Doktori (PhD) értekezés tézisei

Nem szokványos diofantikus egyenletek és szakköri feldolgozásuk

Rakamazi Richárd

Témavezető: **Dr. Freud Róbert**

DEBRECENI EGYETEM

Matematika- és Számítástudományok Doktori Iskola

Debrecen, 2019.

1. Bevezetés

Magyarországon a tehetséggondozás és versenyeztetés igen komoly múltra tekinthet vissza, mindkét területen jelentős hagyományokkal rendelkezünk. Számos kiváló matematikai alkotóműhely található szerte az országban, mind a hazai versenyeink száma, mind pedig ezek színvonala kiemelkedőnek tekinthető. Az eddigi tanári pályafutásom során magam is vezettem az iskolánkban szakköröket, különféle versenyekre történő felkészítést. Főként ezeknek a foglalkozásoknak a tapasztalataiból merítettem ezen disszertáció elkészítésének legfőbb motivációját is. Az egyik célom az volt, hogy a középiskolai versenyeknek, a – számomra talán legkedvesebb – diofantikus egyenletek témakörben kitűzött feladatait több szempontból megvizsgáljam, és néhány válogatott feladat kapcsán bemutassam, hogyan alkalmazhatóak a felsőbb matematikában megismert módszerek, illetve milyen módon hasznosíthatóak ezek a tehetséggondozásban, szakköri munkában. A feladatok megoldásai, a feladatsorok felépítése, valamint ezeknek a problémáknak a didaktikai vizsgálata teljesen önálló munkám eredménye. Az ismert versenyfeladatokat számos saját feladattal is kiegészítettem. Személyes meggyőződésem, hogy az ilyen típusú feladatok alkalmasak arra, hogy felkeltsék a diákok érdeklődését, betekintést nyújtsanak egy-egy probléma mélyebb gyökereihez, illetve fejlesszék az általános problémamegoldó képességet. Mindemellett természetesen a tanároknak is jelentős segítséget adhat tehetséggondozó munkájukhoz. Fontos feladatomnak tekintettem továbbá, hogy a különböző megoldásoknak megadjam az összehasonlítását, értékeljem azokat, megvizsgáljam a kínálkozó általánosítási lehetőségeket is. Ennek a kívánalomnak igyekeztem a disszertáció összes fejezetében eleget tenni. A dolgozat második, harmadik és negyedik fejezete többségében az önálló problémafelvetéseimből származik, amelyek rendre az [R1], [R2] és [R3] cikkekben kerültek publikálásra.

2. Binomiális együtthatók különféle közepeivel kapcsolatos diofantikus egyenletek

A 2. fejezetben a cél elsősorban az volt, hogy elemi módszerekkel megmutassam, hogy két különböző $\binom{n}{2}$ alakú binomiális együttható számtani, mértani és harmonikus közepe végtelen sokszor lehet ismét ilyen alakú binomiális együttható. Egyelőre nyitott kérdés, hogy mit mondhatunk a négyzetes közép esetén. A számtani közép kapcsán az összes megoldást sikerült megadnom, valamint három tag esetén sikerült bizonyos típusú binomiális együtthatókra végtelen sok nem-triviális megoldást felírni. Itt talán érdemes külön is kiemelnem az alábbi feladatot azzal a megjegyzéssel, hogy a könnyebb azonosítás érdekében a továbbiakban a tézisfüzetben szereplő feladatok, tételek és lemmák számozása a disszertációbeli megfelelő feladatok, tételek és lemmák számozását követi.

2.0.2. Feladat. *Mutassuk meg, hogy az alábbi diofantikus egyenletnek végtelen sok olyan megoldása létezik, ahol $x \geq d > 0$.*

$$\frac{\binom{x-d}{2} + \binom{x}{2} + \binom{x+d}{2}}{3} = \binom{y}{2}.$$

A bizonyítás során felhasználtam a következő lemmát, amelynek megoldási ötlete egy szép koordináta-geometriai észrevételen alapult.

2.0.3. Lemma. *Az $x^2 + 6y^2 - z^2 = 0$ egyenletnek végtelen sok megoldása van az egész számok körében, amelyek megkaphatóak az*

$$x = \frac{6u^2 - 24uv - v^2}{\delta} \cdot t$$
$$y = \frac{-12u^2 - 2uv + 2v^2}{\delta} \cdot t$$
$$z = \frac{30u^2 + 5v^2}{\delta} \cdot t$$

alakban, ahol u, v egész számok, $v \geq 0$ és $(u, v) = 1$,
$\delta = (6u^2 - 24uv - v^2, -12u^2 - 2uv + 2v^2, 30u^2 + 5v^2)$, valamint t tetszőleges egész szám. Az $x = \frac{6u^2-24uv-v^2}{\delta}, y = \frac{-12u^2-2uv+2v^2}{\delta}, z = \frac{30u^2+5v^2}{\delta}$ megoldásokat primitív megoldásoknak nevezzük, melyek páronként különbözők, és ezen alapmegoldások többszöröseiként kapjuk az egyenlet összes megoldását az egész számok körében.

Gyakorló középiskolai tanárként fontos megjegyeznem, hogy a levezetések során végig igyekeztem olyan elemi módszereket használni, melyek túlnyomó többsége tárgyalható a középiskolai matematika oktatás keretei között is, természetesen elsősorban szakköri órákon. Szinte kivétel nélkül mindegyik általam vizsgált nevezetes közép bizonyítása egy-egy további érdekes kitekintési lehetőséggel, felfedeznivalóval kecsegtet más matematikai területek irányába. Így például a számtani közép a pitagoraszi számhármasokkal, a harmonikus közép a Pell-egyenlettel, míg a mértani közép a rekurziókkal hozható összefüggésbe. Megítélésem szerint ezek a problémák kiválóan alkalmasak lehetnek módszertani szempontból arra, hogy az adott részek tanításakor ezeket – mint az igazán komoly fejtörést jelentő nehezebb feladatokat – a tanulóknak „kutatási" célból kitűzzük. Ugyanakkor ténylegesen számolnunk kell azzal az eshetőséggel is, hogy – a problémák jellegéből adódóan – akár már viszonylag korán leküzdhetetlennek látszó nehézségekbe ütközhetnek. Tulajdonképpen ez az oka annak, hogy a nevezetes közepeket általában csak két tagra és a binomiális együtthatók 2-es alsó értékére vizsgáltam, hiszen a további általánosítások már lényegesen mélyebb matematikai eszközöket igényelnének.

3. Binomiális együtthatókkal kapcsolatos diofantikus egyenletek megoldása elemi úton és felsőbb matematikai módszerek segítségével a középiskolai matematika szakkörön

A 3. fejezet az előző folytatásának tekinthető abban az értelemben, hogy ismét binomiális együtthatókat tartalmazó diofantikus egyenletekkel foglalkoztam. Itt is nagyon lényeges szempont volt, hogy lehetőség szerint olyan egyenleteket tárgyaljak, melyeket ha nem is teljes mélységben, de legalábbis részben feldolgozhatunk kiemelkedően tehetséges gyerekekkel középiskolai szakköri órák keretében. Több példán keresztül igyekeztem bemutatni azokat a változatos matematikai módszereket, amelyek segítségével több, elsősorban matematikaversenyeken szereplő példát is sikerrel oldhatunk meg. A fejezet egyik központi részét képezi az alábbi feladat vizsgálata.

3.0.3. Feladat. *Mutassuk meg, hogy az alábbi diofantikus egyenletnek végtelen sok olyan megoldása létezik, ahol $x \neq y$ és $x, y \geq 2, \quad x, y, z \in \mathbb{Z}$.*

$$\frac{\binom{x}{2} + \binom{y}{2}}{2} = z^2 .$$

A probléma megoldása során előkerül az $A^2 + B^2 = C^2 + 2$ diofantikus egyenlet, amelynek először tisztán elemi úton végtelen sok egész megoldását, majd – a kvadratikus alak felhasználásával – az összes egész megoldását sikerült felírnom. Látható, hogy itt egy apró kitérőt tettem a tényleges egyetemi tananyag felé, az itt leírtak már semmiképpen sem tekinthetőek középiskolainak.

A feladatok kidolgozásánál a fokozatosság elvét is próbáltam szem előtt tartani, vagyis a könnyebb, esetleg elemi úton is kezelhető feladatok után következnek a nehezebb, többnyire felsőbb matematikai apparátust kívánó problémák. A következő feladat megoldása mutatja ezt a legjobban, ahol négy különböző megoldást is sikerült találnom, amelyek közül az utolsó – a problémafelvetést általánosítva – az egyenlet összes egész megoldásához is elvezet.

3.0.10. Feladat. *Mutassuk meg, hogy az alábbi diofantikus egyenletnek végtelen sok olyan megoldása létezik, ahol* $y > x \geq 2, \quad x, y, z \in \mathbb{Z}$.

$$\binom{x}{2} + \binom{y}{2} = z^2 .$$

A feladat négyféle megoldása jól érzékelteti, hogy a témakör egy-egy problémájának eltérő feldolgozása alkalmas lehet arra, hogy a diákok önállóan próbálkozzanak, további kérdéseket tegyenek fel és újabb problémák megoldását tűzzék ki célul. Nyilvánvalóvá válhat számukra, hogy a feltételeket kicsit megváltoztatva a könnyűből a nehézen át, esetenként csak mély módszerekkel kezelhető problémákon keresztül egészen a megoldatlanig, az egyszerűen megfogalmazható problémák óriási tárházát kapjuk. Az első megoldáshoz ennek megfelelően egy gyakran alkalmazott algebrai átalakítás vezet, amelyben egy viszonylag könnyen adódó helyettesítés lesz a segítségünkre. Ez a megoldás kevésbé nívós csoportokban is elmondható, szerencsés esetben a tanulók maguk állnak elő a megoldással. A második és harmadik megoldás is hasonló ötleten alapul, bár a harmadikban a páronként különböző megoldás megtalálásához némi tanári rávezetés mindenképpen ajánlatos. A negyedikben az összes egész megoldás felírása a cél, amelynek kapcsán beszélhetünk a tanulókkal a négyszám-tételről, illetve a jelen disszertációban is többször alkalmazott modulo m maradéktáblázatról. A diákok további rokon feladatokat – ilyen például a 3.0.13. Feladat – és alkalmazásokat kereshetnek, megvizsgálhatják ezek nehézségi fokát, vagy akár egy-egy – teljes általánosságban – bonyolultabbnak ígérkező kérdésfelvetés után megpróbálkozhatnak a probléma néhány egyszerűbb speciális esetének megoldásával.

A 3.0.11. Feladatban a Pell-egyenletnek egy, a korábbiaktól eltérő tárgyalását adom, valamint a 3.0.13. Feladat kapcsán az $\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$ gyűrűnek néhány számelméleti tulajdonságát használom fel, ezzel is mintegy előkészítve, felvezetve a későbbi Gauss-egészekről szóló részt. A fejezet megírása közben végig törekedtem a szerepeltetett módszerek sokszínűségének érzékeltetésére, mely módszerek sokszor egészen új távlatokba helyezték egy-egy problémának a vizsgálatát. A 3. fejezet zárásaként egy hosszabb, didaktikai megjegyzésekkel is gazdagon fűszerezett rész található. Az egyes feladatokat módszertani szempontból ismételten áttekintem, részletesen kibontva – a felmerülő nehézségek mellett – a diofantikus témakör tanításának számos pozitív hozadékát. Véleményem szerint a diofantikus témakör tanítása kimondottan alkalmas lehet arra, hogy rávezesse a tanulókat, hogy bizonyos problémákat hogyan lehet összekapcsolni, a különféle módszereket ügyesen kombinálni, általánosítani, új problémákat felvetni, akár olyanokat is, amelyek számukra talán most még megoldhatatlan akadályokat jelentenek. Egy-egy ilyen feladatsor tanítása közben maga az oktató is rengeteget tanul, folyamatosan fejlesztheti a saját eszköztárát is, ami elengedhetetlen minden tehetséggondozásban szerepet vállaló matematikatanár számára.

4. Diofantikus egyenletek megoldása elemi úton és Gauss-egészek segítségével a középiskolai szakkörön

A 4. fejezetben ismételten diofantikus egyenletek megoldásán keresztül mutatom be, hogy milyen jellegű számelméleti problémák esetén alkalmazhatóak sikerrel a Gauss-egészek a középiskolai matematika szakkörön, vagy akár egy matematikaversenyen [R3]. Az általános tantervű gimnáziumi törzsanyagban már a komplex számok sem szerepelnek, így természetesen a Gauss-egészekről sem esik szó. Ha azonban eltekintünk az egyetemen megszokott precíz felépítéstől, és a nehezebb tételekre csak bizonyítás nélkül hivatkozunk, akkor már viszonylag kevés előismeret birtokában is szép és érdekes számelméleti feladatokat oldhatunk meg. A fejezet első részében szereplő feladatoknak először megadtam a „szokásos” elemi megoldását, és itt a levezetések során lehetőség szerint igyekeztem ismét többféle elemi módszert és általánosítást is mutatni. Ezek egyrészt segíthetnek egy-egy probléma mélyebb megértésében, másrészt a szakkörön való szerepeltetésük motiválhatja a legtehetségesebb, a matematika iránt leginkább elkötelezett tanulókat arra, hogy bátran kísérletezzenek. Minden versenyfeladatnál szerepeltetek egy Gauss-egészekkel történő megoldást is. Mindezek illusztrálására szeretném külön is kiemelni az alábbi problémát, amely az egyik legrangosabb hazai versenyen, az Arany Dániel Matematikaversenyen került kitűzésre.

4.0.6. Feladat. *Legyenek p, q olyan prímszámok, melyekre $3 \leq p < q$, továbbá $p+1$, $q+1$ egyaránt osztható 4-gyel. Mutassuk meg, hogy $q^2 - p^2$ nem lehet négyzetszám!*

A versenyfeladatra három lényegesen különböző megoldást adtam. Az első akár egy emelt óraszámú fakultációs csoportban is szerepeltethető, mivel lényegében végig csak elemi számelméleti fogalmakkal operálunk, úgymint a legnagyobb közös osztó, az egyértelmű prímfaktorizáció, illetve azon egyszerű észrevétel, hogy a $4k-1$ alakú számok nem állnak elő két négyzetszám összegeként. Véleményem szerint a feladatnak ezen megoldása egyszerűsége ellenére igen jól használható a tanításban, hiszen sok, külön-külön talán egyszerűbbnek számító technikai fogás tárgyalható és gyakoroltatható egyidőben. A levezetés során alkalmazott fogalmakat és tételeket is jobban megerősíthetik és elmélyíthetik a tanulóink. A második megoldásban a pitagoraszi számhármasokat hívom segítségül, amely témakör sajnálatos módon nem szerepel még az emelt óraszámú érettségi követelmények között sem, mégis úgy tapasztaltam a napi tanítási gyakorlatban, hogy szerepeltetésük igen motiválóan hat a diákokra. A tanórákat helyenként matematikatörténeti érdekességekkel is színesebbé tehetjük, és erre a pitagoraszi számhármasok kiváló terepet biztosít, például a probléma természetes általánosításaként, akár a híres és sokáig megoldatlan Fermat-sejtésről is bővebben szólhatunk. Érdemes hangsúlyozni, hogy a pitagoraszi számhármasok képlettel történő megadása után számos kapcsolódó problémát is megvizsgálhatunk a tanulókkal. A harmadik megoldás már kifejezetten ezen irányba mutat, hiszen a Gauss-egészek felhasználásával kinyílik a lehetőségek széles spektruma, természetesen csak az erre kiemelkedően fogékony, és nagyfokú előzetes matematikai tudással rendelkező tagozatos tanulócsoportok számára.

A feladat három különböző megoldásának felírása után, annak egy érdekes variánsát (4.0.8. Feladat a disszertációban) vizsgáltam meg, amely végül természetes módon vezetett el a diofantikus egyenletek egy speciális osztályához, az $x^2 + k = y^3$ alakú ún. Mordell-egyenletekhez. Ezeknek az egyenleteknek jellemzően elemi úton igen bonyolult megadni a megoldását, sokkal hatékonyabb Gauss-egészek, vagy más alaptételes gyűrű segítségével dolgozni. Egy érdekes alkalmazásként megadom néhány k értékre a Mordell-egyenlet megoldásait. A $k = -7$ (4.0.10. Feladat) esetben ismertetek egy szép elemi megoldást, míg $k = 1$ (4.0.11. Feladat) esetén a problémára két lényegesen különböző megoldást adok, melyek közül az első meglehetősen összetett „elemi", míg a másik, a Gauss-egészeket felhasználó egyszerűbb bizonyítás. Az elemi megoldás közben a végtelen leszállás módszerével – mintegy „melléktermékként" – az $n^4 - 6m^2n^2 - 3m^4 = 1$ egyenletnek a nemnegatív egész megoldásai is adódnak. Bátran állíthatom, hogy az egész dolgozat elkészítése során a $k = 1$ eset „elemivé tétele" jelentette számomra a legnagyobb szellemi kihívást, egyszersmind talán itt ízlelhettem meg legjobban a valódi matematikai alkotómunka örömét, a problémamegoldás sokszor buktatókkal teli, mégis izgalmas folyamatát.

A fejezet végén egy, a Fibonacci-sorozattal kapcsolatos érdekes állítás egyik speciális esetét bizonyítom, mely így középiskolában is elmondhatóvá válik. Kimondottan nehéz és sokat vizsgált számelméleti kérdés volt az utóbbi időben, hogy a Fibonacci-sorozat elemei között melyek lesznek teljes hatványok. Ennek az általános tételnek egy speciális (ti. a négyzetszámokra vonatkozó) esetére valójában már az 1950-es években ismert volt a válasz. Lényegében egymástól függetlenül mutatta meg Cohn, Ljunggren és Wyler [2], hogy ha $n \geq 1$, akkor a Fibonacci-sorozatban $f_1 = 1$, $f_2 = 1$ és $f_{12} = 144$ az összes négyzetszám. A tételnek páros indexekre történő igazolását szerettem volna – a szerzők által adott meglehetősen komplikált gondolatmenettől eltérő módon – a középiskolások számára emészthetőbb formába önteni. Ehhez a Fibonacci-számok közötti jó néhány, a középiskolában önmagában is érdekes összefüggést, a 4.1.5. Lemmát [4], de mindenekelőtt az alábbi állítást használtam fel.

4.1.6. Állítás. *Az $x^4 - 5y^4 = 1$ diofantikus egyenletnek a pozitív egész számok körében csak az $x = 3$ és $y = 2$ megoldása.*

Úgy vélem, hogy az itt szereplő bizonyítás legfőbb erénye talán – a 4.0.11. Feladathoz hasonlóan – az, hogy lényegében mindvégig csak elemi módszerekre támaszkodik. Ezúttal is igyekeztem megfelelni annak az egész disszertáción átívelő kívánalomnak, hogy egy-egy nehezebb állítás indoklása is jól követhető legyen egy megfelelő előképzettséggel rendelkező középiskolás diák számára. A levezetés során ismételten felhasználom a pitagoraszi számhármasokról tanultakat, illetve a 4.1.5. Lemmát, amelynek apropója okán akár egy másik irányba is elindíthatjuk a diofantikus egyenletek vizsgálatával kapcsolatos szakköri munkánkat.

5. Versenyfeladatok szakköri feldolgozása

Az 5. fejezet három kisebb, de egymással szervesen összefüggő egységet képez. Az első részben olyan versenyfeladatok kerülnek terítékre, amelyek kapcsán számos probléma saját kérdésfelvetésből született. Az itt szereplő feladatkavalkád célja, hogy a különféle megoldásokon, általánosításokon keresztül bemutassa a diofantikus egyenleteknél alkalmazott módszerek sokszínűségét, minél szélesebb körből választva a számelméleti ötleteket, fogásokat. Személyes tapasztalatom, hogy a matematika szakkörön résztvevők döntő többsége csak akkor szereti igazán az egyenletmegoldást, ha az kihívást jelent, vagy kellően változatos, és többféle megközelítésben is tárgyalható. Reményeim szerint a fejezet nyitó problémája teljes mértékben megfelel a fentebb megfogalmazott célkitűzéseknek.

5.1.1. Feladat. *(Matematika Tanítása* 2010*, 5. szám)*
Bizonyítsuk be, hogy minden $n \geq 2$ egész szám esetén léteznek olyan x, y, z pozitív egész számok, amelyekre $x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz + 2^n$.

Négy különböző bizonyítást is sikerült adnom, amelyek közül az utolsó kettő egyúttal általánosítását jelenti a folyóiratban kitűzött feladatnak. Megvizsgáltam a problémához szervesen kapcsolódó $x^n + y^n + z^n = nxyz$ alakú egyenleteket néhány pozitív egész n értékre, különös tekintettel az $n = 2$ esetre, ahol ismételten többféle megoldási módszert, fogást igyekeztem felvonultatni. A következő feladatok is ezen szempontok mentén kerültek górcső alá.

5.1.14. Feladat. *(OKTV* 2004*) Adja meg az összes olyan n természetes számot, amelyre a $3^n + 63$ kifejezés értéke négyzetszám!*

Ez a versenyfeladat – a Mordell-egyenletekhez hasonlóan – jól mutatja, hogy látszólag apró változtatás mellett (ha például $c = 63$ helyett más konstanst írunk) is kaphatunk merőben más jellegű, helyenként igen változatos nehézségű problémát. Például ha $c = -1$ (5.1.16. Feladat), akkor négyzetszámok helyett akár már teljes hatványokkal is sikerrel járhatunk, míg $c = -2$ (5.1.17. Feladat) esetén ismételten találkozhatunk a Pell-egyenlet, illetve a modulo m maradéktáblázat egy újabb alkalmazásával. Sőt, egy másik úton elindulva – az 5.1.19. Lemma bizonyításán keresztül – az $\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$ gyűrűben dolgozva is megadhatjuk a megoldást.

5.1.22. Feladat. *Bizonyítsuk be, hogy az $x^5 - y^2 = 4$ egyenlet nem oldható meg az egész számok körében. (Szerb versenyfeladat)*

Megítélésem szerint ez a versenypélda kimondottan alkalmas arra, hogy szakköri órák keretében dolgozzuk fel a különböző megoldásokat. Az első megoldási módszer, hogy a modulo m számolunk „tipikus” megoldási stratégia lehet akkor, amikor azt kell igazolnunk, hogy egy egyenletnek nincs megoldása az egész számok körében. Vélhetően erre a megoldásra gondolhattak a feladat kitűzői. A második megoldás mutatja, hogy egy alkalmas modulus megtalálása után, a Legendre-szimbólum felhasználásával általánosíthatjuk is a problémát. A harmadik megoldásra egyáltalán nem könnyű rájönni, az ismertetése előtt – akár csak érintőlegesen is – érdemes egy rövid kitekintést tenni speciális alakú számok lehetséges prímosztóinak vizsgálatában. A negyedik, Gauss-egészekkel történő megoldás igazi „nagyágyú”. Alkalmazása ugyan némileg mesterkéltnek hat, de kétségtelen, hogy általa egy gyökeresen más megvilágításba helyezhetjük az eredeti problémát.

A korábban leírtaknak megfelelően erre a fejezetre is érvényes az a megállapítás, hogy még az ismert feladatokhoz is igyekeztem újabb megoldásokat keresni, illetve, ha erre lehetőség kínálkozott, további általánosításokkal, kapcsolódási pontokkal azokat kiegészíteni.

Az alábbi feladatok még ezen törekvéseimen is túlmutatnak, azaz többnyire saját készítésű feladatok. A felsoroltak közül az 5.1.30. Feladat különösen közel áll hozzám, hiszen a középiskolai matematika csúcsának tekinthető nemzetközi diákolimpiának egyik feladatából merítettem a fő inspirációt.

5.1.21. Feladat. *Oldjuk meg a pozitív egész számok körében az alábbi egyenletrendszert.*

$$\begin{aligned} x - 1 &= y^2 \\ 2x^2 &= z^2 + 1 \,. \end{aligned}$$

5.1.26. Feladat. *Tekintsük az $1, 2, \ldots, n$ pozitív egész számokból képzett összes permutációt. Milyen $n \geq 2$ egész esetén lesz a permutációkban az összes inverziók száma négyzetszám?*

5.1.27. Feladat. *Mutassuk meg, hogy az alábbi diofantikus egyenletnek nincs megoldása a természetes számok körében.*

$$x! + 32 = 32(x+1)^y \,.$$

5.1.30. Feladat. *(A 2006. évi IMO 4. feladata alapján)*
Legyen adva az $a_0 = 4$, $a_1 = 11$, $a_2 = 37$ kezdőelemekkel és az

$$a_{n+2} = 7a_{n+1} - 14a_n + 8a_{n-1}$$

rekurzióval definiált sorozat. Keressük meg az összes olyan $n \geq 3$ egész számot, amelyre a_n négyzetszám.

5.1.31. Feladat. *Oldjuk meg a természetes számok körében az alábbi diofantikus egyenletet*

$$2^x 5^y - 1 = 7^z\,.$$

Az 5. fejezet második és harmadik része versenyfeladatokat dolgoz fel. Ezzel a témakör egy lehetséges bővítését mutatom be azzal a feltett szándékkal, hogy a jövőben a saját tanítványaimmal közösen, az itteni felépítésben dolgozzuk fel a matematikának ezen fejezetét (lásd 6. fejezet).

A tárgyalást végig didaktikai elemzések kísérik, ezek részben a feladatok megoldása közben, részben utána, néhol egyes részek végén külön is szerepelnek, de mindvégig központi szerepet játszanak az egész disszertációban. Egyes visszatérő módszereket, például a Pell-egyenlet alkalmazását több szempontból is alaposan körbejártam. A különféle megoldások, megközelítési módok leírásánál minden esetben igyekeztem különös tekintettel lenni arra, hogy amennyire csak lehetséges, támaszkodjam a diákoktól várható gondolatmeneti sémákra, illetve többféle megoldás bemutatása által mélyítsem, és gazdagítsam a már meglévő sémák közötti kapcsolatot. Bízom benne, hogy a szakköri feldolgozás tapasztalatait felhasználva a későbbiekben a diákok eredményesebben szerepelhetnek majd a különféle országos versenyeken, valamint megfelelő alapokkal, mélyebb matematikai háttérrel felvértezve jelentkezhetnek majdan a felsőoktatási intézményekbe.

Az 5. fejezet harmadik részében egy olyan feladatsort állítottam össze, amelynek feladatait különféle nemzetközi matematikaversenyekről válogattam. A válogatásban az interneten található anyagok (IMO) mellett az [1], [3] és [6] monográfiák voltak segítségemre. Az összeállítás során igyekeztem a fokozatosság elvét szigorúan betartani, vagyis először az általam egyszerűbbnek gondolt, később pedig a nehezebbnek ítélt problémákat gyűjtöttem csokorba. A második résztől eltérő módon itt elsősorban nem az egyes problémákra adható többféle megoldási stratégia lehetőségét szerettem volna hangsúlyozni, hanem a megoldási módszereknek azt a sokszínűségét, amellyel általában a hagyományos tanórai keretek között aligha találkozhatunk. A feladatsor után megoldási útmutató is szerepel, amelyekben a megoldások mellett azok főbb gondolatait, a bizonyítások lényeges részeit emelem ki. A feladatok megoldásait a disszertációban korábban bemutatott eljárások és fogások egyfajta esszenciájaként szerettem volna megjeleníteni.

6. A témakör egy lehetséges feldolgozása szakköri órák keretében

A 6. fejezet arról a – hét foglalkozásból álló – szakköri tevékenységről szól, amelyet 2018. november közepétől kezdődően két hónapon keresztül végeztem az iskolámban, a budapesti Baár-Madas Református Gimnáziumban. A szakkörön általában kiváló képességű, a különféle matematikai problémák iránt különösen fogékony, érdeklődő tanulók vettek részt. A foglalkozások anyagát igyekeztem úgy megválasztani, hogy az (különösen a szakkör kezdetén) szorosan illeszkedjen a tanulók korábbi ismereteihez, annak értelemszerű kibővítését tartalmazza. Másrészről egy tehetséggondozásra irányuló szakkörnek feltétlenül olyan új anyagrészek és módszerek elsajátítására is kell fókuszálnia, ami által gazdagodik a problémamegoldási repertoár, amelyek birtokában a tanulók eredményesen szerepelhetnek az országos versenyeken, illetve a legkülönfélébb megmérettetéseken. Ezen irányelvek mentén válogattam és állítottam össze az órai feladatsorokat, amelyek a disszertáció szinte mindegyik fejezetéből bőségesen tartalmazott érdekes, feldolgozásra váró problémákat (lásd 9.3.). Helyenként, – például a pitagoraszi számhármasok és a Pell-egyenlet tárgyalása kapcsán – a tanulók még némi ízelítőt is kaphattak az egyetemi „magasabb” matematikából, amely egyúttal a szakkör tehetséggondozó, versenyelőkészítő jellegét is nagymértékben erősítette.

A szakköri foglalkozások egy-egy nagyobb, egymással szorosan összefüggő egységekre történő bontásban kerültek bemutatásra. Az első két foglalkozáson a „szorzat=szám”, illetve a „szorzat=hatvány” típusú egyenletek kerültek a vizsgálat középpontjába, míg a harmadik és negyedik alkalommal a modulo m maradékosztályok, a különféle becslések segítségével megoldható diofantikus egyenletek, és a végtelen leszállás módszere került górcső alá. A pitagoraszi számhármasok, valamint a Pell-egyenletek vizsgálata képezte az ötödik és hatodik, illetve a hetedik szakköri óra anyagát, utóbbi igazi egyetemi kitekintőként, a látókör kibővítéseként szolgált. A feladatmegoldás egyes fázisaiban a módszertani szempontból (is) lényegesnek gondolt tanulói és tanári reakciókra igyekeztem a leírás során végig kellő hangsúlyt fordítani.

Az egyes foglalkozások feladatsorai, a beadható házi feladatokra adott tanulói megoldások a Függelékben szerepelnek, de ugyanitt található a 9.3. alfejezet is, amely a tárgyalásra került problémák disszertációbeli elhelyezkedésének visszakeresését segítheti.

A 6.3. alfejezetben összegzem azokat a tapasztalatokat, amelyeket a témakör tanítása során szereztem. Reményeim szerint összességében sikerült ötletekben és módszerekben gazdag, a matematika ezen területének szépségét és sokszínűségét jól visszatükröző – középiskolások számára is érthető és érdekes – problémákat kiválogatni, és közösen a diákokkal mindezeket eredményesen feldolgozni. Meggyőződésem, hogy a szakköri foglalkozások tanulságait felhasználva, a későbbiekben a tanítványaim még sikeresebben szerepelhetnek majd a különféle országos versenyeken, és megfelelő alapokkal, sokkal mélyebb matematikai háttérrel felvértezve jelentkezhetnek majdan a felsőoktatási intézményekbe.

Irodalomjegyzék

A szerzőnek a disszertációhoz kapcsolódó publikációi:

[R1] R. Rakamazi, *Diophantine equations concerning various means of binomial coefficients*, Teaching Mathematics and Computer Science, University of Debrecen, (2014), 71 – 79.

[R2] R. Rakamazi, *Solving Diophantine equations with binomial coefficients in study group sessions using both elementary and higher mathematical methods*, Teaching Mathematics and Computer Science, University of Debrecen, (2016), 1 – 12.

[R3] R. Rakamazi, *Solving Diophantine equations with elementary methods and with* *the help of Gaussian integers in high school mathematics study group session*, Problem Solving in Mathematics Education (2013), 163 – 175.

A szerző egyéb publikációi:

[R4] R. Rakamazi, *Analysis of a problem in plane geometry discussed in an 11th grade group study session*, Teaching Mathematics and Computer Science, University of Debrecen, 11/2, (2013), 181 – 193.

DOI: 10.5485/TMCS.2013.0339

A szerzőnek a disszertációhoz kapcsolódó előadásai:

- *Binomiális együtthatók különféle közepeivel kapcsolatos diofantikus egyenletek*, Matematika és Informatika Didaktikai Kutatások Konferencia, Eger, 2014.
- *Gauss-egészek segítségével megoldható diofantikus egyenletek a középiskolai szakkörökön*, Matematika és Informatika Didaktikai Kutatások Konferencia, Nagyvárad, 2013.

További irodalom a tézisfüzethez:

[1] T. Andreescu, D. Andrica, and I. Cucurezeanu, *An Introduction to Diophantine Equations*, Springer (2010).

[2] J. H. E. Cohn, *The Diophantine Equation* $x^4 - Dy^2 = 1$, Acta Arithmetica 78, (1997), 401 – 403.

[3] Faragó L., *A számelmélet elemei*, Tankönyvkiadó Budapest, (1967).

[4] Freud R., Gyarmati E., *Számelmélet*, Nemzeti Tankönyvkiadó Budapest, (2006), 322 – 323.

[5] Róka S., 2000 *feladat az elemi matematika köréből*, Typotex Budapest, (2006), 29 – 33.

[6] W. Sierpínski, 200 *feladat az elemi számelméletből*, Tankönyvkiadó, Budapest, (1968), 19 – 26.

Unconventional Diophantine equations and their discussion in study group sessions

1. Introduction

In Hungary, talent management and competitions go back to a long way, with a significant heritage in both areas. The country is home to several outstanding mathematical workshops. Domestic competitions excel both in quantity and standards. During my career, I also had the honor to lead study group and preparation sessions for various competitions. This dissertation was mostly inspired by the experiences of these classes. One of my objectives was the manifold examination of Diophantine equation problems in high school competitions (which topic is my personal favorite) and to demonstrate the applicability of higher mathematical methods through a few selected problems, and how these can be used in talent management and study group sessions. I solved and structured the problems and performed their didactic analysis completely by myself. The well-known competition challenges are supplemented by many of my own assignments. I strongly believe that such problems are suitable to wake students' interest, to provide a deeper insight, and to develop problem solving skills in general. Additionally, it supports teachers in their talent management endeavors, as well. One of my priorities is to compare and evaluate various solutions and to examine generalizations. I have attempted to meet this requirement throughout the dissertation. Most problems in Chapters 2, 3, and 4 are created by myself, and the results were published in papers [R1], [R2], and [R3], respectively.

2. Diophantine equations concerning various means of binomial coefficients

The primary aim of Chapter 2 was to demonstrate with elementary methods that the arithmetic, geometric, and harmonic means of two distinct binomial coefficients $\binom{n}{2}$ are of the same form infinitely often. However, the solution for square means is unknown for the time being. For arithmetic means, I managed to provide all solutions. Also, for the case of three terms, I found infinitely many nontrivial solutions for certain types of binomial coefficients, as stated below. (Note that for easier identification, all problems, theorems, and lemmas are numbered as in the dissertation.)

Problem 2.0.2. *Show that the Diophantine equation*

$$\frac{\binom{x-d}{2}+\binom{x}{2}+\binom{x+d}{2}}{3}=\binom{y}{2}$$

has infinitely many solutions, where $x \geq d > 0$.

In the proof, I used the following lemma which is based on a beautiful coordinate-geometric observation.

Lemma 2.0.3. *All integer solutions of equation $x^2+6y^2-z^2=0$ are given by*

$$\begin{aligned} x &= \frac{6u^2-24uv-v^2}{\delta}\cdot t \\ y &= \frac{-12u^2-2uv+2v^2}{\delta}\cdot t \\ z &= \frac{30u^2+5v^2}{\delta}\cdot t \end{aligned}$$

where u and v are integers, $v \geq 0$, $\gcd(u,v)=1$,
$\delta=\gcd(6u^2-24uv-v^2,-12u^2-2uv+2v^2,30u^2+5v^2)$, and t is an arbitrary integer. The solutions $x=\frac{6u^2-24uv-v^2}{\delta}, y=\frac{-12u^2-2uv+2v^2}{\delta}, z=\frac{30u^2+5v^2}{\delta}$ are called primitive solutions which are pairwise distinct, and all integer solutions are obtained as the multiples of the primitive solutions.

As a practising high school teacher, I emphasize that I strived to use elementary methods most of which can be discussed within the framework of high school mathematics education, dominantly in study group sessions, of course. Most proofs opened up a further, interesting outlook to other fields in mathematics. For example, the arithmetic mean can be associated with the Pythagorean triples, the harmonic mean with Pell's equation, while the geometric mean can lead to recursions. In my opinion, these problems may be methodically suitable for "research" projects for students looking for truly serious, challenging assignments. At the same time, we also have to count on the possibility that – due to the nature of the problems – they may feel challenged by seemingly unsolvable puzzles even in an early stage. Actually, this is the reason why I examined the means only for two terms and only for the lower value number 2 of the binomial coefficients. Further generalizations would require significantly more complex mathematical tools.

3. Solving Diophantine equations with binomial coefficients in study group sessions using both elementary and higher mathematical methods

Chapter 3 can be regarded as the continuation of the previous chapter in the sense that it carries on the discussion of Diophantine equations containing binomial coefficients. I maintain the importance of discussing equations which – at least partially – can be treated by especially talented students in high school study group sessions. I attempted to show the diversity of mathematical methods through several examples, which can be used to solve many problems, mainly of mathematical competitions. One of the focal points of the chapter is the solution of the following problem:

Problem 3.0.3. *Show that the Diophantine equation*

$$\frac{\binom{x}{2}+\binom{y}{2}}{2}=z^2$$

has infinitely many solutions, where $x \neq y$ *and* $x, y \geq 2, \quad x, y, z \in \mathbb{Z}$.

During the solution of the problem, the Diophantine equation $A^2+B^2=C^2+2$ pops up, to which I managed to provide an infinite number of integer solutions, at first with pure elementary methods, while later, by using quadratic forms, I provided all integer solutions. It is apparent, that in this case I made a little detour towards university material. These methods can by no means be taught in high school.

During the creation of the problems I also tried to follow the principle of gradualness, i.e. to start with easier assignments that can possibly be solved by elementary methods and to continue with more complex problems, mostly requiring higher mathematical structures. This is illustrated nicely with the following problem, where I managed to find four different solutions, the last of which – posing a more general problem – will lead to all integer solutions of the equation.

Problem 3.0.10. *Show that the Diophantine equation*

$$\binom{x}{2} + \binom{y}{2} = z^2$$

has infinitely many solutions, where $y > x \geq 2, \quad x, y, z \in \mathbb{Z}\,.$

The four methods show that different procedures can be suitable to motivate students to try their own ways, to ask further questions, and to work on solving new problems. Thus they can understand that a little twist in the conditions will result in a vast array of problems, ranging from easier to difficult ones, sometimes requiring deep methods or can remain even unsolved. Accordingly, the first solution is provided by a well-known algebraic transformation, where we use a relatively simple substitution. This solution may be discussed in groups with lower skill levels, where students possibly discover the solution independently. The second and third solutions are based on a similar idea, though the third one will most probably require the teacher's help. In the fourth one, the goal is to provide all integer solutions, which may lead the discussion towards the four number theorem or the modulo m remainder table. Students can explore further similar problems – for example Problem 3.0.13 – and applications, they can examine the difficulty level, or after presenting a general complex problem, they can attempt to solve its easier special cases.

In Problem 3.0.11 I present another handling of Pell's equation, while in Problem 3.0.13 I use a few arithmetical features of the ring $\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$ to prepare the later discussion of Gaussian integers. While writing this chapter, I strived to show the diversity of methods, which often opened up new horizons in the examination of a given problem.

To close Chapter 3, I included a longer part with didactic notes, wherein I reiterate the methodology of each problem, going into the details of positive yields and possible difficulties of teaching Diophantine topics. In my opinion, teaching this field can be especially suitable to make students understand the links between certain problems, to combine various methods, to generalize, or to pose new problems, even ones they can't solve with their current skills. While teaching this stuff, the instructor himself/herself learns a lot, continuously expanding his/her own range of tools, which is essential for every mathematics teacher engaged in talent management.

4. Solving Diophantine equations with elementary methods and with the help of Gaussian integers in high school mathematics study group sessions

In Chapter 4, I continue to use Diophantine equations to show to what type of number theory problems can Gaussian integers be applied in high school study groups or at a mathematics competition [R3]. The basic high school material doesn't even contain complex numbers, therefore, Gaussian integers are not mentioned, either. However, if we forgo the detailed structure used at universities, and refer to more difficult theorems without proofs, we will be able to solve beautiful and interesting problems in number theory, even with a relatively scarce background knowledge. For the problems in the first part of the chapter, I provided first the "usual" elementary solutions, then I went on to demonstrate various elementary methods and generalizations. These, on the one hand, may help the deeper understanding of a given problem, and on the other hand, can motivate the most talented and keen students to experiment freely.To every competition problem, I also present a solution using Gaussian integers. To illustrate this, I display the following problem of the high ranking Arany Dániel Mathematics Competition.

Problem 4.0.6. *Let p and q be prime numbers where $3 \leq p < q$ and both $p+1$ and $q+1$ are divisible by 4. Show, that $q^2 - p^2$ cannot be a square number!*

I give three essentially different solutions to the problem. The first one may be discussed in an elective course since we operate only with elementary number theory tools, such as greatest common divisor, prime factorization and the simple observation that numbers of the form $4k-1$ cannot be written as the sum of two squares. Despite of the simplicity of the solution of this problem, it can support teaching to a great extent, as it gives way to the discussion and practice of several basic technical methods at the same time. Students can acquire and internalize the terms and theorems used during the solution. In the second solution, I use the Pythagorean triples, which topic unfortunately doesn't form part of the high school requirements, not even for advanced level classes. However, in my everyday experience, discussing them has a motivating effect for students. Classes can be made more interesting with stories from mathematical history, and Pythagorean triples are a great example of this. To generalize the problem in a natural way, we can mention the famous and for a long time unsolved Fermat's Last Theorem. It is also worth emphasizing that after deducing the formula for Pythagorean triples, we can examine several other related problems with the students. The third solution definitely leads towards this direction. Using Gaussian integers will open up a wide spectrum of applications for especially motivated students with an advanced level of mathematical knowledge.

After the presentation of the three different solutions of the problem, I examined an interesting variant (Problem 4.0.8. in the dissertation), which finally led to a special class of Diophantine equations of the form $x^2 + k = y^3$, called Mordell's equations. Solutions of these equations with elementary methods are generally quite difficult. Using Gaussian integers or any other unique factorization domain is more efficient. To present an interesting application, I solve Mordell's equation for a few values of k. I describe a beautiful elementary solution for $k = -7$ (Problem 4.0.10.), while for $k = 1$ (Problem 4.0.11.), I show two significantly different solutions: a very complex elementary one and a simpler proof using Gaussian integers. As a "side product", the infinite descent in the elementary proof yielded also the non-negative integer solutions of equation $n^4 - 6m^2n^2 - 3m^4 = 1$. I believe that "elementarization" of the case $k = 1$ represented the greatest intellectual challenge of this research and offered the most joy of true mathematical creativity at the same time. It was a process full of setbacks, which I found very intriguing.

At the end of the chapter I offer a proof of a special case of an interesting statement about Fibonacci sequences, making it presentable for high school curricula. An extremely difficult and widely examined number theory problem of the recent period is to establish the perfect power elements in the Fibonacci sequence. The special case for square numbers was answered already in the 1950's: Cohn, Ljunggren and Wyler (see [2]) showed independently that $f_1 = 1$, $f_2 = 1$, and $f_{12} = 144$ are the only squares in the Fibonacci sequence. My goal was to present a proof of this theorem for even indices in a more suitable form for high school students in contrast with the very sophisticated train of thoughts by the authors. To do this, I used several connections between Fibonacci numbers of independent interest, Lemma 4.1.5. [4], and last but not least, the following statement:

Statement 4.1.6. *The only solution of the Diophantine equation $x^4 - 5y^4 = 1$ is $(3, 2)$ among the positive integers.*

I think, the main advantage of this proof – similarly to Problem 4.0.11. – is that it is based only on elementary methods. I tried to meet the requirement of clear presentation and easy-to-follow justification even of more difficult statements to make them accessible for high school students with adequate background knowledge. I made a repeated use of Pythagorean triples and of Lemma 4.1.5, which may even lead to another direction of the work of the study group session about Diophantine equations.

5. Discussion of competition problems in study group sessions

Chapter 5 comprises three shorter, but strongly intertwined entities. The first part discusses competition problems most of which were generalized by me. The aim of this rich set of problems is to demonstrate the diversity of tools used for Diophantine equations by presenting different methods, generalizations, ideas, and useful "tricks". In my experience, most students in the study groups are interested in solving equations only if these problems are challenging, or if they can be solved using different approaches. Hopefully, the opening problem of the chapter fully meets the above objectives.

Problem 5.1.1. *(Teaching of Mathematics, vol.* 5 *of* 2010*)*
Prove that for all integers $n \geq 2$ there exist positive integers $x, y,$ and z such that $x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz + 2^n$.

I provided four different proofs, where the last two are also generalizations of the original problem. I examined the related equations $x^n + y^n + z^n = nxyz$ for a few positive integer values of n, especially for $n = 2$, showing again several different solutions. I analysed the following problems accordingly, as well.

Problem 5.1.14. *(OKTV* 2004*) Find all $n \in \mathbb{N}$, where $3^n + 63$ is a perfect square!*

Similarly to Mordell's equations, this competition problem is an excellent demonstration of how seemingly minor changes (for example substituting $c = 63$ with another constant) can result in completely different problems of varying difficulties.

For example, for $c = -1$ (Problem 5.1.16.) we can even handle the problem for all perfect powers instead of squares, whereas for $c = -2$ (Problem 5.1.17.) a new application of Pell's equation and the remainder table modulo m will come up. Moreover, via Lemma 5.1.19., the solution can be provided using the ring $\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$.

Problem 5.1.22. *Prove that the equation $x^5 - y^2 = 4$ has no integer solution. (Serbian competition problem)*

I think, this competition problem is especially suitable for discussing different solutions in study group sessions. The first method involves a modulo m consideration as a typical solution strategy for proving that an equation has no integer solution. Presumably, the creators had this idea in mind. The second solution shows that after finding a suitable modulus, the problem can be generalized by using the Legendre symbol. The third solution doesn't come easy at all. It's worth to prepare it by making a brief detour towards the examination of the possible prime divisors of numbers of a special form. The fourth solution using Gaussian integers is a true ace. Though its application seems a little artificial, but it undoubtedly makes us see the problem in a different light.

My aim of finding new solutions even for already known problems is still valid for this chapter. Therefore, where it was possible, I supplemented known solutions with further generalizations and connecting points.

The following problems surpass even these endeavors, i.e. they are mostly own creations. Problem 5.1.30. is especially close to my heart, as it was mainly inspired by a problem of the International Mathematical Olympiad which can be considered as the very top of high school mathematics.

Problem 5.1.21. *Solve the following system of equations in integers!*

$$\begin{aligned} x - 1 &= y^2 \\ 2x^2 &= z^2 + 1\,. \end{aligned}$$

Problem 5.1.26. *Consider all permutations of $1, 2, \ldots, n$. Find all $n \in \mathbb{N}$ where $n \geq 2$ and the number of all inversions is a perfect square.*

Problem 5.1.27. *Show that the following Diophantine equation has no nonnegative integer solution:*

$$x! + 32 = 32(x+1)^y \, .$$

Problem 5.1.30. *(Based on Problem* 4 *of IMO* 2006*)*
Let $a_0 = 4$*,* $a_1 = 11$*,* $a_2 = 37$*, and consider the sequence defined by*

$$a_{n+2} = 7a_{n+1} - 14a_n + 8a_{n-1} \, .$$

Find all integers n*, where* $n \geq 3$ *and* a_n *is a perfect square.*

Problem 5.1.31. *Solve the following Diophantine equation in natural numbers:*

$$2^x 5^y - 1 = 7^z \, .$$

Each of the second and third parts of Chapter 5 elaborates a set of selected competition problems. This is a possible extension of the topic to explore this mathematical field together with my students (see Chapter 6).

The discussion is supplemented with didactic analysis throughout. These are at times placed within the solution of the problems, at times they follow those, and at times you can read them separately, at the end of the given section. They have one thing in common: they play a focal role in the entire dissertation. Some recurring methods, for example, applications of Pell's equation were presented in several different approaches.

I tried to write the various solutions and approaches according to the train of thoughts expected from students. I also strove to deepen and enrich links between already existing schemes by presenting several solutions. I hope that the experiences of such study group sessions will improve students' results at various national competitions, and will enhance and deepen their mathematical knowledge to qualify well for higher education.

In the third part of Chapter 5, I compiled a series of problems from various international mathematical competitions using online materials (IMO) and monographes [1], [3], and [6]. During the selection, I strictly followed gradualness, i.e. I started with simpler problems progressing towards more complex ones. Contrary to the multitude of solutions emphasized in the second part, in this section I rather focused on the diversity of methods generally not included in conventional curricula. I also added a solution guide, featuring the main ideas and crucial points of the proofs, as well. This is intended to be an essence of the techniques presented earlier.

6. An option for the introduction of the topic during study group sessions

Chapter 6 explores a study group activity of seven sessions I conducted for two months in my school, Baár-Madas Reformed Comprehensive Secondary School, starting in mid-November 2018. The study group is usually attended by students with excellent abilities, who are especially interested in solving mathematical problems. I tried to choose session materials that (especially for the early sessions) are linked to students' already existing knowledge and entail a self-explanatory extension thereof. At the same time, a talent-management study group should also aim for focusing on the acquisition of new material and methods enhancing students' problem-solving "toolkits", forming the foundation of their success in nationwide competitions and various contests. The session worksheets are comprised of interesting, challenging problems from all chapters of my dissertation (see 9.3.).

Here and there, for example when discussing Pythagorean triples and Pell's equation, students even got a glimpse of university material, which significantly reinforces the study group's talent management- and competition-preparation nature.

The study group sessions are presented in larger units. In the first two sessions, we discuss the equation types "product=number" and "product=power", while during the third and fourth sessions, we deal with the residue classes modulo m, Diophantine equations that can be solved by using various estimations, and proof by infinite descent. Pythagorean triples and Pell's equation were the subjects matter of our fifth, sixth, and seventh sessions, the latter rather served explicitly to extend students' horizon towards university material. In the individual phases of problem solutions, I attempted to place adequate emphasis on students' and teachers' reactions I deemed important from the methodology point of view (amongst others) throughout the description.

The worksheets of individual sessions, students' solutions of home projects are listed in the Appendix, along with sub-chapter 9.3. which may help tracking the discussed problems' location within the thesis.

Sub-chapter 6.3. is a summary of the experiences gained during teaching this topic. I hope that all in all, I managed to cherry-pick and process interesting problems abundant in ideas and methods, reflecting the beauty and diversity of this mathematical field, yet understandable at a middle-school level. I strongly believe that using the lessons learned from study group sessions, my students will become even more successful at various nationwide competitions allowing them to apply for admittance to higher education institutes with an adequate underlying knowledge and a strong mathematical background.

References

The author's publications in the topic:

[R1] R. Rakamazi, *Diophantine equations concerning various means of binomial coefficients*, Teaching Mathematics and Computer Science, University of Debrecen, (2014), $71-79$.

[R2] R. Rakamazi, *Solving Diophantine equations with binomial coefficients in study group sessions using both elementary and higher mathematical methods*, Teaching Mathematics and Computer Science, University of Debrecen, (2016), $1-12$.

[R3] R. Rakamazi, *Solving Diophantine equations with elementary methods and with the help of Gaussian integers in high school mathematics study group session*, Problem Solving in Mathematics Education (2013), $163-175$.

Other publications from the author:

[R4] R. Rakamazi, *Analysis of a problem in plane geometry discussed in an* 11*th grade group study session*, Teaching Mathematics and Computer Science, University of Debrecen, 11/2, (2013), $181-193$.

DOI: 10.5485/TMCS.2013.0339

The author's conference talks in the topic (in Hungarian):

• *Diophantine equations concerning various means of binomial coefficients*, Researches in Didactics of Mathematics and Computer Sciences, Eger, 2014.

• *Solving Diophantine equations with the help of Gaussian integers in high school mathematics study group session*, Researches in Didactics of Mathematics and Computer Sciences, Nagyvárad, 2013.

Further references to the thesis compilation:

[1] T. Andreescu, D. Andrica, and I. Cucurezeanu, *An Introduction to Diophantine Equations*, Springer (2010).

[2] J. H. E. Cohn, *The Diophantine Equation* $x^4 - Dy^2 = 1$, Acta Arithmetica 78, (1997), $401 - 403$.

[3] Faragó L., *A számelmélet elemei (Elementary Theory of Numbers)*, Tankönyvkiadó Budapest, (1967).

[4] Freud R., Gyarmati E., *Számelmélet (Number Theory)*, Nemzeti Tankönyvkiadó Budapest, (2006), $322 - 323$.

[5] Róka S., 2000 *feladat az elemi matematika köréből (*2000 *Problems in Elementary Mathematics)*, Typotex Budapest, (2006), $29 - 33$.

[6] W. Sierpínski, 200 *feladat az elemi számelméletből* , Tankönyvkiadó, Budapest, (1968), $19 - 26$.

DEBRECENI EGYETEM
EGYETEMI ÉS NEMZETI KÖNYVTÁR
H-4002 Debrecen, Egyetem tér 1, Pf.: 400
Tel.: 52/410-443, e-mail: publikaciok@lib.unideb.hu

Nyilvántartási szám: DEENK/161/2018.PL
Tárgy: PhD Publikációs Lista

Jelölt: Rakamazi Richárd
Neptun kód: MZ0KQG
Doktori Iskola: Matematika- és Számítástudományok Doktori Iskola
MTMT azonosító: 10063982

A PhD értekezés alapjául szolgáló közlemények

Idegen nyelvű, hazai könyvrészletek (1)

1. **Rakamazi, R.**: Solving Diophantine equations with elementary methods and with the help of Gaussian integers in high school mathematics study group sessions.
In: Problem Solving in Mathematics Education : Proceedings of the 15th ProMath conference 30 August-1 September, 2013 in Eger. Eds.: András Ambrus, Éva Vásárhelyi, Eötvös Loránd University, Faculty Of Science, Institute Of Mathematics ; Eger : Mathematics Teaching And Education Center Eszterházi Károly College Institute Of Mathematics And Informatics, Budapest, 163-175, 2014.

Idegen nyelvű tudományos közlemények hazai folyóiratban (2)

2. **Rakamazi, R.**: Solving Diophantine equations with binomial coefficients in study group sessions using both elementary and higher mathematical methods.
Teach. math. comput. sci. 14 (1), 1-12, 2016. ISSN: 1589-7389.
DOI: http://dx.doi.org/10.5485/TMCS.2016.0399

3. **Rakamazi, R.**: Diophantine equations concerning various means of binomial coefficients.
Teach. math. comput. sci. 12 (1), 71-79, 2014. ISSN: 1589-7389.
DOI: http://dx.doi.org/10.5485/TMCS.2014.0357

DEBRECENI EGYETEM
Egyetemi és Nemzeti Könyvtár

DEBRECENI EGYETEM

DEBRECENI EGYETEM
EGYETEMI ÉS NEMZETI KÖNYVTÁR
H-4002 Debrecen, Egyetem tér 1, Pf.: 400
Tel.: 52/410-443, e-mail: publikaciok@lib.unideb.hu

További közlemények

Idegen nyelvű tudományos közlemények hazai folyóiratban (1)

4. **Rakamazi, R.**: Analysis of a problem in plane geometry discussed in an 11th grade group study session.
   Teach. math. comput. sci. 11 (2), 181-193, 2013. ISSN: 1589-7389.
   DOI: http://dx.doi.org/10.5485/TMCS.2013.0339

A DEENK a Jelölt által az iDEa Tudóstérbe feltöltött adatok bibliográfiai és tudománymetriai ellenőrzését a tudományos adatbázisok és a Journal Citation Reports Impact Factor lista alapján elvégezte.

Debrecen, 2018.05.15.

DEBRECENI EGYETEM
Egyetemi és Nemzeti Könyvtár

UNIVERSITY of DEBRECEN

UNIVERSITY AND NATIONAL LIBRAY
UNIVERSITY OF DEBRECEN
H-4002 Egyetem tér 1, Debrecen
Phone: +3652/410-443, email: publikaciok@lib.unideb.hu

Registry number: DEENK/161/2018.PL
Subject: PhD Publikációs Lista

Candidate: Richárd Rakamazi
Neptun ID: MZ0KQG
Doctoral School: Doctoral School of Mathematical and Computational Sciences
MTMT ID: 10063982

List of publications related to the dissertation

Foreign language Hungarian book chapters (1)

1. **Rakamazi, R.**: Solving Diophantine equations with elementary methods and with the help of Gaussian integers in high school mathematics study group sessions.
   In: Problem Solving in Mathematics Education : Proceedings of the 15th ProMath conference 30 August-1 September, 2013 in Eger. Eds.: András Ambrus, Éva Vásárhelyi, Eötvös Loránd University, Faculty Of Science, Institute Of Mathematics ; Eger : Mathematics Teaching And Education Center Eszterházi Károly College Institute Of Mathematics And Informatics, Budapest, 163-175, 2014.

Foreign language scientific articles in Hungarian journals (2)

2. **Rakamazi, R.**: Solving Diophantine equations with binomial coefficients in study group sessions using both elementary and higher mathematical methods.
   Teach. math. comput. sci. 14 (1), 1-12, 2016. ISSN: 1589-7389.
   DOI: http://dx.doi.org/10.5485/TMCS.2016.0399

3. **Rakamazi, R.**: Diophantine equations concerning various means of binomial coefficients.
   Teach. math. comput. sci. 12 (1), 71-79, 2014. ISSN: 1589-7389.
   DOI: http://dx.doi.org/10.5485/TMCS.2014.0357

DEBRECENI EGYETEM * Egyetemi és Nemzeti Könyvtár *

UNIVERSITY of DEBRECEN

UNIVERSITY AND NATIONAL LIBRAY
UNIVERSITY OF DEBRECEN
H-4002 Egyetem tér 1, Debrecen
Phone: +3652/410-443, email: publikaciok@lib.unideb.hu

List of other publications

Foreign language scientific articles in Hungarian journals (1)

4. **Rakamazi, R.**: Analysis of a problem in plane geometry discussed in an 11th grade group study session.
   Teach. math. comput. sci. 11 (2), 181-193, 2013. ISSN: 1589-7389.
   DOI: http://dx.doi.org/10.5485/TMCS.2013.0339

The Candidate's publication data submitted to the iDEa Tudóstér have been validated by DEENK on the basis of Web of Science, Scopus and Journal Citation Report (Impact Factor) databases.

15 May, 2018

DEBRECENI EGYETEM * Egyetemi és Nemzeti Könyvtár *