THESIS FOR THE DEGREE OF DOCTOR OF PHILOSOPHY (PHD)

Jensen type results concerning generalized convex functions

by Tibor Kiss

Supervisor: Dr. Zsolt Páles

UNIVERSITY OF DEBRECEN
DOCTORAL SCHOOL OF MATHEMATICAL AND COMPUTATIONAL SCIENCES
DEBRECEN, 2019

Introduction

In the sequel, I am going to give a detailed summary about the main areas which are touched by my dissertation and, in parallel, I also describe the most important related results. The motivation of the investigations was served by the following essential result from the theory of standard convexity of real valued functions, which is originally due to Johan Jensen.

THEOREM. (Jensen, 1906) *Let X be a linear space and $D \subseteq X$ be a nonempty convex subset. Then the following statements are pairwise equivalent.*

(1) The function $f : D \to \mathbb{R}$ is Jensen convex.

(2) For any given positive integer $n \in \mathbb{N}$, the function $f : D \to \mathbb{R}$ fulfills the n-variable Jensen Inequality, that is, for all $x_1, \ldots, x_n \in D$, we have

$$f\Big(\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}\Big) \leq \frac{f(x_1) + \cdots + f(x_n)}{n}.$$

(3) The function $f : D \to \mathbb{R}$ is rationally convex on D, that is, for all $r \in [0, 1] \cap \mathbb{Q}$ and for all $x, y \in D$, we have

$$f(rx + (1 - r)y) \leq rf(x) + (1 - r)f(y).$$

Among others, this result has two crucial message. According to this, the dissertation, and hence, the summary can be divided in two main parts.

• **First Part.** Here we were concentrating on the connection between the statements (1) and (3). In view of this, having the inequality of the standard convexity with the weight $\frac{1}{2}$, that is, having the *Jensen inequality* for some real valued function, we can conclude its rational convexity. This immediately yields some crucial properties of the convexity parameter set of a Jensen convex function. Namely, it follows that is must be at least a countable *(cardinality property)* and dense *(topological property)* subset of $[0,1]$, furthermore it contains the intersection of the field of rational numbers and $[0,1]$ *(algebraic property)*.

For a given function $f : I \to \mathbb{R}$, where $I \subseteq \mathbb{R}$ denotes a nonempty interval, one can define the set

$$\mathcal{C}_f := \{t \in [0,1] \mid f \text{ is } t\text{-convex on } I\}$$

The full characterization of the convexity parameter set, that is, of the above set is due to Norbert Kuhn.

THEOREM. (Kuhn, 1984) *For any function $f : I \to \mathbb{R}$, the convexity parameter set $\mathcal{C}_f$ is either $\{0,1\}$ or it can be written as $F \cap [0,1]$, where F is the subfield of $\mathbb{R}$ generated by $\mathcal{C}_f$.*

In the first part of the dissertation, related to a generalized notion of convexity of extended real valued functions, we are going to formulate Kuhn type theorems. Now we turn to the detailed explanation of the different sections.

In *Capter 1.*, we explain the notion of mean values and the most important types of classes of means what we will need for our purposes. Then we formulate the main tools from linear algebra and fixed point theory what will be used in the further steps. Finally we state our main results about deriving new means from given ones and apply them for the class of Matkowski means.

Constructing new means from given ones

The main notion of this chapter is *the descendant of a mean*. For a given n-tuple of two-variable means $(M_1, \ldots, M_n)$, we are dealing with two-variable means $N_1, \dots, N_n$ satisfying the equations

$$N_1(x,y) = M_1\big(x, N_2(x,y)\big),$$
$$N_i(x,y) = M_i\big(N_{i-1}(x,y), N_{i+1}(x,y)\big),$$
$$N_n(x,y) = M_n\big(N_{n-1}(x,y), y\big)$$

simultaneously on I, where $2 \le i \le n-1$. Such an n-tuple $(N_1, \dots, N_n)$ will be called a descendant of the original means $(M_1, \dots, M_n)$. The existence and the uniqueness of the descendant is not trivial, furthermore, the formulation of the theorem is circumstantial in the sense that it needs a detailed preparation, hence we omit it. In the dissertation it can be found as Theorem 1.7.

The following theorem states that the descendants of a chain of weighted quasi-arithmetic means with the same generator function always exists, they are uniquely determined, and are also weighted quasi-arithmetic means. As one can see, the generator function is the same and the weights of the descendants can be directly calculated using the original weights.

THEOREM. *Let $n \ge 2$, $s_1, \dots, s_n \in]0,1[$, and $h : I \to \mathbb{R}$ be a continuous, strictly increasing function. For $(x,y) \in I^2_<$, consider the function $\varphi_{(x,y)} : [x,y]^n_\le \to \mathbb{R}^n$, where $\varphi_{(x,y)}(t)$ is defined by the vector*

$$\big(M_1(x,t_2), \dots, M_i(t_{i-1}, t_{i+1}), \dots, M_n(t_{n-1}, y)\big),$$

using the means $M_i := \mathcal{M}^{(s_i h, (1-s_i)h)}$, where $i \in \{1, \dots, n\}$. Then, for all $(x,y) \in I^2_<$, the fixed point set $\Phi_{(x,y)} := \big\{\xi \in [x,y]^n_\le \;\big|\; \varphi_{(x,y)}(\xi) = \xi\big\}$ is the singleton

$$\big\{\big(\mathcal{M}^{(\sigma_1 h,\, (1-\sigma_1)h)}(x,y), \dots, \mathcal{M}^{(\sigma_n h,\, (1-\sigma_n)h)}(x,y)\big)\big\},$$

where

$$\sigma_i := \Bigg(\sum_{j=i}^{n} \prod_{k=1}^{j} \frac{s_k}{1-s_k}\Bigg)\Bigg(\sum_{j=0}^{n} \prod_{k=1}^{j} \frac{s_k}{1-s_k}\Bigg)^{-1}$$

for all $i \in \{1, \dots, n\}$.

In general, having proper Matkowski means (that is, not necessarily weighted quasi-arithmetic means), the calculation of the descendants might be difficult. However, assuming some relations between the generator functions the task can be done using a two way recursion.

THEOREM. *Let* $n \geq 2$ *be a positive integer,* $j \in \{1, \dots, n\}$ *and* $p, q, h_1, \dots, h_{n-1} : I \to \mathbb{R}$ *be continuous, strictly increasing functions, furthermore set* $h_0 := h_n := 0$*. For* $(x, y) \in I^2_<$*, consider the mapping* $\varphi_{(x,y)} : [x, y]^n_\leq \to \mathbb{R}^n$*, where* $\varphi_{(x,y)}(t)$ *is defined by*

$$\big(M_1(x, t_2), \dots, M_i(t_{i-1}, t_{i+1}), \dots, M_n(t_{n-1}, y)\big),$$

using the means

$$M_i := \begin{cases} \mathcal{M}^{(p+h_{i-1},\, h_i)} & \text{if } i \in \{1, \dots, j-1\}, \\ \mathcal{M}^{(p+h_{i-1},\, h_i+q)} & \text{if } i = j, \\ \mathcal{M}^{(h_{i-1},\, h_i+q)} & \text{if } i \in \{j+1, \dots, n\}. \end{cases}$$

Then, for $(x, y) \in I^2_<$*, the related fixed point set* $\Phi_{(x,y)}$ *is the singleton* $\{(\xi_1, \dots, \xi_n)\}$*, where* $\xi_j := \mathcal{M}^{(p,\, q)}(x, y)$ *and the rest of the coordinates are defined by the two-way recurrence*

$$\xi_i := \begin{cases} \mathcal{M}^{(p,\, h_i)}(x, \xi_{i+1}) & \text{if } i \in \{1, \dots, j-1\}, \\ \mathcal{M}^{(h_{i-1},\, q)}(\xi_{i-1}, y) & \text{if } i \in \{j+1, \dots, n\}. \end{cases}$$

Deriving new convexity properties

In *Chapter 2.*, we introduce and also characterize the concept of *lower and upper* M*-convex functions*, we apply our previous results, and investigate the algebraic and topological properties of their *generalized convexity classes*. Then, taking the special subclass of *asymmetrically t-convex functions*, we formulate also *the counterpart of Kuhn's Theorem*.

It follows from Kuhn's theorem that the standard convexity set is closed under taking convex combinations weighted with its elements. The following proposition generalizes this statement.

PROPOSITION. *Let $f : I \to \overline{\mathbb{R}}$ be any function and let $\mathcal{M} \in \{\underline{\mathcal{M}}_f, \overline{\mathcal{M}}_f\}$. Then the following statements hold.*

(a) If $M, N_1, N_2 \in \mathcal{M}$ with $N_1 < N_2$ on the set $I^2_<$, then $M \circ (N_1, N_2) \in \mathcal{M}$.

(b) If $M, N \in \mathcal{M}$, then the compositions $M \circ (\min, N)$ and $M \circ (N, \max)$ also belong to the family $\mathcal{M}$.

Similarly to the standard case, a topological property can be derived from the above proposition.

COROLLARY. *Let $f : I \to \overline{\mathbb{R}}$ be any function and define the classes $\underline{\mathcal{M}}^*_f$ and $\overline{\mathcal{M}}^*_f$ by the sets of all $M \in \underline{\mathcal{M}}_f$ and $M \in \overline{\mathcal{M}}_f$, where M is separately continuous in both variables, respectively. Finally, let $\mathcal{M}^* \in \{\underline{\mathcal{M}}^*_f, \overline{\mathcal{M}}^*_f\}$. Then $\mathcal{M}^*$ has no isolated points with respect to the pointwise convergence, more precisely, for all $M \in \mathcal{M}^*$, there exist sequences of means $(L_n), (U_n) \subseteq \mathcal{M}^*$ such that $L_n < M < U_n$ whenever $n \in \mathbb{N}$, furthermore $L_n \to M$ and $U_n \to M$ pointwise on the set $I^2_<$ as $n \to \infty$.*

Using the results earned in the previous sections, it can be proved that the lower convexity class is always closed under taking the descendants. This is not true in the case of upper convexity.

THEOREM. *Let $f : I \to \overline{\mathbb{R}}$ be any function, $n \geq 2$, furthermore $M_1, \dots, M_n \in \underline{\mathcal{M}}_f$ be continuous means. Then $\mathbf{D}_i(M_1, \dots, M_n) \subseteq \underline{\mathcal{M}}_f$ for all $i \in \{1, \dots, n\}$.*

Assuming that the lower convexity class contains certain type of Matkowski means, we get the following consequences.

COROLLARY. *Let $f : I \to \overline{\mathbb{R}}$, $n \geq 2$, $s_1, \dots, s_n \in]0,1[$, and finally $h : I \to \mathbb{R}$ be a continuous, strictly increasing function. Assume further that $\mathcal{M}^{(s_i h,\,(1-s_i)h)} \in \underline{\mathcal{M}}_f$ for all $i \in \{1, \dots, n\}$. Then, for all $i \in \{1, \dots, n\}$, the Matkowski mean $\mathcal{M}^{(\sigma_i h,\,(1-\sigma_i)h)}$ also belongs to the family $\underline{\mathcal{M}}_f$, where the weight σ_i, for a given $i \in \{1, \dots, n\}$, can be calculated by*

$$\sigma_i := \left(\sum_{j=i}^{n} \prod_{k=1}^{j} \frac{s_k}{1-s_k}\right)\left(\sum_{j=0}^{n} \prod_{k=1}^{j} \frac{s_k}{1-s_k}\right)^{-1}$$

for all $i \in \{1, \dots, n\}$.

COROLLARY. *Let $n \geq 2$, $p, q, h_1, \dots, h_{n-1} : I \to \mathbb{R}$ be continuous, strictly increasing functions and $f : I \to \overline{\mathbb{R}}$. Set further $h_0 := h_n := 0$ and assume that there exists $j \in \{1, \dots, n\}$ such that, for all $i \in \{1, \dots, n\}$, the mean M_i defined by*

$$M_i := \begin{cases} \mathcal{M}^{(p+h_{i-1},\,h_i)} & \text{if } i \in \{1, \dots, j-1\}, \\ \mathcal{M}^{(p+h_{j-1},\,h_j+q)} & \text{if } i = j, \\ \mathcal{M}^{(h_{i-1},\,h_i+q)} & \text{if } i \in \{j+1, \dots, n\} \end{cases}$$

is contained in $\underline{\mathcal{M}}_f$. Then $N_1, \dots, N_n \in \underline{\mathcal{M}}_f$, where, for all $(x,y) \in I^2_{\leq}$, the value $N_i(x,y)$ is defined by

$$\begin{aligned} &\mathcal{M}^{(p,\,h_i)}(x, N_{i+1}(x,y)) \quad \text{if} \quad i \in \{1, \dots, j-1\}, \\ &\mathcal{M}^{(p,\,q)}(x,y) \quad \text{if} \quad i = j, \quad \text{and by} \\ &\mathcal{M}^{(h_{i-1},\,q)}(N_{i-1}(x,y), y) \quad \text{if} \quad i \in \{j+1, \dots, n\}. \end{aligned}$$

Turning to the notion of asymmetrical convexity, the related lower and upper convexity classes can be identified with suitable subsets of the open unit interval. In this case the statements about the algebraic and topological structure became more transparent. We obtain the special convexity property of the parameter set. It turns to be closed under the multiplication of its elements and we also get its density in $]0,1[$.

THEOREM. *Let $f : I \to \overline{\mathbb{R}}$ be any function and $\mathcal{AC} \in \{\underline{\mathcal{AC}}_f, \overline{\mathcal{AC}}_f\}$. Then the following statements hold.*

(1) If $t, s_1, s_2 \in \mathcal{AC}$ with $s_1 < s_2$, then $ts_2 + (1-t)s_1 \in \mathcal{AC}$.

(2) If $t, s \in \mathcal{AC}$, then ts and $1-(1-t)(1-s)$ also belong to $\mathcal{AC}$.

(3) The set $\mathcal{AC}$ is dense in the open unit interval, provided that it is nonempty.

Applying our general results obtained for Matkowski means, we earn the following corollaries.

COROLLARY. *Let $I \subseteq \mathbb{R}$ be an interval, $f : I \to \overline{\mathbb{R}}$, $n \geq 2$ and $s_1, \dots, s_n \in \underline{\mathcal{AC}}_f$. Then $\sigma_i \in \underline{\mathcal{AC}}_f$ for all $i \in \{1, \dots, n\}$, where*

$$\sigma_i := \bigg(\sum_{j=i}^{n}\prod_{k=1}^{j}\frac{s_k}{1-s_k}\bigg)\bigg(\sum_{j=0}^{n}\prod_{k=1}^{j}\frac{s_k}{1-s_k}\bigg)^{-1}.$$

COROLLARY. *For a function $f : I \to \overline{\mathbb{R}}$ the following statements hold.*

(1) If $1/2 \in \underline{\mathcal{AC}}_f$ then $\mathbb{Q} \cap]0,1[\subseteq \underline{\mathcal{AC}}_f$.

(2) If $\ell/m \in \underline{\mathcal{AC}}_f$ for some $\ell, m \in \mathbb{N}$ with $\ell < m$ and $2\ell \neq m$, then, for all $n \geq 2$ and for all $i \in \{1, \dots, n\}$, the fraction

$$r_i := \frac{\ell^{n+1} - \ell^i (m-\ell)^{n+1-i}}{\ell^{n+1} - (m-\ell)^{n+1}}$$

belongs to $\underline{\mathcal{AC}}_f$.

Finally, we construct a proper *upper asymmetrically convex extended real valued function* whose parameter set contains rational (and hence algebraic) numbers, is dense in $[0, 1]$ but it fails to be an intersection of a field and the open unit interval. An other example having similar behavior was given by Lewicki and

Olbryś concerning transcendental parameters and the real valued case. The existence of a real valued function with the same property under algebraic parameters forms still an open problem.

THEOREM. *Let $I \subseteq \mathbb{R}$ be a subinterval with $a := \sup I \in I \cap \mathbb{Q}_1$, $C : I \to \mathbb{R}$ be any convex function, and define $f : I \to \overline{\mathbb{R}}$ by*

$$f(x) := \begin{cases} C(x) & \textit{if } x \in (I \cap \mathbb{Q}_0) \cup \{a\}, \\ +\infty & \textit{if } x \in I \setminus (\mathbb{Q}_0 \cup \{a\}). \end{cases}$$

Then, for all $t \in]0,1[\cap \mathbb{Q}_1$, the function f is upper $\mathcal{A}_t$-convex but it is not upper $\mathcal{A}_{1-t}$-convex.

COROLLARY. *Keeping the above notation and conditions, $\overline{\mathcal{AC}}_f$ is not closed under addition, consequently it cannot be written as an intersection of $]0,1[$ and a proper subfield of $\mathbb{R}$.*

• **Second Part.** The second part of the dissertation generalizes and investigates the statement about the equivalence of (1) and (2). The original assertion provides that, having the Jensen inequality of n variables with fixed positive integer $n \geq 2$ for a real function, its Jensen convexity can be deduced. Obviously, the statement is interesting only when $n > 2$. In view of our terminology, this means that the n variable Jensen inequality is *reducible*. The calculation in the proof of the theorem shows that this depends strongly on *the reducibility of the mean in background*, namely of the arithmetic mean.

Reducibility of means and convexity properties

In *Chapter 3.*, we formulate precisely the notion of reducibility of general mean values. The main theorem of this part, which gives a sufficient condition for being reducible, is the following.

THEOREM. *The mean $M : D^n \to X$ is χ-reducible provided that it is χ-continuous.*

After this, generalizing widely the well-known means, we introduce the notion of *generalized deviation means* on topological vector spaces of Hausdorff type. These means naturally turned out to be reducible. Moreover, the reductions belong to the same class and the generators can be easily given using the original ones.

THEOREM. *Let $n \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}_n$, and let $E \in \mathbf{E}(D)^n$. Then the generalized E-deviation mean $\mathcal{D}^E : D^n \to D$ is reducible with respect to any injective function $\chi : \mathbb{N}_k \to \mathbb{N}_n$. Furthermore, the χ-reduction of $\mathcal{D}^E$ is uniquely determined, namely we have*

$$\mathcal{D}^E_\chi(x) = \mathcal{D}^{E_\chi}(x), \qquad (x \in D^k).$$

In the *Section 3.4.* of *Chapter 3.*, we also characterize the generalized deviation means using relatively Gâteaux-differentiable strictly convex functions.

THEOREM. *Assume that $D \subseteq X$ is a convex set and let $F \in \boldsymbol{F}(D)$. Then the function $E_F : D \times D \to D^*$, defined by*

$$E_F(u, v) = -F'_u(v),$$

is a generalized deviation. Furthermore, if $n \in \mathbb{N}$, $F \in \boldsymbol{F}(D)^n$ and $E_F = (E_{F_1}, \dots, E_{F_n})$, then, for $x \in D^n$, the equality $y = \mathcal{D}^{E_F}(x)$ holds if and only if y is the unique minimizer over $\operatorname{conv}(x(\mathbb{N}_n))$ *of the function $\mathcal{F}_{F,x} : D \to \mathbb{R}$ defined by*

$$\mathcal{F}_{F,x}(v) := F_1(x_1, v) + \cdots + F_n(x_n, v).$$

Conversely, if X is the real line and D is an open subinterval, then, for all deviations $E \in \mathbf{E}(D)$, there exists a function $F \in \boldsymbol{F}(D)$ such that, for all $u \in D$,

$$F'_u(v) = -E(u, v), \qquad (v \in D)$$

is satisfied.

In the very last section we are dealing with the reducibility of the notion of (M, N)-convexity of real functions, which is a self-evident generalization of the Jensen convexity; one can obtain it by replacing the arithmetic mean on the left hand side and on the right hand side by the general mean values M and N, respectively. As in the standard case, its reducibility depends strongly on the reducibility property of the mean values what are involved, namely of M and N.

THEOREM. *Let $D \subseteq X$ be a nonempty convex set, $I \subseteq \mathbb{R}$ be an interval, $n \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}_n$, and let $\chi : \mathbb{N}_k \to \mathbb{N}_n$ be an injective function. Let further $M : D^n \to X$ and $N : I^n \to \mathbb{R}$ be means such that M is χ-reducible and N is χ-continuous and uniquely χ-reducible. If a function $f : D \to I$ is (M, N)-convex, then it is also (K, N_χ)-convex for all χ-reduction $K : D^k \to X$ of the mean M.*

Applying this result, we immediately get the following consequences, which concern special mean values instead of general ones.

COROLLARY. *Let $D \subseteq X$ be a nonempty convex set, $I \subseteq \mathbb{R}$ be an interval and $n \in \mathbb{N}$. Let further $\omega : D \to \mathbb{R}^n_+$ and $E : I \times I \to \mathbb{R}^n$ such that E_i is a deviation for all $i \in \mathbb{N}_n$. If a function $f : D \to I$ satisfies the n-variable inequality*

$$f\big(\mathcal{A}^\omega(x_1, \ldots, x_n)\big) \leq \mathcal{D}^E\big(f(x_1), \ldots, f(x_n)\big)$$

for all $x_1, \ldots, x_n \in D$, then, for all $k \in \mathbb{N}_n$ and for all injective function $\chi : \mathbb{N}_k \to \mathbb{N}_n$, it also satisfies the k-variable inequality

$$f\big(\mathcal{A}^{\omega_\chi}(x_1, \ldots, x_k)\big) \leq \mathcal{D}^{E_\chi}\big(f(x_1), \ldots, f(x_k)\big),$$

whenever $x_1, \ldots, x_k \in D$.

COROLLARY. *Let $D \subseteq X$ be a nonempty convex set, $I \subseteq \mathbb{R}$ be an interval and $n \in \mathbb{N}$. Let further $G : D \times D \to (D^*)^n$ and $E : I \times I \to \mathbb{R}^n$ such that G_i is a generalized deviation and E_i is a deviation for all $i \in \mathbb{N}_n$. If a function $f : D \to I$ satisfies the n-variable inequality*

$$f\big(\mathcal{D}^G(x_1, \ldots, x_n)\big) \leq \mathcal{D}^E\big(f(x_1), \ldots, f(x_n)\big)$$

for all $x_1, \dots, x_n \in D$, then, for all $k \in \mathbb{N}_n$ and for all injective function $\chi : \mathbb{N}_k \to \mathbb{N}_n$, it also satisfies the k-variable inequality

$$f\big(\mathcal{D}^{G_\chi}(x_1, \dots, x_k)\big) \le \mathcal{D}^{E_\chi}\big(f(x_1), \dots, f(x_k)\big)$$

for all $x_1, \dots, x_k \in D$.

COROLLARY. *Let $I \subseteq \mathbb{R}$ be an interval and $n \in \mathbb{N}$. Let further $G, E : I \times I \to \mathbb{R}^n$ such that G_i and E_i are deviations for all $i \in \mathbb{N}_n$. If the n-variable inequality*

$$\mathcal{D}^{G}(x_1, \dots, x_n) \le \mathcal{D}^{E}(x_1, \dots, x_n), \qquad (x_1, \dots, x_n \in D)$$

holds, then, for all $k \in \mathbb{N}_n$ and for all injective function $\chi : \mathbb{N}_k \to \mathbb{N}_n$, we also have the k-variable inequality

$$\mathcal{D}^{G_\chi}(x_1, \dots, x_k) \le \mathcal{D}^{E_\chi}(x_1, \dots, x_k)$$

for all $x_1, \dots, x_k \in D$.

Finally we also establish the reducibility property of an abstract version of a Hölder-Minkowski type inequality.

THEOREM. *Let $X_1, \dots, X_\ell$ be real Hausdorff topological linear spaces, let $D_1 \subseteq X_1, \dots, D_\ell \subseteq X_\ell$ be nonempty convex sets and $I \subseteq \mathbb{R}$ be an interval. Let $n \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}_n$, and let $\chi : N_k \to \mathbb{N}_n$ be an injective function. Let $N_1 : D_1^n \to X_1, \dots, N_\ell : D_\ell^n \to X_\ell$ be χ-reducible means and let $M : I^n \to \mathbb{R}$ be a χ-continuous, uniquely χ-reducible mean. If a function $f : D_1 \times \cdots \times D_\ell \to I$ satisfies the $n \cdot \ell$-variable inequality*

$$M\big(f(x^1, \dots, x^\ell)\big) \le f\big(N_1(x^1), \dots, N_\ell(x^\ell)\big)$$

for all $x^1 \in D_1^n, \dots, x^\ell \in D_\ell^n$, then, for any χ-reductions $K_1 : D_1^k \to X_1, \dots, K_\ell : D_\ell^k \to X_\ell$ of $N_1, \dots, N_\ell$, respectively, it also fulfills the $k \cdot \ell$-variable inequality

$$M_\chi\big(f(x^1, \dots, x^\ell)\big) \le f\big(K_1(x^1), \dots, K_\ell(x^\ell)\big)$$

for all $x^1 \in D_1^k, \dots, x^\ell \in D_\ell^k$, *where, for* $m \in \mathbb{N}$ *and* $x^1 \in D_1^m, \dots, x^\ell \in D_\ell^m$, *we denote*

$$f(x^1, \dots, x^\ell) := (f(x_1^1, \dots, x_1^\ell), \dots, f(x_m^1, \dots, x_m^\ell)).$$

Bevezető

Az alábbiakban összefoglalom azokat a témaköröket, amelyekkel a diszszertációm foglalkozik és, ezzel párhuzamosan, felsorom a kapcsolódó fontosabb eredményeket. A vizsgálatokat Johan Jensen következő, a valós konvex függvények elméletében alapvetőnek számító eredménye motiválta.

TÉTEL. (Jensen, 1906) *Legyen X valós vektortér és $D \subseteq X$ nemüres, konvex részhalmaz. Ekkor az alábbi állítások páronként ekvivalensek.*

(1) Az $f : D \to \mathbb{R}$ függvény Jensen-konvex.

(2) Bármely rögzített $n \in \mathbb{N}$ esetén, az $f : D \to \mathbb{R}$ függvény eleget tesz az n-változós Jensen egyenlőtlenségnek, vagyis, bármely $x_1, \dots, x_n \in D$ esetén, fennáll az

$$f\Big(\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}\Big) \leq \frac{f(x_1) + \cdots + f(x_n)}{n}$$

egyenlőtlenség.

(3) Az $f : D \to \mathbb{R}$ függvény racionálisan konvex az értelmezési tartományán, vagyis, bármely $r \in [0, 1] \cap \mathbb{Q}$ súly és $x, y \in D$ pontok esetén

$$f(rx + (1 - r)y) \leq rf(x) + (1 - r)f(y).$$

A fenti tételnek, többek között, két fontos üzenete van, így, témáját tekintve, a dolgozatom is két nagyobb részre bontható.

• **Első rész.** Ebben a részben az (1) és (3) állítások közötti kapcsolatot emelném ki. Ennek értelmében, ha egy valós értékű függvény $\frac{1}{2}$ súllyal standard értelemben konvex, tehát Jensen konvex, akkor racionálisan is konvex. Ebből az állításból rögtön következik a Jensen konvex függvények konvexitási paraméterhalmazának több lényeges tulajdonsága. Nevezetesen, a konvexitási paraméterhalmaz egy legalább megszámlálható *(számossági tulajdonság)* sűrű *(topologikus tulajdonság)* részhalmaza a $[0, 1]$

intervallumnak, továbbá tartalmazza a racionális számok testének $[0,1]$ intervalumba eső szeletét *(algebrai tulajdonság)*.

Legyen $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallum. Ekkor, adott $f : I \to \mathbb{R}$ függvény esetén, definiáljuk a

$$\mathcal{C}_f := \{t \in [0,1] \mid \text{az } f \text{ függvény } t\text{-konvex } I\text{-n}\}$$

halmazt. A konvexitási paraméterhalmaz, vagyis a fenti halmaz jellemzése Norbert Kuhn nevéhez fűződik.

TÉTEL. (Kuhn, 1984) *Adott $f : I \to \mathbb{R}$ függvényre, a $\mathcal{C}_f$ konvexitási paraméterhalmaz vagy a triviális $\{0,1\}$ halmaz vagy felírható $F \cap [0,1]$ alakban, ahol F a legszűkebb $\mathcal{C}_f$-et tartalmazó részteste $\mathbb{R}$-nek.*

A disszertáció első részében Kuhn eredményéhez hasonló tételeket fogalmazunk meg egy, bővített valós értékű függvényekre bevezetett, általánosított konvexitási fogalom mellett. Most rátérünk az egyes alfejezetek részletesebb ismertetésére.

Az első alfejezetben definiáljuk a középérték fogalmát és a fontosabb középosztályokat, amelyekre a későbbiekben szükségünk lesz. Ezután megemlítünk héhány nélkülözhetetlen eszközt a lineáris algebrából és a fixpontelméletből. Végül megfogalmazzuk a közepek származtatására vonatkozó főbb eredményeinket és alkalmazzuk őket a Matkowski közepek osztályára.

Közepek származtatása

Az alfejezet központi fogalma *adott közepek leszármazottjainak osztálya*.
Adott kétváltozós közepekből álló $(M_1, \ldots, M_n)$ vektorértékű függvény esetén, az $N_1, \ldots, N_n$ kétváltozós közepeket az eredeti

közepek leszármazottjának fogjuk nevezni, ha eleget tesznek az

$$\begin{aligned} N_1(x,y) &= M_1\big(x, N_2(x,y)\big), \\ N_i(x,y) &= M_i\big(N_{i-1}(x,y), N_{i+1}(x,y)\big), \\ N_n(x,y) &= M_n\big(N_{n-1}(x,y), y\big) \end{aligned}$$

egyenletrendszernek az I-n, ahol $i \in \{2, \dots, n-1$. Ilyen közepek létezése és egyértelműsége nem triviális, az erről szóló tételnek (a disszertációban Theorem 1.7.) már csak a kimondása is hosszadalmas előkészületeket igényel, ezért a szóban forgó eredményt itt precízen nem ismertetjük.

A következő tétel kimondja, hogy súlyozott kváziaritmetikai közepek esetén a származtatott közepek mindig léteznek, súlyozott kváziaritmetikaiak maradnak az eredeti generátorfüggvénnyel, és hogy az új súlyok a régiek segítségével egyértelműen számolhatóak.

TÉTEL. *Legyen* $n \ge 2$, $s_1, \dots, s_n \in]0,1[$ *és* $h : I \to \mathbb{R}$ *folytonos, szigorúan növő függvény. Adott* $(x,y) \in I^2_<$ *esetén, legyen* $\varphi_{(x,y)} : [x,y]^n_\le \to \mathbb{R}^n$ *a*

$$\varphi_{(x,y)}(t) := \big(M_1(x,t_2), \dots, M_i(t_{i-1}, t_{i+1}), \dots, M_n(t_{n-1}, y)\big)$$

képlettel definiált függvény, ahol $M_i := \mathcal{M}^{(s_i h, (1-s_i)h)}$, *ha* $i \in \{1, \dots, n\}$. *Ekkor, bármely* $(x,y) \in I^2_<$ *esetén, a* $\Phi_{(x,y)} := \big\{\xi \in [x,y]^n_\le \,\big|\, \varphi_{(x,y)}(\xi) = \xi\big\}$ *fixpontok halmaza az* $\big\{\big(\mathcal{M}^{(\sigma_1 h,\,(1-\sigma_1)h)}(x,y), \dots, \mathcal{M}^{(\sigma_n h,\,(1-\sigma_n)h)}(x,y)\big)\big\}$ *egyelemű halmaz, ahol*

$$\sigma_i := \left(\sum_{j=i}^{n} \prod_{k=1}^{j} \frac{s_k}{1-s_k}\right)\left(\sum_{j=0}^{n} \prod_{k=1}^{j} \frac{s_k}{1-s_k}\right)^{-1}$$

minden $i \in \{1, \dots, n\}$ *esetén.*

Általános esetben, ha a közepeink nem feltétlenül súlyozott kváziaritmetikaiak, a leszármazottak számolása nehézkessé, sőt, esetenként akár lehetetlenné is válhat. Kiderül azonban, hogy ha a generátorfüggvények két előre megadott függvény speciális eltoltjai, akkor a leszármazottak egy kétirányú rekurzió segítségével könnyen leírhatók.

TÉTEL. *Legyen* $n \geq 2$, $j \in \{1, \dots, n\}$ *és* $p, q, h_1, \dots, h_{n-1} : I \to \mathbb{R}$ *adott folytonos, szigorúan növő függvények, továbbá legyen* $h_0 := h_n := 0$. *Adott* $(x, y) \in I^2_<$ *pár esetén, legyen* $\varphi_{(x,y)} : [x, y]^n_\leq \to \mathbb{R}^n$ *a*

$$\varphi_{(x,y)}(t) := \big(M_1(x, t_2), \dots, M_i(t_{i-1}, t_{i+1}), \dots, M_n(t_{n-1}, y)\big)$$

formulával definiált függvény, úgy, hogy

$$M_i := \begin{cases} \mathcal{M}^{(p+h_{i-1},\, h_i)}, & ha\ i \in \{1, \dots, j-1\}, \\ \mathcal{M}^{(p+h_{i-1},\, h_i+q)}, & ha\ i = j, \\ \mathcal{M}^{(h_{i-1},\, h_i+q)}, & ha\ i \in \{j+1, \dots, n\}. \end{cases}$$

Ekkor, bármely $(x, y) \in I^2_<$ *esetén, a* $\Phi_{(x,y)}$ *fixpontok halmaza megegyezik a* $\{(\xi_1, \dots, \xi_n)\}$ *egyelemű halmazzal, ahol* $\xi_j := \mathcal{M}^{(p,\, q)}(x, y)$, *továbbá*

$$\xi_i := \begin{cases} \mathcal{M}^{(p,\, h_i)}(x, \xi_{i+1}), & ha\ i \in \{1, \dots, j-1\}, \\ \mathcal{M}^{(h_{i-1},\, q)}(\xi_{i-1}, y), & ha\ i \in \{j+1, \dots, n\}. \end{cases}$$

Új konvexitási tulajdonságok származtatása

A második fejezetben definiáljuk és jellemezzük *bővített valós értékű függvények alsó- és felső konvexitását egy adott* M

középre vonatkozóan. Bevezetjük a kapcsolódó *konvexitási osztályok*at és megvizsgáljuk algebrai és topologikus tulajdonságaikat. Végül, áttérve az *aszimmetrikus konvexitás* speciális esetére, megfogalmazzuk és bizonyítjuk *Kuhn tételének ellenpárját* is.

Kuhn tételéből következik, hogy a standard konvexitási paraméterhalmaz zárt a saját elemeivel súlyozott konvex kombinációk képzésére nézve. A következő állítás ezt az eredményt általánosítja.

ÁLLÍTÁS. *Legyen* $f : I \to \overline{\mathbb{R}}$ *adott függvény és* $\mathcal{M} \in \{\underline{\mathcal{M}}_f, \overline{\mathcal{M}}_f\}$. *Ekkor az alábbi állítások igazak.*

(a) Ha $M, N_1, N_2 \in \mathcal{M}$ *és* $N_1 < N_2$ *az* $I^2_<$ *halmazon, akkor* $M \circ (N_1, N_2) \in \mathcal{M}$.

(b) Ha $M, N \in \mathcal{M}$, *akkor az* $M \circ (\min, N)$ *és* $M \circ (N, \max)$ *kompozíciók ismét az* $\mathcal{M}$ *osztályhoz tartoznak.*

A standard esethez hasonlóan, topologikus tulajdonság származtatható a fenti eredményből.

KÖVETKEZMÉNY. *Legyen* $f : I \to \overline{\mathbb{R}}$ *esetén*

$$\underline{\mathcal{M}}^*_f := \{M \in \underline{\mathcal{M}}_f \mid M \text{ szeparáltan folytonos}\},$$

$$\overline{\mathcal{M}}^*_f := \{M \in \overline{\mathcal{M}}_f \mid M \text{ szeparáltan folytonos}\},$$

és $\mathcal{M}^* \in \{\underline{\mathcal{M}}^*_f, \overline{\mathcal{M}}^*_f\}$. *Ekkor az* $\mathcal{M}^*$ *osztálynak, a pontonkénti konvergenciára nézve, nem létezik izolált pontja. Pontosabban fogalmazva, bármely* $M \in \mathcal{M}^*$ *közép esetén, léteznek közepeknek olyan* $(L_n), (U_n) \subseteq \mathcal{M}^*$ *sorozatai, hogy* $L_n < M < U_n$, *valahányszor* $n \in \mathbb{N}$, *továbbá* $L_n \to M$ *és* $U_n \to M$ *pontonként az* $I^2_<$ *halmazon, ha* $n \to \infty$.

Az előzőekben elért eredményeket felhasználva, bizonyítható az alsó konvexitási osztály leszármazottakra való zártsága. Felső konvexitás esetén ez az állítás nem marad érvényben.

TÉTEL. *Legyen* $f : I \to \overline{\mathbb{R}}$ *adott függvény,* $n \geq 2$*, továbbá legyenek* $M_1, \dots, M_n \in \underline{\mathcal{M}}_f$ *folytonos közepek. Ekkor* $\mathbf{D}_i(M_1, \dots, M_n) \subseteq \underline{\mathcal{M}}_f$ *minden* $i \in \{1, \dots, n\}$ *esetén.*

Feltéve, hogy az alsó konvexitási halmaz speciális Matkowski közepeket is tartalmaz, az alábbi következmények vezethetők le.

KÖVETKEZMÉNY. *Legyen* $f : I \to \overline{\mathbb{R}}$*,* $n \geq 2$*,* $s_1, \dots, s_n \in]0, 1[$ *és, végül, legyen* $h : I \to \mathbb{R}$ *folytonos, szigorúan növő függvény. Tegyük fel, hogy* $\mathcal{M}^{(s_i h, (1-s_i)h)} \in \underline{\mathcal{M}}_f$ *minden* $i \in \{1, \dots, n\}$ *esetén. Ekkor, minden* $i \in \{1, \dots, n\}$ *indexre, a* $\mathcal{M}^{(\sigma_i h, (1-\sigma_i)h)}$ *Matkowski közép tagja az* $\underline{\mathcal{M}}_f$ *osztálynak, ahol a* σ_i *súly, adott* $i \in \{1, \dots, n\}$ *indexre,*

$$\sigma_i := \left(\sum_{j=i}^{n} \prod_{k=1}^{j} \frac{s_k}{1 - s_k} \right) \left(\sum_{j=0}^{n} \prod_{k=1}^{j} \frac{s_k}{1 - s_k} \right)^{-1}$$

módon számolható.

KÖVETKEZMÉNY. *Legyen* $n \geq 2$*,* $p, q, h_1, \dots, h_{n-1} : I \to \mathbb{R}$ *folytonos, szigorúan növő függvények és* $f : I \to \overline{\mathbb{R}}$*. Legyen* $h_0 := h_n := 0$ *és tegyük fel, hogy létezik olyan* $j \in \{1, \dots, n\}$ *index, hogy, minden* $i \in \{1, \dots, n\}$ *esetén az*

$$M_i := \begin{cases} \mathcal{M}^{(p+h_{i-1}, h_i)}, & \textit{ha } i \in \{1, \dots, j-1\}, \\ \mathcal{M}^{(p+h_{j-1}, h_j+q)}, & \textit{ha } i = j, \\ \mathcal{M}^{(h_{i-1}, h_i+q)}, & \textit{ha } i \in \{j+1, \dots, n\} \end{cases}$$

közép az $\underline{\mathcal{M}}_f$ *osztályhoz tartozik. Ekkor* $N_1, \dots, N_n \in \underline{\mathcal{M}}_f$*, ahol, bármely* $(x, y) \in I^2_{\leq}$ *esetén, az* $N_i(x, y)$ *függvényértéket, az* i *indextől függően, az alábbiak szerint értelmezzük:*

$$\mathcal{M}^{(p, h_i)}(x, N_{i+1}(x, y)), \quad \textit{ha} \quad i \in \{1, \dots, j-1\},$$

$$\mathcal{M}^{(p, q)}(x, y), \quad \textit{ha} \quad i = j \quad \textit{és}$$

$$\mathcal{M}^{(h_{i-1}, q)}(N_{i-1}(x, y), y), \quad \textit{ha} \quad i \in \{j+1, \dots, n\}.$$

Áttérve az aszimmetrikus konvexitás fogalmára a felső és alsó konvexitási osztályok beazonosíthatóak a $[0,1]$ intervallum valamilyen alkalmas részhalmazával. Ekkor az algebrai és topologikus tulajdonságokról szóló tételek még kifejezőbbek lesznek. Megkapjuk a paraméterhalmaz speciális konvexitását, a szorzásra való zártságát és a sűrűségi tulajdonságot is.

TÉTEL. *Legyen $f : I \to \overline{\mathbb{R}}$ és $\mathcal{AC} \in \{\underline{\mathcal{AC}}_f, \overline{\mathcal{AC}}_f\}$.*

(1) Bármely $t, s_1, s_2 \in \mathcal{AC}$ esetén $ts_2 + (1-t)s_1 \in \mathcal{AC}$ feltéve, hogy $s_1 < s_2$.

(2) Bármely $t, s \in \mathcal{AC}$ esetén, ts és $1-(1-t)(1-s)$ eleme az $\mathcal{AC}$ halmaznak.

(3) Az $\mathcal{AC}$ paraméterhalmaz sűrű $]0,1[$-ben feltéve, hogy nem üres.

Alkalmazva a Matkowski közepekre nyert általános eredményeket, az alábbi következmények vezethetők le.

KÖVETKEZMÉNY. *Legyen $I \subseteq \mathbb{R}$ nemüres intervallum, $f : I \to \overline{\mathbb{R}}$, $n \geq 2$ és $s_1, \dots, s_n \in \underline{\mathcal{AC}}_f$. Ekkor $\sigma_i \in \underline{\mathcal{AC}}_f$ bármely $i \in \{1, \dots, n\}$ esetén, ahol*

$$\sigma_i := \left(\sum_{j=i}^{n} \prod_{k=1}^{j} \frac{s_k}{1-s_k}\right)\left(\sum_{j=0}^{n} \prod_{k=1}^{j} \frac{s_k}{1-s_k}\right)^{-1}.$$

KÖVETKEZMÉNY. *Adott $f : I \to \overline{\mathbb{R}}$ függvényre az alábbi állítások igazak.*

(1) Ha $1/2 \in \underline{\mathcal{AC}}_f$, akkor $\mathbb{Q} \cap]0,1[\subseteq \underline{\mathcal{AC}}_f$.

(2) Ha $\ell/m \in \underline{\mathcal{AC}}_f$ valamilyen $\ell, m \in \mathbb{N}$ pozitív egészek mellett úgy, hogy $\ell < m$ és $2\ell \neq m$, akkor, bármely $n \geq 2$ esetén és bármely $i \in \{1, \dots, n\}$ indexre, az

$$r_i := \frac{\ell^{n+1} - \ell^i (m-\ell)^{n+1-i}}{\ell^{n+1} - (m-\ell)^{n+1}}$$

hányados az $\underline{\mathcal{AC}}_f$ halmazhoz tartozik.

Végül konstruálunk egy *felülről aszimmetrikusan konvex, bővített valós értékű függvényt* amelynél a kapcsolódó paraméterhalmaz tartalmaz racionális (és így algebrai) számokat, sűrű a $]0,1[$ intervallumban, de nem igaz rá a Kuhn tétel állítása, nevezetesen, nem írható fel a $]0,1[$ intervallum és valamilyen alkalmas résztest metszeteként. Egy hasonlóan viselkedő valós értékű függvényre sikerült példát adnia Lewicki és Olbryś lengyel matematikusoknak, ahol csak azt tudjuk, hogy a paraméterhalmaz tartalmaz transzcendens elemet. Olyan valós értékű függvény létezése, amely, valamilyen algebrai t paraméterrel, aszimmetrikusan t-konvex, de nem aszimmetrikusan $(1-t)$-konvex, máig nyitott probléma.

TÉTEL. *Legyen $I \subseteq \mathbb{R}$ olyan intervallum, amelyre $a := \sup I \in I \cap \mathbb{Q}_1$, legyen $C : I \to \mathbb{R}$ konvex függvény és $f : I \to \overline{\mathbb{R}}$ olyan, hogy*

$$f(x) := \begin{cases} C(x), & \text{ha } x \in (I \cap \mathbb{Q}_0) \cup \{a\}, \\ +\infty, & \text{ha } x \in I \setminus (\mathbb{Q}_0 \cup \{a\}). \end{cases}$$

Ekkor, bármely $t \in]0,1[\cap \mathbb{Q}_1$ esetén, az f függvény felülről $\mathcal{A}_t$-konvex, de nem felülről $\mathcal{A}_{1-t}$-konvex.

KÖVETKEZMÉNY. *A fenti jelöléseket és feltételeket megtartva, $\overline{\mathcal{AC}}_f$ nem zárt az összeadására, következésképpen nem írható fel a $]0,1[$ intervallum és $\mathbb{R}$ valamilyen résztestének metszeteként.*

• **Második rész.** Ebben a részben az (1) és (2) állítások ekvivalenciájáról szóló állítást általánosítjuk. Az eredeti állításból következik, hogy ha egy valós értékű függvény eleget tesz az n-változós Jensen egyenlőtlenségnek, valamilyen rögzített n mellett, akkor teljesíti a kétváltozós Jensen egyenlőtlenséget is. Nyilván, az állítás akkor érdekes, ha $n > 2$. A disszertációban ezt az *n-változós Jensen egyenlőtlenség redukálhatóságá*nak nevezzük. Az eredeti tétel bizonyításából kiderül, hogy ez a tulajdonság szorosan összefügg a háttérben lévő *közép redukálhatóságával*, ami esetünkben a számtani közép.

Közepek és konvexitási tulajdonságok redukálhatósága

A harmadik fejezetben precízen definiáljuk adott közép redukálhatóságát. Az alábbi tétel egy elegendő feltételt fogalmaz meg.

TÉTEL. *Az $M : D^n \to X$ közép χ-redukálható, ha χ-folytonos.*

Ezt követően, messzemenően általánosítva a jól ismert középosztályokat, bevezetjük az *általánosított eltérésközép* fogalmát Hausdorff-féle topologikus vektortereken. Kiderül, hogy ezek a közepek természetes módon rendelkeznek a redukálhatósági tulajdonsággal, továbbá a redukált közepek generátorfüggvényei könnyen megadhatók az eredeti generátorok segítségével.

TÉTEL. *Legyen $n \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}_n$, és $E \in \mathbf{E}(D)^n$. Ekkor a $\mathcal{D}^E : D^n \to D$ általánosított E-eltérésközép bármely injekítv $\chi : \mathbb{N}_k \to \mathbb{N}_n$ függvényre nézve redukálható. Továbbá a $\mathcal{D}^E$ közép χ-redukáltja egyértelműen meghatározott, nevezetesen*

$$\mathcal{D}^E_\chi(x) = \mathcal{D}^{E_\chi}(x), \qquad (x \in D^k).$$

A *3.4. fejezetben*, speciális Gâteaux-differenciálható konvex függvények segítségével, egy jellemzését adjuk az általánosított eltérésközepeknek.

TÉTEL. *Legyen $D \subseteq X$ konvex halmaz és $F \in \boldsymbol{F}(D)$. Ekkor az*

$$E_F(u, v) = -F'_u(v)$$

módon értelmezett $E_F : D \times D \to D^*$ függvény egy általánosított eltérés. Továbbá, ha $n \in \mathbb{N}$, $F \in \boldsymbol{F}(D)^n$ és $E_F = (E_{F_1}, \dots, E_{F_n})$, akkor, bármely $x \in D^n$ esetén, az $y = \mathcal{D}^{E_F}(x)$

egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha y egyértelmű minimumhelye az

$$\mathcal{F}_{F,x}(v) := F_1(x_1, v) + \cdots + F_n(x_n, v)$$

módon értelmezett $\mathcal{F}_{F,x} : D \to \mathbb{R}$ függvénynek a $\operatorname{conv}(x(\mathbb{N}_n))$ *halmaz felett.*

Megfordítva, ha $X = \mathbb{R}$ és D egy nyílt intervallum, akkor, bármely $E \in \mathbf{E}(D)$ eltérés esetén, létezik $F \in \boldsymbol{F}(D)$ függvény, hogy, bármely $u \in D$ pontra,

$$F'_u(v) = -E(u, v), \qquad (v \in D)$$

teljesül.

A legutolsó fejezet valós függvények (M, N)-konvexitásának redukálhatóságával foglalkozik. A szóban forgó konvexitási tulajdonság közvetlen általánosítása a standard Jensen egyenlőtlenségnek oly módon, hogy az egyenlőtlenség bal, illetve jobb oldalán lévő számtani közepet az M, illetve az N általános közepekkel helyettesítjük. A redukálhatósági tulajdonság erősen függ a definiáló egyenlőtlenségben szereplő közepek redukálhatóságától.

TÉTEL. *Legyen $D \subseteq X$ egy nemüres konvex halmaz, $I \subseteq \mathbb{R}$ egy intervallum, $n \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}_n$ és legyen $\chi : \mathbb{N}_k \to \mathbb{N}_n$ injektív. Legyenek továbbá $M : D^n \to X$ és $N : I^n \to \mathbb{R}$ közepek úgy, hogy M χ-redukálható, N pedig χ-folytonos és egyértelműen χ-redukálható. Ha az $f : D \to I$ függvény (M, N)-konvex, akkor (K, N_χ)-konvex is az M közép minden $K : D^k \to X$ χ-redukáltjával.*

A fenti tételt alkalmazva speciális redukálható közepekkel, az alábbi állítások bizonyíthatók.

KÖVETKEZMÉNY. *Legyen $D \subseteq X$ nemüres konvex halmaz, $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallum és $n \in \mathbb{N}$. Legyen továbbá $\omega : D \to \mathbb{R}^n_+$ és $E : I \times I \to \mathbb{R}^n$ úgy, hogy E_i egy eltérés minden $i \in \mathbb{N}_n$ index* *esetén. Ha az $f : D \to I$ függvény kielégíti az n-változós*

$$f\big(\mathcal{A}^{\omega}(x_1,\dots,x_n)\big) \le \mathcal{D}^{E}\big(f(x_1),\dots,f(x_n)\big)$$

egyenlőtlenséget minden $x_1,\dots,x_n \in D$ esetén, akkor, bármely $k \in \mathbb{N}_n$ és bármely $\chi : \mathbb{N}_k \to \mathbb{N}_n$ injektív függvény esetén, kielégíti a k-változós

$$f\big(\mathcal{A}^{\omega_\chi}(x_1,\dots,x_k)\big) \le \mathcal{D}^{E_\chi}\big(f(x_1),\dots,f(x_k)\big)$$

egyenlőtlenséget is, ahol $x_1,\dots,x_k \in D$.

KÖVETKEZMÉNY. *Legyen $D \subseteq X$ egy nemüres konvex halmaz, $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallum és $n \in \mathbb{N}$. Legyen továbbá $G : D \times D \to (D^*)^n$ és $E : I \times I \to \mathbb{R}^n$ olyan, hogy G_i egy általánosított eltérés és E_i egy eltérés minden $i \in \mathbb{N}_n$ esetén. Ha az $f : D \to I$ függvény kielégíti az n-változós*

$$f\big(\mathcal{D}^{G}(x_1,\dots,x_n)\big) \le \mathcal{D}^{E}\big(f(x_1),\dots,f(x_n)\big)$$

egyenlőtlenséget minden $x_1,\dots,x_n \in D$ esetén, akkor, minden $k \in \mathbb{N}_n$ és minden $\chi : \mathbb{N}_k \to \mathbb{N}_n$ injektív függvény esetén, kielégíti a k-változós

$$f\big(\mathcal{D}^{G_\chi}(x_1,\dots,x_k)\big) \le \mathcal{D}^{E_\chi}\big(f(x_1),\dots,f(x_k)\big)$$

egyenlőtlenséget is, ahol $x_1,\dots,x_k \in D$.

A következő állítás szerint, ha két eltérésközép összehasonlítható, akkor a redukáltjaik is összehasonlíthatók.

KÖVETKEZMÉNY. *Legyen $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallum és $n \in \mathbb{N}$. Legyen továbbá $G, E : I \times I \to \mathbb{R}^n$ olyan, hogy G_i és E_i eltérés minden $i \in \mathbb{N}_n$ esetén. Ha*

$$\mathcal{D}^{G}(x_1,\dots,x_n) \le \mathcal{D}^{E}(x_1,\dots,x_n), \qquad (x_1,\dots,x_n \in D),$$

akkor, bármely $k \in \mathbb{N}_n$ és bármely $\chi : \mathbb{N}_k \to \mathbb{N}_n$ injektív függvény esetén,

$$\mathcal{D}^{G_\chi}(x_1,\dots,x_k) \le \mathcal{D}^{E_\chi}(x_1,\dots,x_k), \quad (x_1,\dots,x_k \in D).$$

is teljesül.

Végül, a fenti állítások bizonyításában szereplő technikák segítségével, Hölder-Minkowski-típusú egyenlőtlenségek redukálhatósági tétele is bizonyítható.

TÉTEL. *Legyenek $X_1, \ldots, X_\ell$ Hausdorff-féle topologikus vektorterek, $D_1 \subseteq X_1, \ldots, D_\ell \subseteq X_\ell$ nemüres konvex halmazok és $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallum. Legyen $n \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}_n$ és $\chi : N_k \to \mathbb{N}_n$ egy ijektív függvény. Legyenek végül $N_1 : D_1^n \to X_1, \ldots, N_\ell : D_\ell^n \to X_\ell$ χ-redukálható közepek, $M : I^n \to \mathbb{R}$ pedig χ-folytonos és egyértelműen χ-redukálható. Ha az $f : D_1 \times \cdots \times D_\ell \to I$ függvény kielégíti $n \cdot \ell$-változós*

$$M\big(f(x^1, \ldots, x^\ell)\big) \leq f\big(N_1(x^1), \ldots, N_\ell(x^\ell)\big)$$

egyenlőtlenséget minden $x^1 \in D_1^n, \ldots, x^\ell \in D_\ell^n$ esetén, akkor az $N_1, \ldots, N_\ell$ közepek bármely $K_1 : D_1^k \to X_1, \ldots, K_\ell : D_\ell^k \to X_\ell$ χ-redukáltja esetén, kielégíti a $k \cdot \ell$-változós

$$M_\chi\big(f(x^1, \ldots, x^\ell)\big) \leq f\big(K_1(x^1), \ldots, K_\ell(x^\ell)\big)$$

egyenlőtlenséget is, ahol $x^1 \in D_1^k, \ldots, x^\ell \in D_\ell^k$ és ahol, adott $m \in \mathbb{N}$ és $x^1 \in D_1^m, \ldots, x^\ell \in D_\ell^m$ elemekre,

$$f(x^1, \ldots, x^\ell) := \big(f(x_1^1, \ldots, x_1^\ell), \ldots, f(x_m^1, \ldots, x_m^\ell)\big).$$

Bibliography

[1] J. Aczél and Z. Daróczy. Über verallgemeinerte quasilineare Mittelwerte, die mit Gewichtsfunktionen gebildet sind. *Publ. Math. Debrecen*, 10:171–190, 1963.

[2] M. Bajraktarević. Sur une équation fonctionnelle aux valeurs moyennes. *Glasnik Mat.-Fiz. Astronom. Društvo Mat. Fiz. Hrvatske Ser. II*, 13:243–248, 1958.

[3] P. Burai and J. Makó. On certain schur-convex functions. *Publ. Math. Debrecen*, 89:307–319, 2016.

[4] Z. Daróczy. A general inequality for means. *Aequationes Math.*, 7(1):16–21, 1971.

[5] Z. Daróczy. Über eine Klasse von Mittelwerten. *Publ. Math. Debrecen*, 19:211–217 (1973), 1972.

[6] Z. Daróczy and L. Losonczi. Über den Vergleich von Mittelwerten. *Publ. Math. Debrecen*, 17:289–297 (1971), 1970.

[7] Z. Daróczy and Zs. Páles. On comparison of mean values. *Publ. Math. Debrecen*, 29(1-2):107–115, 1982.

[8] Z. Daróczy and Zs. Páles. Multiplicative mean values and entropies. In *Functions, series, operators, Vol. I, II (Budapest, 1980)*, page 343–359. North-Holland, Amsterdam, 1983.

[9] Benjamin R. Halpern and George M. Bergman. A fixed-point theorem for inward and outward maps. *Transactions of the American Mathematical Society*, 130(2):353–358, 1968.

[10] J. L. W. V. Jensen. Sur les fonctions convexes et les inégualités entre les valeurs moyennes. *Acta Math.*, 30:175–193, 1906.

[11] T. Kiss and Zs. Páles. Reducible means and reducible inequalities. *Aequationes mathematicae*, 07 2016.

[12] M. Kuczma. *An Introduction to the Theory of Functional Equations and Inequalities*, volume 489 of *Prace Naukowe Uniwersytetu Śląskiego w Katowicach*. Państwowe Wydawnictwo Naukowe — Uniwersytet Śląski, Warszawa–Kraków–Katowice, 1985.

[13] M. Kuczma. *An introduction to the theory of functional equations and inequalities. Cauchy's equation and Jensen's inequality*. Birkhäuser Verlag, 2nd edition, 2009.

[14] N. Kuhn. A note on t-convex functions. In W. Walter, editor, *General Inequalities, 4 (Oberwolfach, 1983)*, volume 71 of *International Series of Numerical Mathematics*, page 269–276. Birkhäuser, Basel, 1984.

[15] M. Lewicki and A. Olbryś. On non-symmetric t-convex functions. *Mathematical Inequalities and Applications*, 17, 01 2014.

[16] L. Losonczi. Über eine neue Klasse von Mittelwerten. *Acta Sci. Math. (Szeged)*, 32:71–81, 1971.

[17] L. Losonczi. Subadditive Mittelwerte. *Arch. Math. (Basel)*, 22:168–174, 1971.

[18] L. Losonczi. Subhomogene Mittelwerte. *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.*, 22:187–195, 1971.

[19] L. Losonczi. General inequalities for nonsymmetric means. *Aequationes Math.*, 9:221–235, 1973.

[20] Gy. Maksa, K. Nikodem, and Zs. Páles. Results on t-Wright convexity. *C. R. Math. Rep. Acad. Sci. Canada*, 13(6):274–278, 1991.

[21] J. Matkowski. Generalized weighted quasi-arithmetic means. *Aequat. Math.*, 79:203–212, 2010.

[22] K. Nikodem and Zs. Páles. On t-convex functions. *Real Anal. Exchange*, 29(1):219–228, 2003.

[23] Zs. Páles. Characterization of quasideviation means. *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.*, 40(3-4):243–260, 1982.

[24] Zs. Páles. Inequalities for homogeneous means depending on two parameters. In E. F. Beckenbach and W. Walter, editors, *General Inequalities, 3 (Oberwolfach, 1981)*, volume 64 of *International Series of Numerical Mathematics*, page 107–122. Birkhäuser, Basel, 1983.

[25] Zs. Páles. Inequalities for comparison of means. In W. Walter, editor, *General Inequalities, 4 (Oberwolfach, 1983)*, volume 71 of *International Series of Numerical Mathematics*, page 59–73. Birkhäuser, Basel, 1984.

[26] Zs. Páles. On the characterization of means defined on a linear space. *Publ. Math. Debrecen*, 31(1-2):19–27, 1984.

[27] Zs. Páles. Ingham Jessen's inequality for deviation means. *Acta Sci. Math. (Szeged)*, 49(1-4):131–142, 1985.

[28] Zs. Páles. On the characterization of quasi-arithmetic means with weight function. *Aequationes Math.*, 32(2-3):171–194, 1987.

[29] Zs. Páles. General inequalities for quasideviation means. *Aequationes Math.*, 36(1):32–56, 1988.

[30] Zs. Páles. On a Pexider-type functional equation for quasideviation means. *Acta Math. Hungar.*, 51(1-2):205–224, 1988.

[31] Zs. Páles. On homogeneous quasideviation means. *Aequationes Math.*, 36(2-3):132–152, 1988.

[32] Zs. Páles and V. Zeidan. Infinite dimensional generalized Jacobian: properties and calculus rules. *J. Math. Anal. Appl.*, 344(1):55–75, 2008.

[33] J. Rätz. On the homogeneity of additive mappings. *Aequationes Math.*, 14(1/2):67–71, 1976.

UNIVERSITY of DEBRECEN

UNIVERSITY AND NATIONAL LIBRAY
UNIVERSITY OF DEBRECEN
H-4002 Egyetem tér 1, Debrecen
Phone: +3652/410-443, email: publikaciok@lib.unideb.hu

Registry number:	DEENK/46/2019.PL
Subject:	PhD Publikációs Lista

Candidate: Tibor Kiss
Neptun ID: UG9673
Doctoral School: Doctoral School of Mathematical and Computational Sciences
MTMT ID: 10060686

List of publications related to the dissertation

Foreign language scientific articles in international journals (2)

1. **Kiss, T.**, Páles, Z.: Reducible means and reducible inequalities.
   Aequ. Math. 91 (3), 505-525, 2017. ISSN: 0001-9054.
   DOI: http://dx.doi.org/10.1007/s00010-016-0459-2
   IF: 0.644

2. **Kiss, T.**, Páles, Z.: Implications between generalized convexity properties of real functions.
   J. Math. Anal. Appl. 434, 1852-1874, 2016. ISSN: 0022-247X.
   DOI: http://dx.doi.org/10.1016/j.jmaa.2015.10.009
   IF: 1.064

UNIVERSITY of DEBRECEN

UNIVERSITY AND NATIONAL LIBRAY
UNIVERSITY OF DEBRECEN
H-4002 Egyetem tér 1, Debrecen
Phone: +3652/410-443, email: publikaciok@lib.unideb.hu

List of other publications

Foreign language scientific articles in international journals (1)

3. **Kiss, T.**, Páles, Z.: On a functional equation related to two-variable weighted quasi-arithmetic means.
   J. Differ. Equ. Appl. 24 (1), 107-126, 2018. ISSN: 1023-6198.
   DOI: http://dx.doi.org/10.1080/10236198.2017.1397140
   IF: 0.625 (2017)

Total IF of journals (all publications): 2,333
Total IF of journals (publications related to the dissertation): 1,708

The Candidate's publication data submitted to the iDEa Tudóstér have been validated by DEENK on the basis of the Journal Citation Report (Impact Factor) database.

04 March, 2019

DEBRECENI EGYETEM
EGYETEMI ÉS NEMZETI KÖNYVTÁR
H-4002 Debrecen, Egyetem tér 1, Pf.: 400
Tel.: 52/410-443, e-mail: publikaciok@lib.unideb.hu

Nyilvántartási szám: DEENK/46/2019.PL
Tárgy: PhD Publikációs Lista

Jelölt: Kiss Tibor
Neptun kód: UG9673
Doktori Iskola: Matematika- és Számítástudományok Doktori Iskola
MTMT azonosító: 10060686

A PhD értekezés alapjául szolgáló közlemények

Idegen nyelvű tudományos közlemények külföldi folyóiratban (2)

1. **Kiss, T.**, Páles, Z.: Reducible means and reducible inequalities.
   Aequ. Math. 91 (3), 505-525, 2017. ISSN: 0001-9054.
   DOI: http://dx.doi.org/10.1007/s00010-016-0459-2
   IF: 0.644

2. **Kiss, T.**, Páles, Z.: Implications between generalized convexity properties of real functions.
   J. Math. Anal. Appl. 434, 1852-1874, 2016. ISSN: 0022-247X.
   DOI: http://dx.doi.org/10.1016/j.jmaa.2015.10.009
   IF: 1.064

DEBRECENI EGYETEM
DEBRECENI EGYETEM
EGYETEMI ÉS NEMZETI KÖNYVTÁR
H-4002 Debrecen, Egyetem tér 1, Pf.: 400
Tel.: 52/410-443, e-mail: publikaciok@lib.unideb.hu

További közlemények

Idegen nyelvű tudományos közlemények külföldi folyóiratban (1)

3. **Kiss, T.**, Páles, Z.: On a functional equation related to two-variable weighted quasi-arithmetic means.
   J. Differ. Equ. Appl. 24 (1), 107-126, 2018. ISSN: 1023-6198.
   DOI: http://dx.doi.org/10.1080/10236198.2017.1397140
   IF: 0.625 (2017)

A közlő folyóiratok összesített impakt faktora: 2,333
A közlő folyóiratok összesített impakt faktora (az értekezés alapjául szolgáló közleményekre): 1,708

A DEENK a Jelölt által az iDEa Tudóstérbe feltöltött adatok bibliográfiai és tudománymetriai ellenőrzését a tudományos adatbázisok és a Journal Citation Reports Impact Factor lista alapján elvégezte.

Debrecen, 2019.03.01.