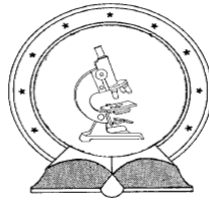


DE TTK



1949

# Gráffejlődési modellek aszimptotikus vizsgálata

Doktori (PhD) értekezés

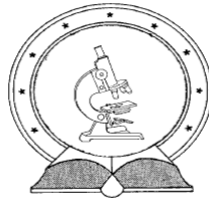
Szerző: Lukácsné Porvázsnyik Bettina Lívía

Témavezető: Dr. Fazekas István

DEBRECENI EGYETEM  
Természettudományi Doktori Tanács  
Matematika- és Számítástudományok Doktori Iskola  
Debrecen, 2018.



DE TTK



1949

# Gráffejlődési modellek aszimptotikus vizsgálata

Doktori (PhD) értekezés

Szerző: Lukácsné Porvázsnyik Bettina Lívía

Témavezető: Dr. Fazekas István

DEBRECENI EGYETEM  
Természettudományi Doktori Tanács  
Matematika- és Számítástudományok Doktori Iskola  
Debrecen, 2018.



Ezen értekezést a Debreceni Egyetem Természettudományi Doktori Tanács Matematika- és Számítástudományok Doktori Iskola Valószínűségelmélet, matematikai statisztika és alkalmazott matematika programja keretében készítettem a Debreceni Egyetem természettudományi doktori (PhD) fokozatának elnyerése céljából.

Nyilatkozom arról, hogy a tézisekben leírt eredmények nem képezik más PhD disszertáció részét.

Debrecen, 2018. június 01.

.....  
Lukácsné Porvázsnyik Bettina Livia  
jelölt

Tanúsítom, hogy Lukácsné Porvázsnyik Bettina Livia doktorjelölt 2012 – 2015 között a fent megnevezett Doktori Iskola Valószínűségelmélet, matematikai statisztika és alkalmazott matematika programjának keretében irányításommal végezte munkáját. Az értekezésben foglalt eredményekhez a jelölt önálló alkotó tevékenységével meghatározóan hozzájárult. Nyilatkozom továbbá arról, hogy a tézisekben leírt eredmények nem képezik más PhD disszertáció részét.

Az értekezés elfogadását javasolom.

Debrecen, 2018. június 01.

.....  
Dr. Fazekas István  
témavezető



# Gráffejlődési modellek aszimptotikus vizsgálata

Értekezés a doktori (Ph.D.) fokozat megszerzése érdekében a matematika tudományágban.

Írta: Lukácsné Porvázsnyik Bettina Livia okleveles alkalmazott matematikus

Készült a Debreceni Egyetem Matematika- és Számítástudományok Doktori Iskolája (Valószínűségelmélet, matematikai statisztika és alkalmazott matematika programja) keretében

Témavezető: Dr. Fazekas István

A doktori szigorlati bizottság:

elnök:	Dr. Sztrik János (DE-IK) .....
tagok:	Dr. Baran Sándor (DE-IK) .....
	Dr. Márkus László (ELTE-TTK) .....

A doktori szigorlat időpontja: 2016. június 17.

Az értekezés bírálói:

Dr. ....
Dr. ....
Dr. ....

A bírálóbizottság:

elnök:	Dr. ....
tagok:	Dr. ....
	Dr. ....
	Dr. ....
	Dr. ....

Az értekezés védésének időpontja: 20... ..





## KÖSZÖNETNYILVÁNÍTÁS

Elsősorban köszönöm témavezetőmnek, Dr. Fazekas Istvánnak a szakmai útmutatást, az inspirációt. Köszönöm mindenkori bizalmát és a türelmét. Megtiszteltetésnek érzem, hogy Ő indított el a tudományos pályán és hogy tanulhattam Tőle.

Köszönöm a Debreceni Egyetem Alkalmazott Matematika és Valószínűség-számítás Tanszékének a támogatást. Külön köszönöm Perecsényi Attilának, hogy mindig volt ideje az elméleti és numerikus eredmények egy utolsó egyeztetésére.

Köszönöm férjemnek Róbertnek és a kislányomnak Fanninak, nagymamának, szüleimnek és testvéreimnek azt a végtelen szeretet és türelmet, melyet ezen időszak alatt kaptam tőlük. Köszönöm, hogy mindenben támogattak, bíztak bennem és mindvégig mellettem álltak.



# Tartalomjegyzék

<b>Bevezetés</b>	<b>1</b>
<b>Irodalmi előzmények</b>	<b>3</b>
<b>1. Egy klikkek interakcióján alapuló modell</b>	<b>9</b>
1.1. A modell definíciója és alapvető tulajdonságai . . . . .	10
1.2. Fő eredmények . . . . .	15
1.3. Bizonyítások . . . . .	21
1.3.1. A $d$ fokszámú és $w$ súlyú csúcsok arányának egy valószínűségi konvergenciája . . . . .	22
1.3.2. Az $M$ -klikkek súlyainak skálafüggetlensége . . . . .	31
1.3.3. A fokszámok skálafüggetlensége . . . . .	41
<b>2. Egy speciális eset: az <math>N</math>-pontos modell</b>	<b>49</b>
2.1. Fő eredmények az $N$ -pontos modellre . . . . .	50
2.1.1. Az $N$ -pontos modell skálafüggetlensége . . . . .	50
2.1.2. A súlyok és fokszámok aszimptotikus viselkedése . . . . .	53
2.2. Bizonyítások . . . . .	57
2.2.1. Egy rögzített $M$ -klikk súlyának aszimptotikus viselkedése . . . . .	57
2.2.2. Egy rögzített csúcs fokszámának aszimptotikus viselkedése . . . . .	62
2.2.3. A maximális súly és a maximális fokszám aszimptotikus viselkedése . . . . .	63
<b>Összefoglalás</b>	<b>68</b>
<b>Summary</b>	<b>73</b>
<b>Irodalomjegyzék</b>	<b>77</b>
<b>Függelék</b>	<b>81</b>

# Jelölések

$C_{n,M}$	az $M$ -klikkek száma $n$ lépés után
$C(n, M, w)$	a $w$ súlyú $M$ -klikkek száma $n$ lépés után
$\mathcal{D}_n$	a maximális fokszám $n$ lépés után
$D[n, j]$	a $j$ -edik csúcs fokszáma $n$ lépés után
$\mathcal{F}_n$	a megfigyelhető események $\sigma$ -algebrája $n$ lépés után
$\Gamma$	a Gamma függvény
$\gcd\{A\}$	az $A$ halmaz elemeinek legnagyobb közös osztója
$\mathbb{I}_A$	az $A$ esemény indikátora
$U(n, d)$	a $d$ fokszámú csúcsok száma $n$ lépés után
$V_n$	a csúcsok száma $n$ lépés után
$X(n, d, w)$	a $d$ fokszámú és $w$ súlyú csúcsok száma $n$ lépés után
$X(n, w)$	a $w$ súlyú csúcsok száma $n$ lépés után
$\mathcal{W}_n$	a maximális súlyú csúcs súlya $n$ lépés után
$W[n, M, j]$	a $j$ -edik $M$ -klikk súlya $n$ lépés után





# Bevezetés

A hálózatelmélet a diszkrét valószínűségelmélet egy aktívan tanulmányozott területe, melynek eredményeit széles körben alkalmazzák. A témakörrel foglalkozó kutatók több, eltérő típusú valós hálózatot vizsgáltak, mint például a world wide web (WWW), az Internet, a szociális- és biológiai hálózatok. Az elmúlt néhány évtizedben számos véletlen gráf modellt vezettek be a valóságban előforduló hálózatok leírására és modellezésére.

Ebben a dolgozatban egy új véletlen gráffejlődési mechanizmust definiálunk, valamint az evolúciós folyamat eredményeként létrejövő véletlen gráf modellt tanulmányozzuk. A modell fejlődését minden lépésben  $N$  csúcs kölcsönös interakciója határozza meg, ahol  $N \geq 3$  rögzített egész szám. A gráf evolúciója során az egyes lépésekben egymástól függetlenül véletlen számú új csúcs csatlakozik a gráfhoz, melyek egy teljes gráfot formálnak. Az egy lépés során a gráfhoz csatlakozó új csúcsok száma korlátos valószínűségi változó, melynek eloszlása a modell paramétereitől rögzített. Az interakcióban részt vevő régi csúcsok kiválasztása történhet a preferential attachment szabály szerint vagy pedig egyenletesen is. A vizsgált modellben az  $M$ -csúcsú teljes gráfokat ( $1 \leq M \leq N$ ) súlyokkal jellemezzük. Egy adott  $M$ -csúcsú teljes gráf súlya azt mutatja meg, hogy az eddigi lépések során hány alkalommal vett részt interakcióban. A súlyok értéke az evolúciós folyamat során nő.

Célunk a modellt jellemző mennyiségek aszimptotikus viselkedésének vizsgálata és meghatározása.

A témakörhöz tartozó irodalmi előzmények áttekintését követően a dolgozat első részében megadjuk a vizsgált modell pontos matematikai definícióját és ismertetjük a modellre vonatkozó fő eredményeinket. Megvizsgáljuk a modellt jellemző mennyiségek, a súlyok és fokszámok aszimptotikus viselkedését, igazoljuk a modell skálafüggetlenségét.

A dolgozat második részében a modell egy speciális esetét, az  $N$ -pontos modellt tanulmányozzuk. Az  $N$ -pontos modell a Backhausz Ágnes és Móri Tamás (2012, 2014) által bevezetett háromszöges modell általánosítása. Kiterjesztjük Backhausz és Móri háromszöges modellre vonatkozó bizonyos eredményeit az  $N$ -

pontos modellre. Általánosítjuk egy rögzített csúcs súlyának és fokszámának, valamint a maximális súly és a maximális fokszám aszimptotikus viselkedését jellemző eredményeket. Ezen felül egy rögzített  $M$ -klikk ( $2 \leq M \leq N$ ) súlyának aszimptotikus viselkedését is meghatározzuk. A bizonyítások során főként martingálelméleti eredményeket alkalmazunk.



# Irodalmi előzmények

Ebben a részben röviden ismertetjük a véletlen gráfok elméletének irodalmi előzményeit. Ezen részleges áttekintés során azon eredményekre és modellekre helyezük a hangsúlyt, melyek valamilyen módon kapcsolódnak a disszertáció alapjául szolgáló véletlen gráf modellhez, valamint a modellre vonatkozó eredményekhez.

Véletlen gráf modellek, illetve azokkal kapcsolatos eredmények először Yule (1925), illetve Simon (1955, 1960) cikkeiben jelentek meg, mégis az elmélet alapjait Erdős Pál és Rényi Alfréd (1959, 1960), valamint Edgar Nelson Gilbert (1959) nevéhez köthetjük. 1959-ben egyszerre, egymástól függetlenül az alábbi két modellt vizsgálták. Az Erdős-Rényi véletlen gráf modellben adott  $n$  csúcs, melyek között véletlenszerűen húzunk be előre adott  $N$  számú élt úgy, hogy minden lehetséges elrendezés azonos valószínűséggel fordul elő. Erdős és Rényi ugyanekkor megadta a modell egy ezzel ekvivalens definícióját is. Eszerint minden lépésben az előző lépéstől függetlenül húzunk be egy élt egyenletesen. Ez azt jelenti, hogy a  $(k + 1)$ -edik lépésben a lehetséges  $\binom{n}{2} - k$  él mindegyikét azonos valószínűséggel választhatjuk. Az Erdős-Rényi modell ezen definíciójának jelentőségét az adja, hogy segítségével a gráf egy fejlődési folyamat eredményének tekinthető, ennek következményeként pedig újabb szempontok szerint vizsgálható (lásd például Janson (1987)). Erdős és Rényi munkájával egyidőben Gilbert (1959) egy nagyon hasonló modellt vizsgált. Gilbert modelljében a csúcsok száma rögzített és bármely két csúcspárt összekötő élt egymástól függetlenül azonos  $p$  valószínűséggel húzhatunk be. Az itt szereplő  $p$  valószínűséget él valószínűségnek is nevezik. Ezeket a modelleket főként diszkrét matematikai, kombinatorikai állítások igazolására alkalmazták. Erdős és Rényi, valamint Gilbert munkája a véletlen gráfelméleti kutatások fellendülését vonta maga után. A fenti modellekről és tulajdonságaikról, valamint a véletlen gráfok elméletének fejlődéséről részletes áttekintést adhat például Bollobás (2001), Newman, Barabási és Watts (2006), Durrett (2007), Newman (2010), Janson, Luczak és Rucinski (2000) és van der Hofstad (2017) könyve.

Napjainkban a véletlen gráfok vizsgálata a diszkrét valószínűségelmélet egyik legnépszerűbb területe, melynek egyik fontos alkalmazása a valóságban előforduló

hálózatok modellezése. Az egyik legtöbbet vizsgált virtuális hálózat a world wide web (WWW), melyet egy olyan irányított gráffal írhatunk le, melynek csúcsai a weboldalak, az éleknek pedig az egyes oldalakra mutató hivatkozások felelnek meg. Hasonló valós hálózat az Internet, melynek csúcsai a routerek, éleit pedig a közöttük létrejövő fizikai kapcsolatok, a vezetékek határozzák meg. Szociális hálózatok esetén a csúcsok legtöbb esetben embereket, a csúcsok között futó élek pedig a közöttük lévő kapcsolatot jelöli. Erre példa a közös filmben szereplő színészek szociális hálózata, ahol a csúcsok a színészek, és két csúcs akkor van összekötve, ha a nekik megfelelő színészek közös filmben játszottak. Ide sorolható a kutatók együttműködési hálózata is, mely az előző példához hasonlóan konstruálható meg. Ebben a gráfban a csúcsok a kutatók, és két csúcs pontosan akkor szomszédos, ha a nekik megfelelő kutatók közös cikket írtak.

Empirikus kutatások igazolták, hogy a valóságban előforduló nagy hálózatok jelentős része közös tulajdonságokkal rendelkezik. Ilyen például a kis világ tulajdonság, ami röviden azt jelenti, hogy a csúcsok átlagos távolsága a gráf méretétől függetlenül kicsi. Ezt a jelenséget magyarázta Watts és Strogatz (1998) modellje. A kisvilág tulajdonságról, illetve az azzal kapcsolatos eredményekről részletesebben olvashatunk például Watts (1999), Durrett (2007), Newman (2010) vagy van der Hofstad (2017) könyvében. Lásd még van der Hofstad (2018) jelenleg készülő könyvét. A tapasztalati eredmények azt mutatták, hogy számos valós hálózat egy másik közös jellemzője a skálafüggetlenség, lásd például Barabási és Albert (1999), Albert és Barabási (2002), Durrett (2007), van der Hofstad (2017). Ezek alapján skálafüggetlenségen azt értjük, hogy a gráf méretének növekedésével a  $k$  fokú csúcsok relatív gyakorisága (1 valószínűséggel) konvergál a  $q_k$  fókusz-eloszláshoz, mely aszimptotikusan hatványrendben cseng le, azaz  $q_k \sim Ck^{-\gamma}$   $k \rightarrow \infty$  esetén, ahol  $C$  és  $\gamma$  alkalmas konstansok. Az itt szereplő  $\gamma$  hatványkitevőt karakterisztikus kitevőnek nevezik, mely a legtöbb modell esetében 2 és 3 közötti értéket vesz fel. Általában  $\gamma \in (2, \infty)$  teljesül.

Az Erdős-Rényi véletlen gráf esetében a fókusz-eloszlás aszimptotikusan Poisson, amint a csúcsok száma tart a végtelenbe (lásd például Newman (2010)). Azaz az aszimptotikus fókusz-eloszlás exponenciálisan cseng le, így a modell nem magyarázza a tapasztalati eredményeket. A legtöbb valós hálózat mérete az idő előrehaladtával nő. Emiatt a hálózatok fejlődésének leírására az időben fejlődő, dinamikus gráfmodellek alkalmasak. Az Erdős-Rényi véletlen gráf az úgynevezett statikus modellek közé sorolható. Az ilyen típusú modellekben a gráf mérete, azaz a csúcsok száma rögzített, nem változik az idővel. Egy fejlődő hálózat esetében egy statikus modell a hálózat egy rögzített időpontbeli állapotát írhatja le. Ezen okok miatt Erdős és Rényi modellje, valamint a hasonló típusú modellek nem alkalmasak a valóságban előforduló hálózatok fejlődésének leírására és vizsgálatára.

A skálafüggetlenség jelenségének magyarázataként Barabási-Albert László és

Albert Réka (1999) bevezette a preferential attachment modellt, melyet a következőképpen adtak meg. Barabási és Albert modelljében egy kis számú csúcst tartalmazó csúcshalmazból indulunk ki. Minden lépésében egy új csúcs és  $m$  új él csatlakozik a gráfhoz, melyek az új csúcst véletlenszerűen kiválasztott régi csúcsokhoz köti. Egy régi  $d_i$  fokú csúcs kiválasztásának  $\pi_i$  valószínűsége arányos annak  $d_i$  fokszámával, azaz  $\pi_i = \frac{d_i}{\sum_j d_j}$ . Ez a preferential attachment szabály, azaz az új csúcst nagyobb valószínűséggel kötjük össze olyan régi csúccsal, amelynek nagyobb a fokszáma. Barabási és Albert cikkében a modell leírása informális. A preferential attachment modell pontos definícióját, valamint a modell skálafüggetlenségének matematikai bizonyítását  $d \leq n^{\frac{1}{15}}$  esetén Bollobás, Rioridan, Spencer és Tusnády (2001) adta meg (itt  $d$  a fokszámot,  $n$  a lépések számát jelöli). Megjegyezzük, hogy a fokszámokkal arányos valószínűség szerinti választás már a legelső modellekben is megjelent (lásd például Yule (1925), Simon (1955)).

A korábban felsorolt példák mind skálafüggetlen hálózatok. A WWW esetében a skálafüggetlen viselkedést először Kumar, Raghavan, Rajagopalan és Tomkins (1999), valamint Barabási és Albert (1999) ismerte fel. A weboldalak be- és ki-fokainak eloszlása hatványfüggvényt követ, a be-fokok esetén  $\gamma_{be} = 2.1$ , a ki-fokok esetén  $\gamma_{ki} = 2.7$  karakterisztikus kitevőkkel. Faloutsos, Faloutsos és Faloutsos (1999) becslése alapján az Internet esetén a karakterisztikus kitevő értéke 2.15 és 2.20 közé esik. A hálózat és az elérhető adathalmaz növekedésével a karakterisztikus kitevő becslése napjainkban  $\gamma = 2.3$  (Albert és Barabási (2002)). A közös filmben szereplő színészek szociális hálózata esetében  $\gamma$  értéke szintén 2.3 (Barabási és Albert (1999)).

A preferential attachment modell hatására az elmúlt két évtizedben számos új véletlen gráf modellt tanulmányoztak.

Kleinberg, Kumar, Raghavan, Rajagopalan és Tomkins (1999) a véletlen gráfmodellek egy új családját definiálta. Ide tartoznak azok a lineárisan, illetve exponenciálisan fejlődő irányított véletlen gráfmodellek, melyeket Kumar, Raghavan, Rajagopalan, Sivakumar, Tomkins és Upfal (2000) javasoltak a WWW leírására. A Kumar et al. (2000) által vizsgált modellekben az új élek sztochasztikus másolás alapján jönnek létre. A lineáris esetben például a gráf a következő módon fejlődik. Minden lépésben egy  $d_{ki} > 0$  ki-fokú csúcst adunk a gráfhoz. Először a régi csúcsok közül egyenletesen választunk egy  $p$  prototípus csúcst. Az új csúcs  $i$ -edik kifutó élét egy előre adott  $0 < \alpha < 1$  valószínűséggel egyenletesen kötjük be egy már létező csúcshoz,  $1 - \alpha$  valószínűséggel pedig a  $p$  prototípus csúcs  $i$ -edik kifutó élének  $p$ -től különböző végpontjához. Kumar et al. (2000) megmutatták, hogy a  $k$  fokú csúcsok aránya konvergál valamilyen  $r_k$  ( $k \in \mathbb{Z}^+$ ) eloszláshoz, mely polinomiálisan csökken, azaz igazolták a modell skálafüggetlenségét. Kumar et al. (2000) modelljében az új csúcsok ki-foka felülről korlátos és nem függ a prototípus csúcs fokszámától. Bebek, Berenbrink, Cooper, Friedetzky, Nadeau és Sahinalp (2006) egy Pastor-Satorras, Smith és Solé (2003) által bevezetett másoláson ala-

puló modellt vizsgál, illetve általánosít. Pastor-Satorras et al. (2003) modelljében a gráfhoz csatlakozó új csúcs fokszáma függ a kiválasztott prototípus csúcs fokszámától. Bebek et al. (2006) egyik fő eredménye az, hogy (a Pastor-Satorras et al. (2003) cikkében szereplő állítással ellentétben) a vizsgált modellben nem igaz az, hogy a fokszámeloszlás aszimptotikusan hatványfüggvényt követ exponenciális levágással. Ezzel együtt megadják a Pastor-Satorras et al. modell egy olyan általánosítását, melyben egy korrekciós lépés segítségével elérik, hogy a csúcsok fokszámainak minimuma pozitív legyen. Ezen általánosított modell esetében (feltéve azt, hogy az aszimptotikus fokszámeloszlás létezik) igazolnak skálafüggetlenséget.

Cooper és Frieze (2003) a webgráfok egy általános modelljét vezette be, illetve igazolta több esetben annak skálafüggetlenségét. A modell fejlődése során minden lépésben  $1 - \alpha$  valószínűséggel egy új csúcs,  $\alpha$  valószínűséggel pedig egy már meglévő csúcs generál véletlen számú új élt. Mindkét esetben a létrejövő élek számának eloszlása rögzített, a részt vevő csúcsokat pedig vagy egyenletesen, vagy pedig a fokszámukkal arányos valószínűséggel (azaz a preferential attachment szabálynak megfelelően) választhatjuk ki. A modell egyik érdekessége, hogy új élek már korábban létező csúcsok között is létrejöhetnek.

Wang, Yang és Wang (2009) a preferential attachment modell egy olyan változatát ismertette, melyben a csúcsok szerepét mind a kiinduló gráfban, mind pedig a gráf fejlődése során klikkek veszik át. Ebben a modellben klikkek egy kis elemszámú csoportjából indulunk ki. A gráfhoz minden lépésben egy új klikk csatlakozik, melyet  $m$  már létező klikkhez kapcsolunk a preferential attachment szabálynak megfelelően. Egy klikk esetében fokszám alatt a kapcsolatok számát értjük, azaz egy klikk fokszáma megadja, hogy az adott klikk hány másik klikkhez csatlakozik a gráfban. A modellben szereplő klikkeket csúcsoknak, a közöttük lévő kapcsolatot pedig éleknek feleltetve meg egy új  $G$  gráfot kapunk. Az eredeti gráfban egy adott klikk fokszámát értelmezhetjük úgy, mint a neki megfelelő csúcs fokszáma a  $G$  gráfban. Szimulációs eredményekkel is alátámasztották, hogy a csúcsok és a klikkek fokszámeloszlására is teljesül a skálafüggetlenség. Amennyiben a klikkek mérete 1, a modell a preferential attachment modellel egyezik meg.

Backhausz és Móri (2012, 2014) egy olyan véletlen gráf modellt definiált, melynek fejlődését minden lépésben 3 csúcs kölcsönhatása határozza meg. Backhausz és Móri háromszöges modelljében a kiinduló gráf egyetlen háromszög. Az egyes lépésekben egy előre adott  $p$  valószínűséggel egy új csúcs csatlakozik a gráfhoz, mely két már létező csúcscsal formál új háromszöget.  $1 - p$  valószínűséggel a gráf mérete nem nő, ebben az esetben 3 már létező csúcs lép kölcsönhatásba. A modellben a csúcsok pozitív súllyal rendelkeznek, mely az evolúciós folyamat során nő. Backhausz és Móri (2012, 2014) modelljének gráffejlődési mechanizmusa bizonyos értelemben hasonló a Cooper és Frieze (2003) által bemutatottal. Mindkét modell esetében a régi csúcsok kiválasztása történhet a preferential attachment szabály

szerint, illetve egyenletesen is, ám Backhausz és Móri a preferential attachment szabályt fokszámok helyett a csúcsok súlyaira alkalmazta. Azaz az egyes lépések során a kölcsönhatásban részt vevő régi csúcsok preferential attachment választás esetén a súlyukkal arányos valószínűséggel kerülnek kiválasztásra. Backhausz és Móri martingáleméleti módszerek alkalmazásával igazolta a modell skálafüggetlenségét mind a csúcsok súlyaira, mind pedig a fokszámokra vonatkozóan. A háromszöges modellben az élek és a háromszögek súlyainak skálafüggetlenségét Fazekas, Noszály és Perecsényi (2015) bizonyította.

Fazekas és Porvázsnyik (2013) a háromszöges modell egy azon általánosítását vizsgálta, amelyben a gráf evolúciója minden lépésben 4 csúcs interakcióján alapszik. Kiterjesztették a háromszöges modellre vonatkozó bizonyos eredményeket, nevezetesen, skálafüggetlenséget igazoltak mind a csúcsok súlyaira, mind pedig a fokszámokra a 4-pontos modellben. A 4-pontos modellre vonatkozó bizonyítások azt mutatták, hogy a modell és az eredmények kiterjeszthetők egy még általánosabb  $N$ -pontos modellre is. Fazekas és Porvázsnyik (2016b) megadta az  $N$ -pontos modell definícióját, továbbá bizonyította a csúcsok súlyainak és fokszámainak skálafüggetlenségét. Az  $N$ -pontos modellben az  $M$ -klikkek ( $2 \leq M \leq N$ ) súlyainak skálafüggetlen viselkedését Fazekas, Noszály és Perecsényi (2015, 2018) igazolta.

Nem minden nagy valós hálózat skálafüggetlen. Erre példa az egyik legnagyobb közösségi oldal, az online szociális hálózatok közé sorolható Facebook (Gjoka, Kurant, Butts és Markopoulou (2010), Ugander, Karrer, Backstrom és Marlow (2011)). Ebben a hálózatban a csúcsok a regisztrált aktív felhasználók, két felhasználót pedig akkor köt össze él, ha egymás ismerősei a rendszerben.

Az elmúlt években a preferential attachment modell több kritikát is kapott. A kritikák alapját egyrészt az adja, hogy a matematikai modell bizonyos esetekben nem magyarázza a tapasztalati eredményeket. Willinger, Govindan, Jamin, Paxson és Shenker (2002) eredményei például azt mutatják, hogy az Internet modellezésére nem minden esetben alkalmas a preferential attachment modell. Más esetekben a matematikai modell bár magyarázza a hálózat globális jellemzőit, ám a lokális tulajdonságok esetében eltérést tapasztalhatunk. A (lokális) klaszterezettségi együttható, melynek értéke 0 és 1 közé esik, azt mutatja meg, hogy a gráfban a csúcsok szomszédai milyen mértékben szomszédai egymásnak is. Egy gráf (lokális) klaszterezettségi együtthatóját a gráfot meghatározó csúcsok klaszterezettségi együtthatóinak átlagaként kaphatjuk meg, amely egy csúcs esetében nem más, mint a csúcs szomszédai között futó élek számának és az őket összekötő összes lehetséges él számának aránya. Jacob és Mörters (2015) cikkében az alábbi olvashatjuk:

*"The most popular quantities used to measure the local clustering of networks are the clustering coefficients, which are measured to be positive in most real networks, but which invariably vanish in preferential attachment models that do*

*not incorporate further effects...*"

Míg a klaszterezettség együttható értéke a legtöbb valós hálózatban magas, addig a csak preferential attachment szabály szerint fejlődő modellekben 0-hoz közeli (Albert és Barabási (2002), Gómez-Gardeñes és Moreno (2004)). Az ilyen típusú ellentétek megoldására több új modellt vezettek be és tanulmányoznak jelenleg is, melyekben más (például térbeli) jellemzők figyelembevételével módosítják a preferential attachment modellt azzal a céllal, hogy a gráf a valós hálózatok megfigyelt lokális jellemzőit is magyarázza. Lásd például a Spatial Preferred Attachment (SPA) modellt, Cooper, Frieze és Pralat (2014), Aiello, Bonato, Cooper, Janssen és Pralat (2009).

Megjegyezzük, hogy a preferential attachment modellre vonatkozó kritikák annak fontosságát nem vonják kétségbe. A modell számos valós hálózat leírására alkalmas. A preferential attachment modell jelentős mértékben hozzájárult a gráfelmélet fejlődéséhez és a valós hálózatok megértéséhez.

A fokszámeloszlás mellett a véletlen gráf modellek más tulajdonságait is érdemes vizsgálni. Ilyen tulajdonság például egy rögzített csúcs fokszámsorozata, illetve a maximális fokszám aszimptotikus viselkedése. Preferential attachment típusú modellekben egy rögzített csúcs fokszámsorozatát, illetve a maximális fokszámot tanulmányozta például van der Hofstad (2017), Katona és Móri (2006), Lindholm és Vallier (2011).

Egy jól ismert technika a maximális fokszám növekedésének vizsgálatára Móri (2002, 2005) martingálos módszere (lásd még Durrett (2007), van der Hofstad (2017)). Móri (2002, 2005) egy-paraméteres skálafüggetlen véletlen fák családját tanulmányozta. Részletesen vizsgálta azokat a modelleket, melyekben egy  $k$  fokú csúcstól bármely lépésben  $k$  egy lineáris függvényével arányos valószínűséggel választunk. A Barabási-Albert véletlen fa speciális esete a modellnek. Móri martingáleméleti eredmények alkalmazásával - más eredmények mellett - igazolta, hogy a lépések  $n$  számának alkalmas, a modell paraméterétől függő hatványával normálva a maximális fokszám majdnem biztosan konvergál egy pozitív valószínűségi változóhoz, amint  $n$  tart a végtelenbe. Móri (2007a,b) egy rögzített csúcs fokszámát, valamint a maximális fokszámot is tanulmányozta egy 2-paraméteres skálafüggetlen véletlen gráf modellben. A háromszöges modellben Backhausz és Móri (2012, 2014) megadta egy rögzített csúcs súlyának és fokszámának, valamint a csúcsok esetén a maximális súly és a maximális fokszám aszimptotikus viselkedését. A háromszöges modellre vonatkozó ezen eredményeket Fazekas és Porváznay (2016a) terjesztette ki a háromszöges modell általánosítására, az  $N$ -pontos modellre. Emellett meghatározták egy rögzített  $M$ -klikk ( $2 \leq M \leq N$ ) súlyának aszimptotikus viselkedését is az  $N$ -pontos modellben.

## 1. fejezet

# Egy klikkek interakcióján alapuló modell

Ebben a fejezetben definiáljuk az értekezés alapját képező véletlen gráf modellt. Látni fogjuk, hogy modellünk hogyan kapcsolódik, illetve milyen tulajdonságokban tér el a korábban bemutatott modellektől. Ismertetni és bizonyítani fogjuk fő eredményeinket, több esetben igazoljuk a vizsgált modell skálafüggetlenségét.

**Motiváció.** Modellünket az egyes személyek, cégek, szervezetek, ... között létrejövő alábbi típusú együttműködés inspirálta. Legyen  $N > 1$  rögzített egész szám. Az együttműködés alapegysége egy  $N$  résztvevőből álló csoport. Együttműködés alatt azt értjük, hogy ezen csoport minden tagja ugyanabban az időpontban együttműködésbe, vagy más szóval interakcióba lép a csoport minden tőle különböző tagjával. Gráfelméleti eszközökkel ezt a következőképpen írhatjuk le. Az  $N$  résztvevőből álló csoportot egy  $N$  elemű csúcshalmaznak, a résztvevők között létrejövő kapcsolatot pedig a csúcsokat összekötő éleknek feleltethetjük meg. Így az  $N$  résztvevő közötti együttműködést egy  $N$  csúcsú teljes gráffal adhatjuk meg. Továbbá  $N$  csúcs *interakciója* alatt azt értjük, hogy az  $N$  csúcs között minden (még nem létező) élts behúzzunk és így egy  $N$  csúcsú teljes gráfot kapunk. Az egyszerűség kedvéért egy  $N$  csúcs interakciója által meghatározott  $N$  csúcsú teljes gráfot a továbbiakban  $N$ -klikknek fogunk nevezni. Ahogyan az időben előre haladva egy csoport ugyanazon  $N$  résztvevője újra és újra együttműködhet, úgy a gráfmodell evolúciója során adott  $N$  csúcs több alkalommal is  $N$ -klikket formálhat. Ha  $N$  személy együttműködik, akkor annak bármely részhalmaza is együttműködik. Egy együttműködés általában valamilyen pozitív hatással van a résztvevőkre, például növeli a csapat jelentőségét, erősít valamilyen képességet, ... . Ezt a tulajdonságot a modellben azzal fejezhetjük ki, hogy az egyes lépésekben az interakcióban részt vevő csúcsok által meghatározott  $N$ -klikkhez és

annak minden részklíkjéhez olyan nemnegatív mennyiségeket, súlyokat rendelünk, amelyek minden olyan esetben nőnek, amikor az adott klikk interakcióban vesz részt. Az újonnan létrejövő klikkek kezdeti súlya minden esetben 1. Ha egy klikk interakcióban vesz részt, a súlya 1-gyel nő. Tehát ha egy  $N$ -klikk súlya eggyel nő az interakció során, akkor ezen  $N$ -klikk bármely részklíkjének a súlya is eggyel nő. Így egy adott klikk *súlya* azt mutatja meg, hogy az eddigi lépések során hány alkalommal vett részt interakcióban.

## 1.1. A modell definíciója és alapvető tulajdonságai

Ebben az alfejezetben megadjuk a dolgozatban vizsgált véletlen gráf modell pontos matematikai definícióját. A szokásos szóhasználatól eltérően, ebben a modellben csak azokat a teljes gráfokat nevezzük *klikkeknek*, amelyek egy a csúcsaik közötti interakció eredményeként jöttek létre. Ezért *már létező klikk* alatt minden esetben pozitív súllyal rendelkező klikket értünk.

Legyen  $N \geq 3$  rögzített egész szám. A kezdeti  $n = 0$  időpontban legyen adott  $N$  csúcs, melyek interakcióba lépve egymással egy  $N$ -klikket alkotnak. Legyen ezen gráfnak és minden klikkjének (azaz az  $N$  csúcsnak, az  $\binom{N}{2}$  élnek,  $\dots$ , az  $\binom{N}{M}$   $M$ -klikknek ( $M \leq N$ )) a kezdeti súlya 1. A gráf fejlődési folyamatát a következő diszkrét idejű modellel adjuk meg. Minden  $n = 1, 2, \dots$  időpontban  $N$  csúcs kerül kiválasztásra, melyek interakcióba lépve egymással egy  $N$ -klikket alkotnak. A gráfmodell evolúciója során az interakcióban részt vevő csúcsok által meghatározott új klikkek kezdeti súlya legyen 1, az interakcióban részt vevő már létező klikkek súlyát pedig eggyel növeljük. Azaz egy már létező klikk súlya pontosan akkor nő, ha interakcióban vesz részt, és ekkor a súlynövekedés mértéke 1. Továbbá, ha egy evolúciós lépés során egy klikk súlya 1-gyel nő, akkor ezen klikk bármely részklíkjének a súlya is 1-gyel nő ugyanebben a lépésben. Az  $n$ -edik lépésben már létező csúcsokat röviden *régi csúcsoknak* is nevezzük.

Az egyes lépésekben az interakcióban részt vevő  $N$  csúcs kiválasztása a következő módokon történhet.

**Step NEW $_k$ :** Minden lépésben  $p_k$  valószínűséggel ( $1 \leq k \leq N - 1$ ), egy új  $k$ -klikk csatlakozik a gráfhoz, amely  $N - k$  már létező csúccsal interakcióba lépve egy új  $N$ -klikket formál. Ebben az esetben az  $N - k$  régi csúcs kiválasztására két lehetőségünk van.

- **Choice PA:**  $r_k$  valószínűséggel ( $1 \leq k \leq N - 1$ ), egy  $(N - k)$ -klikket választunk ki a már létező  $(N - k)$ -klikkek közül az  $(N - k)$ -klikkek összsúlyának megfelelően. Ez azt jelenti, hogy egy  $w_t$  súlyú  $(N - k)$ -klikket  $w_t / \sum_h w_h$  valószínűséggel választunk, ahol  $\sum_h w_h$  az adott lépésben már létező  $(N - k)$ -klikkek összsúlya (preferential attachment szabály).



- **Choice UNI:**  $1 - r_k$  valószínűséggel egyenletesen választunk  $N - k$  régi csúcsot, azaz minden  $N - k$  darab csúcsot tartalmazó csúcshalmazt azonos valószínűséggel választunk (egyenletes választás).

**Step OLD:** Minden lépésben  $p_0$  valószínűséggel nem csatlakozik új csúcs a gráfhoz. Az interakció ekkor  $N$  már létező csúcs között jön létre. Az előző esethez hasonlóan két lehetőségünk van a  $N$  régi csúcs kiválasztására.

- **Choice PA:**  $r_0$  valószínűséggel egy  $N$ -klikk kerül kiválasztásra a már létező  $N$ -klikkek közül az  $N$ -klikkek összsúlyának megfelelően (preferential attachment szabály).
- **Choice UNI:**  $1 - r_0$  valószínűséggel egyenletesen történik a választás, azaz minden  $N$  csúcsot tartalmazó csúcshalmazt azonos valószínűséggel választunk (egyenletes választás).

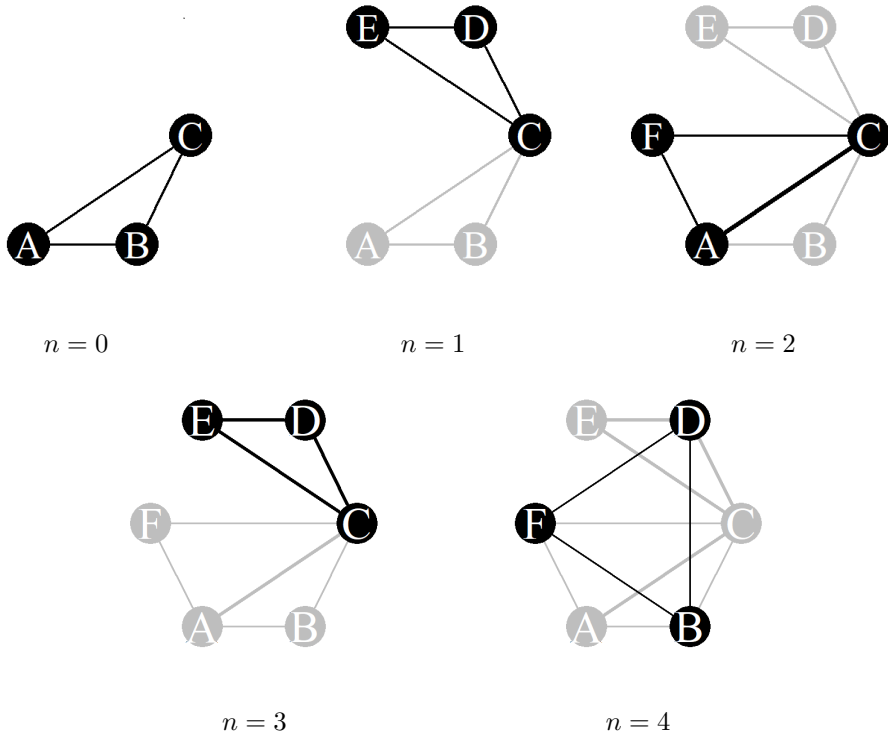
A modellben a  $p_k$  és  $r_k$ ,  $0 \leq p_k, r_k \leq 1$ ,  $k = 0, 1, \dots, N - 1$  valószínűségek rögzített valós számok,  $\sum_{k=0}^{N-1} p_k = 1$ .

A fenti jelölések mellett a dolgozatban vizsgált véletlen gráf modellt a továbbiakban  $G(N, p_0, \dots, p_{N-1}, r_0, \dots, r_{N-1})$  módon jelöljük. A modell evolúciós folyamatának megadása során használt **Step OLD** jelölést korábbi cikkek (lásd például Cooper és Frieze (2003), Fazekas és Porvázsnyik (2016a), Fazekas, Noszty és Percsényi (2018)) miatt megtartottuk. Megjegyezzük, hogy a **Step OLD** lépés jelölhető lenne **Step NEW<sub>0</sub>**-val is.

A gráf evolúciója során előfordulhat, hogy olyan, legalább 3 csúcs által meghatározott teljes gráfok is keletkeznek, melyek nem egy a csúcsaik közötti interakció eredményeként jöttek létre. Egy így létrejövő teljes gráfnak a súlya 0 marad mindaddig, míg az azt meghatározó csúcsok részt nem vesznek ugyanazon lépés során az interakcióban. Az evolúciós folyamat definíciója alapján azt is láthatjuk, hogy ebben a modellben egyenletes választás esetén régi csúcsok között is keletkezhetnek új élek.

A modell egy lehetséges fejlődését az egyik legegyszerűbb esetben az 1.1. ábrával szemléltetjük. Legyenek  $N = 3$ ,  $0 < p_i < 1$ ,  $0 < r_i < 1$  ( $i = 0, 1, 2$ ) rögzített valós számok.

A háromszög csúcseit az ABC nagy betűvel jelöljük. Az egyes lépésekben az interakció által meghatározott háromszögeket fekete színnel emeljük ki. Az  $N = 3$  esetben egyetlen háromszögből indulunk ki, melyben minden csúcsnak, minden élnek és magának a háromszögnek is a kezdeti súlya 1. Az első lépésben **Step NEW<sub>2</sub>** és **PA** választásra láthatunk példát. Ekkor a **DE** új él csatlakozik a gráfhoz, mely a **C** csúccsal interakcióba lépve egy háromszöget határoz meg. Ebben az új háromszögben a hiányzó éleket behúzzuk és minden klikk súlyát 1-gyel növeljük. Így az újonnan született **D** és **E** csúcsok, mindhárom új él, illetve a keletkezett **DCE** háromszög súlya 1 lesz, a kiválasztott régi **C** csúcs súlya pedig



1.1. ábra. A gráf egy lehetséges fejlődése az  $N = 3$  esetben, amikor  $0 < p_i < 1, 0 < r_i < 1$  ( $i = 0, 1, 2$ ) rögzített valós számok.

1-gyel nő. Ebben a lépésben speciálisan a súlyarányos választás és az egyenletes választás esetén is bármely csúcsot azonos  $\frac{1}{3}$  valószínűséggel választhattunk. A második lépés **Step NEW<sub>1</sub>** és **UNI** választásra mutat példát. Egy új csúcs ( $F$ ) csatlakozott a gráfhoz, melyhez egyenletesen választottunk két régi csúcsot ( $A$  és  $C$ ). A harmadik lépés a **Step OLD** és **PA** választást szemlélteti. Ebben az esetben a gráf mérete nem nő, súlyarányos valószínűséggel választunk egy háromszöget a már meglévőek közül. Bár ebben a lépésben foksámváltozás nem történik, a kiválasztott háromszög, valamint az azt meghatározó élek és csúcsok súlya 1-gyel nő. A negyedik lépésben a gráf **Step OLD** és **UNI** típusú lépés szerint fejlődik. Azaz ebben az esetben nem születik új csúcs és egyenletesen választunk három régi csúcsot. Láthatjuk, hogy ebben a modellben korábban nem szomszédos régi csúcsok között is jöhetnek létre új élek (lásd például 4. lépés,  $DB$  él). A modellben azon háromszögek súlyát, amelyek nem három csúcs kölcsönhatásának

eredményeként jöttek létre, mint például a 4. lépésben megjelenő *DFC* háromszög, 0-nak tekintjük. A példában szereplő gráfban a klikkek súlyváltozását az 1.1. táblázatban foglaltuk össze.

LÉPÉS	SÚLYVÁLTOZÁS					
	Csúcsok		Élek		Háromszögek	
n=0	A	1	AB	1	ABC	1
	B	1	AC	1		
	C	1	BC	1		
n=1	C	2	DC	1	DCE	1
	D	1	DE	1		
	E	1	CE	1		
n=2	A	2	AF	1	AFC	1
	F	1	AC	2		
	C	3	FC	1		
n=3	D	2	DC	2	DCE	2
	C	4	DE	2		
	E	2	EC	2		
n=4	D	3	DB	1	DBF	1
	B	2	DF	1		
	F	2	BF	1		

1.1. táblázat. A klikkek súlyainak változása az 1.1. ábrával szemléltetett esetben.

A következő megjegyzésben a modell súly- és fokszámnövekedésére vonatkozó alaptulajdonságait ismertetjük. Ezen tulajdonságok a gráf, illetve az evolúciós folyamat definíciójának egyszerű következményei.

1.1. MEGJEGYZÉS. Minden lépésben  $p_k$  valószínűséggel  $k$  darab 1 súlyú és  $N - 1$  foksámú új csúcs csatlakozik a gráfhoz.

A gráf fejlődése során az interakcióban részt vevő már létező csúcsok súlyai és foksámái a következőképpen változhatnak. Egy rögzített  $M$ -klikk ( $1 \leq M \leq N$ ) súlya pontosan akkor nő, ha interakcióban vesz részt. Az interakcióban részt vevő régi csúcsok foksáma **Step NEW<sub>k</sub>** és PA lépés esetén pontosan  $k$ -val, míg **Step NEW<sub>k</sub>** és UNI lépés esetén legalább  $k$ -val, de legfeljebb  $N - 1$ -gyel nő. Azaz a lehetséges fokszámnövekedés az utóbbi esetben  $k, k + 1, \dots, N - 1$ . **Step OLD** és PA lépés esetén a csúcsok foksáma változatlan marad, ebben az esetben csak súlynövekedés történik. **Step OLD** és UNI lépés esetén a lehetséges fokszámnövekedés  $0, 1, 2, \dots, N - 1$ . Ezen lépésben nem történik a gráfban foksámváltozás, ha a lépés során  $N$  olyan csúcs kerül kiválasztásra, melyek gráfelméleti szempontból  $N$ -klikket alkotnak. Azaz egy az interakcióban részt vevő  $d$  fokú csúcs

$(N - 1 \leq d)$  fokszáma változatlan marad, ha a lépés során az  $N - 1$  régi csúcs az adott csúcs  $d$  szomszédja közül kerül kiválasztásra.

**Különbségek és kapcsolat más modellekkel** Az előző fejezetben több, a  $G(N, p_0, \dots, p_{N-1}, r_0, \dots, r_{N-1})$  véletlen gráfhoz kapcsolódó modellt mutattunk be. Cooper és Frieze (2003), illetve Backhausz és Móri (2012, 2014) háromszöges modelljéhez hasonlóan, a dolgozatban vizsgált modellben az interakcióban részt vevő régi csúcsok kiválasztása történhet egyenletesen, vagy pedig a preferential attachment szabály alkalmazásával, ám ahogyan a háromszöges modellben is, a preferential attachment választás alatt súlyarányos választást értünk. Ugyancsak rendelkezik a  $G(N, p_0, \dots, p_{N-1}, r_0, \dots, r_{N-1})$  modell a fenti modellek azon tulajdonságával, hogy új kapcsolatok, új élek régi csúcsok között is létrejöhetnek.

Modellünk több ponton eltér a korábban ismertetett modellektől. Az egyik nyilvánvaló és lényeges különbség, hogy az egyes lépésekben nem feltétlenül egyetlen csúcst adhatunk hozzá a gráfhoz. Az evolúciós folyamat során azon lépésekben, amelyekben a gráf mérete nő, egy véletlen számú új csúcs által meghatározott klikk csatlakozik a gráfhoz. Backhausz és Móri (2012, 2014), illetve Cooper és Frieze (2003) modelljében bármely lépésben legfeljebb 1 új csúcs születik. Wang et al. (2009) modelljében bár minden lépésben egy új klikk csatlakozik a gráfhoz, ám annak mérete rögzített. A gráf evolúciója során **Step**  $NEW_k$  és **PA** lépés esetén egy pozitív súllyal rendelkező régi  $(N - k)$ -klikket választunk súlyarányosan. Azaz Cooper és Frieze (2003) modelljétől eltérően, bizonyos lépésekben a régi csúcsok kiválasztásakor csak azokat a csúcshalmazokat tekintjük, melynek elemei már vettek részt közösen interakcióban. További eltérés a két modell között, hogy esetünkben az interakcióban részt vevő csúcsok száma rögzített egész szám.

A dolgozatban vizsgált véletlen gráf modell meglehetősen általános. A háromszöges modell, illetve annak általánosítása, az  $N$ -pontos modell szoros kapcsolatban állnak a  $G(N, p_0, \dots, p_{N-1}, r_0, \dots, r_{N-1})$  modellel. Legyen  $0 \leq p_i \leq 1$ ,  $0 \leq r_i \leq 1$  ( $i = 0, 1$ ),  $p_j = r_j = 0$  ( $j = 2, \dots, N - 1$ ). A  $G(3, p_0, p_1, r_0, r_1)$  modell megegyezik a korábban már bemutatott háromszöges modellel, melyet Backhausz és Móri (2012, 2014) vezetett be. A háromszöges modell általánosításait, a  $G(4, p_0, p_1, r_0, r_1)$  4-pontos modellt, majd a  $G(N, p_0, p_1, r_0, r_1)$   $N$ -pontos modellt ( $N \geq 3$  rögzített egész szám) Fazekas és Porvázsnik (2013, 2016a,b) ismertette és tanulmányozta.

Amennyiben az  $N = 2$  értéket is megengedjük, úgy a Barabási-Albert véletlen fa egy általánosítását kapjuk. Ezt a modellt vizsgálta Fazekas és Pecsora (2015), illetve bizonyította annak skálafüggetlenségét. Megjegyezzük, hogy a dolgozatban tárgyalt eredmények és bizonyításai nem alkalmazhatóak közvetlenül a  $G(2, p_0, p_1, r_0, r_1)$  modellre, annak néhány eltérő alaptulajdonsága miatt.

A továbbiakban két függvény,  $f(x)$  és  $g(x) \neq 0$  aszimptotikus egyenlősége alatt azt értjük, hogy  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$ , és  $f(x) \sim g(x)$  módon jelöljük.

## 1.2. Fő eredmények

Ebben a fejezetben ismertetni fogjuk a  $G(N, p_0, \dots, p_{N-1}, r_0, \dots, r_{N-1})$  modellre vonatkozó fő eredményeinket. Látni fogjuk, hogy a vizsgált modellben a súlyeloszlás, illetve bizonyos esetekben a fokszámoszlás is skálafüggetlen.

A skálafüggetlenséget kimondó eredményeket általánosan az alábbi formában igazoljuk. A fokszámoszlás skálafüggetlenségének igazolása során megmutatjuk, hogy a  $d$  fokú csúcok aránya majdnem biztosan konvergál valamilyen  $q_d$  valószínűségeloszláshoz  $n \rightarrow \infty$  esetén. Továbbá a  $q_d$  aszimptotikus fokszámoszlásra teljesül, hogy  $q_d \sim C_1 d^{-\gamma_1}$  valamilyen  $C_1$  és  $\gamma_1$  pozitív konstansokkal, amint  $d \rightarrow \infty$ , azaz a  $q_d$  sorozat aszimptotikusan hatványrendben cseng le. Hasonlóan, a súlyeloszlás skálafüggetlenségének bizonyítása során belátjuk, hogy a  $w$  súlyú csúcok aránya majdnem biztosan konvergál valamilyen  $q_w$  valószínűségeloszláshoz  $n \rightarrow \infty$  esetén, ahol a  $q_w$  aszimptotikus súlyeloszlás hatványrendben cseng le, azaz  $q_w \sim C_2 w^{-\gamma_2}$  valamilyen  $C_2$  és  $\gamma_2$  pozitív konstansokkal, amint  $w \rightarrow \infty$ . (Lásd még Durrett (2007), Backhausz (2012), Backhausz és Móri (2012, 2014) vagy van der Hofstad (2017).)

Vezessük be az alábbi jelöléseket.

$$\alpha = \sum_{k=0}^{N-1} \alpha_k, \quad \text{ahol} \quad \alpha_k = \frac{N-k}{N} p_k r_k,$$

$$\beta = \frac{1}{A} \sum_{k=0}^{N-1} \beta_k, \quad \text{ahol} \quad \beta_k = (N-k) p_k (1-r_k) \quad \text{és} \quad A = \sum_{k=0}^{N-1} k p_k, \quad (1.1)$$

$$a_M = \sum_{k=0}^{N-M} \alpha_k \frac{\binom{N-M}{k}}{\binom{N-1}{k}}, \quad b_M = \sum_{k=0}^{N-M} \beta_k \frac{\binom{N-M}{k}}{\binom{N-1}{k}}.$$

Könnyen láthatjuk, hogy  $M = 1$  esetén  $a_1 = \alpha$  és  $b_1 = A\beta$  teljesül. Továbbá  $A$  jelöli az egy lépésben megjelenő új csúcok számának várható értékét. Azt vehetjük észre, hogy míg az  $\alpha$  és  $\alpha_k$  mennyiségeket meghatározó valószínűségek a modell preferential attachment részéhez kapcsolódnak, addig  $\beta$ -t és  $\beta_k$ -t az egyenletes választáshoz kapcsolódó valószínűségek határozzák meg.

Jelölje  $V_n$  a csúcok számát  $n$  lépés után, és jelölje  $X(n, d, w)$  a  $d$  foksámú és  $w$  súlyú csúcok számát  $n$  lépés után. Az alábbi tétel egy alapvető fontosságú eredményt ismertet az  $\frac{X(n, d, w)}{V_n}$  hányados majdnem biztos konvergenciájáról.

Ez az eredmény fontos szerepet fog játszani a csúcok súly- és fokszámoszlásának skálafüggetlenségéről szóló tételek bizonyításában is.

1.2. TÉTEL. Legyen  $\alpha \neq \alpha_0$ . Minden rögzített  $w$  és  $d$  esetén, ahol  $1 \leq w$  és  $N - 1 \leq d \leq w(N - 1)$ ,

$$\frac{X(n, d, w)}{V_n} \rightarrow x_{d,w} \quad (1.2)$$

majdnem biztosan  $n \rightarrow \infty$  esetén, ahol az  $x_{d,w}$  határértékek rögzített nemnegatív számok, melyek teljesítik az alábbi rekurziót:

$$x_{N-1,1} = \frac{1}{\alpha + \beta + 1} > 0, \quad x_{d,1} = 0, \quad \text{ha } d \neq N - 1, \quad (1.3)$$

$$x_{d,w} = \frac{1}{\alpha w + \beta + 1} \left[ \sum_{k=0}^{N-1} \alpha_k (w-1) x_{d-k,w-1} + \beta x_{d-(N-1),w-1} \right] \quad (1.4)$$

ha  $w \geq 2$ ,  $N - 1 \leq d \leq w(N - 1)$ .

Minden  $N \geq 3$  esetén létezik olyan  $(d, w)$  pár,  $1 \leq w$ ,  $N - 1 \leq d \leq (N - 1)w$ , melyre  $x_{d,w}$  pozitív. Továbbá  $x_{d,w} = 0$  esetén  $\frac{X(n, d, w)}{V_n} = o(n^{-a})$ , ahol  $a$  egy pozitív szám, mely  $w$ -től és  $d$ -től is függhet.

Ha  $N - 1 \leq d \leq (N - 1)w$  nem teljesül, akkor  $x_{d,w} = 0$ .

1.3. MEGJEGYZÉS. A modell evolúciós folyamatának egyszerű következménye, hogy bármely csúcs fokszáma legalább  $N - 1$ . Mivel egy  $w$  súlyú csúcs pontosan  $w$  alkalommal vett részt interakcióban, ezért fokszáma legfeljebb  $(N - 1)w$  lehet. Ezért olyan  $(d, w)$  párokra, melyekre nem teljesül az  $N - 1 \leq d \leq (N - 1)w$  feltétel, nem létezhet  $d$  fokú és  $w$  súlyú csúcs. Ez az eset lényegesen különbözik attól az esettől, amikor  $x_{d,w} = 0$  a rekurzióból következik, ugyanis ez utóbbi esetben áll fenn, hogy  $\frac{X(n, d, w)}{V_n} = o(n^{-a})$ .

Legyen  $M$  egy rögzített egész szám,  $1 \leq M \leq N$ . A következő tételek az  $M$ -klikkek súlyainak skálafüggetlenségéről szólnak.

Legyen  $M = 1$  és jelölje  $X(n, w)$  a  $w$  súlyú csúcsok számát  $n$  lépés után. Az alábbi tétel a csúcsok súlyainak skálafüggetlenségét mondja ki. A tétel szerint rögzített  $w \geq 1$  esetén, a  $w$  súlyú csúcsok aránya 1 valószínűséggel konvergens. A határértékek pozitív számok, melyek sorozatára rekurziót adunk és annak polinomiális csökkenését is belátjuk.

1.4. TÉTEL. Legyen  $\alpha \neq \alpha_0$ . Minden  $w = 1, 2, \dots$  esetén

$$\frac{X(n, w)}{V_n} \rightarrow x_w = \sum_d x_{d,w} \quad (1.5)$$

majdnem biztosan  $n \rightarrow \infty$  esetén, ahol az  $x_w$ ,  $w = 1, 2, \dots$  határértékek pozitív számok, melyek teljesítik az alábbi rekurziót:

$$x_1 = \frac{1}{\alpha + \beta + 1}, \quad x_w = \frac{\alpha(w-1) + \beta}{\alpha w + \beta + 1} x_{w-1}, \quad \text{ha } w > 1. \quad (1.6)$$

Továbbá

$$x_w \sim C w^{-(1+\frac{1}{\alpha})} \quad (1.7)$$

teljesül  $w \rightarrow \infty$  esetén, ahol  $C = \Gamma\left(1 + \frac{\beta+1}{\alpha}\right) / \left(\alpha \Gamma\left(1 + \frac{\beta}{\alpha}\right)\right)$ .

Legyen most  $2 \leq M \leq N$  rögzített egész szám. Legyen  $w \geq 1$  és jelölje  $C(n, M, w)$  a  $w$  súlyú  $M$ -klikkek számát  $n$  lépés után,  $C_{n,M}$  pedig az  $M$ -klikkek számát  $n$  lépés után. Az  $M$ -klikkek súlyeloszlásának skálafüggetlenségéről szól a következő eredmény.

1.5. TÉTEL. Legyen  $\alpha \neq \alpha_0$  és  $\sum_{k=0}^{N-M} \alpha_k > 0$ . Ekkor minden rögzített  $M$  és  $w$ ,  $2 \leq M \leq N$ ,  $w \geq 1$  esetén

$$\frac{C(n, M, w)}{C_{n,M}} \rightarrow c_{M,w} \quad (1.8)$$

majdnem biztosan  $n \rightarrow \infty$  esetén. A  $c_{M,w}$ ,  $w = 1, 2, \dots$  határértékek rögzített pozitív számok, melyek teljesítik az alábbi rekurziót:

$$c_{M,1} = \frac{1}{a_M + 1}, \quad c_{M,w} = \frac{(w-1)a_M}{w a_M + 1} c_{M,w-1}, \quad \text{ha } w > 1, \quad (1.9)$$

ahol az  $a_M$  mennyiséget (1.1)-ben definiáltuk. A  $c_{M,1}, c_{M,2}, \dots$  sorozat egy valódi diszkrét valószínűségeloszlás. Továbbá

$$c_{M,w} \sim \frac{\Gamma\left(1 + \frac{1}{a_M}\right)}{a_M} w^{-(1+\frac{1}{a_M})} \quad (1.10)$$

teljesül  $w \rightarrow \infty$  esetén.

1.6. MEGJEGYZÉS. Amennyiben a modell fejlődését csak a preferential attachment szabály szerinti súlyarányos választás határozza meg és az egyenletes választás valószínűsége pedig 0, és így az egyenletes választáshoz kapcsolódó  $\beta$  paraméter értéke is 0, akkor az 1.5. Tétel állítása megegyezik az 1.4. Tétel állításával. Amennyiben  $\beta$  értéke pozitív, azaz az egyes lépések során az interakcióban részt vevő régi csúcsok kiválasztása történhet egyenletesen is, úgy az 1.4. Tétel és az 1.5. Tétel állítása különböző. Ezen eltérés oka, ahogyan azt az 1.5. Tétel bizonyítása során látni fogjuk, hogy a  $2 \leq M \leq N$  feltétel miatt az egyenletes választáshoz kapcsolódó mennyiségek nagyságrendileg kisebbek, mint más megelőző (a modell preferential attachment részéhez kapcsolódó) tagok, és ennek következményeként a számítások során aszimptotikusan elhanyagolhatóak.

Jelölje  $U(n, d)$  a  $d$  fokú csúcsok számát  $n$  lépés után, és jelölje  $\gcd\{A\}$  az  $A$  halmaz elemeinek legnagyobb közös osztóját.

A  $G(N, p_0, \dots, p_{N-1}, r_0, \dots, r_{N-1})$  modell az (1.11) feltétel teljesülése esetén a szokásos értelemben (azaz a fokszámokra vonatkozóan) is skálafüggetlen. Erről szól az alábbi eredmény, mely szerint ekkor a  $d$  fokszámú csúcsok aránya 1 valószínűséggel konvergens. A határértékek nemnegatív számok, melyek sorozata hatványrendben cseng le.

1.7. TÉTEL. *Legyen  $\alpha_0 > 0$ ,  $\alpha \neq \alpha_0$  és tegyük fel, hogy*

$$\gcd\{k|\alpha_k > 0, k = 0, \dots, N-1\} = 1. \quad (1.11)$$

*Ekkor minden  $d \geq N-1$  esetén*

$$\frac{U(n, d)}{V_n} \rightarrow u_d = \sum_w x_{d,w} \quad (1.12)$$

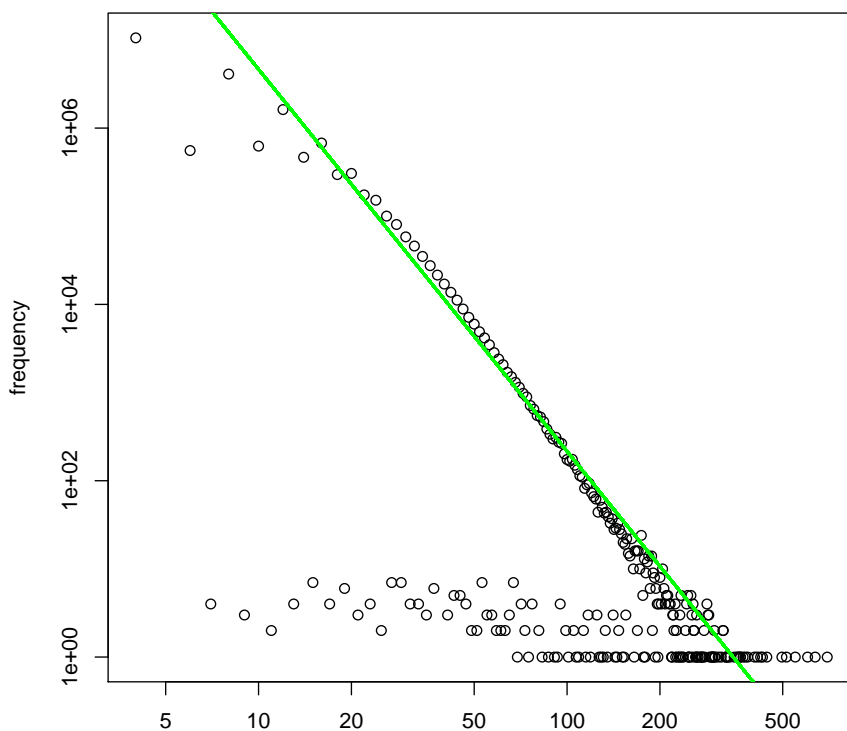
*majdnem biztosan  $n \rightarrow \infty$  esetén, ahol az  $u_d$ ,  $d = N-1, N, \dots$  határértékek pozitív számok. Továbbá*

$$u_d \sim \frac{\Gamma\left(1 + \frac{\beta+1}{\alpha}\right)}{\sum_{k=1}^{N-1} k\alpha_k \Gamma\left(1 + \frac{\beta}{\alpha}\right)} \left(\frac{\alpha}{\sum_{k=1}^{N-1} k\alpha_k} d\right)^{-(1+\frac{1}{\alpha})} \quad (1.13)$$

*teljesül  $d \rightarrow \infty$  esetén.*

Az aszimptotikus fokszámeloszlás meghatározása abban az esetben, amikor az (1.11) feltétel nem teljesül, egy jelenleg nyitott probléma. Előzetes numerikus eredmények azt mutatják, hogy az (1.11) feltétel szükséges a fokszámokra vonatkozó skálafüggetlenség teljesüléséhez (lásd Fazekas, Perecsényi és Porváznay, 2017). Más esetben bár a modell nem skálafüggetlen, de tartalmaz egy skálafüggetlen komponenst. Ezt mutatja a következő 1.3. ábra is, melyet Perecsényi Attila készített egy olyan esetet vizsgálva, amelyben nem teljesül az (1.11) feltétel. Az 1.3. ábra az  $N = 5$  esetben a  $p_0 = p_2 = p_4 = \frac{1}{3}$ ,  $p_1 = p_3 = 0$  és  $r_0 = r_2 = r_4 = \frac{1}{2}$ ,  $r_1 = r_3 = 0$  paraméterértékek mellett log-log grafikonon (azaz mindkét tengelyen logaritmikus skálát alkalmazva) szemlélteti az empirikus fokszámeloszlás (pontozott vonal) viselkedését. A szimuláció során a lépések száma  $n = 10^7$ . A szimulációs eredmények alapján láthatjuk, hogy a modell egy része skálafüggetlen viselkedést mutat (azaz a tapasztalati eloszlás egy részére egyenes illeszthető). Itt viszonylag kevés csúcs rendelkezik nagyon sok kapcsolattal, a kevés kapcsolattal rendelkező csúcsok száma pedig magas. Azonban az ábra alján látszólag véletlen módon elhelyezkedő ponthalmaz arra mutat rá, hogy a modell egy másik része nem skálafüggetlen.





1.2. ábra. Az empirikus fokszámeloszlás az  $N = 5$  esetben a  $p_0 = p_2 = p_4 = \frac{1}{3}$ ,  $p_1 = p_3 = 0$  és  $r_0 = r_2 = r_4 = \frac{1}{2}$ ,  $r_1 = r_3 = 0$  paraméterértékek mellett.

1.8. MEGJEGYZÉS. A  $\gamma$  karakterisztikus kitevő értéke az  $M$ -klikkek ( $1 \leq M \leq N$ ) súlyaiba  $1 + \frac{1}{a_M}$ , a fokszámokra pedig  $1 + \frac{1}{\alpha}$ . Azaz a karakterisztikus kitevő értéke a csúcsok súlyai és fokszámai esetén megegyezik.

1.9. MEGJEGYZÉS. Könnyen látható, hogy a háromszöges, a 4-pontos és az  $N$ -pontos modell esetében teljesül az (1.11) feltétel. Ezekben a modellekben a fokszámeloszlás skálafüggetlen viselkedést mutat, a karakterisztikus kitevő értéke mindhárom esetben  $1 + \frac{1}{\alpha}$ .



## 1.3. Bizonyítások

Ebben a fejezetben megadjuk az 1.2 fejezetben ismerttetett fő eredmények bizonyításait. A bizonyítások során tételek és lemmák segítségével a modellre vonatkozó további eredményeinket is bemutatjuk. Az 1.2. Tétel, az 1.4. Tétel és az 1.7. Tétel bizonyításában Backhausz és Móri (2012, 2014) gondolatmenetét, az 1.5. Tétel bizonyításakor Fazekas, Noszály és Perecsényi (2015) módszerét követjük. Megjegyezzük, hogy a dolgozatban vizsgált modell jóval általánosabb, mint a Backhausz és Móri (2012, 2014) cikkekben tárgyalt modell. A bizonyítások során több olyan új kérdés is felmerül, amely a háromszöges modell esetében nem. Az eredmények bizonyításához szükséges számítások nehezebbek és hosszabbak, mint azok akár a háromszöges, akár az  $N$ -pontos modell esetén. Azonban látni fogjuk, hogy bizonyos tagok aszimptotikusan elhanyagolhatóak, így az eredményül kapott formulák hasonlóan egyszerűek, mint a fenti modellekre vonatkozóak.

A bizonyításokban ismert valószínűségelméleti és martingáleméleti eredményeket alkalmazunk. Mielőtt rátérnénk a fő eredmények bizonyítására, az egyszerűség kedvéért összefoglaljuk az ebben a részben leggyakrabban felhasznált eredményeket Neveu (1975) könyve alapján.

Az 1.2. Tétel, illetve az ebben az alfejezetben szereplő 1.20. Tétel és 1.23. Tétel bizonyításának egyik fő eszköze a szubmartingálok Doob-Meyer felbontási tétele.

1.10. TÉTEL. *(Szubmartingálok Doob-Meyer felbontása, Neveu, 1975, Proposition VII-1-2.)* Legyen  $\{Z(n), \mathcal{F}_n, n = 1, 2, \dots\}$  szubmartingál. Ekkor  $Z(n)$  egyértelműen felírható

$$Z(n) = M(n) + A(n)$$

alakban, ahol  $M(n)$  martingál és  $A(n)$  pedig előrejelezhető növekvő folyamat az  $\mathcal{F}_n$  filtrációra nézve. Az  $M(n)$  és  $A(n)$  folyamatok általános alakja a következő:

$$M(n) = \sum_{i=1}^n [Z(i) - \mathbb{E}(Z(i) | \mathcal{F}_{i-1})], \quad (1.14)$$

$$A(n) = \mathbb{E}Z(1) + \sum_{i=2}^n [\mathbb{E}(Z(i) | \mathcal{F}_{i-1}) - Z(i-1)], \quad (1.15)$$

ahol  $\mathcal{F}_0$  a triviális  $\sigma$ -algebrát jelöli.

Minden (az azonosan nulla folyamattól különböző)  $M(n)$  négyzetesen integrálható martingálra fennáll, hogy az  $M^2(n)$  folyamat pozitív integrálható szubmartingál. Az  $M^2(n)$  folyamat Doob-Meyer felbontása

$$M^2(n) = Y(n) + B(n),$$

ahol  $Y(n)$  egy martingál és  $B(n)$  egy előrejelezhető növekvő folyamat. Továbbá a  $B(n)$  folyamat megegyezik (egy konstans tagtól eltekintve) a  $Z(n)$  folyamat feltételes szórásnégyzeteinek összegével, azaz

$$B(n) = \sum_{i=2}^n \mathbb{D}^2(Z(i) | \mathcal{F}_{i-1}) = \sum_{i=2}^n \mathbb{E}\{(Z(i) - \mathbb{E}(Z(i) | \mathcal{F}_{i-1}))^2 | \mathcal{F}_{i-1}\}. \quad (1.16)$$

Az 1.2. Tétel bizonyítása során több alkalommal alkalmazzuk az alábbi eredményeket.

1.11. ÁLLÍTÁS. (Neveu, 1975, Proposition VII-2-3.(c).) Legyen  $M(n)$  négyzetesen integrálható martingál,  $M(0) = 0$ , és legyen  $B(n)$  az  $M^2(n)$  szubmartingál Doob-Meyer felbontásában szereplő előrejelezhető, növekvő folyamat. Ekkor a  $\{B(\infty) < \infty\}$  eseményen az  $M(n)$  martingál majdnem biztosan konvergens.

1.12. ÁLLÍTÁS. (Neveu, 1975, Proposition VII-2-4.) Legyen  $M(n)$  négyzetesen integrálható martingál,  $M(0) = 0$ , és legyen  $B(n)$  az  $M^2(n)$  szubmartingál Doob-Meyer felbontásában szereplő előrejelezhető, növekvő folyamat. Ekkor  $M(n) = o\left((B(n))^{\frac{1}{2}} \log B(n)\right)$  a  $\{B(n) \rightarrow \infty\}$  eseményen majdnem biztosan.

### 1.3.1. A $d$ fokszámú és $w$ súlyú csúcsok arányának egy valószínűségű konvergenciája

Ezen részben célunk az 1.2. Tétel bizonyítása. Meg fogjuk mutatni, hogy a  $d$  fokú és  $w$  súlyú csúcsok aránya 1 valószínűséggel konvergens. A határértékek rögzített nemnegatív számok, melyek teljesítik az (1.3)-(1.4) rekurziót. A pozitív határértékek esetén bár a számítások nehezebbek, de alkalmazható Backhausz és Móri háromszöges modellre adott módszere. Látni fogjuk azonban, hogy ez nem igaz a 0 határértékekre, ezért ezeket az eseteket a bizonyítás során külön kezeljük.

Ebben az alfejezetben legyen  $1 \leq M \leq N$  rögzített egész szám. Elsőként az alábbi lemmával megadjuk annak a valószínűségét, hogy egy  $w$  súlyú rögzített  $M$ -klikk az  $n$ -edik lépésben részt vesz az interakcióban. Ez az eredmény később hasznosnak bizonyul majd az  $M$ -klikkek súlyaira vonatkozó skálafüggetlenség igazolásában is a  $2 \leq M \leq N$  esetben.

1.13. LEMMA. *Annak a valószínűsége, hogy egy  $w$  súlyú  $M$ -klikk,  $1 \leq w, 1 \leq M \leq N$ , az  $n$ -edik ( $n \geq w$ ) lépésben részt vesz az interakcióban*

$$p(n, M, w) = \frac{w}{n} a_M + \frac{\binom{N}{M}}{N \binom{N-1}{M}} b_M, \quad (1.17)$$

ahol az  $a_M$  és  $b_M$  mennyiségeket (1.1)-ben definiáltuk.

BIZONYÍTÁS. Tegyük fel, hogy az  $n$ -edik lépésben  $k$  új csúcs csatlakozik a gráfhoz. Ekkor egy rögzített  $w$  súlyú  $M$ -klikk akkor vehet részt az interakcióban, ha  $k \leq N - M$ . Az  $(N - k)$ -klikkek összsúlya az  $n$ -edik lépésben  $\binom{N}{N-k}n$ . Azoknak az  $(N - k)$ -klikkeknek az összsúlya az  $n$ -edik lépésben, melyek tartalmazzák a  $w$  súlyú  $M$ -klikket  $\binom{N-M}{N-k-M}w$ , ahol  $N - k \geq M$ . PA választás esetén, azaz amikor egy  $(N - k)$ -klikk kerül kiválasztásra a már létező  $(N - k)$ -klikkek közül a preferential attachment szabálynak megfelelően, akkor annak a valószínűsége, hogy egy rögzített  $w$  súlyú  $M$ -klikket az  $n$ -edik lépésben kiválasztunk

$$\frac{\binom{N-M}{N-k-M}w}{\binom{N}{N-k}n}.$$

UNI választás esetén, azaz ha egyenletesen választunk  $N - k$  régi csúcsot, akkor annak a valószínűsége, hogy az  $n$ -edik lépésben egy rögzített  $M$ -klikket kiválasztunk

$$\frac{\binom{V_{n-1}-M}{N-k-M}}{\binom{V_{n-1}}{N-k}}.$$

Mindezeket felhasználva kapjuk, hogy a keresett valószínűség

$$\begin{aligned} p(n, M, w) &= \sum_{k=0}^{N-M} p_k \left( r_k \frac{\binom{N-M}{k}w}{\binom{N}{k}n} + (1 - r_k) \frac{\binom{V_{n-1}-M}{N-k-M}}{\binom{V_{n-1}}{N-k}} \right) = \\ &= \sum_{k=0}^{N-M} \alpha_k \frac{\binom{N-M}{k}}{\binom{N-1}{k}} \frac{w}{n} + \frac{1}{V_{n-1}} \sum_{k=0}^{N-M} \beta_k \frac{\binom{V_{n-1}-M}{N-k-M}}{\binom{V_{n-1}-1}{N-k-1}} = \\ &= \frac{w}{n} a_M + \frac{\binom{N}{M}}{N \binom{V_{n-1}}{M}} b_M. \end{aligned}$$

□

1.14. MEGJEGYZÉS. Az  $M = 1$  esetben az 1.13. Lemma állítása a következő. Annak a valószínűsége, hogy egy  $w$  súlyú régi csúcs részt vesz az interakcióban az  $n$ -edik lépésben

$$p(n, 1, w) = \sum_{k=0}^{N-1} p_k \left( r_k \frac{(N-k)w}{Nn} + (1 - r_k) \frac{N-k}{V_{n-1}} \right) = \frac{w}{n} \alpha + \frac{A}{V_{n-1}} \beta. \quad (1.18)$$

Jelölje  $\mathcal{F}_n$  az első  $n$  lépés által generált  $\sigma$ -algebrát. A következő tételben megadjuk  $X(n, d, w)$ , azaz a  $d$  fokú és  $w$  súlyú csúcsok számának feltételes várható értékét az  $\mathcal{F}_{n-1}$   $\sigma$ -algebrára nézve.

1.15. TÉTEL.

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\{X(n, d, w) | \mathcal{F}_{n-1}\} &= X(n-1, d, w) \left[ 1 - \left( \frac{w}{n} \alpha + \frac{A}{V_{n-1}} \beta \right) \right] + \\ &+ \sum_{k=0}^{N-1} X(n-1, d-k, w-1) \left[ p_k r_k \frac{(N-k)(w-1)}{Nn} + \right. \\ &\left. + \sum_{m=0}^k p_m (1-r_m) \frac{\binom{V_{n-1}-d+k-1}{k-m} \binom{d-k}{N-k-1}}{\binom{V_{n-1}}{N-m}} \right] + A \delta_{d, N-1} \delta_{w, 1} \end{aligned} \quad (1.19)$$

$w \geq 1$  és  $N-1 \leq d \leq (N-1)w$  esetén, ahol  $\delta_{k,l}$  a Kronecker-deltát jelöli.

Az 1.15. Tételben szereplő feltételes várható érték meghatározásához a modell alapvető tulajdonságait használjuk fel.

**BIZONYÍTÁS.** Tekintsünk egy rögzített  $d$  fokú és  $w$  súlyú csúcsot az  $n$ -edik lépés után. Az 1.1. Megjegyzésben korábban összefoglaltuk, hogy egy adott lépés során hogyan változhatnak a csúcsok súlyai és fokszámai. Ezt, a modell definícióját és az 1.14. Megjegyzést felhasználva kapjuk, hogy annak a valószínűsége, hogy az  $n$ -edik lépésben ezen csúcsnak

- sem a  $d$  fokszáma, sem a  $w$  súlya nem változik

$$1 - \left( \frac{w}{n} \alpha + \frac{A}{V_{n-1}} \beta \right);$$

- a fokszáma  $k$ -val ( $0 \leq k \leq N-1$ ), a súlya pedig 1-gyel nő

$$p_k r_k \frac{(N-k)(w-1)}{Nn} + \sum_{m=0}^k p_m (1-r_m) \frac{\binom{V_{n-1}-d+k-1}{k-m} \binom{d-k}{N-k-1}}{\binom{V_{n-1}}{N-m}}.$$

A második esetben szereplő formula abból következik, hogy egy az interakcióban részt vevő rögzített  $d$  fokú csúcs fokszáma pontosan  $k$ -val nő ( $0 \leq k \leq N-1$ )

- **Step NEW<sub>k</sub>** és **PA** lépés esetén;
- **Step NEW<sub>m</sub>** és **UNI** lépés esetén ( $1 \leq m \leq k$ ), ha a kiválasztott  $N-m-1$  régi csúcs közül pontosan  $N-k-1$  már a rögzített csúcs szomszédja;
- **Step OLD** és **UNI** lépés esetén, ha a kiválasztott  $N-1$  régi csúcs közül pontosan  $N-k-1$  csúcs a rögzített csúcs szomszédja.

A fenti formulákat összegezve a keresett feltételes várható értéket kapjuk.  $\square$

A következő lemmában definiált valószínűségi változók fontos szerepet játszanak a dolgozatban. Az ezen változók felhasználásával megadott folyamatok több esetben is a bizonyítások alapjául szolgálnak majd.

1.16. LEMMA. *Legyen  $p_0 < 1$  és legyen  $1 \leq M \leq N$  rögzített egész szám. Legyen*

$$c(n, M, w) = \prod_{i=w}^n (1 - p(i, M, w))^{-1}, \quad n \geq w, w \geq 1. \quad (1.20)$$

*Ekkor  $c(n, M, w)$  egy  $\mathcal{F}_{n-1}$ -mérhető valószínűségi változó.*

$$c(n, 1, w) \sim a_{1,w} n^{a_1 w + \beta} \quad (1.21)$$

és

$$c(n, M, w) \sim a_{M,w} n^{a_M w}, \quad \text{ha } 2 \leq M \leq N \quad (1.22)$$

*majdnem biztosan  $n \rightarrow \infty$  esetén, ahol az  $a_M$  mennyiséget (1.1)-ben definiáltuk és  $a_{M,w}$  egy pozitív valószínűségi változó.*

BIZONYÍTÁS. Alkalmazzuk a Marcinkiewicz-féle nagy számok erős törvényét a csúcsok számára. Azt kapjuk, hogy

$$V_n = An + o\left(n^{1/2+\varepsilon}\right) \quad (1.23)$$

majdnem biztosan bármely  $\varepsilon > 0$ -ra.  $\log(1+x)$  Taylor sorfejtését  $c(n, M, w)$  logaritmusára felírva, majd felhasználva a csúcsok számának (1.23) formulával adott aszimptotikáját és az 1.13. Lemma bizonyítását azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \log c(n, M, w) &= - \sum_{i=w}^n \log \left( 1 - \frac{w}{i} a_M - \frac{1}{V_{i-1}} \sum_{k=0}^{N-M} \beta_k \frac{\binom{V_{i-1}-M}{N-k-M}}{\binom{V_{i-1}-1}{N-k-1}} \right) \sim \\ &\sim a_M w \sum_{i=w}^n \frac{1}{i} + \sum_{i=w}^n \sum_{k=0}^{N-M} \beta_k \tau_k \frac{1}{(Ai + o(i^{1/2+\varepsilon}))^M} \sim \\ &\sim a_M w \log n + \sum_{i=w}^n \sum_{k=0}^{N-M} \beta_k \tau_k \left( \frac{1}{Ai} + o(i^{-3/2+\varepsilon}) \right)^M, \end{aligned} \quad (1.24)$$

ahol  $\tau_k = \frac{(N-k-1)!}{(N-k-M)!}$ . Könnyen láthatjuk, hogy  $\tau_k = 1$  ha  $M = 1$ . Így  $M = 1$  esetén

$$c(n, 1, w) \sim \exp\{(a_1 w + \beta) \log n + O(1)\},$$

míg a  $2 \leq M \leq N$  esetben

$$c(n, M, w) \sim \exp\{a_M w \log n + O(1)\}.$$

A fenti egyenletek felhasználásával a lemma állítása adódik.  $\square$

Mindezek után térjünk rá az 1.2. Tétel bizonyítására.

*Az 1.2. Tétel bizonyítása.* Az 1.16. Lemmában definiált  $c(n, 1, w)$  valószínűségi változók segítségével definiáljuk a következő folyamatot. Legyen

$$Z(n, d, w) = c(n, 1, w) X(n, d, w), \quad 1 \leq w, N-1 \leq d \leq w(N-1).$$

Az 1.15. Tételben megadott feltételes várható érték felhasználásával megmutatható, hogy  $\{Z(n, d, w), \mathcal{F}_n, n = w, w+1, \dots\}$  nemnegatív szubmartingál minden rögzített  $w$  és  $d$ ,  $1 \leq w$ ,  $N-1 \leq d \leq (N-1)w$  esetén. Alkalmazzuk a Doob-Meyer felbontást a  $Z(n, d, w)$  folyamatra, azaz írjuk fel  $Z(n, d, w) = M(n, d, w) + A(n, d, w)$  alakban, ahol  $M(n, d, w)$  martingál,  $A(n, d, w)$  pedig előrejelezhető, növekvő folyamat. Felhasználva a felbontásban szereplő  $A(n, d, w)$  folyamat (1.15)-ben adott általános alakját és az (1.19) feltételes várható értéket, az  $A(n, d, w)$  folyamatot az alábbi alakban írhatjuk fel.

$$\begin{aligned} A(n, d, w) &= \mathbb{E}Z(1, d, w) + \\ &+ \sum_{i=2}^n c(i, 1, w) \left[ \sum_{k=0}^{N-1} X(i-1, d-k, w-1) \left[ p_k r_k \frac{(N-k)(w-1)}{Ni} + \right. \right. \\ &\left. \left. + \sum_{m=0}^k p_m (1-r_m) \frac{\binom{V_{i-1}-d+k-1}{k-m} \binom{d-k}{N-k-1}}{\binom{V_{i-1}}{N-m}} \right] + A\delta_{d, N-1} \delta_{w, 1} \right]. \end{aligned} \quad (1.25)$$

Jelölje  $B(n, d, w)$  a  $Z(n, d, w)$  folyamat feltételes szórásnégyzeteinek összegét. A  $B(n, d, w)$  folyamat (1.16) formulával adott általános alakjának, valamint a korábban igazolt 1.16. Lemma felhasználásával felső korlátot adunk a  $B(n, d, w)$  folyamatra.

$$\begin{aligned} B(n, d, w) &= \sum_{i=2}^n c(i, 1, w)^2 \mathbb{E}\{(X(i, d, w) - \mathbb{E}(X(i, d, w) | \mathcal{F}_{i-1}))^2 | \mathcal{F}_{i-1}\} \leq \\ &\leq N^2 \sum_{i=2}^n c(i, 1, w)^2 = O\left(n^{2(\alpha w + \beta) + 1}\right). \end{aligned} \quad (1.26)$$

*Az 1.2. Tétel bizonyítása  $w$  szerinti teljes indukcióval történik.*

Legyen először  $w = 1$ . Egy 1 súlyú csúcs csak a születésekor vett részt interakcióban, ezért fokszáma csak  $N-1$  lehet. Az (1.21) és (1.25) formulákat alkalmazva kapjuk, hogy

$$A(n, N-1, 1) \sim A \sum_{i=2}^n c(i, 1, 1) \sim A \sum_{i=2}^n a_{1,1} i^{\alpha+\beta} \sim A a_{1,1} \frac{n^{\alpha+\beta+1}}{\alpha+\beta+1} \quad (1.27)$$



majdnem biztosan  $n \rightarrow \infty$  esetén. A fentiek alapján azt is láthatjuk, hogy  $A(n, N-1, 1) \rightarrow \infty$  majdnem biztosan  $n \rightarrow \infty$  esetén. A  $B(n, d, w)$  folyamatra az (1.26) formulával adott felső korlátot alkalmazva  $B(n, N-1, 1) = O(n^{2(\alpha+\beta)+1})$  adódik, és így  $(B(n, N-1, 1))^{\frac{1}{2}} \log B(n, N-1, 1) = O(A(n, N-1, 1))$  teljesül. Az 1.12. Állítást alkalmazva azt kapjuk, hogy

$$Z(n, N-1, 1) \sim A(n, N-1, 1) \quad (1.28)$$

majdnem biztosan az  $\{A(n, N-1, 1) \rightarrow \infty\}$  eseményen  $n \rightarrow \infty$  esetén.

Ebből (1.21), (1.23) és (1.27) felhasználásával következik, hogy

$$\begin{aligned} \frac{X(n, N-1, 1)}{V_n} &= \frac{Z(n, N-1, 1)}{c(n, 1, 1)V_n} \sim \frac{A(n, N-1, 1)}{c(n, 1, 1)V_n} \sim \\ &\sim \frac{Aa_{1,1} \frac{n^{\alpha+\beta+1}}{\alpha+\beta+1}}{a_{1,1}n^{\alpha+\beta}An} = \frac{1}{\alpha+\beta+1} = x_{N-1,1} > 0 \end{aligned} \quad (1.29)$$

majdnem biztosan  $n \rightarrow \infty$  esetén.

Ahogy arra az 1.3.1 alfejezet elején utaltunk, látni fogjuk, hogy a pozitív határértékekre alkalmazott módszer a 0 határértékek esetében nem alkalmazható. Mivel a 0 határértékek a  $w = 2$  esetben jelenhetnek meg először, ezért a bizonyítás során ezt az esetet külön megvizsgáljuk a jelenség pontos megértése végett.

Legyen most  $w = 2$ . Bármely 2 súlyú csúcs  $d$  fokszámára teljesül, hogy  $N-1 \leq d \leq 2(N-1)$ . Először a pozitív  $x_{d,2}$  határértékekre igazoljuk a tétel állítását. Megmutatjuk, hogy  $w = 2$  esetén az  $x_{d,w}$  határértékek pozitívak a  $d = N-1+k$  és  $\alpha_k > 0$  ( $k = 0, 1, \dots, N-2$ ), illetve a  $d = 2(N-1)$  és  $\alpha_{N-1} + \beta > 0$  esetekben. Az (1.21) és (1.23) formulákat, valamint az  $A(n, d, w)$  folyamat (1.25) egyenlettel megadott alakját felhasználva meghatározhatjuk az  $A(n, d, 2)$  folyamat aszimptotikus viselkedését.

$$\begin{aligned} A(n, d, 2) &= \mathbb{E}Z(1, d, 2) + \sum_{i=2}^n c(i, 1, 2) \left[ \sum_{k=0}^{N-1} X(i-1, d-k, 1) \times \right. \\ &\quad \left. \times \left[ \alpha_k \frac{1}{i} + \sum_{m=0}^k p_m (1-r_m) \frac{\binom{V_{i-1}-d+k-1}{k-m} \binom{d-k}{N-k-1}}{\binom{V_{i-1}}{N-m}} \right] \right] \sim \\ &\quad \sim \sum_{i=2}^n a_{1,2} i^{2\alpha+\beta} \left[ \sum_{k=0}^{N-1} X(i-1, d-k, 1) \times \right. \\ &\quad \left. \times \left[ \alpha_k \frac{1}{i} + \sum_{m=0}^k p_m (1-r_m) \frac{(N-m)! \binom{d-k}{N-k-1}}{(k-m)!} \frac{1}{(Ai)^{N-k}} \right] \right]. \end{aligned}$$

Mivel  $X(i-1, d-k, 1) = 0$ , ha  $d-k \neq N-1$ , ezért felhasználva (1.23)-at és azt, hogy a  $w = 1$  esetre már igazoltuk az állítást azt kapjuk, hogy

$$A(n, d, 2) \sim Aa_{1,2} \frac{n^{2\alpha+\beta+1}}{2\alpha+\beta+1} T_{d,2} x_{N-1,1} \rightarrow \infty, \quad (1.30)$$

ahol

$$T_{N-1+k,2} = \alpha_k, \quad 0 \leq k \leq N-2 \quad \text{és} \quad T_{2(N-1),2} = \alpha_{N-1} + \beta \quad (1.31)$$

a modell paraméterei által meghatározott rögzített konstansok. Az (1.26)-ban megadott felső korlátot  $w = 2$  esetén alkalmazva láthatjuk, hogy  $B(n, d, 2) = O(n^{2(2\alpha+\beta)+1})$  és így  $(B(n, d, 2))^{\frac{1}{2}} \log B(n, d, 2) = O(A(n, d, 2))$  adódik. Az 1.12. Állítást alkalmazva kapjuk, hogy  $Z(n, d, 2) \sim A(n, d, 2)$  majdnem biztosan az  $\{A(n, d, 2) \rightarrow \infty\}$  eseményen  $n \rightarrow \infty$  esetén. Ezt, valamint (1.21)-et, (1.23)-at és (1.30)-at felhasználva pedig az következik, hogy

$$\begin{aligned} \frac{X(n, d, 2)}{V_n} &= \frac{Z(n, d, 2)}{c(n, 1, 2) V_n} \sim \frac{A(n, d, 2)}{c(n, 1, 2) V_n} \sim \\ &\sim \frac{Aa_{1,2} \frac{n^{2\alpha+\beta+1}}{2\alpha+\beta+1} T_{d,2} x_{N-1,1}}{a_{1,2} n^{2\alpha+\beta} An} = \frac{T_{d,2}}{2\alpha+\beta+1} x_{N-1,1} = x_{d,2} > 0. \end{aligned} \quad (1.32)$$

Legyen továbbra is  $w = 2$  és igazoljuk a tétel állítását a 0 határértékekre. Legyen  $N-1 \leq d \leq 2N-2$ . Tekintsük most azokat az eseteket, melyekben  $\alpha_k = 0$  amikor  $d = N-1+k$ ,  $k = 0, 1, \dots, N-2$  és  $\alpha_{N-1} + \beta = 0$  amikor  $d = 2(N-1)$ . Ekkor az (1.25) formula felhasználásával  $A(n, d, 2)$  az alábbi alakban írható.

$$\begin{aligned} A(n, d, 2) &= \mathbb{E}Z(1, d, 2) + \\ &+ \sum_{i=2}^n c(i, 1, 2) X(i-1, d-k, 1) \left[ \sum_{m=0}^k p_m (1-r_m) \frac{\binom{V_{i-1}-d+k-1}{k-m} \binom{d-k}{N-k-1}}{\binom{V_{i-1}}{N-m}} \right], \end{aligned}$$

ahol  $d-k = N-1$ , hiszen egy 1 súlyú csúcs fokszáma csak  $N-1$  lehet. Ezt felhasználva az előző esethez hasonlóan meghatározhatjuk az  $A(n, d, 2)$  folyamat aszimptotikus viselkedését. Az (1.21) formula alapján  $c(i, 1, 2)$  aszimptotikája ismert, továbbá (1.23) alapján tudjuk, hogy  $V_n \sim An$ . Ezért

$$\begin{aligned} A(n, d, 2) &\sim \\ &\sim \sum_{i=2}^n a_{1,2} i^{2\alpha+\beta} x_{N-1,1} Ai \left[ \sum_{m=0}^k p_m (1-r_m) \frac{\binom{N-1}{N-k-1} (N-m)!}{(k-m)!} \frac{1}{(Ai)^{N-k}} \right] \sim \end{aligned}$$

$$\sim a_{1,2} x_{N-1,1} C_1 \sum_{i=2}^n i^{2\alpha+\beta+1+k-N} = O(n^{2\alpha+\beta}), \quad (1.33)$$

ahol  $N-k \geq 2$ ,  $C_1$  pedig egy alkalmas konstanst jelöl. A  $Z(n, d, 2) = M(n, d, 2) + A(n, d, 2)$  Doob-Meyer felbontást alkalmazva kapjuk, hogy

$$\frac{X(n, d, 2)}{V_n} = \frac{Z(n, d, 2)}{c(n, 1, 2) V_n} = \frac{M(n, d, 2) + A(n, d, 2)}{c(n, 1, 2) V_n}.$$

Az  $A(n, d, 2)$  folyamat aszimptotikus viselkedését most az (1.33) formula adja meg. Az (1.26)-ban adott felső korlátot alkalmazva  $B(n, d, 2) = O(n^{4\alpha+2\beta+1})$ , és ezért  $(B(n, d, 2))^{\frac{1}{2}} \log B(n, d, 2) = O(n^{2\alpha+\beta+\frac{1}{2}+\varepsilon})$  tetszőleges pozitív  $\varepsilon$  esetén.

Alkalmazzuk most az 1.11. Állítást és az 1.12. Állítást. Az 1.12. Állítás szerint

$$M(n, d, 2) = o\left((B(n, d, 2))^{\frac{1}{2}} \log B(n, d, 2)\right) = o\left(n^{2\alpha+\beta+\frac{1}{2}+\varepsilon}\right)$$

a  $\{B(n, d, 2) \rightarrow \infty\}$  eseményen majdnem biztosan. Továbbá az 1.11. Állítás alapján a  $\{B(\infty, d, 2) < \infty\}$  halmazon az  $M(n, d, 2)$  folyamat majdnem biztosan konvergens. Ezért felhasználva az (1.21) és az (1.23) formulákat azt kapjuk, hogy

$$\frac{X(n, d, 2)}{V_n} = \frac{M(n, d, 2) + A(n, d, 2)}{c(n, 1, 2) V_n} \leq C_2 \frac{n^{2\alpha+\beta+\frac{1}{2}+\varepsilon}}{n^{2\alpha+\beta n}} = C_2 \frac{1}{n^a} \rightarrow 0, \quad (1.34)$$

ahol  $n \rightarrow \infty$ ,  $\frac{1}{4} < a < \frac{1}{2}$  és  $C_2$  egy alkalmas konstanst jelöl. Ezzel beláttuk, hogy az állítás teljesül  $w = 1$  és  $w = 2$  esetén.

Tegyük fel, hogy az állítás igaz minden  $w$ -nél kisebb súly és minden lehetséges fokszám esetén. Először a pozitív határértékekre igazoljuk a tétel állítását. Tegyük fel, hogy az  $x_{d-k, w-1}$  együtthatók közül legalább egy, mikor  $\alpha_k > 0$ ,  $k = 0, 1, \dots, N-2$ , vagy az  $x_{d-(N-1), w-1}$  együttható mikor  $\alpha_{N-1} + \beta > 0$ , pozitív. Alkalmazva (1.21)-et és (1.23)-at, az  $A(n, d, w)$  folyamat (1.25)-ben megadott alakjának és az indukciós hipotézisnek a felhasználásával kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} A(n, d, w) &\sim \sum_{i=2}^n c(i, 1, w) \left[ \sum_{k=0}^{N-1} X(i-1, d-k, w-1) p_k r_k \frac{(N-k)(w-1)}{N^i} + \right. \\ &\quad \left. + X(i-1, d-(N-1), w-1) \sum_{m=0}^{N-1} p_m (1-r_m) \frac{N-m}{A_i} \right] \sim \\ &\sim \sum_{i=2}^n a_{1,w} i^{\alpha w + \beta} A_i \left[ \sum_{k=0}^{N-1} x_{d-k, w-1} \alpha_k \frac{w-1}{i} + x_{d-(N-1), w-1} \sum_{m=0}^{N-1} \beta_m \frac{1}{A_i} \right] \sim \end{aligned}$$

$$\sim Aa_{1,w} \frac{n^{\alpha w + \beta + 1}}{\alpha w + \beta + 1} \left[ \sum_{k=0}^{N-1} \alpha_k (w-1) x_{d-k,w-1} + \beta x_{d-(N-1),w-1} \right]. \quad (1.35)$$

A fenti számítások során elhagytunk minden olyan tagot, amely aszimptotikusan kisebb, mint a többi. Tegyük fel, hogy (1.35)-ben legalább egy tag pozitív. Ekkor mivel  $x_{d,w} > 0$ , ezért  $A(n, d, w) \sim Aa_{1,w} n^{\alpha w + \beta + 1} x_{d,w} \rightarrow \infty$ , amint  $n \rightarrow \infty$ . Az (1.26)-ban adott felső korlátot alkalmazva pedig láthatjuk, hogy  $(B(n, d, w))^{\frac{1}{2}} \log B(n, d, w) = O(A(n, d, w))$  teljesül. Ezért az 1.12. Állítást alkalmazva  $Z(n, d, w) \sim A(n, d, w)$  adódik. Mindezek miatt

$$\frac{X(n, d, w)}{V_n} = \frac{Z(n, d, w)}{c(n, 1, w) V_n} \sim \frac{A(n, d, w)}{c(n, 1, w) V_n} \sim \frac{Aa_{1,w} n^{\alpha w + \beta + 1} x_{d,w}}{a_{1,w} n^{\alpha w + \beta} A n} = x_{d,w} \quad (1.36)$$

majdnem biztosan  $n \rightarrow \infty$  esetén, továbbá  $x_{d,w}$  teljesíti az (1.4) rekurziót.

Igazoljuk most a tétel állítását a 0 határértékekre is. Tekintsük azokat az eseteket, amikor az  $x_{d-k,w-1}$  együttthatók ha  $\alpha_k > 0, k = 0, 1, \dots, N-2$ , és az  $x_{d-(N-1),w-1}$  együtttható ha  $\alpha_{N-1} + \beta > 0$ , nullával egyenlők.

Az (1.25) formula és az indukciós hipotézis felhasználásával kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} A(n, d, w) &\sim \sum_{i=2}^n a_{1,w} i^{\alpha w + \beta} \times \\ &\times \left[ \sum_{k=0}^{N-1} \frac{X(i-1, d-k, w-1)}{V_{i-1}} Ai \left[ p_k r_k \frac{(N-k)(w-1)}{Ni} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \sum_{m=0}^k p_m (1-r_m) \frac{\binom{d-k}{N-k-1} (N-m)!}{(k-m)!} \frac{1}{(Ai)^{N-k}} \right] \right] \sim \\ &\sim \sum_{i=2}^n a_{1,w} i^{\alpha w + \beta} \left[ \sum_{k=0}^{N-1} O\left(\frac{1}{i^a}\right) Ai \alpha_k \frac{w-1}{i} \mathbb{I}_{\{\alpha_k > 0\}} + \right. \\ &+ \sum_{k=0}^{N-2} \frac{X(i-1, d-k, w-1)}{V_{i-1}} Ai \sum_{m=0}^k p_m (1-r_m) \frac{\binom{d-k}{N-k-1} (N-m)!}{(k-m)!} \frac{1}{(Ai)^{N-k}} + \\ &\quad \left. + O\left(\frac{1}{i^a}\right) Ai \sum_{m=0}^{N-1} p_m (1-r_m) (N-m) \frac{1}{Ai} \mathbb{I}_{\{\beta > 0\}} \right] \leq \\ &\leq C_3 \sum_{i=2}^n i^{\alpha w + \beta - a} + C_4 \sum_{i=2}^n \sum_{k=0}^{N-2} i^{\alpha w + \beta + 1 - (N-k)} x_{d-k,w-1} \leq \end{aligned}$$

$$\leq C_5 \left( \frac{n^{\alpha w + \beta + 1 - a}}{\alpha w + \beta + 1 - a} + \frac{n^{\alpha w + \beta}}{\alpha w + \beta} \right) = O(n^{\alpha w + \beta + 1 - a}), \quad (1.37)$$

ahol  $C_3, C_4$  és  $C_5$  alkalmas konstansok,  $\frac{1}{4} < a < \frac{1}{2}$  és  $\mathbb{I}_A$  pedig az  $A$  esemény indikátorát jelöli. A fenti számítások során elhagytunk olyan lényeges tagokat, melyekben  $\alpha_k$  vagy  $\beta$  nullával egyenlőek.  $A(n, d, w)$  aszimptotikus viselkedése az (1.37) formulával adott, továbbá az (1.26) becslést alkalmazva  $B(n, d, w) = O(n^{2(\alpha w + \beta) + 1})$ . Az (1.21) és (1.23) formulákat felhasználva, valamint alkalmazva az 1.11. Állítást és az 1.12. Állítást azt kapjuk, hogy

$$\frac{X(n, d, w)}{V_n} = \frac{O(n^{\alpha w + \beta + 1 - a})}{n^{\alpha w + \beta} A n} = O(n^{-a}) \rightarrow 0 = x_{d, w} \quad (1.38)$$

majdnem biztosan  $n \rightarrow \infty$  esetén. Ezzel az állítást beláttuk a 0 határértékek esetére is.  $\square$

1.17. MEGJEGYZÉS. A bizonyítás alapján könnyen látható, hogy ha  $\prod_{k=0}^{N-2} \alpha_k > 0$  és  $\max\{\alpha_{N-1}, \beta\} > 0$  egyszerre teljesül, akkor az 1.2. Tételben definiált  $x_{d, w}$  határértékek pozitívak.

### 1.3.2. Az $M$ -klikkek súlyainak skálafüggetlensége

Legyen  $M$  továbbra is rögzített egész szám,  $1 \leq M \leq N$ . Ebben az alfejezetben az  $M$ -klikkek súlyaira bizonyítunk skálafüggetlenséget. Látni fogjuk, hogy rögzített  $M$ -re az  $M$ -klikkek súlyainak aránya majdnem biztosan konvergens, valamint hogy a határértékek sorozata polinomiálisan csökken.

#### Skálafüggetlenség a csúcsok súlyaira, az $M = 1$ eset

Első lépésként igazoljuk a következő lemmát, mely a csúcsok súlyainak skálafüggetlenségéről szóló 1.4. Tételben szereplő  $x_w$  határértékeket jellemzi.

1.18. LEMMA. *Legyen  $p_0 < 1$  és legyen*

$$x_w = x_{N-1, w} + x_{N, w} + \cdots + x_{(N-1)w, w}, \quad w = 1, 2, \dots, \quad (1.39)$$

ahol  $x_{d, w}$  az 1.2. Tételben meghatározott határértékeket jelöli. Ekkor az  $x_w$ ,  $w = 1, 2, \dots$  pozitív számok teljesítik az (1.6) rekurziót. Az  $x_w$ ,  $w = 1, 2, \dots$  sorozat diszkrét valószínűségeloszlás, az  $x_{d, w}$ ,  $d = N - 1, N, \dots, (N - 1)w$ ,  $w = 1, 2, \dots$  sorozat pedig kétdimenziós diszkrét valószínűségeloszlás.

BIZONYÍTÁS. Az 1.2. Tételben adott  $x_{d, w}$  határértékek csak abban az esetben lehetnek pozitívak, ha  $N - 1 \leq d \leq (N - 1)w$ . Azaz mivel  $x_{d, w} = 0$  ha  $d \notin$

$\{N-1, N, \dots, (N-1)w\}$ , ezért  $x_w = \sum_d x_{d,w}$ . Az  $x_{d,w}$  határértékekre adott rekurzió (1.3) kezdeti feltételéből egyszerűen következik, hogy  $x_1 = \frac{1}{\alpha + \beta + 1}$ . Továbbá az (1.4) rekurziót összegezve láthatjuk, hogy

$$\begin{aligned} x_w &= \sum_{d=N-1}^{(N-1)w} x_{d,w} = \sum_d x_{d,w} = \\ &= \frac{1}{\alpha w + \beta + 1} \left[ (w-1) \sum_{k=0}^{N-1} \alpha_k \sum_d x_{d-k,w-1} + \beta \sum_d x_{d-(N-1),w-1} \right] = \\ &= \frac{\alpha(w-1) + \beta}{\alpha w + \beta + 1} x_{w-1}. \end{aligned}$$

Az így kapott rekurzív formula és a  $\Gamma$ -függvény felhasználásával  $x_w$ -t a következő alakban adhatjuk meg.

$$\begin{aligned} x_w &= x_1 \prod_{j=2}^w \frac{\alpha(j-1) + \beta}{\alpha j + \beta + 1} = \frac{1}{\alpha w + \beta + 1} \prod_{j=1}^{w-1} \frac{\alpha j + \beta}{\alpha j + \beta + 1} = \\ &= \frac{1}{\alpha w + \beta + 1} \prod_{j=1}^{w-1} \frac{\frac{\beta}{\alpha} + j}{\frac{\beta+1}{\alpha} + j} = \frac{1}{\alpha w + \beta + 1} \frac{\Gamma\left(w + \frac{\beta}{\alpha}\right) \Gamma\left(1 + \frac{\beta+1}{\alpha}\right)}{\Gamma\left(1 + \frac{\beta}{\alpha}\right) \Gamma\left(w + \frac{\beta+1}{\alpha}\right)} = \\ &= \frac{\Gamma\left(1 + \frac{\beta+1}{\alpha}\right) \Gamma\left(w + \frac{\beta}{\alpha}\right)}{\alpha \Gamma\left(1 + \frac{\beta}{\alpha}\right) \Gamma\left(w + \frac{\beta+1}{\alpha} + 1\right)}. \end{aligned} \quad (1.40)$$

Tekintsük most a  $\Gamma$  függvényre vonatkozó alábbi formulát (lásd például Prudnikov, Brychkov és Marichev (1986)).

$$\sum_{k=0}^n \frac{\Gamma(k+a)}{\Gamma(k+b)} = \frac{1}{a-b+1} \left[ \frac{\Gamma(n+a+1)}{\Gamma(n+b)} - \frac{\Gamma(a)}{\Gamma(b-1)} \right]. \quad (1.41)$$

(1.41)-et alkalmazva a  $\sum_{k=1}^n x_k$  összegre, felhasználva  $x_k$  (1.40)-ben adott alakját kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n x_k &= \frac{\Gamma\left(1 + \frac{\beta+1}{\alpha}\right)}{\alpha \Gamma\left(1 + \frac{\beta}{\alpha}\right)} \sum_{k=1}^n \frac{\Gamma\left(k + \frac{\beta}{\alpha}\right)}{\Gamma\left(k + \frac{\beta+1}{\alpha} + 1\right)} = \\ &= \frac{\Gamma\left(1 + \frac{\beta+1}{\alpha}\right)}{\alpha \Gamma\left(1 + \frac{\beta}{\alpha}\right)} \left( -\alpha \left[ \frac{\Gamma\left(n + \frac{\beta}{\alpha} + 1\right)}{\Gamma\left(n + \frac{\beta+1}{\alpha} + 1\right)} - \frac{\Gamma\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)}{\Gamma\left(\frac{\beta+1}{\alpha}\right)} \right] - \frac{\Gamma\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)}{\Gamma\left(\frac{\beta+1}{\alpha} + 1\right)} \right). \end{aligned} \quad (1.42)$$

Erre alkalmazva a  $\Gamma$  függvényre vonatkozó Stirling formulát megmutatjuk, hogy  $x_w$ ,  $w = 1, 2, \dots$  diszkrét valószínűségeloszlás. A Stirling formula felhasználásával  $n \rightarrow \infty$  esetén

$$\begin{aligned} & \frac{\Gamma\left(n + \frac{\beta}{\alpha} + 1\right)}{\Gamma\left(n + \frac{\beta+1}{\alpha} + 1\right)} \sim \\ & \sim \sqrt{\frac{n + \frac{\beta+1}{\alpha} + 1}{n + \frac{\beta}{\alpha} + 1}} \exp\left\{\frac{1}{\alpha}\right\} \left(\frac{n + \frac{\beta}{\alpha} + 1}{n + \frac{\beta+1}{\alpha} + 1}\right)^{n + \frac{\beta+1}{\alpha} + 1} \left(\frac{1}{n + \frac{\beta}{\alpha} + 1}\right)^{\frac{1}{\alpha}} \sim \\ & \sim \sqrt{1 + \frac{\frac{1}{\alpha}}{n + \frac{\beta}{\alpha} + 1}} \exp\left\{\frac{1}{\alpha}\right\} \left(1 - \frac{\frac{1}{\alpha}}{n + \frac{\beta+1}{\alpha} + 1}\right)^{n + \frac{\beta+1}{\alpha} + 1} \left(\frac{1}{n + \frac{\beta}{\alpha} + 1}\right)^{\frac{1}{\alpha}} \rightarrow 0 \end{aligned}$$

adódik. Ezt és (1.42)-t felhasználva kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^n x_k = \\ & = \frac{\Gamma\left(1 + \frac{\beta+1}{\alpha}\right)}{\alpha\Gamma\left(1 + \frac{\beta}{\alpha}\right)} \left(-\alpha \left[\frac{\Gamma\left(n + \frac{\beta}{\alpha} + 1\right)}{\Gamma\left(n + \frac{\beta+1}{\alpha} + 1\right)} - \frac{\Gamma\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)}{\Gamma\left(\frac{\beta+1}{\alpha}\right)}\right] - \frac{\Gamma\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)}{\Gamma\left(\frac{\beta+1}{\alpha} + 1\right)}\right) \rightarrow \\ & \rightarrow \frac{\Gamma\left(1 + \frac{\beta+1}{\alpha}\right)}{\Gamma\left(1 + \frac{\beta}{\alpha}\right)} \left(\frac{\Gamma\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)}{\Gamma\left(\frac{\beta+1}{\alpha}\right)} - \frac{\Gamma\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)}{\alpha\Gamma\left(\frac{\beta+1}{\alpha} + 1\right)}\right) = 1, \end{aligned}$$

amint  $n \rightarrow \infty$ . Ezért  $\sum_{w=1}^{\infty} x_w = 1$ . Mivel  $x_w$  definíciója miatt  $\sum_d x_{d,w} = x_w$ , ezért  $\sum_{w=1}^{\infty} \sum_{d=N-1}^{(N-1)w} x_{d,w} = 1$  is teljesül. Így azt is láthatjuk, hogy  $x_{d,w}$ ,  $d = N-1, N, \dots, (N-1)w$ ,  $w = 1, 2, \dots$  egy kétdimenziós diszkrét valószínűségeloszlás.  $\square$

*Az 1.4. Tétel bizonyítása.* Rögzített  $w$  esetén  $X(n, w)$  jelöli a  $w$  súlyú csúcsok számát  $n$  lépés után, azaz  $X(n, w)$  nem más, mint a  $w$  súlyú és  $d$  fokú csúcsok számának összege minden lehetséges  $w$ -hez tartozó  $d$  értékre. Továbbá, rögzített  $w$  esetén az  $X(n, w) = X(n, N-1, w) + X(n, N, w) + \dots + X(n, (N-1)w, w)$  összeg tagszáma véges. Ezért az 1.2. Tétel alapján

$$\begin{aligned} \frac{X(n, w)}{V_n} &= \frac{X(n, N-1, w) + \dots + X(n, (N-1)w, w)}{V_n} \rightarrow \\ &\rightarrow x_{N-1, w} + \dots + x_{(N-1)w, w} = x_w \end{aligned}$$

majdnem biztosan  $n \rightarrow \infty$  esetén. Könnyen látható, hogy az  $x_w$  határértékek pozitívak, az 1.18. Lemma alapján pedig az is, hogy az  $x_w$ ,  $w = 1, 2, \dots$  sorozat teljesíti az (1.6) rekurziót.

Felhasználva az  $x_w$  határértékek (1.40)-ben adott alakját, valamint a  $\Gamma$  függvényre vonatkozó Stirling-formulát megmutatható, hogy

$$x_w = \frac{\Gamma\left(1 + \frac{\beta+1}{\alpha}\right)}{\alpha\Gamma\left(1 + \frac{\beta}{\alpha}\right)} \frac{\Gamma\left(w + \frac{\beta}{\alpha}\right)}{\Gamma\left(w + \frac{\beta+1}{\alpha} + 1\right)} \sim Cw^{-(1+\frac{1}{\alpha})}.$$

Ezzel igazoltuk a csúcsok súlyainak skálafüggetlenségét.  $\square$

### Skálafüggetlenség az $M$ -klikkek súlyaira, $2 \leq M \leq N$ rögzített egész szám

A továbbiakban legyen  $2 \leq M \leq N$  rögzített egész szám. A most következő részben megmutatjuk, hogy a vizsgált modellben nemcsak a csúcsok, de az  $M$ -klikkek súlyeloszlása is skálafüggetlen. Célunk az 1.5. Tétel igazolása. Először azt látjuk be, hogy a  $w$  súlyú  $M$ -klikkek aránya, azaz a  $\frac{C(n, M, w)}{C_{n, M}}$  hányados 1 valószínűséggel konvergens. Ennek az állításnak a bizonyításához külön-külön megmutatjuk, hogy a lépések számával normálva mind  $C(n, M, w)$ , mind pedig  $C_{n, M}$  majdnem biztosan konvergens  $n \rightarrow \infty$  esetén. A bizonyítás során rekurziót adunk a kapott határértékekre, melynek segítségével azt is belátjuk, hogy a határértékek sorozata hatványrendben cseng le, azaz teljesül a skálafüggetlenség.

Elsőként megadjuk a  $w$  súlyú  $M$ -klikkek számának, azaz  $C(n, M, w)$ -nek a feltételes várható értékét az  $\mathcal{F}_{n-1}$   $\sigma$ -algebrára nézve.

1.19. TÉTEL. Minden rögzített  $M$ ,  $2 \leq M \leq N$  esetén

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\{C(n, M, w) | \mathcal{F}_{n-1}\} &= (1 - p(n, M, w)) C(n-1, M, w) + \\ &+ p(n, M, w-1) C(n-1, M, w-1) + \delta_{1, w} R_n, \end{aligned} \quad (1.43)$$

ahol

$$R_n = \sum_{k=0}^{N-1} p_k \left[ \binom{N}{M} - r_k \binom{N-k}{M} - (1-r_k) C_{n-1, M} \frac{\binom{V_{n-1}-M}{N-k-M}}{\binom{V_{n-1}}{N-k}} \right]$$

és  $\delta_{1, w}$  a Kronecker-deltát jelöli.

BIZONYÍTÁS. A tételben szereplő formula első két tagja az 1.13. Lemma egyszerű következménye, hiszen az evolúciós folyamat során egy  $M$ -klikk súlya pontosan akkor nő, ha interakcióban vesz részt, és a súlynövekedés ekkor 1. Az (1.43)



formula harmadik tagja az újonnan keletkező  $M$ -klikkek várható számát adja meg. A gráf evolúciója során új  $M$ -klikkek létrejöhetnek csak új csúcsok közötti interakció, csak régi csúcsok közötti interakció, illetve régi és új csúcsok közötti interakció eredményeként is. Ennek megfelelően az alábbi eseteket tekinthetjük.

**Step**  $NEW_k$  és **PA** lépés esetén az új  $M$ -klikkek száma pontosan

$$\binom{N}{M} - \binom{N-k}{M}.$$

**Step**  $NEW_k$  és **UNI** lépés esetén új  $M$ -klikkek jönnek létre a gráfhoz csatlakozó  $k$ -klikk csúcsai és a kiválasztott  $N-k$  régi csúcs közötti interakció, valamint  $k \geq M$  esetén a gráfhoz csatlakozó  $k$ -klikk csúcsai közötti interakció eredményeként. Továbbá ebben az esetben olyan régi csúcsok is új  $M$ -klikket határozhatnak meg, amelyek bár eddig nem alkottak  $M$ -klikket, de az adott lépésben részt vettek az interakcióban. Az új  $M$ -klikkek várható számát az  $n$ -edik lépésben ekkor az alábbi módon adhatjuk meg, ahol  $C_{n-1,M}$  jelöli az  $M$ -klikkek számát az  $n$ -edik lépésben.

$$\binom{N}{M} - C_{n-1,M} \frac{\binom{V_{n-1}-M}{N-k-M}}{\binom{V_{n-1}}{N-k}}.$$

Hasonlóan **Step** **OLD** és **UNI** lépés esetén, az új  $M$ -klikkek várható száma az  $n$ -edik lépésben

$$\binom{N}{M} - C_{n-1,M} \frac{\binom{V_{n-1}-M}{N-M}}{\binom{V_{n-1}}{N}}.$$

A fenti formulák felhasználásával a tétel állítása adódik.  $\square$

1.20. **TÉTEL.** Legyen  $p_0 < 1$  és  $\sum_{k=0}^{N-M} \alpha_k > 0$ . Minden rögzített  $M$ -re és  $w$ -re,  $2 \leq M \leq N$ ,  $w \geq 1$  teljesül, hogy

$$\frac{C(n, M, w)}{An} \rightarrow x_{M,w}$$

majdnem biztosan  $n \rightarrow \infty$  esetén, ahol az  $x_{M,w}$  határértékek rögzített pozitív számok, melyek teljesítik az alábbi rekurziót:

$$x_{M,1} = \frac{\sum_{k=0}^{N-1} p_k \left[ \binom{N}{M} - r_k \binom{N-k}{M} \right]}{A(a_M + 1)} > 0,$$

$$x_{M,w} = \frac{a_M(w-1)}{a_M w + 1} x_{M,w-1}, \quad \text{ha } w > 1, \quad (1.44)$$

ahol az  $a_M$  mennyiséget (1.1)-ben definiáltuk.

BIZONYÍTÁS. Legyen

$$Z(n, M, w) = c(n, M, w) C(n, M, w), \quad 2 \leq M \leq N, 1 \leq w,$$

ahol a  $c(n, M, w)$  valószínűségi változót az 1.16. Lemmában definiáltuk. Felhasználva az 1.19. Tételben megadott feltételes várható értéket könnyen megmutatható, hogy  $\{Z(n, M, w), \mathcal{F}_n, n = 1, 2, \dots\}$  nemnegatív szubmartingál minden rögzített  $2 \leq M \leq N, 1 \leq w$  esetén. Alkalmazzuk a Doob-Meyer felbontást a  $Z(n, M, w)$  folyamatra, azaz legyen  $Z(n, M, w) = M(n, M, w) + A(n, M, w)$ , ahol  $M(n, M, w)$  egy martingál,  $A(n, M, w)$  pedig egy előrejelezhető, növekvő folyamat. A felbontásban szereplő  $A(n, M, w)$  folyamatot az (1.15)-ben adott általános alakjának, valamint az 1.19. Tételben meghatározott feltételes várható érték felhasználásával az alábbi módon adhatjuk meg.

$$\begin{aligned} A(n, M, w) &= \mathbb{E}Z(1, M, w) + \sum_{i=2}^n c(i, M, w) \times \\ &\times [\mathbb{E}(C(i, M, w) | \mathcal{F}_{i-1}) - (1 - p(i, M, w)) C(i-1, M, w)] = \mathbb{E}Z(1, M, w) + \\ &+ \sum_{i=2}^n c(i, M, w) [p(i, M, w-1) C(i-1, M, w-1) + \delta_{1,w} R_n], \end{aligned} \quad (1.45)$$

ahol  $R_n$ -et az 1.19. Tételben definiáltuk. Jelölje  $B(n, M, w)$  a  $Z(n, M, w)$  folyamat feltételes szórásnégyzeteinek összegét. Az (1.16) formula felhasználásával felső korlátot adhatunk  $B(n, M, w)$ -re.

$$\begin{aligned} B(n, M, w) &= \sum_{i=2}^n c(i, M, w)^2 \mathbb{E}\{(C(i, M, w) - \mathbb{E}(C(i, M, w) | \mathcal{F}_{i-1}))^2 | \mathcal{F}_{i-1}\} \leq \\ &\leq \binom{N}{M}^2 \sum_{i=2}^n c(i, M, w)^2 = O(n^{2a_M w+1}). \end{aligned} \quad (1.46)$$

A fenti számítások során a feltételes várható érték alapvető tulajdonságai mellett felhasználtuk, hogy  $c(i, M, w)$  egy  $\mathcal{F}_{i-1}$ -mérhető valószínűségi változó, minden lépésben az új  $M$ -klikkek maximális száma  $\binom{N}{M}$ , valamint alkalmaztuk (1.22)-t.

A tétel állítását  $w$  szerinti teljes indukcióval bizonyítjuk. Legyen  $w = 1$ . Az (1.22) és (1.45) egyenletek felhasználásával meghatározhatjuk az  $A(n, M, 1)$  folyamat aszimptotikus viselkedését.

$$A(n, M, 1) = \mathbb{E}Z(1, M, w) + \sum_{i=2}^n c(i, M, 1) [p(i, M, 0) C(i-1, M, 0) + \delta_{1,1} R_n] \sim$$

$$\sim a_{M,1} \frac{n^{a_M+1}}{a_M+1} \sum_{k=0}^{N-1} p_k \left[ \binom{N}{M} - r_k \binom{N-k}{M} \right] \quad (1.47)$$

majdnem biztosan  $n \rightarrow \infty$  esetén, mivel a  $2 \leq M \leq N$  feltétel miatt az  $R_n$  definíciójában szereplő harmadik tag nagyságrendileg kisebb, mint a megelőző tagok, ezért aszimptotikusan elhanyagolható. Ebből az is látszik, hogy  $A(n, M, 1) \rightarrow \infty$  majdnem biztosan  $n \rightarrow \infty$  esetén. Az (1.46) egyenlettel adott felső korlátot alkalmazva azt kapjuk, hogy  $B(n, M, 1) = O(n^{2a_M+1})$ , és ezért  $(B(n, M, 1))^{\frac{1}{2}} \log B(n, M, 1) = O(A(n, M, 1))$  teljesül. Az 1.12. Állítást alkalmazva pedig azt láthatjuk, hogy  $Z(n, M, 1) \sim A(n, M, 1)$  majdnem biztosan az  $\{A(n, M, 1) \rightarrow \infty\}$  eseményen  $n \rightarrow \infty$  esetén. Ezért az (1.22) és (1.23) formulák felhasználásával, az (1.47) egyenletből következik, hogy

$$\begin{aligned} \frac{C(n, M, 1)}{An} &= \frac{Z(n, M, 1)}{c(n, M, 1) An} \sim \frac{A(n, M, 1)}{c(n, M, 1) An} \sim \\ &\sim \frac{a_{M,1} \frac{n^{a_M+1}}{a_M+1} \sum_{k=0}^{N-1} p_k \left[ \binom{N}{M} - r_k \binom{N-k}{M} \right]}{a_{M,1} n^{a_M} An} = \\ &= \frac{\sum_{k=0}^{N-1} p_k \left[ \binom{N}{M} - r_k \binom{N-k}{M} \right]}{A(a_M+1)} = x_{M,1} > 0 \end{aligned} \quad (1.48)$$

majdnem biztosan  $n \rightarrow \infty$  esetén.

Legyen most  $w > 1$  és tegyük fel, hogy az állítás teljesül  $(w-1)$ -re. Ekkor (1.22), (1.23), (1.45) és az indukciós hipotézis felhasználásával kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} A(n, M, w) &= \mathbb{E}Z(1, M, w) + \sum_{i=2}^n c(i, M, w) p(i, M, w-1) C(i-1, M, w-1) \sim \\ &\sim \sum_{i=2}^n a_{M,w} i^{a_M w} x_{M,w-1} A i \left( a_M \frac{w-1}{i} + \sum_{k=0}^{N-M} p_k (1-r_k) \frac{(N-k)!}{(N-k-M)!} \frac{1}{(Ai)^M} \right) \end{aligned} \quad (1.49)$$

teljesül, ahol  $2 \leq M \leq N$ .

Ezért  $A(n, M, w) \sim x_{M,w-1} A a_{M,w} a_M (w-1) \frac{n^{a_M w+1}}{a_M w+1} \rightarrow \infty$  majdnem biztosan  $n \rightarrow \infty$  esetén. Az előzőekhez hasonlóan az (1.46) formulát alkalmazva kapjuk, hogy  $(B(n, M, w))^{\frac{1}{2}} \log B(n, M, w) = O(A(n, M, w))$ . Az 1.12. Állítás alkalmazásával pedig  $Z(n, M, w) \sim A(n, M, w)$  adódik. Ezért

$$\frac{C(n, M, w)}{An} = \frac{Z(n, M, w)}{c(n, M, w) An} \sim \frac{A(n, M, w)}{c(n, M, w) An} \sim$$

$$\sim x_{M,w-1} \frac{a_M(w-1)}{a_M w + 1} = x_{M,w} \quad (1.50)$$

majdnem biztosan  $n \rightarrow \infty$  esetén.  $\square$

Ezzel beláttuk, hogy a  $w$  súlyú  $M$ -klikkek száma  $n$ -nel normálva majdnem biztosan konvergens és a határértékek teljesítik az (1.44) rekurziót.

Tekintsük most a  $C_{n,M}$  mennyiséget, azaz az  $M$ -klikkek számát  $n$  lépés után. A következő lemmában megadjuk  $C_{n,M}$  feltételes várható értékét az  $\mathcal{F}_{n-1}$   $\sigma$ -algebrára nézve.

1.21. LEMMA. *Legyen  $2 \leq M \leq N$  rögzített egész szám.*

$$\mathbb{E}\{C_{n,M} | \mathcal{F}_{n-1}\} = \rho_{n-1} C_{n-1,M} + X, \quad (1.51)$$

ahol

$$\rho_{n-1} = 1 - \sum_{k=0}^{N-1} p_k (1 - r_k) \frac{\binom{V_{n-1}-M}{N-k-M}}{\binom{V_{n-1}}{N-k}}, \quad X = \sum_{k=0}^{N-1} p_k \left[ \binom{N}{M} - r_k \binom{N-k}{M} \right]. \quad (1.52)$$

1.22. MEGJEGYZÉS. Felhasználva, hogy a csúcsok száma bármely lépésben leg-  
alább  $N$ , könnyen ellenőrizhető, hogy  $0 < \rho_n < 1$ .

BIZONYÍTÁS. Egy evolúciós lépésben az  $M$ -klikkek száma pontosan akkor nő, ha az adott lépésben történő interakció során új 1 súlyú  $M$ -klikkek keletkeznek. Ezért

$$\mathbb{E}\{C_{n,M} | \mathcal{F}_{n-1}\} = C_{n-1,M} + R_n, \quad (1.53)$$

ahol  $R_n$ -et az 1.19. Tételben definiáltuk. Ebből pedig a lemma állítása következik.  $\square$

Felhasználva a fenti lemmát megmutatjuk, hogy  $C_{n,M}$ -et  $n$ -nel normálva 1 valószínűséggel konvergens sorozatot kapunk.

1.23. TÉTEL. *Legyen  $p_0 < 1$ . Ekkor minden rögzített  $M$ ,  $2 \leq M \leq N$  esetén*

$$\frac{C_{n,M}}{n} \rightarrow X \quad (1.54)$$

majdnem biztosan  $n \rightarrow \infty$  esetén, ahol az  $X$  mennyiséget az 1.21. Lemmában definiáltuk.

BIZONYÍTÁS. Vezessük be az alábbi valószínűségi változókat. Legyen

$$Q_1 = 1, \quad Q_n = \prod_{i=1}^{n-1} \frac{1}{\rho_i}, \quad \text{ha } n \geq 2. \quad (1.55)$$

Ekkor  $Q_n$   $\mathcal{F}_{n-1}$ -mérhető valószínűségi változó. Definiáljuk a  $Z_n$  folyamatot az alábbi módon. Legyen

$$Z_n = Q_n C_{n,M}, \quad n \geq 1. \quad (1.56)$$

Az 1.21. Lemmát alkalmazva láthatjuk, hogy

$$\mathbb{E}\{Z_n | \mathcal{F}_{n-1}\} = Q_n (\rho_{n-1} C_{n-1,M} + X) = X Q_n + Z_{n-1},$$

azaz  $\{Z_n, \mathcal{F}_n, n = 1, 2, \dots\}$  nemnegatív szubmartingál. Jelölje  $A_n$  a  $Z_n$  folyamat Doob-Meyer felbontásában szereplő előrejelezhető növekvő folyamatot. Az  $A_n$  folyamatot az (1.15) formula felhasználásával az alábbi módon adhatjuk meg.

$$A_n = \mathbb{E}Z_1 + X \sum_{i=2}^n Q_i. \quad (1.57)$$

Írjuk most fel  $\log(1+x)$  Taylor sorfejtését  $Q_n$ -re. Az (1.23) egyenlet alapján a csúcsok számának aszimptotikája adott. Ezt és  $Q_n$  definícióját alkalmazva kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \log Q_n &= - \sum_{i=1}^{n-1} \log \left( 1 - \sum_{k=0}^{N-1} p_k (1-r_k) \frac{\binom{V_{i-1}-M}{N-k-M}}{\binom{V_{i-1}}{N-k}} \right) \sim \\ &\sim \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{i^M} \left( \sum_{k=0}^{N-1} p_k (1-r_k) \frac{(N-k)!}{(N-k-M)!} \frac{1}{A^M} \right), \end{aligned} \quad (1.58)$$

ahol  $2 \leq M \leq N$ . Innen már látható, hogy  $Q_n$  korlátos, így (1.57) miatt  $c_1 n \leq A_n \leq c_2 n$  teljesül, ahol  $c_1$  és  $c_2$  véges pozitív valószínűségi változók. Jelölje  $B_n$  a  $Z_n$  folyamat feltételes szórásnégyzeteinek összegét. A fentieket felhasználva a következő felső korlátot adhatjuk  $B_n$ -re.

$$B_n = \sum_{i=2}^n \mathbb{D}^2(Z_i | \mathcal{F}_{i-1}) \leq \binom{N}{M}^2 \sum_{i=2}^n Q_i^2 \leq c_3 n, \quad (1.59)$$

ahol  $c_3$  egy rögzített véges valószínűségi változó. Mindezek miatt  $B_n^{\frac{1}{2}} \log B_n = O(A_n)$  majdnem biztosan. Ekkor az 1.12. Állítást alkalmazva kapjuk, hogy  $Z_n \sim A_n$  majdnem biztosan  $n \rightarrow \infty$  esetén. Ezért

$$\frac{C_{n,M}}{n} = \frac{Z_n}{nQ_n} \sim \frac{A_n}{nQ_n} \rightarrow X$$

majdnem biztosan  $n \rightarrow \infty$  esetén, ahol a  $Q_n$  sorozat pozitív, növekvő és határértéke véges.  $\square$

Az 1.5. Tétel bizonyítása. Az 1.20. Tétel és az 1.23. Tétel eredményeit felhasználva láthatjuk, hogy

$$\frac{C(n, M, w)}{C_{n, M}} = \frac{\frac{AC(n, M, w)}{An}}{\frac{C_{n, M}}{n}} \rightarrow \frac{Ax_{M, w}}{X} = c_{M, w}$$

majdnem biztosan  $n \rightarrow \infty$  esetén. Továbbá,

$$c_{M, 1} = \frac{Ax_{M, 1}}{X} = \frac{1}{a_M + 1}.$$

Az (1.44) rekurzió mindkét oldalát megszorozva  $\frac{A}{X}$ -szel az alábbi rekurziót kapjuk a  $c_{M, w}$  határértékekre.

$$c_{M, w} = \frac{a_M(w-1)}{wa_M + 1} c_{M, w-1}, \quad \text{ha } w > 1.$$

A fenti rekurziót felhasználva  $c_{M, w}$ -t az alábbi alakban írhatjuk fel.

$$c_{M, w} = c_{M, 1} \prod_{j=2}^w \frac{a_M(j-1)}{a_M j + 1} = \frac{1}{wa_M + 1} \prod_{j=1}^{w-1} \frac{j}{j + \frac{1}{a_M}} = c_{M, 1} \frac{\Gamma(w) \Gamma\left(2 + \frac{1}{a_M}\right)}{\Gamma\left(1 + w + \frac{1}{a_M}\right)}. \quad (1.60)$$

Továbbá, az (1.60) egyenlet és a  $\Gamma$  függvényre vonatkozó Stirling formula felhasználásával azt is beláthatjuk, hogy a  $c_{M, w}$  sorozat polinomiálisan csökken, azaz

$$c_{M, w} \sim c_{M, 1} \Gamma\left(2 + \frac{1}{a_M}\right) w^{-\left(1 + \frac{1}{a_M}\right)} = \frac{\Gamma\left(1 + \frac{1}{a_M}\right)}{a_M} w^{-\left(1 + \frac{1}{a_M}\right)} \quad (1.61)$$

$w \rightarrow \infty$  esetén. Az (1.60) egyenletből az (1.41) egyenlet és a  $\Gamma$  függvényre vonatkozó Stirling formula felhasználásával az is következik, hogy  $\sum_{w=1}^n c_{M, w} \rightarrow 1$ , amint  $n \rightarrow \infty$ . Ezért  $\sum_{w=1}^{\infty} c_{M, w} = 1$ , azaz a  $c_{M, 1}, c_{M, 2}, \dots$  sorozat valódi diszkrét valószínűségeloszlás.  $\square$

1.24. MEGJEGYZÉS. Fazekas, Noszály és Perecsényi (2018) egy meglehetősen általános modellt vizsgált, mely további általánosítása Ostroumova, Ryabchenko és Samosvat (2013) modelljének. A cikkben ismertetett módszert a dolgozatban vizsgált modell egy speciális esetére, az  $N$ -pontos modellre alkalmazva a  $2 \leq M \leq N$  esetben igazolták az  $M$ -klikkek súlyeloszlásának skálafüggtelenségét (lásd Fazekas, Noszály és Perecsényi (2018), Theorem 3.). Az említett eredmény összhangban van a disszertációban ismertetett eredménnyel (lásd 2.1

fejezet, 2.4. Tétel). Fazekas, Noszály és Percsényi (2018) módszerének segítségével a dolgozatban definiált  $G(N, p_0, \dots, p_{N-1}, r_0, \dots, r_{N-1})$  modellt vizsgálva a  $2 \leq M \leq N$  esetben az  $M$ -klikkek súlyeloszlásának skálafüggetlensége is igazolható. Az így kapott eredmény összhangban van a dolgozatban ismertetett 1.5. Tétel eredményével. Megjegyezzük, hogy bár a módszer általánosabb, a csúcsok súlyaira mégsem alkalmazható, mivel ebben az esetben nem teljesül egy a modellre vonatkozó alapfeltétel (lásd Fazekas, Noszály és Percsényi (2018), (2.2) feltétel).

### 1.3.3. A fokszámok skálafüggetlensége

A dolgozat ezen részében az 1.7. Tételt fogjuk bizonyítani, mely egy a modell paramétereire vonatkozó feltétel teljesülése esetén a fokszámeloszlás skálafüggetlenségét mondja ki.

Az 1.2. Tételben meghatároztuk a csúcsok súlyainak és fokszámainak együttes eloszlását. A bizonyítás első lépéseként megadjuk ezen együttes eloszlás alábbi reprezentációját. Ez az előállítás fontos szerepet játszik a fokszámokra vonatkozó skálafüggetlenség igazolásában.

*A csúcsok és a fokszámok együttes eloszlása.* Legyen a  $W$  valószínűségi változó eloszlása  $\mathbb{P}(W = w) = x_w$ ,  $w = 1, 2, \dots$ , ahol az  $x_w$  értékeket az 1.18. Lemmában definiáltuk. Legyenek  $\xi_1 \equiv N - 1$  és  $\xi_2, \xi_3, \dots$  egymástól és  $W$ -től is független valószínűségi változók az alábbi eloszlással.

$w \geq 2$  esetén legyen

$$\mathbb{P}(\xi_w = k) = \frac{\alpha_k (w - 1)}{\alpha (w - 1) + \beta}, \quad k = 0, 1, \dots, N - 2,$$

$$\mathbb{P}(\xi_w = N - 1) = \frac{\alpha_{N-1} (w - 1) + \beta}{\alpha (w - 1) + \beta}.$$

Jelölje  $S_w$  a fent megadott  $\xi_i$  valószínűségi változókból képzett  $w$  tagú összeget, azaz legyen  $S_w = \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_w$ .

1.25. TÉTEL. Minden  $w = 1, 2, \dots$ ,  $d = N - 1, N, \dots, (N - 1)w$  esetén

$$\mathbb{P}(S_W = d, W = w) = x_{d,w}.$$

BIZONYÍTÁS. A  $w = 1$  és  $d = N - 1$  esetben egyszerűen igazolható az állítás.

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(S_W = N - 1, W = 1) &= \mathbb{P}(S_1 = N - 1, W = 1) = \\ &= \mathbb{P}(\xi_1 = N - 1, W = 1) = \mathbb{P}(W = 1) = x_1 = x_{N-1,1}. \end{aligned}$$

Felhasználva az  $x_w$ -re adott (1.6) rekurziót és azt, hogy a  $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots$  valószínűségi változók függetlenek  $W$ -től azt kapjuk, hogy  $w \geq 2$  esetén

$$\mathbb{P}(S_W = d, W = w) = \mathbb{P}(S_w = d, W = w) = \mathbb{P}(S_w = d) \mathbb{P}(W = w) =$$

$$\begin{aligned}
&= [\mathbb{P}(S_{w-1} = d) \mathbb{P}(\xi_w = 0) + \mathbb{P}(S_{w-1} = d-1) \mathbb{P}(\xi_w = 1) + \cdots + \\
&+ \mathbb{P}(S_{w-1} = d - (N-1)) \mathbb{P}(\xi_w = N-1)] \mathbb{P}(W = w-1) \frac{x_w}{x_{w-1}} = \\
&= \frac{1}{\alpha w + \beta + 1} [\mathbb{P}(S_{w-1} = d) \mathbb{P}(W = w-1) \alpha_0(w-1) + \\
&\quad + \mathbb{P}(S_{w-1} = d-1) \mathbb{P}(W = w-1) \alpha_1(w-1) + \cdots + \\
&\quad + \mathbb{P}(S_{w-1} = d - (N-1)) \mathbb{P}(W = w-1) (\alpha_{N-1}(w-1) + \beta)] = \\
&= \frac{1}{\alpha w + \beta + 1} \left[ \sum_{k=0}^{N-1} \alpha_k(w-1) \mathbb{P}(S_W = d-k, W = w-1) + \right. \\
&\quad \left. + \beta \mathbb{P}(S_W = d - (N-1), W = w-1) \right].
\end{aligned}$$

Azaz a  $\mathbb{P}(S_W = d, W = w)$  eloszlás az  $x_{d,w}$  határértékekhez hasonlóan eleget tesz az (1.3)-(1.4) rekurzióknak.  $\square$

A következő tételben megadjuk az együttes eloszlás aszimptotikus alakját.

1.26. TÉTEL. *Legyen  $\alpha_0 > 0$ ,  $\alpha \neq \alpha_0$  és tegyük fel, hogy teljesül az (1.11) feltétel. Ekkor*

$$\begin{aligned}
x_{d,w} = x_w \frac{\alpha}{\sqrt{2\pi \left( \alpha \sum_{k=1}^{N-1} k^2 \alpha_k - \left( \sum_{k=1}^{N-1} k \alpha_k \right)^2 \right) w}} \times \\
\times \left[ \exp \left( -\frac{(d - \mathbb{E}S_w)^2}{2\mathbb{D}^2 S_w} \right) + O \left( w^{-\frac{1}{2}} \right) \right] \quad (1.62)
\end{aligned}$$

amint  $w \rightarrow \infty$ , ahol a hibtag  $(O(w^{-\frac{1}{2}}))$  nem függ  $d$ -től.

BIZONYÍTÁS. Legyen  $w \geq 1$ . A várható érték definíciója szerint

$$\mathbb{E}\xi_w = \sum_{k=1}^{N-1} k \frac{\alpha_k}{\alpha} + \frac{1}{\alpha(\alpha(w-1) + \beta)} \left[ \beta \left( \alpha(N-1) - \sum_{k=1}^{N-1} k \alpha_k \right) \right]$$

ha  $w \geq 2$ , ezért

$$\mathbb{E}S_w = \mathbb{E}\xi_1 + \cdots + \mathbb{E}\xi_w = w \sum_{k=1}^{N-1} k \frac{\alpha_k}{\alpha} + O(\log w)$$



$w \rightarrow \infty$  esetén. Hasonlóan kapjuk, hogy

$$\mathbb{E}\xi_w^2 = \sum_{k=1}^{N-1} k^2 \frac{\alpha_k}{\alpha} + \frac{1}{\alpha(\alpha(w-1) + \beta)} \left[ \beta \left( \alpha(N-1)^2 - \sum_{k=1}^{N-1} k^2 \alpha_k \right) \right],$$

ezt felhasználva pedig

$$\mathbb{D}^2 \xi_w = \frac{\alpha \sum_{k=1}^{N-1} k^2 \alpha_k - (\sum_{k=1}^{N-1} k \alpha_k)^2}{\alpha^2} + O\left(\frac{1}{w}\right), \quad (1.63)$$

$$\mathbb{D}^2 S_w = w \frac{\alpha \sum_{k=1}^{N-1} k^2 \alpha_k - (\sum_{k=1}^{N-1} k \alpha_k)^2}{\alpha^2} + O(\log w) \quad (1.64)$$

$w \rightarrow \infty$  esetén.

Alkalmazzuk most Petrov (1975, Theorem VII.1.5.) eredményét  $S_w$ -re. Láthatjuk, hogy Petrov lokális határeloszlástételének feltételei teljesülnek. Legyen  $p_{j,m} = \mathbb{P}(\xi_j = m)$  és jelölje  $p_{j,m_j}$  az eloszlás maximumát, azaz legyen  $p_{j,m_j} = \max_m p_{j,m}$ . Ekkor nyilván

$$\gcd \left\{ m : \frac{1}{\log n} \sum_{j=1}^n p_{j,m_j} p_{j,m+m_j} \rightarrow \infty \right\} = 1.$$

Továbbá az is könnyen látszik, hogy

$$\liminf \frac{\mathbb{D}^2 S_w}{w} > 0 \quad \text{és} \quad \limsup \frac{1}{w} \sum_{j=1}^w \mathbb{E}|\xi_j - \mathbb{E}\xi_j|^3 < \infty.$$

Ezért Petrov tételét alkalmazva kapjuk, hogy

$$\sup_{d \in \mathbb{Z}} \left| \mathbb{D}S_w \mathbb{P}(S_w = d) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(d - \mathbb{E}S_w)^2}{2\mathbb{D}^2 S_w}\right) \right| = O\left(\frac{1}{\sqrt{w}}\right). \quad (1.65)$$

Az (1.64) és (1.65) egyenletek felhasználásával láthatjuk, hogy

$$\left| \mathbb{D}S_w - \frac{1}{\alpha} \sqrt{w \left( \alpha \sum_{k=1}^{N-1} k^2 \alpha_k - \left( \sum_{k=1}^{N-1} k \alpha_k \right)^2 \right)} \right| \mathbb{P}(S_w = d) = O\left(w^{-\frac{1}{2}}\right).$$

Mindezek miatt (1.65)-ből az következik, hogy

$$\sup_{d \in \mathbb{Z}} \left| \frac{1}{\alpha} \sqrt{w \left( \alpha \sum_{k=1}^{N-1} k^2 \alpha_k - \left( \sum_{k=1}^{N-1} k \alpha_k \right)^2 \right)} \mathbb{P}(S_w = d) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \left( -\frac{(d - \mathbb{E}S_w)^2}{2\mathbb{D}^2 S_w} \right) \right| = O \left( \frac{1}{\sqrt{w}} \right). \quad (1.66)$$

Mivel  $W$  és  $\xi_i$  független, ezért  $x_{d,w} = \mathbb{P}(S_W = d, W = w) = \mathbb{P}(S_w = d) x_w$ . Ezt alkalmazva (1.66)-ban a kívánt eredmény adódik.  $\square$

*Az 1.7. Tétel bizonyítása.* Az 1.2. Tétel és az 1.18. Lemma alapján már láttuk, hogy az  $\frac{X(n, d, w)}{V_n}$  hányados 1 valószínűséggel konvergál a  $\mathbb{P}(S_W = d, W = w) = x_{d,w}$  kétdimenziós diszkrét valószínűségeloszláshoz. Továbbá  $n$  lépés után rögzített  $d$  esetén, a  $d$  fokú csúcsok száma nem más, mint a  $d$  fokú és  $w$  súlyú csúcsok számának összege minden lehetséges  $d$ -hez tartozó  $w$  súly esetén. Azaz

$$U(n, d) = \sum_{w: \frac{d}{N-1} \leq w \leq n+1} X(n, d, w).$$

A fenti összeg tagszáma  $n \rightarrow \infty$  esetén nem korlátos. Azonban  $x_{d,w}$ ,  $N-1 \leq d \leq (N-1)w$ ,  $w = 1, 2, \dots$  kétdimenziós diszkrét valószínűségeloszlás, így a marginális eloszlások konvergenciája a kétdimenziós eloszlás konvergenciájának következménye. Ezért az 1.2. Tételt, az 1.25. Tételt és az 1.18. Lemmát felhasználva láthatjuk, hogy (1.12) teljesül, azaz az  $\frac{U(n, d)}{V_n}$  hányados, a  $d$  fokú csúcsok aránya 1 valószínűséggel konvergál  $n \rightarrow \infty$  esetén, ahol a határértékek  $u_d = \sum_w x_{d,w}$  sorozata diszkrét valószínűségeloszlás.

Legyen most

$$f = \frac{\alpha}{\sum_{k=1}^{N-1} k \alpha_k} d$$

és legyen

$$H = H_d = \left\{ w : f - f^{\frac{1}{2} + \varepsilon} \leq w \leq f + f^{\frac{1}{2} + \varepsilon} \right\},$$

$$H^- = H_d^- = \left\{ w : w < f - f^{\frac{1}{2} + \varepsilon} \right\}, \quad H^+ = H_d^+ = \left\{ w : w > f + f^{\frac{1}{2} + \varepsilon} \right\},$$

ahol  $0 < \varepsilon < \frac{1}{6}$  rögzített. A  $\sum_w x_{d,w}$  összeg viselkedését a fenti három tartományon külön-külön vizsgáljuk.

Legyen először  $w \in H^-$ . Hoeffding exponenciális egyenlőtlenségét (Hoeffding (1963), Theorem 2.) alkalmazva és felhasználva, hogy a  $H^-$  tartományon  $f^{\frac{1}{2}+\varepsilon} < f - w$ , illetve  $w < f$  azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(S_w = d) &\leq \mathbb{P}(S_w \geq d) \leq \mathbb{P}\left(S_w - \mathbb{E}S_w \geq d - \sum_{k=1}^{N-1} k \frac{\alpha_k}{\alpha} w - O(\log w)\right) \leq \\ &\leq \exp\left\{-\frac{2}{(N-1)^2 w} \left(d - \sum_{k=1}^{N-1} k \frac{\alpha_k}{\alpha} w - O(\log w)\right)^2\right\} \leq \\ &\leq \exp\left\{-\frac{2}{(N-1)^2 w} \left(\sum_{k=1}^{N-1} k \frac{\alpha_k}{\alpha}\right)^2 (f - w - O(\log w))^2\right\} \leq \\ &\leq \exp\left\{-\frac{2}{(N-1)^2} \left(\sum_{k=1}^{N-1} k \frac{\alpha_k}{\alpha}\right)^2 f^{2\varepsilon} + O(\log f)\right\}. \end{aligned}$$

Ezt felhasználva következik, hogy a  $H^-$  tartományon

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(S_W = d, W \in H^-) &= \sum_{w \in H^-} \mathbb{P}(S_w = d, W = w) \leq \\ &\leq f \exp\left\{-\frac{2}{(N-1)^2} \left(\sum_{k=1}^{N-1} k \frac{\alpha_k}{\alpha}\right)^2 f^{2\varepsilon} + O(\log f)\right\} = o\left(f^{-(1+\frac{1}{\alpha})}\right). \quad (1.67) \end{aligned}$$

Hasonlóan, Hoeffding exponenciális egyenlőtlenségét alkalmazva és felhasználva, hogy  $w \in H^+$ , valamint  $\frac{1}{2} + \varepsilon < 1$  kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(S_w = d) &\leq \mathbb{P}(S_w \leq d) \leq \mathbb{P}\left(S_w - \mathbb{E}S_w \leq d - \sum_{k=1}^{N-1} k \frac{\alpha_k}{\alpha} w\right) \leq \\ &\leq \exp\left\{-\frac{1}{2(N-1)^2} \left(\sum_{k=1}^{N-1} k \frac{\alpha_k}{\alpha}\right)^2 w^{2\varepsilon}\right\}. \end{aligned}$$

Ezért

$$\begin{aligned} &\mathbb{P}(S_W = d, W \in H^+) \leq \\ &\leq \sum_{\{w: f < w\}} \exp\left\{-\frac{1}{2(N-1)^2} \left(\sum_{k=1}^{N-1} k \frac{\alpha_k}{\alpha}\right)^2 w^{2\varepsilon}\right\} = o\left(f^{(-1+\frac{1}{\alpha})}\right) \quad (1.68) \end{aligned}$$

elég nagy  $f$ -re.

Legyen most  $w \in H$ . Ekkor  $w = f + O\left(f^{\frac{1}{2}+\varepsilon}\right)$ . Tetszőlegesen kis  $\varepsilon_1 > 0$  esetén

$$\begin{aligned}
-\frac{(d - \mathbb{E}S_w)^2}{2\mathbb{D}^2 S_w} &= -\frac{\left(d - w \sum_{k=1}^{N-1} k \frac{\alpha_k}{\alpha} - O(\log w)\right)^2}{2 \frac{\alpha \sum_{k=1}^{N-1} k^2 \alpha_k - \left(\sum_{k=1}^{N-1} k \alpha_k\right)^2}{\alpha^2} w + O(\log w)} = \\
&= -\frac{\left(\sum_{k=1}^{N-1} k \alpha_k\right)^2}{\alpha \sum_{k=1}^{N-1} k^2 \alpha_k - \left(\sum_{k=1}^{N-1} k \alpha_k\right)^2} \frac{(f - w - O(\log w))^2}{2w + O(\log w)} = \\
&= -\frac{\left(\sum_{k=1}^{N-1} k \alpha_k\right)^2}{\alpha \sum_{k=1}^{N-1} k^2 \alpha_k - \left(\sum_{k=1}^{N-1} k \alpha_k\right)^2} \times \\
&\quad \times \frac{(f - w)^2 + O\left(f^{\frac{1}{2}+\varepsilon+\varepsilon_1}\right)}{2f} \left[1 - \frac{O\left(f^{\frac{1}{2}+\varepsilon}\right)}{2f + O\left(f^{\frac{1}{2}+\varepsilon}\right)}\right] = \\
&= -\frac{\left(\sum_{k=1}^{N-1} k \alpha_k\right)^2}{\alpha \sum_{k=1}^{N-1} k^2 \alpha_k - \left(\sum_{k=1}^{N-1} k \alpha_k\right)^2} \frac{(f - w)^2}{2f} + O\left(f^{-\frac{1}{2}+3\varepsilon}\right) \quad (1.69)
\end{aligned}$$

teljesül  $d \rightarrow \infty$  esetén, és itt a hibtag nem függ  $w$ -től. Alkalmazzuk most az 1.26. Tételben szereplő (1.62) formulát, mely  $x_{d,w}$  aszimptotikus viselkedését írja le. Az  $x_w$  határértékek aszimptotikus viselkedése az (1.7) formulával adott. Mindezeket és (1.69)-et felhasználva kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
x_{d,w} &\sim C w^{-(1+\frac{1}{\alpha})} \frac{\alpha}{\sqrt{2\pi \left(\alpha \sum_{k=1}^{N-1} k^2 \alpha_k - \left(\sum_{k=1}^{N-1} k \alpha_k\right)^2\right)} w} \times \\
&\quad \times \left[ \exp \left\{ -\frac{\left(\sum_{k=1}^{N-1} k \alpha_k\right)^2}{\alpha \sum_{k=1}^{N-1} k^2 \alpha_k - \left(\sum_{k=1}^{N-1} k \alpha_k\right)^2} \times \right. \right. \\
&\quad \quad \left. \left. \times \frac{(f - w)^2}{2f} + O\left(f^{-\frac{1}{2}+3\varepsilon}\right) \right\} + O\left(w^{-\frac{1}{2}}\right) \right] \sim
\end{aligned}$$

$$\sim C f^{-(1+\frac{1}{\alpha})} \frac{\alpha}{\sum_{k=1}^{N-1} k \alpha_k} \frac{1}{\sqrt{2\pi \frac{\alpha \sum_{k=1}^{N-1} k^2 \alpha_k - \left(\sum_{k=1}^{N-1} k \alpha_k\right)^2}{\left(\sum_{k=1}^{N-1} k \alpha_k\right)^2} f}} \times$$

$$\times \exp \left\{ -\frac{(f-w)^2}{2 \frac{\alpha \sum_{k=1}^{N-1} k^2 \alpha_k - \left(\sum_{k=1}^{N-1} k \alpha_k\right)^2}{\left(\sum_{k=1}^{N-1} k \alpha_k\right)^2} f} \right\}$$

$d \rightarrow \infty$  és  $w \in H$  esetén, ahol  $C = \Gamma\left(1 + \frac{\beta+1}{\alpha}\right) / \left(\alpha \Gamma\left(1 + \frac{\beta}{\alpha}\right)\right)$ .

Ezért

$$\sum_{w \in H} x_{d,w} \sim \sum_{f-f^{\frac{1}{2}+\varepsilon} < w < f+f^{\frac{1}{2}+\varepsilon}} C f^{-(1+\frac{1}{\alpha})} \frac{\alpha}{\sum_{k=1}^{N-1} k \alpha_k} \times$$

$$\times \frac{1}{\sqrt{2\pi \frac{\alpha \sum_{k=1}^{N-1} k^2 \alpha_k - \left(\sum_{k=1}^{N-1} k \alpha_k\right)^2}{\left(\sum_{k=1}^{N-1} k \alpha_k\right)^2} f}} \times$$

$$\times \exp \left\{ -\frac{(f-w)^2}{2 \frac{\alpha \sum_{k=1}^{N-1} k^2 \alpha_k - \left(\sum_{k=1}^{N-1} k \alpha_k\right)^2}{\left(\sum_{k=1}^{N-1} k \alpha_k\right)^2} f} \right\} =$$

$$= B \sum_{-f^\varepsilon < \frac{l}{\sqrt{f}} < f^\varepsilon} \frac{1}{\sqrt{f}} \frac{1}{\sqrt{2\pi \frac{\alpha \sum_{k=1}^{N-1} k^2 \alpha_k - \left(\sum_{k=1}^{N-1} k \alpha_k\right)^2}{\left(\sum_{k=1}^{N-1} k \alpha_k\right)^2}}} \times$$

$$\times \exp \left\{ -\frac{\left(\frac{l}{\sqrt{f}}\right)^2}{2 \frac{\alpha \sum_{k=1}^{N-1} k^2 \alpha_k - \left(\sum_{k=1}^{N-1} k \alpha_k\right)^2}{\left(\sum_{k=1}^{N-1} k \alpha_k\right)^2}} \right\} \rightarrow$$

$$\rightarrow B \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi \frac{\alpha \sum_{k=1}^{N-1} k^2 \alpha_k - (\sum_{k=1}^{N-1} k \alpha_k)^2}{(\sum_{k=1}^{N-1} k \alpha_k)^2}}} \times \\ \times \exp \left\{ -\frac{x^2}{2 \frac{\alpha \sum_{k=1}^{N-1} k^2 \alpha_k - (\sum_{k=1}^{N-1} k \alpha_k)^2}{(\sum_{k=1}^{N-1} k \alpha_k)^2}} \right\} dx = B.$$

Így azt kapjuk, hogy

$$\mathbb{P}(S_W = d, W \in H) \sim B = \frac{\Gamma\left(1 + \frac{\beta+1}{\alpha}\right)}{\sum_{k=1}^{N-1} k \alpha_k \Gamma\left(1 + \frac{\beta}{\alpha}\right)} \left(\frac{\alpha}{\sum_{k=1}^{N-1} k \alpha_k} d\right)^{-(1+\frac{1}{\alpha})} \quad (1.70)$$

$d \rightarrow \infty$  esetén. Végezetül, (1.67), (1.68) és (1.70) felhasználásával

$$u_d = \sum_w x_{d,w} = \sum_{w \in H^-} x_{d,w} + \sum_{w \in H} x_{d,w} + \sum_{w \in H^+} x_{d,w} \sim \\ \sim o\left(f^{-(1+\frac{1}{\alpha})}\right) + C \frac{\alpha}{\sum_{k=1}^{N-1} k \alpha_k} f^{-(1+\frac{1}{\alpha})} + o\left(f^{-(1+\frac{1}{\alpha})}\right) \sim \\ \sim \frac{\Gamma\left(1 + \frac{\beta+1}{\alpha}\right)}{\sum_{k=1}^{N-1} k \alpha_k \Gamma\left(1 + \frac{\beta}{\alpha}\right)} \left(\frac{\alpha}{\sum_{k=1}^{N-1} k \alpha_k} d\right)^{-(1+\frac{1}{\alpha})}$$

$d \rightarrow \infty$  esetén. Ezzel a bizonyítás kész. □

## 2. fejezet

# Egy speciális eset: az $N$ -pontos modell

Legyen  $N \geq 3$  rögzített egész szám,  $0 \leq p_i \leq 1$ ,  $0 \leq r_i \leq 1$  ( $i = 0, 1$ ),  $p_j = r_j = 0$  ( $j = 2, \dots, N-1$ ). A továbbiakban a dolgozat első részében definiált és tanulmányozott modell egy speciális esetével, a  $G(N, p_0, p_1, r_0, r_1)$  (azaz az  $N$ -pontos) modellel foglalkozunk részletesebben. Az  $N$ -pontos modell definíciója és evolúciója speciális esete a  $G(N, p_0, \dots, p_{N-1}, r_0, \dots, r_{N-1})$  modellének, ezért annak fejlődését is minden lépésben  $N$  csúcs kölcsönös interakciója határozza meg. A gráf evolúciója során az egyes lépésekben vagy egy előre adott  $p_1$  valószínűséggel 1 új csúcs csatlakozik a gráfhoz, mely  $N-1$  régi csúccsal lép interakcióba (**Step NEW<sub>1</sub>**), vagy pedig  $p_0$  valószínűséggel nem születik új csúcs és  $N$  régi csúcs formál  $N$ -klikket (**Step OLD**). Mindkét lehetséges lépés esetén  $r_i$  valószínűséggel a preferential attachment szabály szerint súlyarányosan választunk egy  $(N-i)$ -klikket a már létezőek közül, míg  $1-r_i$  valószínűséggel egyenletesen történik az interakcióban részt vevő  $N-i$  régi csúcs kiválasztása ( $i = 0, 1$ ). Mivel az  $N$ -pontos modell definíciója szerint a  $p_2, \dots, p_{N-1}$  valószínűségek 0-val egyenlőek, ezért az 1.2 fejezet (1.1) pontjában megadott együtthatók az alábbi egyszerű alakban szerepelnek a modellre vonatkozó eredményekben, illetve azok bizonyításaiban.

$$\alpha = \alpha_0 + \alpha_1, \quad \text{ahol} \quad \alpha_0 = p_0 r_0 \quad \text{és} \quad \alpha_1 = \frac{N-1}{N} p_1 r_1,$$

$$p_1 \beta = \beta_0 + \beta_1, \quad \text{ahol} \quad \beta_0 = N p_0 (1 - r_0) \quad \text{és} \quad \beta_1 = (N-1) p_1 (1 - r_1), \quad (2.1)$$

$$a_M = \alpha_0 + \frac{N-M}{N-1} \alpha_1, \quad b_M = \beta_0 + \frac{N-M}{N-1} \beta_1.$$

Továbbá az egy lépésben megjelenő új csúcsok várható száma  $A = p_1$ .

Ebben a fejezetben legyen  $1 \leq M \leq N$  rögzített egész szám.

## 2.1. Fő eredmények az $N$ -pontos modellre

Ebben a részben ismertetni fogjuk az  $N$ -pontos modellre vonatkozó fő eredményeinket. Az eredmények egy része, nevezetesen a modell skálafüggetlenségéről szóló állítások az 1.2 fejezetben megadott általános  $G(N, p_0, \dots, p_{N-1}, r_0, \dots, r_{N-1})$  modellre vonatkozó tételek következménye. A fokszám- és súlyeloszlás mellett egy rögzített  $M$ -klick súlyának, egy rögzített csúcs fokszámának, valamint a csúcsok esetében a maximális súly és a maximális fokszám aszimptotikus viselkedését is vizsgáljuk.

Ahogy arra már korábban is utaltunk, az  $N$ -pontos modell Backhausz és Móri (2012, 2014) háromszöges modelljének általánosítása. Az  $N$ -pontos modellre vonatkozó eredmények főként a háromszöges modellre vonatkozó megfelelő állítások kiterjesztései. Megjegyezzük, hogy rögzített  $1 < M \leq N$  esetén az  $M$ -klikkek súlyainak aszimptotikus viselkedését, melyet az  $N$ -pontos modellre a 2.7. Tétellel adunk meg, a háromszöges modell esetében nem vizsgálták.

### 2.1.1. Az $N$ -pontos modell skálafüggetlensége

Az  $N$ -pontos modell skálafüggetlenségéről szóló eredmények az 1.2 fejezetben ismertetett tételek speciális esetei, ezért itt bizonyítások nélkül csak az eredményeket ismertetjük. A most következő tételek Fazekas és Porvázsnyik (2016b) cikkében kerültek közlésre.

Az első tétel a  $d$  fokú és  $w$  súlyú csúcsok arányának 1 valószínűségű konvergenciájáról szól. A tétel az 1.2. Tétel speciális esete az  $N$ -pontos modellre.

**2.1. TÉTEL.** (Fazekas és Porvázsnyik, 2016b, Theorem 1.) Legyen  $\alpha_1 > 0$ . Minden rögzített  $w$  és  $d$  esetén, ahol  $1 \leq w$  és  $N - 1 \leq d \leq w(N - 1)$ ,

$$\frac{X(n, d, w)}{V_n} \rightarrow x_{d,w} \quad (2.2)$$

majdnem biztosan  $n \rightarrow \infty$  esetén, ahol az  $x_{d,w}$  határértékek rögzített nemnegatív számok, melyek teljesítik az alábbi rekurziót:

$$x_{N-1,1} = \frac{1}{\alpha + \beta + 1} > 0, \quad x_{d,1} = 0, \quad \text{ha } d \neq N - 1, \quad (2.3)$$

$$x_{d,w} = \frac{1}{\alpha w + \beta + 1} [\alpha_0 (w - 1) x_{d,w-1} + \alpha_1 (w - 1) x_{d-1,w-1} + \beta x_{d-(N-1),w-1}] \quad (2.4)$$

ha  $w \geq 2$ ,  $N - 1 \leq d \leq w(N - 1)$ . Továbbá  $x_{d,w} = 0$  esetén  $\frac{X(n, d, w)}{V_n} = o(n^{-a})$ , ahol  $a$  egy pozitív szám, mely  $w$ -től és  $d$ -től is függhet. Ha  $N - 1 \leq d \leq (N - 1)w$  nem teljesül, akkor  $x_{d,w} = 0$ .



2.2. MEGJEGYZÉS. Minden  $N \geq 3$  esetén létezik olyan  $(d, w)$  pár,  $1 \leq w$ ,  $N - 1 \leq d \leq (N - 1)w$ , melyre  $x_{d,w}$  pozitív. Továbbá minden  $N \geq 4$  esetén létezik olyan  $(d, w)$  pár,  $1 \leq w$ ,  $N - 1 \leq d \leq (N - 1)w$ , melyre a fenti tételben megadott rekurzió alapján  $x_{d,w} = 0$ .

A következő tétel a csúcsok súlyainak skálafüggetlenségét mondja ki. A tétel az 1.4. Tétel speciális esete az  $N$ -pontos modellre.

2.3. TÉTEL. (Fazekas és Porvázsnik, 2016b, Theorem 2.) Legyen  $\alpha_1 > 0$ . Minden  $w = 1, 2, \dots$  esetén

$$\frac{X(n, w)}{V_n} \rightarrow x_w \quad (2.5)$$

majdnem biztosan  $n \rightarrow \infty$  esetén. Az  $x_w$ ,  $w = 1, 2, \dots$  határértékek pozitív számok, melyek teljesítik az alábbi rekurziót:

$$x_1 = \frac{1}{\alpha + \beta + 1}, \quad x_w = \frac{\alpha(w-1) + \beta}{\alpha w + \beta + 1} x_{w-1}, \quad \text{ha } w > 1. \quad (2.6)$$

Továbbá

$$x_w \sim C w^{-(1+\frac{1}{\alpha})} \quad (2.7)$$

$w \rightarrow \infty$  esetén, ahol  $C = \Gamma\left(1 + \frac{\beta+1}{\alpha}\right) / \left(\alpha \Gamma\left(1 + \frac{\beta}{\alpha}\right)\right)$ .

Rögzített  $2 \leq M \leq N$  esetén az  $M$ -klikkek súlyeloszlásának skálafüggetlenségéről szól a következő eredmény. A tétel az 1.5. Tétel speciális esete az  $N$ -pontos modellre.

2.4. TÉTEL. Legyen  $\alpha_1 > 0$ . Ekkor minden rögzített  $M$  és  $w$ ,  $2 \leq M \leq N$ ,  $w \geq 1$  esetén teljesül, hogy

$$\frac{C(n, M, w)}{C_{n,M}} \rightarrow c_{M,w} \quad (2.8)$$

majdnem biztosan  $n \rightarrow \infty$  esetén. A  $c_{M,w}$ ,  $w = 1, 2, \dots$  határértékek rögzített pozitív számok, melyek teljesítik az alábbi rekurziót:

$$c_{M,1} = \frac{1}{a_M + 1}, \quad c_{M,w} = \frac{(w-1)a_M}{wa_M + 1} c_{M,w-1}, \quad \text{ha } w > 1, \quad (2.9)$$

ahol az  $a_M$  mennyiséget (2.1)-ben definiáltuk. A  $c_{M,1}, c_{M,2}, \dots$  sorozat egy valódi diszkrét valószínűségeloszlás. Továbbá

$$c_{M,w} \sim \frac{\Gamma\left(1 + \frac{1}{a_M}\right)}{a_M} w^{-(1+\frac{1}{a_M})} \quad (2.10)$$

$w \rightarrow \infty$  esetén.

Könnyen ellenőrizhető, hogy a  $G(N, p_0, \dots, p_{N-1}, r_0, \dots, r_{N-1})$  modellben a foksámbeloszlás skálafüggetlenségéről szóló 1.7. Tételben adott (1.11) feltétel az  $N$ -pontos modellre teljesül. Azaz az  $N$ -pontos modell a természetes értelemben is skálafüggetlen.

2.5. TÉTEL. (Fazekas és Porvázsnnyik, 2016b, Theorem 3.) Legyen  $\alpha_1 > 0$ . Ekkor minden  $d \geq N - 1$  esetén

$$\frac{U(n, d)}{V_n} \rightarrow u_d = \sum_w x_{d,w}. \quad (2.11)$$

Továbbá

$$u_d \sim \frac{\Gamma\left(1 + \frac{\beta+1}{\alpha}\right)}{\alpha_1 \Gamma\left(1 + \frac{\beta}{\alpha}\right)} \left(\frac{\alpha}{\alpha_1} d\right)^{-(1+\frac{1}{\alpha})} \quad (2.12)$$

$d \rightarrow \infty$  esetén.

2.6. MEGJEGYZÉS. A 2.1. Tétel, valamint a foksámok skálafüggetlenségéről szóló 2.5. Tétel Backhausz és Móri háromszöges modellre vonatkozó megfelelő eredményeinek kiterjesztése az  $N$ -pontos modellre (lásd Backhausz és Móri (2014), Theorem 3.1. és Theorem 4.3.). A 2.3. Tétel, mely a csúcsok súlyainak skálafüggetlenségét mondja ki, a háromszöges modellre vonatkozó eredmény (lásd Backhausz és Móri (2012), Theorem 3.1.) általánosítása az  $N$ -pontos modellre. A 2.4. Tétel állítását Fazekas, Noszály és Perecsényi (2015, Theorem 2.2. és Theorem 2.3.) igazolta a háromszöges modellre. Emellett az  $N$ -pontos modellben az  $N$ -klikkek súlyainak skálafüggetlenségét (lásd Fazekas et al. (2015), Theorem 4.1.), illetve a  $2 \leq M \leq N$  esetben az  $M$ -klikkek súlyainak skálafüggetlenségét (lásd Fazekas et al. (2018), Theorem 3.) is bizonyították. Az  $N$ -pontos modellre vonatkozó ezen eredmények összhangban vannak a dolgozatban ismertetett eredménnyel (lásd 2.4. Tétel).

### 2.1.2. A súlyok és foksámok aszimptotikus viselkedése

Ebben a fejezetben ismertetjük a klikkeket jellemző súlyok, valamint a csúcsokat jellemző foksámok aszimptotikus viselkedésére vonatkozó eredményeinket. A most következő eredmények Fazekas és Porvázsnyik (2016a) cikkében kerültek közlésre.

Először egy rögzített  $M$ -klick súlyának aszimptotikus viselkedését vizsgáljuk. Az  $n = 0$  lépésben a kiinduló  $N$  csúcs teljes gráf  $\binom{N}{M}$   $M$ -klicket tartalmaz. Legyen ezen  $M$ -klikkek címkéje  $0, -1, \dots, -\left(\binom{N}{M} - 1\right)$ . Ezt követően az új  $M$ -klikkek címkéje legyen  $1, 2, \dots$  a születési sorrendjüknek megfelelően. Legyen  $j \geq -\left(\binom{N}{M} - 1\right)$  rögzített egész szám. Jelölje  $W[n, M, j]$  a  $j$ -edik  $M$ -klick súlyát az  $n$ -edik lépés után. Ekkor  $W[n, 1, j]$  jelöli a  $j$ -edik csúcs súlyát az  $(n + 1)$ -edik lépésben. Jelölje továbbá  $D[n, j]$  a  $j$ -edik csúcs foksámát az  $n$ -edik lépés után. (Ha  $n < j$ , akkor  $W[n, 1, j] = D[n, j] = 0$ .)

Az  $n = 0$  kezdeti időpontban adott  $N$  csúcsú teljes gráf szimmetrikus. Ezért, és a gráf evolúciós mechanizmusa miatt elegendő, ha a  $W[n, M, j]$  és  $D[n, j]$  mennyiségeket csak  $j = 0, 1, 2, \dots$  esetén vizsgáljuk.

Az alábbi tétel egy rögzített  $M$ -klick súlyának aszimptotikus viselkedését írja le.

**2.7. TÉTEL.** (Fazekas és Porvázsnyik, 2016a, Theorem 2.3.) Legyen  $j \geq 0$  és  $1 \leq M \leq N$  rögzített egész szám. Tegyük fel, hogy  $\alpha > 0$ . Ekkor

$$W[n, M, j] \sim \frac{1}{\Gamma(1 + a_M)} \gamma_{M,j} n^{a_M} \quad (2.13)$$

majdnem biztosan  $n \rightarrow \infty$  esetén, ahol  $\gamma_{M,j}$  egy pozitív valószínűségi változó és az  $a_M$  mennyiséget (2.1)-ben definiáltuk.

$M = 1$  esetén a 2.7. Tétel egy rögzített csúcs súlyának aszimptotikus viselkedését adja meg. Erről szól az alábbi 2.8. Következmény, mely Backhausz és Móri háromszöges modellre vonatkozó eredményének (lásd Backhausz és Móri (2012), Theorem 4.1.) kiterjesztése az  $N$ -pontos modellre.

**2.8. KÖVETKEZMÉNY.** (Fazekas és Porvázsnyik, 2016a, Corollary 2.4.) Legyen  $j \geq 0$  rögzített egész szám és legyen  $\alpha > 0$ . Ekkor

$$W[n, 1, j] \sim \frac{1}{\Gamma(1 + \alpha)} \gamma_{1,j} n^\alpha \quad (2.14)$$

majdnem biztosan  $n \rightarrow \infty$  esetén, ahol  $\gamma_{1,j}$  egy pozitív valószínűségi változó.

Tekintsük most egy rögzített csúcs foksámsorozatát. Az alábbi tételben ennek a sorozatnak az aszimptotikus viselkedését vizsgáljuk. A most következő 2.9. Tétel Backhausz és Móri eredményének (lásd Backhausz és Móri (2014), Theorem 5.2.) kiterjesztése az  $N$ -pontos modellre.

2.9. TÉTEL. (Fazekas és Porvázsnyik, 2016a, Theorem 2.5.) Legyen  $j \geq 0$  rögzített egész szám és legyen  $\alpha > 0$ . Ekkor

$$D[n, j] \sim \frac{1}{\Gamma(1 + \alpha)} \frac{\alpha_1}{\alpha} \gamma_{1,j} n^\alpha \quad (2.15)$$

majdnem biztosan  $n \rightarrow \infty$  esetén, ahol a  $\gamma_{1,j}$  pozitív valószínűségi változót (2.14)-ben definiáltuk.

A következő két tétellel a maximális súly és a maximális foksám aszimptotikus viselkedését jellemezzük.

Jelölje  $\mathcal{W}_n$  a maximális súlyú csúcs súlyát  $n$  lépés után, azaz legyen

$$\mathcal{W}_n = \max\{W[n, 1, j] : -(N-1) \leq j \leq n\}. \quad (2.16)$$

2.10. TÉTEL. (Fazekas és Porvázsnyik, 2016a, Theorem 2.6.) Legyen  $\alpha > 0$ . Ekkor

$$\mathcal{W}_n \sim \frac{1}{\Gamma(1 + \alpha)} \mu n^\alpha \quad \text{majdnem biztosan } n \rightarrow \infty \quad (2.17)$$

esetén, ahol  $\mu = \sup\{\gamma_{1,j} : j \geq -(N-1)\}$  egy véges pozitív valószínűségi változó és  $\gamma_{1,j}$ -t (2.14)-ben definiáltuk.

Jelölje  $\mathcal{D}_n$  a maximális foksámot  $n$  lépés után, azaz legyen

$$\mathcal{D}_n = \max\{D[n, j] : -(N-1) \leq j \leq n\}. \quad (2.18)$$

2.11. TÉTEL. (Fazekas és Porvázsnyik, 2016a, Theorem 2.7.) Legyen  $\alpha > 0$ . Ekkor

$$\mathcal{D}_n \sim \frac{1}{\Gamma(1 + \alpha)} \frac{\alpha_1}{\alpha} \mu n^\alpha \quad \text{majdnem biztosan } n \rightarrow \infty \quad (2.19)$$

esetén, ahol  $\mu = \sup\{\gamma_{1,j} : j \geq -(N-1)\}$  a 2.10. Tételben megadott pozitív valószínűségi változó.

A fenti 2.10. Tétel és a 2.11. Tétel alkalmas kiterjesztései Backhausz és Móri háromszöges modellre vonatkozó megfelelő eredményeinek. (Lásd Backhausz és Móri (2014), Theorem 5.1. és 5.3.).

2.12. MEGJEGYZÉS. Azt vehetjük észre, hogy a fenti eredményekben csak az  $\alpha_0$  és az  $\alpha_1$  együtthatók tűnnek fel. Ezek alapján azt mondhatjuk, hogy az aszimptotikus viselkedésre nincsenek hatással az egyenletes választáshoz kapcsolódó  $\beta_0$  és  $\beta_1$  paraméterek. Ezt a jelenséget a következőképpen magyarázhatjuk. Ha  $j$  rögzített és  $n$  elég nagy, akkor a  $j$ -edik csúcs régi csúcs a  $V_n \sim np_1$  csúcs között. Ezért a  $j$ -edik csúcs súlya és foksáma viszonylag magas a fiatal csúcsokéhoz képest. Mivel sok fiatal csúcs van, ezért az egyenletes választásnak kisebb hatása van a  $j$ -edik csúcs súlyára és foksámára.

2.13. MEGJEGYZÉS. A 2.8. Következémenyt és a 2.9. Tételt összevetve azt láthatjuk, hogy a  $j$ -edik csúcs súlyának és fokszámának aszimptotikus aránya

$$\begin{aligned} \frac{W[n, 1, j]}{D[n, j]} &\sim \frac{\alpha}{\alpha_1} = \\ &= \frac{(N-1)\mathbb{P}(\text{Step NEW}_1 \text{ és PA}) + N\mathbb{P}(\text{Step OLD és PA})}{(N-1)\mathbb{P}(\text{Step NEW}_1 \text{ és PA})}. \end{aligned} \quad (2.20)$$

A fenti arány nem más, mint a régi csúcsok várható súlynövekedésének és várható fokszámnövekedésének aránya egy lépés során abban az esetben, ha a preferential attachment szabály szerint történik a választás. Hasonló állítás igaz a maximális súly és a maximális fokszám aszimptotikus arányára is. A 2.10. Tétel és a 2.11. Tétel felhasználásával láthatjuk, hogy  $\mathcal{W}_n/\mathcal{D}_n \sim \alpha/\alpha_1$ .

2.14. MEGJEGYZÉS. Jelölje  $\tau_n$  azon csúcsok címkéinek maximumát, amelyek a maximális súlyt elérik, azaz legyen

$$\tau_n = \max\{j : W[n, 1, j] = \mathcal{W}_n\}.$$

Ekkor a  $\tau_n(\omega)$ ,  $n = 1, 2, \dots$  sorozat korlátos majdnem minden rögzített  $\omega$  elemi eseményre. Ez az állítás a 2.10. Tételnek és bizonyításának egyszerű következménye. Hasonló állítás mondható ki a fokszámokra is.



## 2.2. Bizonyítások

Ezen fejezet célja a 2.1.2 fejezetben bemutatott eredmények igazolása. A bizonyítások során a modellre vonatkozó részeredményeinket is ismertetjük. Mivel az eredmények főként a háromszöges modellre vonatkozó megfelelő állítások általánosításai az  $N$ -pontos modellre, így a bizonyítások során követjük Backhausz és Móri (2012, 2014) gondolatmenetét és martingálos technikájakat alkalmazzuk. Látni fogjuk, hogy a bizonyítások során a kombinatorikai problémák az általános  $N$ -pontos modellre nehezebbek, mint azok az  $N = 3$  esetben.

### 2.2.1. Egy rögzített $M$ -klick súlyának aszimptotikus viselkedése

*A 2.7. Tétel bizonyítása.* A bizonyítás 2 részből áll. Először megmutatjuk, hogy az állítás nemnegatív  $\gamma_{M,j}$ -vel teljesül. Ezt követően pedig azt látjuk be, hogy  $\gamma_{M,j}$  1 valószínűséggel pozitív.

Legyen  $B_{n+1} = \{W[n+1, M, j] = W[n, M, j] + 1\}$ , ahol  $W[n, M, j]$  jelöli a  $j$ -edik  $M$ -klick súlyát  $n$  lépés után. Azaz  $B_{n+1}$  azt az eseményt jelöli, hogy a  $j$ -edik  $M$ -klick az  $(n+1)$ -edik lépésben interakcióban vesz részt. A 1.3 alfejezetben igazolt 1.13. Lemmában megadtuk annak a valószínűségét, hogy egy  $w$  súlyú  $M$ -klick az  $n$ -edik lépésben részt vesz az interakcióban. Ezt felhasználva könnyen láthatjuk, hogy annak a valószínűsége, hogy a  $j$ -edik  $M$ -klick az  $(n+1)$ -edik lépésben részt vesz az interakcióban

$$\begin{aligned} p_1 r_1 \frac{(N-M)W[n, M, j]}{N(n+1)} + p_1(1-r_1) \frac{\binom{N-1}{M}}{\binom{V_n}{M}} + p_0 r_0 \frac{W[n, M, j]}{n+1} + p_0(1-r_0) \frac{\binom{N}{M}}{\binom{V_n}{M}} = \\ = \frac{W[n, M, j]}{n+1} a_M + \frac{\binom{N}{M}}{N \binom{V_n}{M}} b_M. \end{aligned} \quad (2.21)$$

Tekintsük azt az eseményt, hogy a  $j$ -edik  $M$ -klick létezik  $n$  lépés után. A fentiek miatt ezen az eseményen

$$\mathbb{P}(B_{n+1} | \mathcal{F}_n) \geq \frac{a_M}{n+1}. \quad (2.22)$$

A  $(B_n, n \in \mathbb{N})$  sorozat adaptált az  $(\mathcal{F}_n, n \in \mathbb{N})$   $\sigma$ -algebrák sorozatára nézve. A Borel-Cantelli lemma általánosítását alkalmazva (lásd Neveu (1975), Proposition VII-2-6.) és a (2.22) alsó becslést felhasználva azt kapjuk, hogy

$$W[n, M, j] \rightarrow \infty \text{ majdnem biztosan } n \rightarrow \infty \text{ esetén.} \quad (2.23)$$

Vezessük be az alábbi jelöléseket. Legyen  $j \geq 0$  és  $1 \leq M \leq N$  rögzített egész szám. Legyen  $I[n, M, j]$  annak az eseménynek az indikátora, hogy a  $j$ -edik

$M$ -klick létezik  $n$  lépés után, azaz legyen

$$I[n, M, j] = \begin{cases} 1, & \text{ha } W[n, M, j] > 0, \\ 0, & \text{ha } W[n, M, j] = 0. \end{cases}$$

Legyen  $J[n, M, j]$  annak az eseménynek az indikátora, hogy a  $j$ -edik  $M$ -klick az  $n$ -edik lépésben született. Ekkor  $J[n, M, j] = I[n, M, j] - I[n-1, M, j]$ . Minden rögzített pozitív  $j, k, l, M$ ,  $0 \leq j \leq l$ ,  $1 \leq k$ ,  $1 \leq M \leq N$  egész szám esetén tekintsük a következő sorozatokat:

$$b[n, M, k] = \prod_{i=1}^n \left(1 + \frac{a_M k}{i}\right)^{-1}, \quad (2.24)$$

$$d[n, M, k, j] = - \sum_{i=1}^{n-1} b[i+1, M, k] \frac{\binom{N}{M}}{N \binom{V_i}{M}} b_M \binom{W[i, M, j] + k - 1}{k - 1}, \quad (2.25)$$

$$e_{n, M} = \prod_{i=1}^n \left(1 - \frac{a_M}{i}\right)^{-1}. \quad (2.26)$$

Láthatjuk, hogy míg a  $b[n, M, k]$  és az  $e_{n, M}$  sorozatok determinisztikusak, addig  $d[n, M, k, j]$   $\mathcal{F}_{n-1}$ -mérhető valószínűségi változó minden  $n, M, k$  és  $j$  esetén. A  $b[n, M, k]$  sorozatot a (2.24)-ben adott definíciójának felhasználásával az alábbi alakban adhatjuk meg.

$$b[n, M, k] = \prod_{i=1}^n \frac{i}{i + a_M k} = \Gamma(1 + a_M k) \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+1 + a_M k)}.$$

Ezért a  $\Gamma$ -függvényre vonatkozó Stirling formulát alkalmazva meghatározhatjuk  $b[n, M, k]$  aszimptotikus viselkedését. Így azt kapjuk, hogy

$$b[n, M, k] \sim b_{M, k} n^{-k a_M} \quad n \rightarrow \infty \text{ esetén}, \quad (2.27)$$

ahol  $b_{M, k} = \Gamma(1 + a_M k) > 0$ ,  $k$  és  $M$  rögzített egész számok. Továbbá könnyen látható, hogy

$$e_{n, M} = b[n, M, -1] \sim \Gamma(1 - a_M) n^{a_M}, \quad \text{ha } n \rightarrow \infty. \quad (2.28)$$

A következő lemmában egy olyan martingált vezetünk be, amely alapvető szerepet játszik a 2.7. Tétel bizonyításában.



2.15. LEMMA. *Legyenek  $j, k, l, M$ ,  $0 \leq j \leq l$ ,  $1 \leq M \leq N$  rögzített nemnegatív egész számok és legyen*

$$Z[n, M, k, j, l] = \left( b[n, M, k] \binom{W[n, M, j] + k - 1}{k} + d[n, M, k, j] \right) I[l, M, j]. \quad (2.29)$$

*Ekkor  $(Z[n, M, k, j, l], \mathcal{F}_n)$  martingál  $n \geq l$  esetén.*

BIZONYÍTÁS. A modell definíciójából következik, hogy egy rögzített  $M$ -klikk súlya pontosan 1-gyel nő, ha interakcióban vesz részt. (2.21)-ben már láttuk, hogy annak a valószínűsége, hogy a  $j$ -edik  $M$ -klikk részt vesz az interakcióban az  $(n + 1)$ -edik lépésben

$$\frac{W[n, M, j]}{n + 1} a_M + \frac{\binom{N}{M}}{N \binom{V_n}{M}} b_M, \quad (2.30)$$

feltéve, hogy a  $j$ -edik  $M$ -klikk létezik az  $l$ -edik lépésben. Ezt felhasználva,  $n \geq l$  esetén

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left\{ \left( \binom{W[n + 1, M, j] + k - 1}{k} I[l, M, j] \mid \mathcal{F}_n \right) \right\} = \\ & = I[l, M, j] \left( 1 - \left( \frac{W[n, M, j]}{n + 1} a_M + \frac{\binom{N}{M}}{N \binom{V_n}{M}} b_M \right) \right) \left( \binom{W[n, M, j] + k - 1}{k} \right) + \\ & + I[l, M, j] \left( \frac{W[n, M, j]}{n + 1} a_M + \frac{\binom{N}{M}}{N \binom{V_n}{M}} b_M \right) \left( \binom{W[n, M, j] + k}{k} \right) = \\ & = I[l, M, j] \frac{\binom{N}{M}}{N \binom{V_n}{M}} b_M \left( \binom{W[n, M, j] + k - 1}{k - 1} \right) + \\ & + I[l, M, j] \left( 1 + a_M \frac{k}{n + 1} \right) \left( \binom{W[n, M, j] + k - 1}{k} \right). \end{aligned}$$

Mindkét oldalt megszorozva  $b[n + 1, M, k]$ -vel azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left\{ b[n + 1, M, k] \left( \binom{W[n + 1, M, j] + k - 1}{k} I[l, M, j] \mid \mathcal{F}_n \right) \right\} = \\ & = I[l, M, j] \left( \left( \binom{W[n, M, j] + k - 1}{k} b[n, M, k] + d[n, M, k, j] - d[n + 1, M, k, j] \right) \right). \quad (2.31) \end{aligned}$$

Felhasználva, hogy  $d[n + 1, M, k, j]$   $\mathcal{F}_n$ -mérhető, a bizonyítás kész.  $\square$

A 2.15. Lemma jelöléseit megtartva legyen  $Z[n, M, k, j, l] = Z[n, M, k, j]I[l, M, j]$ . Tekintsük most a  $(Z[n, M, k, j, l], \mathcal{F}_n)$  martingált, melyet a 2.15. Lemmában vettünk be és legyen  $k = 1$ . Ekkor

$$Z[n, M, 1, j, l] = (b[n, M, 1]W[n, M, j] + d[n, M, 1, j])I[l, M, j]. \quad (2.32)$$

Az általános modellben a csúcsok számának aszimptotikáját az (1.23) egyenlettel adtuk meg. Az  $N$ -pontos modellre, mint speciális esetre kapjuk, hogy

$$V_n = p_1 n + o\left(n^{1/2+\varepsilon}\right) \quad (2.33)$$

majdnem biztosan minden  $\varepsilon > 0$  esetén.  $b[n, M, 1]$  aszimptotikáját (2.27) alapján már ismerjük. Ezt és (2.33)-at felhasználva pedig meghatározhatjuk  $d[n, M, 1, j]$  aszimptotikáját. Ekkor

$$\begin{aligned} d[n, M, 1, j] &= - \sum_{i=1}^{n-1} b[i+1, M, 1] \frac{\binom{N}{M}}{N \binom{V_i}{M}} b_M \sim \\ &\sim - \frac{1}{p_1^M} \binom{N}{M} \frac{M!}{N} b_M \Gamma(1 + a_M) \sum_{i=1}^{n-1} i^{-(a_M+M)} (1 + o(1)). \end{aligned}$$

Mivel  $a_M$  és  $M$  is pozitív, így  $d[n, M, 1, j]$  konvergens  $n \rightarrow \infty$  esetén és ezért a  $Z[n, M, 1, j, l]$  martingál alulról korlátos. Most megmutatjuk, hogy  $Z[n, M, 1, j, l]$  korlátos differenciájú martingál. A  $b[n, M, 1]$  sorozat csökkenő, ezért

$$Z[n+1, M, 1, j, l] - Z[n, M, 1, j, l] \leq b[n, M, 1] (W[n+1, M, j] - W[n, M, j]) \leq 1.$$

Hasonlóan kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} &Z[n, M, 1, j, l] - Z[n+1, M, 1, j, l] \leq \\ &\leq (b[n, M, 1] - b[n+1, M, 1])W[n, M, j] + (d[n, M, 1, j] - d[n+1, M, 1, j]) = \\ &= (b[n, M, 1] - b[n+1, M, 1])W[n, M, j] + b[n+1, M, 1] \frac{\binom{N}{M}}{N \binom{V_n}{M}} b_M \leq \\ &\leq b[n+1, M, 1] \left( a_M + \frac{1}{N} b_M \right) \leq a_M + \frac{b_M}{N}. \end{aligned}$$

Tehát a  $Z[n, M, 1, j, l]$  martingál alulról korlátos és korlátos differenciájú, ezért Neveu (1975) VII-3-9. Állítását alkalmazva azt is láthatjuk, hogy majdnem biztosan konvergens  $n \rightarrow \infty$  esetén. Továbbá a  $Z[n, M, 1, j, l]$  folyamat definíciója miatt  $b[n, M, 1]W[n, M, j]$  majdnem biztosan konvergens a  $\{W[l, M, j] > 0\}$  eseményen. Ezt, (2.23)-at és (2.27)-et felhasználva következik, hogy a 2.7. Tétel állítása nemnegatív  $\gamma_{M,j}$ -vel teljesül.

Most megmutatjuk, hogy  $\gamma_{M,j}$  1 valószínűséggel pozitív. Ehhez a következő lemmában definiált szupermartingált fogjuk felhasználni.

2.16. LEMMA. *Legyenek  $j, k, M, 0 \leq j \leq k, 1 \leq M \leq N$  rögzített nemnegatív egész számok. A következő sorozat nemnegatív szupermartingál.*

$$\left( \frac{e_{n,M} I[k, M, j]}{W[n, M, j] - 1}, \mathcal{F}_n \right), \quad n = j, j+1, \dots \quad (2.34)$$

BIZONYÍTÁS. A 2.15. Lemma bizonyításához hasonlóan  $n \geq k$  esetén

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left\{ \frac{I[k, M, j]}{W[n+1, M, j] - 1} \middle| \mathcal{F}_n \right\} = \\ & = \left( \frac{W[n, M, j]}{n+1} a_M + \frac{\binom{N}{M}}{N \binom{V_n}{M}} b_M \right) \frac{I[k, M, j]}{W[n, M, j]} + \\ & \quad + \left( 1 - \left( \frac{W[n, M, j]}{n+1} a_M + \frac{\binom{N}{M}}{N \binom{V_n}{M}} b_M \right) \right) \frac{I[k, M, j]}{W[n, M, j] - 1} = \\ & = \left( \frac{W[n, M, j]}{n+1} a_M + \frac{\binom{N}{M}}{N \binom{V_n}{M}} b_M \right) \left( \frac{I[k, M, j]}{W[n, M, j]} - \frac{I[k, M, j]}{W[n, M, j] - 1} \right) + \\ & \quad + \frac{I[k, M, j]}{W[n, M, j] - 1} \leq - \frac{a_M I[k, M, j]}{(n+1)(W[n, M, j] - 1)} + \frac{I[k, M, j]}{W[n, M, j] - 1} = \\ & = \frac{I[k, M, j]}{W[n, M, j] - 1} \left( 1 - \frac{a_M}{n+1} \right). \quad (2.35) \end{aligned}$$

A (2.35) formula mindkét oldalát megszorozva  $e_{n+1,M}$ -mel a lemma állítása adódik.

□

Tekintsük az

$$\left( \frac{e_{n,M} I[k, M, j]}{W[n, M, j] - 1}, \mathcal{F}_n \right), \quad n \geq j$$

szupermartingált, melyet a 2.16. Lemmában definiáltunk. Mivel ez a szupermartingál nemnegatív, ezért a szubmartingál konvergencia tételnek megfelelően majdnem biztosan konvergens.  $\lim_{l \rightarrow \infty} I[l, M, j] = 1$  majdnem biztosan, így  $\frac{e_{n,M}}{W[n, M, j] - 1}$  is konvergens majdnem biztosan  $n \rightarrow \infty$  esetén. Ezt és a (2.28) formulát felhasználva következik, hogy  $\gamma_{M,j}$  pozitív majdnem biztosan. □

### 2.2.2. Egy rögzített csúcs fokszámának aszimptotikus viselkedése

2.17. MEGJEGYZÉS. Míg egy rögzített csúcs súlya bármely lépés során legfeljebb 1-gyel nőhet, addig egy rögzített csúcs fokszámnövekedése  $0, 1, \dots, N - 1$  lehet. Ezért  $0 \leq D[n, j] - D[n - 1, j] \leq N - 1$  minden rögzített  $j \geq 0$ -ra. Továbbá, egy rögzített csúcs fokszáma nem változik azokban a lépésekben, amikor nem adunk új csúcst a gráfhoz és a preferential attachment szabály szerint súlyarányosan választjuk ki az interakcióban részt vevő régi csúcsokat.

2.18. LEMMA. *Legyen  $j \geq 0$  rögzített egész szám. Ekkor  $n \geq k$  esetén*

$$\begin{aligned} I[k, 1, j] \left( D[n, j] + \alpha_1 \frac{W[n, 1, j]}{n+1} \right) &\leq \mathbb{E}\{I[k, 1, j]D[n+1, j]|\mathcal{F}_n\} = \\ &= I[k, 1, j] \left( D[n, j] + \alpha_1 \frac{W[n, 1, j]}{n+1} + T_n \right), \end{aligned}$$

ahol  $0 \leq T_n \leq (N - 1) \frac{p_1 \beta}{V_n}$ .

BIZONYÍTÁS. Tekintsük az  $\mathbb{E}\{D[n+1, j] - D[n, j]|\mathcal{F}_n\}$  feltételes várható értéket feltéve, hogy a  $j$ -edik csúcs létezik  $k$  lépés után. Minden olyan lépésben, amikor a modell a preferential attachment szabály szerint fejlődik, egy rögzített csúcs fokszáma vagy 1-gyel nő vagy pedig változatlan marad. Ezért a  $j$ -edik csúcs várható fokszámnövekedése az  $(n+1)$ -edik lépésben PA választás esetén  $\alpha_1 \frac{W[n, 1, j]}{n+1}$ . Egyenletes választás esetén egy rögzített csúcs fokszáma legfeljebb  $(N - 1)$ -gyel nőhet. Továbbá (2.21) alapján azt is láthatjuk, hogy annak a valószínűsége, hogy egyenletes választás esetén a  $j$ -edik csúcs fokszámnövekedése pozitív, nem nagyobb, mint  $\frac{p_1 \beta}{V_n}$ . Ezért a  $j$ -edik csúcs várható fokszámnövekedése az  $(n+1)$ -edik lépésben egyenletes választás esetén kisebb vagy egyenlő, mint  $(N - 1) \frac{p_1 \beta}{V_n}$ .  $\square$

A 2.9. Tétel bizonyítása. Tekintsük most az alábbi korlátos valószínűségi változót:  $\rho_n = \frac{I[k, 1, j]}{N-1}(D[n, j] - D[n - 1, j])$ . A 2.17. Megjegyzés alapján  $0 \leq \rho_n \leq 1$ . Neveu (1975) VII-2-6. Állításának alkalmas verzióját alkalmazva (lásd még Backhausz (2012), 2.4. Állítás), majd pedig a 2.18. Lemmát és a (2.14) egyenletet felhasználva kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} D[n, j] &= (N - 1) \sum_{i=1}^n \rho_i \sim (N - 1) \sum_{i=1}^n \mathbb{E}(\rho_i|\mathcal{F}_{i-1}) = \\ &= \sum_{i=1}^n \left( \alpha_1 \frac{W[i-1, 1, j]}{i} + T_{i-1} \right) \sim \frac{1}{\Gamma(1 + \alpha)} \frac{\alpha_1}{\alpha} \gamma_{1, j} n^\alpha \end{aligned} \quad (2.36)$$

feltéve, hogy a  $j$ -edik csúcs létezik  $k$  lépés után. Mivel  $\lim_{k \rightarrow \infty} W[k, 1, j] = \infty$  majdnem biztosan, így a tétel állítása adódik.  $\square$

### 2.2.3. A maximális súly és a maximális fokszám aszimptotikus viselkedése

Ebben a fejezetben célunk a csúcsokat jellemző mennyiségek maximumaira vonatkozó 2.10. Tétel és 2.11. Tétel bizonyítása.

Elsőként igazoljuk az alábbi lemmát, mely alapvető szerepet játszik a maximális súly aszimptotikus viselkedésének meghatározásában.

2.19. LEMMA. *Minden rögzített nemnegatív egész  $k \geq 0$ ,  $1 \leq m \leq n$  esetén legyen*

$$S[m, n, k] = \sum_{j=m}^n \mathbb{E} \left( b[n, 1, k] \binom{W[n, 1, j] + k - 1}{k} I[n, 1, j] \right). \quad (2.37)$$

*Ekkor létezik olyan  $C_k$  pozitív konstans, hogy*

$$S[m, n, k] \leq C_k \sum_{j=m}^n j^{-\alpha k}. \quad (2.38)$$

BIZONYÍTÁS. A lemma állítását  $k$  szerinti teljes indukcióval bizonyítjuk. Legyen először  $k = 0$ . Ekkor

$$\begin{aligned} S[m, n, 0] &= \sum_{j=m}^n \mathbb{E} (b[n, 1, 0] I[n, 1, j]) = \\ &= \sum_{j=m}^n b[n, 1, 0] \mathbb{E} (I[n, 1, j]) = \sum_{j=m}^n \mathbb{P} (W[n, 1, j] > 0) \leq n - m + 1. \end{aligned}$$

Tegyük most fel, hogy az állítás igaz  $(k-1)$ -re. A 2.15. Lemma alapján tudjuk, hogy  $Z[n, 1, k, j, l]$  martingál. Továbbá két martingál különbsége ismét martingál. Ezért  $Z[n, 1, k, j, l]$  definíciójában  $I[l, 1, j]$ -t  $J[l, 1, j]$ -re cserélve újból martingált kapunk. Felhasználva  $J[n, 1, j]$  és  $Z[n, 1, k, j, l]$  definícióját,  $S[m, n, k]$ -t két tag összegeként írhatjuk fel a következőképpen.

$$\begin{aligned} S[m, n, k] &= \sum_{j=m}^n \mathbb{E} \left( \sum_{l=j}^n (Z[l, 1, k, j] - d[n, 1, k, j]) J[l, 1, j] \right) = \\ &= \mathbb{E} \left( \sum_{j=m}^n \sum_{l=j}^n b[l, 1, k] J[l, 1, j] \right) + \\ &\quad + \mathbb{E} \left( \sum_{j=m}^n \sum_{l=j}^n (d[l, 1, k, j] - d[n, 1, k, j]) J[l, 1, j] \right). \quad (2.39) \end{aligned}$$

Az utolsó lépésben azt használtuk, hogy  $W(l, 1, j) = 1$ , ha  $J[l, 1, j] = 1$ . Adjunk most felső korlátot a (2.39) formulában szereplő két tagra. Korábban már láttuk, hogy rögzített  $k$  esetén a  $b[n, 1, k]$  sorozat csökkenő. Ezért felhasználva, hogy  $b[n, 1, k]$  aszimptotikáját (2.27) alapján már ismerjük azt kapjuk, hogy

$$\mathbb{E} \left( \sum_{j=m}^n \sum_{l=j}^n b[l, 1, k] J[l, 1, j] \right) \leq \sum_{j=m}^n b[j, 1, k] \mathbb{E} \left( \sum_{l=j}^n J[l, 1, j] \right) \leq C_k^{(1)} \sum_{j=m}^n j^{-\alpha k}. \quad (2.40)$$

A (2.39)-ben szereplő összeg második tagjára az összegzés sorrendjének felcserélésével, valamint felhasználva az  $I[i, 1, j]$  és  $J[l, 1, j]$  indikátorok közötti  $I[i, 1, j] = \sum_{l=j}^i J[l, 1, j]$  összefüggést azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left( \sum_{j=m}^n \sum_{l=j}^n (d[l, 1, k, j] - d[n, 1, k, j]) J[l, 1, j] \right) = \\ &= \mathbb{E} \left( \sum_{i=m}^{n-1} \frac{b[i+1, 1, k] p_1}{b[i, 1, k-1] V_i} \beta \times \right. \\ & \quad \times \sum_{j=m}^i b[i, 1, k-1] \binom{W[i, 1, j] + k - 2}{k-1} \frac{W[i, 1, j] + k - 1}{W[i, 1, j]} I[i, 1, j] \left. \right) \leq \\ & \leq k \sum_{i=m}^{n-1} \frac{b[i+1, 1, k]}{b[i, 1, k-1]} \mathbb{E} \left( \frac{p_1}{V_i} \beta \sum_{j=m}^i b[i, 1, k-1] \binom{W[i, 1, j] + k - 2}{k-1} I[i, 1, j] \right). \end{aligned} \quad (2.41)$$

Az utolsó lépésben azt használtuk, hogy  $\frac{W[i, 1, j] + k - 1}{W[i, 1, j]} \leq k$ , ha  $I[i, 1, j] > 0$ .

Adjunk most felső korlátot a (2.41)-ben szereplő várható értékre külön a  $\{V_i < \frac{p_1 i}{2}\}$  és a  $\{V_i \geq \frac{p_1 i}{2}\}$  eseményeken. A  $\{V_i \geq \frac{p_1 i}{2}\}$  eseményen az indukciós feltevést felhasználva könnyen adódik, hogy

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left( \frac{p_1}{V_i} \beta \mathbb{I}_{\{V_i \geq \frac{p_1 i}{2}\}} \sum_{j=m}^i b[i, 1, k-1] \binom{W[i, 1, j] + k - 2}{k-1} I[i, 1, j] \right) \leq \\ & \leq \frac{2\beta}{i} C_{k-1} \sum_{j=m}^i j^{-\alpha(k-1)}. \end{aligned} \quad (2.42)$$

Itt  $\mathbb{I}_A$  az  $A$  esemény indikátorát jelöli. Másrészt, a  $\{V_i < \frac{p_1 i}{2}\}$  eseményen (2.27)-et felhasználva azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left( \frac{p_1}{V_i} \beta \mathbb{I}_{\{V_i < \frac{p_1 i}{2}\}} \sum_{j=m}^i b[i, 1, k-1] \binom{W[i, 1, j] + k - 2}{k-1} I[i, 1, j] \right) \leq \quad (2.43) \\ & \leq \frac{p_1}{N} \beta \mathbb{P} \left\{ V_i < \frac{p_1 i}{2} \right\} \sum_{j=m}^i b[i, 1, k-1] \binom{i+k-2}{k-1} = o \left( \frac{1}{i} \sum_{j=m}^i j^{-\alpha(k-1)} \right) \end{aligned}$$

$i \rightarrow \infty$  esetén. A fenti számítások során felhasználtuk, hogy a csúcsok száma bármely lépésben legalább  $N$ . Továbbá Hoeffding exponenciális egyenlőtlenségét alkalmazva (lásd Hoeffding (1963), Theorem 2.) a következő felső korlátot kaptuk:  $\mathbb{P} \left\{ V_i < \frac{p_1 i}{2} \right\} \leq e^{-\varepsilon i}$ , ahol  $\varepsilon = \frac{p_1^2}{2}$ . Ezért a (2.41), (2.42) és (2.43) formulák felhasználásával kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left( \sum_{j=m}^n \sum_{l=j}^n (d[l, 1, k, j] - d[n, 1, k, j]) J[l, 1, j] \right) \leq \\ & \leq k C_k^{(2)'} \sum_{i=m}^{n-1} i^{-\alpha} \sum_{j=m}^i \frac{1}{i} j^{-\alpha(k-1)} \leq C_k^{(3)} \sum_{j=m}^n j^{-\alpha k}. \quad (2.44) \end{aligned}$$

Itt azt alkalmaztuk, hogy (2.27) miatt  $\frac{b[i+1, 1, k]}{b[i, 1, k-1]} = O(i^{-\alpha})$ , amint  $i \rightarrow \infty$ . Végül, (2.39)-et, (2.40)-et és (2.44)-et összegezve a bizonyítás kész.  $\square$

*A 2.10. Tétel bizonyítása.* Legyen  $M[m, n] = \max\{W[n, 1, j] : -(N-1) \leq j < m\}$ , ahol  $1 \leq m \leq n$  rögzített egész szám. A 2.8. Következmény miatt

$$\Gamma(1+\alpha) \lim_{n \rightarrow \infty} n^{-\alpha} M[m, n] = \max\{\gamma_{1, j} : -(N-1) \leq j < m\} \quad (2.45)$$

majdnem biztosan. A 2.15. Lemma bizonyítása alapján az is látható, hogy az alábbi folyamat szubmartingál:

$$b[n, 1, k] \binom{W[n, 1, j] + k - 1}{k} = b[n, 1, k] \binom{W[n, 1, j] + k - 1}{k} I[n, 1, j], \quad n \geq j.$$

Legyen  $Q[m, n] = \max_{m \leq j \leq n} W[n, 1, j]$ . Ekkor  $0 \leq \mathcal{W}_n - M[m, n] \leq Q[m, n]$ . Szubmartingálok maximuma is szubmartingál, ezért

$$b[n, 1, k] \binom{Q[m, n] + k - 1}{k}, \quad n \geq m,$$

ugyancsak szubmartingál. Nemnegatív számok esetén a maximum az összeggel felülről becsülhető. Ezt és a 2.19. Lemmát felhasználva kapjuk, hogy

$$\mathbb{E} \left( b[n, 1, k] \binom{Q[m, n] + k - 1}{k} \right) \leq S[m, n, k] \leq C_k \sum_{j=m}^n j^{-\alpha k}. \quad (2.46)$$

Mivel

$$0 \leq (b[n, 1, 1]Q[m, n])^k \leq \frac{b[n, 1, 1]^k}{b[n, 1, k]^k} k! b[n, 1, k] \binom{Q[m, n] + k - 1}{k}, \quad (2.47)$$

így azt láthatjuk, hogy a  $b[n, 1, 1]Q[m, n]$  szubmartingál korlátos  $L^k$ -ban minden  $k\alpha > 1$ -re. Így ez a szubmartingál majdnem biztosan és  $L^k$ -ban is konvergens minden  $k > \frac{1}{\alpha}$  esetén. Továbbá a (2.27) formulát, valamint (2.46)-ot és (2.47)-et felhasználva kapjuk, hogy

$$\mathbb{E} \left( \limsup_{n \rightarrow \infty} (n^{-\alpha} Q[m, n])^k \right) \leq k! C_k \frac{1}{\Gamma(1 + \alpha k)} \sum_{j=m}^{\infty} j^{-\alpha k}. \quad (2.48)$$

A monoton konvergencia tételt alkalmazva

$$\mathbb{E} \left( \lim_{m \rightarrow \infty} \limsup_{n \rightarrow \infty} (n^{-\alpha} Q[m, n])^k \right) = 0$$

$k > \frac{1}{\alpha}$  esetén. Mivel  $Q[m, n]$   $m$  növekedésével csökkenő, így

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \limsup_{n \rightarrow \infty} n^{-\alpha} Q[m, n] = 0 \quad (2.49)$$

majdnem biztosan. Ezért, mivel  $0 \leq \mathcal{W}_n - M[m, n] \leq Q[m, n]$ ,

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \limsup_{n \rightarrow \infty} (n^{-\alpha} (\mathcal{W}_n - M[m, n])) = 0$$

majdnem biztosan. Ebből és (2.45)-ből következik (2.17). Továbbá (2.48) miatt azt is láthatjuk, hogy  $\mu$  majdnem biztosan véges. □

*A 2.11. Tétel bizonyítása.* A gráf evolúciós mechanizmusának definíciójából következik, hogy  $D[n, j] \leq (N - 1)W[n, 1, j]$ , hiszen egy interakcióban részt vevő csúcs fokszáma legfeljebb  $(N - 1)$ -gyel nő. Ezért

$$\begin{aligned} \max\{D[n, j] : -(N - 1) \leq j < m\} &\leq \mathcal{D}_n \leq \\ &\leq \max\{D[n, j] : -(N - 1) \leq j < m\} + \max\{(N - 1)W[n, 1, j] : m \leq j \leq n\}. \end{aligned}$$



Mindkét oldalt megszorozva  $n^{-\alpha}$ -nal, majd pedig határértéket véve  $n \rightarrow \infty$  esetén, a 2.9. Tétel felhasználásával kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} & \max \left\{ \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)} \frac{\alpha_1}{\alpha} \gamma_{1,j} : -(N-1) \leq j < m \right\} \leq \\ & \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \mathcal{D}_n n^{-\alpha} \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \mathcal{D}_n n^{-\alpha} \leq \\ & \leq \max \left\{ \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)} \frac{\alpha_1}{\alpha} \gamma_{1,j} : -(N-1) \leq j < m \right\} + (N-1) \limsup_{n \rightarrow \infty} n^{-\alpha} Q[m, n] \end{aligned}$$

$n \rightarrow \infty$  esetén. Ezért (2.49) felhasználásával  $m \rightarrow \infty$  esetén a tétel állítása adódik.

□



# Összefoglalás

Ezen disszertációban egy  $N$  csúcs interakcióján alapuló véletlen gráf modellt tanulmányozunk és az azt jellemző mennyiségek aszimptotikus viselkedését vizsgáljuk. Az értekezésben bemutatott eredmények Fazekas Istvánnal közösek. A dolgozat két részből áll.

Az értekezés elején röviden összefoglaljuk a véletlen gráfok elméletének a disszertáció témájához kapcsolódó irodalmi előzményeit. Ezen irodalmi áttekintés nem teljes, a hangsúlyt a dolgozatban vizsgált véletlen gráfhoz kapcsolódó modellekre és eredményekre helyezzük.

A disszertáció első részében (1. fejezet) egy  $N$  csúcs interakcióján alapuló általános gráffejlődési mechanizmust definiálunk és a folyamat eredményeként létrejövő véletlen gráf modellt tanulmányozzuk ( $N \geq 3$  rögzített egész szám). Továbbá ismertetjük és igazoljuk a modellre vonatkozó fő eredményeinket.

Az 1.1. fejezetben megadjuk a vizsgált véletlen gráf modell matematikai definícióját. Legyen  $N \geq 3$  rögzített egész szám. Az egyszerűség kedvéért egy  $N$  csúcsú teljes gráfot a továbbiakban  $N$ -klikknek fogunk nevezni. A gráf fejlődését minden lépésben  $N$  csúcs kölcsönös interakciója határozza meg. Ebben a modellben  $N$  csúcs interakciója alatt azt értjük, hogy az  $N$  csúcs között minden (még nem létező) élt behúzzunk és így egy  $N$ -klikket kapunk. A vizsgált modellben az  $M$ -klikkeket ( $1 \leq M \leq N$ ) súlyokkal jellemezzük. Egy  $M$ -klikk súlya azoknak a lépéseknek a számával egyezik meg, amelyekben az adott  $M$ -klikk interakcióban vett részt. Ezért ebben a modellben minden csúcsot két pozitív mennyiség, a fokszáma és a súlya jellemez. A kezdeti  $n = 0$  időpontban egyetlen  $N$ -klikkből indulunk ki. Az evolúciós folyamat során minden lépésben az előző lépéstől függetlenül  $p_k$  valószínűséggel egy új  $k$ -klikk csatlakozik a gráfhoz ( $0 \leq k \leq N - 1$ ), mely  $N - k$  régi csúccsal lép interakcióba. Az új klikket meghatározó csúcsok  $k$  száma egész értékű korlátos valószínűségi változó, melynek eloszlása a modell paramétereitől rögzített. Amennyiben egy adott lépés során nem születik új csúcs és a gráf mérete változatlan marad (azaz  $k = 0$ ), úgy  $N$  régi csúcs lép interakcióba. A gráf fejlődése során az egyes interakciókban részt vevő régi csúcsok kiválasztására két lehetőségünk van. Tegyük fel, hogy az  $n$ -edik lépésben  $k$  új csúcs csatlakozik

a gráfhoz. Ekkor, az előző lépésektől függetlenül,  $r_k$  ( $0 \leq k \leq N - 1$ ) valószínűséggel a preferential attachment szabály szerint súlyarányosan választunk egy  $(N - k)$ -klikket a már létező és pozitív súllyal rendelkező  $(N - k)$ -klikkek közül az  $(N - k)$ -klikkek összsúlyának megfelelően,  $1 - r_k$  valószínűséggel pedig egyenletesen választunk  $N - k$  régi csúcsot. Az evolúciós folyamat során előfordulhat, hogy olyan klikkek is keletkeznek, melyek nem egy a csúcsaik közötti interakció eredményeként jöttek létre. Ezeknek a klikkeknek a súlya 0 marad mindaddig, amíg az azt meghatározó csúcsok részt nem vesznek ugyanazon lépés során az interakcióban. Ebben a modellben egyenletes választás esetén már létező csúcsok között is keletkezhetnek új élek.

Az 1.2. fejezetben bemutatjuk a modellre vonatkozó fő eredményeinket. Vezessük be az alábbi jelöléseket. Legyen

$$\alpha = \sum_{k=0}^{N-1} \alpha_k, \quad \text{ahol} \quad \alpha_k = \frac{N - k}{N} p_k r_k,$$

és legyen

$$a_M = \sum_{k=0}^{N-M} \alpha_k \frac{\binom{N-M}{k}}{\binom{N-1}{k}}.$$

Jelölje  $X(n, d, w)$  a  $w$  súlyú és  $d$  fokú csúcsok számát  $n$  lépés után, és jelölje  $V_n$  a csúcsok számát  $n$  lépés után. Az 1.2. Tétel az  $\frac{X(n, d, w)}{V_n}$  hányados, azaz a  $d$  fokú és  $w$  súlyú csúcsok arányának majdnem biztos konvergenciájáról szól. A tétel állítása a következő.

*Legyen  $\alpha \neq \alpha_0$ . Rögzített  $1 \leq w$  és  $N - 1 \leq d \leq w(N - 1)$  esetén a  $d$  fokú és  $w$  súlyú csúcsok aránya 1 valószínűséggel konvergens, amint a lépésszám  $n$  tart a végtelenbe. A határértékek rögzített nemnegatív számok, melyeket rekurzív módon definiálunk.*

Ezt követően a modell skálafüggetlenségére vonatkozó eredményeinket ismertetjük. Megmutatjuk, hogy a vizsgált modellben a súlyeloszlás, illetve bizonyos esetekben a fokszámoszlás is skálafüggetlen. Skálafüggetlenség alatt azt értjük, hogy a fokszámoszlás (illetve súlyeloszlás) aszimptotikusan hatványrendben cseng le.

*A fokszámoszlás skálafüggetlenségének igazolása során megmutatjuk, hogy a  $d$  fokú csúcsok aránya majdnem biztosan konvergál valamilyen  $q_d$  valószínűségeloszláshoz  $n \rightarrow \infty$  esetén. Továbbá a  $q_d$  aszimptotikus fokszámoszlásra teljesül, hogy  $q_d \sim C_1 d^{-\gamma_1}$  valamilyen  $C_1$  és  $\gamma_1$  pozitív konstansokkal, amint  $d \rightarrow \infty$ , azaz a  $q_d$  sorozat aszimptotikusan hatványrendben cseng le. Hasonlóan, a súlyeloszlás skálafüggetlenségének bizonyítása során belátjuk, hogy a  $w$  súlyú csúcsok aránya majdnem biztosan konvergál valamilyen  $q_w$  valószínűségeloszláshoz  $n \rightarrow \infty$  esetén, ahol a  $q_w$  aszimptotikus súlyeloszlás hatványrendben cseng le,*

azaz  $q_w \sim C_2 w^{-\gamma_2}$  valamilyen  $C_2$  és  $\gamma_2$  pozitív konstansokkal, amint  $w \rightarrow \infty$ . (Lásd még Durrett (2007), Backhausz (2012), Backhausz és Móri (2012, 2014) vagy van der Hofstad (2017).) Az itt szereplő  $\gamma$  hatványkitevőt karakterisztikus kitevőnek nevezik, mely a legtöbb modell esetében 2 és 3 közötti értéket vesz fel. Általában  $\gamma \in (2, \infty)$  teljesül.

Az 1.4. Tétel a csúcsok súlyeloszlásának, az 1.5. Tétel rögzített  $2 \leq M \leq N$  esetén az  $M$ -klikkek súlyeloszlásának skálafüggetlenségéről szól. Jelölje  $\gcd\{A\}$  az  $A$  halmaz elemeinek legnagyobb közös osztóját. Egy a modell paramétereire vonatkozó feltétel teljesülése esetén azt is megmutatjuk, hogy a vizsgált véletlen gráf modell a szokásos értelemben (azaz a fokszámkra vonatkozóan) is skálafüggetlen. Erről szól a 1.7. Tétel, melynek állítása a következő.

Jelölje  $U(n, d)$  a  $d$  fokú csúcsok számát  $n$  lépés után. Legyen  $\alpha_0 > 0$ ,  $\alpha \neq \alpha_0$  és tegyük fel, hogy

$$\gcd\{k | \alpha_k > 0, k = 0, \dots, N-1\} = 1.$$

Ekkor minden  $d \geq N-1$  esetén

$$\frac{U(n, d)}{V_n} \rightarrow u_d$$

majdnem biztosan, amint  $n \rightarrow \infty$ . Továbbá

$$u_d \sim C d^{-(1+\frac{1}{\alpha})}$$

$d \rightarrow \infty$  esetén, ahol  $C$  pozitív konstans. Azaz a  $d$  fokú csúcsok aránya 1 valószínűséggel konvergens  $n \rightarrow \infty$  esetén, továbbá a határértékek sorozata polinomiálisan csökken, amint  $d \rightarrow \infty$ .

A karakterisztikus kitevő értéke a csúcsok súlyai és fokszámai esetén megegyezik.

A modellre vonatkozó fenti eredmények bizonyításait az 1.3. fejezetben ismergetjük.

Az értekezés második részében (2. fejezet) az 1. fejezetben vizsgált véletlen gráf modell egy speciális esetét, az  $N$ -pontos modellt tanulmányozzuk. Legyen továbbra is  $N \geq 3$  rögzített egész szám és legyen  $0 \leq p_0 \leq 1, 0 \leq p_1 \leq 1, p_2 = \dots = p_{N-1} = 0$ . Az  $N$ -pontos modell definíciója és evolúciós folyamata speciális esete az 1. fejezetben bemutatott általános modellének. A gráf fejlődését minden lépésben  $N$  csúcs kölcsönös interakciója határozza meg. Ebben a modellben minden lépésben vagy 1 új csúcs csatlakozik a gráfhoz, mely  $N-1$  régi csúccsal lép interakcióba, vagy pedig nem születik új csúcs és  $N$  régi csúcs formál  $N$ -klikket. Mindkét lehetséges lépés esetén vagy a preferential attachment szabály szerint súlyarányosan választunk egy  $(N-i)$ -klikket a már létező és pozitív súllyal rendelkező  $(N-i)$ -klikkek közül, vagy pedig egyenletesen történik az interakcióban részt vevő  $N-i$  régi csúcs kiválasztása ( $i = 0, 1$ ).

Az  $N$ -pontos modell Backhausz és Móri (2012, 2014) háromszöges modelljének általánosítása. Backhausz és Móri igazolta a háromszöges modell skálafüggetlenségét a csúcsok súlyaira és a fokszámkra vonatkozóan. Emellett meghatározták egy rögzített csúcs súlyának és fokszámnak, valamint a maximális súly és a maximális fokszám aszimptotikus viselkedését. A dolgozat ezen részében a háromszöges modellre vonatkozó fenti eredményeket általánosítjuk az  $N$ -pontos modell esetére. Továbbá meghatározzuk egy rögzített  $M$ -klick súlyának ( $1 \leq M \leq N$ ) aszimptotikus viselkedését is.

A 2.1.1. fejezetben röviden ismertetjük az  $N$ -pontos modellt jellemző mennyiségek, a súlyok és fokszámok skálafüggetlenségéről szóló eredményeket. Az  $N$ -pontos modell skálafüggetlensége az 1. fejezetben bemutatott általános modell skálafüggetlenségének következménye, így az erre vonatkozó eredményeket bizonyítás nélkül ismertetjük.

Ezt követően a 2.1.2. fejezetben rátérünk további, a klikkeket jellemző súlyokra, a fokszámkra, valamint a maximális súlyra és a maximális fokszámról szóló eredményeink ismertetésére. A 2.7. Tétel egy rögzített  $M$ -klick súlyának aszimptotikus viselkedését írja le. A tétel állítása a következő.

*Jelölje  $W[n, M, j]$  a  $j$ -edik  $M$ -klick súlyát  $n$  lépés után. Legyen  $j \geq 0$  és  $1 \leq M \leq N$  rögzített egész szám. Tegyük fel, hogy  $\alpha > 0$ . Ekkor*

$$W[n, M, j] \sim \gamma_{M,j} n^{\alpha M}$$

*majdnem biztosan  $n \rightarrow \infty$  esetén, ahol  $\gamma_{M,j}$  egy pozitív valószínűségi változó,  $a_M$  pedig a modell paramétereit által meghatározott pozitív konstans.*

Az  $M = 1$  esetben a 2.7. Tétel egy rögzített csúcs súlyának aszimptotikus viselkedését adja meg (2.8. Következmény). A 2.9. Tételben egy rögzített csúcs fokszámnak aszimptotikus viselkedését írjuk le. Emellett a csúcsokra vonatkozóan a maximális súly (2.10. Tétel) és a maximális fokszám (2.11. Tétel) aszimptotikus viselkedését is meghatározzuk.

A 2.8. Következményt és a 2.9. Tételt összevetve megadjuk a  $j$ -edik csúcs súlyának és fokszámnak aszimptotikus arányát. Ez az arány nem más, mint a régi csúcsok várható súlynövekedésének és várható fokszámnövekedésének aránya egy lépés során abban az esetben, ha a preferential attachment szabály szerint történik a választás. Hasonló állítás igaz a maximális súly és a maximális fokszám aszimptotikus arányára is.

Az  $N$ -pontos modellben egy rögzített  $M$ -klick ( $1 \leq M \leq N$ ) súlyának, egy rögzített csúcs fokszámnak, valamint a csúcsok esetén a maximális súly és a maximális fokszám aszimptotikus viselkedésre nincsenek hatással az egyenletes választáshoz kapcsolódó valószínűségek.

A 2.2. fejezetben megadjuk az  $N$ -pontos modellre vonatkozó aszimptotikus viselkedést jellemző eredményeink bizonyításait. A dolgozatban szereplő bizonyítások során martingálméleti eredményeket alkalmazunk.

# Summary

In this Ph. D thesis we give the definition of a new evolving random graph model based on the interaction of  $N$  vertices. Moreover, we examine the asymptotic behaviour of the graph. The results presented in this dissertation are joint work with István Fazekas. The dissertation consists of two parts.

At the beginning of the Ph. D thesis we provide a partial overview of the theory of random graphs focusing on the results and models related to our work.

In the first part (Chapter 1) we define and examine a new random graph evolution mechanism which yields a general random graph model. We present and prove our main results for this general model.

In Section 1.1, we give the mathematical definition of our model. Let  $N \geq 3$  be a fixed integer. For the sake of brevity, a complete graph with  $N$  vertices is called an  $N$ -clique. The evolution mechanism of the graph is based on the interaction of  $N$  vertices. The interaction of  $N$  vertices means that we draw all non-existing edges among them, so we obtain an  $N$ -clique. In this model  $M$ -cliques ( $1 \leq M \leq N$ ) have different weights. The weight of a given  $M$ -clique describes the number of its interactions. Therefore in our model every vertex is characterized by its degree and its weight, respectively. Initially, at time  $n = 0$ , we start with  $N$  vertices which form an  $N$ -clique. During the evolution at each step independently of the past with probability  $p_k$  a new  $k$ -clique is added to the graph ( $0 \leq k \leq N - 1$ ) which interacts with  $N - k$  old vertices. Here  $k$  is an integer-valued random variable with distribution determined by the parameters of the model. At a step when we do not add any vertex (that is  $k = 0$ ) and the size of the graph does not change, then  $N$  old vertices interact. During the evolution procedure, old vertices can be chosen according to the preferential attachment rule or uniformly. However, instead of the original preferential attachment rule we choose the vertices according to the weights of certain cliques. More precisely, for the selection of the interacting old vertices there are two possibilities at each step. Assume that at the  $n$ th step  $k$  new vertices are added to the graph. On the one hand, independently from the past with probability  $r_k$  ( $0 \leq k \leq N - 1$ ) we choose an  $(N - k)$ -clique from the existing  $(N - k)$ -cliques according to their

weights. On the other hand, we select  $N - k$  vertices uniformly. Here we consider only that complete graph to be a clique, which is constructed by the interaction of its vertices. In our model new edges can be created between old vertices.

Our main results for the general model are presented in Section 1.2. Introduce the following notation. Let

$$\alpha = \sum_{k=0}^{N-1} \alpha_k, \quad \text{where} \quad \alpha_k = \frac{N-k}{N} p_k r_k,$$

and let

$$a_M = \sum_{k=0}^{N-M} \alpha_k \frac{\binom{N-M}{k}}{\binom{N-1}{k}}.$$

Let us denote by  $X(n, d, w)$  the number of vertices of weight  $w$  and degree  $d$  after  $n$  steps and let  $V_n$  denote the number of vertices after  $n$  steps.

Theorem 1.2 is about the almost sure convergence of the fraction  $\frac{X(n, d, w)}{V_n}$ . Theorem 1.2 states the following.

*Let  $\alpha \neq \alpha_0$ . For any fixed  $w$  and  $d$ ,  $1 \leq w$  and  $N - 1 \leq d \leq w(N - 1)$  we have the ratio of vertices with weight  $w$  and degree  $d$  converges almost surely as  $n \rightarrow \infty$ . The limits are fixed non-negative numbers which are defined by a recursive formula.*

Then we turn to the scale-free property of our model. We show that the weight distributions and under a certain assumption the degree distribution are scale-free as well. Scale-free property means that the asymptotic degree (or weight) distribution follow power-law.

*We show that the ratio of vertices with degree  $d$  converges almost surely to the degree distribution  $q_d$  as  $n \rightarrow \infty$ . Moreover,  $q_d \sim C_1 k^{-\gamma_1}$  as  $d \rightarrow \infty$ , where  $C_1$  and  $\gamma_1$  are positive constants. Similarly, we show that the ratio of vertices with weight  $w$  converges almost surely to the weight distribution  $q_w$  as  $n \rightarrow \infty$ . Moreover,  $q_w \sim C_2 k^{-\gamma_2}$  as  $w \rightarrow \infty$ , where  $C_2$  and  $\gamma_2$  are positive constants. That is the asymptotic degree distribution  $q_d$  (or the asymptotic weight distribution  $q_w$ ) has a power law tail. (See e.g. Durrett (2007), Backhausz (2012), Backhausz and Móri (2012, 2014) or van der Hofstad (2017).) Here the degree exponent  $\gamma$  is called the characteristic exponent. In most cases, the value of  $\gamma$  is between 2 and 3. Usually  $\gamma \in (2, \infty)$ .*

We prove scale-free property for the degrees and the weights as well. In Theorem 1.4 scale-free property for the weights of vertices and in Theorem 1.5 scale-free property for the weights of  $M$ -cliques, where  $2 \leq M \leq N$  is a fixed integer, are presented. Let us denote by  $\gcd\{A\}$  the greatest common divisor of the elements of the set  $A$ . We show that under some reasonable conditions our model is scale-free in the usual sense. In Theorem 1.7, scale-free property for the degrees is obtained. Theorem 1.7 states the following.



Let  $U(n, d)$  denote the number of vertices with degree  $d$  after the  $n$ th step. Let  $\alpha_0 > 0$ ,  $\alpha \neq \alpha_0$  and assume that

$$\gcd\{k | \alpha_k > 0, k = 0, \dots, N-1\} = 1.$$

We have for any  $d \geq N-1$ ,

$$\frac{U(n, d)}{V_n} \rightarrow u_d$$

almost surely as  $n \rightarrow \infty$ . Moreover,

$$u_d \sim Cd^{-(1+\frac{1}{\alpha})}$$

as  $d \rightarrow \infty$ , where  $C$  denotes a positive constant.

The characteristic exponents for the weights and the degrees of vertices are the same.

The proofs are presented in Section 1.3.

In the second part of the dissertation (Chapter 2) we examine the  $N$ -interactions model which is a particular case of the random graph model introduced in Chapter 1. Let  $0 \leq p_0 \leq 1, 0 \leq p_1 \leq 1, p_2 = \dots = p_{N-1} = 0$ . The evolution of the graph is based on the interaction of  $N$  vertices. In the  $N$ -interactions model at each step either a new vertex is added to the graph which interacts with  $N-1$  already existing vertices or the size of the graph does not change and  $N$  of the old vertices will interact. In both cases the preferential attachment and the uniform choice of old vertices are possible.

The  $N$ -interactions model is a direct generalization of the 3-interactions model introduced by Backhausz and Móri (2012, 2014). Backhausz and Móri proved power law weight and degree distributions of vertices in the 3-interactions model. They determined the asymptotic behaviour of the weight and the degree of a fixed vertex, as well as the limits of the maximal weight and the maximal degree. We extend certain results of Backhausz and Móri (2012, 2014) to the  $N$ -interactions model. Moreover, we also consider the limiting property of the weight of a fixed  $M$ -clique ( $1 \leq M \leq N$ ).

In Section 2.1.1, we briefly summarize the results about the scale-free property of the  $N$ -interactions model. We remark that the power law weights and degree distributions in the  $N$ -interactions model are direct consequences of the scale-free nature of the general model which is introduced in Chapter 1. Therefore in this section the results are presented without proofs.

In Section 2.1.2, results about the limiting behaviour of the weights and degrees in the  $N$ -interactions model are presented. The asymptotic behaviour of the weight of a fixed  $M$ -clique is described in Theorem 2.7. Theorem 2.7 states the following.

Let  $W[n, M, j]$  denote the weight of the  $j$ th  $M$ -clique after  $n$  steps. Let  $j \geq 0$  and  $1 \leq M \leq N$  be fixed integers. Assume that  $\alpha > 0$ . Then we have

$$W[n, M, j] \sim \gamma_{M,j} n^{\alpha M}$$

almost surely as  $n \rightarrow \infty$ , where  $\gamma_{M,j}$  is a positive random variable and  $a_M$  is a positive constant determined by the parameters of the model.

For  $M = 1$ , Theorem 2.7 describes the asymptotic behaviour of the weight of a fixed vertex (Corollary 2.8). In Theorem 2.9, the asymptotic behaviour of the degree of a fixed vertex is examined. Moreover, the limiting behaviour of the maximal weight (Theorem 2.10) and the maximal degree (Theorem 2.11) are also described.

By comparing Corollary 2.8 and Theorem 2.9, we have the asymptotic ratio of the weight and the degree of the  $j$ th vertex is the ratio of the expected growth of the weights of the old vertices to the expected growth of the degrees of the old vertices during one step when the choice is done according to the preferential attachment rule. Similar statement is true for the asymptotic ratio of the maximal weight to the maximal degree.

We remark that in the  $N$ -interactions model the uniform choice parameters have not influence on the asymptotic behaviour of the weight and degree sequences.

The proofs are listed in Section 2.2. The proofs presented in this dissertation are based on discrete time martingale theory.

# Irodalomjegyzék

- W. Aiello, A. Bonato, C. Cooper, J. Janssen and P. Prałat. A spatial web graph model with local influence regions. *Internet Mathematics*, 5(1-2):175–196, 2009.
- R. Albert and A.-L. Barabási. Statistical mechanics of complex networks. *Rev. Mod. Phys.*, 74(1):47–97, 2002.
- Á. Backhausz. *Analysis of random graphs with methods of martingale theory*. PhD thesis, Eötvös Loránd University, Budapest, Hungary, 2012.
- Á. Backhausz and T. F. Móri. A random graph model based on 3-interactions. *Ann. Univ. Sci. Budapest. Sect. Comput.*, 36:41–52, 2012.
- Á. Backhausz and T. F. Móri. Weights and degrees in a random graph model based on 3-interactions. *Acta Math. Hungar.*, 143:23–43, 2014.
- A.-L. Barabási and R. Albert. Emergence of scaling in random networks. *Science*, 286(5439):509–512, 1999.
- G. Bebek, P. Berenbrink, C. Cooper, T. Friedetzky, J. Nadeau and S. C. Sahinalp. The degree distribution of the generalized duplication model. *Theoret. Comput. Sci.*, 369(1):239–249, 2006.
- B. Bollobás. *Random graphs*. Cambridge University Press, Cambridge, 2nd edition, 2001.
- B. Bollobás, O. Riordan, J. Spencer and G. Tusnády. The degree sequence of a scale-free random graph process. *Random Structures Algorithms*, 18(3):279–290, 2001.
- C. Cooper and A. Frieze. A general model of web graphs. *Random Structures Algorithms*, 22:311–335, 2003.
- C. Cooper, A. Frieze and P. Prałat. Some typical properties of the Spatial Preferred Attachment model. *Internet Math.*, 10:116–136, 2014.

- R. Durrett. *Random graph dynamics*. Cambridge University Press, Cambridge, 2007.
- P. Erdős and A. Rényi. On random graphs I. *Publ. Math. Debrecen*, 6:290–297, 1959.
- M. Faloutsos, P. Faloutsos and C. Faloutsos. On power-law relationships of the internet topology. In *Computer Communications Rev.*, volume 29, pages 251–262, 1999.
- I. Fazekas and S. Pecsora. A generalization of the Barabási-Albert random tree. *Ann. Math. Inform.*, 44:71–85, 2015.
- I. Fazekas and B. Porvázsnyik. Scale-free property for degrees and weights in a preferential attachment random graph model. *J. Probab. Stat.*, 2013. doi: 10.1155/2013/707960. Article ID 707960.
- I. Fazekas and B. Porvázsnyik. Limit theorems for the weights and the degrees in an N-interactions random graph model. *Open Mathematics*, 14(1):414–424, 2016a.
- I. Fazekas and B. Porvázsnyik. Scale-free property for degrees and weights in an N-interactions random graph model. *J. Math. Sci. (N.Y.)*, 214(1):69–82, 2016b.
- I. Fazekas, C. Noszály and A. Perecsényi. Weights of cliques in a random graph model based on three-interactions. *Lith. Mat. J.*, 55(2):207–221, 2015.
- I. Fazekas, A. Perecsényi and B. Porvázsnyik. Numerical analysis of a network evolution model. In *2017 8th IEEE International Conference on Cognitive Infocommunications (CogInfoCom)*, pages 171–174, 2017.
- I. Fazekas, C. Noszály and A. Perecsényi. A population evolution model and its applications to random networks. *Statist. Probab. Lett.*, 143:17–27, 2018.
- E. N. Gilbert. Random graphs. *Ann. Math. Statist.*, 30:1141–1144, 1959.
- M. Gjoka, M. Kurant, C. T. Butts and A. Markopoulou. Walking in Facebook: a case study of unbiased sampling of OSNs. In *2010 Proceedings IEEE INFOCOM*, pages 1–9, 2010.
- J. Gómez-Gardeñes and Y. Moreno. Local versus global knowledge in the Barabási-Albert scale-free network model. *Phys. Rev. E*, 69:037103, 2004.
- W. Hoeffding. Probability inequalities for sums of bounded random variables. *J. Amer. Statist. Assoc.*, 58:13–30, 1963.

- E. Jacob and P. Mörters. Spatial preferential attachment networks: Power laws and clustering coefficients. *Ann. Appl. Probab.*, 25(2):632–662, 2015.
- S. Janson. Poisson convergence and Poisson processes with applications to random graphs. *Stoch. Proc. Appl.*, 26:1–30, 1987.
- S. Janson, T. Luczak and A. Rucinski. *Random graphs*. Wiley-Interscience Series in Discrete Mathematics and Optimization, Wiley-Interscience, New York, 2000.
- Zs. Katona and T. F. Móri. A new class of scale free random graphs. *Statist. Probab. Lett.*, 76(15):1587–1593, 2006.
- J. M. Kleinberg, R. Kumar, P. Raghavan, S. Rajagopalan and A. Tomkins. The web as a graph: Measurements, models, and methods. In *Proceedings of the 5th Annual International Conference on Computing and Combinatorics, COCOON'99*, pages 1–17, 1999.
- R. Kumar, P. Raghavan, S. Rajagopalan and A. Tomkins. Trawling the Web for emerging cyber-communities. *Comput. Netw.*, 31(11-16):1481–1493, 1999.
- R. Kumar, P. Raghavan, S. Rajagopalan, D. Sivakumar, A. Tomkins and E. Ufal. Stochastic models for the web graph. In *Proceedings of the 41st Annual Symposium on Foundations of Computer Science, FOCS '00*, pages 57–65, 2000.
- M. Lindholm and T. Vallier. On the degree evolution of a fixed vertex in some growing networks. *Statist. Probab. Lett.*, 81(6):673–677, 2011.
- T. F. Móri. On random trees. *Studia Sci. Math. Hungar.*, 39(1-2):143–155, 2002.
- T. F. Móri. The maximum degree of the Barabási–Albert random tree. *Combin. Probab. Comput.*, 14(3):339–348, 2005.
- T. F. Móri. Degree distribution nearby the origin of a preferential attachment graph. *Electron. Commun. Probab.*, 12:276–282, 2007a.
- T. F. Móri. On a 2-parameter class of scale-free random graphs. *Acta Math. Hungar.*, 114(1-2):37–48, 2007b.
- J. Neveu. *Discrete-parameter martingales*. North Holland Pub. Co., Amsterdam, 1975.
- M. Newman, A.-L. Barabási and D. J. Watts. *The structure and dynamics of networks*. Princeton University Press, Princeton, NJ, USA, 2006.
- M. E. J. Newman. *Networks: an introduction*. Oxford University Press, Oxford, 2010.

- L. Ostroumova, A. Ryabchenko and E. Samosvat. Generalized preferential attachment: Tunable power-law degree distribution and clustering coefficient. In A. Bonato, M. Mitzenmacher and P. Prałat, editors, *Algorithms and Models for the Web Graph*, pages 185–202, Cham, 2013. Springer International Publishing. ISBN 978-3-319-03536-9.
- R. Pastor-Satorras, E. Smith and R. V. Solé. Evolving protein interaction networks through gene duplication. *J. Theor. Biol.*, 222(2):199–210, 2003.
- V. V. Petrov. *Sums of independent random variables*. Springer-Verlag, New York, 1975.
- A. P. Prudnikov, Y. A. Brychkov and O. I. Marichev. *Integrals and Series*. Gordon & Breach Science Publishers, New York, 1986.
- H. A. Simon. On a class of skew distribution functions. *Biometrika*, 42:425–440, 1955.
- H. A. Simon. Some further notes on a class of skew distribution functions. *Inf. Control*, 3(1):80–88, 1960.
- J. Ugander, B. Karrer, L. Backstrom and C. Marlow. The anatomy of the Facebook social graph. *arXiv preprint*, *arXiv:1111.4503*, 2011.
- R. van der Hofstad. *Random graphs and complex networks*. Cambridge University Press, Cambridge, 2017.
- R. van der Hofstad. *Random graphs and complex networks. Volume 2*. In preparation, 2018. URL <http://www.win.tue.nl/~rhofstad/NotesRGCNII.pdf>.
- B. Wang, X.-h. Yang and W.-l. Wang. A novel scale-free network model based on clique growth. *J. Cent. South Univ. T.*, 16(3):474–477, 2009.
- D. J. Watts. *Small worlds. The dynamics of networks between order and randomness*. Princeton University Press, Princeton, NJ, USA, 1999.
- D. J. Watts and S. H. Strogatz. Collective dynamics of 'small-world' networks. *Nature*, 393:440–442, 1998.
- W. Willinger, R. Govindan, S. Jamin, V. Paxson and S. Shenker. Scaling phenomena in the Internet: Critically examining criticality. *Proc. Natl. Acad. Sci.*, 99:2573–2580, 2002.
- G. U. Yule. A mathematical theory of evolution, based on the conclusions of Dr. J. C. Willis, F.R.S. *Phil. Trans. Roy. Soc. London, B*, 213:21–87, 1925.

## A szerző publikációi

### A disszertáció alapjául szolgáló publikációk

Referált folyóiratban megjelent cikkek:

1. I. Fazekas, B. Porvázsnyik, Limit theorems for the weights and the degrees in an  $N$ -interactions random graph model. *Open Mathematics*, **14**(1), 414–424, 2016.  
DOI: 10.1515/math-2016-0039  
(IF: 0.682; Math.Rev.: MR3514903; Zbl 1346.05269; Scopus)
2. I. Fazekas, B. Porvázsnyik, Scale-free property for degrees and weights in an  $N$ -interactions random graph model. *Journal of Mathematical Sciences*, New York, **214**(1), 69–82, 2016.  
DOI: 10.1007/s10958-016-2758-5  
(Math.Rev.: MR3476251; Zbl 1360.05153; Scopus)
3. I. Fazekas, B. Porvázsnyik, Scale-free property for degrees and weights in a preferential attachment random graph model. *Journal of Probability and Statistics*, Article ID 707960, 12 p. 2013.  
DOI:10.1155/2013/707960  
(Zbl 1307.05202; Scopus)

Közlésre benyújtott cikkek:

1. I. Fazekas, B. Porvázsnyik, The asymptotic behaviour of an  $N$ -interactions random graph model. 2018.

### Egyéb publikációk

Referált folyóiratban megjelent cikkek:

1. I. Fazekas, S. Pecsora, B. Porvázsnyik, General theorems on exponential and Rosenthal's inequalities and on complete convergence. *Journal of Mathematical Inequalities*, **12**(2), 433-446, 2018.  
(IF: 0.777; Scopus)
2. I. Fazekas, B. Porvázsnyik, A generalized allocation scheme. *Annales Mathematicae et Informaticae*, **39**, 57–70, 2012.  
(Math.Rev.: MR2959881; Zbl 1265.60009; Scopus)

3. I. Fazekas, B. Porvázsnyik, Some limit theorems for generalized allocation schemes. *Miskolc Mathematical Notes*, **16**(2), 817–832, 2015.  
DOI: 10.18514/MMN.2015.1461  
(IF: 0.388; Math.Rev.: MR3454145; Zbl 1349.60008; Scopus)
4. J. Ferenczik, Á. Pintér, B. Porvázsnyik, On equal values of Stirling numbers of the second kind. *Applied Mathematics and Computation*, **218**(3), 980-984, 2011.  
(IF: 1.317; Zbl 1237.05015; Scopus)

Konferenciakiadványban megjelent cikkek:

1. I. Fazekas, A. Percsényi, B. Porvázsnyik, Numerical analysis of a network evolution model. In *2017 8th IEEE International Conference on Cognitive Infocommunications (CogInfoCom)*, pp. 171–174, 2017.  
(Scopus)



## A szerző konferencia előadásai

1. *The asymptotic behaviour of an  $N$ -interactions random graph model*, International Seminar on Stability Problems for Stochastic Models, Debrecen, 2017. augusztus 25–29. (poszter)
2. *General theorems on exponential and Rosenthal's inequalities and on complete convergence*, International Seminar on Stability Problems for Stochastic Models, Debrecen, 2017. augusztus 25–29. (poszter)
3. *The asymptotic behavior of a random graph model based on  $N$ -interactions*, 10th International Conference on Applied Informatics, Eger, 2017. január 30–február 01.
4. *A random graph evolution procedure and asymptotic results*, 19th European Young Statisticians Meeting, Prága, Csehország, 2015. augusztus 31–szeptember 04.
5. *A new version of the generalized allocation scheme*, 11th International Vilnius Conference on Probability Theory and Mathematical Statistics, Vilnius, Litvánia, 2014. június 30–július 04.
6. *The asymptotic behaviour of the weights and the degrees in an  $N$ -interactions random graph model*, 28th microCAD International Multidisciplinary Scientific Conference, Miskolc, 2014. április. 10–11.
7. *Scale-free property for the weights and the degrees in a preferential attachment random graph model*, Stochastic Activity Month 2014, Eurandom, Probability and Graphs, Eindhoven, Hollandia, 2014. január 05–11. (poszter)
8. *Scale-free property for degrees and weights in an  $N$ -interactions random graph model*, Statistics & Econometrics of Networks, Párizs, Franciaország, 2013. november 18–22. (poszter)
9. *A random graph model*, 18th Austrian, Croatian, Italian, Slovenian and Hungarian Meeting of Young Statisticians, Balatonfüred, 2013. október 11–13.
10. *Scale-free property in a random graph model based on  $N$ -interactions*, 29th European Meeting of Statisticians, Budapest, 2013. július 20–25.
11. *Scale-free property for degrees and weights in a preferential attachment random graph model*, XXVII. microCAD International Scientific Conference, Budapest, Miskolc, 2013. március 21–22.

12. *A generalized allocation scheme*, XXVI. microCAD International Scientific Conference, Budapest, Miskolc, Miskolc, 2012. március 29–30.
13. *A generalized allocation scheme*, Conference on Stochastic Models and their Applications, Debrecen, 2011. augusztus 22–24. (poszter)