



KÖR- ÉS GÖMBSOROZATOKAT BURKOLÓ MÓDSZEREK A SZÁMÍTÓGÉPES GEOMETRIAI TERVEZÉSBEN

Egyetemi doktori (PhD) értekezés

A szerző neve: Kruppa Kinga Tünde

A témavezető neve: Dr. Hoffmann Miklós

DEBRECENI EGYETEM

Természettudományi és Informatikai Doktori Tanács

Informatikai Tudományok Doktori Iskola

Debrecen, 2020.

Ezen értekezést a Debreceni Egyetem Természettudományi és Informatikai Doktori Tanács Informatikai Tudományok Doktori Iskola *Diszkrét matematika, képfeldolgozás és komputergeometria* programja keretében készítettem a Debreceni Egyetem műszaki tudományokban doktori (PhD) fokozatának elnyerése céljából. Nyilatkozom arról, hogy a tézisekben leírt eredmények nem képezik más PhD disszertáció részét.
Debrecen, 2020.....

.....
a jelölt aláírása

Tanúsítom, hogy Kruppa Kinga Tünde doktorjelölt 2016–2020 között a fent megnevezett Doktori Iskola *Diszkrét matematika, képfeldolgozás és komputergeometria* programjának keretében irányításommal végezte munkáját. Az értekezésben foglalt eredményekhez a jelölt önálló alkotó tevékenységével meghatározóan hozzájárult. Nyilatkozom továbbá arról, hogy a tézisekben leírt eredmények nem képezik más PhD disszertáció részét. Az értekezés elfogadását javaslom.
Debrecen, 2020.....

.....
a témavezető aláírása

Kör- és gömbsorozatokat burkoló módszerek a számítógépes geometriai tervezésben

Értekezés a doktori (Ph.D.) fokozat megszerzése érdekében az informatika tudományágban

Írta: Kruppa Kinga Tünde okleveles programtervező informatikus

Készült a Debreceni Egyetem Informatikai Tudományok doktori iskolája (*Diszkrét matematika, képfeldolgozás és komputergeometria* programja) keretében

Témavezető: Dr. Hoffmann Miklós

Az értekezés bírálói:

Dr.

Dr.

A bírálóbizottság:

elnök: Dr.

tagok: Dr.

Dr.

Dr.

Dr.

Az értekezés védésének időpontja: 20

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés	2
2. Matematikai háttér	7
2.1. Diszkrét burkolómódszerek	7
2.1.1. Kunkli és Hoffmann módszere	7
2.1.2. Bastl és munkatársainak módszere	9
2.2. A középtengely-transzformációkról	11
2.2.1. Kapcsolat a ciklográfiával	13
2.3. Speciális görbék az euklideszi és Minkowski-térben . .	15
2.3.1. Pitagoraszi hodográfú görbék	15
2.3.2. Minkowski-féle pitagoraszi hodográfú görbék .	16
2.3.3. Rational Envelope görbék	19
3. Elágazásokkal rendelkező gömbstruktúra burkolása	22
3.1. Előzmények és motiváció	22
3.2. A struktúra leírása	25
3.3. A csatlakoztatás alapjául szolgáló kör meghatározása	26
3.4. A csatlakoztatási görbe előállítás	28
3.5. A csatlakoztatási felület konstrukciója	30
3.6. Eredményeink összehasonlítása más módszerekkel . .	35
4. Köríveket is felhasználó burkolómódszer továbbfejlesztése	37
4.1. Előzmények és motiváció	37
4.2. A probléma leírása	40
4.3. Az érintési pontok meghatározása	42
4.4. Az érintővektorok meghatározása	45
4.5. Összehasonlítás meglévő módszerekkel	49
4.6. Összemetszések elkerülése	52
4.7. Kiterjesztési lehetőségek	55
4.7.1. Kiterjesztés konvex síkbeli alakzatokra	55
4.7.2. Kiterjesztés három dimenzióba	56
4.7.3. Elágazásos struktúrák burkolóinak előállítása .	57

5. RE görbék alkalmazása diszkrét körsorozat burkolására	62
5.1. Előzmények és motiváció	62
5.2. A bemeneti adatok rekonstrukciója	65
5.2.1. Rekonstrukció két érintési pont rögzítésével . .	67
5.2.2. Rekonstrukció egy érintési pont rögzítésével .	70
5.3. A burkológörbék előállítása	72
5.4. A módszer kiterjesztési lehetőségei	75
5.5. A burkológörbék összemetszésének vizsgálata	78
5.5.1. Összemetszések detektálása	80
5.5.2. Összemetszések elkerülése	83
5.6. A módszerünk lehetőségei	85
6. Összefoglalás	89
7 Summary	91
Köszönetnyilvánítás	93
Irodalomjegyzék	94
A. A saját módszereket bemutató algoritmusok	103
B. Az eredményeket bemutató animációk	107
Köríveket is felhasználó burkolómódszerünk	107
RE görbék alkalmazása burkolásra	111
C. Publikációs jegyzék	112

Jelölések, elnevezések

\mathbb{R}^k	a k -dimenziós, valós euklideszi vektortér
$\mathbb{R}^{k,n}$	a $(k+n)$ -dimenziós Minkowski-féle valós vektortér
$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$	az \mathbf{u} és \mathbf{v} vektorok belső szorzata
$\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n, \ \mathbf{u}\ $	az \mathbf{u} vektornak az n -dimenziós euklideszi térben vett normája
$\mathbf{u} \in \mathbb{R}^{k,n}, \ \mathbf{u}\ _M$	az \mathbf{u} vektornak a $(k+n)$ -dimenziós Minkowski-térben vett normája
$\mathbf{u} \in \mathbb{R}^{2,1}, \mathbf{u} = (u_x, u_y, u_z)$	az $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^{2,1}$ vektor első, második és harmadik koordinátájával adva
$\overset{\nabla}{\mathbf{u}} = (u_x, u_y) \in \mathbb{R}^2$	az $\mathbf{u} = (u_x, u_y, u_z) \in \mathbb{R}^{2,1}$ vektornak az xy síkra való merőleges vetülete
az $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^2$ vektor pozitív/negatív normálisa	az $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^2$ vektornak 90° -kal való elforgatottja az óramutató járásával ellentétes/megegyező irányban
$\mathbf{u}^\perp = (n_y, -n_x) \in \mathbb{R}^2$	az $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^2$ vektor negatív normálisa
$\mathbf{r}(t), \mathbf{r}'(t)$	az $\mathbf{r}(t)$ paraméteres görbe, valamint hodográfja
$f(x), f'(x)$	az $f(x)$ függvény, valamint deriváltja
$\mathbf{a}, \mathbf{b} \in c, \widehat{\mathbf{ab}} \subset c$	ha c egy irányított kör, akkor $\widehat{\mathbf{ab}}$ az a körív, amelyet a kör irányításával megegyező körbejárási iránnyal határolnak az \mathbf{a} és \mathbf{b} pontok
$\mathbf{a} \frown \mathbf{b} \in \widehat{\mathbf{ab}}$	az $\widehat{\mathbf{ab}}$ körív felezőpontja
$d()$	az euklideszi távolságfüggvény

1. Bevezetés

A számítógépes grafika és a számítógéppel segített tervezés már teljes mértékben a mindennapjaink részévé vált, s rengeteg területen lelhető fel a használata. A számítógépes tervezőrendszerek által előállított modellekkel találkozhatunk többek között az animációs filmek és videojátékok világában, a manapság teret nyerő virtuális valóság rendszerekben és a 3D nyomtatás területén is. Ezen rendszerek alapvető fontosságúvá váltak a mérnöki tervezés és gyártás során is.

A számítógépes geometriai tervezés hosszú múltra tekint vissza, és a klasszikus módszerek leginkább a kontrollpontalapú modellezés elveit követik (Farin, 2002; Farin, J, & Kim, 2002; Hoschek & Lasser, 1993; Piegl & Tiller, 1995). A hagyományos megközelítéseken túl ismertek továbbá olyan módszerek, amelyekkel az előállított felületek adott görbék speciális interpolációjával határozhatók meg (Engleitner & Jüttler, 2019; Piegl & Tiller, 2000, 2002; Yang & Zheng, 2012).

Az utóbbi években nyert teret egy újfajta modellezési lehetőség, amely során a modellező más típusú objektumok segítségével adhatja meg a kívánt modellt, például körök vagy gömbök felhasználásával. A kör- és gömbsorozatok burkolására szolgáló módszerek napjainkban egyre nagyobb figyelmet kapnak, hiszen használatuk a modellezési folyamatot gyorsítja és könnyíti meg. Sok esetben a konvencionális, pontalapú modellezési lehetőségekhez képest rugalmasabb, könnyebben használható alternatívát jelenthetnek olyan alkalmazási területeken, mint például a molekuláris biológia (Cheng & Shi, 2009; Connolly, 1983; Edelsbrunner, 1999; Kruithof & Vegter, 2006), érrendszerek modellezése (Piskin, Unal, Arnaz, Sarioglu, & Pekkan, 2017; Rossignac, Whited, Slabaugh, Fang, & Unal, 2007; Wang, Fu, Wang, Wu, & Zhou, 2016), művészetek (Leymarie & Aparajeya, 2017; Mesnil, Douthe, Baverel, & Léger, 2018), valamint animációs filmek és játékok (Spore™ (Electronic Arts), ZSpheres® (Pixologic Inc.)).

A továbbiakban burkolásnak nevezzük azon modellezési folyamatot, amikor egy, a felhasználó által megadott diszkrét körsorozathoz (gömbsorozathoz) állítunk elő burkológörbepárt (burkolófelületet). Az

ilyen módszerek által eredményezett görbék (felületet) burkolónak hívjuk. A gömbalapú modellezés egyik gyakran használt formája, mikor a gömbökhöz előállított burkoló területfelosztásos módszerrel, ún. subdivision felületként jön létre. Ilyen modellek használatosak például a ZSpheres[®] (Pixologic Inc.) modellező szoftverben, valamint a Spore[™] (Electronic Arts) számítógépes játékban. Azonban ezek használata esetén nem garantált, hogy a kapott felület érinti a kiindulási gömböket, és felléphet a felület torzulása is. A diszkrét burkolási technikák egy másik csoportját alkotják azon módszerek, amelyeknél matematikailag pontosan definiált polinomiális vagy racionális görbék és felületek a burkolási folyamat eredményei. Ide sorolhatók például az olyan általánosított Bézier-görbék, amelyeknél kontrollpontok helyett köröket és gömböket használunk (Lin & Rokne, 1998; Mestetskii, 2000; Wu, Seah, & Zhou, 2007). Ezen módszerek egyik alkalmazási területe például a kalligráfia (Klimenko, Mestetskiy, & Semenov, 2008, 2017; Seah, Wu, Tian, Xiao, & Xie, 2005; Wang et al., 2016), de elméleti hátterük is aktuálisan kutatott (Ao et al., 2018; Chen & Yang, 2004; Fu, Wu, Wang, Zhou, & Zheng, 2018; Liu, Wang, Wu, Zhang, & Liu, 2020). Léteznek olyan algoritmusok is, amelyek a burkolókat iteratívan állítják elő. Ilyen például Slabaugh és munkatársainak módszere (Slabaugh, Rossignac, Whited, Fang, & Unal, 2010; Slabaugh, Unal, Fang, Rossignac, & Whited, n.d.), azonban ez a módszer igen számolásigényes, valamint az iteratív jellegből adódóan egy kiindulási helyzetet is szükséges megadni. A létrehozott burkolót egy energiafüggvény minimalizálásával próbálják optimalizálni, de a konvergencia nem bizonyított. Kunkli Roland és Hoffmann Miklós egy olyan burkolómódszert (Kunkli & Hoffmann, 2010) mutatott be, amely egzakt, valós idejű megoldást nyújt klasszikus geometriai eszközökre alapozva. Az elkövetkező években pedig több olyan módszer jelent meg (Bana, Kruppa, Kunkli, & Hoffmann, 2014; Bastl, Kosinka, & Lávička, 2015; Kruppa, Kunkli, & Hoffmann, 2019; Kunkli & Hoffmann, 2010), amelyek hasonló megközelítéssel tekintenek a burkolás problémakörére. Ezeknek központi kérdése az érintési pontok és érintési körök meghatározása, amelyek mentén a burkoló érinteni fogja az

objektumokat. Érdeemes továbbá megemlíteni, hogy az ilyen, diszkrét értelemben vett burkolómódszerek elméleti vizsgálata is megjelenik a szakirodalomban (M. Hoffmann, Monterde, & Troll, 2015; Tornai, 2012).

Fontos kiemelni, hogy az előzőekben bemutatott módszereknél nem a klasszikus, folytonos értelemben vett burkolásról van itt szó, hiszen nem egy egy- vagy kétparaméteres kör- vagy gömbsereg burkolóját állítjuk elő. Ha adott egy egyparaméteres körsereg, amely implicit vagy paraméteres módon ismert, akkor matematikailag pontosan meghatározható azon görbepár, amely a körsereg minden tagját egy pontban érinti (Bruce & Giblin, 1992; Kalman, 2008, 2013; Yates, 1974). Ellenben a fent említett diszkrét burkolási feladat során véges elemszámú körsorozat tagjaihoz állítunk elő speciális burkológörbéket. További különbséget jelent, hogy míg egy egyparaméteres körsereg burkolása során az érintési pontokban vett deriváltaknak kell megegyezni, addig diszkrét burkolás során elegendőnek tekintjük, ha az érintőegyenesek egyeznek meg az érintési pontokban. Hasonlóképp rokon fogalom a képfeldolgozás területén jól ismert középtengely-transzformáció. Ha egy adott síkbeli alakzathoz szeretnénk meghatározni az alakzat vázát, akkor az alakzatot leíró középtengely-transzformációt, és azzal együtt az alakzatba beírható maximális sugarú köröket szokás tekinteni. Amint rendelkezésre áll a középtengely-transzformáció, rekonstruálható az alakzat kontúrja. Láthatjuk, hogy a burkolás ehhez a területhez is kapcsolódik, azonban itt is alapvető különbségek vannak. A burkolással ellentétben a középtengely-transzformáció egy folytonos körsorozatot reprezentál, valamint burkolás esetén nincs kiindulási alakzat, nincs feltételezve egy adott tartomány. A két terület kapcsolódását vizsgálja Blasitz ez irányban való kitekintése (Blaschitz, 2014), valamint megmutatkozik a lehetőség Leymarie és mtsai. (Leymarie, Aparajeya, & MacGillivray, 2014) művében is.

Az értekezésben bemutatott eredményeinket ezen említett területeken értük el (Bana et al., 2014; Kruppa, 2020; Kruppa et al., 2019). A 2. fejezetben a disszertáció alapjául szolgáló burkolómódszerek működési elveit, valamint a középtengely-transzformációk és

az $\mathbb{R}^{2,1}$ Minkowski-térben értelmezett görbék matematikai hátterét tekintjük át. A 3., 4. és 5. fejezet tartalmazza az önálló eredményeket. A 3. fejezetben a Kunkli és Hoffmann burkolómódszerén (Kunkli & Hoffmann, 2010) alapuló, térbeli elágaztatásokat lehetővé tevő módszerünket mutatjuk be. A következő, 4. fejezetben pedig azon burkolómódszerünket, amely továbbfejleszti a Bastl és mtsai. által ismerttetett technikát (Bastl et al., 2015). Végül, az 5. fejezetben a középtengely-transzformációkhoz, speciálisan az ún. *Rational Envelope* (RE) görbékhez kapcsolódó eredményeinket ismertetjük, hogy miképp lehet ezen görbékét diszkrét burkolási feladatokra alkalmazni.

2. Matematikai háttér

Ebben a fejezetben áttekintjük azon matematikai és geometriai hátteret, valamint azokat a számítógépes grafikában használt módszereket, amelyek kiindulási alapjaként szolgálnak az értekezésben bemutatott eredményeknek.

2.1. Diszkrét burkolómódszerek

2.1.1. Kunkli és Hoffmann módszere

Kunkli Roland és Hoffmann Miklós eredménye (Kunkli & Hoffmann, 2010) úttörőnek számít abban az értelemben, hogy lehetővé tette a valós idejű, diszkrét kör-és gömbsorozaton alapuló modellezést klasszikus geometriai módszerekkel, nem iteratív módon. A módszer számos előnyös tulajdonsággal rendelkezik, és a későbbiekben megjelent burkolómódszerek összehasonlítási alapjává is vált. A következőkben röviden áttekintjük a módszerüket.

2.1. Definíció (Megengedett körsorozat (Kunkli & Hoffmann, 2010)). *Tekintsük a $\mathcal{C} = \{c_1, c_2, \dots, c_n\}$, $n \in \mathbb{N}$ rendezett körsorozatot, és a körök által határolt $\mathcal{D} = \{d_1, d_2, \dots, d_n\}$ körlapokat! A \mathcal{C} körsorozatot megengedett körsorozatnak nevezük, ha teljesülnek az alábbi feltételek:*

- $d_i \not\subset \bigcup_{j=1, j \neq i}^n d_j$, $i = 1, 2, \dots, n$,
- $d_i \cap d_j = \emptyset$, $i, j = 1, 2, \dots, n$, $j \notin \{i - 2, i - 1, i, i + 1, i + 2\}$
- ha $d_{i-1} \cap d_{i+1} \neq \emptyset$, akkor $d_{i-1} \cap d_{i+1} \subset d_i$, $i = 2, 3, \dots, n - 1$.

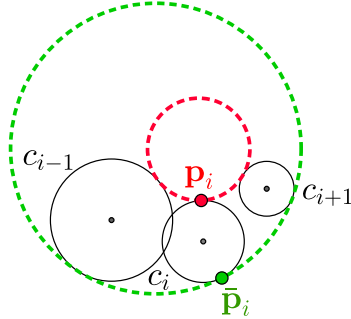
2.2. Definíció (Burkológörbék (Kunkli & Hoffmann, 2010)). *Egy $\mathcal{C} = \{c_1, c_2, \dots, c_n\}$, $n \in \mathbb{N}$, megengedett körsorozat esetén az $\mathbf{s}(t)$ és $\bar{\mathbf{s}}(t)$ görbét „bal” és „jobb” oldali burkológörbének nevezük, amennyiben legalább G^1 -folytonosak, és teljesítik az alábbi feltételeket minden c_i kör ($i = 1, 2, \dots, n$) esetén:*

- Az $\mathbf{s}(t)$ görbe c_i -t a \mathbf{p}_i pontban érinti. Az $\bar{\mathbf{s}}(t)$ görbe esetén pedig a $\bar{\mathbf{p}}_i$ pontban.
- Az $\mathbf{s}(t)$ görbe esetén az \mathbf{o}_i középpontú, c_i körhöz tartozó \mathbf{p}_i érintési pontban vett érintővektor iránya az $\mathbf{o}_i - \mathbf{p}_i$ vektor pozitív normálisának irányával egyezik meg. Hasonlóan, a $\bar{\mathbf{p}} \in \bar{\mathbf{s}}(t)$ pont esetén a vektor negatív normálisának irányával egyezik meg.
- $\mathbf{p}_i, \bar{\mathbf{p}}_i \notin \bigcup_{j=1, j \neq i}^n d_j, \quad i = 1, 2, \dots, n.$

A 2.1. definícióval kizárásra kerülnek azon esetek, amikor nem lehetséges két érintési pontot meghatározni minden egyes körön. A 2.2. definíció alapján pedig a bal és jobb oldali burkológörbékét különítjük el egymástól. Ezeknek megfelelően használjuk a későbbiekben a bal és jobb oldali érintési pont kifejezést is.

Az érintési pontok helyzetének a meghatározása a burkolómódszerek egyik legszignifikánsabb lépése. Kunkli és Hoffmann ezt feladatot ciklografikus megközelítéssel (Bácsó & Papp, 2006; Krames, 1929) oldja meg, és az Apollóniusz-feladat speciális megoldásait használják fel. Az érintési pont előállításához a c_{i-1}, c_i, c_{i+1} körhármaszt tekintjük, és azon két kört határozzuk meg, amely a három kört rendre belülről, illetve kívülről érinti (lásd a 2.1. ábrát). Az a két pont lesz a c_i kör érintési pontja, amelyekben az említett két Apollóniusz-kör érinti a c_i kört. A körsorozat első és utolsó eleméhez az érintési pontok a c_1 és c_2 , valamint a c_{n-1} és c_n közös külső érintőegyeneseivel határozhatók meg. A módszer következő lépése a kapott érintési pontok szétválasztása a bal és jobb oldali burkológörbe előállításához, azaz \mathbf{p}_i és $\bar{\mathbf{p}}_i$ megkülönböztetése. Ehhez a módszer a három kör hatványpontját hívja segítségül.

A burkológörbék létrehozásához a szomszédos c_i és c_{i+1} köröket ($i = 1, 2, \dots, n - 1$) tekintjük, a módszer következő lépése pedig az érintési pontokban vett érintővektorok meghatározása. Az érintővektorok iránya a 2.2. definíció alapján határozható meg, viszont a vektorok hosszának megválasztása nem triviális. Ehhez Kunkli és Hoffmann az érintési pontoknak a körök hatványvonalától vett távolságát veszi



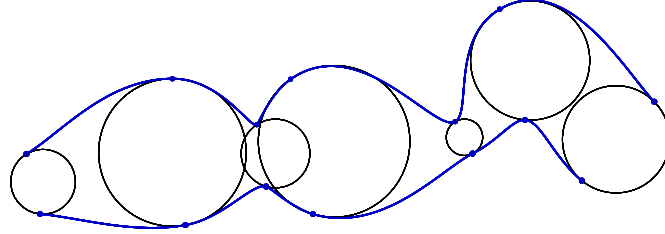
2.1. ábra. Érintési pontok meghatározása az Apollóniusz-feladat két megoldásának segítségével Kunkli és Hoffmann módszerében (Kunkli & Hoffmann, 2010).

alapul. Az algoritmus utolsó lépése azon Hermite-ív előállítás, amely interpolálja az érintési pontokat és adottak ezekben az érintővektorok. Az ily módon kapott, egymáshoz G^1 -folytonosan csatlakozó Hermite-ívek alkotják a bal és jobb oldali $s(t)$ és $\bar{s}(t)$ burkológörbét. Az algoritmus eredményét szemlélteti a 2.2. ábra. Fontos megjegyezni, hogy mivel az érintési pontok az Apollóniusz-feladat megoldásaiból származnak, garantált, hogy nem esnek a szomszédos körök belsejébe. Ez az elvárás a 2.2. definícióban is szerepel.

Kunkli és Hoffmann általánosította a módszert magasabb dimenzióba is, ezáltal lehetővé téve egy diszkrét gömbsorozat burkolófelületének az előállítását. A térbeli kiterjesztést részletesebben a 3.1. szakaszban mutatjuk be, ugyanis erre a módszerre alapozva dolgoztunk ki egy olyan megoldást, amelynek segítségével elágazásokkal rendelkező komplex struktúrához állíthatunk elő burkolófelületet (Bana et al., 2014).

2.1.2. Bastl és munkatársainak módszere

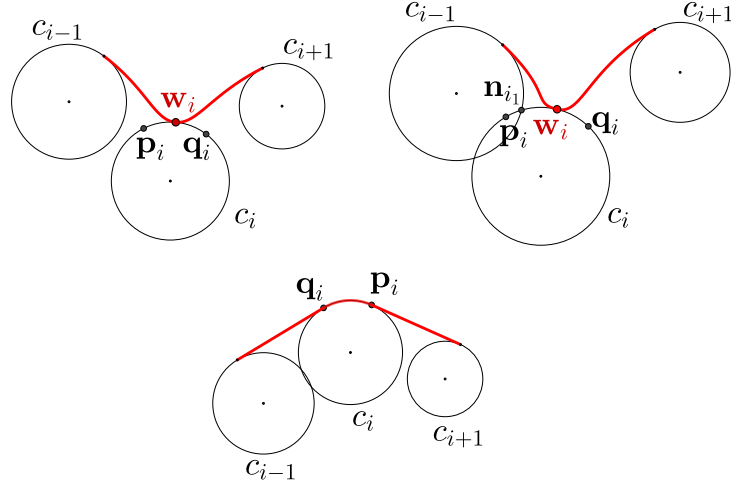
Bastl és mtsai. egy olyan újfajta burkolómódszert (Bastl et al., 2015) mutattak be, amelynél a cél szintén egy legalább G^1 -folytonos bur-



2.2. ábra. Körsorozat burkolása Kunkli és Hoffmann módszerével (Kunkli & Hoffmann, 2010).

kológörbepár előállítására egy megengedett körsorozathoz, azonban a köröket a burkológörbék nem csak egy-egy pontban, hanem akár egy körív mentén is érinthetik. Míg Kunkli és Hoffmann módszerénél az érintési pontok előállítása egységesen az Apollóniusz-feladat megoldásán alapszik, Bastl és mtsai. módszerénél sokkal inkább algoritmikusabb a megközelítés. A módszer első lépése, hogy a c_i és a szomszédos körök közös külső érintőegyenesei segítségével meghatározzuk a \mathbf{q}_i és \mathbf{p}_i érintési pontokat a c_i körön. Ha c_{i-1} és c_i , vagy c_i és c_{i+1} metszik egymást, és a \mathbf{q}_i és \mathbf{p}_i pontok valamelyike a c_{i-1} vagy c_{i+1} belsejébe esik, akkor rendre a megfelelő metszéspontot kell venni az eredeti érintési pont helyett. A körök pozíciójától függően vagy a kapott két pontban és az általuk határolt körív mentén, vagy pedig a körív egy bizonyos pontjában fogja érinteni a burkoló a c_i kört. Lásd a 2.3. ábrát. A burkológörbék előállításához szükséges érintővektorok hosszát az érintési pontok távolsága alapján határozza meg a módszer, megkülönböztetve azon eseteket, amikor a vizsgált körhöz egy érintési pont tartozik, és amikor körív. Ez a nem szokványos megközelítés sok esetben előnyös kimenetet biztosít, azonban több problémát is felvet. A 4.1. szakaszban részletesebben bemutatjuk ezen hiányosságokat, ugyanis módszerünk (Kruppa et al., 2019) többek között ezekre is megoldást nyújt.

Bastl és mtsai. bemutattak egy algoritmust, amely lehetővé teszi síkbeli, elágazásokkal rendelkező struktúrák burkolását, valamint



2.3. ábra. Bastl és mtsai. módszerével (Bastl et al., 2015) a burkológörbe a c_i kört vagy egy pontban vagy egy körív mentén fogja érinteni.

általánosították módszerüket bizonyos típusú konvex síkbeli alakzatokra is. Eredményeiket kiterjesztették a háromdimenziós térbe a Kunkli és Hoffmann által javasolt eljárás, valamint egy csőfelületek összemérésén alapuló módszer (Bizzarri & Lávička, 2013) segítségével.

2.2. A középtengely-transzformációról

A középtengely és középtengely-transzformáció fogalmát Blum vezette be (Blum, 1967) alakzatok vázának meghatározására. Ezek a képfeldolgozás alapfogalmaivá váltak széleskörű alkalmazási területtel (Baran & Popović, 2007; Shapira, Shamir, & Cohen-Or, 2008; Tkach, Pauly, & Tagliasacchi, 2016; Tsogkas & Dickinson, 2017). A váz definícióját Calabi nevéhez (Calabi, 1965) kötjük: egy objektum vázát az objektumba írható maximális sugarú körök középpontjai adják. Choi és mtsai. (Choi, Choi, & Moon, 1997; Choi, Han, Moon, Roh, & Wee, 1999) matematikai alapokra helyezve definiálták ezen

fogalmakat, illetve bevezették az ún. burkolóformulát is, amelynek segítségével a középtengely-transzformáció ismeretében előállítható, azaz rekonstruálható az alakzat kontúrja.

Jelöljön Ω egy \mathbb{R}^2 -beli zárt, korlátos, összefüggő tartományt, valamint $B_r(\mathbf{p})$ egy \mathbf{p} középpontú, r sugarú körlapot! Ekkor a következő definíciókat vezetjük be.

2.3. Definíció ((Choi et al., 1997)). Az Ω tartományba beírható körlapokat a

$$\mathcal{D}(\Omega) = \{B_r(\mathbf{p}) \mid B_r(\mathbf{p}) \subset \Omega\}$$

halmaz jelöli.

2.4. Definíció ((Choi et al., 1997)). Az Ω tartományba beírható maximális sugarú körlapok halmazának a

$$\text{CORE}(\Omega) = \{B_r(\mathbf{p}) \in \mathcal{D}(\Omega) \mid \text{ha } B_s(\mathbf{q}) \in \mathcal{D}(\Omega) \wedge B_r(\mathbf{p}) \subseteq B_s(\mathbf{q}), \\ \text{akkor } B_r(\mathbf{p}) = B_s(\mathbf{q})\}$$

halmazt nevezzük.

2.5. Definíció (Középtengely (Choi et al., 1997)). Az Ω tartomány középtengelyének nevezzük a $\text{CORE}(\Omega)$ -beli körlapok középpontjainak halmazát, azaz az

$$\text{MA}(\Omega) = \{\mathbf{p} \in \Omega \mid B_r(\mathbf{p}) \in \text{CORE}(\Omega)\}$$

halmazt.

2.6. Definíció (Középtengely-transzformáció (Choi et al., 1997)). Az Ω tartomány középtengely-transzformációjának nevezzük a $\text{CORE}(\Omega)$ -beli körlapok középpontjaiból és sugaraiból álló rendezett párok

$$\text{MAT}(\Omega) = \{(\mathbf{p}, r) \in \Omega \times (\mathbb{R}^+ \cup \{0\}) \mid B_r(\mathbf{p}) \in \text{CORE}(\Omega)\}$$

halmazát.

2.7. Definíció ((Choi et al., 1997)). *Ha tekintünk egy $B(\mathbf{p}) \in \text{CORE}(\Omega)$ körlapot, akkor a körlaphoz tartozó $C(\mathbf{p})$ érintési pontok (határpontok) halmaza a*

$$C(\mathbf{p}) = \partial(B(\mathbf{p})) \cap \partial(\Omega)$$

halmaz, ahol $\partial(B(\mathbf{p}))$ és $\partial(\Omega)$ rendre a körlaphoz tartozó körvonalat és a tartomány határvonalát (kontúrját) jelöli.

Ezen definíciók birtokában már bevezethetjük az ún. burkolóformulát.

2.1. Tétel (Burkolóformula (Choi et al., 1997)). *A $\gamma: [a, b] \rightarrow \text{MAT}(\Omega)$, $\gamma(t) = (\mathbf{p}(t), r(t))$ leképezés esetén, ha $\mathbf{p}(t)$ egy legalább egyszer folytonosan differenciálható görbe, melyre $\forall t \in [a, b]$ esetén teljesül, hogy $\|\mathbf{p}'(t)\| = 1$, és a $\mathbf{p}(t)$ ponthoz két határpont tartozik. Ekkor a $C(\mathbf{p}(t))$ érintési pontok halmaza pontosan kételemű, és ezen érintési pontok*

$$\mathbf{x}^\pm(t) = \mathbf{p}(t) + r(t) \left(-r'(t)\mathbf{p}'(t) \pm \mathbf{q}(t)\sqrt{1 - r'(t)^2} \right)$$

alakban adhatók meg, ahol $\mathbf{q}(t)$ a $\mathbf{p}'(t)$ vektor pozitív normálisa. Az $\mathbf{x}^+, \mathbf{x}^-: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ görbéket a γ által meghatározott burkológörbéknek nevezzük.

A 2.1. tételben leírt burkolóformula általánosítható nem természetes paraméterezésű $\mathbf{p}(t)$ görbére is (Moon, 1999), ekkor az érintési pontok

$$\mathbf{x}^\pm(t) = \mathbf{p}(t) + r(t) \frac{-r'(t)\mathbf{p}'(t) \pm \mathbf{q}(t)\sqrt{\|\mathbf{p}'(t)\|^2 - r'(t)^2}}{\|\mathbf{p}'(t)\|^2}$$

alakban írhatók fel.

2.2.1. Kapcsolat a ciklográfiával

Érdeemes megfigyelni, hogy a bemutatott középtengely-transzformáció és a hozzátartozó burkolók fogalma megjelenik a ciklográfiában is

(Farin, Hoschek, & Kim, 2002; C. Hoffmann, 1992; Krames, 1929; Peternell, Odehnal, & Sampoli, 2008; Peternell & Pottmann, 1998; Pottmann & Peternell, 2000; Pottmann & Wallner, 2010).

Tekintsük azt a ζ ciklografikus leképezést, amely az xy sík (o_x, o_y) középpontú, r sugarú c köréhez a

$$c \rightarrow \zeta(c) = (o_x, o_y, r) \in \mathbb{R}^3$$

térbeli pontot rendeli! Az egyértelműség végett a köröket pozitív (azaz óramutatóval járásával ellentétes) irányításúnak tekintjük, így a megfeleltetett pont az xy sík felett helyezkedik el. Az irányított köröket ciklusoknak nevezzük, a pontokat pedig nulla sugarú ciklusokként (nullciklus) értelmezzük. A c ciklus és a hozzá tartozó $\zeta(c)$ pont egy 45° -os félnyílásszögű kúpot határoz meg, amit C-kúpnak nevezünk. A ζ ciklografikus leképezés inverze a $\mathbf{p} = (p_x, p_y, p_z)$ ponthoz a

$$\zeta^{-1}(\mathbf{p}) : (x - p_x)^2 + (y - p_y)^2 = p_z^2$$

kört rendeli.

A $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ térgörbének a ciklografikus képe egy egyparaméteres körsereg. A körsereg burkolója pedig a $\gamma(t)$ és $\zeta^{-1}(\gamma(t))$ által meghatározott kúpsereg burkolójának az xy síkkal való metszete.

Tegyük fel, hogy γ egy egyenes, és jelölje α a γ és az xy sík által bezárt szöget! Ha $\alpha < 45^\circ$, akkor létezik két olyan egyenes, amely a $\zeta^{-1}(\gamma(t))$ körsereg minden elemét egy-egy pontban érinti. Ekkor ez a két érintőegyenes a körsereg burkolója lesz. Ha $\alpha \geq 45^\circ$, akkor nem létezik valós burkoló. Általánosítva, ha a γ tetszőleges térgörbe minden pontjára teljesül, hogy az adott pontbeli érintőegyenes és az xy sík által bezárt szög kisebb, mint 45° , akkor a körseregnek létezik valós burkolója. A burkolókat alkotó pontokat a következő módon kaphatjuk meg. Tekintsünk a t_0 paraméterértékhez tartozó $\gamma(t_0)$ görbepontot, a $\gamma(t_0)$ -beli érintőegyenest pedig jelölje e ! Az e egyenesnek az xy síkkal vett dőfspontja pedig legyen \mathbf{s} ! Azon érintési pontokat, amelyeket az \mathbf{s} pontból a $\zeta^{-1}(\gamma(t_0))$ körhöz húzott érintőegyenesek határoznak meg, jelöljük \mathbf{q}_1 -gyel és \mathbf{q}_2 -vel. A körsereg burkolója a $\zeta^{-1}(\gamma(t_0))$ kört ezen \mathbf{q}_1 és \mathbf{q}_2 pontokban fogja érinteni.

Az előzőekben ismertetett fogalmakat használva a $\gamma(t)$ görbét középtengely-transzformációként, a merőleges vetületét pedig középtengelyként tekinthetjük. A $\zeta^{-1}(\gamma(t))$ egyparaméteres körsereg elemei a γ -hoz tartozó Ω tartomány maximális sugarú beírható körei, a körsereg burkolója pedig a középtengely által meghatározott \mathbf{x}^\pm burkológörbepár (Kosinka & Lávička, 2010; Peternell et al., 2008; Pottmann & Wallner, 2010).

2.3. Speciális görbék az euklideszi és Minkowski-térben

Ebben a szakaszban három olyan speciális görbetípust ismertetünk, amelyek szorosan kapcsolódnak a középtengely-transzformációkhoz, valamint azok burkolóihoz. Először röviden áttekintjük a pitagoraszi hodográfú (PH) görbéket (Farouki & Sakkalis, 1990), majd pedig a Minkowski-féle pitagoraszi hodográfú (MPH) görbéket (Moon, 1998, 1999) és a Rational Envelope (RE) görbéket (Bizzarri, Lávička, & Kosinka, 2016) vesszük górcső alá.

Megjegyzés. A Rational Envelope görbéket habár lehetne magyarosítva *racionális burkológörbéknek* hívni, ez viszonylag megtévesztő lenne, hiszen a görbéhez tartozó burkolókat nevezzük burkológörbéknek. Magyar megfelelője talán a kissé hosszú *racionális burkolót eredményező görbe* lehetne. Az értekezésben az angol elnevezés rövidítése alapján RE görbéként használjuk a fogalmat.

2.3.1. Pitagoraszi hodográfú görbék

2.8. Definíció (Pitagoraszi hodográfú görbe (Farouki & Sakkalis, 1990)). Az $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t))$ *polinomiális görbét pitagoraszi hodográfú (PH) görbének* nevezzük, ha van olyan $\sigma(t)$ *polinomiális függvény, amelyre*

$$x'^2(t) + y'^2(t) = \sigma^2(t)$$

teljesül.

A PH görbék számos előnyös tulajdonsággal rendelkeznek, mint például azzal is, hogy az $\mathbf{r}(t)$ görbe ívhossza egzaktul számolható, hiszen az

$$s = \int_a^b \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} dt = \int_a^b \|\mathbf{r}'(t)\| dt$$

ív hossz számításakor az integrandus polinomiális lesz. Ezenfelül az $\mathbf{r}(t)$ PH görbe $\mathbf{r}_d(t) = \mathbf{r}(t) + \delta \mathbf{n}(t)$ ekvidisztáns görbéje (ahol $\mathbf{n}(t)$ az egység hosszú normálvektort jelöli) racionális. Ez a tulajdonság kiemelten fontos, hiszen az ekvidisztáns görbék alapvető szerepet játszanak például a CNC szerszámgépek működésében. Az ekvidisztáns görbék racionalitása jelentős mértékben könnyíti meg a tervezési feladatokat, a szerszám pályagörbéjének leírását.

2.3.2. Minkowski-féle pitagoraszi hodográfú görbék

Az $\mathbb{R}^{n,1}$ Minkowski-tér egy $n + 1$ dimenziós valós vektortér, amelyen két vektor belső szorzatát a

$$\mathbf{p} \cdot \mathbf{q} = \sum_{i=1}^n p_i q_i - p_{n+1} q_{n+1}$$

formában definiáljuk. A $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^{n,1}$ vektor Minkowski-normáját $\|\mathbf{p}\|_M = \sqrt{\mathbf{p} \cdot \mathbf{p}}$ módon jelöljük. Ekkor a

$$\|\mathbf{p}\|_M^2 = \sum_{i=1}^n p_i^2 - p_{n+1}^2$$

kifejezés lehet pozitív, negatív vagy nulla. Ha $\|\mathbf{p}\|_M^2 > 0$, akkor a \mathbf{p} vektort *térszerű*, ha $\|\mathbf{p}\|_M^2 < 0$, akkor *időszerű*, ha pedig $\|\mathbf{p}\|_M^2 = 0$, akkor *fényszerű* vektornak nevezzük. Ezen elnevezések a speciális relativitáselméletből származnak.

Moon megmutatta (Moon, 1999), hogy az $\mathbb{R}^{2,1}$ Minkowski-térben értelmezett görbék különösen alkalmasak középtengely-transzformációk leírására. A $\mathbf{p} = (p_x, p_y, p_z) \in \mathbb{R}^{2,1}$ pontot a $(p_x, p_y) \in \mathbb{R}^2$ középpontú, $|p_z|$ sugarú körként értelmezhetjük, az $\bar{\mathbf{y}}: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^{2,1}$, $\bar{\mathbf{y}}(t) =$

$(\mathbf{y}(t), r(t))$ görbét pedig középtengely-transzformációként tekinthetjük. Ekkor a 2.1. tétel alapján felírhatjuk a burkolóformulát.

2.2. Tétel (Burkolóformula (Moon, 1999)). *Legyen adva az $\bar{\mathbf{y}}: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^{2,1}$, $\bar{\mathbf{y}}(t) = (\mathbf{y}(t), r(t))$ paraméteres görbe! Ha ezt a görbét egy síkbeli tartomány középtengely-transzformációjaként tekintjük, akkor a tartományhoz tartozó $\mathbf{x}^\pm: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ burkolókat az*

$$\mathbf{x}^\pm(t) = \mathbf{y}(t) - r(t) \frac{r'(t) \mathbf{y}'(t) \pm \mathbf{y}'^\perp(t) \sqrt{\|\mathbf{y}'(t)\|^2 - r'(t)^2}}{\|\mathbf{y}'(t)\|^2} \quad (2.1)$$

alakban kaphatjuk meg.

Vezessük be továbbá az $\mathbf{n}^\pm(t) \in \mathbb{R}^{2,1}$,

$$\mathbf{n}^\pm(t) = \begin{pmatrix} \frac{-r'(t)y'_x(t) \mp \sqrt{y'_x{}^2(t) + y'_y{}^2(t) - r'^2(t)} y'_y(t)}{y'_x{}^2(t) + y'_y{}^2(t)} \\ \frac{-r'(t)y'_y(t) \pm \sqrt{y'_x{}^2(t) + y'_y{}^2(t) - r'^2(t)} y'_x(t)}{y'_x{}^2(t) + y'_y{}^2(t)} \\ -1 \end{pmatrix} \quad (2.2)$$

vektorokat! Ekkor az $\bar{\mathbf{y}}(t) = (\mathbf{y}(t), r(t))$ görbéhez a (2.1) burkolóformula felírható az

$$\mathbf{x}^\pm(t) = \mathbf{y}(t) + r(t) \mathbf{m}^\pm(t) \quad (2.3)$$

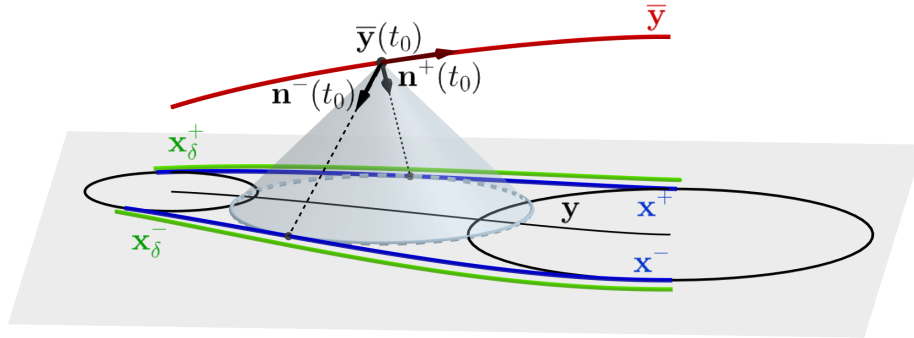
alakban is, ahol $\mathbf{m}^\pm(t) \in \mathbb{R}^2$ az $\mathbf{n}^\pm(t)$ vektor xy síkra eső merőleges vetületét jelöli. Az $\mathbf{n}^\pm(t) \in \mathbb{R}^{2,1}$ vektorokat az $\bar{\mathbf{y}}(t)$ görbe normálvektorainak hívjuk, amelyeknek a Minkowski-térben vett normájára teljesül, hogy $\|\mathbf{n}^\pm(t)\|_M = 0$ (azaz fényszerűek), valamint $\mathbf{n}^+(t) \cdot \bar{\mathbf{y}}'(t) = 0$ és $\mathbf{n}^-(t) \cdot \bar{\mathbf{y}}'(t) = 0$. Ha tekintünk egy $\bar{\mathbf{y}}(t_0)$ görbepontot, akkor az ezen ponton átmenő, $\mathbf{n}^+(t_0)$ és $\mathbf{n}^-(t_0)$ irányvektorú egyenesek az $\bar{\mathbf{y}}(t_0)$ ponthoz tartozó C-kúp alkotói lesznek. Az $\mathbf{m}^\pm(t)$ vektorokra pedig teljesül, hogy $\|\mathbf{m}^\pm(t)\| = 1$.

A burkolók külső δ -ekvidisztánsai a fentiek alapján az

$$\mathbf{x}_\delta^\pm(t) = \mathbf{y}(t) + (r(t) + \delta) \mathbf{m}^\pm(t) \quad (2.4)$$

alakban adhatók meg.

A 2.4. ábrán látható az $\bar{\mathbf{y}}$ görbe, a hozzá tartozó burkolók, azok egy-egy ekvidisztáns görbéje, valamint egy t_0 paraméterértéknél a $\bar{\mathbf{y}}(t_0)$ pontbeli érintővektor, az $\mathbf{n}^\pm(t_0)$ normálvektorok és a ponthoz tartozó C-kúp.



2.4. ábra. Az $\bar{\mathbf{y}}: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^{2,1}$ görbe (piros), a hozzá tartozó $\mathbf{x}^\pm: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ burkolók (kék), valamint azok \mathbf{x}_δ^\pm ekvidisztáns görbéi (zöld). Egy tetszőleges t_0 paraméterértéknél a ponthoz tartozó C-kúpunk olyan speciális alkotóit határozhatjuk meg a pontbeli normálvektorok segítségével, amelyek kijelölik a ciklushoz tartozó érintési pontokat.

A fentiek alapján belátható, hogy egy $\mathbb{R}^{2,1}$ -beli racionális görbe burkológörbéi általában nem lesznek racionálisak. Moon a PH görbék által inspirálódva vezette be a Minkowski-féle pitagoraszi hodográfú görbe fogalmát (Moon, 1998, 1999).

2.9. Definíció (Minkowski-féle pitagoraszi hodográfú görbe (Moon, 1999)). Az $\bar{\mathbf{y}}: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^{2,1}$, $\bar{\mathbf{y}}(t) = (x(t), y(t), r(t))$ polinomiális görbét Minkowski-féle pitagoraszi hodográfú (MPH) görbének nevezzük, ha van olyan $\sigma(t)$ polinomiális függvény, amelyre

$$x'^2(t) + y'^2(t) - r'^2(t) = \sigma^2(t)$$

teljesül.

Az MPH görbék tehát teljesítik a pitagoraszi tulajdonságot a Minkowski-térben. A fentiek alapján, ha az $\bar{\mathbf{y}}(t)$ görbe MPH görbe, akkor teljesül, hogy $y'_x(t)^2 + y'_y(t)^2 - r'(t)^2 = \sigma(t)^2$, tehát a (2.1) burkológörbék racionálisak lesznek, valamint a (2.4) formulával kapott \mathbf{x}_s^\pm ekvidisztáns görbék is racionálisak. A 2.9. definícióból következik továbbá, hogy az $\bar{\mathbf{y}}(t)$ görbe egyik érintővektora sem *időszerű*. Ezenfelül Kosinka és Lávička azt is megmutatta (Kosinka & Lávička, 2010), hogy a burkolók valójában PH görbék.

2.3.3. Rational Envelope görbék

Bizzarri és mtsai. 2016-ban mutatták be azon munkájukat (Bizzarri et al., 2016), amelyben bevezették az ún. *Rational Envelope* (RE) görbe fogalmát. Az RE görbe – az MPH görbékhez hasonlóan – olyan speciális paraméteres görbe az $\mathbb{R}^{2,1}$ Minkowski-térben, amelyet ha egy síkbeli tartomány középtengely-transzformációjaként tekintünk, akkor a származtatott burkolók racionálisak lesznek.

2.1. Lemma ((Bizzarri et al., 2016)). *Legyen az $\bar{\mathbf{y}}: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^{2,1}$, $\bar{\mathbf{y}}(t) = (\mathbf{y}(t), \sqrt{R(t)})$ paraméteres görbe egy síkbeli tartomány középtengely-transzformációja, és legyen $\mathbf{y}(t)$ és $R(t)$ racionális! Ekkor az $\bar{\mathbf{y}}$ -hoz tartozó burkolók felírhatók az*

$$\mathbf{x}^\pm(t) = \mathbf{y}(t) - \frac{R'(t) \mathbf{y}'(t) \pm \mathbf{y}'^\perp(t) \sqrt{4R(t) \|\mathbf{y}'(t)\|^2 - R'(t)^2}}{2 \|\mathbf{y}'(t)\|^2}$$

alakban. Az $\mathbf{x}^+, \mathbf{x}^-: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ burkolók akkor és csak akkor racionálisak, ha létezik olyan racionális $\sigma(t)$ függvény, melyre

$$4R(t) \|\mathbf{y}'(t)\|^2 - R'(t)^2 = \sigma^2(t) \quad (2.5)$$

teljesül.

2.10. Definíció (Rational Envelope (RE) görbe (Bizzarri et al., 2016)). *Az $\bar{\mathbf{y}}: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^{2,1}$, $\bar{\mathbf{y}}(t) = (\mathbf{y}(t), \sqrt{R(t)})$ paraméteres görbe RE görbe (azaz olyan görbe amelyhez tartozó burkolók racionálisak), ha van olyan racionális $\sigma(t)$ függvény, melyre teljesül a (2.5) feltétel.*

Legyen $\mathbf{x}(t)$ egy tetszőlegesen választott síkbeli, racionális görbe, $\mathbf{y}(t)$ pedig ennek egy változó $r(t)$ távolságú ekvidisztánsa, azaz

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{x}(t) + \frac{r(t)}{\|\mathbf{x}'(t)\|} \mathbf{x}'^\perp(t) = \mathbf{x}(t) + f(t) \mathbf{x}'^\perp(t).$$

Az ilyen alakban felírt $\mathbf{y}(t)$ görbe akkor és csak akkor racionális, ha $f(t) = \frac{r(t)}{\|\mathbf{x}'(t)\|}$ racionális. Az f függvény előállítására az 5.1., 5.3. és 5.5. szakaszokban is kitérünk. A fentiekre alapozva Bizzarri és mtsai. megfogalmaztak egy, az RE görbék felírási módjára vonatkozó tételt.

2.3. Tétel ((Bizzarri et al., 2016)). *Bármely RE görbe felírható*

$$\bar{\mathbf{y}}(t) = \left(x_x(t) + x'_y(t) f(t), x_y(t) - x'_x(t) f(t), f(t) \sqrt{x_x'^2(t) + x_y'^2(t)} \right)$$

alakban.

Bizzarri és mtsai. azt is megmutatták, hogy ha a kiindulási alapként szolgáló $\mathbf{x}(t)$ görbe PH görbe, akkor $\bar{\mathbf{y}}(t)$ MPH görbe lesz. Ennek eredményeképp az \mathbf{x}^+ és \mathbf{x}^- burkológörbék nem csupán racionálisak, hanem maguk is PH görbék lesznek (Kosinka & Lávička, 2010), tehát ezeknek az ekvidisztáns görbéi is racionálisak (Farouki & Sakkalis, 1990).

Bizzarri és mtsai. bemutattak egy interpolációs algoritmust is a 2.3. tétel alapján. Ezzel az RE görbék konstrukciója jóval egyszerűbb, mint a hasonló Hermite-féle interpolációs feladatokat megoldó, MPH görbét előállító módszerek (Bizzarri, Lávička, & Vršek, 2019; Kim & Ahn, 2003; Kosinka & Jüttler, 2006, 2009; Kosinka & Lávička, 2011; Kosinka & Šír, 2010). Ez a relatíve könnyű létrehozási mód az RE görbék egyik legnagyobb előnye. Ha valamilyen feladatra csak a burkológörbék racionalitása az elvárt, akkor az RE görbék megfelelőek lehetnek, ha pedig az ekvidisztáns görbéknek is racionálisnak kell lenniük, akkor MPH görbe előállítására lesz szükség.

Az RE görbék egy alkalmazási lehetőségét is bemutatták a szerzők (Bizzarri et al., 2016), mely során RE görbéket csőfelületek burkolására és összemosására alkalmaztak. Valamint kiterjesztették az RE görbe

fogalmát RE felületre is, amelyet szintén háromdimenziós burkolási feladatokra (Bizzarri & Lávička, 2017; Bizzarri et al., 2016; Bizzarri, Lávička, & Kosinka, 2017) alkalmaztak.

A szakaszban bemutatottak alapján láthatjuk tehát, hogy a középtengely-transzformációk és az $\mathbb{R}^{2,1}$ Minkowski-térben értelmezett görbék között szoros összefüggés van.

3. Elágazásokkal rendelkező gömbstruktúra burkolása

Kunkli és Hoffmann kiterjesztette burkolómódszerét a háromdimenziós térbe is (Kunkli & Hoffmann, 2010), amivel egy adott gömbsorozatot burkoló felület állítható elő. A módszer azonban nem tud elágazásokat kezelni, emiatt pedig összetett, például karaktertervezési feladatoknál csak igen korlátozottan alkalmazható. Kutatásunk során így azt tűztük ki célul, hogy egy olyan módszert hozzunk létre, amellyel lehetőség nyílik komplexebb, elágazásokkal rendelkező gömbök sorozatának a burkolására. Ezen továbbfejlesztésünkkel sokkal összetettebb modellek létrehozását tesszük lehetővé (Bana et al., 2014).

3.1. Előzmények és motiváció

A következőben felelevenítjük Kunkli és Hoffmann térbeli módszerének (Kunkli & Hoffmann, 2010) lényegi pontjait. Először is bevezetjük az alábbi definíciókat, melyek pontosan leírják, hogy milyen gömbsorozat tekinthető megengedett gömbsorozatnak, valamint milyen elvárásokat kell teljesítenie a burkolófelületnek.

3.1. Definíció (Megengedett gömbsorozat (Kunkli & Hoffmann, 2010)). *Tekintsük az $\mathcal{S} = \{s_1, s_2, \dots, s_n\}$ ($n \in \mathbb{N}$) gömbsorozatot, valamint a gömbök által határolt $\mathcal{G} = \{g_1, g_2, \dots, g_n\}$ gömbtesteket! Az \mathcal{S} gömbsorozatot megengedett gömbsorozatnak nevezzük, ha teljesíti az alábbi feltételeket:*

- $g_i \not\subset \bigcup_{j=1, j \neq i}^n g_j$, $i = 1, 2, \dots, n$,
- $g_i \cap g_j = \emptyset$, $i, j = 1, 2, \dots, n$, $j \notin \{i-2, i-1, i, i+1, i+2\}$,
- ha $g_{i-1} \cap g_{i+1} \neq \emptyset$, akkor $g_{i-1} \cap g_{i+1} \subset g_i$.

3.2. Definíció (Burkolófelület (Kunkli & Hoffmann, 2010)). Az $\mathcal{S} = \{s_1, s_2, s_3, \dots, s_n\}$ ($n \in \mathbb{N}$) megengedett gömbsorozat, valamint a gömbök által határolt $\mathcal{G} = \{g_1, g_2, \dots, g_n\}$ gömbtestek esetén az $\mathbf{s}(\phi, t)$ ($\phi \in [0, 2\pi]$, $t \in [a, b]$) paraméteres felületet burkolófelületnek nevezzük, amennyiben legalább G^1 -folytonos és minden s_i gömb ($i = 1, 2, \dots, n$) esetén

- létezik olyan \tilde{c}_i érintési kör az s_i gömbön, amely \mathbf{s} -nek egy paramétervonala, valamint \tilde{c}_i minden pontjában az \mathbf{s} felület és az s_i gömb érintősíkja megegyezik;
- teljesül, hogy $\tilde{c}_i \not\subset \bigcup_{j=1, j \neq i}^n g_j$.

A háromdimenziós burkolási feladat során az előző feltételeknek megfelelően az $\mathcal{S} = \{s_1, s_2, \dots, s_n\}$ ($n \in \mathbb{N}$) megengedett gömbsorozathoz szeretnénk előállítani burkolófelületet. Az első lépés, hogy minden gömb esetén meghatározzuk a 3.1. definícióban említett \tilde{c}_i érintési köröket. Kunkli és Hoffmann ehhez felhasználja a síkbeli módszert. Tekintsük a szomszédos s_{i-1} , s_i és s_{i+1} gömböket ($i \notin \{1, n\}$), majd vegyük a középpontjaikon áthaladó P_i síkot! Ezzel elmetszve a gömböket három komplanáris kört kapunk, amelyekre alkalmazhatjuk a síkbeli módszert az érintési pontok meghatározására. Az s_i gömbhöz ily módon tartozó metszetkör két érintési pontja alapján egyértelműen meghatározhatjuk azt a \tilde{c}_i kört az s_i gömbön, amelynek síkja merőleges a P_i síkra, valamint áthalad a kapott érintési pontokon. Az első és utolsó gömbhöz az s_1 és s_2 , valamint az s_{n-1} és s_n gömbök közös érintőkúpjának segítségével határozzuk meg az érintési köröket.

Az s_i és s_{i+1} gömbök közötti $\hat{\mathbf{S}}_i(\phi, t)$ felületdarab előállításának következő lépése, hogy meghatározzuk a kiindulási \mathbf{z}_i és \mathbf{z}_{i+1} pontokat a gömbök megfelelő érintési körein. Ezeket a pontokat fogjuk elforgatni ϕ szöggel ($\phi \in [0, 2\pi]$) az érintési körök mentén, a végső felületdarab pedig az elforgatott $\mathbf{z}_i(\phi)$ pontokból kiinduló, $\mathbf{z}_{i+1}(\phi)$ végpontú Hermite-ívek uniójaként áll elő. A \mathbf{z}_i és \mathbf{z}_{i+1} pontok előállításához bevezetjük a következő jelölést. Jelölje rendre \mathbf{w}_i és \mathbf{w}_{i+1}

az s_i, s_{i+1} gömböknek a $\tilde{c}_i, \tilde{c}_{i+1}$ körökre vonatkozó pólusát, valamint legyen $\mathbf{e} \in \mathbb{R}^3$ egy rögzített vektor, amely nem párhuzamos egyetlen $\mathbf{w}_i - \tilde{\mathbf{o}}_i$ vektorral sem ($i = 1, 2, \dots, n$)! Ha a $(\mathbf{w}_i - \tilde{\mathbf{o}}_i) \times (\mathbf{w}_{i+1} - \tilde{\mathbf{o}}_{i+1})$ vektor teljesíti ezt a feltételt, akkor választhatjuk ezt az \mathbf{e} vektornak. Az $m: \mathbb{R} \rightarrow \{-1, 1\}$ és $p: \{s_i\} \rightarrow \{-1, 1\}$,

$$m(x) = \begin{cases} -1, & \text{ha } x < 0, \\ 1, & \text{egyébként;} \end{cases}$$

$$p(s_i) = \begin{cases} m\left(\frac{\mathbf{w}_i - \mathbf{o}_i}{\|\mathbf{w}_i - \mathbf{o}_i\|} \cdot \frac{\mathbf{o}_{i+1} - \mathbf{o}_i}{\|\mathbf{o}_{i+1} - \mathbf{o}_i\|}\right), & \text{ha } i \neq n, \\ m\left(\frac{\mathbf{w}_i - \mathbf{o}_i}{\|\mathbf{w}_i - \mathbf{o}_i\|} \cdot \frac{\mathbf{o}_i - \mathbf{o}_{i-1}}{\|\mathbf{o}_i - \mathbf{o}_{i-1}\|}\right), & \text{egyébként} \end{cases}$$

függvények megadása után felírhatjuk a \mathbf{z}_i (valamint ezzel analóg módon \mathbf{z}_{i+1}) pontot a

$$\mathbf{z}_i = \tilde{\mathbf{o}}_i + \tilde{r}_i \frac{\mathbf{e} \times (p(s_i) (\mathbf{w}_i - \tilde{\mathbf{o}}_i))}{\|\mathbf{e} \times (p(s_i) (\mathbf{w}_i - \tilde{\mathbf{o}}_i))\|}, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (3.1)$$

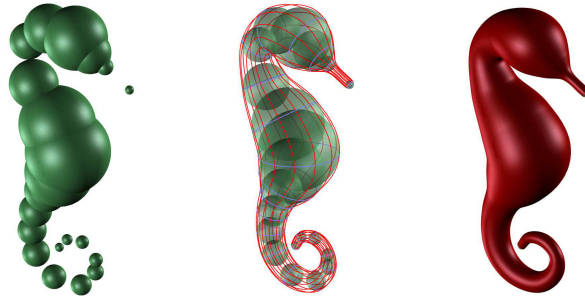
alakban.

Az algoritmus következő lépéseként ezen kiindulási pontokat adott $\phi \in [0, 2\pi]$ szöggel elforgatjuk az $\tilde{\mathbf{o}}_i$ ponton átmenő, $p(s_i)(\mathbf{w}_i - \tilde{\mathbf{o}}_i)$ irányvektorú egyenes körül. A pontbeli érintővektorok hosszának megválasztásánál az s_i és s_{i+1} gömbök M_i -vel jelölt hatványsíkjától vett távolságot használjuk. Az s_i és s_{i+1} gömbökhöz ($i = 1, 2, \dots, n-1$) előállított $\hat{\mathbf{s}}_i(\phi, t)$ burkolófelület-darab tehát

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{s}}_i(\phi, t) = & H_0^3(t) \mathbf{z}_i(\phi) + H_1^3(t) \mathbf{z}_{i+1}(\phi) + \\ & H_2^3(t) p(s_i) \frac{2 \, d(M_i, \mathbf{z}_i(\phi))}{\|\mathbf{w}_i - \mathbf{z}_i(\phi)\|} \frac{\mathbf{w}_i - \mathbf{z}_i(\phi)}{\|\mathbf{w}_i - \mathbf{z}_i(\phi)\|} + \\ & H_3^3(t) p(s_{i+1}) \frac{2 \, d(M_i, \mathbf{z}_{i+1}(\phi))}{\|\mathbf{w}_{i+1} - \mathbf{z}_{i+1}(\phi)\|} \frac{\mathbf{w}_{i+1} - \mathbf{z}_{i+1}(\phi)}{\|\mathbf{w}_{i+1} - \mathbf{z}_{i+1}(\phi)\|} \end{aligned} \quad (3.2)$$

alakban írható fel, ahol $t \in [0, 1]$, $\phi \in [0, 2\pi]$, $d()$ az euklideszi távolságfüggvény, és $H_j^3(t)$ ($j = 0, 1, 2, 3$) pedig a harmadfokú Hermitepolinomokat jelöli. Az $\hat{\mathbf{s}}_i(\phi, t)$ ($i = 1, 2, \dots, n-1$) felületdarabok

egymáshoz G^1 -folytonosan csatlakoznak. A 3.1. ábrán látható Kunkli és Hoffmann módszerének eredménye egy adott gömbsorozatra.



3.1. ábra. Kunkli és Hoffmann térbeli burkolómódszerének (Kunkli & Hoffmann, 2010) eredménye.

3.2. A struktúra leírása

Kutatási munkánk során a célunk az volt, hogy kiterjesszük Kunkli és Hoffmann térbeli módszerét úgy, hogy alkalmas legyen komplex struktúrájú modellek létrehozására, azaz elágazásokkal rendelkező, rendezett gömbsorozat burkolására. Ennek megvalósításához első feladatunk a csatlakoztatást lehetővé tevő struktúra leírása. A megengedett $\mathcal{S} = \{s_1, s_2, \dots, s_n\}$, $n \in \mathbb{N}$ gömbsorozatot *főágnak* nevezzük. A főág bármely i -edik eleméhez ($i \in \{2, \dots, n-1\}$) csatlakoztathatunk egy új gömbsorozatot, amit *mellékágnak* nevezünk. Ha az $s_i \in \mathcal{S}$ gömbhöz szeretnénk csatlakoztatni, akkor az s_i -hez tartozó mellékág elemeit $\{s_{i_1}, s_{i_2}, \dots, s_{i_m}\}$, $m \in \mathbb{N}$ módon jelöljük, ahol $s_i = s_{i_1}$. A 3.1. definícióban szereplő feltételeket minden mellékágnak teljesítenie kell, azaz megengedett gömbsorozatnak kell lennie. Ezen megközelítéssel értelmezhetjük egy mellékág gömbjeihez való újabb mellékág létrehozását is. Egy ág első és utolsó gömbjénél a csatlakoztatást nem engedjük meg, hanem az ágot magát bővítjük a csatlakoztatandó gömbbel úgy, hogy vagy az ág elejére, vagy pedig a végére szúrjuk

be. Habár a megadott struktúra lehetővé tenné, hogy egy gömbből több mellékág induljon, láthatjuk majd, hogy a koncepcióból adódóan a módszerünkkel ez nem megvalósítható. Így egy gömbhöz egy mellékágot fogunk tudni csatlakoztatni.

A felvázolt struktúra tekinthető egy irányított, körmentes gráfnak is, így az s_i gömböt szülőnek, az s_{i_2} gömböt pedig gyermeknek nevezhetjük. A módszerünk szoftveres implementálása során is ezt a megközelítést követtük, a felhasználó által megadott gömböket gráfot reprezentáló adatszerkezetben tároltuk és kezeltük.

Az ily módon megadott gömbstruktúrához a következőképpen állítunk elő burkolófelületet. Tegyük fel, hogy az s_1, s_2, \dots, s_n gömbökből álló főág i -edik eleméhez szeretnénk csatlakoztatni az $\{s_{i_1}, s_{i_2}, \dots, s_{i_m}\}$ mellékágot! Ekkor a főág s_1, s_2, \dots, s_n gömbjeihez a burkolófelület Kunkli és Hoffmann térbeli algoritmusa alapján állítjuk elő (lásd a 3.1. szakaszt), valamint a mellékág $s_{i_2}, s_{i_3}, \dots, s_{i_m}$ gömbjeinek burkolására is ezt használjuk. A problematikus feladat az s_i és az s_{i_2} gömböket burkoló felület elkészítése, azaz pontosan a csatlakozási rész megoldása. Mivel a főág burkolásával előállt burkolófelület-darabok G^1 -folytonosan csatlakoznak egymáshoz, így hasonló módon azt várjuk el, hogy két ág csatlakoztatása is legyen G^1 -folytonos. A fejezet további részeiben az s_i és az s_{i_2} gömbök csatlakoztatási felületének előállítását ismertetjük.

3.3. A csatlakoztatás alapjául szolgáló kör meghatározása

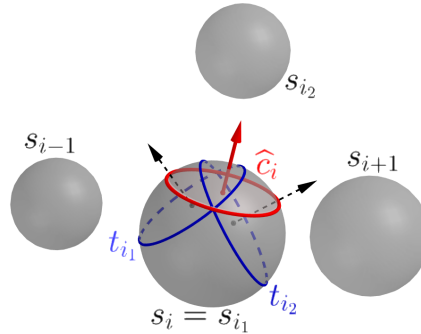
Ahhoz, hogy a csatlakoztatandó s_{i_2} gömböt valamilyen módon a főághoz illesszük, első lépésként egy kört határozunk meg az s_i gömbön, melyet majd \hat{c}_i fog jelölni. Tekintsük az s_{i-1} , s_i és s_{i+1} , valamint az s_i -hez csatlakoztatandó s_{i_2} gömböt! Az s_i gömb eredeti érintési körét, azaz azt a kört, amelyet a főág s_{i-1} , s_i és s_{i_2} gömbje határoz meg, \tilde{c}_{i_1} -gyel jelöljük. Ezután az s_{i_2} gömb \tilde{c}_{i_2} érintési körét állítjuk elő, amelyet úgy kapunk, hogy az s_i , s_{i_2} és s_{i_3} gömbökre alkalmazzuk Kunkli és Hoffmann módszerét. Ha a mellékág mindössze két elemű,

azaz csak egyetlen gömböt szeretnénk csatlakoztatni az s_i gömbhöz, akkor s_{i_2} érintési körét az s_i és s_{i_2} közös érintőkúpja határozza meg.

A $\hat{c}_i \in s_i$ kör meghatározásához a következő algoritmust vezettük be. A Kunkli és Hoffmann által javasolt módszert az s_{i+1} , s_i és s_{i_2} gömbhármásra alkalmazzuk, így egy érintési kört állítunk elő, amelyet t_{i_1} -gyel jelölünk. Analóg módon az s_{i-1} , s_i és s_{i_2} gömbök segítségével létre tudjuk hozni a t_{i_2} érintési kört. A két kör síkjának normálvektorát pedig rendre \mathbf{n}_{i_1} -gyel és \mathbf{n}_{i_2} -vel jelöljük. Ezek segítségével állítjuk elő a \hat{c}_i kört, amely a csatlakoztatás alapjául fog szolgálni (lásd a 3.2. ábrát). Ha t_{i_1} és t_{i_2} metszi egymást, akkor azon síkot tekintjük, amely tartalmazza a metszéspontokat, és amelynek normálvektora az

$$\hat{\mathbf{n}}_i = \frac{\mathbf{n}_{i_1}}{\|\mathbf{n}_{i_1}\|} + \frac{\mathbf{n}_{i_2}}{\|\mathbf{n}_{i_2}\|}$$

vektor. A \hat{c}_i kört úgy állítjuk elő, hogy ezen síkkal elmetsszük az s_i gömböt. Ha t_{i_1} és t_{i_2} nem metszik egymást, akkor \hat{c}_i -t úgy határozzuk meg, hogy a t_{i_1} középpontján átmenő, $\hat{\mathbf{n}}_i$ normálvektorú síkkal metsszük el a gömböt.



3.2. ábra. A csatlakoztatás alapjául szolgáló \hat{c}_i kör konstrukciója.

Az így módon meghatározott \hat{c}_i kör érzékeny a szomszédos gömbök pozíciójára, sugarára, ami kifejezetten előnyös, többek között például olyan helyzetekben is, amikor a csatlakoztatás alapjául szolgáló

gömb sugara jelentősen eltér szomszédaitól. Azonban ha az s_i és s_{i_2} gömböket burkoló felület előállításához közvetlenül a \hat{c}_i -t használnánk érintési körként az s_i gömbön, akkor a főág által meghatározott burkolófelületet ezen új felületdarab metszené, tehát az eredményezett csatlakozás nem nyújtana esztétikailag megfelelő kimenetet. A G^1 -folytonos csatlakozás biztosításának érdekében egy zárt, paraméteres görbét határozunk meg a főághoz burkolófelületén, amihez közvetlenül csatlakoztatjuk az s_{i_2} gömböt.

3.4. A csatlakoztatási görbe előállítása

A módszerünk következő lépése tehát egy csatlakoztatási görbe meghatározása a főághoz előállított felületen. A keresett görbe létrehozásához a \hat{c}_i kör, pontosabban az $\hat{\mathbf{n}}_i$ normálvektor lesz segítségünkre. Ehhez először is egy egyfajta középpontot adunk meg, amit \mathbf{m}_i -vel jelölünk. A csatlakoztatási görbét két félkörből fogjuk származtatni, amelyeknek középpontjaként fog szolgálni az \mathbf{m}_i pont.

A főághoz tartozó \tilde{c}_i érintési kör középpontját $\tilde{\mathbf{o}}_i$ -vel, sugarát \tilde{r}_i -vel, a síkjának egység hosszú normálvektorát pedig \mathbf{n}_i -vel jelöljük. A célunk azon \mathbf{h}_i vektor előállítása, melyre

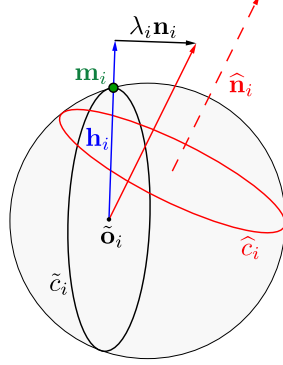
$$\mathbf{h}_i \cdot \mathbf{n}_i = 0 \quad \text{és} \quad \hat{\mathbf{n}}_i = \mathbf{h}_i + \lambda_i \mathbf{n}_i, \quad \lambda_i \in \mathbb{R}$$

teljesül. Az ezek alapján felírható $(\hat{\mathbf{n}}_i - \lambda_i \mathbf{n}_i) \cdot \mathbf{n}_i = 0$ egyenletből a λ_i értéke kifejezhető, így \mathbf{h}_i -t megkaphatjuk $\hat{\mathbf{n}}_i - \lambda_i \mathbf{n}_i$ módon. A keresett \mathbf{m}_i pontot pedig

$$\mathbf{m}_i = \tilde{\mathbf{o}}_i + \tilde{r}_i \frac{\mathbf{h}_i}{\|\mathbf{h}_i\|}$$

formában adjuk meg. Az így meghatározott \mathbf{m}_i pont gyakorlatilag megkapható az $\hat{\mathbf{n}}_i$ vektor $\tilde{\mathbf{o}}_i$ pontból kiinduló reprezentánsának a \tilde{c}_i kör síkjára való merőleges vetítésével. Belátható, hogy $\mathbf{m}_i \in \tilde{c}_i$, azaz a főághoz tartozó érintési körön rajta van az \mathbf{m}_i pont. A javasolt konstrukciót a 3.3. ábra mutatja be.

A csatlakoztatáshoz szükséges görbét a főág burkolófelületén állítjuk elő két ívből. A főághoz tartozó s_i és s_{i+1} gömbök burkolása



3.3. ábra. Az \mathbf{m}_i pont meghatározása, mely a csatlakoztatási görbe egyfajta középpontjaként fog szolgálni.

során meghatároztuk a \tilde{c}_i érintési körön a \mathbf{z}_i kiindulási pontot (lásd a (3.1) formulát). Mivel $\mathbf{m}_i \in \tilde{c}_i$, ezért létezik olyan $\alpha_i \in [0, 2\pi[$ érték, amellyel a \tilde{c}_i kör mentén a \mathbf{z}_i pontot elforgatva pontosan \mathbf{m}_i -t kapjuk, azaz $\mathbf{z}_i(\alpha_i) = \mathbf{m}_i$. Az s_i és s_{i+1} gömbök burkolófelülete alapján a csatlakoztatási görbe első ívét

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_{i_1}(\theta) = & H_0^3(t_\theta) \mathbf{z}_i(\alpha_i + \theta) + H_1^3(t_\theta) \mathbf{z}_{i+1}(\alpha_i + \theta) + \\ & H_2^3(t_\theta) p(s_i) 2d(M_i, \mathbf{z}_i(\alpha_i + \theta)) \frac{\mathbf{w}_i - \mathbf{z}_i(\alpha_i + \theta)}{\|\mathbf{w}_i - \mathbf{z}_i(\alpha_i + \theta)\|} + \\ & H_3^3(t_\theta) p(s_{i+1}) 2d(M_i, \mathbf{z}_{i+1}(\alpha_i + \theta)) \frac{\mathbf{w}_{i+1} - \mathbf{z}_{i+1}(\alpha_i + \theta)}{\|\mathbf{w}_{i+1} - \mathbf{z}_{i+1}(\alpha_i + \theta)\|} \end{aligned}$$

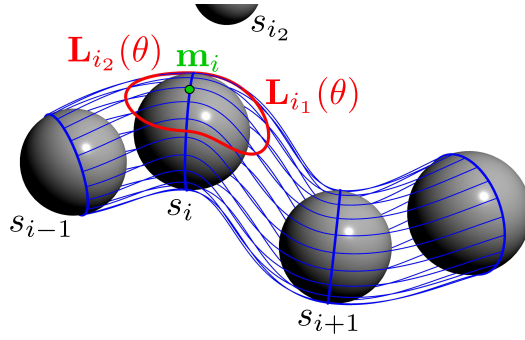
alakban írhatjuk fel, ahol $t_\theta = \frac{4q}{\pi} \sqrt{(\frac{\pi}{4})^2 - \theta^2}$, $\theta \in [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$, és $q \in]0, 1[$. A t_θ értékét az origó középpontú, r sugarú félkör $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ egyenlete alapján határoztuk meg. A t_θ kifejezésben szereplő q paraméterérték segítségével tudjuk befolyásolni a csatlakoztatási görbeív alakját: egyre nagyobb értéknél egyre jobban közelíti a szomszédos gömböt. Ezen koncepciókat támasztja alá, hogy ha a q értékét 1-nek választanánk, akkor a $\theta = 0$ esetben az $\mathbf{L}_{i_1}(0)$ görbepont pontosan a $\mathbf{z}_{i+1}(\alpha_i)$ pont lenne.

A görbe másik felét hasonlóan,

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_{i_2}(\theta) = & H_0^3(1-t_\theta) \mathbf{z}_{i-1}(\alpha_i + \theta) + H_1^3(1-t_\theta) \mathbf{z}_i(\alpha_i + \theta) + \\ & H_2^3(1-t_\theta) p(s_{i-1}) 2d(M_{i-1}, \mathbf{z}_{i-1}(\alpha_i + \theta)) \frac{\mathbf{w}_{i-1} - \mathbf{z}_{i-1}(\alpha_i + \theta)}{\|\mathbf{w}_{i-1} - \mathbf{z}_{i-1}(\alpha_i + \theta)\|} + \\ & H_3^3(1-t_\theta) p(s_i) 2d(M_{i-1}, \mathbf{z}_i(\alpha_i + \theta)) \frac{\mathbf{w}_i - \mathbf{z}_i(\alpha_i + \theta)}{\|\mathbf{w}_i - \mathbf{z}_i(\alpha_i + \theta)\|} \end{aligned}$$

alakban adjuk meg, melyet az s_{i-1} és s_i gömbök közötti burkolófelületen állítunk elő.

Az így módon létrehozott $\mathbf{L}_{i_1}(\theta)$ és $\mathbf{L}_{i_2}(\theta)$ görbének a csatlakozáshoz esztétikailag is megfelelő eredményt nyújtanak, a konstrukcióból adódóan nem csúcsosodnak. A módszerünk eredményét a 3.4. ábra mutatja be.



3.4. ábra. A módszerünkkel létrehozott $\mathbf{L}_{i_1}(\theta)$ és $\mathbf{L}_{i_2}(\theta)$ görbék a burkolófelület mentén, $q = 0.5$ esetben.

3.5. A csatlakoztatási felület konstrukciója

A csatlakoztatási burkolófelület előállításának a következő lépése, hogy a csatlakoztatási görbének, valamint az s_{i_2} gömb \tilde{c}_{i_2} érintési körének a pontjait megfeleltetjük egymásnak. Ehhez a korábban említett

merőleges vetítés módszerét fogjuk használni. A $\hat{\mathbf{z}}_i = \mathbf{L}_{i_1}(-\frac{\pi}{4})$ jelölést bevezetve tekintsük az $\mathbf{m}_i - \hat{\mathbf{z}}_i$ vektornak a \tilde{c}_{i_2} kör $\tilde{\mathbf{o}}_{i_2}$ középpontjából kiinduló reprezentációját! Ennek a vektornak a \tilde{c}_{i_2} síkjára eső merőleges vetületét $\hat{\mathbf{h}}_i$ -vel jelöljük. Ekkor $\hat{\mathbf{z}}_i$ -hez tartozó $\hat{\mathbf{z}}_{i+1} \in \tilde{c}_{i_2}$ pont

$$\hat{\mathbf{z}}_{i+1} = \tilde{\mathbf{o}}_{i_2} + \tilde{r}_{i_2} \frac{\hat{\mathbf{h}}_i}{\|\hat{\mathbf{h}}_i\|}$$

alakban írható fel. A további összetartozó pontokat ezután már egyszerűen megkaphatjuk. A csatlakoztatási görbe pontjait $\hat{\mathbf{z}}_i(\theta) = \mathbf{L}_{i_1}(-\frac{\pi}{4} + \theta)$ alakban írjuk fel, míg a \tilde{c}_{i_2} megfelelő $\hat{\mathbf{z}}_{i+1}(\theta)$ pontjait úgy kapjuk meg, ha a $\hat{\mathbf{z}}_{i+1}$ pontot adott $\theta \in [0, \pi]$ szöggel elforgatjuk \tilde{c}_{i_2} mentén.

Ahhoz, hogy a csatlakozási felületdarab G^1 -folytonosan csatlakozzon a főághoz előállított felülethez, szükség lesz még az $\mathbf{s}_i(\phi, t)$ burkolófelület érintősíkjának meghatározására is. A felület parciális deriváltjainak meghatározásához tagonként deriváljuk a (3.2) formulát az egyes változók szerint. Az $\mathbf{e}_{i_1} = \frac{\mathbf{z}_i - \tilde{\mathbf{o}}_i}{\|\mathbf{z}_i - \tilde{\mathbf{o}}_i\|}$ és $\mathbf{e}_{i_2} = \mathbf{e}_{i_1} \times \frac{\mathbf{p}(s_i)(\mathbf{w}_i - \tilde{\mathbf{o}}_i)}{\|\mathbf{p}(s_i)(\mathbf{w}_i - \tilde{\mathbf{o}}_i)\|}$ jelöléseket használva

$$\begin{aligned} \mathbf{z}_i(\phi) &= r_i \mathbf{e}_{i_1} \cos(\phi) + r_i \mathbf{e}_{i_2} \sin(\phi), \\ \frac{d}{d\phi} \mathbf{z}_i(\phi) &= -r_i \mathbf{e}_{i_1} \sin(\phi) + r_i \mathbf{e}_{i_2} \cos(\phi). \end{aligned}$$

A burkolófelület paraméteres felírásában szerepel továbbá a $d(M_i, \mathbf{z}_i(\phi))$ kifejezés. Ennek deriváltjának meghatározásához az M_i hatványsík \mathbf{n}_{m_i} normálvektorát és \mathbf{p}_{m_i} pontját használjuk fel. Ekkor

$$d(M_i, \mathbf{z}_i(\phi)) = \mathbf{n}_{m_i} \cdot (\mathbf{z}_i(\phi) - \mathbf{p}_{m_i}),$$

így a deriváltat

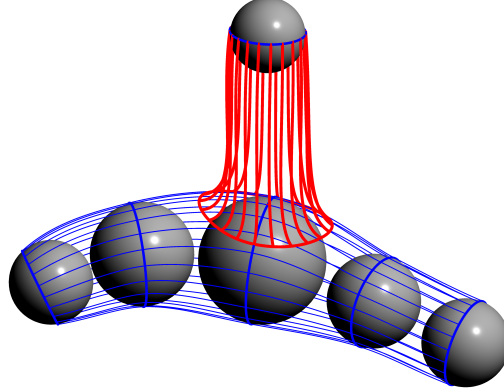
$$\frac{d}{d\phi} d(M_i, \mathbf{z}_i(\phi)) = \mathbf{n}_{m_i} \cdot \frac{d}{d\phi} \mathbf{z}_i(\phi)$$

formában kapjuk meg. A fentiekkel analóg módon határozható meg $\frac{d}{d\phi}\mathbf{z}_{i+1}(\phi)$ és $\frac{d}{d\phi}d(M_i, \mathbf{z}_{i+1}(\phi))$. Az $\mathbf{s}_i(\phi, t)$ burkolófelület parciális deriváltjai ekkor

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial\phi}\mathbf{s}_i(\phi, t) &= H_0^3(t) \frac{d}{d\phi}\mathbf{z}_i(\phi) + H_1^3(t) \frac{d}{d\phi}\mathbf{z}_{i+1}(\phi) + \\ &H_2^3(t) 2 \frac{p(s_i)}{\|\mathbf{w}_i - \mathbf{z}_i\|} \frac{d}{d\phi}d(M_i, \mathbf{z}_i(\phi)) (\mathbf{w}_i - \mathbf{z}_i(\phi)) + \\ &H_3^3(t) 2 \frac{p(s_{i+1})}{\|\mathbf{w}_{i+1} - \mathbf{z}_{i+1}\|} \frac{d}{d\phi}d(M_i, \mathbf{z}_{i+1}(\phi)) (\mathbf{w}_{i+1} - \mathbf{z}_{i+1}(\phi)), \\ \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{s}_i(\phi, t) &= \frac{d}{dt}H_0^3(t) \mathbf{z}_i(\phi) + \frac{d}{dt}H_1^3(t) \mathbf{z}_{i+1}(\phi) + \\ &\frac{d}{dt}H_2^3(t) 2 \frac{p(s_i)}{\|\mathbf{w}_i - \mathbf{z}_i\|} d(M_i, \mathbf{z}_i(\phi)) (\mathbf{w}_i - \mathbf{z}_i(\phi)) + \\ &\frac{d}{dt}H_3^3(t) 2 \frac{p(s_{i+1})}{\|\mathbf{w}_{i+1} - \mathbf{z}_{i+1}\|} d(M_i, \mathbf{z}_{i+1}(\phi)) (\mathbf{w}_{i+1} - \mathbf{z}_{i+1}(\phi))\end{aligned}$$

formában írhatók fel. A felület egy pontbeli érintősíkjának normálvektorát a $\frac{\partial}{\partial\phi}\mathbf{s}_i(\phi, t)$ és $\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{s}_i(\phi, t)$ parciális deriváltak vektoriális szorzataként kaphatjuk meg.

Az érintősík felírása után már meghatározhatjuk a csatlakoztatási görbe pontjaihoz tartozó érintővektorokat. Az \mathbf{L}_{i_1} görbe egy $\hat{\mathbf{z}}_i(\theta)$ pontjához tartozó érintővektor legyen azon $\mathbf{v}_i(\theta)$ vektor, amelyet úgy kapunk, hogy az $\mathbf{L}_{i_1}(\theta) - \mathbf{m}_i$ vektort merőlegesen vetítjük az adott pontbeli érintősíkra. A \tilde{c}_{i_2} kör pontjaihoz tartozó érintővektor – az eredeti burkolómódszerhez hasonlóan – legyen az adott pontból az s_{i_2} -nek \tilde{c}_{i_2} -re vonatkozó pólusába mutató vektor (vagy azzal ellenkező irányú). Az érintővektorok hosszát pedig úgy határozzuk meg, hogy az adott pontnak és az s_i és s_{i_2} gömbök \widehat{M}_i hatványsíkjától vett távolságának kétszeresét vesszük. Tehát az $\mathbf{L}_{i_1}(\theta)$ görbére illeszkedő

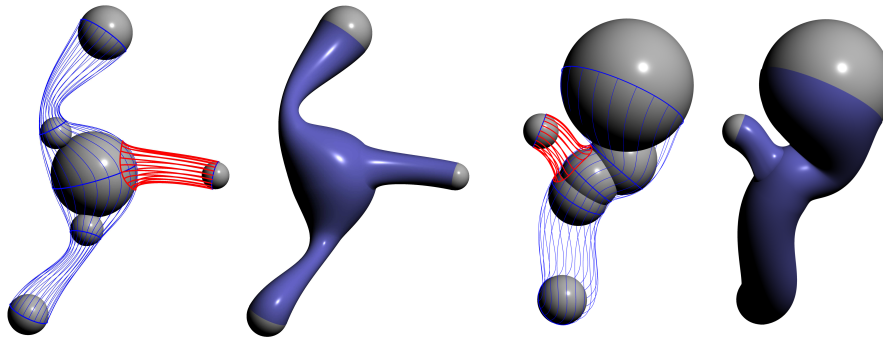


3.5. ábra. Csatlakoztatási algoritmusunk eredménye: a főág burkolófelületéhez G^1 -folytonosan kapcsolódik az előállított felületdarab.

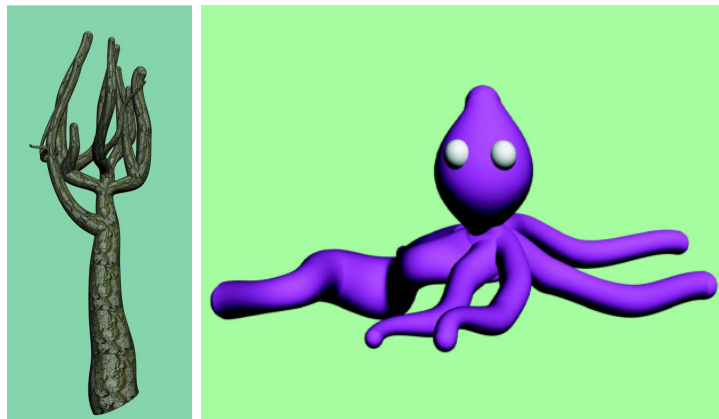
csatlakoztatási felület

$$\begin{aligned} \widehat{\mathbf{s}}_{i_1}(\theta, t) = & \frac{d}{dt} H_0^3(t) \widehat{\mathbf{z}}_i(\theta) + H_1^3(t) \widehat{\mathbf{z}}_{i+1}(\theta) + \\ & H_2^3(t) 2 \, d(\widehat{M}_i, \widehat{\mathbf{z}}_i(\theta)) \frac{\mathbf{v}_i(\theta)}{\|\mathbf{v}_i(\theta)\|} + \\ & H_3^3(t) 2 \frac{P(s_{i_2})}{\|\mathbf{w}_{i+1} - \widehat{\mathbf{z}}_{i+1}\|} d(\widehat{M}_i, \widehat{\mathbf{z}}_{i+1}(\theta)) (\mathbf{w}_{i+1} - \widehat{\mathbf{z}}_{i+1}(\theta)) \end{aligned}$$

alakban adható meg, ahol $\theta \in [0, \pi]$, $t \in [0, 1]$. A fentiekkel analóg módon készíthetjük el az \mathbf{L}_{i_2} görbéből kiinduló $\widehat{\mathbf{s}}_{i_2}(\theta, t)$ burkolófelületet. A 3.5. ábrán látható a csatlakoztatási megoldásunk. A 3.6. és 3.7. ábra pedig módszerünk eredményét mutatja be komplexebb struktúrák esetén.



3.6. ábra. Módszerünk jól kezeli azon eseteket is, amikor a csatlakoztatásnál lévő gömbök sugarai jelentősen eltérnek egymástól, vagy pedig a gömbök metszik egymást.

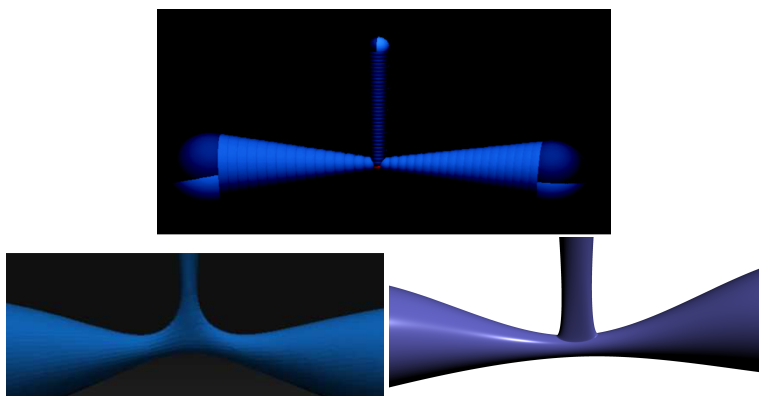


3.7. ábra. Komplex modellek a módszerünk segítségével.

3.6. Eredményeink összehasonlítása más módszerekkel

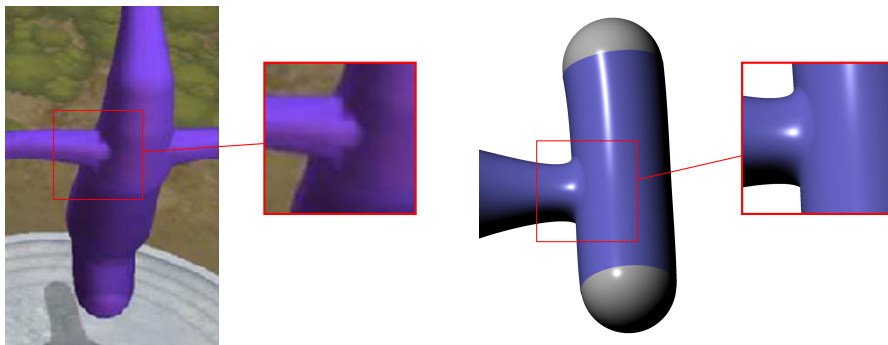
A bemutatott módszerünkkel a felhasználó által megadott gömbso-rozat elemeihez új ágakat tudunk csatlakoztatni, így valós időben tudunk létrehozni komplex modelleket (Bana et al., 2014). Ahogy azt az 1. fejezetben bemutatam, a számítógépes grafikában megjelentek olyan megoldások, ahol a gömbalapú modellezés kényelmesebb megoldást nyújthat, mint a hagyományos pontalapú módszerek használata. Azonban azt tapasztaltuk, hogy bizonyos esetekben a csatlakoztatás nehézkes, és nem megfelelő eredményt adnak a meglévő módszerek.

Ilyen probléma merülhet fel például, hogy ha a csatlakoztatás során s_i sugara jóval kisebb, mint az s_{i-1} , s_{i+1} és s_{i_2} gömböké. A 3.8. ábra erre az esetre mutat példát: a ZSpheres[®] (Pixologic Inc.) szoftver által előállított felület eltorzul olyan értelemben, hogy a kiindulási gömbök elrendezését nem követi. Ezzel szemben módszerünk jóval természetesebb, az elrendezést megtartó eredményt biztosít.



3.8. ábra. Fent: egy gömbökkel megadott modell a ZSpheres[®] szoftverben, ahol azon gömb sugara, amihez egy új ág csatlakozik, jóval kisebb, mint a környezetéé. Bal: A ZSpheres[®] által generált felület nem tartja meg az eredeti elrendezést. Jobb: saját módszerünkkel egy hasonló struktúrára jóval természetesebb eredményt biztosítunk.

A Spore™ (Electronic Arts) számítógépes játék szintén gömbalapú modellezésre ad lehetőséget. A 3.9. ábrán ezen szoftver kimenetével vetjük össze módszerünk eredményét. Látható, hogy a felhasználó által készített modell végtagjának és törzsének csatlakozása esztétikailag nem a legmegfelelőbb, míg egy hasonló struktúrát a módszerünkkel folytonosan, simábban lehet burkolni.



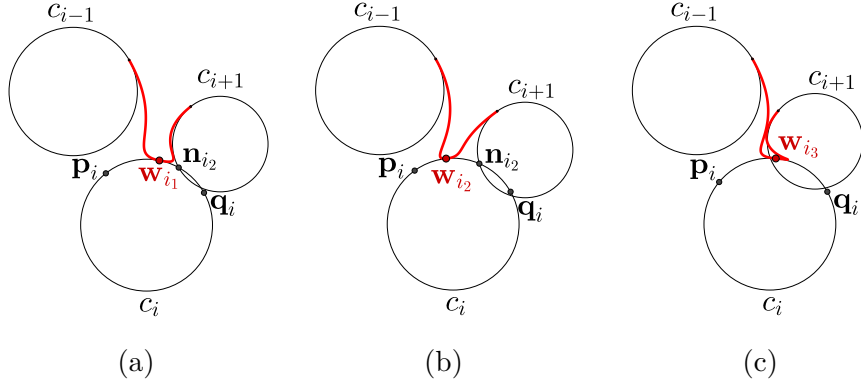
3.9. ábra. A Spore™ (Electronic Arts) szoftver kimenetének (bal) és saját módszerünk eredményének (jobb) összehasonlítása. A kinagyított részleteknél jobban megfigyelhető a csatlakoztatás helye.

4. Köríveket is felhasználó burkolómódszer továbbfejlesztése

Az utóbbi években egyre több körökön és gömbökön alapuló modellező lehetőség jelent meg, mint például Bastl és mtsai. burkolómódszere (Bastl et al., 2015), amely egy újszerű megközelítést jelentett. A módszer alapelveit a 2.1.2 pontban tekintettük át röviden. Bastl és mtsai. burkolótechnikája egy valós idejű, kis számolásigényű algoritmus, ami sokszor megfelelő kimenetet biztosít, azonban két jelentős hátránnyal rendelkezik. Bizonyos esetekben az érintési pontok helyzete, valamint az érintővektorok hossza (s így maga a burkológörbe) nem folytonosan változik. Ezenfelül az érintési pontok a szomszédos körök belsejébe kerülhetnek, így a burkolók metszik a köröket. Ezek által motiválva egy olyan új burkolómódszert (Kruppa et al., 2019) adtunk meg, amely előnyt kovácsol a körív használatára támaszkodó megközelítésből, de ugyanakkor megoldást nyújt a Bastl és mtsai. által bemutatott módszer problémáira.

4.1. Előzmények és motiváció

Bastl és mtsai. módszerének (Bastl et al., 2015) előnyei és egyben hátrányai is abból származnak, hogy egy kört a burkológörbe nemcsak egy pontban, hanem akár egy körív mentén is érinthet. A felmerülő problémákat a következő példákon keresztül figyelhetjük meg. A 4.1. ábrát alapul véve legyen $C = \{c_1, c_2, \dots, c_n\}$ egy megengedett körso-rozat, és tekintsük a szomszédos c_{i-1} , c_i , c_{i+1} köröket, melyek által határolt körlapokat jelölje d_{i-1} , d_i és d_{i+1} ! A $\mathbf{q}_i, \mathbf{p}_i \in c_i$ pontok azon két pontot jelölik, amiket rendre a c_{i-1} és c_i , valamint a c_i és c_{i+1} körök közös, bal oldali külső érintőegyenesei határoznak meg. Tegyük fel, hogy $c_{i-1} \cap c_i = \emptyset$ és $c_i \cap c_{i+1} \neq \emptyset$! Ha a körök pozíciójából adódóan a burkolók nem egy körív mentén érintik a c_i kört, akkor egy felezőpontot állít elő a módszer. Ahogy látható a 4.1. a ábrán, ha $\mathbf{q}_i \notin d_{i+1}$, akkor a \mathbf{w}_{i_1} érintési pont a \mathbf{p}_i és \mathbf{q}_i által határolt, negatív irányítású körív felezőpontja lesz. Azonban, ha úgy pozicionáljuk a

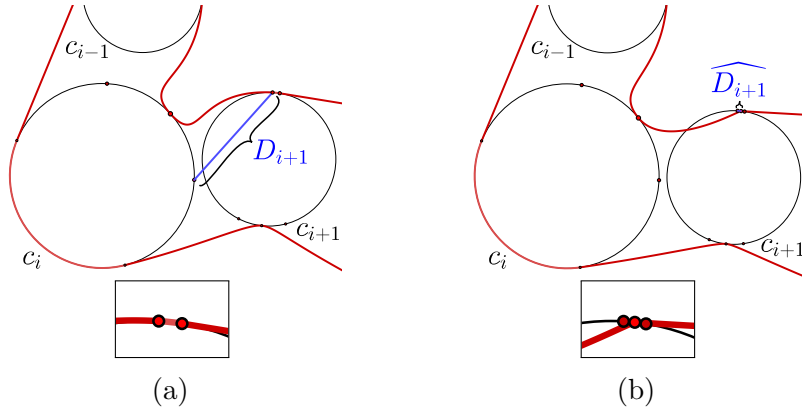


4.1. ábra. Bastl és mtsai. módszerével a c_{i+1} kör minimális elmozdítása a burkológörbe alakjának hirtelen megváltozását eredményezi (lásd (a) és (b)). A (c) ábrán látható, hogy pozicionálhatók a körök úgy is, hogy az érintési pont a szomszédos kör belsejébe kerül.

köröket, hogy $\mathbf{q}_i \in d_{i+1}$ – lásd a 4.1. b ábrát – akkor a \mathbf{p}_i és a két kör \mathbf{n}_{i_2} -vel jelölt metszéspontja által határolt körív felezőpontja lesz az érintési pont. Látható a példán, hogy a c_{i+1} kör helyzetét csak minimálisan változtattuk meg, de az érintési pontot teljesen más-képp kell meghatározni. Ez természetesen azt is eredményezi, hogy a burkológörbe alakja hirtelen, nagymértékben megváltozik, tehát a módszer valós időben történő modellezésre nem igazán alkalmas. Egy másik jelentős problémát is felfedezhetünk ezen példán keresztül. Ahogy láthattuk, ha c_i és c_{i+1} metszi egymást, de $\mathbf{q}_i \notin d_{i+1}$, akkor az érintési pontot a külső érintőegyenesek által meghatározott \mathbf{p}_i és \mathbf{q}_i pontok segítségével kapjuk. Azonban ez azt is jelenti, hogy tudjuk úgy pozicionálni a köröket, hogy a felezőpont a c_{i+1} belsejébe kerül. Ezt mutatja be a 4.1. c ábra. A felvázolt problémák hasonló módon jelentkeznek akkor is, ha a c_{i-1} és c_i körök metszik egymást. Bastl és mtsai. említik a cikkükben, hogy az esetleges problémák feloldására súlyok vezethetők be, amellyel a végső érintési pont helyzete változtatható a kijelölt körív mentén. Azonban így minden körhöz egyesével kellene találni megfelelő súlyt, mindemellett pedig a súlyok meghatározása

teljes mértékben a felhasználóra van bízva.

A másik problémás jelenség, amit Bastl és mtsai. módszerénél tapasztalhatunk, az az érintővektorok hosszának hirtelen, nagymértékű megváltozása. Erre szolgál példaként a 4.2. ábra. A 4.2. a ábrán a körök pozíciójából adódóan c_i -nél felezőpontot használunk, míg a szomszédos c_{i+1} -nél körívet. Ekkor a c_{i+1} kör \mathbf{q}_{i+1} érintési pontjában vett érintővektor hossza a $\mathbf{p}_i \in c_i$ és $\mathbf{q}_{i+1} \in c_{i+1}$ pontok távolságának kétszerese lesz, azaz $2D_{i+1}$. Azonban, ha a c_{i+1} kör pozícióját minimálisan megváltoztatjuk úgy, hogy körív helyett a \mathbf{q}_{i+1} és \mathbf{p}_{i+1} által határolt körív felezőpontját kelljen használni (lásd a 4.2. b ábrát), akkor az érintővektor hosszának számolási módja megváltozik. Ebben az esetben a $\mathbf{q}_{i+1} \in c_{i+1}$ pont és a felezőpont távolságának kétszerese, azaz $2\widehat{D}_{i+1}$ lesz az érintővektor hossza. Mivel \widehat{D}_{i+1} szignifikánsan kisebb, mint D_{i+1} , ezért tapasztalhatjuk azt, hogy habár a c_{i+1} pozícióját minimálisan módosítottuk, a burkológörbe alakja hirtelen nagymértékben megváltozik.



4.2. ábra. Bastl és mtsai. módszerével az érintési pontban vett érintővektor hossza nagymértékben megváltozik, ha a c_{i+1} kör helyzetét minimálisan módosítjuk. Ez olyan esetekben történhet, amikor (a) körív használatáról váltunk (b) felezőpont használatára (lásd a nagyított ábrákat).

4.2. A probléma leírása

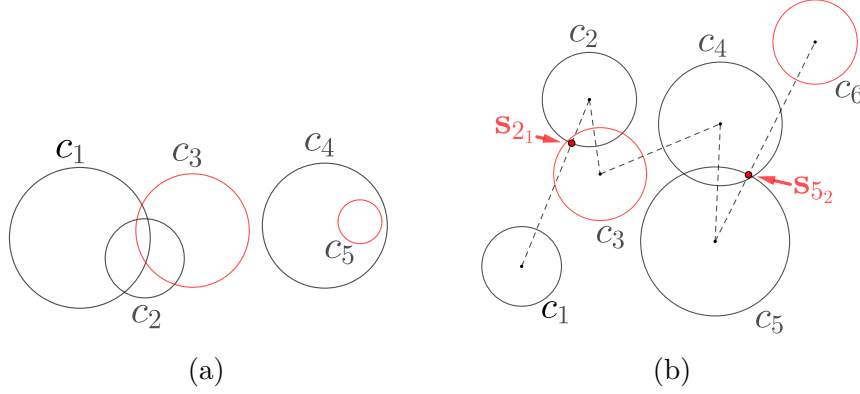
Kutatásunk során célunk az volt, hogy egy olyan burkolómódszert hozzunk létre, ami az előző szakaszban ismertetett problémákra megoldást nyújt, de ugyanakkor rendelkezik a körív használatából eredő pozitív tulajdonságokkal is. A 2.1. definíció kiterjesztésével a következő definíciónkat vezetjük be.

4.1. Definíció (Megengedett körsorozat (Kruppa et al., 2019)). *Tekintsük a $\mathcal{C} = \{c_1, c_2, \dots, c_n\}$, $n \in \mathbb{N}$ rendezett körsorozatot, valamint a körök által határolt $\mathcal{D} = \{d_1, d_2, \dots, d_n\}$ körlapokat! A c_{i-1} és c_i , valamint a c_i és c_{i+1} körök ($i = 2, \dots, n-1$) centrálisainak a c_i -vel való metszéspontjait rendre \mathbf{s}_{i_1} -gyel és \mathbf{s}_{i_2} -vel jelöljük. A \mathcal{C} körsorozatot megengedett körsorozatnak nevezzük, ha teljesülnek az alábbi feltételek:*

- $d_i \not\subset \bigcup_{j=1, j \neq i}^n d_j$, $i = 1, 2, \dots, n$,
- $d_i \cap d_j = \emptyset$, $i, j = 1, 2, \dots, n$, $j \notin \{i-2, i-1, i, i+1, i+2\}$,
- ha $d_{i-1} \cap d_{i+1} \neq \emptyset$, akkor $d_{i-1} \cap d_{i+1} \subset d_i$, $i = 2, 3, \dots, n-1$,
- $\mathbf{s}_{i_1} \notin c_{i+1}$, $\mathbf{s}_{i_2} \notin c_{i-1}$, $i = 2, 3, \dots, n-1$.

A 4.1. definícióban bevezetett első három feltétel (lásd a 4.3. a ábrát) már Kunkli és Hoffmann munkájában megjelent, amelyet Bastl és mtsai. is felhasználtak. A negyedik feltétellel bővítettük ki a definíciót, amely egyfajta esztétikai kritériumként is szolgál, amivel kizárunk olyan eseteket, amelyeknél a körsorozatban a körök által leírt ágban egy hirtelen, nagymértékű irányváltás lenne. Erre mutat példát a 4.3. b ábra.

A célunk, hogy egy megengedett körsorozathoz előállítsunk két, legalább G^1 -folytonos szplájnt, amelyek minden kört vagy egy pontban, vagy pedig annak két pontja által határolt körív mentén érintenek. A módszer során megkülönböztetjük a bal és jobb oldali burkológörbét, valamint a köröket irányítottak vesszük. A bal oldali burkológörbe esetében negatív, míg a jobb oldali esetében pozitív irányításúaknak tekintjük a köröket.



4.3. ábra. Nem megengedett körsorozatok. Az ábrákon a pirossal jelölt körök pozícióját megváltoztatva elérhetjük, hogy a körsorozat a 4.1. definíció szerint megengedett legyen.

4.2. Definíció (Burkológörbék (Kruppa et al., 2019)). A $\mathcal{C} = \{c_1, c_2, \dots, c_n\}$, $n \in \mathbb{N}$, megengedett körsorozat esetén az $\mathbf{s}(t)$ és $\bar{\mathbf{s}}(t)$ görbét rendre „bal” és „jobb” oldali burkológörbének nevezzük, amennyiben legalább G^1 -folytonosak és minden c_i ($i = 1, 2, \dots, n$) kör esetén teljesül, hogy

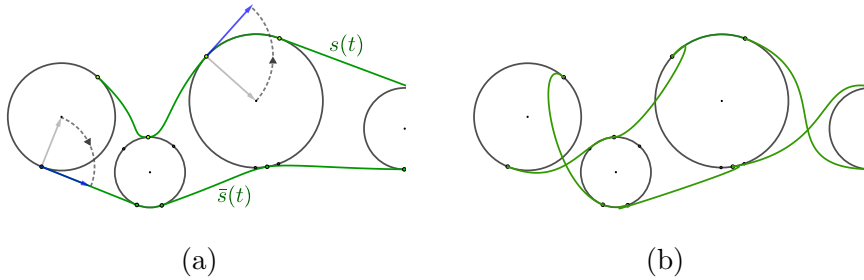
- Az $\mathbf{s}(t)$ görbe a c_i kört vagy az \mathbf{u}_i és \mathbf{v}_i pontokban és az általuk határolt $\widehat{\mathbf{u}_i \mathbf{v}_i}$ körív mentén érinti, vagy pedig a \mathbf{w}'_i pontban. Hasonló feltételek vonatkoznak az $\bar{\mathbf{s}}(t)$ görbe esetén az $\bar{\mathbf{u}}_i, \bar{\mathbf{v}}_i, \bar{\mathbf{w}}'_i$ pontokra.
- A c_i kör, valamint $\mathbf{s}(t)$ görbe érintőegyenesei rendre megegyeznek az érintési pontokban.
- Az $\mathbf{s}(t)$ görbe esetén a c_i kör érintési pontjaiban vett érintővektorok iránya megegyezik az adott érintési pontból a kör középpontjába mutató vektor pozitív normálisával. $\bar{\mathbf{s}}(t)$ esetén a vektor negatív normálisával egyezik meg.
- $\mathbf{u}_i, \mathbf{v}_i, \mathbf{w}'_i \notin \bigcup_{j=1, j \neq i}^n d_j$, $i = 1, 2, \dots, n$. Analóg feltételt szabunk

az $\bar{\mathbf{u}}_i, \bar{\mathbf{v}}_i$, és $\bar{\mathbf{w}}'_i$ pontokra $\bar{\mathbf{s}}(t)$ esetén.

Abban az esetben, ha a c_i körhöz az \mathbf{u}_i és \mathbf{v}_i pontok és az általuk határolt $\widehat{\mathbf{u}_i\mathbf{v}_i}$ körív tartozik, akkor ezen körívet is a bal oldali burkológörbe részeként tekintjük. Hasonlóan, az $\bar{\mathbf{s}}(t)$ görbe esetén az $\widehat{\bar{\mathbf{u}}_i\bar{\mathbf{v}}_i}$ körívet a jobb oldali burkológörbe részeként tekintjük.

A 4.2. definíció feltételeinek megfelelő és nem megfelelő burkológörbére látható egy-egy példa a 4.4. ábrán. A disszertáció további részében a bal oldali burkológörbe létrehozási módját mutatjuk be, a jobb oldali burkoló ezzel analóg módon állítható elő.

A burkolómódszerek kulcsfontosságú lépése az érintési pontok meghatározása. Ahogy láthattuk, a Bastl és mtsai. által publikált módszer egyik legfőbb problémája az, hogy az érintési pontok helyzete nem megfelelő. A következő szakaszban megmutatjuk, hogy módszerünkkel miképpen állítjuk elő az érintési pontokat úgy, hogy megoldást nyújtsunk a felmerült problémákra.

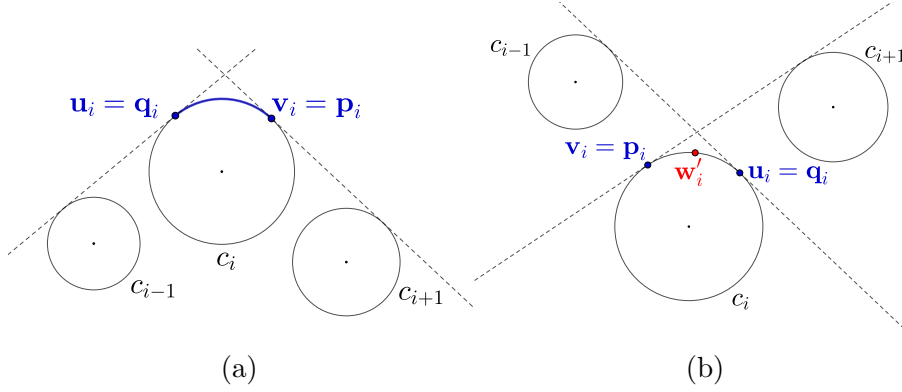


4.4. ábra. Egy megengedett körsorozat burkolása a 4.2. definíciónak (a) megfelelő és (b) nem megfelelő módon.

4.3. Az érintési pontok meghatározása

Az érintési pontok meghatározásának érdekében a $\mathcal{C} = \{c_1, c_2, \dots, c_n\}$ megengedett körsorozat esetén a szomszédos c_{i-1} , c_i és c_{i+1} köröket tekintjük, melyek által határol körlapokat rendre d_{i-1} , d_i és d_{i+1}

($i = 2, \dots, n-1$) jelöli. A burkológörbe a c_i kört vagy az \mathbf{u}_i és \mathbf{v}_i pontok által határolt körív mentén, vagy pedig a körív \mathbf{w}'_i felezőpontjában fogja érinteni (lásd a 4.5. ábrát).



4.5. ábra. A c_i kör érintési pontjainak meghatározása a külső érintőegyenesek segítségével. A burkológörbe a kört vagy (a) két pont által határolt körív mentén, vagy (b) a körív felezőpontjában érinti.

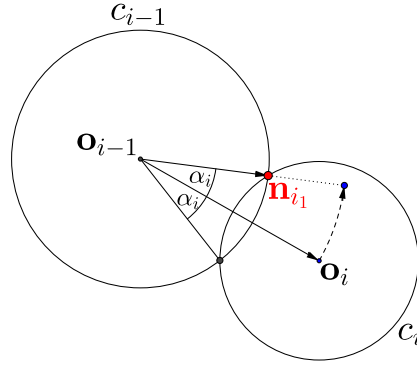
Határozzuk meg a c_{i-1} és c_i , valamint a c_i és c_{i+1} körök közös külső érintőegyeneseit, és tekintsük ezek közül a bal oldaliakat! A \mathbf{q}_i és \mathbf{p}_i pontok rendre azon pontokat jelölik, amelyekben ezen egyenesek érintik a c_i kört. Ha c_{i-1} és c_i metszik egymást, akkor \mathbf{n}_{i1} jelöli a két metszéspont közül azt, amelyre teljesül, hogy az $\overrightarrow{o_{i-1}\mathbf{n}_{i1}}$ vektor előállításához az $\overrightarrow{o_{i-1}o_i}$ vektort pozitív irányban kell elforgatnunk valamilyen $\alpha < 180^\circ$ szöggel. Ezen feltétel ekvivalens az

$$(o_{ix} - o_{i-1x})(n_{i1y} - o_{i-1y}) - (o_{iy} - o_{i-1y})(n_{i1x} - o_{i-1x}) > 0$$

egyenlőtlenséggel. Ezt a konstrukciót szemlélteti a 4.6. ábra. Ha c_i és c_{i+1} metszik egymást, akkor az előzőekhez hasonló módon meghatározzuk az \mathbf{n}_{i2} metszéspontot, melyre az

$$(o_{i+1x} - o_{ix})(n_{i2y} - o_{iy}) - (o_{i+1y} - o_{iy})(n_{i2x} - o_{ix}) > 0$$

egyenlőtlenség teljesül.



4.6. ábra. A két metszéspont közül \mathbf{n}_{i_1} jelöli azt, amelyikre teljesül, hogy az $\overrightarrow{O_{i-1}O_i}$ vektort c_i középpontja körül pozitív irányban kell elforgatni valamilyen $\alpha < 180^\circ$ szöggel.

Ha a körök nem metszik, hanem csak egy pontban érintik egymást, akkor értelemszerűen ezen pontok játsszák \mathbf{n}_{i_1} és \mathbf{n}_{i_2} szerepét. Ezeket felhasználva az \mathbf{u}_i és \mathbf{v}_i pontokat az

$$\mathbf{u}_i = \begin{cases} \mathbf{n}_{i_2}, & \text{ha } \mathbf{q}_i \in d_{i+1}, \\ \mathbf{q}_i, & \text{egyébként;} \end{cases} \quad \mathbf{v}_i = \begin{cases} \mathbf{n}_{i_1}, & \text{ha } \mathbf{p}_i \in d_{i-1}, \\ \mathbf{p}_i, & \text{egyébként} \end{cases}$$

formában határozzuk meg.

Annak eldöntésére, hogy a burkológörbe egy pontban, vagy körív mentén fogja-e érinteni a c_i kört, a következő jelöléseket vezetjük be. Legyen $\mathbf{e}_{i_1} \in c_{i-1}$ az a pont, amelyben a c_{i-1} kört érinti a \mathbf{q}_i pontból a c_{i-1} -hez húzható bal oldali érintőegyenese! Hasonló módon $\mathbf{e}_{i_2} \in c_{i+1}$ jelöli azt a pontot, amelyben a \mathbf{p}_i pontból a c_{i+1} körhöz húzható bal oldali érintőegyenese érinti c_{i+1} -et. Ha a \mathbf{q}_i és az \mathbf{e}_{i_1} pontok a \mathbf{p}_i és az \mathbf{e}_{i_2} által meghatározott egyenes ugyanazon oldalára esnek, akkor azt mondjuk, hogy \mathbf{q}_i „megelőzi” a \mathbf{p}_i pontot. Ezt $\mathbf{q}_i \preceq \mathbf{p}_i$ formában jelöljük. Ha \mathbf{q}_i és \mathbf{e}_{i_1} az egyenes különböző oldalára esnek, akkor pedig $\mathbf{q}_i \not\preceq \mathbf{p}_i$. Analóg módon a jobb oldali burkológörbe esetén a jobb oldali érintőegyeneseket tekintjük.

Ha $\mathbf{q}_i \preceq \mathbf{p}_i$, akkor a burkológörbe az \mathbf{u}_i és \mathbf{v}_i pontokban, valamint az ezek által határolt $\widehat{\mathbf{u}_i \mathbf{v}_i}$ irányított körív mentén fogja érinteni a c_i kört.

Ha $\mathbf{q}_i \not\preceq \mathbf{p}_i$, akkor a célunk a \mathbf{w}'_i felezőpont meghatározása. Jelölje l_{i_1} és l_{i_2} rendre a c_{i-1} és c_i , valamint a c_i és c_{i+1} körök centrálisát! Az l_{i_1} és l_{i_2} szakaszoknak a c_i -vel vett metszéspontjait rendre \mathbf{s}_{i_1} -gyel és \mathbf{s}_{i_2} -vel jelöljük. A \mathbf{w}'_i felezőpontot ekkor $\mathbf{w}'_i = \mathbf{v}'_i \frown \mathbf{u}'_i$ módon adjuk meg, ahol

$$\mathbf{v}'_i = \begin{cases} \mathbf{p}_i, & \text{ha } \mathbf{s}_{i_1} \notin \widehat{\mathbf{p}_i \mathbf{q}_i} \text{ és } \mathbf{p}_i \notin d_{i-1}, \\ \mathbf{n}_{i_1}, & \text{ha } (\mathbf{s}_{i_1} \notin \widehat{\mathbf{p}_i \mathbf{q}_i} \text{ és } \mathbf{p}_i \in d_{i-1}) \vee (\mathbf{s}_{i_1} \in \widehat{\mathbf{p}_i \mathbf{q}_i} \text{ és } c_{i-1} \cap c_i \neq \emptyset), \\ \mathbf{s}_{i_1}, & \text{ha } \mathbf{s}_{i_1} \in \widehat{\mathbf{p}_i \mathbf{q}_i} \text{ és } c_{i-1} \cap c_i = \emptyset; \end{cases}$$

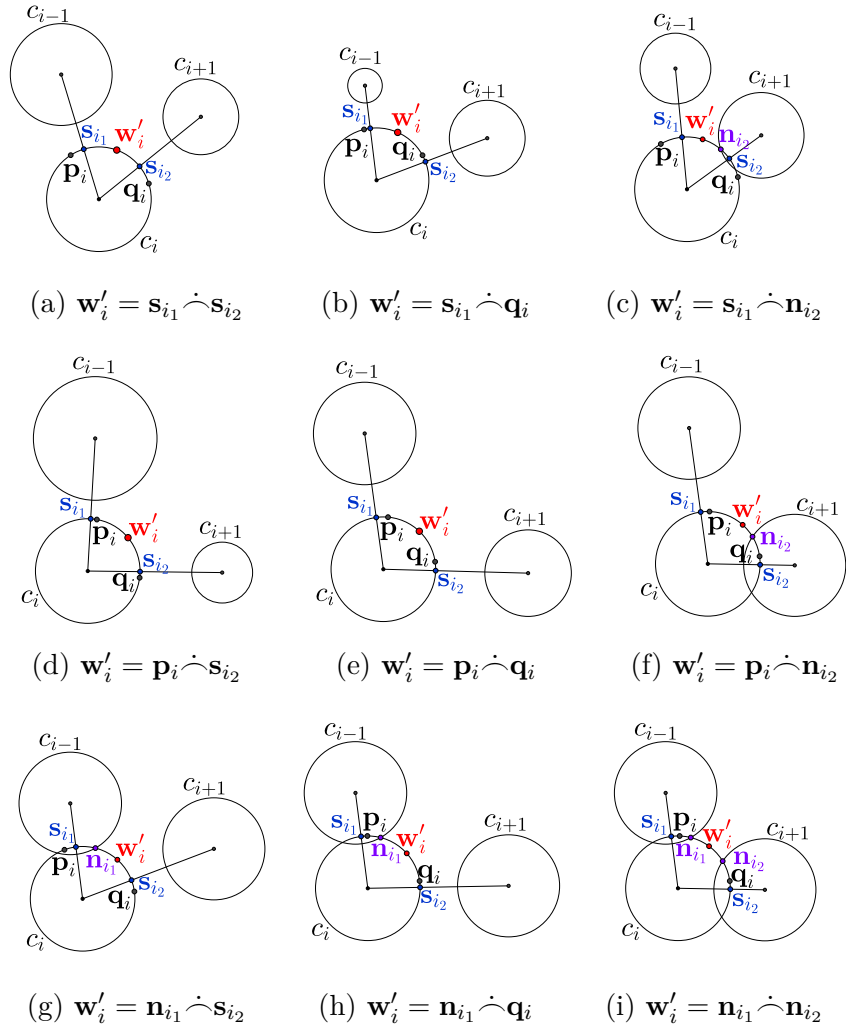
$$\mathbf{u}'_i = \begin{cases} \mathbf{q}_i, & \text{ha } \mathbf{s}_{i_2} \notin \widehat{\mathbf{p}_i \mathbf{q}_i} \text{ és } \mathbf{q}_i \notin d_{i+1}, \\ \mathbf{n}_{i_2}, & \text{ha } (\mathbf{s}_{i_2} \notin \widehat{\mathbf{p}_i \mathbf{q}_i} \text{ és } \mathbf{q}_i \in d_{i+1}) \vee (\mathbf{s}_{i_2} \in \widehat{\mathbf{p}_i \mathbf{q}_i} \text{ és } c_i \cap c_{i+1} \neq \emptyset), \\ \mathbf{s}_{i_2}, & \text{ha } \mathbf{s}_{i_2} \in \widehat{\mathbf{p}_i \mathbf{q}_i} \text{ és } c_i \cap c_{i+1} = \emptyset. \end{cases}$$

A felezőpont létrehozásánál felmerülő variációkat a 4.7. ábra mutatja be.

Az első és utolsó kör esetén $\mathbf{u}_1 = \mathbf{v}_1 = \mathbf{p}_1$, valamint $\mathbf{u}_n = \mathbf{v}_n = \mathbf{q}_n$. Az értekezés függelékében az 1. algoritmus szemlélteti a c_i körhöz tartozó érintési pontok meghatározásának módját.

4.4. Az érintővektorok meghatározása

Az érintési pontok előállítása után a következő lépés a megfelelő érintővektorok meghatározása, majd pedig a burkológörbe létrehozása. Mivel minden kör esetén meg kell különböztetnünk a beérkező és kiinduló burkológörbékhez tartozó érintési pontokat, ezért a következő jelölésrendszert vezetjük be. A c_i és a c_{i+1} körökhöz ($i = 1, \dots, n-1$) azt a harmadrendű Hermite-ívet hozzuk létre, amelynek kezdőpontját \mathbf{b}_i , végpontját \mathbf{a}_{i+1} jelöli, és az ezekben vett érintővektorokat pedig \mathbf{e}_i -vel és \mathbf{f}_i -vel jelöljük. Ha a c_i kör esetén $\mathbf{p}_i \preceq \mathbf{q}_i$, akkor $\mathbf{b}_i = \mathbf{v}_i$,

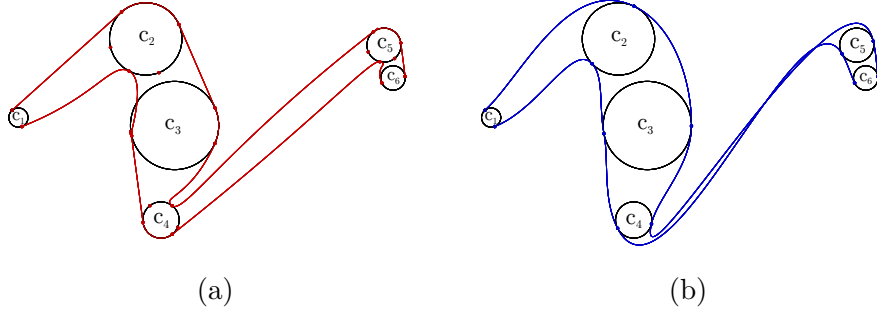


4.7. ábra. A c_i körhöz tartozó w'_i felezőpont meghatározása különböző esetekben.

egyébként $\mathbf{b}_i = \mathbf{w}'_i$. Ha a c_{i+1} kör esetén $\mathbf{p}_{i+1} \preceq \mathbf{q}_{i+1}$, akkor $\mathbf{a}_{i+1} = \mathbf{u}_{i+1}$, egyébként $\mathbf{a}_{i+1} = \mathbf{w}'_{i+1}$. Azaz a burkológörbe konstrukciójakor a kezdőpont vagy a c_i -n meghatározott körív \mathbf{v}_i végpontja, vagy a \mathbf{w}'_i felezőpont lesz. Az Hermite-ív végpontja pedig vagy a c_{i+1} körön meghatározott körív \mathbf{u}_{i+1} kezdőpontja vagy pedig a \mathbf{w}'_{i+1} felezőpont.

Az érintővektorok iránya az érintési pontokból a körök középpontjába mutató vektor pozitív normálisának irányával fog megegyezni. A vektorok hosszának megválasztásakor viszont körültekintően kell eljárunk. Lényeges szempont, hogy a körök pozíciójának, sugarainak változtatásával egyidőben folytonosan változzon az érintővektorok hossza is. Így figyelembe kell vennünk azokat a hiányosságokat, amelyeket a Bastl és mtsai. módszerének vizsgálata során mutattunk be (lásd a 4.1. szakaszt). A 4.2. ábrán szemléltetett probléma akkor lépett fel, amikor az egyik kör helyzetét úgy változtattuk meg, hogy a két pont és a körív használata, valamint a felezőpont használata változott. Vagyis az \mathbf{u}_i és \mathbf{v}_i által meghatározott körív ívhossza egyre kisebb és kisebb lett, majd a módszer átváltott a felezőpont használatára. Ellenben a Kunkli és Hoffmann által javasolt, a hatványvonalról mért távolságon alapuló számolási móddal az érintővektorok hossza az elvártan megfelelően, folytonosan változik. Egy másik szempont az érintővektorok hosszának megválasztásakor az lehet, hogy a módszer jó eredményeket adjon olyan szélsőségesebb helyzetekben is, amikor például egy hirtelen irányváltás történik a körsorozatban, és a körök távol helyezkednek el egymástól. Ilyen esetekben a Kunkli és Hoffmann módszerénél az érintővektorok nem megfelelő hossza miatt a burkolók metszik egymást, a Bastl-féle módszer viszont jobban helytáll. Egy ilyen esetre mutat példát a 4.8. ábra.

A fent említett okok kapcsán merült fel bennünk az ötlet, hogy kombináljuk a két módszert. A \mathbf{b}_i és \mathbf{a}_{i+1} pontoknak a c_i és c_{i+1} körök hatványvonalától vett távolságának kétszeresét jelöljük rendre



4.8. ábra. Az érintővektorok hosszának megválasztási nehézségei. (a) Bastl és mtsai. módszerével a burkológörbe metszi a c_3 kört, mivel az érintési pontok által határolt körív hossza rövid. (b) Az elrendezésből adódóan Kunkli és Hoffmann módszerével a burkológörbék a c_4 és c_5 köröknél metszik egymást.

$d_{k_{i_1}}$ -gyel és $d_{k_{i_2}}$ -vel. A $d_{b_{i_1}}$ és $d_{b_{i_2}}$ értékeket pedig a

$$d_{b_{i_1}} = \begin{cases} 2 \|\mathbf{b}_i - \mathbf{v}_i\|, & \text{ha } \mathbf{b}_i = \mathbf{w}'_i, \\ 2 \|\mathbf{b}_i - \mathbf{v}_{i+1}\|, & \text{egyébként;} \end{cases}$$

$$d_{b_{i_2}} = \begin{cases} 2 \|\mathbf{a}_{i+1} - \mathbf{u}_{i+1}\|, & \text{ha } \mathbf{a}_{i+1} = \mathbf{w}_{i+1}, \\ 2 \|\mathbf{a}_{i+1} - \mathbf{u}_i\|, & \text{egyébként} \end{cases}$$

alakban határozzuk meg Bastl és mtsai. módszere alapján. Ezenfelül bevezetjük az \tilde{s}_{i_1} , \tilde{s}_{i_2} , $d_{c_i, c_{i+1}}$ és d_{avg} jelöléseket, ahol

- \tilde{s}_{i_1} és \tilde{s}_{i_2} : a \mathbf{q}_i és \mathbf{p}_i , valamint a \mathbf{q}_{i+1} és \mathbf{p}_{i+1} által határolt körív hossza;
- $d_{c_i, c_{i+1}}$: a c_i és c_{i+1} körök középpontjainak távolsága;
- $d_{avg} = \frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^{n-1} d_{c_j c_{j+1}}$: a körsorozathoz tartozó körök középpontjainak átlagos távolsága.

A \mathbf{b}_i és \mathbf{a}_{i+1} pontokban vett érintővektorok hosszát rendre d_{i_1} -gyel és d_{i_2} -vel jelöljük, amiket

$$\begin{aligned} d_{i_j} &= \lambda_{i_j} \cdot d_{b_{i_j}} + (1 - \lambda_{i_j}) \cdot d_{k_{i_j}}, \\ \lambda_{i_j} &= \min \left\{ \frac{\tilde{s}_{i_j}}{2r_j\pi} \cdot \frac{d_{c_i, c_{i+1}}}{k \cdot d_{avg}}, 1 \right\} \end{aligned} \quad (4.1)$$

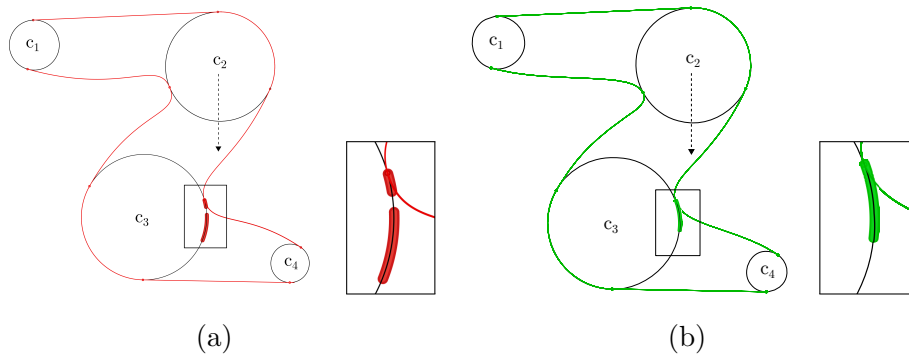
módon határozzuk meg, ahol $k \in \mathbb{R}^+$, $\lambda_{i_j} \in [0, 1]$, $i = 1, 2, \dots, n-1$ és $j = 1, 2$. A k egyfajta alakparaméterként szolgál, amellyel befolyásolni tudjuk a burkológörbék végső alakját. Tapasztalataink alapján a $k = 0.5$ választása a legtöbb esetben megfelelő eredményt ad. Az így előállított érintővektorok teljesítik azon elvárt feltételeinket, hogy ha a körív hossza az adott körre vonatkozóan relatíve rövid, akkor inkább a hatványvonalról vett távolságot preferáljuk, míg ha az adott két kör távolsága az átlagostól jóval nagyobb, akkor nem a hatványvonalról, hanem az érintési pontok egymástól való távolsága alapján határozzuk meg a hosszt. Ezzel az empirikus módszerrel megoldást nyújtunk a két szélsőséges, problémát okozó esetre.

A c_i és c_{i+1} köröket burkoló görbe létrehozását a függelékben található 2. algoritmus mutatja be. A bal oldali, egymáshoz G^1 -folytonosan csatlakozó burkológörbék konstrukcióját összegzi a 3. algoritmus. A jobb oldali burkoló előállítása ezekkel analóg módon történik.

4.5. Összehasonlítás meglévő módszerekkel

Eredményeink demonstrálásához a módszerünket összehasonlítjuk a korábbi burkolási technikákkal. A 4.1. szakaszban bemutattuk, hogy Bastl és mtsai. módszerének fő hiányossága, hogy nem alkalmazható valós idejű modellezési feladatokra. Problémák léptek fel mind az érintési pontokat illetően, mind pedig az érintővektorok hosszának nem folytonos változtatásában. A 4.9. a ábrán látható, hogy ha a c_2 kört középpontjánál fogva lefelé elmozdítjuk, akkor a Bastl-féle módszerrel az érintési pont útvonala megszakad, ami azt eredményezi, hogy az érintési pont (s ezzel együtt a burkológörbe is) hirtelen „ugrik”

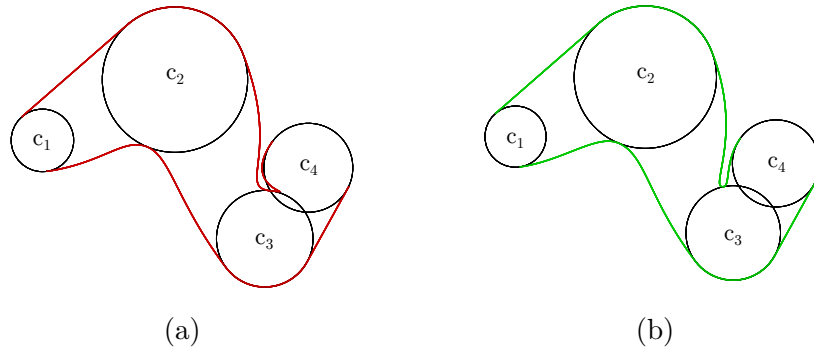
egyét. Ezzel szemben az általunk javasolt módszerrel (lásd a 4.9. b ábrát) az érintési pont helyzete folytonosan változik, lehetővé téve a valós időben történő modellezést. A 4.10. ábrán látható, hogy míg Bastl és mtsai. módszerénél az érintési pontok a szomszédos körök belsejébe kerülhetnek, saját módszerünkkel ez nem fordul elő, így a burkológörbék nem metszenek a körökbe. További példaként szolgál a 4.11. ábra, amelyen látható, hogy hogyan változnak meg a előállított burkológörbék, ha a c_5 kört kissé elmozdítjuk. Bastl és mtsai. módszere azt eredményezi, hogy az egy érintési pontra való váltás miatt az érintővektorok hossza hirtelen megváltozik, ráadásul a görbe metszi a kört. A mi módszerünkkel ez a probléma nem jelentkezik.



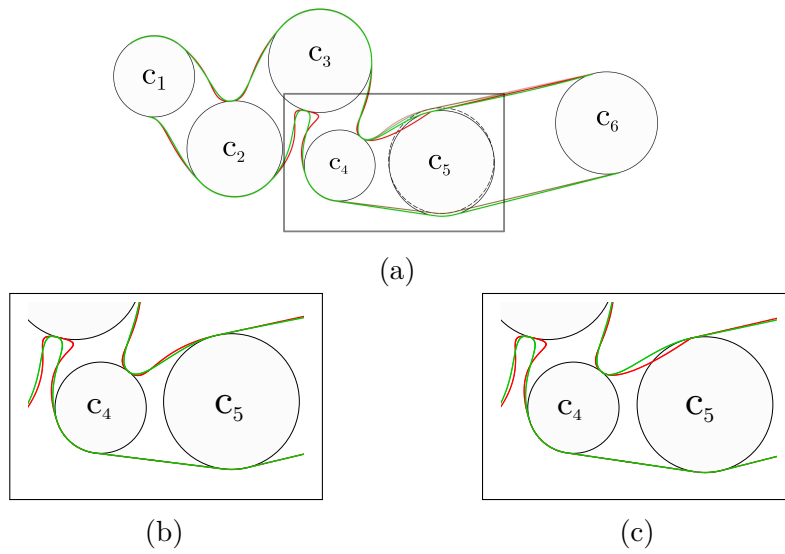
4.9. ábra. A c_3 körön lévő érintési pont helyzetének változása, ha a c_2 kört mozgatjuk. (a) Bastl és mtsai. módszerével az útvonal nem folytonos, ez pedig egy hirtelen „ugrást” eredményez a modellezés során. (b) A mi módszerünkkel az érintési pont helyzete folytonosan változik.

A 4.12. ábrán egy olyan példa látható, amikor a kórsorozat hirtelen irányt vált, valamint a körök távolsága vagy sugara jelentősen megváltozik. Ezen ábrán összevethetjük Kunkli és Hoffmann módszerét (4.12. a ábra), valamint Bastl és mtsai. módszerét (4.12. b ábra) a mi eredményünkkel. A módszerünket használva az ezeknél fellépő problémákat kiküszöböljük (lásd a 4.12. c ábrát).

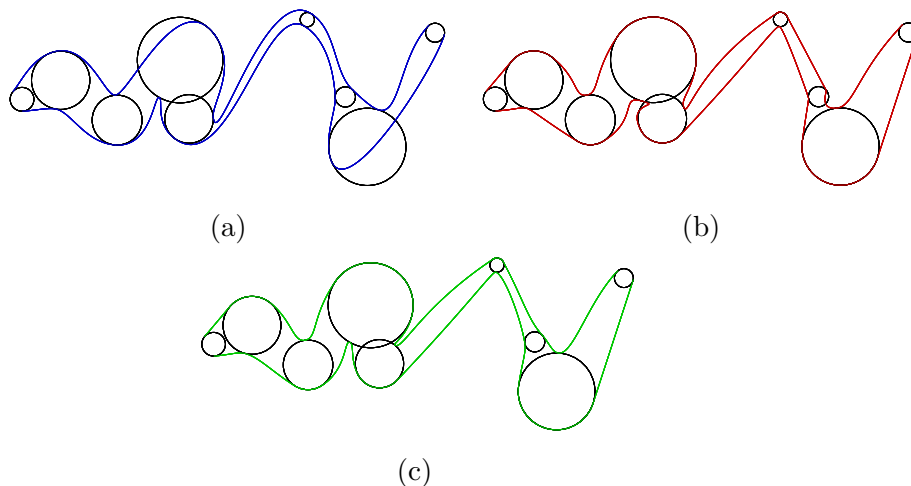
Az összehasonlítás megkönnyítésének érdekében a kérdéses szitu-



4.10. ábra. (a) A c_3 körnél Bastl és mtsai. módszerével az érintési pont a c_4 kör belsejébe kerül, így a burkológörbe metszi a kört. (b) A mi módszerünkkel ezeket a problémákat kiküszöböljük.



4.11. ábra. Ha a c_5 kör pozícióját minimálisan megváltoztatjuk, akkor Bastl és mtsai. módszerével (piros) az érintővektorok hossza hirtelen nagymértékben megváltozik. Ezzel szemben a mi módszerünkkel (zöld) az érintővektorok hossza folytonosan változik. A (b) és (c) nagyított képeken látható a c_5 kör első, majd második pozíciója.



4.12. ábra. (a) Kunkli és Hoffmann módszerének, (b) Bastl és mtsai. módszerének, valamint (c) saját eredményünknek az összehasonlítása. Kunkli és Hoffmann, valamint Bastl és mtsai. módszerénél a burkolók metszik a köröket, illetve utóbbi esetén arra is láthatunk példát, hogy egy érintési pont a szomszédos kör belsejébe kerül.

ációkról videofelvételek is készültek (Kruppa, Kunkli, & Hoffmann, 2018). Ezeket a disszertáció függelékében lévő 1., 2., 3. és 4. animációk mutatják be.

4.6. Összemetszések elkerülése

A burkolási feladatok megoldása során mindig törekszünk arra, hogy az érintési pontok helyzetének, valamint az érintővektorok hosszának megfelelő megválasztásával a burkológörbék lehetőleg ne metsszék se egymást, se pedig a köröket. Bastl és mtsai. cikkükben kitérnek az utóbbi esetre, s ezeket a korábban már említett súlyok bevezetésével oldják meg. Ha egy burkológörbét Bézier-görbéként tekintünk, akkor abban az esetben metszheti valamelyik kört, ha a kontrollpoligonja S-alakú. Ennek feloldására a szerzők súlyok segítségével változtatják

meg az érintési pont pozícióját a körív mentén addig, amíg a kapott görbe kontrollpoligonja C-alakú nem lesz, azaz a Bézier-görbének már nem lesz inflexiós pontja.

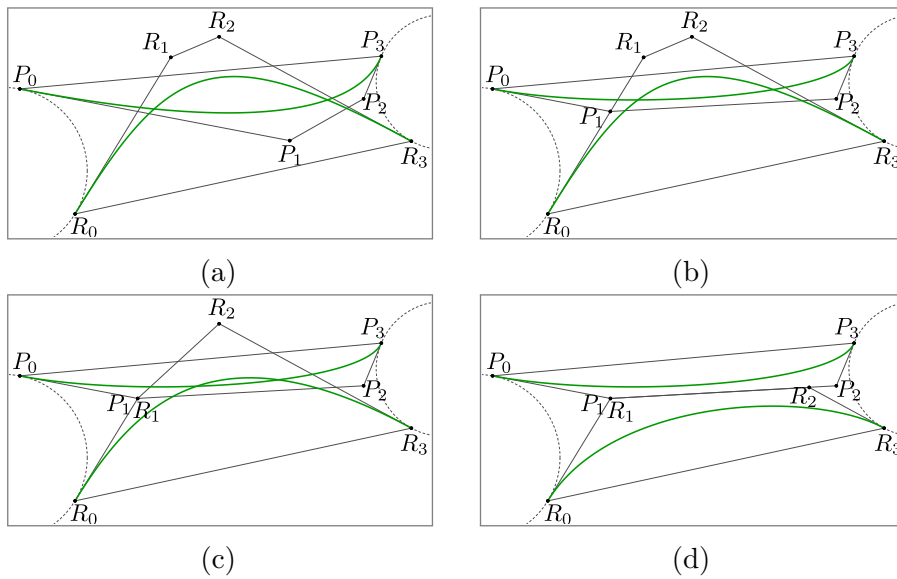
Kutatásunk során a célunk a burkológörbék egymással való összemetszésének vizsgálata és feloldása volt. Tegyük fel, hogy előállítottuk a bal és jobb oldali burkolókat a c_i és c_{i+1} körökhöz, s tekintsük ezeket harmadrendű Bézier-görbéknek, amelyeknek kontrollpoligonjai (már) C-alakúak! A bal oldali görbe kezdőpontját P_0 -lal, végpontját pedig P_3 -mal jelöljük. Hasonlóan határozzuk meg az R_0 és R_1 pontokat a jobb oldali görbe esetén. A bal és jobb oldali burkológörbe kontrollpoligonját rendre $P_0P_1P_2P_3$ -mal és $R_0R_1R_2R_3$ -mal jelöljük. Ekkor a 4.2. definíció alapján

- $P_0P_3 \cap R_0R_3 = \emptyset$,
- $P_0, P_3 \notin R_0R_1R_2R_3$, és
- $R_0, R_3 \notin P_0P_1P_2P_3$

teljesül. Ha a bal és jobb oldali burkológörbe metszi egymást, akkor bizonyos, hogy a kontrollpoligonjaik is metszik egymást. Tehát az összemetszések feloldására vonatkozó algoritmusunk kezdőlépése, hogy megvizsgáljuk, hogy a két kontrollpoligon metszi-e egymást. Ha igen, akkor a kezdő- és végpontbeli érintővektorok hosszát kell megfelelően módosítanunk. Ehhez tekintsük a kontrollpoligonok első és utolsó oldalát, a P_0P_1 és P_2P_3 , valamint az R_0R_1 és R_2R_3 szakaszokat! A metszések feloldásához ezeknek rövidítjük meg a hosszát rendre a másik kontrollpoligon oldalával vett metszéspontok segítségével. A módszerünket részleteiben az értekezés függelékében lévő 4. algoritmus mutatja be. Ezzel a hatékony megközelítéssel el tudjuk érni, hogy a burkológörbék kontrollpoligonjai már ne metsszék egymást. Mivel minden Bézier-görbe a kontrollpontjainak konvex burkán belül van, és egy C-alakú kontrollpoligonnal rendelkező Bézier-görbe kontrollpontjainak konvex burka a kontrollpoligon, valamint annak kezdő- és végpontját összekötő szakasz által határolt síkrész, így garantáljuk, hogy a görbék sem fogják metszeni egymást. A módszer implicit

módon azon szituációkat is megoldja, amikor a burkoló túlságosan elvékonyodik, hiszen a kontrollpoligonok már metszhetik egymást olyan esetben is, amikor a görbék maguk még nem. Az algoritmusunk működését a 4.13. ábra mutatja be.

Láthatjuk tehát, hogy C-alakú kontrollpoligonnal rendelkező Bézier-görbék esetén a módszerünk megoldást nyújt az említett problémákra. Azonban a problémakört mélyebben megvizsgálva azt figyelhetjük meg, hogy Bastl és mtsai. módszerével valójában mégse lehetséges minden S-alakú kontrollpoligont C-alakúvá alakítani. Erre szolgál bizonyítékként a 4.2. ábra, ahol a használt körív olyan rövid, hogy azon belül hiába súlyozunk, a görbe kontrollpoligonja továbbra is S-alakú marad. Így jövőbeni célunk a 4. algoritmus módosítása olyan esetekre is, amelyeknél a görbe kontrollpoligonja S-alakú. Az összetet-



4.13. ábra. A burkológörbék összemetszésének feloldása a 4. algoritmus alapján az (a) kiindulási helyzetből. A (b), (c) és (d) ábrán rendre a P_1 , R_1 és R_2 pontok pozícióját módosítjuk. Ebben a példánkban P_2 pozíciója nem változik.

székek feloldását ezekben az esetekben az érintővektorok hosszának meghatározásakor (lásd a 4.4. szakaszt) a k paraméterérték manuális változtatásával érhetjük el.

4.7. Kiterjesztési lehetőségek

Ebben a szakaszban szeretném bemutatni azon lehetőségeket, amelyekkel síkbeli burkolómódszerünket kiterjeszthetjük. Először is Bastl és mtsai. munkája nyomán megvizsgáljuk annak elméleti lehetőségét, hogy hogyan tudunk burkológörbét előállítani nemcsak körökhöz, hanem általánosabban véve zárt konvex alakzatokhoz. Bemutatjuk továbbá a térbeli kiterjesztésre vonatkozó megoldásunkat, végül pedig azon módszerünket, amelynek segítségével komplexebb, elágazásokkal rendelkező modelleket tudunk létrehozni.

4.7.1. Kiterjesztés konvex síkbeli alakzatokra

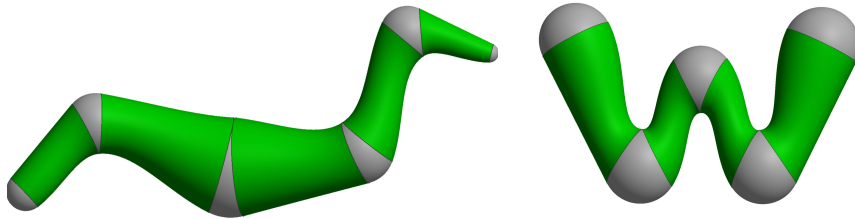
Bastl és mtsai. a cikkükben felvetik a lehetőségét annak, hogy módszerüket általánosítsák síkbeli, konvex alakzatok burkolására. Pontosabban olyan konvex alakzatoknak a sorozatához tudjuk előállítani a burkolókat, amelyeknél egyértelműen meghatározható két alakzatnak két közös külső érintőegyenes. Erre alapozva akár a mi módszerünket is kiterjeszthetjük ebbe az irányba. A 4.3. szakaszban bemutatott érintési pontok előállításához szükséges \mathbf{p}_i és \mathbf{q}_i pontok meghatározása egyértelmű, az \mathbf{n}_{i_j} és \mathbf{s}_{i_j} ($j = 1, 2$) pontok megadásához pedig mindössze az alakzat középpontjának meghatározására van szükség. Ehhez tekintsük az alakzat konvex burkát, majd állítsuk elő a legkisebb olyan c_{i_s} kört, amely tartalmazza ezt (például Welzl módszerével (Welzl, 1991)). Ha a c_{i_s} kör középpontját tekintjük az alakzat középpontjának, akkor már előállíthatjuk az érintési pontokat. Az érintővektorok meghatározására is ezen c_{i_s} és c_{i+1_s} körök lesznek segítségünkre, így általánosíthatók a 4.4. szakaszban leírt számítási módszerek.

4.7.2. Kiterjesztés három dimenzióba

Bastl és mtsai. kiterjesztették módszerüket a háromdimenziós térbe, amely során az érintési körök meghatározásához a Kunkli és Hoffmann által javasolt módszert használták (lásd a 3.1. szakaszt). Esetükben viszont nem csak egy, hanem akár két érintési kör is tartozhat egy gömbhöz. A körök megadása után egy csőfelületek összerosásán alapuló módszer (Bizzarri & Lávička, 2013) segítségével készítik el a két gömb közötti burkolót. Azonban azt nem mutatják be, hogy pontosan miképp alkalmazzák ezt a módszert, hiszen itt diszkrét gömbsorozatról van szó. Fontos továbbá megjegyeznünk, hogy a térben is felléphetnek azok a problémák, amiket az érintési pontok nem megfelelő megválasztása okozott, hiszen az érintési körök meghatározása teljes mértékben a síkbeli módszeren alapszik. Azaz előfordulhatnak olyan esetek, amikor az s_i gömb érintőköre valamely szomszédos gömbhöz tartozó gömbtestbe esik. A síkbeli esetnél fellépő, az érintővektorok hosszából adódó problémák viszont nem jelentkeznek, ugyanis azokat semmilyen módon nem használták fel a térbeli kiterjesztésnél.

Kunkli és Hoffmann elvét követve kézenfekvő volt saját módszerünket is kiterjeszteni a háromdimenziós térbe. Az érintési körök meghatározásához a szomszédos s_{i-1} , s_i és s_{i+1} gömböket tekintjük, majd a középpontjaikon áthaladó P_i síkkal elmetsszük a gömböket. Így három, egy síkba eső kört kapunk, amelyekre alkalmazzuk a saját, síkbeli burkolómódszerünket. Az s_i gömbhöz tartozó körön ekkor lehetséges, hogy nem csak egy bal oldali pontot állítottunk elő hanem lehet, hogy kettőt (hasonló módon lehetséges, hogy egy, vagy két jobb oldali érintési pontot kapunk). Az érintési pontok alapján egyértelműen meghatározhatunk egy vagy két olyan érintési kört az s_i gömbön, amelyeknek síkja merőleges a P_i síkra, valamint áthalad a megfelelő bal és jobb oldali érintési pontokon. Ha az s_i gömbhöz két érintési kör tartozik, akkor a két kör által közrezárt gömbi felületdarabot is a burkolófelület részeként tekintjük. Az első és utolsó gömb esetén az s_1 és s_2 , valamint az s_{n-1} és s_n gömbök közös érintőkúpjának segítségével állítjuk elő az érintési köröket.

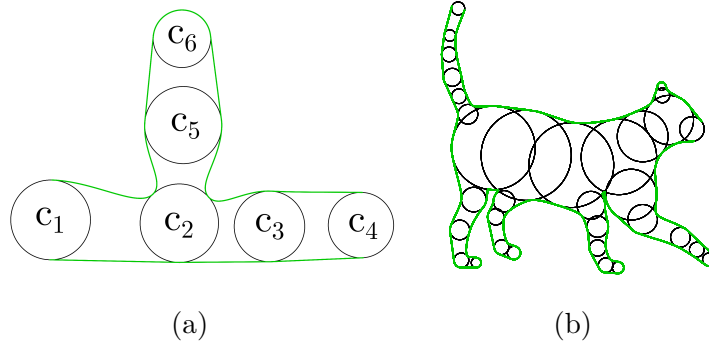
Az s_i és s_{i+1} gömbök közötti $\mathbf{s}_i(\phi, t)$ ($i = 1, 2, \dots, n - 1$) felületdarab elkészítéséhez meghatározzuk a kiindulási \mathbf{z}_i és \mathbf{z}_{i+1} pontokat a gömbök megfelelő érintési körein. Ezeket a pontokat fogjuk elforgatni ϕ szöggel ($\phi \in [0, 2\pi]$) az érintési körök mentén. A felület az elforgatott $\mathbf{z}_i(\phi)$ pontokból kiinduló $\mathbf{z}_{i+1}(\phi)$ végpontú Hermite-ívek uniójaként áll elő. Az érintővektorok irányát az adott gömbnek az érintési körre vonatkozó pólusának segítségével határozzuk meg. Az érintővektorok hosszának megválasztásánál felhasználjuk a síkbeli módszerünknel tapasztaltakat (lásd a (4.1) formulát). A kör kerülete és a körív hossza könnyedén megfeleltethető a térben a gömb felszínével, valamint a gömbi darab felszínével. A hatványvonalról vett távolság helyett pedig a gömbök hatványsíkjától való távolságot fogjuk használni. Így a síkbeli esetben használt számolási módszert adaptálhatjuk a térbeli esetre. A térbeli kiterjesztésünk eredményére mutat példát a 4.14. ábra.



4.14. ábra. Gömbsorozat burkolása a módszerünkkel. A burkolófelületet Hermite-ívekből előállított racionális felületdarabok (zöld), valamint gömbi darabok (szürke) alkotják.

4.7.3. Elágazásos struktúrák burkolóinak előállítása

A burkolómódszerek egy nagyon praktikus és jól alkalmazható kiterjesztése az elágazásos struktúrák kezelése. Ebben a pontban bemutatjuk, hogy hogyan tudjuk módszerünket ily módon kiterjeszteni mind síkban, mind pedig térben.



4.15. ábra. Elágazásokkal rendelkező alakzatok modellezése módszerünkkel.

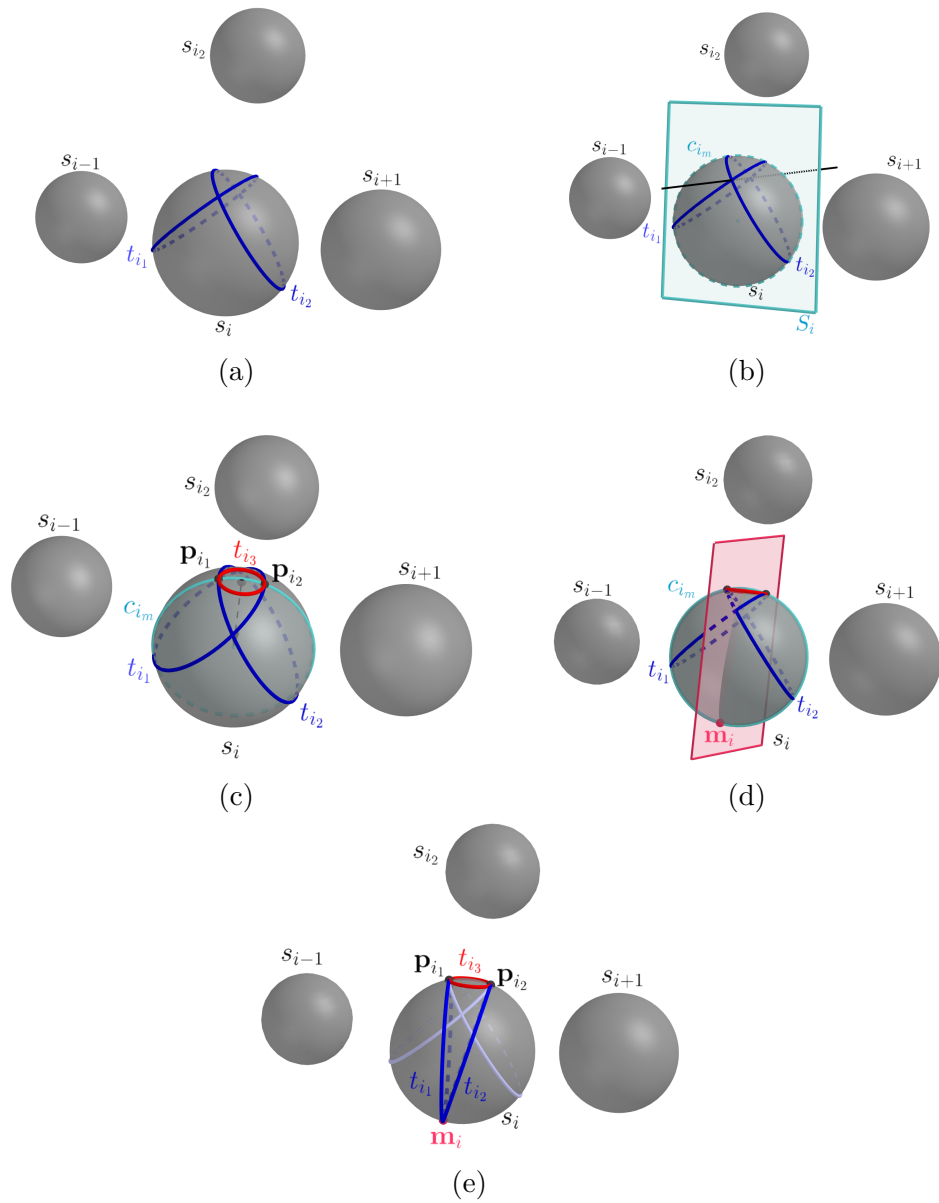
4.7.3.1. Kétdimenziós elágaztatás Bastl és mtsai. egy nagyon jól használható, ámde egyszerű ötletet mutattak be munkájukban (Bastl et al., 2015), amellyel elágazásokat tartalmazó körsorozatot lehet burkolni. Az ötlet azon alapszik, hogy a bal oldali és a jobb oldali burkológörbét különböző körök alapján hozzuk létre. Szemléltetésképp tekintsük a 4.15. a ábrát! A bal oldali burkológörbét a c_1, c_2, c_5, c_6 és a c_6, c_5, c_2, c_3, c_4 körök, a jobb oldalt pedig a c_1, c_2, c_3, c_4 körök burkolásával kapjuk. Ily módon a c_1, c_2, c_3, c_4 körökből álló főághoz a c_2 körnél csatlakozik a c_5, c_6 körökből álló elágazás. A technikát egy az egyben adaptálhatjuk a módszerünkhöz, melynek eredményét egy komplex esetben a 4.15. b ábra mutatja be.

4.7.3.2. Háromdimenziós elágaztatás Bastl és mtsai. cikkében ugyan szerepel egy ábra a háromdimenziós elágaztatási lehetőségről, de részletes információt nem közölnek arról, hogy hogyan állítják elő az érintési köröket a csatlakoztatásnál, márpedig ez a problémakör nem triviális. A 3. fejezetben bemutatott elágaztatási algoritmusunkat nem tudjuk alkalmazni ezen módszerünk esetén, ugyanis a csatlakozáshoz szükséges görbe előállítás nem oldható meg úgy, hogy két érintési kör tartozik az s_i gömbhöz. Így felmerült bennünk az igény egy olyan megoldás kidolgozására, amely előnyt kovácsol a burkoló-

módszerünk azon tulajdonságából, hogy egy gömb két érintési körrel is rendelkezhet.

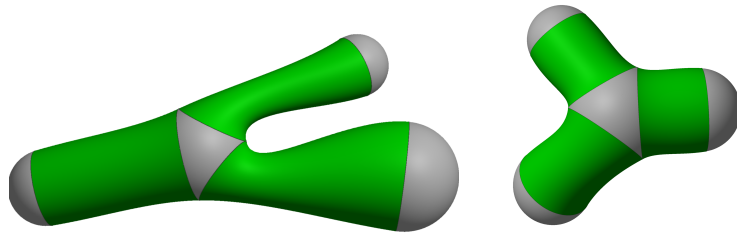
Az elágazással rendelkező gömbstruktúra leírására a 3.2. szakaszban ismertetett szerkezetet használjuk. Tekintsük az s_{i-1} , s_i és s_{i+1} gömböket, és jelölje s_{i_2} azt a gömböt, amelyet csatlakoztatni szeretnénk az s_i gömbhöz ($i \in \{2, \dots, n-1\}$)! Az elágaztatás megvalósításhoz az s_i gömbön a t_{i_1} , t_{i_2} és t_{i_3} érintőköröket fogjuk létrehozni, amelyekhez rendre az s_{i-1} , s_{i+1} és az s_{i_2} gömbök fognak csatlakozni. A módszerünkkel biztosítjuk, hogy se az érintőkörök, se pedig a burkolófelületek ne metsszék egymást.

Az algoritmusunk a következő. Az s_i gömbhöz előállítjuk azt a t_{i_1} és t_{i_2} érintőkört, amelyet rendre az s_{i_2} , s_i , s_{i+1} gömbök, valamint az s_{i-1} , s_i és s_{i_2} gömbök határoznak meg (lásd a 4.16. a ábrát). Legyen S_i az a sík, amelyen rajta van az s_i gömb középpontja, és merőleges a t_{i_1} és t_{i_2} síkjainak metszéspontjára! Ahogy látható a 4.16. b ábrán, ha s_i -t ezzel az S_i síkkal elmetsszük, akkor eredményül a c_{i_m} főkört kapjuk. Ekkor a t_{i_1} és t_{i_2} köröknek a c_{i_m} körrel való metszéspontjait jelöljük \mathbf{p}_{i_1} -gyel és \mathbf{p}_{i_2} -vel. A t_{i_3} érintőkört ezután úgy állítjuk elő, hogy menjen át a \mathbf{p}_{i_1} és \mathbf{p}_{i_2} pontokon, illetve a középpontja az általuk meghatározott szakasz felezőpontja, a síkjának normálvektora pedig a középpontjából a gömb középpontjába mutató vektor legyen (lásd a 4.16. c ábrát). Az így meghatározott t_{i_3} érintőkörhöz fog csatlakozni az s_{i_2} gömbhöz előálló burkolófelület. Ha t_{i_1} és t_{i_2} metszik egymást, akkor további teendőnk van. A t_{i_1} és t_{i_2} körök síkjainak azon szögfelező síkját tekintjük, amely metszi a t_{i_3} kört, majd elmetsszük ezzel a c_{i_m} kört. A kapott metszéspontok közül azt választjuk, amely távolabb esik az s_{i_2} gömbtől. Ezt a pontot \mathbf{m}_i -vel jelöljük, ahogy a 4.16. d ábrán látható. Ekkor az érintőköröket a következő módon adjuk meg: t_{i_1} menjen át \mathbf{p}_{i_1} és \mathbf{m}_i pontokon, középpontja legyen ezek felezőpontja, a síkjának normálvektora pedig mutasson az s_i gömb középpontjába. A t_{i_2} érintőkört analóg módon határozhatjuk meg a \mathbf{p}_{i_2} és \mathbf{m}_i pontok segítségével. Tehát ahogy a 4.16. e ábrán látható, az így kapott két érintési kör az \mathbf{m}_i pontban érinti egymást, a t_{i_3} kört pedig rendre a \mathbf{p}_{i_1} és \mathbf{p}_{i_2} pontokban érintik. A kapott érintési körök segítségével a



4.16. ábra. Az elágaztathoz szükséges t_{i_1} , t_{i_2} és t_{i_3} érintőkörök előállítására oly módon, hogy ne metszék egymást.

burkolófelületeket a szokásos módon állíthatjuk elő. A csatlakoztatási algoritmusunk eredményét mutatja be a [4.17.](#) ábra.



4.17. ábra. Elágazást tartalmazó gömbsorozatok burkolásának eredményei.

5. RE görbék alkalmazása diszkrét körsorozat burkolására

Az értekezés 2. fejezetében bemutattuk, hogy burkolás során egy diszkrét körsorozatot burkoló görbepár előállítására a cél, míg a középtengely-transzformáció egy síkbeli tartományt ír le a maximális sugarú beírható körök segítségével. Középtengely-transzformációk esetén a (2.1) burkolóformulával előállíthatjuk a burkológörbét, azaz rekonstruálhatjuk a tartomány kontúrját. A diszkrét burkolás és a középtengely-transzformáció tehát a problémafelvetésben is különbözik egymástól, mégis észrevehetjük a közös jellemzőket. Ezek által motiválva kezdtük meg kutatásunkat abban a témakörben, hogy miképp lehet középtengely-transzformációkat diszkrét értelemben vett burkolására használni (Kruppa, 2020). A célunk tehát, hogy egy diszkrét körsorozathoz állítsunk elő olyan, egymáshoz G^1 -folytonosan csatlakozó RE görbéket, amelyekre a (2.1) burkolóformulával kapott burkológörbék eleget tesznek a 2.2. definícióban szereplő elvárásoknak.

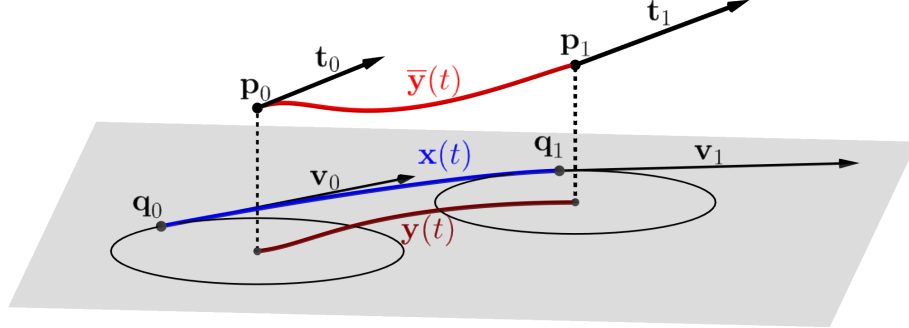
5.1. Előzmények és motiváció

A továbbiakban felidézünk azt a Bizzarri és mtsai. által közölt algoritmust (Bizzarri et al., 2016), amely az $\mathbb{R}^{2,1}$ Minkowski-térben interpolál két pontot és két érintővektort úgy, hogy az eredményül kapott görbe RE görbe lesz.

Legyen adott \mathbf{p}_0 és \mathbf{p}_1 , két $\mathbb{R}^{2,1}$ -beli pont, valamint a $\mathbf{t}_0, \mathbf{t}_1 \in \mathbb{R}^{2,1}$ érintővektorok! A cél olyan $\bar{\mathbf{y}}: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^{2,1}$ RE görbe létrehozása, amely interpolálja a \mathbf{p}_0 és \mathbf{p}_1 pontokat, valamint az ezekben vett érintőegyeneselek irányvektorai rendre a \mathbf{t}_0 és \mathbf{t}_1 vektorok, azaz

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{y}}(0) &= \mathbf{p}_0, & \bar{\mathbf{y}}(1) &= \mathbf{p}_1, \\ \bar{\mathbf{y}}'(0) &= \beta_0 \mathbf{t}_0, & \bar{\mathbf{y}}'(1) &= \beta_1 \mathbf{t}_1, & \beta_0, \beta_1 &\in \mathbb{R} \setminus \{0\}. \end{aligned} \tag{5.1}$$

Az interpoláló RE görbe előállítása az 5.1. ábrán látható. Az algoritmus első lépéseként a (2.1) burkolóformula alapján meghatározzuk



5.1. ábra. Az $\bar{y}(t)$ RE görbe létrehozása a \mathbf{p}_0 , \mathbf{p}_1 , \mathbf{t}_0 és \mathbf{t}_1 adatokhoz Bizzarri és mtsai. módszere (Bizzarri et al., 2016) alapján.

a $\mathbf{q}_i^\pm \in \mathbb{R}^2$ ($i = 0, 1$) érintési pontokat a leendő burkológörbéken. Ezen pontok

$$\mathbf{q}_i^\pm = \mathbf{p}_i^\nabla - p_{iz} \frac{t_{iz} \mathbf{t}_i^\nabla \pm \mathbf{t}_i^\nabla \sqrt{\|\mathbf{t}_i^\nabla\|^2 - t_{iz}^2}}{\|\mathbf{t}_i^\nabla\|^2} \quad (5.2)$$

alakban adhatók meg. A következő lépésként egy síkbeli görbét állítunk elő, amelyhez a két-két érintési pont közül a bal oldali \mathbf{q}_i^+ pontokat fogjuk felhasználni. A továbbiakban ezeket \mathbf{q}_i -vel jelöljük, azaz $\mathbf{q}_i = \mathbf{q}_i^+$. Majd a \mathbf{p}_i^∇ középpontú, r_i sugarú körnek a \mathbf{q}_i pontokban vett $\mathbf{v}_i \in \mathbb{R}^2$ ($i = 0, 1$) érintővektorait adjuk meg, azaz

$$\mathbf{v}_i = \alpha_i \frac{(\mathbf{q}_i - \mathbf{p}_i^\nabla)^\perp}{\|\mathbf{q}_i - \mathbf{p}_i^\nabla\|}, \quad \alpha_i \in \mathbb{R}. \quad (5.3)$$

Ezután előállítjuk az $\mathbf{x}: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ paraméteres görbét, amely interpolálja a \mathbf{q}_0 és \mathbf{q}_1 pontokat úgy, hogy ezekben adottak a \mathbf{v}_0 és \mathbf{v}_1 érintővektorok. A keresett $\mathbf{x}(t)$ görbét választhatjuk például harmadrendű Hermite-ívnek, amelyre

$$\mathbf{x}(i) = \mathbf{q}_i, \quad \mathbf{x}'(i) = \mathbf{v}_i, \quad i = 0, 1 \quad (5.4)$$

teljesül. Láthatjuk, hogy az 5.3 kifejezésben az α_i értékek nem rögzítettek, a szerzők egyfajta paraméterként használják, amelyekkel befolyásolni lehet a burkológörbe végső alakját.

Az $\mathbf{y}(t): [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ középtengelyt $\mathbf{x}(t)$ jobb oldali ekvidisztáns görbéjeként állítjuk elő, azaz

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{x}(t) + \frac{r(t)}{\|\mathbf{x}'(t)\|} \mathbf{x}'^\perp(t) = \mathbf{x}(t) + f(t) \mathbf{x}'^\perp(t),$$

amely akkor és csak akkor racionális, ha $f(t) = \frac{r(t)}{\|\mathbf{x}'(t)\|}$ racionális. Az $\bar{\mathbf{y}}: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^{2,1}$ középtengely-transzformáció pedig

$$\bar{\mathbf{y}}(t) = \begin{pmatrix} x_x(t) + x'_y(t) f(t), & x_y(t) - x'_x(t) f(t), \\ f(t) \sqrt{x'_x(t)^2 + x'_y(t)^2} \end{pmatrix} \quad (5.5)$$

alakban írható fel. Ahhoz, hogy a kapott $\bar{\mathbf{y}}(t)$ görbe teljesítse az (5.1) feltételeket, az $f(t)$ függvényt a következőképpen kell előállítani. Az $\bar{\mathbf{y}}(i) = \mathbf{p}_i$ egyenletek alapján

$$f(i) = \tilde{f}_i = \frac{\mathbf{p}_{i_z}}{\|\mathbf{v}_i\|}, \quad i = 0, 1. \quad (5.6)$$

Az $\bar{\mathbf{y}}'(i) = \beta_i \mathbf{t}_i$ egyenletek megoldásával a β_i értékeket

$$\beta_i = \frac{\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_i - \tilde{f}_i \mathbf{x}''(i) \cdot \mathbf{v}_i^\perp}{\mathbf{t}_i \cdot \mathbf{v}_i}$$

formában fejezhetjük ki, amelyek alapján felírható, hogy

$$f'(i) = \tilde{f}'_i = -\frac{\overset{\nabla}{\mathbf{t}}_i \cdot (\tilde{f}_i \mathbf{x}''(i) - \mathbf{v}_i^\perp)}{\overset{\nabla}{\mathbf{t}}_i \cdot \mathbf{v}_i}, \quad i = 0, 1. \quad (5.7)$$

Azaz az $f(t)$ függvényt oly módon kell előállítani, hogy teljesítse az 5.6 és 5.7 peremfeltételeket, tehát például Hermite-féle interpolációval is létrehozhatjuk harmadfokú polinomiális függvényként. Az ekképpen meghatározott, (5.5) formában felírt $\bar{\mathbf{y}}(t)$ görbe RE görbe, azaz olyan görbe, amely által meghatározott \mathbf{x}^+ és \mathbf{x}^- burkológörbék racionálisak.

Megjegyzés. Ha összevetjük ezt az összefoglalót Bizzarri és mtsai. cikkével (Bizzarri et al., 2016), eltérést figyelhetünk meg egyrészt a magyarázó ábrát, másrészt pedig a \mathbf{v}_i vektorok előállítását illetően. A szerzők cikkében az (5.2) módon megadott \mathbf{q}_i^+ pontok a körök jobb oldalára kerülnek. Azonban ha \mathbf{n}^\perp az \mathbf{n} vektor negatív normálisát jelöli (ahogy ezt Bizzarri és mtsai. írják), akkor a \mathbf{q}_i^+ pont nem a jobb, hanem a körök bal oldalára kerül. Ez abban is megmutatkozik, hogy miután létrehozuk az interpoláló $\mathbf{x}(t)$ görbét az (5.4) formulával, az $\mathbf{y}(t)$ előállításánál ismét negatív irányban forgatjuk el a görbe érintővektorait, így kapjuk meg a kör középpontjain átmenő középtengelyt. Ha az érintési pont a jobb oldali lenne, akkor az ekvidisztánst nem így kellene előállítani. Mivel a számolásuk többi része is ezt a gondolatmenetet támasztja alá, így valószínűleg csak figyelmetlenség volt Bizzarri és mtsai. részéről, hogy a konstrukciót a körök jobb oldali érintési pontjából mutatják be. Ennek következtében a \mathbf{v}_i vektorok $\alpha_i \frac{\mathbf{p}_i - \mathbf{q}_i}{\|\mathbf{p}_i - \mathbf{q}_i\|}$ módon való megválasztása (ahogy az a cikkükben szerepel) úgy megfelelő csak, ha az α_i értéke negatív. A szemléletesebb jelentés okán az értekezésemben a \mathbf{v}_i vektorokat ellentétes irányúnak vettem, lásd az (5.3) formulát. Az egységesség érdekében a számolásnak megfelelő új ábrákat készítettem, és a disszertáció további részeiben is ezt a szemléletet követem.

5.2. A bemeneti adatok rekonstrukciója

Ahogy azt az 5.1. szakaszban láthattuk, a Bizzarri és mtsai. (Bizzarri et al., 2016) által megadott RE konstrukciós algoritmus bemenete két $\mathbb{R}^{2,1}$ -beli pont és érintővektor. Ezzel szemben egy burkolási feladat esetén egy diszkrét körsorozat áll rendelkezésünkre. Így a legfontosabb feladatunk, hogy megfelelő bemeneti adatot hozzunk létre az RE görbék előállításához.

Legyen adott a $\mathcal{C} = \{c_1, c_2, \dots, c_n\}$, $n \in \mathbb{N}$ megengedett körsorozat! A célunk \mathbf{p}_i és \mathbf{t}_i meghatározása minden egyes körhöz, amikhez így páronként tudunk majd egy-egy RE görbét létrehozni. Azaz a $\mathcal{P} = \{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_n\}$ pontsorozatot, valamint az ezekhez rendre tartó

zó $\mathcal{T} = \{\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2, \dots, \mathbf{t}_n\}$ vektorokat kell előállítani. A köreinket egy-egy pozitív irányítású ciklusnak tekinthetjük, ami így a tér egy-egy pontjának feleltethető meg. Tehát minden $\mathbf{o}_i (o_{i_x}, o_{i_y})$ középpontú, r_i sugarú c_i körhöz hozzárendeljük a

$$\mathbf{p}_i = (o_{i_x}, o_{i_y}, r_i), \quad \mathbf{p}_i \in \mathbb{R}^{2,1} \quad (5.8)$$

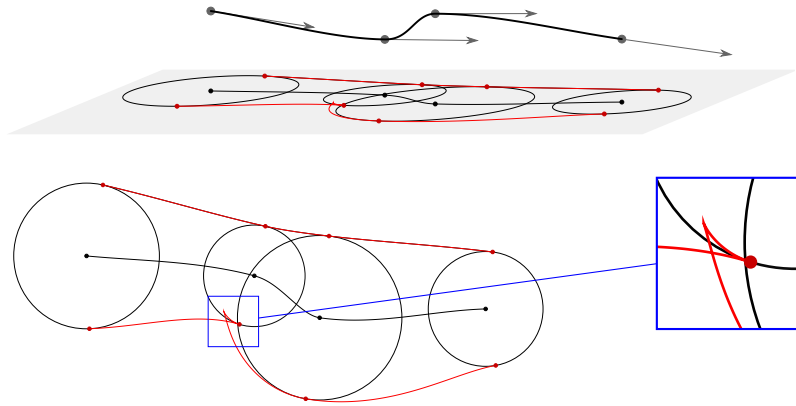
pontot ($i = 1, 2, \dots, n$). Azonban az érintővektorok megadása nem ennyire egyértelmű. Egy kézenfekvő megközelítésnek tűnhet, hogy interpoláljuk az újonnan kapott \mathbf{p}_i pontjainkat valamilyen görbével, és az ezen pontokban vett érintővektorok lehetnek a keresett \mathbf{t}_i vektorok. Ha például Catmull-Rom szplájnt hozunk létre, akkor választhatjuk a

$$\mathbf{t}_i = \lambda_i (P_{i+1} - P_{i-1}), \quad i = 2, 3, \dots, n-1, \quad \lambda_i \in \mathbb{R}^+$$

érintővektorokat. Az első és utolsó pont esetén pedig a

$$\mathbf{t}_1 = \lambda_1 (P_2 - P_1) \quad \mathbf{t}_n = \lambda_n (P_n - P_{n-1}).$$

vektorokat használhatjuk. Ha ilyen módon választjuk meg a bemeneti adatokat, akkor az RE konstrukciós algoritmus további lépéseit alkalmazva azt tapasztalhatjuk, hogy bár sok esetben akár megfelelő eredményt kapunk, könnyen előfordulhat, hogy a módszer által az (5.2) formulával számolt \mathbf{q}_i érintési pontok a szomszédos körök belsejébe esnek. Így a burkológörbe nemcsak a köröket, hanem önmagát is metszi, és csúcspontjai lesznek. Egy ilyen esetet mutat be az 5.2. ábra. Burkolási feladatok megoldása során kiemelten fontos az érintési pontok helyzete, valamint igen lényeges szempont, hogy az egyes módszerek garantálják-e, hogy az érintési pontok nem esnek más körök belsejébe. Emiatt, ha az RE görbét burkolásra szeretnénk alkalmazni, az érintővektorok ilyen ad hoc jellegű választása nem ad megfelelő eredményt. Kunkli megvizsgálta (Kunkli, 2009), hogy az érintési pontok megtalálása egyáltalán nem triviális feladat, és többek között megmutatta azt is, hogy a Peternell és mtsai. által leírt burkológörbék (Peternell et al., 2008) nem lesznek mindig megfelelőek.



5.2. ábra. Ha nem megfelelő módon választjuk meg az érintővektorokat, akkor az RE görbe nem mindig alkalmas burkolási feladatok megoldására. A burkológörbe érintési pontjai egy-egy körön a szomszédos körök belsejébe is eshetnek.

Megjegyzés. Az RE görbe, valamint a hozzá tartozó burkológörbék előállítására független a \mathbf{t}_i érintővektorok hosszától, azonban az átláthatóbb szemléltetés érdekében az értekezésben szereplő ábrák elkészítésénél a \mathbf{t}_i vektorokat normalizáltuk és a környezetüknek megfelelő skalárszorosait használtuk.

5.2.1. Rekonstrukció két érintési pont rögzítésével

Láthatjuk tehát, hogy ha a \mathbf{t}_i vektorokat nem megfelelő módon határozzuk meg, akkor az érintési pontok helyzete problémás lehet. Azt sem szabad elfelejtünk, hogy az RE görbe létrehozásához feltétel, hogy a \mathbf{t}_i vektorok *térszerű* vektorok legyenek (lásd a 2.3.2. pontot). Geometriai szempontból ez azt jelenti, hogy a \mathbf{t}_i vektoroknak az xy síkkal bezárt szögük kisebb kell hogy legyen, mint 45° . Így felmerült bennünk az az ötlet, hogy először határozzunk meg a burkolás szempontjából előnyös tulajdonságú érintési pontokat, majd ezekből származtassuk a keresett \mathbf{t}_i vektorokat úgy, hogy biztosítsuk azt is, hogy a választott

vektorok *térszerűek* legyenek.

Ahogy a 2.1.1. pontban ismertettük, Kunkli és Hoffmann burkolómódszere (Kunkli & Hoffmann, 2010) az érintési pontokat olyan módon határozza meg, hogy azok garantáltan nem esnek a szomszédos körök belsejébe, ráadásul a meghatározásuk se számításigényes. Ezen előnyök miatt ezt a módszert választottuk az érintési pontok meghatározására. Az első és utolsó kör esetén az érintési pontokat a szomszédos körökkel való külső érintőegyenesek segítségével, míg a többi kör esetén az Apollóniusz-feladat speciális megoldásaival állítjuk elő.

Jelölje \mathbf{w}_i^+ és \mathbf{w}_i^- rendre a bal és jobb oldali érintési pontot minden c_i kör esetén! A célunk olyan \mathbf{t}_i vektorok előállítása, amelyeket ha behelyettesítünk az (5.2) kifejezésbe, teljesül, hogy $\mathbf{w}_i^\pm = \mathbf{q}_i^\pm$. A módszerünk a következő. Vegyük a két érintési ponton átmenő $g_i = \overleftrightarrow{\mathbf{w}_i^+ \mathbf{w}_i^-}$ egyenest, valamint legyen h_i az az egyenes, melyre teljesül, hogy $\mathbf{p}_i^\nabla \in h_i$ és $h_i \perp g_i$! A g_i és h_i egyenesek metszéspontját \mathbf{m}_i -vel jelöljük. Ekkor az $\mathbf{s}_i \in \mathbb{R}^{2,1}$ pontot az \mathbf{m}_i -nek a c_i körre vonatkozó inverzeként állíthatjuk elő, azaz

$$\mathbf{s}_i = \left(\mathbf{p}_i^\nabla + \frac{r_i^2}{\gamma_i} (w_{i_y}^+ - w_{i_y}^-, w_{i_x}^- - w_{i_x}^+), 0 \right), \quad (5.9)$$

ahol

$$\gamma_i = p_{i_x} (w_{i_y}^- - w_{i_y}^+) + p_{i_y} (w_{i_x}^+ - w_{i_x}^-) + w_{i_y}^+ w_{i_x}^- - w_{i_x}^+ w_{i_y}^-.$$

Ekkor a $\mathbf{t}_i \in \mathbb{R}^{2,1}$ vektor megadható $\mathbf{s}_i - \mathbf{p}_i$ módon, így

$$\mathbf{t}_i = \left(\frac{r_i}{\gamma_i} (w_{i_y}^+ - w_{i_y}^-), \frac{r_i}{\gamma_i} (w_{i_x}^- - w_{i_x}^+), -1 \right) \quad (5.10)$$

alakban írhatjuk fel. Speciális esetként kell tekintenünk azt az esetet, ha \mathbf{w}_i^+ , \mathbf{w}_i^- és \mathbf{p}_i^∇ kollineárisak. Ekkor $\mathbf{m}_i = \mathbf{p}_i^\nabla$, így az inverz \mathbf{s}_i pont a végtelen távoli pont lesz. Ebben az esetben a \mathbf{t}_i vektort

$$\mathbf{t}_i = \left((\mathbf{w}_i^+ - \mathbf{p}_i^\nabla)^\perp, 0 \right)$$

formában határozzuk meg.

Megjegyzés. Az \mathbf{s}_i pont előállítható oly módon is, hogy felhasználjuk a pólus-poláris kapcsolatot (Bácsó, Papp, & Szabó, 2006; Juhász, 1995). A c_i kör egyenlete homogén koordinátákra áttérve

$$x_1^2 + x_2^2 + (p_{i_x}^2 + p_{i_y}^2 - r^2) x_3^2 - 2p_{i_x} x_1 x_3 - 2p_{i_y} x_2 x_3 = 0$$

alakban írható fel. A g_i egyenes is megadható homogén koordinátákkal, azaz

$$g_i = \begin{pmatrix} w_{i_y}^+ - w_{i_y}^- \\ w_{i_x}^- - w_{i_x}^+ \\ (w_{i_y}^- - w_{i_y}^+) w_{i_x}^+ + (w_{i_x}^+ - w_{i_x}^-) w_{i_y}^+ \end{pmatrix}$$

alakban.

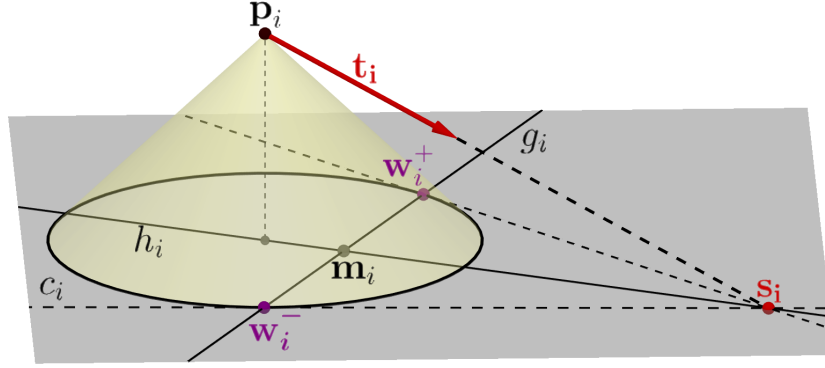
Ha g_i -t balról megszorozzuk a kör egyenlete alapján felírható mátrix inverzével, akkor megkapjuk a pólust, azaz az \mathbf{s}_i pontot, amelynek a c_i körre vonatkoztatott polárisa g_i . Tehát az \mathbf{s}_i pont előállítható az

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -p_{i_x} \\ 0 & 1 & -p_{i_y} \\ -o_x & -p_{i_y} & p_{i_x}^2 + p_{i_y}^2 - r_i^2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} g_{i_{x_1}} \\ g_{i_{x_2}} \\ g_{i_{x_3}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_{i_{x_1}} \\ s_{i_{x_2}} \\ s_{i_{x_3}} \end{pmatrix}$$

egyenlet megoldásával.

Ezt az előállítási módot az 5.3. ábra mutatja be. Láthatjuk, hogy a konstrukciónk valójában pontosan az inverze a burkolók ciklográfiai előállításának (lásd a 2.2.1. pontot), hiszen az RE görbe \mathbf{p}_i pontjában vett érintőegyenesének az xy síkkal vett dőféspontja az \mathbf{s}_i pont lesz. Az \mathbf{s}_i -ből a c_i körhöz húzható érintők pedig pontosan a \mathbf{w}_i^+ és \mathbf{w}_i^- pontokban érintik a kört. Ebből következik, hogy $\mathbf{w}_i^\pm = \mathbf{q}_i^\pm$.

Az érintővektorok ilyen módon való előállítása megoldja a másik felmerült problémát is, ami akkor jelentkezhet ha nem körültekintően választjuk meg az érintővektort. A módszerünkkel létrehozott \mathbf{t}_i vektor az xy síkkal garantáltan 45° -nál kisebb szöget zár be, azaz mindig *térszerű*.



5.3. ábra. A \mathbf{t}_i vektort a \mathbf{w}_i^+ és \mathbf{w}_i^- érintési pontokból származtatjuk. A konstrukció a burkolók ciklografikus interpretációján alapszik.

5.2.2. Rekonstrukció egy érintési pont rögzítésével

Egy másik megközelítést is bemutatunk, ami a fent bemutatott módszerhez hasonlóan az érintési pontok rögzítésén alapul. Mivel az RE görbe konstrukciója – ahogy láthattuk az 5.1. szakaszban – csak a bal oldali $\mathbf{q}_i^+ = \mathbf{q}_i$ érintési ponton alapul, felmerült az ötlet, hogy két érintési pont helyett csak egyet rögzítsünk.

Első lépésként a \mathcal{C} körsorozat minden c_i köréhez előállítjuk a bal oldali érintési pontokat, amiket \mathbf{w}_i^+ -szal jelölünk. A célunk azon \mathbf{t}_i vektorok meghatározása, amelyeket behelyettesítve az (5.2) kifejezésbe, teljesül, hogy $\mathbf{w}_i^+ = \mathbf{q}_i^+$. A feladatot megvizsgálva azt tapasztalhatjuk, hogy végtelen sok megoldás létezik. A megfelelő $\mathbf{s}_i \in \mathbb{R}^{2,1}$ végpontokat arról a T_i síkról kell választunk, amely érintősíkja a \mathbf{p}_i -hez tartozó C-kúpnak, valamint c_i -t a \mathbf{w}_i^+ pontban érinti. Annak érdekében, hogy egyértelműen megadhassuk az \mathbf{s}_i pontot, egy olyan \mathbf{p}_i középpontú, egységsugarú kört tekintünk, amely a

$$\mathbf{p}_i - (\mathbf{w}_i^+, 0) \quad \text{és} \quad \left((\mathbf{w}_i^+ - \mathbf{p}_i)^\perp, 0 \right)$$

vektorok által felfeszített T_i síkon fekszik. Az \mathbf{s}_i pontot ezen kör által meghatározott félkör mentén fogjuk meghatározni. A gyakorlatban

azonban valójában nincs szükségünk arra, hogy \mathbf{s}_i -t kifejezetten egy kör segítségével állítsuk elő, így megspórolhatjuk a bázisként szolgáló két vektort normalizálását. Végül tehát egy félellipszis mentén határozzuk meg az \mathbf{s}_i pontot, így az

$$\mathbf{s}_i = \mathbf{p}_i + \cos(u_i) \begin{bmatrix} p_{i_x} - w_{i_x}^+ \\ p_{i_y} - w_{i_y}^+ \\ p_{i_z} \end{bmatrix} + \sin(u_i) \begin{bmatrix} w_{i_y}^+ - p_{i_y} \\ p_{i_x} - w_{i_x}^+ \\ 0 \end{bmatrix}, \quad u_i \in]0, \pi[\quad (5.11)$$

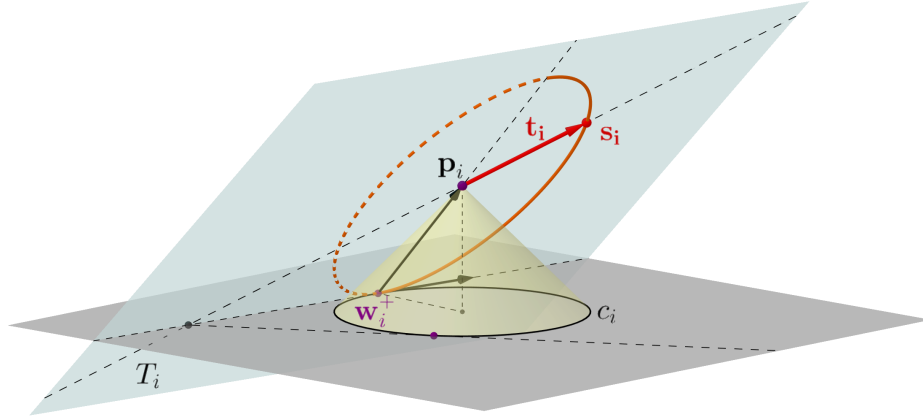
alakban adhatjuk meg. A \mathbf{t}_i vektor ekkor már előállítható $\mathbf{s}_i - \mathbf{p}_i$ módon, azaz felírható a

$$\mathbf{t}_i = \cos(u_i) \begin{bmatrix} p_{i_x} - w_{i_x}^+ \\ p_{i_y} - w_{i_y}^+ \\ p_{i_z} \end{bmatrix} + \sin(u_i) \begin{bmatrix} w_{i_y}^+ - p_{i_y} \\ p_{i_x} - w_{i_x}^+ \\ 0 \end{bmatrix}, \quad u_i \in]0, \pi[\quad (5.12)$$

formában. Módszerünket az 5.4. ábra mutatja be. A létrehozási elvből adódóan ezen módszer használatával is garantáljuk, hogy a \mathbf{t}_i vektor és az xy sík által bezárt szög kisebb, mint 45° , azaz \mathbf{t}_i mindig *térszerű*. Ezenfelül, ha tekintjük az \mathbf{s}_i pontból kiinduló, $\mathbf{s}_i - \mathbf{p}_i$ irányvektorú egyenesnek az xy síkkal vett dőféspontját, akkor ebből a c_i körhöz húzott külső érintőegyeneselek jelölik ki az érintési pontokat. A konstrukcióból adódóan tehát az is teljesül, hogy $\mathbf{w}_i^\pm = \mathbf{q}_i^\pm$.

Az (5.12) kifejezésben az u_i paraméterérték finomhangolásával a másik, nem rögzített \mathbf{q}_i^- pont pozícióját változtathatjuk. Ezen megközelítés előnyei közé tartozik, hogy a modellező nagyobb szabadságot kap, hiszen a burkológörbék alakját a szabadon hagyott érintési pont helyzetének változtatásával tudjuk befolyásolni. Így akár a görbék összemetszését is el lehet kerülni, ahogy az 5.5. szakaszban látni fogjuk.

Érdeemes azt is megemlíteni, hogy így az xy síkkal párhuzamos érintővektor is megadható, ezért nem kell speciális esetként kezelnünk azt a helyzetet, amikor \mathbf{q}_i^+ , \mathbf{q}_i^- és $\bar{\mathbf{p}}_i$ kollineáris. A módszer hátránya viszont az, hogy bár az egyik érintési pont megfelelő megválasztásával biztosítjuk, hogy az nem esik a szomszédos körök belsejébe, a szabadon hagyott \mathbf{q}_i^- pontra ezt értelemszerűen nem tudjuk garantálni.



5.4. ábra. A \mathbf{t}_i vektor meghatározása, ha csak egy érintési pontot rögzítünk a körön. Az \mathbf{s}_i pontot ekkor egy félellipszis mentén választjuk, amellyel a másik leendő érintési pont helyzetét fogjuk tudni befolyásolni.

5.3. A burkológörbék előállítás

Az előző szakaszban megmutattuk, hogy miként tudjuk létrehozni a $\mathcal{C} = \{c_1, c_2, \dots, c_n\}$, $n \in \mathbb{N}$ körsorozat esetén a megfelelő bemeneti adatokat, azaz a $\mathcal{P} = \{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_n\}$ pontsorozatot, valamint az ezekhez rendre tartozó $\mathcal{T} = \{\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2, \dots, \mathbf{t}_n\}$ vektorokat. Az RE konstrukciós algoritmust páronként minden \mathbf{p}_i , \mathbf{t}_i és \mathbf{p}_{i+1} , \mathbf{t}_{i+1} ($i = 1, 2, \dots, n - 1$) bemeneti adatra fogjuk alkalmazni.

Az algoritmus első lépését, ami meghatározza a \mathbf{q}_i^+ érintési pontot, természetesen kihagyhatjuk (hiszen \mathcal{T} elemeit úgy hoztuk létre, hogy az érintési pontokat előre meghatároztuk), így a következő lépés a $\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_{i+1} \in \mathbb{R}^2$ vektorok létrehozása. Az (5.3) formulánál láthattuk, hogy Bizzarri és mtsai. meghagyták szabad paraméternek az α_i értékeket, majd ezeket utólag numerikusan optimalizálták különböző módokon. Mivel most előre megadjuk az érintési pontokat, a keresett érintővektorok hosszának meghatározására tudatosan választhatunk olyan értéket, amely a burkolás során előnyös. Mivel az érintési pontok

a Kunkli és Hoffmann módszer által javasolt megoldás segítségével jöttek létre, az érintővektorok hosszának is azt az értéket választjuk, amit a szerzők a módszerüknél használnak. Az érintővektorok hosszának meghatározására az érintési pontoknak a két kör hatványvonalától vett távolságát veszik alapul, ugyanis ezzel az érintővektorok érzékenyek lesznek a körök sugaraira, valamint a középpontjaik távolságára is. Erre alapozva az érintővektorokat

$$\mathbf{v}_j = \alpha_j \frac{\left(\mathbf{w}_j^+ - \mathbf{p}_j^\nabla\right)^\perp}{\left\|\mathbf{w}_j^+ - \mathbf{p}_j^\nabla\right\|}, \quad (5.13)$$

$$\alpha_j = 2 \, d(\mathbf{w}_j^+, l_i), \quad j = i, i + 1$$

formában adjuk meg, ahol l_i a c_i és c_{i+1} körök hatványvonala, $d()$ pedig az euklideszi távolságfüggvényt jelöli.

Az RE konstrukciós algoritmus (Bizzarri et al., 2016) további lépéseit követve létrehozuk az $\mathbf{x}_i: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ görbét, amely interpolálja a \mathbf{w}_i^+ és \mathbf{w}_{i+1}^+ pontokat, és amelyekben adottak a \mathbf{v}_i és \mathbf{v}_{i+1} érintővektorok. A görbe előállítható például harmadrendű Hermite-ívként.

A középtengely és a középtengely-transzformáció felírásához meg kell adnunk az $f_i: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ függvényt, mely teljesíti az (5.6), (5.7) alapján felírt

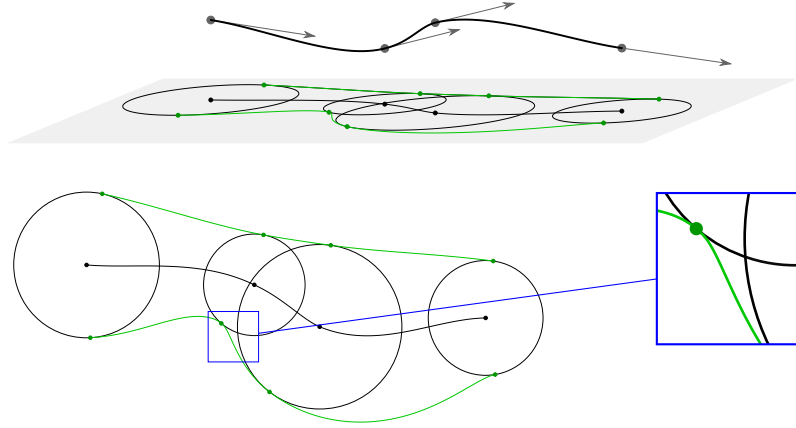
$$f_i(0) = \frac{p_{i_z}}{\|\mathbf{v}_i\|}, \quad f_i(1) = \frac{p_{i+1_z}}{\|\mathbf{v}_{i+1}\|} \quad (5.14)$$

és

$$f_i'(0) = -\frac{\mathbf{t}_i^\nabla \cdot (f_i(0) \mathbf{x}''(0) - \mathbf{v}_i^\perp)}{\mathbf{t}_j^\nabla \cdot \mathbf{v}_j}, \quad (5.15)$$

$$f_i'(1) = -\frac{\mathbf{t}_{i+1}^\nabla \cdot (f_i(1) \mathbf{x}''(1) - \mathbf{v}_{i+1}^\perp)}{\mathbf{t}_{i+1}^\nabla \cdot \mathbf{v}_{i+1}}$$

peremfeltételeket. Előállíthatjuk például Hermite-féle interpolációval, harmadfokú polinomiális függvényként. Az 5.5. szakaszban részle-



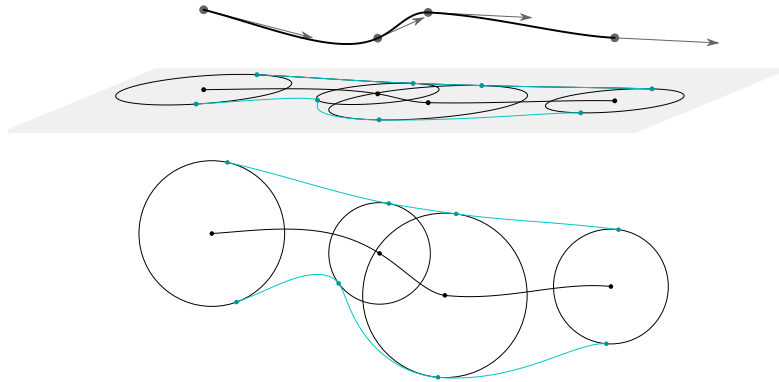
5.5. ábra. RE görbe alkalmazása diszkrét körsorozat burkolására. A keresett érintővektorokat körönként két rögzített érintési pontból származtatjuk, így elkerüljük az 5.2. ábrán mutatott problémát.

tesebben megvizsgáljuk, hogy f_i megválasztása nagymértékben befolyásolja a burkológörbék alakját. Végezetül az $\mathbf{y}_i(t)$ középtengely-transzformáció

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{y}}_i(t) = & \left(x_{i_x}(t) + x'_{i_y}(t) f_i(t), x_{i_y}(t) - x'_{i_x}(t) f_i(t), \right. \\ & \left. f_i(t) \sqrt{x_{i_x}'^2(t) + x_{i_y}'^2(t)} \right) \end{aligned} \quad (5.16)$$

alakban írható fel. Az így kapott $\bar{\mathbf{y}}_i(t)$ RE görbe által meghatározott burkológörbék racionálisak lesznek (lásd az 5.1. szakaszt).

Az 5.5. ábrán a két érintési pont, míg az 5.6. ábrán pedig az egy érintési pont rögzítésén alapuló módszerünk eredményét láthatjuk. A modellező olyan megoldással is élhet, hogy a körsorozat egyes elemeinél a kétpontos módszert, míg bizonyos körök esetén az egy pontos módszert használja a burkoló alakjának finomhangolásának érdekében. Az értekezés függelékében lévő 5. animáción megfigyelhető, hogy hogyan változik a burkoló, ha módosítjuk az (5.12) kifejezésben szereplő u_i paramétert.



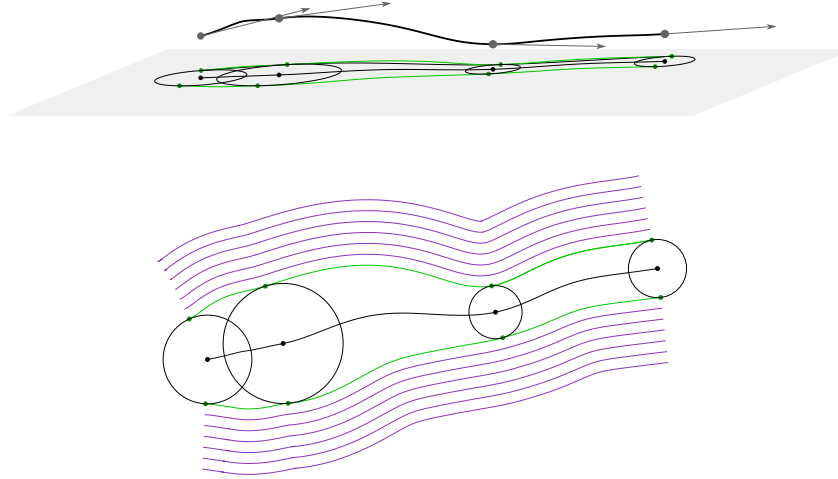
5.6. ábra. Ha körönként csak egy érintési pontot rögzítünk, akkor a szabadon hagyott pont helyzetének változtatásával a burkoló alakját tudjuk befolyásolni (vö.: 5.5. ábra). A burkológörbe változását a függelékben található 5. animáció szemlélteti.

Érdeemes megemlíteni, hogy ha az $\mathbf{x}_i(t)$ görbét PH görbének választjuk meg (például Farouki és Neff munkája (Farouki & Neff, 1995) alapján ötödfokú Bézier-görbéként felírható egy interpoláló PH görbe), akkor $\bar{\mathbf{y}}_i(t)$ MPH görbe lesz, a burkolók pedig PH görbék, így ezeknek az ekvidisztáns görbéi racionálisak lesznek. Egy ilyen eredményt mutat meg az 5.7. ábra.

Az értekezés függelékében az 5. algoritmus összegzi az általunk javasolt módszert, amelynek segítségével RE görbéket alkalmazhatunk diszkrét körsorozatok burkolására. A páronként előállított RE görbék, valamint a hozzájuk tartozó burkológörbék egymáshoz G^1 -folytonosan fognak csatlakozni.

5.4. A módszer kiterjesztési lehetőségei

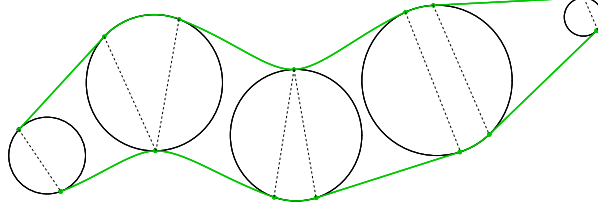
A disszertáció előző részeiben láthattuk, hogy az utóbbi években megjelentek olyan burkolómódszerek (Bastl et al., 2015; Kruppa et al., 2019), amelyeknél a burkológörbék egy-egy kört nem csak egy pontban



5.7. ábra. Egy körsorozat burkolása MPH görbe segítségével, körönként két érintési pont rögzítésével. A kapott burkológörbék PH görbék, melyeknek ekvidisztánsai racionálisak.

érintenek, hanem két pont által határolt körív mentén is. Mivel ez a fajta megközelítés sok esetben előnyt jelent a hagyományos módszerekkel szemben, ezért felmerült bennünk az igény, hogy kiterjesszük az RE görbék alkalmazását ilyen irányba is a teljesség kedvéért.

Ha a $\mathcal{C} = \{c_1, c_2, \dots, c_n\}$, $n \in \mathbb{N}$ megengedett körsorozathoz az érintési pontokat a 4. fejezetben bemutatott módszerünk segítségével állítjuk elő, akkor a köröket négy típusba sorolhatjuk aszerint, hogy a bal és jobb oldali burkológörbe egy pontban vagy két pont által határolt körív mentén érinti a köröket. Ezeket „|”, „∨”, „^” és „||” módon jelöljük (lásd az 5.8. ábrát). Jelölje továbbá $\mathcal{W}^+ = \{\mathbf{w}_1^+, \mathbf{w}_2^+, \dots, \mathbf{w}_{2n}^+\}$ a bal oldali, $\mathcal{W}^- = \{\mathbf{w}_1^-, \mathbf{w}_2^-, \dots, \mathbf{w}_{2n}^-\}$ pedig a jobb oldali érintési pontokat! Ekkor a c_i körhöz tartozó érintési pontok a \mathbf{w}_{2i-1}^+ , \mathbf{w}_{2i}^+ és \mathbf{w}_{2i-1}^- , \mathbf{w}_{2i}^- ($i = 1, 2, \dots, n$) pontok lesznek. Ha a c_i kör „|” típusú, akkor $\mathbf{w}_{2i-1}^+ = \mathbf{w}_{2i}^+$ és $\mathbf{w}_{2i-1}^- = \mathbf{w}_{2i}^-$; ha „∨” típusú, akkor $\mathbf{w}_{2i-1}^- = \mathbf{w}_{2i}^-$; ha pedig „^” típusú, akkor $\mathbf{w}_{2i-1}^+ = \mathbf{w}_{2i}^+$.



5.8. ábra. Körtípusok szemléltetése az érintési pontok száma alapján: az első és utolsó kör mindig „|” típusú, a köztes körök ezen példában rendre „∨”, „^” és „||” típusúak.

Az RE görbe létrehozásához a $\mathcal{P} = \{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_n\}$ pontoknak a meghatározási módja változatlan (lásd az (5.8) formulát). Viszont a \mathcal{T} halmazt másképp kell megadnunk, ugyanis a köröknél meg kell különböztetnünk a kiinduló és a beérkező burkológörbét, amelyhez külön-külön kell előállítani az érintővektorokat az RE görbék konstrukciójakor. A c_i körhöz a \mathbf{t}_{2i-1} vektor fog tartozni, amikor a c_{i-1} és c_i körhöz szeretnénk előállítani az RE görbét. Illetve a c_i -hez a \mathbf{t}_{2i} vektor is tartozik, amit akkor fogunk használni, amikor a c_i és c_{i+1} körhöz állítjuk elő az RE görbét. Így tehát a $\mathcal{P} = \{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_n\}$ pontsorozathoz a $\mathcal{T} = \{\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2, \dots, \mathbf{t}_{2n}\}$ vektorokat tudjuk társítani. Az egységesség érdekében akkor is két vektort társítunk a c_i körhöz, ha „|” típusú. Ezen esetben $\mathbf{t}_{2i-1} = \mathbf{t}_{2i}$. Az 5.2.1. pontban bemutatott módszer elvén az érintővektorokat

$$\mathbf{t}_j = \left(\frac{r_i}{\gamma_j} (w_{j_x}^+ - w_{j_x}^-), \frac{r_i}{\gamma_j} (w_{j_y}^- - w_{j_y}^+), -1 \right)$$

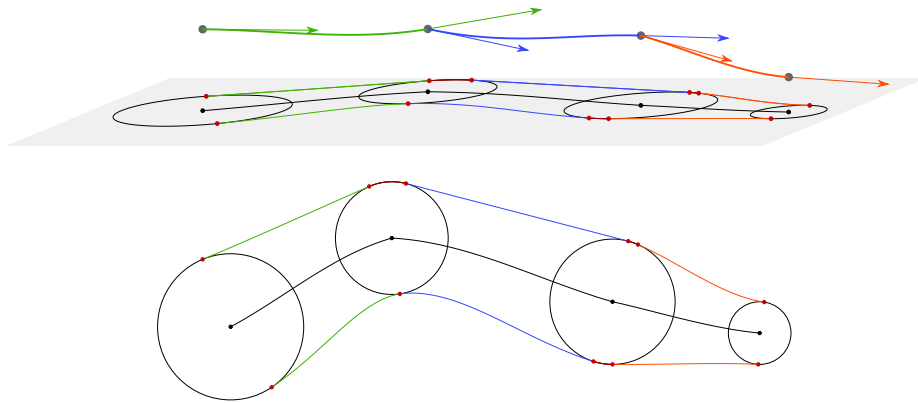
alakban adjuk meg, ahol

$$\gamma_j = p_{i_x} (w_{j_y}^- - w_{j_y}^+) + p_{i_y} (w_{j_x}^+ - w_{j_x}^-) + w_{j_y}^+ w_{j_x}^- - w_{j_x}^+ w_{j_y}^-,$$

és $i = 1, 2, \dots, n$, valamint $j = 2i - 1, 2i$. Amint létrehoztuk az érintési pontokat és a hozzájuk tartozó érintővektorokat, páronként előállítjuk az RE görbéket a korábban bemutatott módon. Mint ahogy a Bastl

és mtsai. által (Bastl et al., 2015), valamint az általunk kidolgozott módszer (Kruppa et al., 2019) is, a „||”, „V” és „^” típusú körök esetén az érintési pontok által határolt köríveket is a burkoló részeként tekintjük.

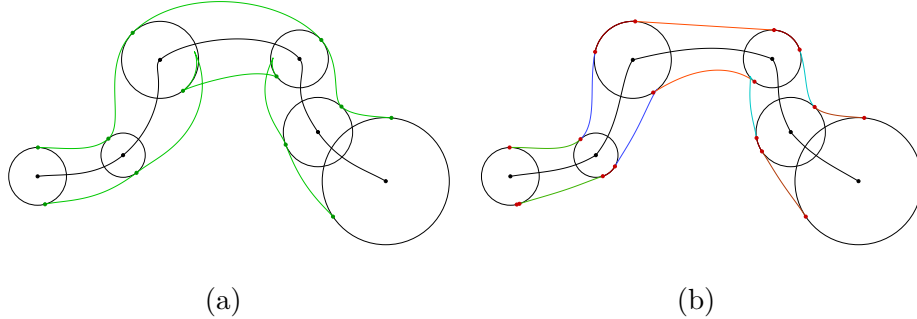
Az 5.9. ábrán láthatóak az előállított RE görbék és a segítségükkel meghatározott burkolók. Az egybetartozó párokat ugyanolyan színekkel jelöljük. Ezen megközelítés előnye, hogy bizonyos esetekben kevesebb önmetszéspon és csúcspont állhat elő, mint ahogy az 5.10. ábrán ez látható. Azonban fontos megemlíteni ennek a módszernek a hátrányát is: a konstrukcióból adódóan az egymáshoz kapcsolódó RE görbék esetén már nem tudjuk biztosítani a G^1 -folytonosságot.



5.9. ábra. Egy körsorozat burkolása RE görbék segítségével, ha azt a megközelítést választjuk, hogy egy kört a burkológörbe nem csak egy pontban érinthet, hanem egy körív mentén is.

5.5. A burkológörbék öszzemetszésének vizsgálata

Burkolási feladatok megoldása során mindig törekszünk arra, hogy az elkészült görbepárok esztétikailag is minél kielégítőbb módon burkolják a köröket. Ez azt is magában foglalja, hogy a görbék lehetőleg ne metsszék egymást. Ezt leginkább az érintővektorok hosszának



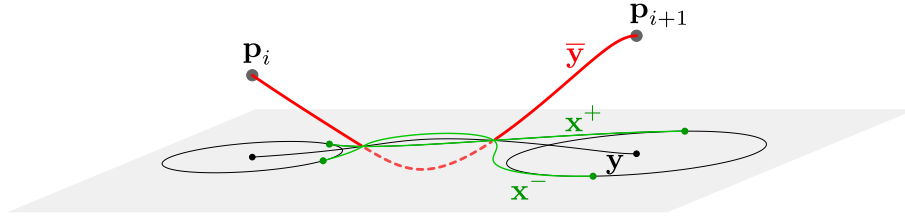
5.10. ábra. Az RE görbék létrehozásához az érintési pontokat az (a) ábrán Kunkli és Hoffmann módszerével (Kunkli & Hoffmann, 2010), míg a (b) ábrán a saját módszerünkkel (Kruppa et al., 2019) állítottuk elő. Láthatjuk, hogy az utóbbi esetben a burkolók kevesebb önmetszéspontot tartalmaznak.

megváltoztatásával kerülhetjük el (lásd a 4.6. szakaszt), az esetleges metszéspontok meghatározására pedig csak olyan általános módszert használhatunk, mint például a Bézier-görbék összemetszéseinek vizsgálata a de Casteljau módszerrel való kettévágásra alapozva. Ebben a szakaszban megmutatjuk, hogy az RE görbék használata leegyszerűsíti a burkológörbék összemetszésének detektálását, valamint a metszések elkerülésre is nyújtunk megoldást.

A $\mathcal{C} = \{c_1, c_2, \dots, c_n\}$, $n \in \mathbb{N}$ megengedett körsorozathoz létrehozott RE görbék sorozata esetén a burkológörbék összemetszését páronként kell vizsgálnunk. Azaz minden c_i és c_{i+1} ($i = 1, 2, \dots, n-1$) körhöz előállítjuk a \mathbf{p}_i , \mathbf{p}_{i+1} pontokat, valamint \mathbf{t}_i és \mathbf{t}_{i+1} érintővektorokat, majd pedig az $\bar{\mathbf{y}}_i$ RE görbe által meghatározott \mathbf{x}_i^+ és \mathbf{x}_i^- burkológörbék összemetszését vizsgáljuk. Az egyszerűbb jelölésrendszer és átláthatóság végett $\bar{\mathbf{y}}_i$, \mathbf{y}_i , r_i , \mathbf{x}_i , \mathbf{x}_i^\pm és f_i helyett rendre az $\bar{\mathbf{y}}$, \mathbf{y} , r , \mathbf{x} , \mathbf{x}^\pm és f jelöléseket használjuk ebben a szakaszban.

5.5.1. Összemetszések detektálása

A középtengely-transzformációk által meghatározott burkolók összemetszésének vizsgálatkor egy érdekes tulajdonságot figyelhetünk meg. Amikor a középtengely-transzformáció valamely pontjának harmadik koordinátája 0, akkor nemcsak a burkológörbék, hanem a középtengely és a középtengely-transzformáció is ugyanazon pontban metszi egymást, ugyanazon paraméterértéknél. Ezt tulajdonságot szemlélteti az 5.11. ábra.



5.11. ábra. Az \mathbf{x}_i^+ , \mathbf{x}_i^- burkológörbék, valamint az \mathbf{y}_i középtengely és az $\bar{\mathbf{y}}_i$ középtengely-transzformáció ugyanazokban a pontokban metszik egymást, ráadásul ugyanazon paraméterértékeknél.

Ha az összemetszés problémáját algebrai megközelítéssel vizsgáljuk tovább, akkor azt is észrevehetjük, hogy ha $\bar{\mathbf{y}}(t)$ valamely pontjában vett érintővektor *fényszerű*, akkor a burkolók annál a paraméterértéknél összemetszenek. Ezen megfigyeléseinket összegzi a következő tétel.

5.1. *Tétel* (Minkowski-térben értelmezett görbék burkolóinak összemetszése (Kruppa, Kunkli, & Hoffmann, 2020)). *Ha az $\bar{\mathbf{y}}: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^{2,1}$, $\bar{\mathbf{y}}(t) = (\mathbf{y}(t), r(t))$ görbét egy síkbeli tartomány középtengely-transzformációjaként tekintjük, akkor a tartományhoz tartozó $\mathbf{x}^+(t)$ és $\mathbf{x}^-(t)$ burkológörbék akkor és csak akkor metszik egymást a $t_j \in [a, b]$ paraméterértéknél (azaz $\mathbf{x}^+(t_j) = \mathbf{x}^-(t_j)$), ha*

- $r(t_j) = 0$, vagy

- $\|\bar{\mathbf{y}}'(t_j)\|_M = 0$, azaz $\bar{\mathbf{y}}$ -nak a t_j paraméterértékhez tartozó érintővektora fényyszerű.

5.1. *Bizonyítás.* Ahhoz, hogy a burkolók metsszék egymást a t_j paraméterértéknél, az $\mathbf{x}^+(t_j) = \mathbf{x}^-(t_j)$ egyenlőség kell, hogy teljesüljön ($t_j \in [a, b]$). A 2.2. tétel alapján feltehetjük, hogy $\|\mathbf{y}'(t)\| \neq 0$, $\forall t \in [a, b]$. Az $\mathbf{x}^+(t_j) = \mathbf{x}^-(t_j)$ egyenlőséget átírhatjuk

$$\begin{aligned} & r(t_j) \frac{r'(t_j) \mathbf{y}'(t_j) + \mathbf{y}'^\perp(t_j) \sqrt{\|\mathbf{y}'(t_j)\|^2 - r'(t_j)^2}}{\|\mathbf{y}'(t_j)\|^2} \\ &= r(t_j) \frac{r'(t_j) \mathbf{y}'(t_j) - \mathbf{y}'^\perp(t_j) \sqrt{\|\mathbf{y}'(t_j)\|^2 - r'(t_j)^2}}{\|\mathbf{y}'(t_j)\|^2} \end{aligned}$$

formába. Ekkor két eset lehetséges.

- Ha $r(t_j) = 0$, akkor $\mathbf{x}^+(t_j) = \mathbf{x}^-(t_j) = \bar{\mathbf{y}}(t_j) = \mathbf{y}(t_j)$.
- Ha $r(t_j) \neq 0$, akkor a fenti egyenlőség átírható

$$\mathbf{y}'^\perp(t_j) \sqrt{\|\mathbf{y}'(t_j)\|^2 - r'(t_j)^2} = -\mathbf{y}'^\perp(t_j) \sqrt{\|\mathbf{y}'(t_j)\|^2 - r'(t_j)^2}$$

alakra. Mivel $\|\mathbf{y}'(t_j)\| \neq 0$, az egyenletet átrendezve a

$$\sqrt{\|\mathbf{y}'(t_j)\|^2 - r'(t_j)^2} = 0,$$

egyenlőséget kapjuk, azaz $\|\bar{\mathbf{y}}'(t_j)\|_M = 0$.

Ha $r(t_j) \neq 0$ és $\sqrt{\|\mathbf{y}'(t_j)\|^2 - r'(t_j)^2} \neq 0$, akkor a fentiek alapján $\mathbf{x}^+(t_j) \neq \mathbf{x}^-(t_j)$. Tehát akkor és csak akkor teljesül, hogy $\mathbf{x}^+(t_j) = \mathbf{x}^-(t_j)$ ($t_j \in [a, b]$), ha $r(t_j) = 0$, vagy $\bar{\mathbf{y}}'(t_j)$ fényyszerű.

Megjegyzés. Az 5.1 tételben szereplő állítások könnyen beláthatóak ciklográfián alapuló megközelítéssel is. Ha a középtengely-transzformáció t_j paraméterékhez tartozó pontjának harmadik koordinátája 0, akkor az ehhez a ponthoz megfeleltetett ciklus sugara 0. A nullciklust egy

pontként értelmezzük, továbbá az ehhez húzott külső érintőegyenesek érintési pontjait (azaz a burkológörbék érintési pontjait) is ugyanennek az $\mathbf{y}(t_j)$ pontnak tekintjük. Azaz $\mathbf{x}^+(t_j) = \mathbf{x}^-(t_j)$. Valamint ha a középtengely-transzformáció t_j paraméterértékhez tartozó érintővektora fényszerű, az azt jelenti, hogy az $\bar{\mathbf{y}}(t_j)$ pontban vett érintőegyenes alkotója a ponthoz tartozó C-kúpnak. Ekkor az érintőegyenesnek az xy síkkal vett dőléspontja a ciklus egy pontja lesz. Mivel ebből a pontból nem húzható érintő a ciklushoz, a két burkológörbe t_j paraméterértékhez tartozó pontja ezen pont lesz, tehát $\mathbf{x}^+(t_j) = \mathbf{x}^-(t_j)$. Más esetekben a ciklushoz tartozó két érintési pont nem egyezik meg.

Az 5.1. tétel speciális esete, ha RE görbék burkolóinak összemetszését vizsgáljuk.

5.1. *Következmény* (RE görbék burkolóinak összemetszése (Kruppa et al., 2020)). Az $\bar{\mathbf{y}}: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^{2,1}$, $\bar{\mathbf{y}}(t) = (\mathbf{y}(t), r(t)) = (x_x(t) + x'_y(t)f(t), x_y(t) - x'_x(t)f(t), f(t)\sqrt{x_x'^2(t) + x_y'^2(t)})$ RE görbe esetén az $\mathbf{x}^+, \mathbf{x}^-: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ burkológörbék akkor és csak akkor metszik egymást a $t_j \in [0, 1]$ paraméterértéknél (azaz $\mathbf{x}^+(t_j) = \mathbf{x}^-(t_j)$), ha

- $\mathbf{x}(t)$ nem reguláris, és a t_j paraméterértékhez tartozó $\mathbf{x}(t_j)$ pont elsőfajú csúcspont, vagy
- $\mathbf{x}(t)$ reguláris, de a t_j paraméterértékre teljesül, hogy $f(t_j) = 0$, vagy
- a t_j paraméterértékre teljesül, hogy $\|\bar{\mathbf{y}}'(t_j)\|_M = 0$, azaz az RE görbe t_j paraméterértékhez tartozó érintővektora fényszerű.

5.2. *Bizonyítás.* Az $\bar{\mathbf{y}}$ RE görbe $r(t) = f(t)\sqrt{x_x'^2(t) + x_y'^2(t)}$ koordinátafüggvénye akkor és csak akkor 0 egy t_j paraméterértéknél, ha $f(t_j) = 0$, vagy pedig $\sqrt{x_x'^2(t) + x_y'^2(t)} = 0$, azaz $\mathbf{x}'(t_j) = \mathbf{0}$. Az 5.1. következményben szereplő harmadik eset az 5.1. tétel második pontja.

RE görbék esetén tehát az 5.1. tétel következménye alapján a burkolók metszéspontjainak meghatározására azon t_j paraméterértéket kell megtalálnunk, melyre $\mathbf{x}'(t_j) = \mathbf{0}$, vagy $f(t_j) = 0$, vagy pedig $\|\bar{\mathbf{y}}'(t_j)\|_M = 0$. Az elsőfajú csúcspontok megtalálásának komplexitása függ a kiindulási \mathbf{x} görbétől, de ha a legegyszerűbb konstrukciót választjuk, azaz harmadrendű Hermite-ívet, akkor az $\mathbf{x}'(t_j) = \mathbf{0}$ egyenlet mindössze másodfokú. Abban az esetben, ha \mathbf{x} reguláris, akkor az $f(t) = 0$ harmadfokú egyenlet valós gyökeit kell meghatároznunk a $[0, 1]$ intervallumon a metszéspontok előállításához. Ekkor a gyököket akár közvetlenül is megkaphatjuk a Cardano-képlet segítségével. A harmadik esetben a metszéspontokat az $\|\mathbf{y}'(t_j)\|^2 - r'(t_j)^2 = 0$ egyenlet megoldásával határozhatjuk meg.

5.5.2. Összemetszések elkerülése

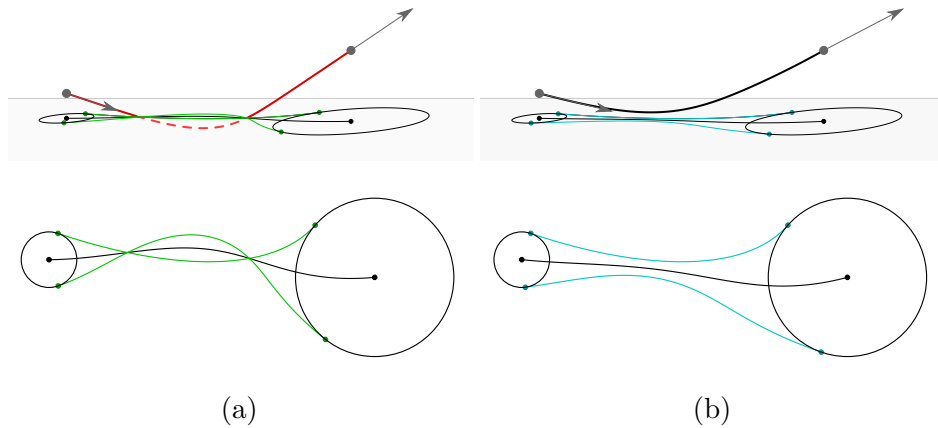
Ebben a pontban megoldást nyújtunk azon esetekre, amikor az RE görbék által meghatározott burkológörbék összemetszését az okozza, hogy létezik olyan t_j paraméterérték, melyre $f(t_j) = 0$ (lásd az 5.1. következmény 2. esetét).

Tegyük fel, hogy előállítottuk a c_i és c_{i+1} körökhöz az $\bar{\mathbf{y}}$ RE görbét, és az \mathbf{x} görbe reguláris! Az $\bar{\mathbf{y}}$ létrehozásához szükséges $f(t)$ függvény az (5.6) és (5.7) peremfeltételek mellett felírható egy harmadfokú polinomként. Ha létezik a függvénynek valós gyöke a $[0, 1]$ intervallumon, azaz $f(t_j) = 0$, akkor a burkológörbék metszik egymást a t_j paraméterértéknél ($t_j \in [0, 1]$). A célunk, hogy feloldjuk ezen összemetszéseket.

Erre megoldást tud nyújtani az, hogy ha a két érintési pont közül csak az egyiket rögzítjük, ahogy ezt az 5.2.2. pontban láthattuk. Ekkor az (5.11) kifejezésben az u_i paraméterérték változtatásával elkerülhetjük a burkológörbék összemetszését, hiszen az érintési pontok változtatása a görbepár alakjára is hatással lesz. Tehát u_i értékét iteratíván addig változtatjuk a $]0, \pi[$ intervallumban, amíg nem teljesül, hogy

$$f(t) > 0, \quad \forall t \in [0, 1]. \quad (5.17)$$

Azaz a célunk, hogy f -nek ne legyen valós gyöke a $[0, 1]$ intervallumon. Azonban nem garantálható, hogy mindig létezik ilyen u_i érték, bár a gyakorlatban azt tapasztaltuk, hogy sok esetben megoldást tud nyújtani. Erre a megközelítésre mutat példát az 5.12. ábra, ahol láthatjuk, hogy az egyik érintési pont (és így a t_{i+1} érintővektor) módosításával el tudjuk kerülni az összemetszést.



5.12. ábra. (a) A két pont rögzítésén alapuló módszerünkkel kapott burkolók metszik egymást. (b) Ha csak az egyik oldali érintési pontokat rögzítjük, akkor például a második kör szabadon hagyott érintési pontjának megváltoztatásával elérhetjük, hogy a burkolók ne metsszék egymást.

Egy másik megközelítést is bemutatunk, amely nem változtatja meg az érintési pontok helyzetét. Ha az összemetszés amiatt történik, hogy a harmadfokú f függvénynek valós gyöke van a $[0, 1]$ intervallumon, akkor megoldást nyújthat, ha megnöveljük f fokszámát. Ekkor végtelen sok olyan negyedfokú polinom létezik, ami teljesíti az elvárt peremfeltételeket, és ezek közül kell választanunk olyat, amelyre teljesül (5.17). Ehhez írjuk fel f -et

$$f(t) = t^4 + a_3 t^3 + a_2 t^2 + a_1 t + a_0 \quad (5.18)$$

formában, ahol

$$\begin{aligned}
 a_3 &= \tilde{f}'_0 + \tilde{f}'_1 + \tilde{f}_0 - 2\tilde{f}_1 - 2k, \\
 a_2 &= 3\tilde{f}_1 - 3\tilde{f}_0 - 2\tilde{f}'_0 - \tilde{f}'_1 + k, \\
 a_1 &= \tilde{f}'_0, \\
 a_0 &= \tilde{f}_0,
 \end{aligned} \tag{5.19}$$

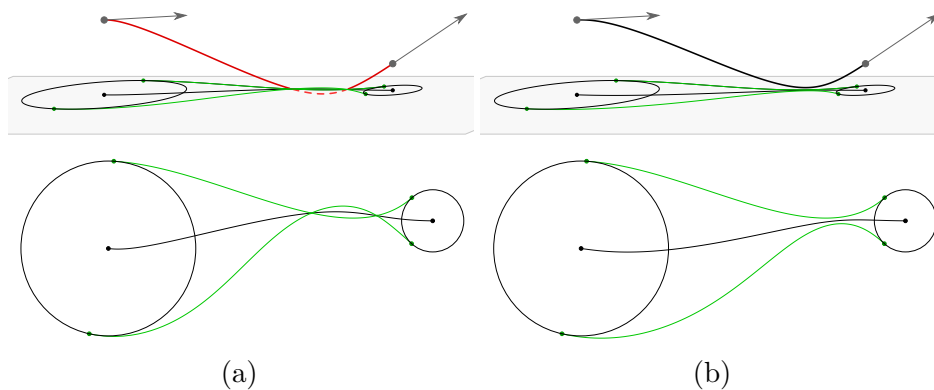
és $\tilde{f}_0, \tilde{f}_1, \tilde{f}'_0, \tilde{f}'_1$ a már ismertetett (5.6), (5.7) peremfeltételeket jelöli. Az összemetszések elkerüléséhez tehát olyan $k \in \mathbb{R}$ értéket kell találnunk az (5.19) kifejezéshez, amellyel (5.17) teljesül. Mivel az $f(0)$ és $f(1)$ értékek mindig pozitívak, ezért biztosan létrehozható f úgy, hogy $f(t) > 0, \forall t \in [0, 1]$ – legfeljebb nem negyedfokú, hanem magasabb fokszámú polinomiális függvényre lesz szükségünk.

Ha f magasabb fokszámú polinom, de meg szeretnénk határozni a metszéspontokat, akkor f gyökeinek előállításához olyan numerikus módszereket használhatunk, mint például az intervallum felezés, a Newton-Raphson-módszer, vagy Sturm módszere.

Az 5.13. a ábrán egy olyan szituáció látható, amikor a burkológörbék metszik egymást. Ha az f függvény fokszámát megnöveljük, és az (5.19) alakhoz megfelelő k paraméterértéket találunk, akkor az összemetszés elkerülhető. Ezt mutatja az 5.13. b ábra. Fontos megjegyezni, hogy sem az érintési pontok helyzete, sem pedig az érintővektorok nem változtak, az összemetszés mégis fel lett oldva, a két burkológörbe már nem metszi egymást.

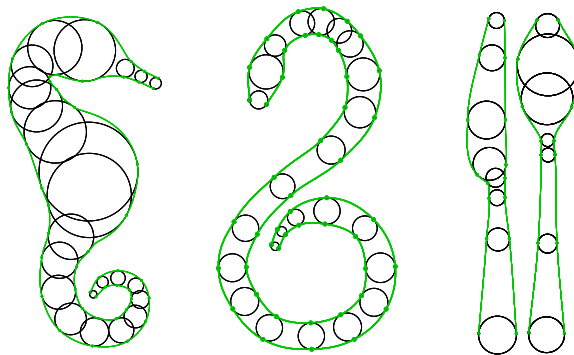
5.6. A módszerünk lehetőségei

Az RE görbéknek az általunk javasolt módon való használata komplex alakzatok előállítására is alkalmas, akár olyan esetekben is, amikor a szomszédos körök sugarai nagymértékben eltérnek egymástól. Az 5.14. ábrán látható a módszerünk néhány eredménye. Érdeemes azonban arra is kitérni, hogy mivel a módszer egész koncepciója a középtengely-transzformáción alapszik, ezért a körök által határolt körlapok maximális sugarú beírható körlapokként viselkednek, majd



5.13. ábra. Az (a) ábrán megjelenő összemetszés elkerülésére megoldást nyújt, ha az RE görbe előállításához szükséges f függvény fókuszszámát megnöveljük. A (b) ábrán látható, hogy az érintési pontok helyzete nem változik, mégis feloldottuk az összemetszést.

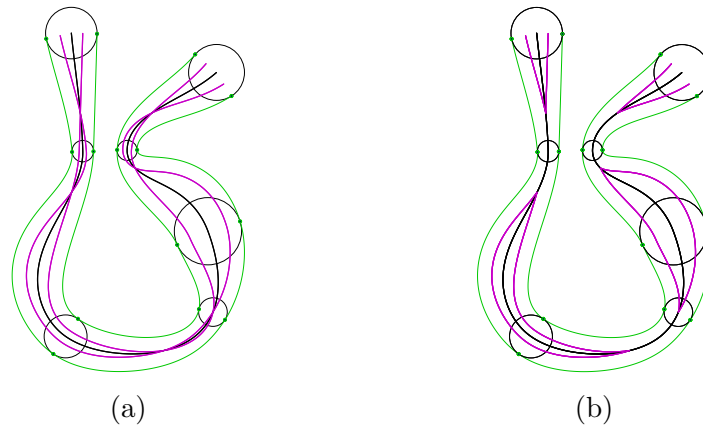
pedig ezek alapján állítjuk elő a tartományt, valamint annak kontúrját. Így bizonyos esetekben előfordulhat, hogy az előállított burkolók szinguláris pontokkal rendelkeznek. Ez azonban feloldható úgy, hogy precízebben, több kör megadásával modellezzük a kívánt alakzatot.



5.14. ábra. A módszerünkkel előállított RE görbék burkolóinak használata modellezési feladatokra.

Az előző szakaszban áttekintettük, hogy az összemetszések detektálása, valamint feloldása az RE görbék használatának az egyik előnye. Egy másik előnyös tulajdonságuk pedig az, hogy CNC gépekkel történő marás során is használhatóak lehetnek. Ezen műveletek során ugyanis nagyon fontos, hogy a modellekhez előállított ekvidisztáns görbék ne metsszék egymást, ugyanis ezek a folyamat meghibásodására, leállítására vezetnének. Az ekvidisztánsok metszéseinek feloldása érdekében használatos az ún. *trimmelés*, amely során eltávolításra kerülnek az ekvidisztáns görbék azon problematikus részei, amelyeket a metszések okoznak.

Általánosan elmondható, hogy a trimmelés szabadformájú görbék esetén egy költséges, számításigényes feladat. Azonban a középtengely-transzformációkhoz tartozó burkolók esetében a folyamat nagymértékben leegyszerűsödik (Cao, Jia, & Liu, 2009; Cao & Liu, 2008; Choi et al., 2008, 1999). A 2.3.2. pontban láthattuk, hogy egy $\bar{\mathbf{y}}: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^{2,1}$, $\bar{\mathbf{y}}(t) = (\mathbf{y}(t), r(t))$ középtengely-transzformációhoz tartozó burkolók ekvidisztáns görbéi felírhatók a (2.4) formula segítségével. Ha belső



5.15. ábra. A burkológörbék ekvidisztánsainak trimmelése nagymértékben leegyszerűsödik. Az (a) ábrán láthatók az ekvidisztáns görbék trimmelés nélkül, a (b) ábrán pedig trimmelve.

ekvidisztánsokat határozunk meg, akkor a δ -ekvidisztáns

$$\mathbf{x}_\delta^\pm(t) = \mathbf{y}(t) + (r(t) - \delta) \mathbf{m}^\pm(t)$$

alakban írható fel, ahol $\mathbf{m}^\pm(t) \in \mathbb{R}^2$ az $\bar{\mathbf{y}}(t)$ görbe normálvektorának xy síkra eső merőleges vetületét jelöli. Ekkor a trimmelési feladat során az ekvidisztáns görbék azon részeit távolítjuk el, amelyeknél

$$r(t_0) < \delta, \quad t_0 \in [a, b]$$

teljesül. Ezen összefüggést felhasználva ha egy modellt (logót, díszítőelemet, stb.) körök segítségével állítunk elő, amelynek burkolásához RE görbét használunk, akkor a trimmelt ekvidisztáns görbék miatt a modell CNC gépek segítségével hatékonyan előállítható. Az ekvidisztánsok trimmelésére látható egy példa az [5.15.](#) ábrán.

6. Összefoglalás

A számítógépes geometriai modellezés területéhez tartozik a diszkrét kör- és gömbsorozatok burkolóinak előállítás. Az értekezésben ehhez a témakörhöz kapcsolódó eredményeinket mutattuk be részleteiben.

A disszertáció 3. fejezetében azon kutatási munkánkat (Bana et al., 2014) ismertettük, amely során Kunkli Roland és Hoffmann Miklós térbeli burkolómódszerét (Kunkli & Hoffmann, 2010) terjesztettük komplex, elágazásokkal rendelkező gömbstruktúrák valós idejű burkolására. Bemutattuk a módszer használatához szükséges struktúra gráfszerű leírását, valamint részletesen taglaltuk a módszer lépéseit, amelynek segítségével olyan csatlakozó felületdarabokat tudunk létrehozni, melyek G^1 -folytonosan csatlakoznak az eredeti burkolófelülethez. A módszerünk eredményeit összehasonlítottuk a ZSpheres[®] (Pixologic Inc.) modellező szoftver és a Spore[™] (Electronic Arts) számítógépes játék kimeneteivel, valamint megmutattuk, hogy torzításmentes, a gömbök elrendezését megtartó eredményt tudunk biztosítani.

A 4. fejezetben ismertettük azon eredményeinket (Kruppa et al., 2019), amelyek Bastl és mtsai. módszerének (Bastl et al., 2015) alapötletére épül: a burkológörbék az egyes köröket nem csak egy pontban, hanem a körök pozíciójától és sugarától függően akár egy körív mentén is érinthetik. Ez a megközelítés sok esetben előnyös, viszont több hibáját is felfedeztük a Bastl-féle módszernek. Így kutatásunk során elsődleges célunk az volt, hogy egy olyan új burkolótechnikát hozzunk létre, amely megoldást nyújt a felmerült problémákra. Az elkészült módszerünk alkalmazható valós idejű modellezési feladatokra, valamint garantáljuk, hogy az érintési pontok nem esnek a szomszédos körök belsejébe. Ezenfelül megadtunk egy algoritmust a burkológörbék összemetszésének elkerülésére. Az értekezésben több kiterjesztési lehetőséget is megvizsgáltunk: a módszer általánosítható bizonyos konvex síkbeli alakzatok, valamint gömbsorozatok burkolására, továbbá megoldást nyújtottunk az elágaztatás problémakörére. Mindemellett eredményeinket összehasonlítottuk Kunkli és Hoffmann, valamint Bastl és mtsai. módszerével, és megmutattuk, hogy a problematikus

esetekben jobb megoldást tudunk nyújtani.

Végül az 5. fejezetben a Bizzarri és mtsai. által bevezetett (Bizzarri et al., 2016), $\mathbb{R}^{2,1}$ Minkowski-térben értelmezett Rational Envelope (RE) görbékkel foglalkoztunk. Bemutattuk az RE görbék egy lehetséges alkalmazási területét: ismertettük, hogy miképp lehet ezen speciális görbéket diszkrét körsorozatok burkolására használni (Kruppa, 2020). Ezenfelül az RE görbék használatának előnyeit is áttekintettük, s részletesen elemeztük a burkológörbék metszési problémáját. Az ehhez a témakörhöz kapcsolódó legújabb eredményeinket összefoglaló kéziratot (Kruppa et al., 2020) elkészítettük, amelyet hamarosan benyújtunk egy folyóirathoz.

7 Summary

A special area of computer-aided geometric design is called *skinning*, the process of creating the envelope of a discrete set of circles or spheres. In this PhD thesis, we presented our latest results in detail related to this topic.

In Section 3 we discussed our results (Bana et al., 2014) which extends the skinning technique by Kunkli and Hoffmann (Kunkli & Hoffmann, 2010). We presented a novel approach by which branched systems of spheres can be handled in real-time. Thus more complex models can be created with our skinning method. In the thesis we introduced the graph-like structure of the input spheres and described the steps of our algorithm in detail. With our method, we are able to create joining skinning patches, which are G^1 continuous to the original skinning surface. We also compared our results to the outputs of the modeling software ZSpheres[®] (Pixologic Inc.) and the computer game Spore[™] (Electronic Arts), and we showed that our algorithm provides smooth results that keep the original positions of the spheres.

In Section 4 we introduced our skinning method (Kruppa et al., 2019), which was motivated by the method of Bastl et al. (Bastl et al., 2015): the skinning curves for a sequence of circles may not only touch each circle at a single point, but also along a circular arc. We outlined that the method of Bastl et al. generally provides adequate output, but it has some significant disadvantages as well. Thus, our main aim was to provide solutions to their problems. As a result, we managed to create a new skinning method that can be efficiently used in real-time modeling, assuring that the touching points do not get inside any neighboring circle. Furthermore, we proposed an algorithm with which we can eliminate the intersections of the skinning curves, if they exist. We also presented several possible ways to extend our skinning approach. The algorithm may be generalized to convex planar shapes, and we extended our method to three dimensions. We showed a solution to provide skinning surfaces for branched systems of spheres as well. We also made a comparison between our method

and the methods of Kunkli and Hoffmann, and Bastl et al., and we showed that our skinning technique provides excellent solutions even in problematic cases.

In the last part of the thesis, we examined the so-called RE curves introduced by Bizzarri et al. (Bizzarri et al., 2016). RE curves are such special curves in the $\mathbb{R}^{2,1}$ Minkowski space that provide rational envelopes. We presented a possible new application for them, by explaining how to apply RE curves for skinning a discrete set of circles (Kruppa, 2020). In the thesis we further examined the possibilities of applying RE curves for skinning and discussed in detail how to detect and resolve the intersections of the envelope curves. We finalized the manuscript (Kruppa et al., 2020) containing our latest results, and we plan to submit it to a journal soon.

Köszönetnyilvánítás

Ezúton szeretném megköszönni mindazoknak a segítségét és támogatását, akik tanulmányaim során, valamint az értekezés elkészülte alatt mellettem álltak.

Szeretném külön megköszönni témavezetőmnek, dr. Hoffmann Miklósnak, hogy az évek alatt rengeteget tanulhattam tőle. Köszönöm a feltétlen bizalmat, a segítséget és a mindig jó hangulatú konzultációkat.

Köszönettel tartozom családomnak odaadó szeretetükért, támogatásukért és türelmükért.

Szeretném továbbá megköszönni a disszertációban bemutatott eredményekhez kapcsolódó kutatási támogatást¹.

¹A kutatást az „Integrált kutatói utánpótlás-képzési program az informatika és számítástudomány diszciplináris területein” (EFOP-3.6.3-VEKOP-16-2017-00002) című projekt támogatta. A projekt az Európai Unió támogatásával, az Európai Szociális Alap társfinanszírozásával valósult meg.

Irodalomjegyzék

- Ao, X., Fu, Q., Wu, Z., Wang, X., Zhou, M., Chen, Q., & Seah, H. (2018). An intersection algorithm for disk B-spline curves. *Computers and Graphics*, *70*, 99–107.
- Bácsó, S., & Papp, I. (2006). *Ciklográfia példatár*. <http://goo.gl/CSHsG1>. ([Online; elérés dátuma: 2020. július 31.])
- Bácsó, S., Papp, I., & Szabó, J. (2006). *Projektív geometria*. Debrecen: Kossuth Egyetemi Kiadó.
- Bana, K., Kruppa, K., Kunkli, R., & Hoffmann, M. (2014). KSpheres – an efficient algorithm for joining skinning surfaces. *Computer Aided Geometric Design*, *31*(7-8), 499–509.
- Baran, I., & Popović, J. (2007). Automatic rigging and animation of 3D characters. *ACM Transactions on Graphics*, *26*(99), 72.
- Bastl, B., Kosinka, J., & Lávička, M. (2015). Simple and branched skins of systems of circles and convex shapes. *Graphical Models*, *78*, 1–9.
- Bizzarri, M., & Lávička, M. (2013). Parameterizing rational offset canal surfaces via rational contour curves. *Computer-Aided Design*, *45*(2), 342–350.
- Bizzarri, M., & Lávička, M. (2017). Rational adaptive blends among obstacles in 3D by contour method. *Computer-Aided Design*, *89*, 1–11.
- Bizzarri, M., Lávička, M., & Kosinka, J. (2016). Medial axis transforms yielding rational envelopes. *Computer Aided Geometric Design*, *46*, 92–102.
- Bizzarri, M., Lávička, M., & Kosinka, J. (2017). Skinning and blending with rational envelope surfaces. *Computer-Aided Design*, *87*, 41–51.
- Bizzarri, M., Lávička, M., & Vršek, J. (2019). Linear computational approach to interpolations with polynomial Minkowski Pythago-

- rean hodograph curves. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 361, 283–294.
- Blaschitz, B. (2014). Skinning of Circles and Spheres by Geometric Optimization in Minkowski Space. *Journal for Geometry and Graphics*, 18(2), 159–172.
- Blum, H. (1967). A transformation for extracting new descriptors of shape. In *Models for the perception of speech and visual form* (pp. 362–380). MIT Press.
- Bruce, J., & Giblin, P. (1992). *Curves and singularities: A geometrical introduction to singularity theory*. Cambridge University Press.
- Calabi, L. (1965). *A study of the skeleton of plane figures*. Parke Mathematical Laboratories.
- Cao, L., Jia, Z., & Liu, J. (2009). Computation of medial axis and offset curves of curved boundaries in planar domains based on the Cesaro’s approach. *Computer Aided Geometric Design*, 26(4), 444–454.
- Cao, L., & Liu, J. (2008). Computation of medial axis and offset curves of curved boundaries in planar domain. *Computer Aided Design*, 40(4), 465–475.
- Chen, F., & Yang, W. (2004). Degree reduction of disk Bézier curves. *Computer Aided Geometric Design*, 21(3), 263–280.
- Cheng, H.-L., & Shi, X. (2009). Quality mesh generation for molecular skin surfaces using restricted union of balls. *Computational Geometry*, 42(3), 196–206.
- Choi, H., Choi, S., Han, C., Kim, T.-W., Kwon, S.-H., Moon, H., ... Wee, N.-S. (2008). Two-dimensional offsets and medial axis transform. *Advances in Computational Mathematics*, 28(2), 171–199.
- Choi, H., Choi, S., & Moon, H. (1997). Mathematical theory of medial axis transform. *Pacific Journal of Mathematics*, 181(1), 57–88.
- Choi, H., Han, C., Moon, H., Roh, K., & Wee, N.-S. (1999). Medial

- axis transform and offset curves by Minkowski Pythagorean hodograph curves. *Computer Aided Design*, 31(1), 59–72.
- Connolly, M. (1983). Analytical molecular surface calculation. *Journal of Applied Crystallography*, 16, 548–558.
- Edelsbrunner, H. (1999). Deformable smooth surface design. *Discrete & Computational Geometry*, 21, 87–115.
- Engleitner, N., & Jüttler, B. (2019). Lofting with Patchwork B-Splines. In *Advanced Methods for Geometric Modeling and Numerical Simulation* (Vol. 35, pp. 77–98). Springer.
- Farin, G. (2002). *Curves and Surfaces for CAGD: A Practical Guide* (5th ed.). Academic Press.
- Farin, G., Hoschek, J., & Kim, M.-S. (2002). *Handbook of computer aided geometric design*. North Holland.
- Farin, G., J, H., & Kim, M.-S. (2002). *Handbook of Computer Aided Geometric Design*. Elsevier.
- Farouki, R., & Neff, C. (1995). Hermite Interpolation by Pythagorean Hodograph Quintics. *Mathematics of Computation*, 64(212), 1589–1609.
- Farouki, R., & Sakkalis, T. (1990). Pythagorean hodographs. *IBM Journal of Research and Development*, 34(5), 736–752.
- Fu, Q., Wu, Z., Wang, X., Zhou, M., & Zheng, J. (2018). An algorithm for finding intersection between ball B-spline curves. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 327, 260–273.
- Hoffmann, C. (1992). Computer Vision, Descriptive Geometry, and Classical Mechanics. In *Computer Graphics and Mathematics* (pp. 229–243). Springer Berlin Heidelberg.
- Hoffmann, M., Monterde, J., & Troll, E. (2015). Blending of Spheres by Rotation-Minimizing Surfaces. *Journal for Geometry and Graphics*, 19(2), 189–200.
- Hoschek, J., & Lasser, D. (1993). *Fundamentals of Computer Aided*

- Geometric Design*. A.K. Peters.
- Juhász, I. (1995). *Számítógépi geometria és grafika*. Miskolci Egyetemi Kiadó.
- Kalman, D. (2008). *Uncommon mathematical excursions: Polynomials and related realms*. The Mathematical Association of America.
- Kalman, D. (2013). *Families of curves and their envelopes*. www.dankalman.net/ume/env/methods.pdf. ([Online, elérés dátuma: 2020. július 31.]])
- Kim, G.-I., & Ahn, M.-H. (2003). C^1 Hermite interpolation using MPH quartic. *Computer Aided Geometric Design*, 20(7), 469–492.
- Klimenko, S., Mestetskiy, L., & Semenov, A. (2008). Handwritten Fonts Modeling Based on Fat Lines of Variable Width. In *WSCG '2008: Full Papers: The 16th International Conference in Central Europe on Computer Graphics, Visualization and Computer Vision in co-operation with EUROGRAPHICS* (pp. 25–32). University of West Bohemia Plzen, Czech Republic, February 4–7, 2008.
- Klimenko, S., Mestetskiy, L., & Semenov, A. (2017). Imitation of Handwriting for Art and Heritage in Cyberspace. In *2017 International Conference on Cyberworlds (CW)* (pp. 174–177). IEEE.
- Kosinka, J., & Jüttler, B. (2006). G^1 Hermite interpolation by Minkowski Pythagorean hodograph cubics. *Computer Aided Geometric Design*, 23(5), 401–418.
- Kosinka, J., & Jüttler, B. (2009). C^1 Hermite interpolation by Pythagorean hodograph quintics in Minkowski space. *Advances in Computational Mathematics*, 30(2), 123–140.
- Kosinka, J., & Lávička, M. (2010). On rational Minkowski Pythagorean hodograph curves. *Computer Aided Geometric Design*, 27(7), 514–524.

- Kosinka, J., & Lávička, M. (2011). A unified Pythagorean hodograph approach to the medial axis transform and offset approximation. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 235(12), 3413–3424.
- Kosinka, J., & Šír, Z. (2010). C^2 Hermite interpolation by Minkowski Pythagorean hodograph curves and medial axis transform approximation. *Computer Aided Geometric Design*, 27(8), 631–643.
- Krames, J. (1929). *Die zyklographie* (No. 2). Deuticke.
- Kruithof, N., & Vegter, G. (2006). Envelope surfaces. In *Proceedings of the Annual Symposium on Computational Geometry 2006* (p. 411-420).
- Kruppa, K. (2020). Applying Rational Envelope Curves For Skinning Purposes. *Frontiers of Information Technology and Electronic Engineering*. (megjelenés alatt, online elérhető)
- Kruppa, K., Kunkli, R., & Hoffmann, M. (2018). *Comparison of skinning methods; website*. <https://skinning.github.io/skinning-methods/>.
- Kruppa, K., Kunkli, R., & Hoffmann, M. (2019). An improved skinning algorithm for circles and spheres providing smooth transitions. *Graphical Models*, 101, 27–37.
- Kruppa, K., Kunkli, R., & Hoffmann, M. (2020). *Possibilities and advantages of Rational Envelope curves for circle skinning [Előkészületben]*.
- Kunkli, R. (2009). Localization of touching points for interpolation of discrete circles. *Annales Mathematicae et Informaticae*, 36(1), 103–110.
- Kunkli, R., & Hoffmann, M. (2010). Skinning of circles and spheres. *Computer Aided Geometric Design*, 27(8), 611–621.
- Leymarie, F., & Aparajeya, P. (2017). Medialness and the Perception of Visual Art. *Art and Perception*, 5(2), 169–232.
- Leymarie, F., Aparajeya, P., & MacGillivray, C. (2014). Point-based

- medialness for movement computing. In *Proceedings of the 2014 International Workshop on Movement and Computing* (pp. 31:31–31:36). ACM.
- Lin, Q., & Rokne, J. (1998). Disk Bézier curves. *Computer Aided Geometric Design*, *15*(7), 721–737.
- Liu, X., Wang, X., Wu, Z., Zhang, D., & Liu, X. (2020). Extending Ball B-spline by B-spline. *Computer Aided Geometric Design*, *82*, 101926. doi: 10.1016/j.cagd.2020.101926
- Mesnil, R., Douthe, C., Baverel, O., & Léger, B. (2018). Morphogenesis of surfaces with planar lines of curvature and application to architectural design. *Automation in Construction*, *95*, 129–141.
- Mestetskii, L. (2000). Fat curves and representation of planar figures. *Computers & Graphics*, *24*(1), 9–21.
- Moon, H. (1998). Computing rational offsets via medial axis transform using polynomial speed curves in $\mathbb{R}^{2,1}$. In *Geometric Modeling and Processing '98* (pp. 187–203).
- Moon, H. (1999). Minkowski Pythagorean hodographs. *Computer Aided Geometric Design*, *16*(8), 739–753.
- Paternell, M., Odehnal, B., & Sampoli, M. (2008). On quadratic two-parameter families of spheres and their envelopes. *Computer Aided Geometric Design*, *25*(4-5), 342–355.
- Paternell, M., & Pottmann, H. (1998). Applications of Laguerre geometry in CAGD. *Computer Aided Geometric Design*, *15*(2), 165–186.
- Piegl, L., & Tiller, W. (1995). *The NURBS Book* (2nd ed.). Springer.
- Piegl, L., & Tiller, W. (2000). Surface approximation to scanned data. *The Visual Computer*, *16* (7), 386–395.
- Piegl, L., & Tiller, W. (2002). Surface skinning revisited. *The Visual Computer*, *18* (4), 273–283.
- Piskin, S., Unal, G., Arnaz, A., Sarioglu, T., & Pekkan, K. (2017). Tet-

- ralogy of Fallot Surgical Repair: Shunt Configurations, Ductus Arteriosus and the Circle of Willis. *Cardiovascular Engineering and Technology*, 8, 107–119.
- Pottmann, H., & Peternell, M. (2000). Envelopes – Computational Theory and Applications. In *Spring Conference on Computer Graphics and its Applications* (pp. 3–23).
- Pottmann, H., & Wallner, J. (2010). *Computational Line Geometry*. Springer Berlin Heidelberg.
- Rossignac, J., Whited, B., Slabaugh, G., Fang, T., & Unal, G. (2007). Pearling: 3D interactive extraction of tubular structures from volumetric images. In *MICCAI Workshop on Interaction in Medical Image Analysis and Visualization*.
- Seah, H., Wu, Z., Tian, F., Xiao, X., & Xie, B. (2005). Artistic brushstroke representation and animation with disk B-spline curve. In *Proceedings of the 2005 ACM SIGCHI International Conference on Advances in computer entertainment technology - ACE '05* (Vol. 265, pp. 88–93). ACM Press.
- Shapira, L., Shamir, A., & Cohen-Or, D. (2008). Consistent mesh partitioning and skeletonisation using the shape diameter function. *Visual Computer*, 24(4), 249–259.
- Slabaugh, G., Rossignac, J., Whited, B., Fang, T., & Unal, G. (2010). 3D Ball Skinning using PDEs for Generation of Smooth Tubular Surfaces. *Computer-Aided Design*, 42, 18–26.
- Slabaugh, G., Unal, G., Fang, T., Rossignac, J., & Whited, B. (n.d.). Variational Skinning of an Ordered Set of Discrete 2D Balls. In *Advances in Geometric Modeling and Processing, GMP 2008*.
- Spore™ and Spore™ Creature Creator*. (2008). <https://www.spore.com>. ([Online; elérés dátuma: 2020. július 31.])
- Tkach, A., Pauly, M., & Tagliasacchi, A. (2016). Sphere-meshes for real-time hand modeling and tracking. *ACM Transactions on Graphics*, 35(6).

- Tornai, R. (2012). Measurement of visual smoothness of blending curves. *Annales Mathematicae et Informaticae*, 40, 155-160.
- Tsogkas, S., & Dickinson, S. (2017). AMAT: Medial Axis Transform for Natural Images. In *2017 IEEE International Conference on Computer Vision (ICCV)* (p. 2727-2736).
- Wang, M., Fu, Q., Wang, X., Wu, Z., & Zhou, M. (2016). Evaluation of Chinese Calligraphy by Using DBSC Vectorization and ICP Algorithm. *Mathematical Problems in Engineering*, 1–11.
- Welzl, E. (1991). Smallest enclosing disks (balls and ellipsoids). In H. Maurer (Ed.), *New Results and New Trends in Computer Science* (pp. 359–370). Springer Berlin Heidelberg.
- Wu, Z., Seah, H. S., & Zhou, M. (2007). Skeleton based parametric solid models: Ball B-Spline curves. *Proceedings of 2007 10th IEEE International Conference on Computer Aided Design and Computer Graphics, CAD/Graphics 2007*, 421–424.
- Yang, X., & Zheng, J. (2012). Approximate T-spline surface skinning. *Computer-Aided Design*, 44 (12), 1269–1276.
- Yates, R. (1974). *Curves and Their Properties*. National Council of Teachers of Mathematics.
- ZBrush 2020 :: ZSpheres[®]. (2020). <https://pixologic.com/zbrush/features/ZSpheres/>. ([Online; elérés dátuma: 2020. július 31.])

A. A saját módszereket bemutató algoritmusok

1. Algoritmus A c_i kör érintési pontjainak meghatározása

```

1: procedure GETTOUCHINGPOINTS( $i$ )
2:   if  $i = 1$  then
3:     |  $\mathbf{u}_1 = \mathbf{v}_1 = \mathbf{p}_1$ 
4:   else if  $i = n$  then
5:     |  $\mathbf{u}_n = \mathbf{v}_n = \mathbf{q}_n$ 
6:   else
7:     |  $\mathbf{u}_i = \mathbf{q}_i, \mathbf{v}_i = \mathbf{p}_i$ 
8:     | if  $\mathbf{p}_i \in d_{i-1}$  then
9:       | |  $\mathbf{v}_i = \mathbf{n}_{i_1}$ 
10:    | | if  $\mathbf{q}_i \in d_{i+1}$  then
11:      | | |  $\mathbf{u}_i = \mathbf{n}_{i_2}$ 
12:    | if  $\mathbf{q}_i \preceq \mathbf{p}_i$  then
13:      | |  $\mathbf{a}_i = \mathbf{u}_i, \mathbf{b}_i = \mathbf{v}_i$ 
14:    | else
15:      | |  $\mathbf{u}'_i = \mathbf{u}_i, \mathbf{v}'_i = \mathbf{v}_i$ 
16:      | | if  $\mathbf{s}_{i_1} \in \widehat{\mathbf{p}_i \mathbf{q}_i}$  then
17:        | | |  $\mathbf{v}'_i = \mathbf{s}_{i_1}$ 
18:        | | | if  $c_{i-1} \cap c_i \neq \emptyset$  then
19:          | | | |  $\mathbf{v}'_i = \mathbf{n}_{i_1}$ 
20:        | | | if  $\mathbf{s}_{i_2} \in \widehat{\mathbf{p}_i \mathbf{q}_i}$  then
21:          | | | |  $\mathbf{u}'_i = \mathbf{s}_{i_2}$ 
22:          | | | | if  $c_i \cap c_{i+1} \neq \emptyset$  then
23:            | | | | |  $\mathbf{u}'_i = \mathbf{n}_{i_2}$ 
24:          | | |  $\mathbf{w}'_i = \mathbf{v}'_i \dot{\cap} \mathbf{u}'_i$ 
25:          | |  $\mathbf{a}_i = \mathbf{b}_i = \mathbf{w}'_i$ 

```

2. Algoritmus A c_i és c_{i+1} körköz tartozó burkológörbe előállítása

```
1: procedure COMPUTESKIN( $i$ )
2:   if  $\mathbf{b}_i \neq \mathbf{a}_i$  then
3:     | makeCircularArc $\{\mathbf{a}_i, \mathbf{b}_i\}$ 
4:      $t_i = \text{getRadicalLine}(c_i, c_{i+1})$ 
5:      $d_{k_{i_1}} = 2 * \text{distance}(B_i, t_i)$ 
6:      $d_{k_{i_2}} = 2 * \text{distance}(A_{i+1}, t_i)$ 
7:     if  $\mathbf{a}_i = \mathbf{b}_i$  then
8:       |  $d_{b_{i_1}} = 2 * \|\mathbf{b}_i - \mathbf{v}_i\|$ 
9:     else
10:      |  $d_{b_{i_1}} = 2 * \|\mathbf{b}_i - \mathbf{v}_{i+1}\|$ 
11:      if  $\mathbf{a}_{i+1} = \mathbf{b}_{i+1}$  then
12:        |  $d_{b_{i_2}} = 2 * \|\mathbf{a}_{i+1} - \mathbf{u}_{i+1}\|$ 
13:      else
14:        |  $d_{b_{i_2}} = 2 * \|\mathbf{a}_{i+1} - \mathbf{u}_i\|$ 
15:       $d_{i_1} = \lambda_{i_1} * d_{b_{i_1}} + (1 - \lambda_{i_1}) * d_{k_{i_1}}$ 
16:       $d_{i_2} = \lambda_{i_2} * d_{b_{i_2}} + (1 - \lambda_{i_2}) * d_{k_{i_2}}$ 
17:       $\mathbf{e}_i = d_{i_1} * \frac{\mathbf{b}_i - \mathbf{o}_i}{\|\mathbf{b}_i - \mathbf{o}_i\|}$ 
18:       $\mathbf{f}_i = d_{i_2} * \frac{\mathbf{a}_{i+1} - \mathbf{o}_{i+1}}{\|\mathbf{a}_{i+1} - \mathbf{o}_{i+1}\|}$ 
19:      makeHermite $\{\mathbf{b}_i, \mathbf{a}_{i+1}, \mathbf{e}_i, \mathbf{f}_i\}$ 
```

3. Algoritmus A bal oldali burkológörbe előállítása egy megengedett körsorozathoz

Input: $C = \{c_1, c_2, \dots, c_n\}$, egy megengedett körsorozat

Output: $\mathbf{s}(t)$, a bal oldali burkológörbe

```
1: for  $i = 1$  to  $n$  do
2:   | GETTOUCHINGPOINTS( $i$ )           ▷ lásd az 1. algoritmust
3: for  $i = 1$  to  $n - 1$  do
4:   | COMPUTESKIN( $i$ )                 ▷ lásd a 2. algoritmust
```

4. Algoritmus Metszések feloldása C-alakú kontrollpoligonnal rendelkezö burkolögörbék esetén

Input: $P_0P_1P_2P_3$ és $R_0R_1R_2R_3$ kontrollpoligonok

Output: $P_0P_1P_2P_3$ és $R_0R_1R_2R_3$ módosított kontrollpoligonok

```
1:  $min\_dist_L, min\_dist_M = \infty$ 
2: for  $j = 0$  to  $4$  do
3:    $L_j = P_0P_1 \cap R_jR_{(j+1)\%4}$ 
4:    $M_j = R_0R_1 \cap P_jP_{(j+1)\%4}$ 
5:    $dist_L = \text{distance}(P_0, L_j)$ 
6:    $dist_M = \text{distance}(R_0, M_j)$ 
7:   if  $dist_L < min\_dist_L$  then
8:      $min\_dist_L = dist_L$ 
9:      $P_1 = L_j$ 
10:  if  $dist_M < min\_dist_M$  then
11:     $min\_dist_M = dist_M$ 
12:     $R_1 = M_j$ 
13:  $min\_dist_L, min\_dist_M = \infty$ 
14: for  $j = 0$  to  $4$  do
15:    $L_j = P_2P_3 \cap R_jR_{(j+1)\%4}$ 
16:    $M_j = R_2R_3 \cap P_jP_{(j+1)\%4}$ 
17:    $dist_L = \text{distance}(P_3, L_j)$ 
18:    $dist_M = \text{distance}(R_3, M_j)$ 
19:   if  $dist_L < min\_dist_L$  then
20:      $min\_dist_L = dist_L$ 
21:      $P_2 = L_j$ 
22:   if  $dist_M < min\_dist_M$  then
23:      $min\_dist_M = dist_M$ 
24:      $R_2 = M_j$ 
```

5. Algoritmus RE görbék használata körsorozatok burkolására

Input: $\mathcal{C} = \{c_1, c_2, \dots, c_n\}$, egy megengedett körsorozat

Output: egymáshoz G^1 -folytonosan csatlakozó burkológörbék

```
1:  $\mathbf{w}_1^\pm = \text{getByCommonTangentLines}(c_1, c_2)$ 
2:  $\mathbf{w}_n^\pm = \text{getByCommonTangentLines}(c_{n-1}, c_n)$ 
3: for  $i = 2$  to  $n - 1$  do
4:    $\mathbf{w}_i^\pm = \text{getFromApolloniusSolutions}(c_{i-1}, c_i, c_{i+1})$ 
5:   for  $i = 1$  to  $n$  do
6:      $\mathbf{p}_i = (o_{i_x}, o_{i_y}, r_i)$ 
7:     if FIX 2 TOUCHING POINTS then
8:        $\mathbf{s}_i = \text{getInversePoint}(\mathbf{p}_i, \mathbf{w}_i^+, \mathbf{w}_i^-)$   $\triangleright$  lásd: (5.9)
9:     else
10:       $\mathbf{s}_i = \text{getPointFromEllipse}(\mathbf{p}_i, \mathbf{w}_i^+)$   $\triangleright$  lásd: (5.11)
11:       $\mathbf{t}_i = \mathbf{s}_i - \mathbf{p}_i$ 
12:   skin =  $\{\emptyset\}$ 
13:   for  $i = 1$  to  $n - 1$  do
14:      $\mathbf{v}_i = \text{getV}(\mathbf{p}_i, \mathbf{w}_i^+)$ 
15:      $\mathbf{v}_{i+1} = \text{getV}(\mathbf{p}_{i+1}, \mathbf{w}_{i+1}^+)$   $\triangleright$  lásd: (5.13)
16:      $\mathbf{x}_i(t) = \text{interpolate}(\mathbf{w}_i^+, \mathbf{w}_{i+1}^+, \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_{i+1})$ 
17:      $f_i(t) = \text{getF}(\mathbf{p}_i, \mathbf{v}_i, \mathbf{t}_i, \mathbf{p}_{i+1}, \mathbf{v}_{i+1}, \mathbf{t}_{i+1}, \mathbf{x}_i)$   $\triangleright$  lásd: (5.14), (5.15)
18:      $\bar{\mathbf{y}}_i(t) = \text{getMAT}(\mathbf{x}_i, f_i)$   $\triangleright$  lásd: (5.16)
19:      $\mathbf{x}_i^\pm(t) = \text{getEnvelopeCurves}(\bar{\mathbf{y}}_i)$   $\triangleright$  lásd: (2.1)
20:     skin.add( $\mathbf{x}_i^\pm$ )
21: return skin
```

B. Az eredményeket bemutató animációk

Az animációk lejátszásához az Adobe Acrobat Reader szoftvert² érdemes használni, majd pedig az adott animáció kezdőképére kell kattintani.

Köríveket is felhasználó burkolómódszerünk

1. animáció. Bastl és mtsai. módszerénél az érintési pontok helyzete nem folytonosan változik, egy „ugrás” tapasztalható. A mi módszerünkkel ez nem lép fel.

²A disszertáció megírásakor használt verzió: Adobe Acrobat Reader DC, Version 2020.013.20064

2. animáció. Bastl és mtsai. módszerével az érintési pontok bekerülhetnek a szomszédos körök belsejébe. Módszerünk megoldást nyújt erre a problémára.

3. animáció. Az érintővektorok hosszának nem folytonos változtatása okozza a problémát Bastl és mtsai. módszerénél. Az általunk megadott módszerrel ez kiküszöbölhető.

4. animáció. Kunkli és Hoffmann módszerének összehasonlítása a mi módszerünkkel. Láthatjuk, hogy módszerünk szélsőségesebb esetekben jobb eredményt biztosít.

RE görbék alkalmazása burkolásra

5. animáció. Az előálló burkolók alakját tudjuk befolyásolni, ha csak egy érintési pontot rögzítünk a körökön.

C. Publikációs jegyzék

Referált folyóiratcikkek

- [F1] K. Bana – K. Kruppa – R. Kunkli – M. Hoffmann: KSpheres – an efficient algorithm for joining skinning surfaces. *Computer Aided Geometric Design* 31. évf. (2014), 499–509. p.
DOI: [10.1016/j.cagd.2014.08.003](https://doi.org/10.1016/j.cagd.2014.08.003)
- [F2] K. Kruppa – R. Kunkli – M. Hoffmann: An improved skinning algorithm for circles and spheres providing smooth transitions. *Graphical Models*, 101. évf. (2019), 27–37. p.
DOI: [10.1016/j.gmod.2018.12.001](https://doi.org/10.1016/j.gmod.2018.12.001)
- [F3] K. Kruppa: Applying Rational Envelope Curves For Skinning Purposes. *Frontiers of Information Technology and Electronic Engineering* (2020, megjelenés alatt, online elérhető)
DOI: [10.1631/FITEE.1900377](https://doi.org/10.1631/FITEE.1900377)

Konferenciakötetben megjelent cikkek

- [K1] K. Kruppa – K. Bana – R. Kunkli – M. Hoffmann: Creating connection between skinning surfaces. In L. Szirmay-Kalos – G. Renner (szerk.): *VII. Magyar Számítógépes Grafika és Geometria Konferencia, Budapest, 2014. február 19–20.* (konferenciaanyag). 2014, Neumann János Számítógép-tudományi Társaság, 46–51. p.
- [K2] K. Kruppa – R. Kunkli – M. Hoffmann: A skinning algorithm for branched systems of circles and spheres. In L. Szirmay-Kalos – G. Renner (szerk.): *IX. Magyar Számítógépes Grafika és Geometria Konferencia, Budapest, 2018. március 21–22.* (konferenciaanyag). 2018, Neumann János Számítógép-tudományi Társaság, 31–37. p.

További konferencia-előadások

- [E1] K. Bana – K. Kruppa: KSpheres – Hatékony algoritmus gömb-sorozatokat interpoláló felületek csatlakoztatási problémáinak kiküszöbölésére. XXXI. Országos Tudományos Diákköri Konferencia, Budapest, Magyarország, 2013. március.
- [E2] K. Bana – K. Kruppa – R. Kunkli – M. Hoffmann: KSpheres—an efficient algorithm for joining skinning surfaces. Conference on Geometry – Theory and Applications (CGTA 2013), Ljubljana, Szlovénia, 2013. június.
- [E3] K. Kruppa – K. Bana – R. Kunkli – M. Hoffmann: An improved method to construct intersection curves of skinning surfaces. 17th Scientific-Professional Colloquium on Geometry and Graphics, Rastoke, Horvátország, 2013. szeptember.
- [E4] K. Kruppa – R. Kunkli – M., Hoffmann: Combining and extending the features of circle skinning algorithms. The 10th International Conference on Applied Informatics (ICAI 2017), Eger, Magyarország, 2017. január.
- [E5] K. Kruppa – R. Kunkli – M. Hoffmann: An extension to circle and sphere skinning algorithms. Conference on Geometry – Theory and Applications (CGTA 2017), Plzeň, Csehország, 2017. június.
- [E6] K. Kruppa – R. Kunkli – M. Hoffmann: A skinning algorithm for branched systems of circles and spheres. Ninth Hungarian Conference on Computer Graphics and Geometry (GRAFGEOM 2018), Budapest, Magyarország, 2018. március.
- [E7] K. Kruppa – R. Kunkli – M. Hoffmann: Geometric aspects of rational envelopes. Conference on Geometry – Theory and Applications (CGTA 2019), Innsbruck, Ausztria, 2019. június.

Poszterprezentációk

- [P1] K. Kruppa – R. Kunkli – M. Hoffmann: A new skinning method for dynamic modeling. 5th Winter School of PhD Students in Informatics and Mathematics, Debrecen, Magyarország, 2018. március.
- [P2] K. Kruppa: An inverted approach to Hermite data interpolation in $\mathbb{R}^{2,1}$ for circle skinning purposes. Asian Forum on Graphic Science (AFGS 2019), Kunming, Kína, 2019. augusztus.