Általánosított Lah-számok és néhány kapcsolódó kombinatorikus számsorozat

Egyetemi doktori (PhD) értekezés

Rácz Gabriella
Témavezető: Dr. Nyul Gábor

DEBRECENI EGYETEM
Természettudományi és Informatikai Doktori Tanács
Matematika- és Számítástudományok Doktori Iskola
Debrecen, 2021

Ezen értekezést a Debreceni Egyetem Természettudományi és Informatikai Doktori Tanács Matematika- és Számítástudományok Doktori Iskola Explicit módszerek az algebrai számelméletben programja keretében készítettem a Debreceni Egyetem természettudományi doktori (PhD) fokozatának elnyerése céljából.

Nyilatkozom arról, hogy a tézisekben leírt eredmények nem képezik más PhD disszertáció részét.

Debrecen, 2021. március 8. ....

a jelölt aláírása

Tanúsítom, hogy Rácz Gabriella doktorjelölt 2015–2018 között a fent megnevezett Doktori Iskola Explicit módszerek az algebrai számelméletben programjának keretében irányításommal végezte munkáját. Az értekezésben foglalt eredményekhez a jelölt önálló alkotó tevékenységével meghatározóan hozzájárult.

Nyilatkozom továbbá arról, hogy a tézisekben leírt eredmények nem képezik más PhD disszertáció részét.

Az értekezés elfogadását javasolom.

Debrecen, 2021. március 8. ....

a témavezető aláírása

Általánosított Lah-számok és néhány kapcsolódó kombinatorikus számsorozat

Értekezés a doktori (Ph.D.) fokozat megszerzése érdekében a matematika- és számítástudományok tudományágban

Írta: Rácz Gabriella okleveles alkalmazott matematikus

Készült a Debreceni Egyetem Matematika- és Számítástudományok Doktori Iskolája (Explicit módszerek az algebrai számelméletben programja) keretében

Témavezető: Dr. Nyul Gábor

A doktori szigorlati bizottság:

elnök:	Dr. Bérczes Attila
tagok:	Dr. Pink István
	Dr. Bujtás Csilla

A doktori szigorlat időpontja: 2018. november 30.

Az értekezés bírálói:

	Dr.	....
	Dr.	....

A bírálóbizottság:

elnök:	Dr.	....
tagok:	Dr.	....
	Dr.	....
	Dr.	....
	Dr.	....

Az értekezés védésének időpontja: 2021. ....

Köszönetnyilvánítás

Sokan hozzájárultak ahhoz, hogy ez a dolgozat elkészüljön. Elsőként témavezetőmnek, Dr. Nyul Gábornak szeretnék köszönetet mondani. Kicsit több, mint tíz évvel ezelőtt még remegő kézzel húztam a kombinatorika tételek közül Nálad az első egyetemi vizsgámon, most pedig már kész a doktori értekezésem. Akkoriban el sem tudtam képzelni, hogy valaha ilyenben lesz részem. Azt sem gondoltam, hogy cikkeket írunk és konferenciákon adok majd elő. Mindezek mégis megtörténtek, és ezt Neked köszönhetem! Nem tudom, mit láttál bennem, de Te már a kezdetektől fogva úgy gondoltad, hogy többre vagyok képes annál, mint hogy "csak" megszerezzek egy diplomát. Ebben (is) igazad lett! Köszönöm, hogy annyit segítettél és végigvezettél ezen a hosszú úton. Tudom, nem volt mindig egyszerű, sokszor nem könnyítettem meg a dolgod, de nagyon hálás vagyok Neked!

Köszönettel tartozok minden tanáromnak, különösen a gimnáziumi matematikatanáromnak, aki miatt végül is a matematika szakot választottam a Debreceni Egyetemen. Az egyetemi oktatóimtól is sokat tanultam, amiért szintén hálás vagyok. A Matematikai Intézet minden munkatársának, különös tekintettel az Algebra és Számelmélet Tanszék tagjaira is, szeretnék köszönetet mondani, amiért támogatták az előmenetelemet. Az M404-es iroda jelenlegi és volt munkatársait is meg kell említenem, köszönöm, hogy már akkor nagyon kedvesen fogadtatok, amikor még csak folyamatban volt a PhD felvételim, és hogy később Nektek köszönhetően mindig kellemesen teltek az irodában töltött munkaórák.

Mindezeken túl hálával tartozom Szeretteimnek is. Köszönöm, hogy mindenben számíthatok Rátok, mindig mellettem álltok és támogattok! Talán a dolgozat további része nem lesz túl érdekes a Számotokra, de ez mégis a Ti érdemetek is, hiszen Nélkületek nem juthattam volna el idáig.

Tartalomjegyzék

1. Bevezető

A leszámlálási problémák már nagyon régóta foglalkoztatják az emberiséget. N. L. Biggs [8] szerint az egyik első megjelenésük valószínűleg a több száz évvel időszámításunk előtt keletkezett Ji csing (Változások könyve) című kínai könyvhöz kapcsolódik. Ez a mű szimbólumok segítségével magyarázza meg a világ működését, és vezeti rá az embert a helyes gondolkodásra. Mindez két szimbólum, a jin (– –) és a jang (—) használatán alapul. Ezekből képezték az ún. trigramokat és a hexagramokat, előbbi három, utóbbi hat szimbólumból áll. A trigramok száma 2^3, a hexagramoké pedig 2^6. A Változások könyvében tehát tulajdonképpen ismétléses variációk jelentek meg.

Szintén már jóval időszámításunk kezdete előtt a hinduk is foglalkoztak leszámlálási problémákkal. Egy Susruta nevű orvos például tanulmányában azt számolta össze, hogy hatféle alapízt (édes, savanyú, sós, csípős, keserű, fanyar) hányféleképpen lehet összekombinálni. Egy ízt 6-, két ízt 15-, hármat 20-, négyet szintén 15-, ötöt 6-, hat ízt pedig 1-féleképpen lehet kiválasztani. Ez pedig ismétlés nélküli kombinációk összeszámolását jelenti.

A fent említett írások megszületése óta rengeteg idő telt el, a kombinatorika szó hallatán a legtöbb embernek mégis csak a permutáció – variáció – kombináció szóhármas jut eszébe. Pedig a leszámláló kombinatorika sokkal többet jelent ennél a három fogalomnál.

A disszertációnk kiindulópontját jelentő Stirling-számok a korábbiakhoz képest jóval később jelentek meg, de azóta alapvető fontosságúvá váltak a leszámláló kombinatorikában. Habár az elsőfajú Stirling-számok már 1600 körül említésre kerültek egy kéziratban, mégis J. Stirling volt az, aki 1730-ban, Methodus Differentialis című művében bevezette a később róla elnevezett számokat, bár még az alábbi kombinatorikus jelentések nélkül. Az $\left[{n \atop k}\right]$ elsőfajú Stirling-szám azon S_n-beli permutációk számát adja meg, melyek k darab páronként idegen ciklus szorzataként állnak elő, míg az $\left\{{n \atop k}\right\}$ másodfajú Stirling-szám egy n elemű halmaz k darab osztályba való osztályozásainak a számával egyezik meg ($0 \leq k \leq n$).

Érdemes megjegyezni, hogy a Stirling-számok megjelenéséhez képest a fenti jelölések meglehetősen későn kerültek bevezetésre. Először J. Karamata [32] cikkében bukkantak fel, de széles körben elfogadottá D. E. Knuth [35] tette őket. Ezt megelőzően minden szerző a saját céljainak leginkább megfelelő jelöléseket alkalmazott. A Stirling-számok binomiális együtthatókkal való rokonsága miatt merült fel az azokéhoz hasonló zárójeles jelölés ötlete. A másodfajú Stirling-számok kapcsos zárójelekkel való jelölését könnyű megjegyezni, hiszen fogalmuk halmazokhoz kapcsolódik, és a halmazok elemeit kapcsos zárójelek közé írjuk. Knuth a ciklusok elemeit szögletes zárójelek között sorolta fel, ezért javasolta az elsőfajú Stirling-számok esetében a szögletes zárójelek használatát.

Ha a másodfajú Stirling-számok problémáját módosítjuk olyan módon, hogy az osztályokon belül számítson az elemek sorrendje, azaz az osztályok rendezettek legyenek, akkor az időnként harmadfajú Stirling-számoknak is nevezett $\left\lfloor {n \atop k} \right\rfloor$ Lah-számokhoz jutunk ($0 \leq k \leq n$).

Ezek a számok egy szlovén matematikusról, I. Lahról [37, 38] kapták a nevüket, ugyanis ő vezette be azokat az 1950-es évek közepén. Először egy aktuárius matematikai témájú cikkben [37] kerülnek említésre: az életjáradék jelenértékét leíró függvény diszkontfaktor szerinti parciális deriváltjainak együtthatóiban jelennek meg. A másik, statisztikai témájú cikkében [38] a Lah-számok az emelkedő és süllyedő faktoriális momentumok közötti összefüggésben szerepelnek.

Lah a később róla elnevezett számokat az emelkedő és süllyedő faktoriálisok közötti

$$x^{\overline{n}} = \sum_{k=0}^{n} \left\lfloor {n \atop k} \right\rfloor x^{\underline{k}} \quad (n \geq 0)$$

kapcsolat megadásával értelmezte, ahol $x^{\overline{n}} = x(x+1)\dots(x+n-1)$ az x n-edik emelkedő faktoriálisa, valamint $x^{\underline{k}} = x(x-1)\dots(x-(k-1))$ az x k-adik süllyedő faktoriálisa. Megjegyezzük, hogy Lah valójában előjeles Lah-számokat definiált.

A Lah-számok fenti, Karamata–Knuth-típusú jelölését M. Petkovšek és T. Pisanski [59] vezették be.

A leszámláló kombinatorikában nagy jelentőséggel bírnak a Bell-számok. Már korábban is vizsgálták őket, nevüket mégis E. T. Bell után kapták, aki az 1930-as években írt róluk. A Bell-számok egy adott elemszámú véges halmaz összes osztályozásainak a számát adják meg. Ebből következik, hogy a Bell-számok a másodfajú Stirling-számok összegzésével adódnak rögzített felső paraméter esetén, azaz az n-edik Bell-szám $B_n = \sum_{k=0}^{n} \left\{ {n \atop k} \right\}$ $(n \geq 0)$. Ha elkészítjük azt a polinomot, melyben x^k együtthatója az $\left\{ {n \atop k} \right\}$ másodfajú Stirling-szám, akkor az n-edik Bell-polinomot kapjuk.

Ha egy adott elemszámú véges halmaz rendezett osztályozásait számoljuk össze, azaz lényeges az osztályok sorrendje, akkor a Fubini-számokhoz jutunk. Ezek a számok G. Fubiniról lettek elnevezve, a Fubini-számok és az analízisből jól ismert Fubini-tétel közötti szoros kapcsolatnak köszönhetően. A Fubini-számok először A. Cayley-nél [13] jelentek meg 1859-ben, bizonyos fák összeszámlálásával kapcsolatban. Ezeknek a számoknak több interpretációja is ismert, habár szakirodalmuk kevésbé gazdag a Bell-számokéhoz képest. Hozzájuk kapcsolódóan értelmezhetők a Fubini-polinomok, melyeket S. M. Tanny [78] vezetett be.

Az eddigiekről részletes áttekintést nyújtanak a [41], a [47] és a [61] könyvek.

A Stirling-számoknak sokféle általánosítása és változata ismert. Ezek közül számunkra az ún. r-általánosítás a legérdekesebb, ahol a halmazunk tartalmaz r darab kitüntetett elemet, melyeknek különböző ciklusokba, illetve osztályokba kell kerülniük. Az r-Stirling-számokat L. Carlitz [12], A. Z. Broder [11] és R. Merris [42] definiálta, egymástól függetlenül.

A Lah-számok hasonló általánosításával korábban nem igazán foglalkoztak. Az értekezés 2. fejezetében, miután röviden áttekintjük az elsőfajú és a másodfajú r-Stirling-számok fogalmát és tulajdonságait, bevezetjük és részletesen tanulmányozzuk az r-Lah-számokat. A fejezet az [55] publikáció alapján készült.

A másodfajú r-Stirling-számok összegzésével értelmezhetők az r-Bell-számok, illetve a kapcsolódó r-Bell-polinomok is. Ezek bevezetése L. Carlitz [12] és Mező I. [43, 45] nevéhez fűződik.

A Bell-számokkal és a Bell-polinomokkal már sokan foglalkoztak, éppen ezért meglepő, hogy a Lah-számokból hasonló módon előállítható $L_n = \sum_{k=0}^{n} \left\lfloor {n \atop k} \right\rfloor$ $(n \geq 0)$ összegzett Lah-számokat csak nagyon érintőlegesen [21, 53, 66, 74], az $L_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \left\lfloor {n \atop k} \right\rfloor x^k$ Lah-polinomokat pedig még nem vizsgálták. A 3. fejezetben ezt általánosabb módon tesszük meg: értelmezzük az összegzett r-Lah-számokat és az r-Lah-polinomokat. A kombinatorikus tulajdonságaik mellett az r-Lah-polinomok gyökeinek vizsgálatával is foglalkozunk. Ez a fejezet az [57] és a [62] publikációk eredményeit tartalmazza.

A dolgozat 4. fejezetében gráfok párosításainak összeszámlálásával fogunk foglalkozni. Először olyan gráfokat konstruálunk, melyekben a párosítások száma Lucas-sorozatok segítségével kapható meg. Ezt követően az r-Lah-számokra és a másodfajú r-Stirling-számokra gráfelméleti interpretációt adunk meg, bizonyos páros gráfok adott elemszámú párosításainak számával összefüggésben. A fejezet az [56] és az [58] publikációk alapján íródott.

A Fubini-számok r-általánosítását Mező I. és Nyul G. [49] definiálta. Azzal az esettel azonban, amikor az osztályok sorrendje is és az osztályokon belül az elemek sorrendje is számít, korábban még nem foglalkoztak. Ezt fogjuk megtenni az 5. fejezetben, értelmezzük az r-Fubini–Lah-számokat és a kapcsolódó polinomokat, továbbá vizsgáljuk ezek tulajdonságait. A fejezet a [63] cikken alapul.

2. Az r-Lah-számok

Ebben a fejezetben először ismertetjük a Stirling-számok r-általánosítását, majd értelmezzük és részletesen vizsgáljuk az r-Lah-számokat.

2.1. Az r-Stirling-számok

L. Carlitz [12], A. Z. Broder [11] és R. Merris [42] definiálták és vizsgálták az r-Stirling-számokat. Ha $0 \leq k \leq n$ és $r \geq 0$ egészek, n, r nem mindkettő 0, akkor az $\left[{n \atop k}\right]_r$ elsőfajú r-Stirling-szám azon S_{n+r}-beli permutációk számát adja meg, amelyek $k+r$ darab páronként idegen ciklus szorzataként állnak elő úgy, hogy r darab kitüntetett elem különböző ciklusban van. Az $\left\{{n \atop k}\right\}_r$ másodfajú r-Stirling-szám pedig egy $n+r$ elemű halmaz $k+r$ darab osztályba való olyan osztályozásainak a száma, ahol r kitüntetett elem különböző osztályba kerül. Továbbá $\left[{0 \atop 0}\right]_0 = \left\{{0 \atop 0}\right\}_0 = 1$. Megjegyezzük, hogy a fent említett három szerző nem egységesen használta ezeket a jelöléseket, Broder más paraméterezéssel dolgozott. Megemlítjük még, hogy a másodfajú r-Stirling-számok bizonyos formában már N. Nielsennél [54] is megjelentek.

A másodfajú r-Stirling-számoknak más kombinatorikus értelmezése is ismert, Gyimesi E. és Nyul G. [25] egy kombinatorikus alterekkel kapcsolatos interpretációt adott meg. Kereskényi-Balogh Zs. és Nyul G. [33] pedig a másodfajú Stirling-számok gráfelméleti általánosításán keresztül vizsgálták ezeket.

Most összefoglaljuk az r-Stirling-számok legfontosabb tulajdonságait. Az 1. táblázatban az elsőfajú, a 2. táblázatban pedig a másodfajú r-Stirling-számokkal kapcsolatos ismereteket gyűjtjük össze, míg a 3. táblázat olyan formulákat tartalmaz, melyekben mindkét típusú r-Stirling-szám megjelenik. Ezekben a táblázatokban találhatóak korábban nem ismert összefüggések is, illetve a már mások által igazolt formulák némelyikére is új bizonyítást kapunk az r-Lah-számokkal kapcsolatban ismertetésre kerülő gondolatmenetekhez hasonló módon.

$\genfrac{[}{]}{0pt}{}{n}{k}_0 = \genfrac{[}{]}{0pt}{}{n}{k}$ [11],[12],[42], $\genfrac{[}{]}{0pt}{}{n}{k}_1 = \genfrac{[}{]}{0pt}{}{n+1}{k+1}$ [11],[12]
$\genfrac{[}{]}{0pt}{}{n}{0}_r = r^{\overline{n}}$ [11],[12],[42], $\genfrac{[}{]}{0pt}{}{n}{1}_r = n!H_n^{(r)}$ [4]
$\genfrac{[}{]}{0pt}{}{n}{n-1}_r = \binom{n}{2} + nr$, $\genfrac{[}{]}{0pt}{}{n}{n}_r = 1$ [11],[12],[42]
$\sum\limits_{k=0}^{n} \genfrac{[}{]}{0pt}{}{n}{k}_r = (r+1)^{\overline{n}}$ [12]
$\genfrac{[}{]}{0pt}{}{n+1}{k}_r = \genfrac{[}{]}{0pt}{}{n}{k-1}_r + (n+r)\genfrac{[}{]}{0pt}{}{n}{k}_r$ [11],[12],[42]
$(x+r)^{\overline{n}} = \sum\limits_{k=0}^{n} \genfrac{[}{]}{0pt}{}{n}{k}_r x^k$ [11],[12],[42] $(x-r)^{\underline{n}} = \sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \genfrac{[}{]}{0pt}{}{n}{k}_r x^k$ [11]
$\genfrac{[}{]}{0pt}{}{n+1}{k+1}_r = \sum\limits_{j=k}^{n} (n+r)^{\underline{n-j}} \genfrac{[}{]}{0pt}{}{j}{k}_r$
$\genfrac{[}{]}{0pt}{}{n}{k}_r = \sum\limits_{j=k}^{n} \binom{n}{j} \genfrac{[}{]}{0pt}{}{j}{k}_{r-s} s^{\overline{n-j}}$ [11],[12] $\genfrac{[}{]}{0pt}{}{n}{k}_r = \sum\limits_{j=k}^{n} \binom{n}{j} \genfrac{[}{]}{0pt}{}{j}{k}_{r-1} (n-j)!$ [11] $\genfrac{[}{]}{0pt}{}{n}{k}_r = \sum\limits_{j=k}^{n} \binom{n}{j} \genfrac{[}{]}{0pt}{}{j}{k} r^{\overline{n-j}}$ [11],[12],[42]
$\genfrac{[}{]}{0pt}{}{n}{k}_r = \sum\limits_{j=k}^{n} \genfrac{[}{]}{0pt}{}{n}{j}_{r-s} \binom{j}{k} s^{j-k}$ $\genfrac{[}{]}{0pt}{}{n}{k}_r = \sum\limits_{j=k}^{n} \genfrac{[}{]}{0pt}{}{n}{j}_{r-1} \binom{j}{k}$ $\genfrac{[}{]}{0pt}{}{n}{k}_r = \sum\limits_{j=k}^{n} \genfrac{[}{]}{0pt}{}{n}{j} \binom{j}{k} r^{j-k}$ [12],[42]
$\binom{k+l}{k} \genfrac{[}{]}{0pt}{}{n}{k+l}_{r+s} = \sum\limits_{j=k}^{n-l} \binom{n}{j} \genfrac{[}{]}{0pt}{}{j}{k}_r \genfrac{[}{]}{0pt}{}{n-j}{l}_s$ [11]
$\left(\genfrac{[}{]}{0pt}{}{n}{k}_r\right)_{k=0}^{n}$ szigorúan log-konkáv, unimodális [43]
$\sum\limits_{n=k}^{\infty} \genfrac{[}{]}{0pt}{}{n}{k}_r \frac{x^n}{n!} = \frac{1}{k!}\left(\ln\left(\frac{1}{1-x}\right)\right)^k \frac{1}{(1-x)^r}$ [11],[42]

1. táblázat:
Az elsőfajú r-Stirling-számok tulajdonságai

${n \brace k}_0 = {n \brace k}$ [11],[12],[42], ${n \brace k}_1 = {n+1 \brace k+1}$ [11],[12]
${n \brace 0}_r = r^n$ [11],[12],[42], ${n \brace 1}_r = (r+1)^n - r^n$
${n \brace n-1}_r = \binom{n}{2} + nr$, ${n \brace n}_r = 1$ [11],[12],[42]
$\sum_{k=0}^{n} {n \brace k}_r = B_{n,r}$ [12],[45]
${n+1 \brace k}_r = {n \brace k-1}_r + (k+r){n \brace k}_r$ [11],[12],[42]
$(x+r)^n = \sum_{k=0}^{n} {n \brace k}_r x^{\underline{k}}$ [11],[12] $(x-r)^n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k}{n \brace k}_r x^{\overline{k}}$ [11],[12]
${n+1 \brace k+1}_r = \sum_{j=k}^{n} (k+r+1)^{n-j}{j \brace k}_r$
${n \brace k}_r = \sum_{j=k}^{n} \binom{n}{j}{j \brace k}_{r-s} s^{n-j}$ [11] ${n \brace k}_r = \sum_{j=k}^{n} \binom{n}{j}{j \brace k}_{r-1}$ [11] ${n \brace k}_r = \sum_{j=k}^{n} \binom{n}{j}{j \brace k} r^{n-j}$ [11],[12],[42]
${n \brace k}_r = \sum_{j=k}^{n} {n \brace j}_{r-s}\binom{j}{k} s^{\underline{j-k}}$ [12] ${n \brace k}_r = {n \brace k}_{r-1} + (k+1){n \brace k+1}_{r-1}$ $(k \leq n-1)$ [11],[12] ${n \brace k}_r = \sum_{j=k}^{n} {n \brace j}\binom{j}{k} r^{\underline{j-k}}$ [12]
$\binom{k+l}{k}{n \brace k+l}_{r+s} = \sum_{j=k}^{n-l} \binom{n}{j}{j \brace k}_r{n-j \brace l}_s$ [11],[12]
${n \brace k}_r = \frac{1}{k!}\sum_{j=0}^{k}(-1)^j\binom{k}{j}(k+r-j)^n$ [12]
$\left({n \brace k}_r\right)_{k=0}^{n}$ szigorúan log-konkáv, unimodális [43]
$\sum_{n=k}^{\infty} {n \brace k}_r \frac{x^n}{n!} = \frac{1}{k!}\left(\exp(x)-1\right)^k \exp(rx)$ [11],[12],[42]

2. táblázat:
A másodfajú r-Stirling-számok tulajdonságai

$\sum_{j=k}^{n}(-1)^{j-k}{n \brack j}_r{j \brace k}_s=\binom{n}{k}(r-s)^{\overline{n-k}}$ [11],[12] $\sum_{j=k}^{n}(-1)^{j-k}{n \brack j}_r{j \brace k}_r=\delta_{nk}$ [11],[12],[42]
$\sum_{j=k}^{n}(-1)^{j-k}{n \brace j}_r{j \brack k}_s=\binom{n}{k}(r-s)^{n-k}$ [11],[12] $\sum_{j=k}^{n}(-1)^{j-k}{n \brace j}_r{j \brack k}_r=\delta_{nk}$ [11],[12],[42]
$b_n=\sum_{k=0}^{n}{n \brack k}_r a_k\ (n\geq 0)\iff$ $\iff a_n=\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}{n \brace k}_r b_k\ (n\geq 0)$
$b_n=\sum_{k=0}^{n}{n \brace k}_r a_k\ (n\geq 0)\iff$ $\iff a_n=\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}{n \brack k}_r b_k\ (n\geq 0)$

3. táblázat:
Az elsőfajú és a másodfajú r-Stirling-számok kapcsolata

Végül megemlítjük, hogy az r-Stirling-számokat is lehet még tovább általánosítani. Az r-Stirling-számok és a T. A. Dowling [18] által bevezetett Whitney-számok közös általánosítását, az r-Whitney-számokat Mező I. [44] értelmezte. Ezekre a számokra Gyimesi E. és Nyul G. [27] adtak új, kombinatorikus interpretációt.

2.2. Az r-Lah-számok és tulajdonságaik

Ebben az alfejezetben definiáljuk az r-Lah-számokat, és vizsgáljuk tulajdonságaikat. Bizonyítunk többek között rekurziós formulákat, kifejezzük az r-Lah-számokat $(r-s)$-Lah-számok segítségével, megadjuk explicit formulájukat. Igazoljuk, hogy rögzített felső paraméter esetén sorozatuk szigorúan log-konkáv, meghatározzuk rögzített alsó paraméter melletti sorozatuk exponenciális generátorfüggvényét, valamint kapcsolatokat írunk le az r-Stirling- és az r-Lah-számok között.

Megjegyezzük, hogy az r-Lah-számok néhány tulajdonságát tőlünk függetlenül igazolta H. Belbachir, A. Belkhir [2] és H. Belbachir, E. Bousbaa [3] is, valamint ezek a számok M. Mihoubi és M. Rahmani [52] munkájában is megjelentek.

2.1. Definíció. *Legyenek $0 \leq k \leq n$ és $r \geq 0$ egész számok. Ha n, r nem mindkettő 0, akkor jelölje $\left\lfloor {n \atop k} \right\rfloor_r$ egy $n+r$ elemű halmaz $k+r$ darab rendezett osztályba való olyan osztályozásainak a számát, ahol r kitüntetett elem különböző rendezett osztályba kerül. Legyen továbbá $\left\lfloor {0 \atop 0} \right\rfloor_0 = 1$. Az $\left\lfloor {n \atop k} \right\rfloor_r$ számokat* ***r-Lah-szám****oknak nevezzük.*

Ha $r = 0$ vagy 1, akkor a rendezett osztályokba való osztályozásra nincs megszorítás, ezért ekkor a klasszikus Lah-számokat kapjuk, pontosabban $\left\lfloor {n \atop k} \right\rfloor_0 = \left\lfloor {n \atop k} \right\rfloor$ és $\left\lfloor {n \atop k} \right\rfloor_1 = \left\lfloor {n+1 \atop k+1} \right\rfloor$.

Kicsi és nagy k értékekre az r-Lah-számok értékei a definíció alapján egyszerűen meghatározhatók.

2.2. Tétel. *Legyen $n, r \geq 0$. Ekkor*

1. $\left\lfloor {n \atop 0} \right\rfloor_r = (2r)^{\overline{n}}$,
2. $\left\lfloor {n \atop 1} \right\rfloor_r = (2r+1)^{\overline{n}} - (2r)^{\overline{n}}$ $(n \geq 1)$,
3. $\left\lfloor {n \atop n-1} \right\rfloor_r = n(n-1) + 2nr$ $(n \geq 1)$,
4. $\left\lfloor {n \atop n} \right\rfloor_r = 1$.

Bizonyítás. Csak a tétel második állítását bizonyítjuk, a többi tulajdonság még könnyebben igazolható.

Egy $n+r$ elemű halmazt osztályozunk $r+1$ darab rendezett osztályba úgy, hogy r kitüntetett elem különböző rendezett osztályba kerüljön. Először a kitüntetett elemeket elhelyezzük különböző rendezett osztályokba, ezután a nemkitüntetett elemek az addig elhelyezett elemek elé vagy a rendezett osztályok utolsó helyére tehetőek. Ez összesen $(2r+1)^{\overline{n}}$ lehetőség, azonban még le kell vonnunk azon esetek számát, amelyekben az utolsó rendezett osztály üres, azaz $(2r)^{\overline{n}}$-et. $\square$

Az r-Lah-számok teljesítik a következő rekurziót.

2.3. Tétel. ([55, Theorem 3.1])
Legyen $1 \leq k \leq n$ *és* $r \geq 0$. *Ekkor*

$$\left\lfloor {n+1 \atop k} \right\rfloor_r = \left\lfloor {n \atop k-1} \right\rfloor_r + (n+k+2r) \left\lfloor {n \atop k} \right\rfloor_r.$$

Bizonyítás. Egy $n+r+1$ elemű halmaz $k+r$ darab rendezett osztályba való olyan osztályozásait számoljuk össze, ahol r kitüntetett elem különböző rendezett osztályba kerül.

Válasszunk egy nemkitüntetett elemet. Ha ez egyelemű rendezett osztályt alkot, akkor a többi $n+r$ elemet kell $k+r-1$ darab rendezett osztályba osztályozni úgy, hogy a kitüntetett elemek különböző rendezett osztályokba kerüljenek. Az ilyen osztályozások száma $\left\lfloor {n \atop k-1} \right\rfloor_r$.

Ha a kiválasztott elem egy legalább kételemű rendezett osztályban van, akkor elhagyásával a többi $n+r$ elemet $\left\lfloor {n \atop k} \right\rfloor_r$-féleképpen lehet $k+r$ darab rendezett osztályba osztályozni úgy, hogy a kitüntetett elemek különböző rendezett osztályokban legyenek. Ekkor a nemkitüntetett elemet $n+k+2r$ helyre tehetjük vissza (bármelyik elem elé, illetve a rendezett osztályok utolsó helyére), így ezen osztályozások száma $(n+k+2r)\left\lfloor {n \atop k} \right\rfloor_r$. □

Az r-Lah-számokra érvényes egy másik rekurzió is.

2.4. Tétel. ([58, Proposition 1.1])
Ha $n \geq 2$, $1 \leq k \leq n-1$ *és* $r \geq 0$, *akkor*

$$\left\lfloor {n+1 \atop k} \right\rfloor_r = \left\lfloor {n \atop k-1} \right\rfloor_r + (2n+2r) \left\lfloor {n \atop k} \right\rfloor_r - n(n+2r-1) \left\lfloor {n-1 \atop k} \right\rfloor_r.$$

Bizonyítás. Ismét egy $n+r+1$ elemű halmaz $k+r$ darab rendezett osztályba való olyan osztályozásait számoljuk össze, ahol r kitüntetett elem különböző rendezett osztályba kerül.

Tekintsük most az egyik nemkitüntetett elemet. Ha ez egyelemű rendezett osztályt alkot, akkor a többi $n+r$ elemet $\left\lfloor {n \atop k-1} \right\rfloor_r$ módon lehet $k+r-1$ rendezett osztályba osztályozni úgy, hogy az r darab kitüntetett elem különböző rendezett osztályba kerüljön. Egyébként a többi elem $\left\lfloor {n \atop k} \right\rfloor_r$-féleképpen osztályozható $k+r$ darab rendezett osztályba úgy, hogy a kitüntetett elemek különböző rendezett osztályokban legyenek. Ekkor a kiválasztott nemkitüntetett elem $2n+2r$ helyre tehető (bármely elem elé vagy mögé), ami $(2n+2r)\left\lfloor {n \atop k} \right\rfloor_r$ lehetőséget jelentene.

Ekkor azonban kétszer számoltuk azokat az osztályozásokat, amikor a vizsgált nemkitüntetett elem valamelyik rendezett osztályban két elem közé kerül, így az ilyen esetek számát le kell vonnunk. Ez kétféleképpen fordulhat elő. Ha a j-edik nemkitüntetett elem van közvetlenül a kiválasztott nemkitüntetett elem előtt ($j = 1, \dots, n$), akkor e két elem nélkül $\left\lfloor {n-1 \atop k} \right\rfloor_r$-féleképpen osztályozhatjuk a többi elemet $k+r$ darab rendezett osztályba úgy, hogy a kitüntetett elemek különböző rendezett osztályokba kerüljenek, majd a két elem $n+r-1$ helyre tehető vissza (bármely elem elé). Ezért az ilyen levonandó esetek száma $n(n+r-1)\left\lfloor {n-1 \atop k} \right\rfloor_r$.

Ha viszont egy kitüntetett elem van a nemkitüntetett elemünk előtt, mögötte pedig a j-edik nemkitüntetett elem áll ($j = 1, \dots, n$), akkor ez utóbbi kettő nélkül $\left\lfloor {n-1 \atop k} \right\rfloor_r$-féleképpen osztályozhatjuk a többi elemet $k+r$ darab rendezett osztályba úgy, hogy a kitüntetett elemek különböző rendezett osztályokba kerüljenek, majd a két elem r helyre kerülhet vissza (a kitüntetett elemek mögé). Tehát az ilyen kétszer számolt esetek száma $nr\left\lfloor {n-1 \atop k} \right\rfloor_r$. □

A következő azonosságot az r-Lah-számokra vonatkozó függőleges rekurziónak nevezzük.

2.5. Tétel. ([55, Theorem 3.3])
Legyen $0 \le k \le n$ *és* $r \ge 0$. *Ekkor*

$$\left\lfloor {n+1 \atop k+1} \right\rfloor_r = \sum_{j=k}^{n} (n+k+2r+1)^{\underline{n-j}} \left\lfloor {j \atop k} \right\rfloor_r .$$

Bizonyítás. Egy $n+r+1$ elemű halmaz $k+r+1$ darab rendezett osztályba való olyan osztályozásait számoljuk össze, ahol r kitüntetett elem különböző rendezett osztályban van. Legyen most a halmaz első r eleme kitüntetett. Tekintsük a rendezett osztályok legkisebb sorszámú elemeit, legyen ezek sorszámai közül a legnagyobb $j+r+1$ ($j = k, \dots, n$).

Ekkor először az első $j+r$ elemet kell $k+r$ darab rendezett osztályba osztályozni úgy, hogy az első r elem különböző rendezett osztályba kerüljön, ez $\left\lfloor {j \atop k} \right\rfloor_r$-féleképpen lehetséges. Ezt követően az utolsó $n-j$ nemkitüntetett elem tehető bármelyik addig elhelyezett elem elé, illetve a rendezett osztályok végére. Ez $(j+k+2r+2)^{\overline{n-j}} = (n+k+2r+1)^{\underline{n-j}}$ lehetőséget jelent. Ezek szerint adott j esetén $(n+k+2r+1)^{\underline{n-j}} \left\lfloor {j \atop k} \right\rfloor_r$ az osztályozások száma. □

Az eltolt emelkedő és süllyedő faktoriálisok közötti kapcsolat az r-Lah-számok segítségével írható le. Az első összefüggés az Ivo Lah által megadott definíciót általánosítja.

2.6. Tétel. ([55, Theorem 3.2])
Legyen $n, r \geq 0$. Ekkor

1. $(x+2r)^{\overline{n}} = \sum\limits_{k=0}^{n} \left\lfloor {n \atop k} \right\rfloor_r x^{\underline{k}}$,

2. $(x-2r)^{\underline{n}} = \sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \left\lfloor {n \atop k} \right\rfloor_r x^{\overline{k}}$.

Bizonyítás. A tétel első állítását kombinatorikusan bizonyítjuk.

Feltehetjük, hogy n, r nem mindkettő 0. Legyen X egy $n+r$ elemű halmaz, és legyen $m \geq n$. Összeszámoljuk, hogy hányféleképpen lehet X-et rendezett osztályokba osztályozni, és elemeit $m+r$ színnel színezni úgy, hogy r kitüntetett elem különböző rendezett osztályba kerüljön, továbbá két elem pontosan akkor kapja ugyanazt a színt, ha ugyanabban a rendezett osztályban van. Ezt kétféleképpen végezzük el.

Először X elemeit rendezett osztályokba osztályozzuk úgy, hogy az r kitüntetett elem különböző rendezett osztályba kerüljön, majd ezután osztályonként színezzük az elemeket. Ha a rendezett osztályok száma $k+r$ $(k = 0, \ldots, n)$, akkor X elemeit $\left\lfloor {n \atop k} \right\rfloor_r$-féleképpen osztályozhatjuk, majd az elemeket rendezett osztályonként $(m+r)^{\underline{k+r}}$-féle módon színezhetjük. Tehát adott k esetén a lehetőségek száma $\left\lfloor {n \atop k} \right\rfloor_r (m+r)^{\underline{k+r}}$.

Másodszor pedig X elemeinek színezésével kezdünk, és azzal együtt soroljuk be őket rendezett osztályokba. Az r kitüntetett elemet $(m+r)^{\underline{r}}$-féleképpen színezhetjük, és ezek egyúttal különböző rendezett osztályokba kerülnek. Tekintsük most a j-edik nemkitüntetett elemet $(j = 1, \ldots, n)$. Tegyük fel, hogy az első $j-1$ darab nemkitüntetett elemet az r darab kitüntetett elemmel együtt már $l+r$ darab rendezett osztályba osztályoztuk. Ekkor a j-edik nemkitüntetett elemet ezekbe a rendezett osztályokba $l+2r+j-1$ helyre tehetjük (bármely elem elé, illetve a rendezett osztályok végére), ebben az esetben az elem színe adott. Ha ez az elem új rendezett osztályt nyit, akkor $m-l$ színnel színezhetjük. A j-edik nemkitüntetett elem elhelyezése és színezése tehát $(m+2r+j-1)$-féleképpen történhet, így az összes nemkitüntetett elem esetén $(m+2r)^{\overline{n}}$ a lehetőségek száma.

A kétféleképpen kiszámolt érték egyenlősége alapján

$$(m+r)^{\underline{r}}(m+2r)^{\overline{n}} = \sum_{k=0}^{n} \left\lfloor {n \atop k} \right\rfloor_r (m+r)^{\underline{k+r}},$$

amiből mindkét oldalt $(m+r)^{\underline{r}}$-nel osztva

$$(m+2r)^{\overline{n}} = \sum_{k=0}^{n} \left\lfloor {n \atop k} \right\rfloor_r m^{\underline{k}}$$

adódik minden $m \geq n$ természetes szám esetén.

Az első egyenlőségben x helyére $(-x)$-et írva kapjuk a tétel második állítását.

$\square$

A következő két tételben az r-Lah-számokat $(r-s)$-Lah-számok segítségével fejezzük ki, két lényegesen különböző módon.

2.7. Tétel. ([55, Theorem 3.4])
Legyen $0 \leq k \leq n$ *és* $0 \leq s \leq r$. *Ekkor*

$$\left\lfloor {n \atop k} \right\rfloor_r = \sum_{j=k}^{n} \binom{n}{j} \left\lfloor {j \atop k} \right\rfloor_{r-s} (2s)^{\overline{n-j}}.$$

Megjegyzés. ([55, Remark 3.1])
Speciálisan az $s=1$ esetben

$$\left\lfloor {n \atop k} \right\rfloor_r = \sum_{j=k}^{n} \binom{n}{j} \left\lfloor {j \atop k} \right\rfloor_{r-1} (n-j+1)!,$$

valamint az $s=r$ esetben

$$\left\lfloor {n \atop k} \right\rfloor_r = \sum_{j=k}^{n} \binom{n}{j} \left\lfloor {j \atop k} \right\rfloor (2r)^{\overline{n-j}}$$

adódik.

Bizonyítás. Ha $n = r = 0$, akkor könnyen ellenőrizhető, hogy teljesül az állítás. Egyébként egy $n+r$ elemű halmazt osztályozunk $k+r$ darab rendezett osztályba úgy, hogy r kitüntetett elem különböző rendezett osztályban legyen.

Először az első s kitüntetett elemet elhelyezzük s darab különböző rendezett osztályba. Legyen j azon nemkitüntetett elemeknek a száma, amelyek nem ezen s elem rendezett osztályaiba kerülnek ($j = k, \ldots, n$). Ezt a j elemet $\binom{n}{j}$-féleképpen választhatjuk ki, és $\left\lfloor\begin{smallmatrix} j \\ k \end{smallmatrix}\right\rfloor_{r-s}$-féle módon sorolhatjuk a többi $r-s$ darab kitüntetett elemmel együtt $k+r-s$ darab rendezett osztályba úgy, hogy a kitüntetett elemeket különböző rendezett osztályokba tesszük. Ezután a kimaradó $n-j$ darab nemkitüntetett elemet az első s kitüntetett elem rendezett osztályaiba rakjuk. Elhelyezésük $(2s)^{\overline{n-j}}$-féleképpen történhet, hiszen minden elem kerülhet a már elhelyezett elemek elé, illetve a rendezett osztályok végére. Így a lehetőségek száma rögzített j esetén $\binom{n}{j}\left\lfloor\begin{smallmatrix} j \\ k \end{smallmatrix}\right\rfloor_{r-s}(2s)^{\overline{n-j}}$. $\square$

A második állítást az [55] cikkben teljes indukcióval bizonyítottuk, felhasználva a 2.3. tételt és a binomiális együtthatók rekurzióját. Most az [58] publikációban szereplő kombinatorikus bizonyítást ismertetjük.

2.8. Tétel. ([55, Theorem 3.5])
Legyen $0 \leq k \leq n$ és $0 \leq s \leq r$. Ekkor

$$\left\lfloor\begin{matrix} n \\ k \end{matrix}\right\rfloor_r = \sum_{j=k}^{n} \left\lfloor\begin{matrix} n \\ j \end{matrix}\right\rfloor_{r-s} \binom{j}{k} (2s)^{\underline{j-k}}.$$

Megjegyzés. ([55, Remark 3.2])
Speciálisan az $s = 1$ esetben a $k \leq n-2$ feltétel mellett

$$\left\lfloor\begin{matrix} n \\ k \end{matrix}\right\rfloor_r = \left\lfloor\begin{matrix} n \\ k \end{matrix}\right\rfloor_{r-1} + 2(k+1)\left\lfloor\begin{matrix} n \\ k+1 \end{matrix}\right\rfloor_{r-1} + (k+1)(k+2)\left\lfloor\begin{matrix} n \\ k+2 \end{matrix}\right\rfloor_{r-1},$$

valamint az $s = r$ esetben

$$\left\lfloor\begin{matrix} n \\ k \end{matrix}\right\rfloor_r = \sum_{j=k}^{n} \left\lfloor\begin{matrix} n \\ j \end{matrix}\right\rfloor \binom{j}{k} (2r)^{\underline{j-k}}$$

adódik.

Bizonyítás. Ha $n = r = 0$, akkor nyilván teljesül az egyenlőség. Egyébként egy $n+r$ elemű halmaz $k+r$ darab rendezett osztályba való olyan osztályozásait számoljuk össze, ahol r kitüntetett elem különböző rendezett osztályba kerül.

Tekintsük most az első s kitüntetett elem rendezett osztályait. Ha ezekből elhagyjuk a kitüntetett elemet, akkor ezen rendezett osztályok mindegyike két rendezett osztályra bomlik. Ezek között lehetnek üresek, amennyiben keletkeznek ilyenek, hagyjuk el őket. Legyen ezután j a kitüntetett elemet nem tartalmazó rendezett osztályok száma ($j = k, \dots, \min\{k + 2s, n\}$).

Rögzített j esetén az n darab nemkitüntetett elem és az utolsó $r - s$ kitüntetett elem $\left\lfloor {n \atop j} \right\rfloor_{r-s}$-féleképpen osztályozható $j + r - s$ darab rendezett osztályba úgy, hogy a kitüntetett elemek különböző rendezett osztályokba kerüljenek. Továbbá az első s kitüntetett elemet is elhelyezzük különböző rendezett osztályokba. Ekkor a rendezett osztályok száma $j+r$, ami $(j-k)$-val több, mint kellene. Azt a k darab rendezett osztályt, amelyek változatlanok maradnak, $\binom{j}{k}$-féleképpen választhatjuk ki a kitüntetett elemet nem tartalmazó j darab rendezett osztály közül. A többi $j-k$ kitüntetett elemet nem tartalmazó rendezett osztály elemeit az ott rögzített sorrendben az első s kitüntetett elem rendezett osztályaiba helyezzük át úgy, hogy minden kitüntetett elem elé és mögé legfeljebb egy rendezett osztály elemei kerüljenek. Ez $(2s)^{\underline{j-k}}$-féleképpen történhet.

Így tehát

$$\left\lfloor {n \atop k} \right\rfloor_r = \sum_{j=k}^{\min\{k+2s,n\}} \left\lfloor {n \atop j} \right\rfloor_{r-s} \binom{j}{k} (2s)^{\underline{j-k}} = \sum_{j=k}^{n} \left\lfloor {n \atop j} \right\rfloor_{r-s} \binom{j}{k} (2s)^{\underline{j-k}},$$

ugyanis $(2s)^{\underline{j-k}} = 0$, ha $j \geq k + 2s + 1$. □

Megjegyzés. Az elsőfajú és másodfajú r-Stirling-számokra vonatkozó hasonló formulák (amelyek az 1. és 2. táblázat kilencedik mezőiben találhatóak) szintén igazolhatók a fenti gondolatmenettel. Sőt, a másodfajú esetben még egyszerűbb is a bizonyítás, ugyanis az osztályok a kitüntetett elem elhagyásával nem bomlanak kétfelé.

Az elsőfajú r-Stirling-számok esetében a bizonyítás jóval trükkösebb. Itt fontos, hogy a ciklusokat a legkisebb elemükkel kezdve írjuk fel. Az első s darab kitüntetett elem elhagyásával kapott rendezett halmazokat standard ciklus-reprezentációként tekintve bontjuk tovább ciklusokra, és az így kapott összes ciklus közül jelölje j azoknak a számát, amik nem tartalmaznak kitüntetett elemet ($j = k, \ldots, n$). Lényeges különbség még a korábbiakhoz képest, hogy amikor az első s kitüntetett elem ciklusaiba rakjuk a kimaradó $j - k$ darab ciklus elemeit, akkor ezeknek az elhelyezése az első elemük szerinti csökkenő sorrendben történik, a szóban forgó $j - k$ darab ciklus elemeit minden esetben az s darab ciklus bármelyikének a végére tehetjük.

Most az r-Lah-számokra vonatkozó binomiális konvolúciós formulát igazoljuk.

2.9. Tétel. ([55, Theorem 3.6])
Legyen $n, k, l, r, s \geq 0$ és $k + l \leq n$. Ekkor

$$\binom{k+l}{k} \left\lfloor {n \atop k+l} \right\rfloor_{r+s} = \sum_{j=k}^{n-l} \binom{n}{j} \left\lfloor {j \atop k} \right\rfloor_r \left\lfloor {n-j \atop l} \right\rfloor_s .$$

Bizonyítás. Feltehető, hogy n, r, s nem mind 0. Legyen X egy $n + r + s$ elemű halmaz. Összeszámoljuk, hogy hányféleképpen lehet X-et $k + l + r + s$ darab rendezett osztályba osztályozni, valamint elemeit zöld és piros színekkel színezni úgy, hogy $r + s$ kitüntetett elem különböző rendezett osztályba kerüljön, az egy rendezett osztályban lévő elemek azonos színűek legyenek, az első r kitüntetett elem zöld, a többi s pedig piros legyen, továbbá a zöld színű elemeket tartalmazó rendezett osztályok száma $k + r$, a pirosaké $l + s$. Ezt kétféleképpen végezzük el.

Először X elemeit rendezett osztályokba osztályozzuk úgy, hogy az $r + s$ kitüntetett elem különböző rendezett osztályba kerüljön, majd ezután osztályonként színezzük az elemeket. X elemeit $\left\lfloor {n \atop k+l} \right\rfloor_{r+s}$-féleképpen lehet $k + l + r + s$ darab rendezett osztályba osztályozni olyan módon, hogy a kitüntetett elemeket különböző rendezett osztályokba helyezzük el. A kitüntetett elemek rendezett osztályainak a színe a feltételekből adódik. A többi $k + l$ darab rendezett osztály között k olyan van, melynek elemei zöld színűek, ezek $\binom{k+l}{k}$-féleképpen választhatók ki. Tehát a lehetőségek száma $\binom{k+l}{k} \left\lfloor {n \atop k+l} \right\rfloor_{r+s}$.

Másodszor X elemeinek színezésével kezdünk, és azután végezzük el a rendezett osztályokba való osztályozást. A kitüntetett elemek színe adott. Legyen j a zöld színű nemkitüntetett elemeknek a száma ($j = k, \ldots, n-l$). Ezeket $\binom{n}{j}$-féleképpen választhatjuk ki. A $j+r$ darab zöld elemet $\left\lfloor {j \atop k} \right\rfloor_r$-féleképpen lehet $k+r$ darab rendezett osztályba osztályozni úgy, hogy az r kitüntetett elem különböző rendezett osztályba kerüljön. Az $n-j+s$ darab piros elemet pedig $\left\lfloor {n-j \atop l} \right\rfloor_s$-féleképpen osztályozhatjuk $l+s$ darab rendezett osztályba úgy, hogy az s kitüntetett elem különböző rendezett osztályban legyen. Adott j esetén tehát $\binom{n}{j}\left\lfloor {j \atop k} \right\rfloor_r \left\lfloor {n-j \atop l} \right\rfloor_s$ a lehetőségek száma. □

Az r-Lah-számokra érvényes az alábbi explicit formula.

2.10. Tétel. ([55, Theorem 3.7])
Legyen $0 \le k \le n$ *és* $r \ge 0$. *Ha* k, r *nem mindkettő* 0, *akkor*

$$\left\lfloor {n \atop k} \right\rfloor_r = \frac{n!}{k!}\binom{n+2r-1}{k+2r-1}.$$

Bizonyítás. Egy $n+r$ elemű halmazt osztályozunk $k+r$ darab rendezett osztályba úgy, hogy r kitüntetett elem különböző rendezett osztályba kerüljön. Ezt úgy is megtehetjük, hogy először elhelyezzük a kitüntetett elemeket r darab különböző rendezett osztályba, majd sorba rendezzük a nemkitüntetett elemeket, ami $n!$-féleképpen történhet. Ezután meghatározzuk, hogy ezen r darab rendezett osztályba a már bent lévő r darab elem elé és mögé, valamint a többi k darab rendezett osztályba hány nemkitüntetett elem kerül, és ennek megfelelően bontjuk szét az előbb kapott permutációt $(k+2r)$-felé.

Ez azt jelenti, hogy az n-et $k+2r$ darab nemnegatív egész szám összegére kell bontani úgy, hogy az utolsó k tag nem lehet 0 és a tagok sorrendje számít. Ez $C_{k+2r}^{n-k,\mathrm{ism}} = \binom{n+2r-1}{n-k} = \binom{n+2r-1}{k+2r-1}$-féleképpen tehető meg.

Ezzel viszont még számítana a kitüntetett elemeket nem tartalmazó rendezett osztályok sorrendje, ezért az eddig kapott lehetőségek számát osztanunk kell $k!$-sal. □

Az explicit formula segítségével igazolható, hogy rögzített felső paraméter esetén az r-Lah-számok sorozata szigorúan log-konkáv és unimodális.

2.11. Tétel. ([55, Theorem 3.8])
Legyen $n \geq 1$ és $r \geq 0$. Ekkor az $\left(\left\lfloor {n \atop k} \right\rfloor_r\right)_{k=0}^n$ sorozat szigorúan log-konkáv és így unimodális.

Bizonyítás. Azt kell belátnunk, hogy $\left\lfloor {n \atop k-1} \right\rfloor_r \left\lfloor {n \atop k+1} \right\rfloor_r < \left\lfloor {n \atop k} \right\rfloor_r^2$ teljesül minden $1 \leq k \leq n-1$ esetén. Nyilván feltehető, hogy $n \geq 2$.

Ha $k = 1$ és $r = 0$, akkor könnyen ellenőrizhető az egyenlőtlenség. Egyébként a 2.10. tétel szerint azt kell belátni, hogy

$$\frac{n!}{(k-1)!}\binom{n+2r-1}{k+2r-2}\frac{n!}{(k+1)!}\binom{n+2r-1}{k+2r} < \left(\frac{n!}{k!}\binom{n+2r-1}{k+2r-1}\right)^2.$$

Némi számolás után azt kapjuk, hogy ez ekvivalens a

$$k(k+2r-1)(n-k) < (k+1)(k+2r)(n-k+1)$$

egyenlőtlenséggel, amely nyilvánvalóan fennáll. □

A szigorú log-konkavitásból az is következik, hogy az $\left(\left\lfloor {n \atop k} \right\rfloor_r\right)_{k=0}^n$ sorozatnak egy vagy két maximumhelye van. A következő tételben meg is határozzuk ezeket.

2.12. Tétel. ([55, Theorem 3.9])
Legyen $n \geq 1$ és $r \geq 0$.

1. *Ha $n + r^2 + 1$ nem négyzetszám, akkor az $\left(\left\lfloor {n \atop k} \right\rfloor_r\right)_{k=0}^n$ sorozatnak egy maximumhelye van: $\left\lfloor \sqrt{n+r^2+1} \right\rfloor - r$.*

2. *Ha $n + r^2 + 1$ négyzetszám, akkor az $\left(\left\lfloor {n \atop k} \right\rfloor_r\right)_{k=0}^n$ sorozatnak két maximumhelye van: $\sqrt{n+r^2+1} - r - 1$ és $\sqrt{n+r^2+1} - r$.*

Bizonyítás. Mivel $\left\lfloor {n \atop 0} \right\rfloor_0 = 0$, egyébként $\left\lfloor {n \atop k} \right\rfloor_r$ pozitív, így a maximumkeresés szempontjából elég a pozitív értékekkel foglalkozni.

Ilyenkor a 2.10. tétel miatt $\left\lfloor {n \atop k-1} \right\rfloor_r \lesseqqgtr \left\lfloor {n \atop k} \right\rfloor_r$ pontosan akkor teljesül, ha

$$\frac{n!}{(k-1)!}\binom{n+2r-1}{k+2r-2} \lesseqqgtr \frac{n!}{k!}\binom{n+2r-1}{k+2r-1}.$$

Rövid számolás után adódik, hogy ez ekvivalens a

$$k^2 + 2kr - n - 1 \lesseqgtr 0,$$

azaz a

$$(k+r)^2 \lesseqgtr n + r^2 + 1$$

egyenlőtlenséggel, ami akkor és csak akkor áll fenn, ha

$$k \lesseqgtr \sqrt{n + r^2 + 1} - r.$$

□

A következő tételben megadjuk az r-Lah-számok sorozatának exponenciális generátorfüggvényét rögzített k esetén.

2.13. Tétel. ([55, Theorem 3.10])
Legyen $k, r \geq 0$. Ekkor az $\left(\left\lfloor {n \atop k} \right\rfloor_r\right)_{n=k}^{\infty}$ sorozat exponenciális generátorfüggvénye

$$\sum_{n=k}^{\infty} \left\lfloor {n \atop k} \right\rfloor_r \frac{x^n}{n!} = \frac{1}{k!}\left(\frac{x}{1-x}\right)^k \left(\frac{1}{1-x}\right)^{2r}.$$

Bizonyítás. Ha $k = r = 0$, akkor nyilvánvalóan teljesül az állítás. Egyébként a 2.10. tételt, valamint a binomiális sort alkalmazva azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
\sum_{n=k}^{\infty} \left\lfloor {n \atop k} \right\rfloor_r \frac{x^n}{n!} &= \sum_{n=k}^{\infty} \frac{n!}{k!}\binom{n+2r-1}{k+2r-1}\frac{x^n}{n!} = \frac{x^k}{k!}\sum_{n=k}^{\infty}\binom{n+2r-1}{n-k}x^{n-k} \\
&= \frac{x^k}{k!}\sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+k+2r-1}{n}x^n = \frac{x^k}{k!}\sum_{n=0}^{\infty}\binom{-k-2r}{n}(-x)^n \\
&= \frac{x^k}{k!}(1-x)^{-k-2r} = \frac{1}{k!}\left(\frac{x}{1-x}\right)^k\left(\frac{1}{1-x}\right)^{2r}.
\end{aligned}$$

□

Az alábbi tétel és következménye az r-Lah-számok önortogonalitását és általánosított önortogonalitását írja le, valamint kapcsolatokat ad meg az r-Lah-számok és az r-Stirling-számok között.

2.14. Tétel. ([55, Theorem 3.11])
Legyen $0 \le k \le n$ *és* $r, s \ge 0$. *Ekkor*

1. $\sum\limits_{j=k}^{n} (-1)^{j-k} \left\lfloor {n \atop j} \right\rfloor_r \left\lfloor {j \atop k} \right\rfloor_s = \binom{n}{k} (2r-2s)^{\overline{n-k}}$,

2. $\left[{n \atop k} \right]_{2r-s} = \sum\limits_{j=k}^{n} (-1)^{j-k} \left\lfloor {n \atop j} \right\rfloor_r \left[{j \atop k} \right]_s$, *ha* $2r \ge s$,

3. $\left\{ {n \atop k} \right\}_{2s-r} = \sum\limits_{j=k}^{n} (-1)^{n-j} \left\{ {n \atop j} \right\}_r \left\lfloor {j \atop k} \right\rfloor_s$, *ha* $2s \ge r$,

4. $\left\lfloor {n \atop k} \right\rfloor_{\frac{r+s}{2}} = \sum\limits_{j=k}^{n} \left[{n \atop j} \right]_r \left\{ {j \atop k} \right\}_s$, *ha* $r+s$ *páros.*

Bizonyítás. Csak a tétel első állítását igazoljuk, a többi hasonlóan látható be, az r-Stirling-számokra vonatkozó polinomos összefüggéseket is használva.

A 2.6. tétel első, majd második állítását alkalmazva kapjuk, hogy

$$
\begin{aligned}
(x+2r-2s)^{\overline{n}} &= \sum_{j=0}^{n} \left\lfloor \begin{matrix} n \\ j \end{matrix} \right\rfloor_r (x-2s)^{\underline{j}} = \sum_{j=0}^{n} \left\lfloor \begin{matrix} n \\ j \end{matrix} \right\rfloor_r \sum_{k=0}^{j} (-1)^{j-k} \left\lfloor \begin{matrix} j \\ k \end{matrix} \right\rfloor_s x^{\overline{k}} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \sum_{j=k}^{n} (-1)^{j-k} \left\lfloor \begin{matrix} n \\ j \end{matrix} \right\rfloor_r \left\lfloor \begin{matrix} j \\ k \end{matrix} \right\rfloor_s x^{\overline{k}}.
\end{aligned}
$$

Összehasonlítva az emelkedő faktoriálisokra vonatkozó binomiális tételből adódó $(x+2r-2s)^{\overline{n}} = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{\overline{k}} (2r-2s)^{\overline{n-k}}$ képlettel, következik a tétel első állítása. $\square$

2.15. Következmény. ([55, Corollary 3.1])
Legyen $0 \le k \le n$ *és* $r \ge 0$. *Ekkor*

1. $\sum\limits_{j=k}^{n} (-1)^{n-j} \left\lfloor {n \atop j} \right\rfloor_r \left\lfloor {j \atop k} \right\rfloor_r = \delta_{nk}$,

2. $\left[{n \atop k} \right]_r = \sum\limits_{j=k}^{n} (-1)^{j-k} \left\lfloor {n \atop j} \right\rfloor_r \left[{j \atop k} \right]_r$,

3. $\left\{{n \atop k}\right\}_r = \sum\limits_{j=k}^{n} (-1)^{n-j} \left\{{n \atop j}\right\}_r \left\lfloor{j \atop k}\right\rfloor_r$,

4. $\left\lfloor{n \atop k}\right\rfloor_r = \sum\limits_{j=k}^{n} \left[{n \atop j}\right]_r \left\{{j \atop k}\right\}_r$.

Bizonyítás. Az összefüggések $s = r$ helyettesítéssel azonnal adódnak a 2.14. tételből. □

A következmény utolsó állítására kombinatorikus bizonyítást is adunk.

Bizonyítás. Feltehetjük, hogy n, r nem mindkettő 0. Ekkor egy $n + r$ elemű halmaz $k + r$ darab rendezett osztályba való olyan osztályozásait, ahol r kitüntetett elem különböző rendezett osztályba kerül, megkaphatjuk az alábbi módon is. Az elemeket először $j + r$ darab páronként idegen ciklusba rendezzük ($j = k, \ldots, n$) úgy, hogy az r darab kitüntetett elem különböző ciklusban legyen, ez $\left[{n \atop j}\right]_r$-féleképpen lehetséges. Majd a $j + r$ darab ciklust $k + r$ darab osztályba osztályozzuk úgy, hogy a kitüntetett elemeket tartalmazó ciklusokat különböző osztályokba rakjuk, ez $\left\{{j \atop k}\right\}_r$ módon történhet. Az egy osztályban szereplő páronként idegen ciklusok a bennük lévő elemek egy permutációját határozzák meg, ha összeszorozzuk őket. Rögzített j esetén tehát $\left[{n \atop j}\right]_r \left\{{j \atop k}\right\}_r$ a lehetőségek száma. □

Végül megmutatjuk, hogy sorozatok r-Lah-transzformáltjára és inverz r-Lah-transzformáltjára igaz a következő megfordítási tétel.

2.16. Tétel. ([55, Theorem 3.12])
Legyenek $(a_n)_{n=0}^{\infty}$, $(b_n)_{n=0}^{\infty}$ komplex számsorozatok, legyen továbbá $r \geq 0$. Ekkor $b_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \left\lfloor{n \atop k}\right\rfloor_r a_k$ $(n \geq 0)$ akkor és csak akkor teljesül, ha $a_n = \sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \left\lfloor{n \atop k}\right\rfloor_r b_k$ $(n \geq 0)$.

Bizonyítás. I. Tegyük fel, hogy $b_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \left\lfloor{n \atop k}\right\rfloor_r a_k$ $(n \geq 0)$. Ekkor a 2.15. következmény alkalmazásával adódik, hogy

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \left\lfloor{n \atop k}\right\rfloor_r b_k = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \left\lfloor{n \atop k}\right\rfloor_r \sum_{j=0}^{k} \left\lfloor{k \atop j}\right\rfloor_r a_j$$

$$= \sum_{j=0}^{n}\sum_{k=j}^{n}(-1)^{n-k}\left\lfloor {n \atop k} \right\rfloor_r \left\lfloor {k \atop j} \right\rfloor_r a_j = \sum_{j=0}^{n}\delta_{nj}a_j = a_n.$$

II. Tegyük most fel, hogy $a_n = \sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\left\lfloor {n \atop k} \right\rfloor_r b_k$ $(n \geq 0)$, azaz $(-1)^n$-nel való szorzás után $(-1)^n a_n = \sum_{k=0}^{n}\left\lfloor {n \atop k} \right\rfloor_r (-1)^k b_k$ $(n \geq 0)$.

A tétel már belátott irányát alkalmazva a $((-1)^n b_n)_{n=0}^{\infty}$ és a $((-1)^n a_n)_{n=0}^{\infty}$ sorozatokra az teljesül, hogy

$$(-1)^n b_n = \sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\left\lfloor {n \atop k} \right\rfloor_r (-1)^k a_k = (-1)^n \sum_{k=0}^{n}\left\lfloor {n \atop k} \right\rfloor_r a_k,$$

ahonnan mindkét oldalt $(-1)^n$-nel szorozva kapjuk az állítást. $\square$

Megjegyezzük, hogy az elmúlt években, az [55] cikk megjelenése után, részben annak hatására többen is vizsgálták az r-Lah-számok további általánosításait és változatait. M. Shattuck [70] megadott egy további rekurziót az r-Lah-számokra, emellett a [71] és a [73] publikációkban az r-Lah-számok q-analógját, valamint az ún. megszorított r-Lah-számokat tanulmányozta. Utóbbiaknak Bényi B., M. Méndez és J. L. Ramirez [7] egy olyan további változatát adták, ahol a rendezett osztályok elemszámai egy adott halmazból kerülhetnek ki. M. J. Schlosser és M. Yoo [68] az elliptikus r-Lah-számokkal foglalkoztak. G.-S. Cheon és J.-H. Jung [14] definiálták az r-Whitney–Lah-számokat, melyek az r-Lah-számoknak a Mező I. által értelmezett r-Whitney-számokhoz hasonló általánosításai. Ezeket a számokat vizsgálta és adott meg rájuk kombinatorikus definíciót Gyimesi E. és Nyul G. [27] (lásd még [19, 50, 64]).

Végül megemlítjük M. Shattuck [72] r-Lah-számokra vonatkozó további általánosítását. Ennek érdekessége, hogy egyszerre általánosítja az r-Lah-számokat, valamint az első- és másodfajú r-Stirling-számokat is.

3. Az összegzett r-Lah-számok és az r-Lah-polinomok

Ezt a fejezetet az r-Bell-számok és az r-Bell-polinomok fogalmának és legfontosabb tulajdonságaiknak az ismertetésével kezdjük. Majd ezek mintájára definiáljuk az összegzett r-Lah-számokat és az r-Lah-polinomokat, valamint vizsgáljuk tulajdonságaikat. Egy alfejezetet szentelünk az r-Lah-polinomok és más rokon kombinatorikus polinomok gyökei vizsgálatának is.

3.1. Az r-Bell-számok és az r-Bell-polinomok

L. Carlitz [12] és Mező I. [43, 45] értelmezték a Bell-számok r-általánosítását. Ha $n, r \geq 0$ és n, r nem mindkettő 0, akkor a $B_{n,r}$ n-edik r-Bell-szám egy $n+r$ elemű halmaz összes olyan osztályozásának a számát adja meg, ahol r kitüntetett elem különböző osztályba kerül. Továbbá $B_{0,0} = 1$. A másodfajú r-Stirling-számok definíciójából következik, hogy $B_{n,r} = \sum\limits_{k=0}^{n} \left\{ {n \atop k} \right\}_r$.

A másodfajú r-Stirling-számokhoz kapcsolódóan értelmezhetők az r-Bell-polinomok is, ezt Mező I. [43, 45] tette meg. Ha $n, r \geq 0$, akkor $B_{n,r}(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} \left\{ {n \atop k} \right\}_r x^k$ az n-edik r-Bell-polinom. Ezekre a polinomokra kombinatorikus értelmezést is lehet adni. Ha c egy pozitív egész szám, akkor $B_{n,r}(c)$ egy $n+r$ elemű halmaz összes olyan osztályozásainak és az osztályok c színnel való színezéseinek a számát adja meg, ahol r kitüntetett elem különböző osztályba kerül, és ezen elemek osztályai nem kapnak színt.

A 4. táblázatban összefoglaljuk az r-Bell-polinomok legfontosabb tulajdonságait. Ezeknek egyszerű helyettesítéssel kaphatók az r-Bell-számokra vonatkozó megfelelői, ugyanis $B_{n,r}(1) = B_{n,r}$. A korábban ismert összefüggések esetén a hivatkozásokat is feltüntettük a táblázatban. A csillag jelölés arra utal, hogy az adott formulának csak az r-Bell-számokra vonatkozó megfelelője szerepel az adott cikkben. A táblázat tartalmaz új eredményeket is, ezek az r-Lah-polinomokra és az összegzett r-Lah-számokra ismertetendő módon igazolhatók. Megjegyezzük, hogy az r-Lah-polinomokra vonatkozó Spivey-típusú formula speciális esetének bizonyítására használt kombinatorikus gondolatmenet az r-Bell-polinomok esetén teljes általánosságban is működik.

$B_{n,0}(x) = B_n(x)$ [45], $xB_{n,1}(x) = B_{n+1}(x)$
$B_{n+1,r}(x) = (x+r)B_{n,r}(x) + xB'_{n,r}(x)$ [43]
$B_{n,r}(x) = \sum\limits_{j=0}^{n} \binom{n}{j} B_{j,r-s}(x) s^{n-j}$ [51] $B_{n,r}(x) = \sum\limits_{j=0}^{n} \binom{n}{j} B_{j,r-1}(x)$ [45] $B_{n,r}(x) = \sum\limits_{j=0}^{n} \binom{n}{j} B_j(x) r^{n-j}$ [12]*,[45] $B_{n,r-1}(x) = \sum\limits_{j=0}^{n} (-1)^{n-j} \binom{n}{j} B_{j,r}(x)$ [45]
$B_{m+n,r}(x) = \sum\limits_{i=0}^{m} \sum\limits_{j=0}^{n} \left\{ {m \atop i} \right\}_r \binom{n}{j} B_{j,r-s}(x)(i+s)^{n-j} x^i$ $B_{m+n,r}(x) = \sum\limits_{i=0}^{m} \sum\limits_{j=0}^{n} \left\{ {m \atop i} \right\}_r \binom{n}{j} B_{j,r}(x) i^{n-j} x^i$ [51] $B_{m+n,r}(x) = \sum\limits_{i=0}^{m} \sum\limits_{j=0}^{n} \left\{ {m \atop i} \right\}_r \binom{n}{j} B_{j,r-1}(x)(i+1)^{n-j} x^i$ $B_{m+n,r}(x) = \sum\limits_{i=0}^{m} \sum\limits_{j=0}^{n} \left\{ {m \atop i} \right\}_r \binom{n}{j} B_j(x)(i+r)^{n-j} x^i$ [46]*,[51]
$B_{n,r}(x) = \frac{1}{\exp(x)} \sum\limits_{j=0}^{\infty} \frac{(j+r)^n}{j!} x^j$ [45]
$\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{B_{n,r}(x)}{n!} y^n = \exp\left(x\left(\exp(y)-1\right)+ry\right)$ [12]*,[45]
$B_{n,r}(x)$ gyökei valósak, egyszeresek és nempozitívak. [43]

4. táblázat:
Az r-Bell-polinomok tulajdonságai

A Mező I. által bevezetett másodfajú r-Whitney-számok segítségével G.-S. Cheon és J.-H. Jung [14] értelmezték az r-Dowling-polinomokat, amelyek az r-Bell-polinomok általánosításai (korábban az 1-Dowling-polinomokat M. Benoumhani [5] vezette be). Az r-Dowling–Lah-polinomokat, melyeknek együtthatói az r-Whitney–Lah-számok, Gyimesi E. [24] definiálta és vizsgálta. A 3.3. alfejezetben ezekkel a polinomokkal is foglalkozni fogunk.

3.2. Az összegzett r-Lah-számok és az r-Lah-polinomok tulajdonságai

Ebben az alfejezetben az r-Lah-számok összegzésével foglalkozunk, és ehhez kapcsolódóan értelmezzük az r-Lah-polinomokat is. A tulajdonságokat az r-Lah-polinomok és az összegzett r-Lah-számok esetére is megfogalmazzuk, a bizonyítást azonban többnyire csak a polinomokra végezzük el, ugyanis abból $x = 1$ helyettesítéssel könnyen adódik a számokra vonatkozó változat. Bizonyítunk többek között rekurziókat, összefüggést az r-Lah-polinomok és az $(r - s)$-Lah-polinomok között, igazolunk ún. Spivey- és Dobiński-típusú formulákat, megadjuk az összegzett r-Lah-számok és az r-Lah-polinomok sorozatának exponenciális generátorfüggvényét is.

3.1. Definíció. *Legyenek $n, r \geq 0$ egész számok, nem mindkettő 0. Jelölje $L_{n,r}$ egy $n + r$ elemű halmaz összes rendezett osztályokba való olyan osztályozásainak a számát, ahol r kitüntetett elem különböző rendezett osztályba kerül. Legyen továbbá $L_{0,0} = 1$. Ekkor $L_{n,r}$-et az n-edik **összegzett r-Lah-szám**nak nevezzük.*

Megjegyzés. A definícióból azonnal adódik, hogy ha $n, r \geq 0$, akkor

$$L_{n,r} = \sum_{j=0}^{n} \left\lfloor {n \atop j} \right\rfloor_r,$$

ami indokolja a névválasztást. Ebből a 2.16. tétel felhasználásával kapjuk, hogy

$$1 = \sum_{j=0}^{n} (-1)^{n-j} \left\lfloor {n \atop j} \right\rfloor_r L_{j,r}.$$

Az összegzett r-Lah-számokhoz kapcsolódóan értelmezzük az r-Lah-polinomokat.

3.2. Definíció. *Legyen $n, r \geq 0$. Ekkor az*

$$L_{n,r}(x) = \sum_{j=0}^{n} \left\lfloor {n \atop j} \right\rfloor_r x^j$$

*polinomot az n-edik **r-Lah-polinom**nak nevezzük.*

Megjegyzés. Speciálisan $L_{n,r}(1) = L_{n,r}$. Továbbá $L_{n,r}(x)$ n-edfokú főpolinom, ugyanis $\left\lfloor {n \atop n} \right\rfloor_r = 1$.

Megjegyzés. Az r-Lah-polinomokra kombinatorikus értelmezést is tudunk adni. Ha $n, r \geq 0$ nem mindkettő 0 és $c \geq 1$, akkor $L_{n,r}(c)$ megadja egy $n + r$ elemű halmaz rendezett osztályokba való olyan osztályozásainak és a rendezett osztályok c darab színnel való színezéseinek a számát, ahol r kitüntetett elem különböző rendezett osztályba kerül, és a kitüntetett elemeket tartalmazó rendezett osztályok nem kapnak színt.

Ha $r = 0$ vagy 1, akkor a rendezett osztályokba való osztályozásokra nincs megszorítás, ezért alapvetően a közönséges összegzett Lah-számokat és a Lah-polinomokat kapjuk.

3.3. Tétel. *Legyen $n \geq 0$. Ekkor*

1. $L_{n,0}(x) = L_n(x)$ *és* $L_{n,0} = L_n$,
2. $xL_{n,1}(x) = L_{n+1}(x)$ *és* $L_{n,1} = L_{n+1}$.

Bizonyítás. Csak a tétel második állítását bizonyítjuk, az első ugyanis még egyszerűbben ellenőrizhető.

Legyen $c \geq 1$. Ekkor $L_{n,1}(c)$ azt adja meg, hogy hányféleképpen lehet egy $n + 1$ elemű halmazt rendezett osztályokba osztályozni, és a rendezett osztályokat c színnel színezni úgy, hogy az egyetlen kitüntetett elem rendezett osztályát nem színezzük. Ha ezt is színeznénk a c darab szín valamelyikével, akkor a lehetőségek száma $cL_{n,1}(c) = L_{n+1}(c)$ lenne. □

Az alábbi formula az r-Lah-polinomok egy olyan rekurziója, melyben a polinom deriváltja is szerepel.

3.4. Tétel. ([57, Theorem 3.8 bizonyítása])
Legyen $n, r \geq 0$. Ekkor

$$L_{n+1,r}(x) = (x + n + 2r)L_{n,r}(x) + xL'_{n,r}(x).$$

Bizonyítás. A 2.3. és a 2.2. tételeket alkalmazva azt kapjuk, hogy

$$L_{n+1,r}(x) = \sum_{k=0}^{n+1} \left\lfloor {n+1 \atop k} \right\rfloor_r x^k = \left\lfloor {n+1 \atop 0} \right\rfloor_r + \sum_{k=1}^{n} \left\lfloor {n+1 \atop k} \right\rfloor_r x^k + \left\lfloor {n+1 \atop n+1} \right\rfloor_r x^{n+1}$$

$$\begin{aligned}
&= (2r)^{\overline{n+1}} + \sum_{k=1}^{n} \left(\left\lfloor {n \atop k-1} \right\rfloor_r + (n+k+2r) \left\lfloor {n \atop k} \right\rfloor_r \right) x^k + x^{n+1} \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \left\lfloor {n \atop k} \right\rfloor_r x^{k+1} + x^{n+1} + (n+2r) \sum_{k=1}^{n} \left\lfloor {n \atop k} \right\rfloor_r x^k + (2r)^{\overline{n+1}} + \sum_{k=1}^{n} k \left\lfloor {n \atop k} \right\rfloor_r x^k \\
&= x \sum_{k=0}^{n} \left\lfloor {n \atop k} \right\rfloor_r x^k + (n+2r) \sum_{k=0}^{n} \left\lfloor {n \atop k} \right\rfloor_r x^k + x \sum_{k=1}^{n} k \left\lfloor {n \atop k} \right\rfloor_r x^{k-1} \\
&= xL_{n,r}(x) + (n+2r)L_{n,r}(x) + xL'_{n,r}(x).
\end{aligned}$$

□

Most egy másodrendű lineáris rekurziós formulát igazolunk az r-Lah-polinomokra és ezzel együtt az összegzett r-Lah-számokra is.

3.5. Tétel. ([57, Theorem 3.5])
Ha $n \geq 1$ és $r \geq 0$, akkor

$$L_{n+1,r}(x) = (x + 2n + 2r)L_{n,r}(x) - n(n + 2r - 1)L_{n-1,r}(x),$$

$$L_{n+1,r} = (2n + 2r + 1)L_{n,r} - n(n + 2r - 1)L_{n-1,r}.$$

Bizonyítás. Legyen $c \geq 1$. Ekkor $L_{n+1,r}(c)$ egy $n + r + 1$ elemű halmaz rendezett osztályokba való olyan osztályozásainak és a rendezett osztályok c színnel való színezéseinek a száma, ahol r kitüntetett elem különböző rendezett osztályba kerül, és ezen elemek rendezett osztályai nem kapnak színt.

Másképpen, ha az utolsó nemkitüntetett elem egyelemű rendezett osztályt alkot, akkor ezt a rendezett osztályt c-féleképpen színezhetjük, a többi elemet pedig $L_{n,r}(c)$-féleképpen osztályozhatjuk rendezett osztályokba, és színezhetjük a rendezett osztályokat c színnel úgy, hogy az r kitüntetett elem különböző rendezett osztályba kerüljön, és ezek a rendezett osztályok ne legyenek színezve. Így ezen esetek száma $cL_{n,r}(c)$.

Ha az utolsó nemkitüntetett elem nem egyelemű rendezett osztályba kerül, akkor a többi elemet $L_{n,r}(c)$-féleképpen osztályozhatjuk rendezett osztályokba, és színezhetjük a kitüntetett elemeket nem tartalmazó rendezett osztályokat c színnel úgy, hogy a kitüntetett elemek különböző rendezett osztályokba kerüljenek. Ezután az utolsó nemkitüntetett elem $2n+2r$ helyre tehető, bármely elem elé vagy mögé. Így az ilyen esetek száma $(2n+2r)L_{n,r}(c)$.

De ekkor kétszer számoltuk azokat az eseteket, amikor az utólag beillesztett elem valamelyik rendezett osztály két eleme közé kerül, így ezek számát még ki kell vonni. Ilyen eset kétféleképpen fordulhat elő. Ha az utolsó nemkitüntetett elem előtt közvetlenül a j-edik nemkitüntetett elem áll ($j = 1, \dots, n$), akkor ezen két elem nélkül a többi elemet $L_{n-1,r}(c)$ módon osztályozhatjuk rendezett osztályokba, és színezhetjük a rendezett osztályokat c színnel úgy, hogy a kitüntetett elemek különböző rendezett osztályokba kerüljenek, és ezek rendezett osztályai ne legyenek színezve. Ezután a két elem $n + r - 1$ helyre tehető vissza (bármely más elem elé). Tehát az ilyen levonandó esetek száma $n(n + r - 1)L_{n-1,r}(c)$.

Ha azonban az utolsó nemkitüntetett elem előtt közvetlenül kitüntetett elem áll, akkor tegyük fel, hogy a j-edik nemkitüntetett elem áll az elemünk mögött ($j = 1, \dots, n$). Az utóbbi két elem nélkül a többi elemet $L_{n-1,r}(c)$-féleképpen osztályozhatjuk rendezett osztályokba, és színezhetjük a rendezett osztályokat c színnel úgy, hogy a kitüntetett elemek különböző rendezett osztályokba kerüljenek, és ezek rendezett osztályai ne legyenek színezve. A két elem pedig r helyre kerülhet vissza (bármely kitüntetett elem mögé). Az ilyen levonandó esetek száma tehát $nrL_{n-1,r}(c)$. □

Az r-Lah-polinomok, valamint az összegzett r-Lah-számok kifejezhetők az $(r - s)$-Lah-polinomok, illetve az összegzett $(r - s)$-Lah-számok segítségével.

3.6. Tétel. ([57, Theorem 3.1])
Legyen $n, r, s \geq 0$ és $s \leq r$. Ekkor

$$L_{n,r}(x) = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} L_{j,r-s}(x)(2s)^{\overline{n-j}},$$

$$L_{n,r} = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} L_{j,r-s}(2s)^{\overline{n-j}}.$$

Megjegyzés. ([57, Remark 3.2])
Speciálisan az $s = 1$ esetben

$$L_{n,r}(x) = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} L_{j,r-1}(x)(n - j + 1)!,$$

$$L_{n,r} = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} L_{j,r-1}(n-j+1)!,$$

valamint $s = r$ esetén

$$L_{n,r}(x) = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} L_j(x)(2r)^{\overline{n-j}},$$

$$L_{n,r} = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} L_j (2r)^{\overline{n-j}}$$

adódik.

Bizonyítás. Ha n, r mindkettő 0, akkor könnyen ellenőrizhető az állítás. Egyébként legyen $c \geq 1$. Ekkor $L_{n,r}(c)$ azt adja meg, hogy hányféleképpen lehet egy $n+r$ elemű halmazt rendezett osztályokba osztályozni, és a rendezett osztályokat c darab színnel színezni úgy, hogy r kitüntetett elem különböző rendezett osztályba kerüljön, valamint ezek rendezett osztályai ne legyenek színezve.

Ugyanezt máshogyan is összeszámolhatjuk. Először helyezzük el az első s kitüntetett elemet különböző rendezett osztályokba. Jelölje j azon nemkitüntetett elemeknek a számát, amelyeket nem ennek az s kitüntetett elemnek a rendezett osztályaiba teszünk ($j = 0, \ldots, n$). Ezt a j elemet $\binom{n}{j}$-féleképpen választhatjuk ki, majd a többi $r-s$ kitüntetett elemmel együtt $L_{j,r-s}(c)$ módon osztályozhatjuk rendezett osztályokba úgy, hogy a kitüntetett elemek különböző rendezett osztályokba kerüljenek, és színezhetjük a kitüntetett elemeket nem tartalmazó rendezett osztályokat c színnel. A kimaradó $n-j$ nemkitüntetett elemet az első s kitüntetett elem rendezett osztályaiba rakjuk, ez $(2s)^{\overline{n-j}}$-féleképpen történhet. Így a lehetőségek száma rögzített j esetén $\binom{n}{j} L_{j,r-s}(c)(2s)^{\overline{n-j}}$. □

A következő tételben Spivey-típusú formulát igazolunk az r-Lah-polinomokra és az összegzett r-Lah-számokra. Az elnevezés onnan ered, hogy a Bell-számokra M. Z. Spivey [75] bizonyította a megfelelő formulát.

3.7. Tétel. ([57, Theorem 3.3])
Legyen $m, n, r, s \geq 0$ *és* $s \leq r$. *Ekkor*

$$L_{m+n,r}(x) = \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{n} \left\lfloor {m \atop i} \right\rfloor_r \binom{n}{j} L_{j,r-s}(x)(m+i+2s)^{\overline{n-j}} x^i,$$

$$L_{m+n,r} = \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{n} \left\lfloor {m \atop i} \right\rfloor_r \binom{n}{j} L_{j,r-s}(m+i+2s)^{\overline{n-j}}.$$

Megjegyzés. ([57, Remark 3.4])
Speciálisan az $s = 0$ esetben

$$L_{m+n,r}(x) = \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{n} \left\lfloor {m \atop i} \right\rfloor_r \binom{n}{j} L_{j,r}(x)(m+i)^{\overline{n-j}} x^i,$$

$$L_{m+n,r} = \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{n} \left\lfloor {m \atop i} \right\rfloor_r \binom{n}{j} L_{j,r}(m+i)^{\overline{n-j}},$$

az $s = 1$ esetben

$$L_{m+n,r}(x) = \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{n} \left\lfloor {m \atop i} \right\rfloor_r \binom{n}{j} L_{j,r-1}(x)(m+i+2)^{\overline{n-j}} x^i,$$

$$L_{m+n,r} = \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{n} \left\lfloor {m \atop i} \right\rfloor_r \binom{n}{j} L_{j,r-1}(m+i+2)^{\overline{n-j}},$$

valamint az $s = r$ esetben

$$L_{m+n,r}(x) = \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{n} \left\lfloor {m \atop i} \right\rfloor_r \binom{n}{j} L_{j}(x)(m+i+2r)^{\overline{n-j}} x^i,$$

$$L_{m+n,r} = \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{n} \left\lfloor {m \atop i} \right\rfloor_r \binom{n}{j} L_{j}(m+i+2r)^{\overline{n-j}}$$

adódik.

Bizonyítás. A 2.6. tételt felhasználva kapjuk, hogy

$$(x+2r)^{\overline{m+n}} = \sum_{k=0}^{m+n} \left\lfloor {m+n \atop k} \right\rfloor_r x^{\underline{k}}.$$

Másrészt, újra alkalmazva a 2.6. tételt, valamint az emelkedő faktoriálisokra vonatkozó binomiális tételt adódik, hogy

$$
\begin{aligned}
(x+2r)^{\overline{m+n}} &= (x+2r)^{\overline{m}}(x+2r+m)^{\overline{n}}\\
&= \sum_{i=0}^{m} \left\lfloor\begin{matrix} m\\ i\end{matrix}\right\rfloor_r x^{\underline{i}}(x-i+2r-2s+m+i+2s)^{\overline{n}}\\
&= \sum_{i=0}^{m} \left\lfloor\begin{matrix} m\\ i\end{matrix}\right\rfloor_r x^{\underline{i}}\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}(x-i+2r-2s)^{\overline{j}}(m+i+2s)^{\overline{n-j}}\\
&= \sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n} \left\lfloor\begin{matrix} m\\ i\end{matrix}\right\rfloor_r x^{\underline{i}}\binom{n}{j}(m+i+2s)^{\overline{n-j}}\sum_{k=0}^{j}\left\lfloor\begin{matrix} j\\ k\end{matrix}\right\rfloor_{r-s}(x-i)^{\underline{k}}\\
&= \sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n}\sum_{k=0}^{j} \left\lfloor\begin{matrix} m\\ i\end{matrix}\right\rfloor_r \binom{n}{j}(m+i+2s)^{\overline{n-j}}\left\lfloor\begin{matrix} j\\ k\end{matrix}\right\rfloor_{r-s} x^{\underline{i+k}}\\
&= \sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n}\sum_{k=i}^{i+j} \left\lfloor\begin{matrix} m\\ i\end{matrix}\right\rfloor_r \binom{n}{j}(m+i+2s)^{\overline{n-j}}\left\lfloor\begin{matrix} j\\ k-i\end{matrix}\right\rfloor_{r-s} x^{\underline{k}}\\
&= \sum_{k=0}^{m+n}\sum_{i=0}^{\min\{m,k\}}\sum_{j=\max\{0,k-i\}}^{n} \left\lfloor\begin{matrix} m\\ i\end{matrix}\right\rfloor_r \binom{n}{j}(m+i+2s)^{\overline{n-j}}\left\lfloor\begin{matrix} j\\ k-i\end{matrix}\right\rfloor_{r-s} x^{\underline{k}}.
\end{aligned}
$$

A két kifejezésben $x^{\underline{k}}$ együtthatóit összehasonlítva az

$$
\left\lfloor\begin{matrix} m+n\\ k\end{matrix}\right\rfloor_r = \sum_{i=0}^{\min\{m,k\}}\sum_{j=\max\{0,k-i\}}^{n} \left\lfloor\begin{matrix} m\\ i\end{matrix}\right\rfloor_r \binom{n}{j}(m+i+2s)^{\overline{n-j}}\left\lfloor\begin{matrix} j\\ k-i\end{matrix}\right\rfloor_{r-s}
$$

egyenlőséghez jutunk. Mindkét oldalt x^k-nal szorozva és összegezve k-ra $(k=0,\dots,m+n)$ azt kapjuk, hogy

$$
\begin{aligned}
L_{m+n,r}(x) &= \sum_{k=0}^{m+n}\left\lfloor\begin{matrix} m+n\\ k\end{matrix}\right\rfloor_r x^k\\
&= \sum_{k=0}^{m+n}\sum_{i=0}^{\min\{m,k\}}\sum_{j=\max\{0,k-i\}}^{n} \left\lfloor\begin{matrix} m\\ i\end{matrix}\right\rfloor_r \binom{n}{j}(m+i+2s)^{\overline{n-j}}\left\lfloor\begin{matrix} j\\ k-i\end{matrix}\right\rfloor_{r-s} x^k\\
&= \sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n}\sum_{k=i}^{i+j} \left\lfloor\begin{matrix} m\\ i\end{matrix}\right\rfloor_r \binom{n}{j}(m+i+2s)^{\overline{n-j}}\left\lfloor\begin{matrix} j\\ k-i\end{matrix}\right\rfloor_{r-s} x^k
\end{aligned}
$$

$$= \sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n}\sum_{k=0}^{j} \left\lfloor {m \atop i} \right\rfloor_r \binom{n}{j} (m+i+2s)^{\overline{n-j}} \left\lfloor {j \atop k} \right\rfloor_{r-s} x^{i+k}$$

$$= \sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n} \left\lfloor {m \atop i} \right\rfloor_r \binom{n}{j} (m+i+2s)^{\overline{n-j}} x^i \sum_{k=0}^{j} \left\lfloor {j \atop k} \right\rfloor_{r-s} x^{k}$$

$$= \sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n} \left\lfloor {m \atop i} \right\rfloor_r \binom{n}{j} (m+i+2s)^{\overline{n-j}} x^i L_{j,r-s}(x).$$

□

A tételre az $s = r$ esetben kombinatorikus bizonyítás is adható.

Bizonyítás. Feltehető, hogy m, n, r nem mind 0, és legyen $c \geq 1$. Ekkor $L_{m+n,r}(c)$ azt adja meg, hogy hányféleképpen lehet egy $m + n + r$ elemű halmazt rendezett osztályokba osztályozni, és a rendezett osztályokat c darab színnel színezni úgy, hogy r kitüntetett elem különböző rendezett osztályba kerüljön, valamint a kitüntetett elemeket tartalmazó rendezett osztályok ne legyenek színezve.

Ugyanezt máshogyan is összeszámolhatjuk. Először az r kitüntetett és az első m nemkitüntetett elemet $i + r$ darab rendezett osztályba osztályozzuk úgy, hogy a kitüntetett elemek különböző rendezett osztályokban legyenek $(i = 0, \dots, m)$. Ezt $\left\lfloor {m \atop i} \right\rfloor_r$-féleképpen tehetjük meg, továbbá a kitüntetett elemet nem tartalmazó i darab rendezett osztályt c^i-féleképpen színezhetjük. Jelölje j azon elemek számát az utolsó n nemkitüntetett elemből, melyek nem ebbe az $i+r$ darab rendezett osztályba kerülnek $(j = 0, \dots, n)$. Ezeket $\binom{n}{j}$-féleképpen választhatjuk ki, $L_j(c)$-féleképpen osztályozhatjuk rendezett osztályokba, és színezhetjük a rendezett osztályokat c színnel. A kimaradó $n-j$ darab nemkitüntetett elemet az eredeti $i+r$ darab rendezett osztályba tesszük, ami $(m + i + 2r)^{\overline{n-j}}$ módon történhet. Így rögzített i és j esetén $\left\lfloor {m \atop i} \right\rfloor_r \binom{n}{j} L_j(c)(m + i + 2r)^{\overline{n-j}} c^i$ a lehetőségek száma. □

Megjegyzés. A tétel érdekessége, hogy $m = 0$ esetén a 3.6. tételt, $n = 0$ esetén pedig az r-Lah-polinomok, valamint az összegzett r-Lah-számok definícióját adja vissza.

Az r-Lah-polinomokra és az összegzett r-Lah-számokra érvényes az alábbi Dobiński-típusú formula. Azért hívjuk így, mert a Bell-számokra vonatkozó megfelelő összefüggést G. Dobiński [17] adta meg.

3.8. Tétel. ([57, Theorem 3.6])
Legyen $n, r \geq 0$. Ekkor

$$L_{n,r}(x) = \frac{1}{\exp(x)} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(j+2r)^{\overline{n}}}{j!} x^j,$$

$$L_{n,r} = \frac{1}{e} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(j+2r)^{\overline{n}}}{j!}.$$

Bizonyítás. I. Először a polinomokra vonatkozó állítást látjuk be. A bizonyítás során legyen $\left\lfloor {n \atop i} \right\rfloor_r = 0$, ha $i > n$. A 2.6. tételt felhasználva azt kapjuk, hogy

$$(j+2r)^{\overline{n}} = \sum_{i=0}^{n} \left\lfloor {n \atop i} \right\rfloor_r j^{\underline{i}} = \sum_{i=0}^{\infty} \left\lfloor {n \atop i} \right\rfloor_r j^{\underline{i}} = \sum_{i=0}^{j} \left\lfloor {n \atop i} \right\rfloor_r \frac{j!}{(j-i)!}.$$

Mindkét oldalt $j!$-sal osztva adódik, hogy

$$\frac{(j+2r)^{\overline{n}}}{j!} = \sum_{i=0}^{j} \left\lfloor {n \atop i} \right\rfloor_r \frac{1}{(j-i)!},$$

azaz a $\left(\frac{(j+2r)^{\overline{n}}}{j!}\right)_{j=0}^{\infty}$ sorozat az $\left(\left\lfloor {n \atop j} \right\rfloor_r\right)_{j=0}^{\infty}$ és az $\left(\frac{1}{j!}\right)_{j=0}^{\infty}$ sorozatok konvolúciója, ezért a generátorfüggvénye

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{(j+2r)^{\overline{n}}}{j!} x^j = L_{n,r}(x) \exp(x).$$

II. Most az összegzett r-Lah-számokra vonatkozó formulát igazoljuk. Legyen $\lambda > 0$ és ξ egy λ paraméterű Poisson-eloszlású valószínűségi változó. Ekkor a 2.6. tétel alkalmazásával

$$\mathsf{E}\,(\xi+2r)^{\overline{n}} = \sum_{j=0}^{\infty} (j+2r)^{\overline{n}} \frac{\lambda^j}{j!} e^{-\lambda} = e^{-\lambda} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\lambda^j}{j!} \sum_{i=0}^{n} \left\lfloor {n \atop i} \right\rfloor_r j^{\underline{i}}$$

$$\begin{aligned}
&= e^{-\lambda}\sum_{i=0}^{n}\left\lfloor {n \atop i} \right\rfloor_r \sum_{j=0}^{\infty}\frac{j^{\underline{i}}}{j!}\lambda^j = e^{-\lambda}\sum_{i=0}^{n}\left\lfloor {n \atop i} \right\rfloor_r \sum_{j=i}^{\infty}\frac{\lambda^j}{(j-i)!} \\
&= e^{-\lambda}\sum_{i=0}^{n}\left\lfloor {n \atop i} \right\rfloor_r \lambda^i \sum_{j=0}^{\infty}\frac{\lambda^j}{j!} = \sum_{i=0}^{n}\left\lfloor {n \atop i} \right\rfloor_r \lambda^i = L_{n,r}(\lambda).
\end{aligned}$$

Speciálisan $\lambda = 1$ esetén azt kapjuk, hogy

$$L_{n,r} = L_{n,r}(1) = \mathsf{E}(\xi + 2r)^{\overline{n}} = \sum_{j=0}^{\infty}(j+2r)^{\overline{n}}\frac{1}{j!}e^{-1}.$$

□

Most megadjuk az r-Lah-polinomok és az összegzett r-Lah-számok sorozatának exponenciális generátorfüggvényét.

3.9. Tétel. ([57, Theorem 3.7])
Legyen $r \geq 0$. Ekkor az $(L_{n,r}(x))_{n=0}^{\infty}$ sorozat exponenciális generátorfüggvénye

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{L_{n,r}(x)}{n!}y^n = \exp\left(\frac{xy}{1-y}\right)\frac{1}{(1-y)^{2r}},$$

az $(L_{n,r})_{n=0}^{\infty}$ sorozat exponenciális generátorfüggvénye pedig

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{L_{n,r}}{n!}y^n = \exp\left(\frac{y}{1-y}\right)\frac{1}{(1-y)^{2r}}.$$

Bizonyítás. A 2.13. tételt felhasználva adódik, hogy

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty}\frac{L_{n,r}(x)}{n!}y^n &= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{n}\left\lfloor {n \atop j} \right\rfloor_r x^j\frac{1}{n!}y^n = \sum_{j=0}^{\infty}x^j\sum_{n=j}^{\infty}\left\lfloor {n \atop j} \right\rfloor_r \frac{1}{n!}y^n \\
&= \sum_{j=0}^{\infty}x^j\frac{1}{j!}\left(\frac{y}{1-y}\right)^j\frac{1}{(1-y)^{2r}} = \frac{1}{(1-y)^{2r}}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{j!}\left(\frac{xy}{1-y}\right)^j \\
&= \exp\left(\frac{xy}{1-y}\right)\frac{1}{(1-y)^{2r}}.
\end{aligned}$$

□

Az összegzett r-Lah-számokra vonatkozó állítást más módon is bizonyíthatjuk.

Bizonyítás. Először az összegzett Lah-számok sorozatának exponenciális generátorfüggvényét határozzuk meg. Legyen $l(y)$ az $(L_n)_{n=0}^{\infty}$ sorozat exponenciális generátorfüggvénye, azaz

$$l(y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{L_n}{n!} y^n = \sum_{n=0}^{\infty} l_n y^n.$$

A 3.6. tétel alapján

$$L_{n+1} = L_{n,1} = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} L_j \, (n-j+1)!,$$

azaz az $(L_{n+1})_{n=0}^{\infty}$ sorozat az $(L_n)_{n=0}^{\infty}$ és az $((n+1)!)_{n=0}^{\infty}$ sorozatok binomiális konvolúciója, így az exponenciális generátorfüggvényeikből adódik az

$$l'(y) = l(y) \frac{1}{(1-y)^2}$$

differenciálegyenlet. Ennek keressük a megoldását a formális hatványsorok körében az $l_0 = \frac{L_0}{0!} = 1$ feltétel mellett. A differenciálegyenlet két oldalán y^n együtthatója

$$(n+1) l_{n+1} = \sum_{j=0}^{n} l_j (n-j+1),$$

amiből következik, hogy $l_0 = 1$-ből kiindulva, $l_0, \dots, l_n$ ismeretében l_{n+1} egyértelműen meghatározható, tehát a differenciálegyenletnek az $l_0 = 1$ feltétel mellett egyértelműen létezik megoldása a formális hatványsorok körében. Ellenőrizhető, hogy ez a megoldás $\exp\left(\frac{y}{1-y}\right)$.

Ezt felhasználva adjuk meg az összegzett r-Lah-számok $(L_{n,r})_{n=0}^{\infty}$ sorozatának $l_r(y)$ exponenciális generátorfüggvényét. Ismét a 3.6. tételből adódik, hogy az $(L_{n,r})_{n=0}^{\infty}$ sorozat az $(L_n)_{n=0}^{\infty}$ és a $\left((2r)^{\overline{n}}\right)_{n=0}^{\infty}$ sorozatok binomiális konvolúciója, amiből következik, hogy exponenciális generátorfüggvénye

$$l_r(y) = \exp\left(\frac{y}{1-y}\right) \frac{1}{(1-y)^{2r}}.$$

□

Végül megmutatjuk, hogy az s-Bell-polinomok, illetve s-Bell-számok sorozatának elsőfajú r-Stirling-transzformáltja az $\frac{r+s}{2}$-Lah-polinomok, illetve az összegzett $\frac{r+s}{2}$-Lah-számok sorozata, ha r és s azonos paritású.

3.10. Tétel. ([57, Theorem 3.11])
Ha $n, r, s \geq 0$ és $r+s$ páros, akkor

$$L_{n,\frac{r+s}{2}}(x) = \sum_{j=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix}_r B_{j,s}(x),$$

$$L_{n,\frac{r+s}{2}} = \sum_{j=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix}_r B_{j,s}.$$

Megjegyzés. ([57, Remark 3.12])
Ha $r = s$, akkor

$$L_{n,r}(x) = \sum_{j=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix}_r B_{j,r}(x),$$

$$L_{n,r} = \sum_{j=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix}_r B_{j,r}.$$

Bizonyítás. A 2.14. tételt felhasználva kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} L_{n,\frac{r+s}{2}}(x) &= \sum_{k=0}^{n} \left\lfloor \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\rfloor_{\frac{r+s}{2}} x^k = \sum_{k=0}^{n} \sum_{j=k}^{n} \begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix}_r \begin{Bmatrix} j \\ k \end{Bmatrix}_s x^k \\ &= \sum_{j=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix}_r \sum_{k=0}^{j} \begin{Bmatrix} j \\ k \end{Bmatrix}_s x^k = \sum_{j=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix}_r B_{j,s}(x). \end{aligned}$$

□

Az $r = s$ speciális esetben kombinatorikus bizonyítást is tudunk adni a tételre.

Bizonyítás. Feltehető, hogy n, r nem mindkettő 0. Legyen $c \geq 1$. Egy $n + r$ elemű halmaz rendezett osztályokba való osztályozása és a rendezett osztályok c színnel való színezése, ahol r kitüntetett elem különböző rendezett osztályba kerül, és ezen elemek rendezett osztályait nem színezzük, a következőképpen is megkapható. Először az elemeket $j+r$ darab páronként idegen ciklusba soroljuk olyan módon, hogy a kitüntetett elemeket különböző ciklusokba tesszük ($j = 0, \ldots, n$). Ezután osztályozzuk a ciklusokat úgy, hogy a kitüntetett elemeket tartalmazó ciklusok különböző osztályokban legyenek, és színezzük azokat az osztályokat a c szín valamelyikével, amelyekben nincs kitüntetett elemet tartalmazó ciklus. Végül, ha minden osztályban összeszorozzuk a ciklusokat, akkor az $n+r$ elemű halmaz rendezett osztályokba való olyan osztályozását kapjuk, ahol a kitüntetett elemek különböző rendezett osztályokba kerülnek, és a kitüntetett elemeket nem tartalmazó rendezett osztályok a c szín valamelyikével vannak színezve. Így rögzített j esetén $\left[{n \atop j}\right]_r B_{j,r}(c)$ a lehetőségek száma. $\square$

3.3. Az r-Lah-polinomok gyökei

Ebben az alfejezetben az r-Lah-polinomok gyökeinek vizsgálatával foglalkozunk. Megmutatjuk, hogy az r-Lah-polinomok minden gyöke valós, egyszeres és nempozitív, majd korlátot adunk a gyökök értékére, valamint numerikus számításokat is végzünk a gyökök valódi nagyságrendjének meghatározására.

Először azt mutatjuk meg, hogy az r-Lah-polinomok minden gyöke valós.

3.11. Tétel. ([57, Theorem 3.8])
Legyen $n \geq 1$. Ekkor $L_{n,0}(x)$ gyökei egyszeresek, valósak, az egyik gyök 0, a többi negatív. Továbbá, ha $L_{n,0}(x)$ gyökei $\alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_n = 0$ és $L_{n+1,0}(x)$ gyökei $\beta_1 < \beta_2 < \ldots < \beta_{n+1} = 0$, akkor $\beta_1 < \alpha_1 < \beta_2 < \alpha_2 < \ldots < \beta_n < \alpha_n = \beta_{n+1} = 0$.

Legyen $n, r \geq 1$. Ekkor $L_{n,r}(x)$ gyökei egyszeresek, valósak és negatívak. Ha $L_{n,r}(x)$ gyökei $\alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_n$ és $L_{n+1,r}(x)$ gyökei $\beta_1 < \beta_2 < \ldots < \beta_{n+1}$, akkor $\beta_1 < \alpha_1 < \beta_2 < \alpha_2 < \ldots < \beta_n < \alpha_n < \beta_{n+1}$.

Bizonyítás. Az egyszerűség kedvéért a tételt csak az $r \geq 1$ esetre bizonyítjuk, $r = 0$ esetén ugyanezzel a gondolatmenettel igazolható az állítás. A bizonyítás n szerinti teljes indukcióval történik.

Ha $n = 1$, akkor $L_{1,r}(x) = x + 2r$, aminek egyetlen gyöke $-2r$, erre tehát teljesül az állítás.

Tegyük fel, hogy az állítás igaz n-re. Ekkor $(n+1)$-re, a 3.4. tételbeli egyenlőség mindkét oldalát $e^x x^{n+2r-1}$-nel szorozva azt kapjuk, hogy

$$e^x x^{n+2r-1} L_{n+1,r}(x) = \left(e^x x^{n+2r} L_{n,r}(x)\right)'.$$

Az indukciós feltétel szerint $L_{n,r}(x)$-nek n darab valós gyöke van, mind egyszeres és negatív. Ekkor $e^x x^{n+2r} L_{n,r}(x)$-nek pontosan $n+1$ darab különböző valós zérushelye van, az egyik 0, a többi negatív, továbbá az is teljesül, hogy $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x x^{n+2r} L_{n,r}(x) = 0$. Ebből a Rolle-féle középértéktétel miatt következik, hogy $\left(e^x x^{n+2r} L_{n,r}(x)\right)' = e^x x^{n+2r-1} L_{n+1,r}(x)$-nek legalább $n+1$ darab negatív zérushelye van, így $L_{n+1,r}(x)$-nek $n+1$ darab különböző negatív gyöke van, és azok teljesítik a gyökökre megfogalmazott egyenlőtlenségeket is. □

Megjegyzés. Ez az eredmény Newton tételével (lásd például [77]) együtt újabb bizonyítását adja a 2.11. tételnek.

Most két egymást követő összegzett r-Lah-szám hányadosára adunk közelítést.

3.12. Következmény. ([57, Corollary 3.10])
Ha $n \geq 1$ és $r \geq 0$, akkor

$$\left| \frac{L_{n+1,r}}{L_{n,r}} - (n+r+1) - \left\lfloor \sqrt{n+r^2+1} \right\rfloor \right| < 1.$$

Bizonyítás. A 3.4. tételből adódik, hogy

$$L'_{n,r}(1) = L_{n+1,r} - (n+2r+1) L_{n,r}.$$

Ekkor az állítás a 3.11. tételből, Darroch tételéből (lásd például [9]), valamint a 2.12. tételből következik. □

Érdekes kérdés, hogy mekkora az r-Lah-polinomok legkisebb gyökének nagyságrendje. Az alfejezet további részében ezzel a problémával foglalkozunk. Vizsgálatainkat azonban nemcsak az r-Lah-polinomokra végezzük el, hanem más, általános Bell-típusú polinomok, nevezetesen a

$$D_{n,m,r}(x) = \sum_{k=0}^{n} W_{m,r}(n,k)\, x^k$$

r-Dowling-polinomok [14, 26] és a

$$DL_{n,m,r}(x) = \sum_{k=0}^{n} WL_{m,r}\,(n,k)\,x^k$$

r-Dowling–Lah-polinomok [24] esetére is, ahol $W_{m,r}\,(n,k)$ és $WL_{m,r}\,(n,k)$ rendre a másodfajú r-Whitney-számokat és az r-Whitney–Lah-számokat jelöli. Megjegyezzük, hogy az r-Dowling-polinomok, illetve az r-Dowling–Lah-polinomok rendre általánosítják az r-Bell-polinomokat és az r-Lah-polinomokat, ugyanis $D_{n,1,r}(x) = B_{n,r}(x)$ és $DL_{n,1,r}(x) = L_{n,r}(x)$.

Ezekre is igazoltak a 3.11. tételhez hasonló állítást. Az r-Dowling-polinomokra G.-S. Cheon, J.-H. Jung [14] és R. B. Corcino, C. B. Corcino, R. Aldema [16] (az $r = 1$ esetben M. Benoumhani [6]), az r-Dowling–Lah-polinomokra pedig Gyimesi E. [24] mutatta meg, hogy minden gyökük valós, egyszeres és nempozitív.

A fent említett polinomok legkisebb gyökeinek becsléséhez az alábbi lemmát fogjuk használni, amelyet E. Laguerre [36] és P. A. Samuelson [67] bizonyított (lásd még [60]). Megjegyezzük, hogy Samuelson egy statisztikai kérdés kapcsán jutott ehhez az eredményhez.

3.13. Lemma. *Legyen $n \geq 2$ és $p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ egy valós együtthatós főpolinom. Ha $p(x)$-nek csak valós gyökei vannak, akkor a gyökök a*

$$\left[-\frac{a_{n-1}}{n} - \frac{n-1}{n}\sqrt{a_{n-1}^2 - \frac{2n}{n-1}a_{n-2}},\, -\frac{a_{n-1}}{n} + \frac{n-1}{n}\sqrt{a_{n-1}^2 - \frac{2n}{n-1}a_{n-2}}\right]$$

intervallumban vannak.

Továbbá, ha még azt is feltesszük, hogy $p(x)$ együtthatói nemnegatívak, akkor a legkisebb gyök abszolút értékét $\mu\,(p(x))$-szel jelölve adódik, hogy

$$\mu\,(p(x)) \leq \frac{a_{n-1}}{n} + \frac{n-1}{n}\sqrt{a_{n-1}^2 - \frac{2n}{n-1}a_{n-2}}.$$

Megjegyezzük, hogy más eszközök is vannak $\mu\,(p(x))$ becslésére, de számításaink alapján a mi esetünkben a Laguerre–Samuelson-egyenlőtlenség adja a legjobb korlátot.

A lemma segítségével Mező I. és R. B. Corcino [48] felső becslést adott $\mu(B_n(x))$-re és $\mu(B_{n,r}(x))$-re. Azt kapták, hogy $n \geq 2$ és $r \geq 0$ esetén

$$\mu(B_n(x)) \leq \frac{n-1}{2} + \frac{n-1}{2\sqrt{3}}\sqrt{5n-7} \sim \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{3}}n^{\frac{3}{2}},$$

$$\mu(B_{n,r}(x)) \leq \frac{n-1}{2} + r + \frac{n-1}{2\sqrt{3}}\sqrt{5n-7+12r} \sim \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{3}}n^{\frac{3}{2}}.$$

Megjegyezzük, hogy ezek a felső korlátok itt egyszerűsített formában szerepelnek, valamint észrevehető, hogy aszimptotikusan függetlenek az r paramétertől.

Most hasonló korlátokat adunk meg az r-Dowling-, az r-Lah- és az r-Dowling–Lah-polinomok gyökeire vonatkozóan.

3.14. Tétel. ([62, Theorem])
Legyen $n \geq 2$, $r \geq 0$ és $m \geq 1$. Ekkor

1. $\mu(D_{n,m,r}(x)) \leq \frac{m(n-1)}{2} + r + \frac{n-1}{2\sqrt{3}}\sqrt{5m^2n - 7m^2 + 12mr}$;
2. $\mu(L_{n,r}(x)) \leq n - 1 + 2r + (n-1)\sqrt{n-1+2r}$;
3. $\mu(DL_{n,m,r}(x)) \leq m(n-1) + 2r + (n-1)\sqrt{m^2n - m^2 + 2mr}$.

Bizonyítás. A másodfajú r-Whitney-számok kombinatorikus definíciójából egyszerűen megkapható, hogy

$$W_{m,r}(n, n-1) = m\binom{n}{2} + nr,$$

$$W_{m,r}(n, n-2) = r^2\binom{n}{2} + m(m+3r)\binom{n}{3} + 3m^2\binom{n}{4}.$$

Ekkor a tétel első állítása a 3.13. lemmából következik.

Hasonlóan, mivel

$$\left\lfloor {n \atop n-1} \right\rfloor_r = n(n-1) + 2nr,$$

$$\left\lfloor {n \atop n-2} \right\rfloor_r = (4r^2 + 2r)\binom{n}{2} + 6(2r+1)\binom{n}{3} + 12\binom{n}{4},$$

valamint

$$WL_{m,r}(n,n-1) = mn(n-1) + 2nr,$$

$$WL_{m,r}(n,n-2) = 2r(m+2r)\binom{n}{2} + 6m(m+2r)\binom{n}{3} + 12m^2\binom{n}{4},$$

a tétel másik két állítása szintén a 3.13. lemmából következik. □

Könnyen látható, hogy az r-Dowling-polinomok, az r-Lah-polinomok és az r-Dowling–Lah-polinomok esetén a korlát aszimptotikusan rendre $\frac{m}{2}\sqrt{\frac{5}{3}}n^{\frac{3}{2}}$, $n^{\frac{3}{2}}$, illetve $mn^{\frac{3}{2}}$.

Megemlítjük, hogy az ún. asszociált Bell-polinomok esetében Bóna M. és Mező I. [10] végeztek hasonló vizsgálatokat, továbbá hogy az r-Dowling-polinomok legkisebb gyökeinek becslésével C. B. Corcino, R. B. Corcino, Mező I. és J. L. Ramírez [15] is foglalkoztak.

Numerikus számításokat is végeztünk, hogy meghatározzuk az r-Dowling- és az r-Dowling–Lah-polinomok legkisebb gyökeinek pontos értékét. A számításokat a Debreceni Egyetem HP SL250s és a Szegedi Tudományegyetem HP CP4000BL szuperszámítógépével végeztük, a Maple 2015 szoftver használatával.

Először az r-Whitney-, illetve az r-Whitney–Lah-számok rekurzióját felhasználva a program kiszámította a polinom együtthatóit. Ezután a 3.14. tételben megadott felső korlát ellentettjétől kezdve növekvő sorrendben minden egész számot behelyettesített a polinomba, és figyelte az előjelváltásokat. A számítás eredménye az első előjelváltás helye. Megjegyezzük, hogy biztosak lehetünk benne, hogy ezzel a módszerrel nem ugorjuk át a legkisebb gyököt, ugyanis a két legkisebb gyök különbsége nagyobb 1-nél, már kicsi n értékek esetén is.

Az 5. táblázat $\mu(D_{n,m,r}(x))$, a 6. táblázat pedig $\mu(DL_{n,m,r}(x))$ felső egész részét tartalmazza az $n = 25000, 50000, 75000$, az $r = 0,1,2,3$ és az $m = 1,2,3,4$ esetekben. Ezek speciálisan $m = 1$ választással megadják az r-Bell-, valamint az r-Lah-polinomokra vonatkozó értékeket is.

(m,r)	$n=25000$	$n=50000$	$n=75000$
$(1,0)$	67811	135729	203659
$(1,1)$	67813	135732	203662
$(1,2)$	67816	135735	203665
$(1,3)$	67819	135737	203668
$(2,0)$	135621	271458	407318
$(2,1)$	135623	271461	407321
$(2,2)$	135626	271463	407324
$(2,3)$	135629	271466	407326
$(3,0)$	203431	407187	610977
$(3,1)$	203433	407189	610980
$(3,2)$	203436	407192	610983
$(3,3)$	203439	407195	610985
$(4,0)$	271241	542916	814636
$(4,1)$	271243	542918	814639
$(4,2)$	271246	542921	814642
$(4,3)$	271249	542924	814644

5. táblázat:
Az r-Dowling-polinomok legkisebb gyökeinek abszolút értékei

(m,r)	$n=25000$	$n=50000$	$n=75000$
$(1,0)$	99828	199783	299752
$(1,1)$	99832	199787	299756
$(1,2)$	99836	199791	299760
$(1,3)$	99840	199795	299764
$(2,0)$	199656	399566	599504
$(2,1)$	199660	399570	599508
$(2,2)$	199664	399574	599512
$(2,3)$	199668	399578	599516
$(3,0)$	299484	599349	899255
$(3,1)$	299488	599353	899259
$(3,2)$	299492	599357	899263
$(3,3)$	299496	599361	899267
$(4,0)$	399312	799132	1199007
$(4,1)$	399316	799136	1199011
$(4,2)$	399320	799140	1199015
$(4,3)$	399324	799144	1199019

6. táblázat:
Az r-Dowling–Lah-polinomok legkisebb gyökeinek abszolút értékei

A közönséges Bell-polinomok esetén Mező I. és R. B. Corcino [48] végeztek számításokat, hogy meghatározzák $\mu\left(B_n(x)\right)$ pontos értékét, és azt a sejtést mondták ki, hogy $\mu\left(B_n(x)\right) \sim c_B \cdot n$, ahol $c_B \approx 2{,}7$. Az r-Bell-polinomokra hasonló sejtést fogalmaztak meg, ahol az aszimptotikus konstans szorzó valószínűleg függ az r paramétertől.

A számításaink azonban azt mutatják, hogy az r-Bell-polinomokra vonatkozó konstans ugyanaz a c_B konstans, mint a Bell-polinomok esetén. Tehát a sejtésünk az, hogy $\mu\left(B_{n,r}(x)\right) \sim c_B \cdot n$, azaz a konstans aszimptotikusan független r-től, és azt figyeltük meg, hogy $c_B \approx e$. Az r-Bell-polinomok általánosításaira, az r-Dowling-polinomokra vonatkozóan viszont azt sejtjük, hogy $\mu\left(D_{n,m,r}(x)\right) \sim mc_B \cdot n$. Ez azt jelentené, hogy $\mu\left(D_{n,m,r}(x)\right)$ aszimptotikusan lineáris a polinom fokszámában, és n szorzója r-től független, viszont m-szerese c_B-nek. Hasonlóan, az r-Lah-polinomok és általánosításaik, az r-Dowling–Lah-polinomok esetén azt vettük észre, hogy $\mu\left(L_{n,r}(x)\right) \sim c_L \cdot n$ és $\mu\left(DL_{n,m,r}(x)\right) \sim mc_L \cdot n$, ahol $c_L \approx 4$. Ez ismét csak azt jelenti, hogy n aszimptotikus konstans szorzója nem függ r-től, de m-től igen. Erre az észrevételre adunk most néhány heurisztikus magyarázatot, a numerikus számításaink eredményén túl.

Egyrészt a 3.14. tételben szereplő felső korlát $\mu\left(DL_{n,m,r}(x)\right)$-re aszimptotikusan egyenlő a $\mu\left(L_{n,r}(x)\right)$-re vonatkozó korlát m-szeresével.

Másfelől, a Viète-formulák alapján az $L_{n,r}(x)$, illetve a $DL_{n,m,r}(x)$ polinom gyökeinek összege rendre $-\left\lfloor {n \atop n-1} \right\rfloor_r = -n(n-1) - 2nr \sim -n^2$ és $-WL_{m,r}(n, n-1) = -mn(n-1) - 2nr \sim -mn^2$.

Továbbá, ha az elsőfajú r-Stirling-számok, illetve az elsőfajú r-Whitney-számok segítségével előállítható hasonló polinomokat tekintjük, akkor azt vehetjük észre, hogy

$$\mu\left(\sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_r x^k\right) = \mu\left((x+r)^{\overline{n}}\right) = r + n - 1 \sim n$$

és

$$\mu\left(\sum_{k=0}^{n} w_{m,r}\left(n,k\right) x^k\right) = \mu\left((x+r|m)^{\overline{n}}\right) = r + m\left(n-1\right) \sim m \cdot n,$$

ahol $(x+r|m)^{\overline{n}} = (x+r)(x+r+m)\ldots(x+r+m(n-1))$.

Ezen magyarázatok mellett megjegyezzük, hogy [24, Theorem 3.7] alapján

$$DL_{n,m,mr}(mx) = m^n DL_{n,1,r}(x) = m^n L_{n,r}(x).$$

Ha elfogadjuk, hogy az r-Lah-polinomokra és az r-Dowling–Lah-polinomokra vonatkozó konstansok függetlenek r-től, akkor ez az összefüggés azt mutatja, hogy az r-Dowling–Lah-polinomokra vonatkozó konstans éppen m-szerese az r-Lah-polinomokhoz tartozó konstansnak, ugyanis α akkor és csakis akkor gyöke $L_{n,r}(x)$-nek, ha $m\alpha$ gyöke $DL_{n,m,mr}(x)$-nek.

Az r-Dowling-polinomok esetén hasonló gondolatokkal tudjuk alátámasztani a rájuk vonatkozó sejtésünket.

Végül, a számításaink alapján megfogalmazhatunk még egy észrevételt. Azt sejtjük, hogy ha $r \geq 0$ és $m \geq 1$, akkor

$$\lim_{n\to\infty} \left(\mu\left(D_{n,m,r+1}(x)\right) - \mu\left(D_{n,m,r}(x)\right)\right) = c_B$$

és

$$\lim_{n\to\infty} \left(\mu\left(DL_{n,m,r+1}(x)\right) - \mu\left(DL_{n,m,r}(x)\right)\right) = c_L.$$

4. Kombinatorikus számsorozatok gráfelméleti interpretációja

Ebben a fejezetben gráfelméleti interpretációt adunk meg az r-Lah-számokra és a másodfajú r-Stirling-számokra, páros gráfok párosításainak számával kapcsolatosan. Emellett egy alfejezet erejéig a Lucas-sorozatokra is kitérünk, hogy kiterjesszünk egy közelmúltbeli eredményt.

4.1. Párosítások összeszámolása

A gráfelméletben jól ismert és fontos a párosítások fogalma. Egy gráfban élek egy halmaza független, ha semelyik két halmazbeli élnek nincs közös végpontja. A független élhalmazokat nevezzük párosításoknak is. Nyilván, ha egy gráf tartalmaz hurokélt, akkor az nem szerepelhet a párosításban, hiszen a hurokélnek önmagával van közös végpontja. Továbbá, ha a gráfban vannak párhuzamos élek, akkor egy párosítás ezen élek közül legfeljebb az egyiket tartalmazhatja. Ezeket mégsem zárjuk ki a vizsgálatainkból, ugyanis a következő alfejezetben olyan gráfokkal is foglalkozunk, melyek nem egyszerűek.

Érdekes kérdés, hogy egy gráfban összesen hány párosítás található. Meglepő módon a problémának a kémiai gráfelméletben van komoly jelentősége. Egy gráf összes párosításainak a számát (ahol a 0 elemű, üres párosítást is számoljuk) a gráf Hosoya-indexének szokás hívni. Azért viseli H. Hosoya [29, 30] nevét, ugyanis ő vezette be ezt a fogalmat az 1970-es évek elején, telített szénhidrogének szerkezeti képletének vizsgálatával összefüggésben.

Ha elkészítjük azt a polinomot, amelyben x^k együtthatója egy gráf k elemű párosításainak a száma, akkor az adott gráf párosítási generátorpolinomját kapjuk. Ha ebbe a polinomba 1-et helyettesítünk, akkor a gráf Hosoya-indexéhez jutunk. További részletek erről a témáról Lovász L. és M. D. Plummer [40] könyvében olvashatók.

4.2. Párosítások és a Lucas-sorozatok

Gráfok párosításainak összeszámlálásakor érdekes összefüggésekre bukkanhatunk. Például az n csúcsú útgráf Hosoya-indexe az $(n+1)$-edik Fibonacci-számmal egyezik meg, az n csúcsú körgráf összes párosításainak a számát pedig az n-edik Lucas-szám adja meg. Ebben az alfejezetben általánosítjuk ezeket az állításokat.

A továbbiakban legyenek $a, b \geq 1$ egész számok. Ekkor az $(u_n(a,-b))_{n=0}^{\infty}$ elsőfajú és a $(v_n(a,-b))_{n=0}^{\infty}$ másodfajú Lucas-sorozatokat (részletekért lásd például [65]) az alábbi kezdeti értékekkel és rekurziókkal definiáljuk:

$$u_0(a,-b) = 0,\ u_1(a,-b) = 1,$$

$$u_{n+2}(a,-b) = au_{n+1}(a,-b) + bu_n(a,-b) \quad (n \geq 0);$$

és

$$v_0(a,-b) = 2,\ v_1(a,-b) = a,$$

$$v_{n+2}(a,-b) = av_{n+1}(a,-b) + bv_n(a,-b) \quad (n \geq 0).$$

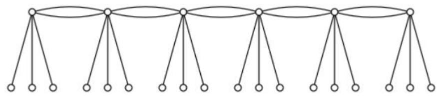
Ezek a sorozatok $a = b = 1$ esetén a Fibonacci-számok, illetve a Lucas-számok sorozatát adják vissza.

J. Alexander és P. Hearding [1] olyan gráfokat konstruáltak, melyekben a független csúcshalmazok (olyan csúcsok halmaza, melyek között nincsenek szomszédosak) száma olyan Lucas-sorozatok segítségével írható le, amelyekre $a \geq b$ teljesül. Felmerül a kérdés, hogy ezt a korlátozó feltételt ki lehet-e küszöbölni. Ez a kérdés adta az ötletet a Lucas-sorozatok egy újabb gráfelméleti interpretációjának megadásához, a Hosoya-index segítségével.

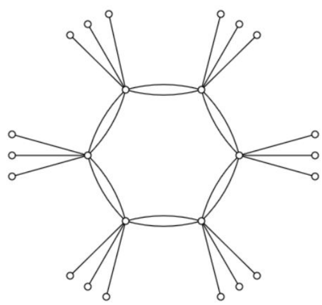
Ehhez most két gráfcsaládot vezetünk be. Legyenek $n, a, b \geq 1$ egészek. A $P_{n,a,b}$ gráf az alábbi módon áll elő: Tekintsük n darab a csúcsú csillaggráf diszjunkt unióját, jelöljük ezen csillaggráfok középpontjait $w_1, \ldots, w_n$-nel. Majd w_i-t és w_{i+1}-et kössük össze b darab párhuzamos éllel $(i = 1, \ldots, n-1)$.

Jelöljük $C_{n,a,b}$-vel azt a gráfot, amit úgy kapunk meg az előbb értelmezett $P_{n,a,b}$ gráfból, hogy még w_1 és w_n közé felveszünk b darab további párhuzamos élt. Speciálisan, a $C_{1,a,b}$ gráf esetén ez azt jelenti, hogy ez a b darab további él w_1-re illeszkedő hurokél, míg $C_{2,a,b}$ esetén w_1 és w_2 között összesen $2b$ darab párhuzamos élünk van.

Megjegyezzük, hogy ezek a gráfok az út-, illetve a körgráfok általánosításai, ugyanis $P_{n,1,1}$ az n csúcsú útgráf, míg $C_{n,1,1}$ az n csúcsú körgráf. A következő ábrák a $P_{6,4,2}$ és a $C_{6,4,2}$ gráfokat illusztrálják.



A $P_{6,4,2}$ gráf



A $C_{6,4,2}$ gráf

4.1. Tétel. ([56, Theorem 1])
Legyen $n, a, b \geq 1$. Ekkor a $P_{n,a,b}$ gráf Hosoya-indexe $u_{n+1}(a, -b)$.

Bizonyítás. A tételt n szerinti teljes indukcióval igazoljuk. Könnyen ellenőrizhető, hogy $P_{1,a,b}$, illetve $P_{2,a,b}$ Hosoya-indexe rendre $a = u_2(a, -b)$, valamint $a^2 + b = u_3(a, -b)$.

Legyen $n \geq 3$ és tegyük fel, hogy az állítás igaz $(n-2)$-re és $(n-1)$-re. Egy $P_{n,a,b}$-beli párosítás kétféle lehet attól függően, hogy tartalmaz-e w_{n-1} és w_n közötti élt. Ha nem, akkor a párosítás tulajdonképpen $P_{n-1,a,b}$-beli, amely még esetleg tartalmazhat a w_n középpontú csillaggráf $a-1$ éle közül legfeljebb egyet. Ha pedig egy $P_{n,a,b}$-beli párosításban van egy él a b darab w_{n-1} és w_n közti élből, akkor a további párosításbeli élek $P_{n-2,a,b}$ egy párosítását adják. Ez alapján az indukciós feltétel szerint a $P_{n,a,b}$ gráf összes párosításainak a száma

$$au_n(a,-b) + bu_{n-1}(a,-b) = u_{n+1}(a,-b).$$

□

4.2. Tétel. ([56, Theorem 2])
Legyen $n, a, b \geq 1$. Ekkor a $C_{n,a,b}$ gráf Hosoya-indexe $v_n(a,-b)$.

Bizonyítás. Egyszerűen igazolható, hogy $C_{1,a,b}$, valamint $C_{2,a,b}$ Hosoya-indexe rendre $a = v_1(a,-b)$, illetve $a^2 + 2b = v_2(a,-b)$.

Legyen $n \geq 3$. Ha $C_{n,a,b}$ egy párosítása nem tartalmaz egyet sem a w_1 és w_n közötti élek közül, akkor a párosítás valójában $P_{n,a,b}$-beli. Másrészt, ha a párosítás tartalmaz egyet ebből a b darab élből, akkor a további élek $P_{n-2,a,b}$ egy párosítását alkotják. Így a 4.1. tételből és a Lucas-sorozatok jól ismert tulajdonságából következik, hogy a $C_{n,a,b}$ gráf összes párosításainak a száma

$$u_{n+1}(a,-b) + bu_{n-1}(a,-b) = v_n(a,-b).$$

□

Most az eredeti problémánkat oldjuk meg, azaz olyan gráfokat adunk meg, melyekben a független csúcshalmazok számát Lucas-sorozatok elemei írják le, de nincs szükség az $a \geq b$ korlátozó feltételre.

Mivel a G gráf egy párosítása a gráf $L(G)$ élgráfjában független csúcshalmaznak felel meg, így a tételeinkből következik az alábbi állítás.

4.3. Következmény. ([56, Corollary])
Legyen $n, a, b \geq 1$. Ekkor az $L(P_{n,a,b})$ és az $L(C_{n,a,b})$ gráfok összes független csúcshalmazainak a száma rendre $u_{n+1}(a,-b)$ és $v_n(a,-b)$.

Megjegyzés. A következményben szereplő gráfokat közvetlenül is előállíthatjuk.

Az $L(P_{n,a,b})$ gráfhoz tekintsük a $G_1, \ldots, G_n$ $a-1$ csúcsú teljes gráfok és a $H_1, \ldots, H_{n-1}$ b csúcsú teljes gráfok diszjunkt unióját. Ezután kössük össze

H_i minden csúcsát H_{i+1} minden csúcsával ($i = 1, \ldots, n-2$), és H_j minden csúcsát G_j és G_{j+1} minden csúcsával ($j = 1, \ldots, n-1$).

Hasonlóan, az $L(C_{n,a,b})$ gráfhoz tekintsük a $G_1, \ldots, G_n$ $a-1$ csúcsú teljes gráfok és a $H_1, \ldots, H_n$ b csúcsú teljes gráfok diszjunkt unióját. Ezt követően kössük össze H_i minden csúcsát H_{i+1} minden csúcsával ($i = 1, \ldots, n-1$), H_n minden csúcsát H_1 minden csúcsával, továbbá H_j minden csúcsát G_j és G_{j+1} minden csúcsával ($j = 1, \ldots, n-1$), végül H_n minden csúcsát G_n és G_1 minden csúcsával.

4.3. Az r-Lah- és a másodfajú r-Stirling-számok kapcsolata a párosításokkal

Ebben az alfejezetben gráfelméleti interpretációt adunk meg az r-Lah-számokra és a másodfajú r-Stirling-számokra, páros gráfok párosításainak összeszámolásán keresztül.

Ehhez először vezessük be a következő jelöléseket. Minden alkalommal, amikor azt mondjuk, hogy a $K_{m,n}$ teljes páros gráf csúcsosztályai A és B, akkor feltesszük, hogy $|A| = m$ és $|B| = n$, ebben a sorrendben.

Teljes páros gráfok párosításainak összeszámolása ugyan nem túl bonyolult feladat (lásd például [20]), de a mi célunk az, hogy az r-Lah-számokhoz kapcsoljuk ezt a kérdést.

Ha $n, r \geq 1$ és $0 \leq k \leq n$, akkor jelöljük $\ell_r(n,k)$-val a $K_{n,n+r-1}$ teljes páros gráf $n-k$ elemű párosításainak a számát. Az $n = 0$ elfajuló esetben a gráfunk üres gráf, így $\ell_r(0,0) = 1$.

A definícióból könnyen adódnak az alábbi speciális értékek.

4.4. Tétel. *Legyen $n \geq 0$ és $r \geq 1$. Ekkor*

1. $\ell_r(n,0) = r^{\overline{n}}$,
2. $\ell_r(n,1) = (r+1)^{\overline{n}} - r^{\overline{n}}$ $(n \geq 1)$,
3. $\ell_r(n,n-1) = n(n+r-1)$ $(n \geq 1)$,
4. $\ell_r(n,n) = 1$.

Bizonyítás. Csak a tétel második állítását igazoljuk, a többi összefüggés is egyszerűen megmutatható.

A $K_{n,n+r-1}$ teljes páros gráf $n-1$ elemű párosításait számoljuk össze. Legyenek a gráf csúcsosztályai A és B. Ha a B csúcsosztályhoz egy új csúcsot adunk, és ebben a kiegészített gráfban veszünk egy olyan n elemű, azaz A-t lefogó párosítást, ahol a B-beli új csúcsnak van párja, akkor ez a párosítás az új csúcsra illeszkedő él nélkül éppen egy $n-1$ elemű párosítása az eredeti gráfnak. A kiegészített gráfban az A-t lefogó párosítások száma $(n+r)^{\underline{n}} = (r+1)^{\overline{n}}$, de ezek között szerepelnek azok a párosítások is, ahol a B-beli új csúcsnak nincs párja. Utóbbiak száma $r^{\overline{n}}$, amit le kell vonnunk. □

Legyen $n \geq 0$ és $r \geq 1$ esetén

$$\mathcal{L}_{n,r} = \sum_{k=0}^{n} \ell_r(n,k),$$

ami tehát a $K_{n,n+r-1}$ teljes páros gráf Hosoya-indexét adja meg.

Az $\ell_r(n,k)$ számokat együtthatókként használva, $n \geq 0$ és $r \geq 1$ esetén értelmezhető az

$$\mathcal{L}_{n,r}(x) = \sum_{k=0}^{n} \ell_r(n,k)x^k$$

polinom is, ami pedig a $K_{n,n+r-1}$ teljes páros gráf párosítási generátorpolinomjának reciprok polinomja.

Az alábbi tétel adja meg a kapcsolatot a fent definiált számok és polinomok, valamint az r-Lah-számok, az összegzett r-Lah-számok és az r-Lah-polinomok között.

4.5. Tétel. ([58, Theorem 2.1])
Legyen $0 \leq k \leq n$ és $r \geq 1$. Ekkor

$$\ell_{2r}(n,k) = \left\lfloor {n \atop k} \right\rfloor_r, \quad \mathcal{L}_{n,2r} = L_{n,r}, \quad \mathcal{L}_{n,2r}(x) = L_{n,r}(x).$$

Megjegyzés. A tétel azt mutatja, hogy ezzel a gráfelméleti interpretációval az r-Lah-számok, az összegzett r-Lah-számok és az r-Lah-polinomok félegész r paraméterek esetén is értelmezhetők.

Erre a tételre öt bizonyítást adunk, melyek mindegyikét csak az első állításra végezzük el, hiszen abból már következik a másik két összefüggés is. Az első négy bizonyítás az $\ell_r(n,k)$ számok tulajdonságain (két különböző rekurzión, az eltolt emelkedő és süllyedő faktoriálisok közötti polinomos azonosságon és egy explicit formulán) múlik. Az ötödik bizonyítás ugyan a leghosszabb, de egy érdekes bijektív megfeleltetésen alapul.

1. Bizonyítás. A $K_{n+1,n+r}$ teljes páros gráfban az $n-k+1$ elemű párosítások száma egyrészt $\ell_r(n+1,k)$.

Másképpen, legyen A és B a gráf két csúcsosztálya, $v \in A$ és $w \in B$ a gráf két csúcsa. Ha v és w is párosítatlan, akkor az $n-k+1$ elemű párosítás valójában $K_{n,n+r-1}$-beli, így számuk $\ell_r(n,k-1)$. Ha v-nek van párja, akkor az $(n+r)$-féle lehet, ezután a v és párja törlésével adódó $K_{n,n+r-1}$ gráfban kell $n-k$ elemű párosítást keresni, ami $\ell_r(n,k)$ módon tehető meg. Végül, ha v-nek nincs párja, de w-nek van, akkor először a v és w törlésével kapható $K_{n,n+r-1}$ gráfban veszünk $n-k$ elemű párosítást, majd w párjának kiválasztása a még párosítatlan A-beli csúcsok közül k-féleképpen történhet, így az ilyen esetek száma $k\ell_r(n,k)$.

A kétféleképpen kapott eredmény alapján $1 \leq k \leq n$ és $r \geq 1$ esetén

$$\ell_r(n+1,k) = \ell_r(n,k-1) + (n+k+r)\ell_r(n,k).$$

Ezt a 2.3. tétellel összehasonlítva kapjuk az állítást, figyelembe véve az $\ell_{2r}(n,0) = (2r)^{\overline{n}} = \left\lfloor {n \atop 0} \right\rfloor_r$ és az $\ell_{2r}(n,n) = 1 = \left\lfloor {n \atop n} \right\rfloor_r$ speciális értékeket is. $\square$

2. Bizonyítás. Ismét a $K_{n+1,n+r}$ teljes páros gráf $n-k+1$ elemű párosításait számoljuk össze. Legyen A és B a gráf két csúcsosztálya, valamint $v \in A$ és $w \in B$ két csúcs. Mint ahogyan azt már az előző bizonyításban is láttuk, $\ell_r(n,k-1)$ olyan párosítás van, ahol egyik kiválasztott csúcsnak sincs párja, és $(n+r)\ell_r(n,k)$ a száma azoknak a párosításoknak, ahol v-nek van párja. Ha w párosított, akkor a párja $(n+1)$-féleképpen választható, majd w és párja törlése után $K_{n,n+r-1}$-ben kell $n-k$ elemű párosítást keresni, ami $\ell_r(n,k)$-féle módon tehető meg. Ekkor azonban kétszer számoltuk azokat az eseteket, ahol v-nek és w-nek is van párja, így ezek számát le kell vonnunk.

Nyilvánvalóan $\ell_r(n,k)$ azoknak az $n-k+1$ elemű párosításoknak a száma, melyekben v párja w. Ha mindkét csúcs párosított, de nem egymás párjai, akkor v párja $(n+r-1)$-féle, w párja n-féle lehet. Ehhez kell még $n-k-1$ elemű párosítást választani a v, w és párjaik törlésével kapható $K_{n-1,n+r-2}$ gráfban. Így az ilyen kivonandó esetek száma $n(n+r-1)\ell_r(n-1,k)$.

A fentiekből következik, hogy $n \geq 2$, $1 \leq k \leq n-1$ és $r \geq 1$ esetén

$$\ell_r(n+1,k) = \ell_r(n,k-1) + (2n+r)\ell_r(n,k) - n(n+r-1)\ell_r(n-1,k).$$

Ebből és a 2.4. tételből, az $\ell_{2r}(n,0) = (2r)^{\overline{n}} = \left\lfloor {n \atop 0} \right\rfloor_r$, $\ell_{2r}(n,n-1) = n(n+2r-1) = \left\lfloor {n \atop n-1} \right\rfloor_r$ és $\ell_{2r}(n,n) = 1 = \left\lfloor {n \atop n} \right\rfloor_r$ speciális értékeket felhasználva, következik a tétel állítása. $\square$

3. Bizonyítás. Feltehetjük, hogy $n \geq 1$. Tekintsük a $K_{n,n+r-1}$ teljes páros gráfot A és B csúcsosztályokkal. Bővítsük ki B-t m darab új csúccsal $(m \geq n)$. Ebben a kiegészített $K_{n,m+n+r-1}$ teljes páros gráfban az A-t lefogó párosítások száma $(m+n+r-1)^{\underline{n}} = (m+r)^{\overline{n}}$.

Ezeket másképpen is összeszámoljuk. Jelölje k azon A-beli csúcsok számát, amelyeknek valamelyik új csúcs a párja $(k = 0, \ldots, n)$. Ekkor először az eredeti gráfban veszünk egy $n-k$ elemű párosítást, majd a kimaradó k darab A-beli csúcs párjait választjuk ki az m darab új csúcs közül. Ezek szerint rögzített k esetén $\ell_r(n,k)m^{\underline{k}}$ a lehetőségek száma.

Így $(m+r)^{\overline{n}} = \sum\limits_{k=0}^{n} \ell_r(n,k)m^{\underline{k}}$ teljesül minden $m \geq n$ esetén, amiből következik, hogy ha $n \geq 0$ és $r \geq 1$, akkor

$$(x+r)^{\overline{n}} = \sum_{k=0}^{n} \ell_r(n,k)x^{\underline{k}}.$$

A tétel állítása a fentiek és a 2.6. tétel összevetéséből következik. $\square$

4. Bizonyítás. Feltehető, hogy $n \geq 1$. Legyenek a $K_{n,n+r-1}$ teljes páros gráf csúcsosztályai A és B. Ahhoz, hogy meghatározzuk az $n-k$ elemű párosítások számát ebben a gráfban, először kiválasztjuk az $n-k$ darab B-beli párosított csúcsot, majd azok párjait A-ból, így a lehetőségek száma $0 \leq k \leq n$ és $r \geq 1$ esetén

$$\ell_r(n,k) = \binom{n+r-1}{n-k} n^{\underline{n-k}} = \frac{n!}{k!}\binom{n+r-1}{k+r-1}.$$

Ebből és a 2.10. tételből adódik az állítás. $\square$

Végül, de nem utolsósorban megadunk egy bizonyítást, amely közvetlen, bijektív megfeleltetésen alapul.

5. Bizonyítás. Legyen $X = \{x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_r\}$ egy $n + r$ elemű halmaz, melyben $y_1, \dots, y_r$ kitüntetett elemek. Továbbá, tekintsük a $K_{n,n+2r-1}$ teljes páros gráfot $A = \{x_1, \dots, x_n\}$ és $B = \{\overleftarrow{y_1}, \overrightarrow{y_1}, \dots, \overleftarrow{y_r}, \overrightarrow{y_r}, 1, \dots, n-1\}$ csúcsosztályokkal. Megadunk egy bijektív megfeleltetést az X halmaz $k + r$ darab rendezett osztályba való olyan osztályozásai, ahol az r kitüntetett elem különböző rendezett osztályba kerül, valamint a $K_{n,n+2r-1}$ teljes páros gráf $n - k$ elemű párosításai között.

Válasszuk ki X egy rendezett osztályokba való osztályozását, ahol a rendezett osztályok száma $k + r$, és az r kitüntetett elem különböző rendezett osztályban van. Először a kitüntetett elemek rendezett osztályait írjuk le $y_1, \dots, y_r$ sorrendben, majd a többi rendezett osztályt az első elemük sorszáma szerinti növekvő sorrendben.

Ha valamely x_i egy kitüntetett elemet nem tartalmazó rendezett osztály első eleme, akkor az $x_i \in A$ csúcs legyen párosítatlan. Ha x_i az y_j kitüntetett elem rendezett osztályának első eleme, akkor $x_i \in A$ párja $\overleftarrow{y_j}$, míg ha x_i közvetlenül y_j után következik annak rendezett osztályában, akkor $x_i \in A$ párja $\overrightarrow{y_j}$. Ha y_j rendezett osztályában nem áll y_j előtt/mögött más elem, akkor $\overleftarrow{y_j}/\overrightarrow{y_j}$ párosítatlan. Minden más x_i elem esetén az $x_i \in A$ csúcs párja az a B-beli csúcs lesz, ahány nemkitüntetett elem áll x_i előtt a saját vagy korábbi rendezett osztályokban.

Így nyilván párosítást kapunk a $K_{n,n+2r-1}$ gráfban. Mivel k darab A-beli párosítatlan csúcs van, ami a kitüntetett elemet nem tartalmazó rendezett osztályok száma, így a kapott párosítás $n - k$ elemű.

Ahhoz, hogy megmutassuk, hogy a fenti hozzárendelés valóban bijektív, megadjuk, hogyan konstruálhatjuk meg egy párosításból a rendezett osztályokba való osztályozást. Válasszunk ki egy $n-k$ elemű párosítást a $K_{n,n+2r-1}$ gráfban. Először tegyük $y_1, \dots, y_r$-et ebben a sorrendben különböző rendezett osztályokba. Ha $\overleftarrow{y_i}/\overrightarrow{y_i}$ párosított (ami azt jelenti, hogy van legalább egy nemkitüntetett elem y_i előtt/mögött a rendezett osztályában), akkor a párját y_i elé/mögé helyezzük ebben a rendezett osztályban, és ez az elem lesz a rendezett osztály első eleme/az y_i-t közvetlenül követő elem. Egy párosítatlan A-beli csúcs esetén új rendezett osztályt nyitunk, melybe betesszük ezt az elemet az első helyre. Ezek a rendezett osztályok a fenti rendezett osztályok mögött állnak, a párosítatlan csúcsok sorszáma szerinti növekvő sorrendbe rendezve. Tekintsük végül az $1, \ldots, n-1 \in B$ csúcsokat ebben a sorrendben. Ha valamely j párosított, akkor a párját közvetlenül a már elhelyezett j-edik nemkitüntetett elem mögé helyezzük.

Ez az eljárás az X halmaz egy rendezett osztályokba való osztályozását adja, ahol $y_1, \ldots, y_r$ nyilván különböző rendezett osztályba kerül. Mivel A-ban k darab párosítatlan csúcs van, ezért a kitüntetett elemet nem tartalmazó rendezett osztályok száma k, így az összes rendezett osztályoké $k + r$. □

Megjegyzés. Az utolsó bizonyításban konstruált megfeleltetést az alábbi példával szemléltetjük. Legyen $n = 11$, $k = 2$ és $r = 3$. Ekkor az y_1, y_2, y_3 kitüntetett elemekkel rendelkező 14 elemű $\{x_1, \ldots, x_{11}, y_1, y_2, y_3\}$ halmaz 5 darab rendezett osztályba való

$$\{(x_8, x_5, y_1), (x_6, y_2, x_2, x_{11}, x_9), (y_3, x_4), (x_7), (x_{10}, x_1, x_3)\}$$

osztályozása megfelel az

$$\{\{x_8, \overleftarrow{y_1}\}, \{x_6, \overleftarrow{y_2}\}, \{x_2, \overrightarrow{y_2}\}, \{x_4, \overrightarrow{y_3}\}, \{x_5, 1\},$$
$$\{x_{11}, 4\}, \{x_9, 5\}, \{x_1, 9\}, \{x_3, 10\}\}$$

9 elemű párosításnak a $K_{11,16}$ teljes páros gráfban, melynek csúcsosztályai $A = \{x_1, \ldots, x_{11}\}$ és $B = \{\overleftarrow{y_1}, \overrightarrow{y_1}, \overleftarrow{y_2}, \overrightarrow{y_2}, \overleftarrow{y_3}, \overrightarrow{y_3}, 1, \ldots, 10\}$.

A következőkben az $\ell_r(n, k)$ számok néhány további tulajdonságát ismertetjük.

A gráfelméleti értelmezés segítségével egy újabb bizonyítást tudunk adni a 2.8. tételre.

4.6. Tétel. ([58, Proposition 4.1])
Ha $0 \le k \le n$ és $0 \le s < r$, akkor

$$\ell_r(n, k) = \sum_{j=k}^{n} \ell_{r-s}(n, j) \binom{j}{k} s^{\underline{j-k}}.$$

Bizonyítás. Feltehetjük, hogy $n \geq 1$. Az $n-k$ elemű párosításokat számoljuk össze a $K_{n,n+r-1}$ teljes páros gráfban, melynek csúcsosztályai A és B, továbbá legyen C egy s elemű részhalmaza B-nek.

Jelölje $j-k$ azoknak az A-beli párosított csúcsoknak a számát, melyek párja C-beli ($j = k, \ldots, n$). Egy ilyen párosításhoz először keresnünk kell egy $n-j$ elemű párosítást az A és $B \setminus C$ csúcsosztályokkal rendelkező $K_{n,n+r-s-1}$ gráfban, majd ki kell választanunk a $j-k$ darab további párosított csúcsot a még párosítatlan j darab A-beli csúcs közül, végül pedig ezek párjait C-ből. Mindezek szerint rögzített j esetén $\ell_{r-s}(n,j)\binom{j}{j-k}s^{\underline{j-k}}$ a lehetőségek száma. $\square$

Most négy olyan rekurziót adunk meg, melyeknek az r-Lah-számokra vonatkozóan értelemszerűen nincsenek megfelelőik.

4.7. Tétel. ([58, Proposition 4.2])

1. *Ha* $1 \leq k \leq n$ *és* $r \geq 1$, *akkor*

$$\ell_r(n+1,k) = \ell_{r+1}(n,k-1) + (n+r)\ell_r(n,k),$$

$$\mathcal{L}_{n+1,r} = \mathcal{L}_{n,r+1} + (n+r)\mathcal{L}_{n,r},$$

$$\mathcal{L}_{n+1,r}(x) = x\mathcal{L}_{n,r+1}(x) + (n+r)\mathcal{L}_{n,r}(x).$$

2. *Ha* $1 \leq k \leq n$ *és* $r \geq 1$, *akkor*

$$\ell_r(n+1,k) = \ell_{r+1}(n,k-1) + (k+r)\ell_{r+1}(n,k),$$

$$\mathcal{L}_{n+1,r}(x) = (x+r)\mathcal{L}_{n,r+1}(x) + x\mathcal{L}'_{n,r+1}(x).$$

3. *Ha* $0 \leq k \leq n$ *és* $r \geq 2$, *akkor*

$$\ell_r(n+1,k) = \ell_{r-1}(n+1,k) + (n+1)\ell_r(n,k),$$

$$\mathcal{L}_{n+1,r} = \mathcal{L}_{n+1,r-1} + (n+1)\mathcal{L}_{n,r},$$

$$\mathcal{L}_{n+1,r}(x) = \mathcal{L}_{n+1,r-1}(x) + (n+1)\mathcal{L}_{n,r}(x).$$

4. Ha $0 \leq k \leq n$ és $r \geq 2$, akkor

$$\ell_r(n+1,k) = \ell_{r-1}(n+1,k) + (k+1)\ell_{r-1}(n+1,k+1),$$

$$\mathcal{L}_{n+1,r}(x) = \mathcal{L}_{n+1,r-1}(x) + \mathcal{L}'_{n+1,r-1}(x).$$

Bizonyítás. Csak az utolsó állítás első egyenlőségének bizonyítását vázoljuk, a többi formula hasonló gondolatmenettel igazolható.

A $K_{n+1,n+r}$ teljes páros gráfban számoljuk össze az $n-k+1$ elemű párosításokat. Legyenek a gráf csúcsosztályai A és B, $w \in B$ pedig egy csúcs. Ha w párosítatlan, akkor valójában a törlésével adódó $K_{n+1,n+r-1}$ gráfban kell egy $n-k+1$ elemű párosítást keresnünk. Ha pedig w-nek van párja, akkor először egy $n-k$ elemű párosítást választunk a $K_{n+1,n+r-1}$ gráfban, majd a $k+1$ darab párosítatlan A-beli csúcs közül kiválasztjuk w párját. □

Megjegyzés. Megemlítjük, hogy a 4.5. tétel 1. bizonyításában szereplő összefüggést megkaphatjuk a 4.7. tétel első és utolsó állítását alkalmazva is.

A 3.11. tétel legfontosabb állítására a 4.5. tétel segítségével új bizonyítást tudunk adni.

4.8. Tétel. ([58, Proposition 4.4])
Ha $n, r \geq 1$, akkor $\mathcal{L}_{n,r}(x)$ minden gyöke negatív valós szám.

Bizonyítás. Egy gráf párosítási generátorpolinomjának gyökei negatív valós számok (lásd például [40]), amiből következik, hogy ez igaz a reciprok polinomra, így speciálisan $\mathcal{L}_{n,r}(x)$-re is. □

Megjegyezzük, hogy M. Sebaoui, D. Laissaoui, G. Guettai és M. Rahmani [69] a 2.10. tételben található explicit formula megfelelő módosításával vezették be a félegész r paraméterhez tartozó r-Lah-számokat, valamint a 3.11. tétel bizonyításában látott gondolatmenettel igazolták, hogy a hozzájuk tartozó r-Lah-polinomok gyökei valósak.

Ismert, hogy bizonyos azonos elemszámú csúcsosztályokkal rendelkező páros gráfokban a másodfajú Stirling-számok adják meg a párosítások számát (ez szerepel például Lovász L. feladatgyűjteményében [39, Problem 4.31], ahol a megoldás tranzitív turnamentekben lévő Hamilton-utak vizsgálatán alapul). Megjegyezzük, hogy ez az összefüggés Lovász L. és M. D. Plummer könyvében [40] is felbukkan, de hibásan.

A 2. fejezetben már említettük, hogy a másodfajú r-Stirling-számoknak több értelmezése is ismert. Most egy gráfelméleti interpretációt adunk meg, amely általánosítja az imént említett eredményt, valamint hasonló az r-Lah-számokra igazolt 4.5. tételhez, bár a bijektív megfeleltetés konstrukciója itt egyszerűbb.

Legyen a $G_{n,n+r-1}$ páros gráf az a feszítő részgráfja $K_{n,n+r-1}$-nek, melynek csúcsosztályai $A = \{v_{r+1}, \ldots, v_{n+r}\}$ és $B = \{w_1, \ldots, w_{n+r-1}\}$, valamint v_i és w_j pontosan akkor szomszédosak, ha $i > j$ ($i = r+1, \ldots, n+r$ és $j = 1, \ldots, n+r-1$).

4.9. Tétel. ([58, Proposition 5.1])
Ha $0 \leq k \leq n$ és $r \geq 1$, akkor a $G_{n,n+r-1}$ gráf $n-k$ elemű párosításainak száma $\left\{ {n \atop k} \right\}_r$, összes párosításainak száma pedig $B_{n,r}$.

Bizonyítás. A tétel bizonyításához bijektív megfeleltetést adunk meg az $n+r$ elemű $X = \{x_1, \ldots, x_{n+r}\}$ halmaz $k+r$ darab osztályba való olyan osztályozásai, ahol az $x_1, \ldots, x_r$ kitüntetett elemek különböző osztályokba kerülnek, valamint a $G_{n,n+r-1}$ gráf $n-k$ elemű párosításai között.

Válasszuk ki X egy olyan osztályozását, ahol az osztályok száma $k+r$, és az r kitüntetett elem különböző osztályban van. Minden osztályban az elemeket sorszámuk szerinti növekvő sorrendben soroljuk fel. Ha egy osztályban x_i közvetlenül x_j mögött áll ($i > j$), akkor a $\{v_i, w_j\}$ élt hozzávesszük a párosításhoz. Itt $r+1 \leq i \leq n+r$, hiszen két kitüntetett elem nem lehet ugyanabban az osztályban.

Az A-beli párosítatlan csúcsok száma k, ugyanis ennyi osztály van, amely nem tartalmaz kitüntetett elemet. Továbbá v_i-nek pontosan akkor nincs párja, ha az x_i nemkitüntetett elem első helyen áll az osztályában. Ez azt jelenti, hogy a kiválasztott élek egy $n-k$ elemű párosítást alkotnak.

Most megadjuk, hogy egy $n-k$ elemű párosításból milyen módon kaphatjuk meg a megfelelő osztályozást. A B csúcsosztály elemeit sorszámuk szerinti növekvő sorrendben tekintjük. Ha a w_j csúcs párja v_i, és x_j-t még nem írtuk le, akkor új osztályt nyitunk, melynek első két eleme x_j és x_i. Ha w_j párja v_i, és x_j már szerepel valamelyik osztályban, akkor x_i-t x_j mögé írjuk. Ha w_j párosítatlan, és x_j-t már leírtuk, akkor lezárjuk ezt az osztályt. Ha w_j párosítatlan, és x_j-t még nem tüntettük fel, akkor x_j egyelemű osztályt alkot. Végül, ha valamikor x_{n+r}-et leírjuk, akkor az osztályát lezárjuk, egyébként egyelemű osztályt alkot.

A $G_{n,n+r-1}$ gráf definíciója szerint így az X halmaz olyan osztályozásához jutunk, ahol az $x_1, \dots, x_r$ kitüntetett elemek különböző osztályokba kerülnek. Az osztályok száma $k + r$, ami éppen eggyel több a B-beli párosítatlan csúcsok számánál (x_{n+r} miatt). $\square$

Megjegyzés. Ismét egy példával illusztráljuk a bizonyításban megadott leképezést. Legyen $n = 10$, $k = 2$ és $r = 3$. Ekkor az x_1, x_2, x_3 kitüntetett elemekkel rendelkező 13 elemű $\{x_1, \dots, x_{13}\}$ halmaz 5 darab osztályba való

$$\{\{x_1, x_8, x_{11}\}, \{x_2, x_5, x_9, x_{12}\}, \{x_3, x_7\}, \{x_4, x_6, x_{13}\}, \{x_{10}\}\}$$

osztályozásának a

$$\begin{aligned}\{\{v_8, w_1\}, \{v_{11}, w_8\}, \{v_5, w_2\}, \{v_9, w_5\},& \\ \{v_{12}, w_9\}, \{v_7, w_3\}, \{v_6, w_4\}, \{v_{13}, w_6\}\}&\end{aligned}$$

8 elemű párosítás felel meg a $G_{10,12}$ páros gráfban, melynek csúcsosztályai $A = \{v_4, \dots, v_{13}\}$ és $B = \{w_1, \dots, w_{12}\}$.

5. Az r-Fubini–Lah-számok és -polinomok

Ebben a fejezetben a Fubini-számok egy olyan változatával foglalkozunk, ahol nemcsak az osztályozás, hanem az osztályok is rendezettek, és r kitüntetett elem különböző rendezett osztályba kerül. Az ezekkel a módosításokkal kapott számokat r-Fubini–Lah-számoknak nevezzük. Bevezetjük továbbá a kapcsolódó r-Fubini–Lah-polinomokat is.

5.1. A Fubini-számok

Egy n elemű halmaz rendezett osztályozásainak a számát az F_n n-edik Fubini-szám adja meg. A másodfajú Stirling-számok definíciójából következik, hogy $F_n = \sum_{k=0}^{n} k!\left\{ {n \atop k} \right\}$ $(n \geq 0)$. Ezek a számok először A. Cayley [13] cikkében jelentek meg, aki bizonyos fák összeszámlálása kapcsán jutott el hozzájuk. R. D. James [31] cikkében számelméleti interpretációval találkozhatunk, négyzetmentes egészek rendezett faktorizációihoz kapcsolódóan. O. A. Gross [23], I. J. Good [22] és S. M. Tanny [78] különböző, de ekvivalens kombinatorikus definíciókat adtak meg a Fubini-számokra. Ha egy n elemű halmaz rendezett osztályozásait vagy egy verseny n indulójának olyan rangsorolásait számoljuk, ahol holtverseny is meg van engedve, az n-edik Fubini-számhoz jutunk. Az említett szerzők többek között rekurziót, Dobiński-típusú formulát igazoltak a Fubini-számokra, és megadták a sorozatuk exponenciális generátorfüggvényét. Gross ezenfelül megemlített még egy további geometriai interpretációt. Mindezeken túl, Tanny értelmezte az $F_n(x) = \sum_{k=0}^{n} k!\left\{ {n \atop k} \right\} x^k$ $(n \geq 0)$ Fubini-polinomokat is. Megjegyezzük, hogy Mező I. és Nyul G. [49] bevezették és vizsgálták az $F_{n,r} = \sum_{k=0}^{n} (k+r)!\left\{ {n \atop k} \right\}_r$ $(n, r \geq 0)$ r-Fubini-számokat és az $F_{n,r}(x) = \sum_{k=0}^{n} (k+r)!\left\{ {n \atop k} \right\}_r x^k$ $(n, r \geq 0)$ r-Fubini-polinomokat, amiknek az osztályok elemszámára előírt feltételek melletti változatával Bényi B., M. Méndez és J. L. Ramirez [7] foglalkoztak. Ezen kívül Kereskényi-Balogh Zs. és Nyul G. [34] gráfelméleti általánosítást adtak meg a Fubini-számokra és -polinomokra.

5.2. Az r-Fubini–Lah-számok és -polinomok tulajdonságai

Ebben az alfejezetben definiáljuk és vizsgáljuk az r-Fubini–Lah-számokat és -polinomokat. A bizonyítások egy részét csak az r-Fubini–Lah-polinomokra adjuk meg, ugyanis $x = 1$ helyettesítésével általában azonnal adódik a számokra vonatkozó összefüggés is. Megadunk két rekurziót, Dobiński-típusú formulát, meghatározzuk az r-Fubini–Lah-számok és -polinomok sorozatának exponenciális generátorfüggvényét, végül kapcsolatot írunk le az r-Fubini–Lah-számok és -polinomok, valamint az r-Fubini-számok és -polinomok között.

5.1. Definíció. *Legyenek $n, r \geq 0$ egész számok, nem mindkettő 0. Jelölje $FL_{n,r}$ egy $n+r$ elemű halmaz rendezett osztályokba való olyan rendezett osztályozásainak a számát, ahol r kitüntetett elem különböző rendezett osztályba kerül. Legyen továbbá $FL_{0,0} = 1$. Ekkor $FL_{n,r}$-et az n-edik **r-Fubini–Lah-szám**nak nevezzük.*

Megjegyzés. A definícióból rögtön látható, hogy ha $n, r \geq 0$, akkor

$$FL_{n,r} = \sum_{j=0}^{n} (j+r)! \left\lfloor {n \atop j} \right\rfloor_r,$$

amiből a 2.16. tétel alapján adódik, hogy

$$(n+r)! = \sum_{j=0}^{n} (-1)^{n-j} \left\lfloor {n \atop j} \right\rfloor_r FL_{j,r}$$

is teljesül.

Ezekhez a számokhoz kapcsolódóan bevezetjük az r-Fubini–Lah-polinomokat is.

5.2. Definíció. *Legyen $n, r \geq 0$. Ekkor az*

$$FL_{n,r}(x) = \sum_{j=0}^{n} (j+r)! \left\lfloor {n \atop j} \right\rfloor_r x^j$$

*polinomot az n-edik **r-Fubini–Lah-polinom**nak nevezzük.*

Megjegyzés. Speciálisan $FL_{n,r}(1) = FL_{n,r}$. Továbbá $FL_{n,r}(x)$ n-edfokú polinom, melynek főegyütthatója $(n+r)!\left\lfloor {n \atop n} \right\rfloor_r = (n+r)!$.

Megjegyzés. Az r-Fubini–Lah-polinomokra kombinatorikus értelmezés is adható az alábbi módon. Ha $n, r \geq 0$ nem mindkettő 0 és $c \geq 1$, akkor $FL_{n,r}(c)$ egy $n+r$ elemű halmaz rendezett osztályokba való rendezett osztályozásainak és a rendezett osztályok c színnel való színezéseinek a száma, ahol r kitüntetett elem különböző rendezett osztályba kerül, és a kitüntetett elemeket tartalmazó rendezett osztályok nem kapnak színt.

Ha $r = 0$ vagy 1, akkor a következő összefüggések adódnak.

5.3. Tétel.

1. *Ha* $n \geq 1$, *akkor* $FL_{n,0}(x) = n!x(x+1)^{n-1}$ *és* $FL_{n,0} = n!2^{n-1}$.
2. *Ha* $n \geq 0$, *akkor* $xFL_{n,1}(x) = FL_{n+1,0}(x)$ *és* $FL_{n,1} = FL_{n+1,0}$.

Bizonyítás. Mindkét állítás bizonyítása során legyen $c \geq 1$.

Az első egyenlőség igazolásához először sorba rendezzük az n elemet. Az első elem rendezett osztályát kiszínezzük a c darab szín valamelyikével. Minden további elem esetén $c+1$ lehetőség van: nyithat új rendezett osztályt, ami c-féle színt kaphat, valamint kerülhet az őt megelőző elem rendezett osztályába. Így az n elemű halmaz összes rendezett osztályokba való rendezett osztályozásainak és a rendezett osztályok c színnel való színezéseinek a száma $FL_{n,0}(c) = n!c(c+1)^{n-1}$.

A második állítás bizonyításához egy $n+1$ elemű halmaz rendezett osztályokba való rendezett osztályozásait és a rendezett osztályok c darab színnel való színezéseinek a számát kell tekinteni, ahol az egyetlen kitüntetett elem rendezett osztálya nem kap színt. Ha a kitüntetett elem rendezett osztályát is kiszíneznénk a c szín valamelyikével, akkor egy $n+1$ elemű halmaz összes rendezett osztályokba való rendezett osztályozásainak és a rendezett osztályok c színnel való színezéseinek a számát kapnánk, így $cFL_{n,1}(c) = FL_{n+1,0}(c)$. □

Az r-Fubini–Lah-számok és -polinomok teljesítik az alábbi formulákat, amelyek egyszerre rekurziók n-ben és r-ben.

5.4. Tétel. ([63, Theorem 1])
Legyen $n \geq 0$ és $r \geq 1$. Ekkor

$$FL_{n,r}(x) = r\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}(n-j+1)!FL_{j,r-1}(x) + x\sum_{j=0}^{n-1}\binom{n}{j}(n-j)!FL_{j,r}(x),$$

$$FL_{n,r} = r\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}(n-j+1)!FL_{j,r-1} + \sum_{j=0}^{n-1}\binom{n}{j}(n-j)!FL_{j,r}.$$

Bizonyítás. Legyen $c \geq 1$. Egy $n+r$ elemű halmaz rendezett osztályokba való rendezett osztályozásainak és a rendezett osztályok c darab színnel való színezéseinek a számát számoljuk, ahol r kitüntetett elem különböző rendezett osztályba kerül, és ezen elemek rendezett osztályait nem színezzük.

Tekintsük az első rendezett osztályt. Ha ez tartalmaz kitüntetett elemet, akkor az r-féle lehet. Legyen j azoknak a nemkitüntetett elemeknek a száma, melyek nem az első rendezett osztályban vannak ($j = 0, \ldots, n$). Ezeket az elemeket $\binom{n}{j}$-féleképpen választhatjuk ki, és a többi kitüntetett elemmel együtt $FL_{j,r-1}(c)$-féleképpen osztályozhatjuk rendezett módon rendezett osztályokba úgy, hogy az $r-1$ darab kitüntetett elem különböző rendezett osztályba kerüljön, és színezhetjük a kitüntetett elemeket nem tartalmazó rendezett osztályokat c színnel. A kimaradó $n-j$ darab nemkitüntetett elemet az első rendezett osztályba tesszük, ahol az elemek $(n-j+1)!$-féleképpen rendezhetők sorba. Így a lehetőségek száma rögzített j esetén $r\binom{n}{j}(n-j+1)!FL_{j,r-1}(c)$.

Hasonlóan, ha az első rendezett osztály nem tartalmaz kitüntetett elemet, akkor legyen j azoknak a nemkitüntetett elemeknek a száma, amelyek nem ebben a rendezett osztályban vannak ($j = 0, \ldots, n-1$). Ezeknek az elemeknek a kiválasztására $\binom{n}{j}$ lehetőségünk van, majd őket az r darab kitüntetett elemmel együtt $FL_{j,r}(c)$-féleképpen osztályozhatjuk rendezett módon rendezett osztályokba, és színezhetjük a kitüntetett elemeket nem tartalmazó rendezett osztályokat c színnel úgy, hogy a kitüntetett elemek különböző rendezett osztályokban legyenek. A kimaradó $n-j$ darab nemkitüntetett elem az első rendezett osztályba kerül, sorrendjük $(n-j)!$-féle lehet, viszont ezt a rendezett osztályt színezzük is a c szín valamelyikével. Tehát rögzített j esetén a lehetőségek száma $c\binom{n}{j}(n-j)!FL_{j,r}(c)$. □

Az r-Fubini–Lah-polinomokra egy másik rekurziót is megadunk, ahol már csak n a futó index, viszont ebben a formulában a polinom deriváltja is megjelenik.

5.5. Tétel. ([63, Theorem 2])
Legyen $n, r \geq 0$. Ekkor

$$FL_{n+1,r}(x) = ((r+1)x + n + 2r)\, FL_{n,r}(x) + (x^2 + x) FL'_{n,r}(x).$$

Bizonyítás. A 2.3. és a 2.2. tételeket felhasználva adódik, hogy

$$\begin{aligned}
FL_{n+1,r}(x) &= \sum_{k=0}^{n+1} (k+r)! \left\lfloor {n+1 \atop k} \right\rfloor_r x^k \\
&= r! \left\lfloor {n+1 \atop 0} \right\rfloor_r + \sum_{k=1}^{n} (k+r)! \left(\left\lfloor {n \atop k-1} \right\rfloor_r + (n+k+2r) \left\lfloor {n \atop k} \right\rfloor_r \right) x^k \\
&\quad + (n+r+1)! \left\lfloor {n+1 \atop n+1} \right\rfloor_r x^{n+1} \\
&= r!(2r)^{\overline{n+1}} + \sum_{k=0}^{n-1} (k+r+1)! \left\lfloor {n \atop k} \right\rfloor_r x^{k+1} + (n+2r) \sum_{k=1}^{n} (k+r)! \left\lfloor {n \atop k} \right\rfloor_r x^k \\
&\quad + \sum_{k=1}^{n} k(k+r)! \left\lfloor {n \atop k} \right\rfloor_r x^k + (n+r+1)! x^{n+1} \\
&= (n+2r) \sum_{k=0}^{n} (k+r)! \left\lfloor {n \atop k} \right\rfloor_r x^k + \sum_{k=0}^{n} (k+r+1)! \left\lfloor {n \atop k} \right\rfloor_r x^{k+1} \\
&\quad + x \sum_{k=1}^{n} k(k+r)! \left\lfloor {n \atop k} \right\rfloor_r x^{k-1} \\
&= (n+2r) FL_{n,r}(x) + (r+1)x \sum_{k=0}^{n} (k+r)! \left\lfloor {n \atop k} \right\rfloor_r x^k \\
&\quad + x^2 \sum_{k=1}^{n} k(k+r)! \left\lfloor {n \atop k} \right\rfloor_r x^{k-1} + x FL'_{n,r}(x) \\
&= (n+2r) FL_{n,r}(x) + (r+1)x FL_{n,r}(x) + x^2 FL'_{n,r}(x) + x FL'_{n,r}(x).
\end{aligned}$$

□

Az r-Fubini–Lah-számok és -polinomok teljesítik a következő Dobiński-típusú formulákat.

5.6. Tétel. ([63, Theorem 3])
Legyen $n, r \geq 0$. *Ekkor*

$$FL_{n,r}(x) = \frac{1}{(x+1)x^r} \sum_{j=0}^{\infty} (j+r)^{\overline{n}} j^{\underline{r}} \left(\frac{x}{x+1}\right)^j,$$

$$FL_{n,r} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(j+r)^{\overline{n}} j^{\underline{r}}}{2^{j+1}}.$$

Bizonyítás. I. Először a polinomokra vonatkozó állítást igazoljuk. A 2.6. tételt és a binomiális sort alkalmazva kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
\sum_{j=0}^{\infty} (j+r)^{\overline{n}} j^{\underline{r}} x^j &= \sum_{j=0}^{\infty} j^{\underline{r}} x^j \sum_{k=0}^{n} \left\lfloor {n \atop k} \right\rfloor_r (j-r)^{\underline{k}} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \left\lfloor {n \atop k} \right\rfloor_r \sum_{j=0}^{\infty} j^{\underline{k+r}} x^j = \sum_{k=0}^{n} (k+r)! \left\lfloor {n \atop k} \right\rfloor_r \sum_{j=k+r}^{\infty} \binom{j}{k+r} x^j \\
&= \sum_{k=0}^{n} (k+r)! \left\lfloor {n \atop k} \right\rfloor_r \sum_{j=0}^{\infty} \binom{j+k+r}{k+r} x^{j+k+r} \\
&= \sum_{k=0}^{n} (k+r)! \left\lfloor {n \atop k} \right\rfloor_r x^{k+r} \sum_{j=0}^{\infty} \binom{-k-r-1}{j} (-x)^j \\
&= \sum_{k=0}^{n} (k+r)! \left\lfloor {n \atop k} \right\rfloor_r x^{k+r} (1-x)^{-k-r-1} \\
&= \frac{1}{1-x} \left(\frac{x}{1-x}\right)^r \sum_{k=0}^{n} (k+r)! \left\lfloor {n \atop k} \right\rfloor_r \left(\frac{x}{1-x}\right)^k \\
&= \frac{1}{1-x} \left(\frac{x}{1-x}\right)^r FL_{n,r}\left(\frac{x}{1-x}\right).
\end{aligned}$$

Innen $\frac{x}{x+1}$ helyettesítésével adódik, hogy

$$(x+1)x^r FL_{n,r}(x) = \sum_{j=0}^{\infty} (j+r)^{\overline{n}} j^{\underline{r}} \left(\frac{x}{x+1}\right)^j.$$

II. A tétel állítását most az r-Fubini–Lah-számokra bizonyítjuk. Legyen ξ valószínűségi változó, melynek eloszlása

$$\mathsf{P}(\xi = j) = \frac{1}{2^{j+1}} \quad (j \geq 0).$$

Ekkor az

$$\mathsf{E}\left((\xi + r)^{\overline{n}} \xi^{\underline{r}}\right) = \sum_{j=0}^{\infty} (j + r)^{\overline{n}} j^{\underline{r}} \frac{1}{2^{j+1}}$$

várható érték a 2.6. tétel és $\mathsf{E}\xi^{\underline{n}} = n!$ alapján (lásd például [34]) azt is teljesíti, hogy

$$\mathsf{E}\left((\xi + r)^{\overline{n}} \xi^{\underline{r}}\right) = \mathsf{E}\left(\sum_{k=0}^{n} \left\lfloor \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\rfloor_r (\xi - r)^{\underline{k}} \xi^{\underline{r}}\right)$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \left\lfloor \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\rfloor_r \mathsf{E}\xi^{\underline{k+r}} = \sum_{k=0}^{n} \left\lfloor \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\rfloor_r (k + r)! = FL_{n,r}.$$

□

Most megadjuk az r-Fubini–Lah-számok és -polinomok sorozatának exponenciális generátorfüggvényét.

5.7. Tétel. ([63, Theorem 4])
Legyen $r \geq 0$. Ekkor az $(FL_{n,r}(x))_{n=0}^{\infty}$ sorozat exponenciális generátorfüggvénye

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{FL_{n,r}(x)}{n!} y^n = \frac{r!}{(1 - y)^{r-1}(1 - y - xy)^{r+1}},$$

míg az $(FL_{n,r})_{n=0}^{\infty}$ sorozat exponenciális generátorfüggvénye

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{FL_{n,r}}{n!} y^n = \frac{r!}{(1 - y)^{r-1}(1 - 2y)^{r+1}}.$$

1. Bizonyítás. I. Először a polinomokra vonatkozó állítást igazoljuk. A 2.13. tételt és a binomiális sort alkalmazva adódik, hogy

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{FL_{n,r}(x)}{n!} y^n = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} (k + r)! \left\lfloor \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\rfloor_r x^k \frac{1}{n!} y^n$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=0}^{\infty}(k+r)!x^k \sum_{n=k}^{\infty} \left\lfloor {n \atop k} \right\rfloor_r \frac{1}{n!} y^n = \sum_{k=0}^{\infty}(k+r)!x^k \frac{1}{k!}\left(\frac{y}{1-y}\right)^k \left(\frac{1}{1-y}\right)^{2r} \\
&= \frac{r!}{(1-y)^{2r}} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{k+r}{k} \left(\frac{xy}{1-y}\right)^k = \frac{r!}{(1-y)^{2r}} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-r-1}{k} \left(\frac{-xy}{1-y}\right)^k \\
&= \frac{r!}{(1-y)^{2r}} \left(1-\frac{xy}{1-y}\right)^{-r-1} = \frac{r!(1-y)^{r+1}}{(1-y)^{2r}(1-y-xy)^{r+1}}.
\end{aligned}$$

II. Az r-Fubini–Lah-számok sorozatának exponenciális generátorfüggvényét r szerinti indukcióval vezetjük le.

Ha $r=0$, akkor $FL_{n,0}=n!2^{n-1}$ $(n \geq 1)$ miatt

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{FL_{n,0}}{n!} y^n = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} 2^{n-1} y^n = 1 + \frac{y}{1-2y} = \frac{1-y}{1-2y}.$$

Tegyük fel, hogy $r \geq 1$, és hogy az állítás igaz $(r-1)$-re. Ekkor r-re $n \geq 0$ esetén az 5.4. tételből következik, hogy

$$2FL_{n,r} = r \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} (n-j+1)! FL_{j,r-1} + \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} (n-j)! FL_{j,r}.$$

Legyen $f_r(y)$ az $(FL_{n,r})_{n=0}^{\infty}$ sorozat exponenciális generátorfüggvénye. Ekkor a fenti összefüggésből adódik, hogy

$$2f_r(y) = r f_{r-1}(y) \frac{1}{(1-y)^2} + f_r(y) \frac{1}{1-y}.$$

Alkalmazva $f_{r-1}(y)$-ra az indukciós feltevést, némi számolás után kapjuk, hogy

$$f_r(y) = \frac{r!}{(1-y)^{r-1}(1-2y)^{r+1}}.$$

□

2. Bizonyítás. Az r-Fubini–Lah-számok esetén egy másik bizonyítást is adunk, ahol az ún. r-kompozíciós formulát [28, Theorem 2.1] használjuk. A

$$g_1(n) = (n+1)!, \quad g_2(n) = \begin{cases} 0, & \text{ha } n = 0 \\ n!, & \text{ha } n \geq 1 \end{cases}, \quad h(n) = (n+r)!$$

sorozatok exponenciális generátorfüggvényei rendre

$$G_1(y) = \frac{1}{(1-y)^2}, \quad G_2(y) = \frac{y}{1-y}, \quad H(y) = \frac{r!}{(1-y)^{r+1}}.$$

Ekkor $FL_{0,r} = 1$, és $n \geq 1$ esetén teljesül, hogy

$$FL_{n,r} = \sum g_1(|Y_1|) \dots g_1(|Y_r|)\, g_2(|Z_1|) \dots g_2(|Z_k|)\, h(k),$$

ahol az összegzést az $n+r$ elemű $\{a_1, \dots, a_r, b_1, \dots, b_n\}$ halmaz összes olyan $\{Y_1 \cup \{a_1\}, \dots, Y_r \cup \{a_r\}, Z_1, \dots, Z_k\}$ osztályozására végezzük el, ahol $a_1, \dots, a_r$ kitüntetett elemek.

Ekkor [28, Theorem 2.1] alapján az $(FL_{n,r})_{n=0}^{\infty}$ sorozat exponenciális generátorfüggvénye

$$(G_1(y))^r H(G_2(y)) = \frac{1}{(1-y)^{2r}} \cdot \frac{r!}{\left(1 - \frac{y}{1-y}\right)^{r+1}} = \frac{r!(1-y)^{r+1}}{(1-y)^{2r}(1-2y)^{r+1}}.$$

□

Végül megmutatjuk, hogy az r-Fubini–Lah-polinomok sorozata az r-Fubini-polinomok sorozatának elsőfajú r-Stirling-transzformáltja, és ugyanez a számokra is teljesül. Megjegyezzük, hogy ez a formula egy nagyon speciális esetben, a 0-Fubini–Lah-számok esetében megjelent R. Sprugnoli [76] cikkében.

5.8. Tétel. ([63, Theorem 5])
Legyen $n, r \geq 0$. Ekkor

$$FL_{n,r}(x) = \sum_{j=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix}_r F_{j,r}(x),$$

$$FL_{n,r} = \sum_{j=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix}_r F_{j,r}.$$

Bizonyítás. Legyen $c \geq 1$. Egy $n+r$ elemű halmaz rendezett osztályokba való rendezett osztályozásait és a kitüntetett elemet nem tartalmazó rendezett osztályok c színnel való színezéseit számoljuk, ahol r darab kitüntetett elem különböző rendezett osztályba kerül.

Az elemeket először $j+r$ darab páronként idegen ciklusba soroljuk ($j=0,\dots,n$) úgy, hogy az r darab kitüntetett elem különböző ciklusban legyen. Ez $\left[{n \atop j}\right]_r$-féleképpen tehető meg. Ezután a ciklusokat rendezett módon osztályozzuk úgy, hogy a kitüntetett elemet tartalmazó ciklusok különböző osztályokba kerüljenek, majd azokat az osztályokat, amelyekben nem szerepel kitüntetett elemet tartalmazó ciklus, kiszínezzük a c darab szín valamelyikével. Az ilyen rendezett osztályozások és színezések száma $F_{j,r}(c)$. Ha minden osztályban összeszorozzuk a ciklusokat, akkor az eredeti $n+r$ elemű halmaz egy rendezett osztályokba való rendezett osztályozását és a kitüntetett elemet nem tartalmazó rendezett osztályok c színnel való színezését kapjuk. Így a lehetőségek száma rögzített j esetén $\left[{n \atop j}\right]_r F_{j,r}(c)$. $\square$

Megjegyezzük, hogy az r-Fubini–Lah-számok egyfajta megszorított változata megjelenik Bényi B., M. Méndez és J. L. Ramirez [7] egy újabb és tőlünk független cikkében.

Összefoglaló

A leszámláló kombinatorikában alapvető fontosságúak a Stirling-számok. Az $\left[{n \atop k}\right]$ elsőfajú Stirling-szám azon S_n-beli permutációk számát adja meg, melyek k darab páronként idegen ciklus szorzataként állnak elő. Az $\left\{{n \atop k}\right\}$ másodfajú Stirling-szám pedig egy n elemű halmaz k darab osztályba való osztályozásainak a számával egyezik meg.

Ha a másodfajú Stirling-számok problémáját módosítjuk olyan módon, hogy az osztályokon belül számítson az elemek sorrendje, azaz az osztályok rendezettek legyenek, akkor az időnként harmadfajú Stirling-számoknak is nevezett $\left\lfloor{n \atop k}\right\rfloor$ Lah-számokhoz jutunk. Ezek a számok egy szlovén matematikusról, I. Lahról [37, 38] kapták a nevüket, ugyanis ő vezette be azokat az 1950-es évek közepén.

A Stirling-számoknak sokféle általánosítása és változata ismert, ezek közül számunkra a legjelentősebb az ún. r-általánosítás, melyet L. Carlitz [12], A. Z. Broder [11] és R. Merris [42] vezetett be. Az r-Stirling-számok esetén van r darab kitüntetett elem, melyeknek különböző ciklusokba, illetve osztályokba kell kerülniük. A 2.1. alfejezetben az elsőfajú és másodfajú r-Stirling-számok fogalmának ismertetése után három táblázatban foglaljuk össze a tulajdonságaikat. Ezek között vannak új összefüggések is.

A Lah-számok hasonló általánosítását korábban nem igazán vizsgálták. A 2.2. alfejezetben az r-Stirling-számok mintájára definiáljuk az r-Lah-számokat. Az $\left\lfloor{n \atop k}\right\rfloor_r$ r-Lah-szám egy $n{+}r$ elemű halmaz $k{+}r$ darab rendezett osztályba való olyan osztályozásainak a száma, ahol r kitüntetett elem különböző rendezett osztályba kerül. Ezekre a számokra megadunk többféle rekurziót, köztük egy függőleges rekurziót, egy polinomos azonosságot az eltolt emelkedő és süllyedő faktoriálisok között, egy binomiális konvolúciós és egy explicit formulát, valamint az r-Lah-számokat kétféleképpen is kifejezzük $(r{-}s)$-Lah-számok segítségével. Megmutatjuk, hogy rögzített felső paraméter esetén az r-Lah-számok sorozata szigorúan log-konkáv, és így unimodális, továbbá meg is határozzuk a sorozat maximumhelyeit. Rögzített alsó paraméter esetén megadjuk az r-Lah-számok sorozatának exponenciális generátorfüggvényét. Emellett kapcsolatokat írunk le az r-Stirling-számok és az r-Lah-számok között, valamint bizonyítjuk az r-Lah-számok általánosított önortogonalitását.

Végül igazolunk egy megfordítási tételt, ami komplex számsorozatok r-Lah-transzformáltjára, valamint inverz r-Lah-transzformáltjára vonatkozik.

Ha egy véges halmaz összes osztályozásait számoljuk össze, akkor a leszámláló kombinatorikában szintén nagy jelentőséggel bíró Bell-számokhoz jutunk. Ezek a számok a másodfajú Stirling-számok összegzésével adódnak rögzített felső paraméter esetén, azaz az n-edik Bell-szám $B_n = \sum_{k=0}^{n} \left\{ {n \atop k} \right\}$. Ezekhez kapcsolódóan értelmezhetőek a Bell-polinomok is, amelyeknek az együtthatói másodfajú Stirling-számok. A Bell-számok r-általánosításának bevezetése L. Carlitz [12] és Mező I. [43, 45] nevéhez fűződik, az r-Bell-polinomokat pedig Mező I. [43, 45] definiálta. A 3.1. alfejezetben ismertetjük az r-Bell-számok és az r-Bell-polinomok definícióját, majd egy táblázatban összefoglaljuk a legfontosabb tulajdonságaikat. Ez a táblázat is tartalmaz új eredményeket.

Az r-Bell-számokkal és -polinomokkal már sokan foglalkoztak, éppen ezért meglepő, hogy az r-Lah-számokból hasonló módon előállítható összegzett r-Lah-számokat még az $r = 0$ esetben is csak nagyon érintőlegesen, az r-Lah-polinomokat pedig egyáltalán nem vizsgálták. Ezt tesszük meg az értekezés 3.2. alfejezetében. Az $L_{n,r} = \sum_{k=0}^{n} \left\lfloor {n \atop k} \right\rfloor_r$ n-edik összegzett r-Lah-szám egy $n+r$ elemű halmaz összes rendezett osztályokba való olyan osztályozásainak a számát adja meg, ahol r kitüntetett elem különböző rendezett osztályba kerül, a hozzájuk kapcsolódó r-Lah-polinom pedig $L_{n,r}(x) = \sum_{k=0}^{n} \left\lfloor {n \atop k} \right\rfloor_r x^k$. A tulajdonságokat a számok és a polinomok esetére is megfogalmazzuk, a bizonyítást azonban többnyire elegendő csak a polinomokra elvégezni, ugyanis $L_{n,r}(1) = L_{n,r}$. Bizonyítunk rekurziókat, összefüggést az r-Lah-polinomok és az $(r-s)$-Lah-polinomok, valamint az összegzett r-Lah-számok és az összegzett $(r-s)$-Lah-számok között, továbbá Spivey- és Dobiński-típusú formulákat, illetve megadjuk az összegzett r-Lah-számok és az r-Lah-polinomok sorozatának exponenciális generátorfüggvényét is. Végül megmutatjuk, hogy az $\frac{r+s}{2}$-Lah-polinomok sorozata az s-Bell-polinomok sorozatának elsőfajú r-Stirling-transzformáltja, ha r és s azonos paritású.

A 3.3. alfejezetben az r-Lah-polinomok gyökeivel foglalkozunk. Először megmutatjuk, hogy minden gyökük egyszeres, valós és nempozitív. Ezt követően a Laguerre–Samuelson-egyenlőtlenség felhasználásával korlátot adunk a legkisebb gyök abszolút értékére, valamint numerikus számításokat is végzünk a legkisebb gyök valódi nagyságrendjének meghatározására. Ezeket a vizsgálatokat nemcsak az r-Lah-polinomokra, hanem általánosításaikra, az r-Dowling–Lah-polinomokra, emellett az r-Dowling-polinomokra (melyek az r-Bell-polinomok általánosításai) is elvégezzük. Mindezek alapján megfogalmazunk velük kapcsolatos sejtéseket is.

A gráfelmélet egyik érdekes kérdése, hogy egy gráfban hány párosítás található. Az összes párosítások számát a gráf Hosoya-indexének szokás hívni. A dolgozat 4. fejezetében különböző gráfok párosításainak összeszámlálásával foglalkozunk.

J. Alexander és P. Hearding [1] olyan gráfokat konstruáltak, melyekben a független csúcshalmazok száma olyan Lucas-sorozatok segítségével írható le, amelyek rekurziójában az első együttható nagyobb vagy egyenlő, mint a második. A kérdés, hogy ezt a korlátozó feltételt ki lehet-e küszöbölni, adta az ötletet olyan gráfcsaládok konstruálásához, melyek Hosoya-indexe Lucas-sorozatok segítségével kapható meg. Ezen eredményeinket a 4.2. alfejezetben ismertetjük.

Ezt követően a 4.3. alfejezetben először az r-Lah-számokra, az összegzett r-Lah-számokra és az r-Lah-polinomokra adunk meg gráfelméleti interpretációt, teljes páros gráfbeli párosítások összeszámlálásával kapcsolatban. Erre a tételünkre öt bizonyítást is adunk, melyek közül négy az r-Lah-számok tulajdonságain (két különböző rekurzión, az eltolt emelkedő és süllyedő faktoriálisok közötti polinomos összefüggésen és az explicit formulán) alapul, az ötödik pedig egy bijektív bizonyítás. Eredményünk lehetővé teszi, hogy ezeket a számokat és polinomokat félegész r paraméterek esetén is értelmezzük. A gráfelméleti megközelítés segítségével igazolunk néhány további tulajdonságot, valamint több korábbi állításra is új bizonyítást tudunk adni. A fejezet végén a másodfajú r-Stirling-számokra és az r-Bell-számokra mutatunk hasonló interpretációt bizonyos páros gráfok párosításainak számával összefüggésben.

Ha egy adott elemszámú véges halmaz rendezett osztályozásait számoljuk össze, akkor a Fubini-számokhoz jutunk. Ezek először A. Cayley [13] munkájában jelentek meg, később több különböző, de ekvivalens kombinatorikus definíciót adtak meg rájuk. Hozzájuk kapcsolódóan értelmezhetők a Fubini-polinomok is, melyeket S. M. Tanny [78] vezetett be. Az 5. fejezetben a Fubini-számok és -polinomok egy olyan változatával foglalkozunk, ahol nemcsak az osztályozás, hanem az osztályok is rendezettek, és r kitüntetett elem különböző rendezett osztályba kerül.

Az 5.2. alfejezetben értelmezzük az imént említett módosításokkal adódó $FL_{n,r} = \sum_{k=0}^{n} (k+r)! \left\lfloor {n \atop k} \right\rfloor_r$ r-Fubini–Lah-számokat és a kapcsolódó $FL_{n,r}(x) = \sum_{k=0}^{n} (k+r)! \left\lfloor {n \atop k} \right\rfloor_r x^k$ r-Fubini–Lah-polinomokat, valamint vizsgáljuk tulajdonságaikat. Megadunk rekurziókat és Dobiński-típusú formulákat, meghatározzuk sorozataik exponenciális generátorfüggvényét, továbbá igazoljuk azt is, hogy az r-Fubini–Lah-polinomok sorozata az r-Fubini-polinomok sorozatának elsőfajú r-Stirling-transzformáltja.

Summary

Stirling numbers are of basic importance in enumerative combinatorics. The Stirling number of the first kind $\left[{n \atop k}\right]$ is the number of those permutations in S_n, which are the product of k pairwise disjoint cycles, while the Stirling number of the second kind $\left\{{n \atop k}\right\}$ counts the number of partitions of an n-element set into k blocks.

If we modify the problem of the Stirling numbers of the second kind such that the order of the elements in the blocks matters, i.e., we have ordered blocks, then we arrive at the Lah numbers $\left\lfloor{n \atop k}\right\rfloor$, which are sometimes called Stirling numbers of the third kind. These numbers are named after a Slovenian mathematician, I. Lah [37, 38], since he introduced them in the middle 1950s.

Stirling numbers have several generalizations and variants. Among them, the so-called r-generalizations are the most important to us, which were introduced by L. Carlitz [12], A. Z. Broder [11] and R. Merris [42]. In case of r-Stirling numbers, we have r distinguished elements, which have to belong to distinct cycles or blocks. In Subsection 2.1, after the definitions of r-Stirling numbers of the first and second kind, we summarize their properties in three tables. They include new identities as well.

Similar generalization of Lah numbers was not deeply studied before. In Subsection 2.2, we define the r-generalization of Lah numbers. The r-Lah number $\left\lfloor{n \atop k}\right\rfloor_r$ counts the number of those partitions of an $(n+r)$-element set into $k+r$ ordered subsets, where r distinguished elements belong to distinct ordered blocks. We give several recurrences for these numbers, including a vertical recurrence, a polynomial identity between shifted rising and falling factorials, a binomial convolutional and an explicit formula, furthermore, we express the r-Lah numbers by $(r-s)$-Lah numbers in two different ways. We show that the sequence of r-Lah numbers with a fixed upper parameter is strictly log-concave and therefore unimodal, in addition we determine the maximum points of the sequence. For a fixed lower parameter, we derive the exponential generating function of the sequence of r-Lah numbers. Beside these, we describe connections between r-Stirling and r-Lah numbers, and we prove the generalized self-orthogonality of r-Lah numbers. Finally, we prove

an inversion theorem for the r-Lah transform and inverse r-Lah transform of complex number sequences.

If we count the total number of partitions of a finite set, then we arrive at the Bell numbers, which are also fundamental objects in enumerative combinatorics. They are sums of Stirling numbers of the second kind with a fixed upper parameter, more precisely, the nth Bell number is $B_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \left\{ {n \atop k} \right\}$. In connection with them, one can also define the Bell polynomials, whose coefficients are Stirling numbers of the second kind. The r-generalization of Bell numbers was introduced by L. Carlitz [12] and I. Mező [43, 45], and the r-Bell polynomials were defined by I. Mező [43, 45]. In Subsection 3.1, we recall the definitions of r-Bell numbers and r-Bell polynomials, thereafter we summarize their most important properties in a table. This table contains again some new results.

Although r-Bell numbers and polynomials are widely investigated, it is surprising that the summed r-Lah numbers, which can be defined similarly using r-Lah numbers, were studied only slightly even in the case $r = 0$, while the r-Lah polynomials were not treated before. We do this in Subsection 3.2. The nth summed r-Lah number $L_{n,r} = \sum\limits_{k=0}^{n} \left\lfloor {n \atop k} \right\rfloor_r$ counts the number of those partitions of an $(n+r)$-element set into ordered subsets, where r distinguished elements belong to distinct ordered blocks, and the related r-Lah polynomial is $L_{n,r}(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} \left\lfloor {n \atop k} \right\rfloor_r x^k$. We formulate the properties for both the numbers and polynomials, but in most cases it is enough to carry out the proofs only for the polynomials, since $L_{n,r}(1) = L_{n,r}$. We prove recurrences, a connection between r-Lah polynomials and $(r - s)$-Lah polynomials, as well as between summed r-Lah numbers and summed $(r - s)$-Lah numbers, moreover, Spivey and Dobiński type formulas, and we give the exponential generating functions of the sequences of summed r-Lah numbers and r-Lah polynomials. Finally, we prove that the sequence of $\frac{r+s}{2}$-Lah polynomials is the r-Stirling transform of the first kind of the sequence of s-Bell polynomials if r and s have the same parity.

In Subsection 3.3, we study the roots of r-Lah polynomials. First, we prove that all their roots are real, simple and non-positive. After that, applying the Laguerre–Samuelson inequality, we give a bound for the absolute value of the smallest root, and we perform numerical computations to determine the real magnitude of the smallest root. We do these investigations not only for the r-Lah polynomials, but also for their generalizations, the r-Dowling–Lah polynomials, and the r-Dowling polynomials (which are generalizations of r-Bell polynomials). Additionally, we formulate some conjectures based on our results.

The enumeration of matchings in a graph is an interesting question of graph theory. The total number of matchings is called the Hosoya index of a graph. In Section 4, we count the number of matchings in various graphs.

J. Alexander and P. Hearding [1] constructed graphs in which the number of independent vertex sets can be described by Lucas sequences with first coefficient greater than or equal to the second coefficient in their recurrences. The question, whether this restriction is possible to eliminate, gave us the idea to construct families of graphs whose Hosoya index can be given by Lucas sequences. We present these results in Subsection 4.2.

Thereafter, in Subsection 4.3, we give graph theoretical interpretation for r-Lah numbers, summed r-Lah numbers and r-Lah polynomials in connection with the enumeration of matchings in complete bipartite graphs. We present five proofs for this theorem, four of which are based on the properties of r-Lah numbers (two different recurrences, the polynomial identity between shifted rising and falling factorials and the explicit formula), while the fifth one is a bijective proof. Our result allows us to extend the notions of these numbers and polynomials for half-integer parameters r. Using this graph theoretical interpretation, we show some additional properties, and give new proofs for certain previously studied formulas. At the end of this section, we give a similar interpretation for r-Stirling numbers of the second kind and r-Bell numbers in connection with the number of matchings in certain bipartite graphs.

If we count the number of ordered partitions of a finite set with a given cardinality, then we arrive at the Fubini numbers. They appeared first in a paper of A. Cayley [13], later several other, but equivalent combinatorial definitions were given. In connection with them, Fubini polynomials can be defined, which was done by S. M. Tanny [78]. In Section 5, we study that variant of Fubini numbers and polynomials, where both the blocks and the partition itself are ordered, and r distinguished elements belong to distinct ordered blocks.

In Subsection 5.2, by the above mentioned modifications, we define the r-Fubini–Lah numbers $FL_{n,r} = \sum_{k=0}^{n} (k+r)! \left\lfloor {n \atop k} \right\rfloor_r$ and the related r-Fubini–Lah polynomials $FL_{n,r}(x) = \sum_{k=0}^{n} (k+r)! \left\lfloor {n \atop k} \right\rfloor_r x^k$, and we study their properties. We give recurrences and Dobiński type formulas, we determine the exponential generating function of their sequences, and we show that the sequence of r-Fubini–Lah polynomials is the r-Stirling transform of the first kind of the sequence of r-Fubini polynomials.

Irodalomjegyzék

[1] J. Alexander and P. Hearding, *A graph-theoretic encoding of Lucas sequences*, Fibonacci Quarterly **53** (2015), 237–240.

[2] H. Belbachir and A. Belkhir, *Cross recurrence relations for r-Lah numbers*, Ars Combinatoria **110** (2013), 199–203.

[3] H. Belbachir and I. E. Bousbaa, *Combinatorial identities for the r-Lah numbers*, Ars Combinatoria **115** (2014), 453–458.

[4] A. T. Benjamin, D. Gaebler and R. Gaebler, *A combinatorial approach to hyperharmonic numbers*, Integers **3** (2003), A15.

[5] M. Benoumhani, *On some numbers related to Whitney numbers of Dowling lattices*, Advances in Applied Mathematics **19** (1997), 106–116.

[6] M. Benoumhani, *Log-concavity of Whitney numbers of Dowling lattices*, Advances in Applied Mathematics **22** (1999), 186–189.

[7] B. Bényi, M. Méndez and J. L. Ramirez, *Generalized ordered set partitions*, Australasian Journal of Combinatorics **77** (2020), 157–179.

[8] N. L. Biggs, *The roots of combinatorics*, Historia Mathematica **6** (1979), 109–136.

[9] M. Bóna, Combinatorics of Permutations, CRC Press, 2012.

[10] M. Bóna and I. Mező, *Real zeros and partitions without singleton blocks*, European Journal of Combinatorics **51** (2016), 500–510.

[11] A. Z. Broder, *The r-Stirling numbers*, Discrete Mathematics **49** (1984), 241–259.

[12] L. Carlitz, *Weighted Stirling numbers of the first and second kind I*, Fibonacci Quarterly **18** (1980), 147–162.

[13] A. Cayley, *On the analytical forms called trees – Part II*, London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science **18** (1859), 374–378.

[14] G.-S. Cheon and J.-H. Jung, *r-Whitney numbers of Dowling lattices*, Discrete Mathematics **312** (2012), 2337–2348.

[15] C. B. Corcino, R. B. Corcino, I. Mező and J. L. Ramírez, *Some polynomials associated with the r-Whitney numbers*, Proceedings of the Indian Academy of Sciences, Mathematical Sciences **128** (2018), Article 27.

[16] R. B. Corcino, C. B. Corcino and R. Aldema, *Asymptotic normality of the (r,β)-Stirling numbers*, Ars Combinatoria **81** (2006), 81–96.

[17] G. Dobiński, *Summirung der Reihe $\sum \frac{n^m}{n!}$ für $m = 1, 2, 3, 4, 5, \ldots$*, Archiv der Mathematik und Physik **61** (1877), 333–336.

[18] T. A. Dowling, *A class of geometric lattices based on finite groups*, Journal of Combinatorial Theory, Series B **14** (1973), 61–86.

[19] B. S. El-Desouky and F. A. Shiha, *A q-analogue of $\bar{\alpha}$-Whitney numbers*, Applicable Analysis and Discrete Mathematics **12** (2018), 178–191.

[20] J. Engbers, D. Galvin and J. Hilyard, *Combinatorially interpreting generalized Stirling numbers*, European Journal of Combinatorics **43** (2015), 32–54.

[21] P. Flajolet and R. Sedgewick, Analytic Combinatorics, Cambridge University Press, 2009.

[22] I. J. Good, *The number of orderings of n candidates when ties are permitted*, Fibonacci Quarterly **13** (1975), 11–18.

[23] O. A. Gross, *Preferential arrangements*, American Mathematical Monthly **69** (1962), 4–8.

[24] E. Gyimesi, *The r-Dowling–Lah polynomials*, Mediterranean Journal of Mathematics, közlésre elfogadva.

[25] E. Gyimesi and G. Nyul, *A note on combinatorial subspaces and r-Stirling numbers*, Utilitas Mathematica **105** (2017), 137–139.

[26] E. Gyimesi and G. Nyul, *A comprehensive study of r-Dowling polynomials*, Aequationes Mathematicae **92** (2018), 515–527.

[27] E. Gyimesi and G. Nyul, *New combinatorial interpretations of r-Whitney and r-Whitney–Lah numbers*, Discrete Applied Mathematics **255** (2019), 222–233.

[28] E. Gyimesi and G. Nyul, *Associated r-Dowling numbers and some relatives*, Comptes Rendus Mathématique **359** (2021), 47–55.

[29] H. Hosoya, *Topological index. A newly proposed quantity characterizing the topological nature of structural isomers of saturated hydrocarbons*, Bulletin of the Chemical Society of Japan **44** (1971), 2332–2339.

[30] H. Hosoya, *Topological index and Fibonacci numbers with relation to chemistry*, Fibonacci Quarterly **11** (1973), 255–266.

[31] R. D. James, *The factors of a square-free integer*, Canadian Mathematical Bulletin **11** (1968), 733–735.

[32] J. Karamata, *Théorèmes sur la sommabilité exponentielle et d'autres sommabilités s'y rattachant*, Mathematica (Cluj) **9** (1935), 164–178.

[33] Zs. Kereskényi-Balogh and G. Nyul, *Stirling numbers of the second kind and Bell numbers for graphs*, Australasian Journal of Combinatorics **58** (2014), 264–274.

[34] Zs. Kereskényi-Balogh and G. Nyul, *Fubini numbers and polynomials of graphs*, Mediterranean Journal of Mathematics, közlésre elfogadva.

[35] D. E. Knuth, *Two notes on notation*, American Mathematical Monthly **99** (1992), 403–422.

[36] E. Laguerre, *Sur une méthode pour obtenir par approximation les racines d'une équation algébrique qui a toutes ses racines réelles*, Nouvelles Annales de Mathématiques **19** (1880), 161–171, 193–202.

[37] I. Lah, *A new kind of numbers and its application in the actuarial mathematics*, Boletim do Instituto dos Actuários Portugueses **9** (1954), 7–15.

[38] I. Lah, *Eine neue Art von Zahlen, ihre Eigenschaften und Anwendung in der mathematischen Statistik*, Mitteilungsblatt für Mathematische Statistik **7** (1955), 203–212.

[39] L. Lovász, Combinatorial Problems and Exercises, Elsevier, 1993.

[40] L. Lovász and M. D. Plummer, Matching Theory, North-Holland, 1986.

[41] T. Mansour and M. Schork, Commutation Relations, Normal Ordering, and Stirling Numbers, CRC Press, 2016.

[42] R. Merris, *The p-Stirling numbers*, Turkish Journal of Mathematics **24** (2000), 379–399.

[43] I. Mező, *On the maximum of r-Stirling numbers*, Advances in Applied Mathematics **41** (2008), 293–306.

[44] I. Mező, *A new formula for the Bernoulli polynomials*, Results in Mathematics **58** (2010), 329–335.

[45] I. Mező, *The r-Bell numbers*, Journal of Integer Sequences **14** (2011), Article 11.1.1.

[46] I. Mező, *The dual of Spivey's Bell number formula*, Journal of Integer Sequences **15** (2012), Article 12.2.4.

[47] I. Mező, Combinatorics and Number Theory of Counting Sequences, CRC Press, 2020.

[48] I. Mező and R. B. Corcino, *The estimation of the zeros of the Bell and r-Bell polynomials*, Applied Mathematics and Computation **250** (2015), 727–732.

[49] I. Mező and G. Nyul, *The r-Fubini and r-Eulerian numbers*, kézirat.

[50] I. Mező and J. L. Ramírez, *The linear algebra of the r-Whitney matrices*, Integral Transforms and Special Functions **26** (2015), 213–225.

[51] M. Mihoubi and H. Belbachir, *Linear recurrences for r-Bell polynomials*, Journal of Integer Sequences **17** (2014), Article 14.10.6.

[52] M. Mihoubi and M. Rahmani, *The partial r-Bell polynomials*, Afrika Matematika **28** (2017), 1167–1183.

[53] T. S. Motzkin, *Sorting numbers for cylinders and other classification numbers*, Proceedings of Symposia in Pure Mathematics **19** (1971), 167–176.

[54] N. Nielsen, Traité Élémentaire des Nombres de Bernoulli, Gauthier-Villars, 1923.

[55] G. Nyul and G. Rácz, *The r-Lah numbers*, Discrete Mathematics **338** (2015), 1660–1666.

[56] G. Nyul and G. Rácz, *Lucas sequences and the Hosoya index of graphs*, Fibonacci Quarterly **55** (2017), 340–342.

[57] G. Nyul and G. Rácz, *Sums of r-Lah numbers and r-Lah polynomials*, Ars Mathematica Contemporanea **18** (2020), 211–222.

[58] G. Nyul and G. Rácz, *Matchings in complete bipartite graphs and the r-Lah numbers*, Czechoslovak Mathematical Journal, közlésre elfogadva.

[59] M. Petkovšek and T. Pisanski, *Combinatorial interpretation of unsigned Stirling and Lah numbers*, Pi Mu Epsilon Journal **12** (2007), 417–424.

[60] G. Pólya and G. Szegő, Problems and Theorems in Analysis I, Springer, 1998.

[61] J. Quaintance and H. W. Gould, Combinatorial Identities for Stirling Numbers, World Scientific, 2016.

[62] G. Rácz, *On the magnitude of the roots of some well-known enumerative polynomials*, Acta Mathematica Hungarica **159** (2019), 257–264.

[63] G. Rácz, *The r-Fubini–Lah numbers and polynomials*, Australasian Journal of Combinatorics **78** (2020), 145–153.

[64] J. L. Ramírez and M. Shattuck, *A (p, q)-analogue of the r-Whitney–Lah numbers*, Journal of Integer Sequences **19** (2016), Article 16.5.6.

[65] P. Ribenboim, The Little Book of Bigger Primes, Springer-Verlag, 2004.

[66] J. Riordan, *Forests of labeled trees*, Journal of Combinatorial Theory **5** (1968), 90–103.

[67] P. A. Samuelson, *How deviant can you be?*, Journal of the American Statistical Association **63** (1968), 1522–1525.

[68] M. J. Schlosser and M. Yoo, *Elliptic rook and file numbers*, Electronic Journal of Combinatorics **24** (2017), Article P1.31.

[69] M. Sebaoui, D. Laissaoui, G. Guettai and M. Rahmani, *On s-Lah polynomials*, Ars Combinatoria **142** (2019), 111–118.

[70] M. Shattuck, *A generalized recurrence formula for Stirling numbers and related sequences*, Notes on Number Theory and Discrete Mathematics **21** (2015), 74–80.

[71] M. Shattuck, *Generalizations of Bell number formulas of Spivey and Mező*, Filomat **30** (2016), 2683–2694.

[72] M. Shattuck, *Generalized r-Lah numbers*, Proceedings of the Indian Academy of Sciences, Mathematical Sciences **126** (2016), 461–478.

[73] M. Shattuck, *Some formulas for the restricted r-Lah numbers*, Annales Mathematicae et Informaticae **49** (2018), 123–140.

[74] M. A. Shattuck and C. G. Wagner, *Parity theorems for statistics on lattice paths and Laguerre configurations*, Journal of Integer Sequences **8** (2005), Article 05.5.1.

[75] M. Z. Spivey, *A generalized recurrence for Bell numbers*, Journal of Integer Sequences **11** (2008), Article 08.2.5.

[76] R. Sprugnoli, *Riordan arrays and combinatorial sums*, Discrete Mathematics **132** (1994), 267–290.

[77] R. P. Stanley, *Log-concave and unimodal sequences in algebra, combinatorics, and geometry*, Annals of the New York Academy of Sciences **576** (1989), 500–535.

[78] S. M. Tanny, *On some numbers related to the Bell numbers*, Canadian Mathematical Bulletin **17** (1975), 733–738.

Publikációk listája

1. G. Nyul and G. Rácz, *The r-Lah numbers*, Discrete Mathematics **338** (2015), 1660–1666.

2. G. Nyul and G. Rácz, *Lucas sequences and the Hosoya index of graphs*, Fibonacci Quarterly **55** (2017), 340–342.

3. G. Rácz, *On the magnitude of the roots of some well-known enumerative polynomials*, Acta Mathematica Hungarica **159** (2019), 257–264.

4. G. Nyul and G. Rácz, *Sums of r-Lah numbers and r-Lah polynomials*, Ars Mathematica Contemporanea **18** (2020), 211–222.

5. G. Rácz, *The r-Fubini–Lah numbers and polynomials*, Australasian Journal of Combinatorics **78** (2020), 145–153.

6. G. Nyul and G. Rácz, *Matchings in complete bipartite graphs and the r-Lah numbers*, Czechoslovak Mathematical Journal, közlésre elfogadva.

Előadások listája

1. *The r-Lah numbers*, International Student Conference on Applied Mathematics and Informatics, 2014. március 27–30., Malenovice (Csehország)

2. *Az r-Lah-számok*, Számelméleti és Kriptográfiai Napok, 2014. május 23–25., Komárno (Szlovákia)

3. *The r-Lah numbers*, Algorithmic and Enumerative Combinatorics Summer School, 2014. augusztus 18–22., Hagenberg (Ausztria)

4. *The r-Lah numbers*, 3. International Eurasian Conference on Mathematical Sciences and Applications, 2014. augusztus 25–27., Bécs (Ausztria)

5. *Summed r-Lah numbers*, International Student Conference on Applied Mathematics and Informatics, 2015. április 23–26., Kočovce (Szlovákia)

6. *Recent results on r-Lah polynomials*, 29th Journées Arithmétiques, 2015. július 6–10., Debrecen

7. *Summed r-Lah numbers and r-Lah polynomials* (poszter), 2nd Algorithmic and Enumerative Combinatorics Summer School, 2015. július 27–31., Hagenberg (Ausztria)

8. *The r-Lah numbers and their summations*, Joint Austrian-Hungarian Mathematical Conference, 2015. augusztus 25–27., Győr

9. *Combinatorial and divisibility properties of generalized Lah numbers and their sums*, 17th International Conference on Fibonacci Numbers and their Applications, 2016. június 27. – július 1., Caen (Franciaország)

10. *A graph theoretical view of r-Lah numbers*, 26th Workshop on Cycles and Colourings, 2017. szeptember 3–8., Nový Smokovec (Szlovákia)

11. *r-Lah numbers using graph theory*, International Student Conference on Applied Mathematics and Informatics, 2018. május 10–13., Malenovice (Csehország)

12. *Overview of our combinatorial and graph theoretical results on r-Lah numbers and r-Lah polynomials*, Discrete Mathematics and Applications Conference, 2018. június 25–29., Veszprém

13. *Recent investigations of r-Lah polynomials*, 27th Annual 3in1 Workshop, 2018. november 21–24., Stryszawa (Lengyelország)

14. *Általánosított Lah-számok és gráfelméleti interpretációjuk*, ADA 2019, 2019. május 24–25., Debrecen

15. *Generalized Lah numbers and their graph theoretical interpretation*, 9th Slovenian International Conference on Graph Theory, 2019. június 23–29., Bled (Szlovénia)