2\,000p - 10p^2]_{70}^{100} =$$

$$= 2\,000 \cdot 100 - 10 \cdot 100^2 - (2\,000 \cdot 70 - 10 \cdot 70^2) = 9\,000,$$

ezért a fogyasztói többlet $9\,000$ dollár.

208. **Feladat.** Egy vállalat adott termékéhez tartozó keresleti függvénye:

$$f(p) = \frac{90}{p} - 2 \qquad (1 \le p \le 45),$$

kínálati függvénye

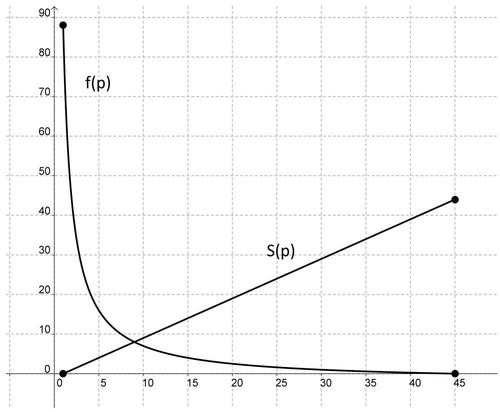
$$S(p) = p - 1 \qquad (1 \le p \le 45).$$

Az árakat dollárban értjük, a mennyiséget darabban.

a) Ábrázoljuk közös koordinátarendszerben a keresleti és kínálati függvényeket!
b) Számoljuk ki az egyensúlyi árat és az egyensúlyi mennyiséget!
c) Jelöljük az előbbi koordinátarendszerben az egyensúlyi mennyiséget, az egyensúlyi árat, a termelői többletet és a fogyasztói többletet!
d) Számoljuk ki a termelői többletet!
e) Számoljuk ki a fogyasztói többletet!

Megoldás:

a) A keresleti és a kínálati függvény grafikonja:



b) Az egyensúlyi árat az

$$f(p) = S(p)$$

egyenlet megoldása adja, azaz

$$\frac{90}{p} - 2 = p - 1.$$

Mindkét oldalt szorozva a közös nevezővel, majd összevonva és nullára rendezve az egyenletet azt kapjuk, hogy

$$p^2 + p - 90 = 0.$$

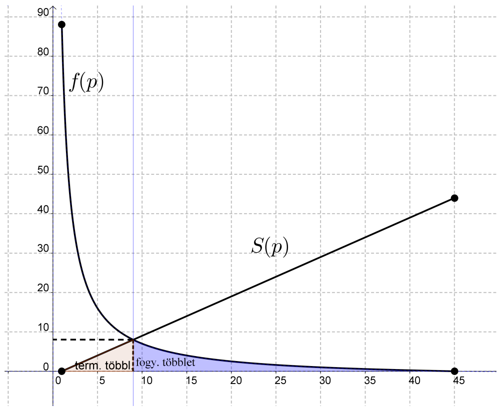
A másodfokú egyenlet megoldóképletét alkalmazva

$$p_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 360}}{2} = \frac{-1 \pm 19}{2}$$

adódik, amiből $p > 0$ miatt azt kapjuk, hogy $p = 9$. Ezt felhasználva az egyensúlyi mennyiség

$$f(9) = \frac{90}{9} - 2 = 8\,\text{darab}.$$

c) Az alábbi ábra mutatja az egyensúlyi árat, az egyensúlyi mennyiséget, a termelői többletet és a fogyasztói többletet.



d) Mivel

$$\int_1^9 p - 1\,\mathrm{d}p = \left[\frac{1}{2}\cdot p^2 - p\right]_9^1 =$$

$$= \frac{81}{2} - 9 - \left(\frac{1}{2} - 1\right) = 32,$$

ezért a termelői többlet 32 dollár.

e) Mivel

$$\int_9^{45} \frac{90}{p} - 2\,\mathrm{d}p = [90\ln p - 2p]_9^{45} =$$

$$= 90\ln 45 - 90 - (90\ln 9 - 18) \approx 72,85,$$

ezért a fogyasztói többlet $72,85$ dollár.

209. **Feladat.** Egy vállalat adott termékhez tartozó határköltség függvénye:

$$MC(q) = 0,6q + 2.$$

A cég jelenleg hetente $q = 80$ darab terméket állít elő. Mennyivel növekedne a költsége, ha heti 100 darab terméket gyártana?

<u>**Megoldás**</u>:

A költségnövekedés a

$$C(100) - C(80)$$

érték. A Newton-Leibniz tétel alapján:

$$\begin{aligned} C(100) - C(80) &= \int_{80}^{100} C'(q)\,\mathrm{d}q = \int_{80}^{100} MC(q)\,\mathrm{d}q = \\ &= \int_{80}^{100} 0,6q + 2\,\mathrm{d}q = [0,3q^2 + 2q]_{80}^{100} = \\ &= (0,3 \cdot 100^2 + 2 \cdot 100) - (0,3 \cdot 80^2 + 2 \cdot 80) = \\ &= 3\,200 - 2\,080 = 1\,120. \end{aligned}$$

Tehát a költségnövekedés 1 120 dollár lenne.

Irodalomjegyzék

[1] Árki Tamás – Konfárné Nagy Klára – Kovács István – Trembeczki Csaba – Urbán János, *Sokszínű matematika feladatgyűjtemény 11-12*, Mozaik Kiadó, Szeged, 2010.

[2] Babcsányi István – Gyurmánczi János – Szabó Lajos – Wettl Ferenc, *Matematika feladatgyűjtemény I.*, Műegyetemi Kiadó, 2009.

[3] Bartha Gábor – Bogdán Zoltán – , Duró Lajosné dr. – Gyapjas Ferencné – Hack Frigyes – dr. Kántor Sándorné – dr. Korányi Erzsébet, *Matematika feladatgyűjtemény II.*, Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 2000.

[4] Bárczy Barnabás, *Differenciálszámítás*, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1994.

[5] Benkő Pálné – Diószegi Ferencné – Serény György, *Matematika feladattár II.*, Műegyetemi Kiadó, 2002.

[6] Császár Ákosné, *Matematika I/1*, Műegyetemi Kiadó, 2003.

[7] Csikós Pajor Gizella – Péics Hajnalka, *Analízis elméleti összefoglaló és példatár*, Bolyai Farkas Alapítvány, Zenta, 2010.

[8] Ernest F. Haeussler, *Introductory Mathematical Analysis for Business, Economics, the Life and Social Sciences*, Prentice Hall, 2011.

[9] Farkas István, *Differenciálszámítás gyakorlati jegyzet*, Debreceni Egyetem, 2005.

[10] Dr. Gerőcs László–Juhász István–Orosz Gyula– Paróczay József–Számadó László–Szászné Dr. Simon Judit, *Matematika emelt szintű tananyag*, Nemzedékek Tudása Tankönyvkiadó, 2013.

[11] Gilbert János – Sólyom András – Kocsányi László, *Fizika mérnököknek I-II, Egyetemi Tankönyv*, Műegyetemi Kiadó, 1999.

[12] J. Harcet – L. Heinrichs – P. M. Seiler – M. T. Skoumal, *Mathematics Higher Level*, Oxford University Press, 2012.

[13] Horváth Eszter – Inges János – Nagyné Pálmai Piroska – Róka Sándor – Tassy Gergely, *Tehetséggondozás a matematikában*, http://users.itk.ppke.hu/ adorjan/matematika/list.html, 2011.

[14] Jakus G. – Kis M. – Magyar T. – Zombori N., *Analízis példatár*, Budapest, 2014.

[15] Kézi Csaba Gábor, *Differenciálszámítás és alkalmazásai*, DUPress, 2016.

[16] Kézi Csaba Gábor, *Differenciálszámítás és alkalmazásai feladatgyűjtemény*, DUPress, 2016.

[17] Király Balázs, *Analízis (gyakorlat támogató jegyzet)*, elektronikus oktatási segédanyag, http://tamop412a.ttk.pte.hu/files/analizis.pdf, 2011.

[18] Középiskolai Matematikai és Fizikai Lapok, 1996. január, 51. oldal, 2869. fizika feladat, http://db.komal.hu/KomalHU/felhivatkoz.phtml?id=41005

[19] Nagyné Kondor Rita – Szíki Gusztáv Áron, *Matematika eszközök mérnöki alkalmazásokban*, Egyetemi jegyzet, Debreceni Egyetem, 2011.

[20] Kovács József – Takács Gábor – Takács Miklós, *Analízis*, Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 1986.

[21] Kovács István – Trembeczki Csaba, *Sokszínű matematika feladatgyűjtemény, az analízis elemei 11–12 emelt szint*, Mozaik Kiadó, Szeged, 2011.

[22] Lengyel Csilla Mária, *Szélsőérték-feladatok különböző megoldási módszerei*, ELTE, szakdolgozat, 2012.

[23] Lial M. L. – Greenwell R. N. – Ritchey N. P., *Calculus with applications*, Pearson, 2012.

[24] Mendelson E., *3000 solved problems in calculus*, McGraw-Hill Companies, 1988.

[25] Nándori Frigyes – Szirbik Sándor, *Statika oktatási segédlet a Gépészmérnöki és Informatikai Kar Bsc levelezős hallgatói részére*, Mechanikai Tanszék, Miskolc-Egyetemváros, 2008.

[26] Pintér Lajos, *Analízis I.*, Typotex, 1998.

[27] Rosser M., *Basic mathematics for economists*, Routledge, 2003.

[28] Sikolya Eszter, *Analízis jegyzet Matematikatanári Szakosok részére*, elektronikus jegyzet, tankonyvtar.ttk.bme.hu, 2013.

[29] Simon Anita, *Az analízis néhány közgazdaságtani alkalmazása*, szakdolgozat, Eötvös Loránd Tudományegyetem, Természettudományi Kar, 2009.

[30] Knut Sydsaeter, Peter Hammond, *Matematika közgazdászoknak*, Aula, 2006.

[31] Szentelekiné Dr. Páles Ilona, *Analízis példatár*, Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 2011.

[32] Stewart J., *Calculus*, Brooks/Cole, 2012.

[33] Tan S. T., *Applied Calculus for the Managerial*, Life and Social Sciences, Brooks/Cole, 1999.

[34] Thomas G. B. – Weir M. D. – Hass J. – Giordano F. R., *Thomas féle kalkulus I. kötet*, Typotex, Budapest, 2008.

Tartalomjegyzék