Doktori (PhD) értekezés tézisei

Számelméleti függvények a középiskolában

Kézér Ildikó

Témavezetők: **Dr. Ambrus András** és **Dr. Freud Róbert**

DEBRECENI EGYETEM

Matematika- és Számítástudományok Doktori Iskola

Debrecen, 2021

1. Bevezetés

Gyakorló tanárként fontosnak tartom, hogy a tanulók számára olyan alkalmakat teremtsünk, amikor maguk kísérletezhetnek, kutathatnak. A disszertáció fő célja olyan problémák felvetése és vizsgálata, amelyek kapcsán a gyerekeknek lehetősége nyílik az önálló kísérletezésre és kisebb-nagyobb felfedező utakra a számelméleti függvények világában. A számelmélet és ezen belül a számelméleti függvények azon kevés témakör egyike a középiskolai matematikában, amelyhez viszonylag kevés előismeret szükséges. Olyan kérdéseket vizsgáltam, amelyek a középiskolások számára hozzáférhetőek, általában nem igényelnek a középiskolai matematikán túlmutató ismereteket, ugyanakkor érdekesek, változatos témájúak és nehézségűek, különböző mélységű részekre bonthatók, sokféle módszert mutatnak be, és tág teret engednek a kreativitásnak. Az ilyen jellegű kutatási feladatok annak lehetőségét is biztosítják, hogy a tanulók a problémamegoldás különböző szintjeire érhessenek.

A részben irányított kutatás során a tanulóknak lehetősége nyílik saját kérdéseket felvetni, egy problémát a saját nézőpontjukból közelíteni. Természetesen a kísérletezés magában rejti a tévedés lehetőségét is, de fontos, hogy a tanulókban az a kép alakuljon ki és erősödjön meg diákéveik során, hogy a tévutak is hozzátartoznak és természetes részei bármilyen típusú felfedező útnak, a matematikai felfedező utaknak is. A felfedező úton sok kapcsolatra is fény deríthetünk, a számelméleti függvényekről tanultak több ponton kapcsolódnak más problémákhoz is a középiskolai matematikában, a velük való ismerkedés tehát azon túl, hogy önmagában is érdekes, hasznos lehet későbbi problémák megoldásakor vagy a megoldás alapgondolatának ismertetésekor.

Külön előnynek gondolom, ha a felfedező úton, annak valamely fázisában valamilyen digitális segédeszköz használata is szükséges, ahogy a kidolgozott témák jó részében ez így van. A gyerekek mindennapjainak a számítógép természetes része, jó, ha a diákok látnak példát arra, hogy ezt, bizonyos matematikai szoftvereket hogyan állíthatnak a matematikai problémamegoldás szolgálatába. Vannak olyan tanulók is, akik az iskola falain kívül is szívesen foglalkoznak programozással, a matematikai problémán kívül maga a programozási feladat is lehet számukra kihívás.

A számelméleti függvények közül az osztók száma ($d(n)$) része a középiskolai matematika tananyagnak, az osztók összege ($\sigma(n)$) és az Euler-féle függvény ($\varphi(n)$) pedig szerepel a speciális matematika tagozat reguláris óráin, de tárgyalható szakkörön a matematikát nem emelt óraszámban tanuló csoportokban is a matematika iránt érdeklődő tanulókkal. Ehhez a három függvényhez érdemes időnként hozzávenni a különböző ($\omega(n)$), illetve az összes prímosztó száma ($\Omega(n)$) függvényeket is, mert ezek megértése, képlete semmilyen nehézséget sem okoz, ugyanakkor számos tulajdonságban a másik háromhoz képest igen eltérő vonásokat mutatnak.

Azt gondolom, a matematika iránt érdeklődő gyerekek számára a 3 – 5. fejezetben szereplő kutatási feladatok (amelyek saját problémafelvetéseim) akár már 9. osztályban tárgyalhatóak, de persze ez előismereteik függvénye. Az érdeklődő gyerekekkel ezekkel a problémákkal szakkörön foglalkoztam, tanórai keretek között nem tartom megvalósíthatónak a kutatást. A speciális matematika tagozaton tanuló diákok ugyan a reguláris órákon megismerkednek a számelméleti függvényekkel, de a kísérletezést esetükben is csak a szakkörön gondolom kivitelezhetőnek, illetve otthoni önálló munkájuk révén: egyrészt a bemutatott problémakörök igen szerteágazóak, a reguláris óra szűkös időkeretébe csak néhány a témába vágó feladat férne be, másrészt pedig az egyik leglényegesebbnek éppen az ilyenfajta kutatásban rejlő, kötöttségek nélküli, sok irányban történő szabad szellemi kalandozás lehetőségét tartom.

2. Számelméleti függvények a középiskolában

A fejezet első részében azokat a tapasztalatokat összegeztem, amelyeket a középiskolai feladatgyűjtemények, tankönyvek áttekintése, összehasonlítása jelentett. A tankönyvek közül többet használtam már speciális matematika tagozatos és nem tagozatos csoportokban egyaránt, így természetesen merült fel, hogy ezeken kívül még más, a középiskola 9. osztálya számára íródott tankönyvek számelmélettel foglalkozó fejezeteit is megvizsgáljam. Érdemesnek tartottam azt is, hogy módszertanilag összevessem az azonos tartalmú feladatok különböző megfogalmazását más-más feladatgyűjteményben, tankönyvben, hogy megvizsgáljam egyik, illetve másik megfogalmazás esetleges előnyeit, illetve hátrányait.

A fejezet második része egy szubjektív válogatás különböző hazai és nemzetközi versenyek, példatárak és a KöMaL feladataiból (egy feladattól eltekintve). Törekedtem arra, hogy a bemutatott feladatok között sok olyan szerepeljen, ami nem kizárólag a speciális matematika tagozaton tanuló diákok számára hozzáférhető. Leggyakrabban a KöMaLban és a hazai tanulmányi versenyeken is az osztók száma függvénnyel kapcsolatos problémák kapnak szerepet, hiszen ez a nem emelt óraszámban matematikát tanuló diákok számára is része a tananyagnak.

Az összegyűjtött feladatokkal azt szerettem volna illusztrálni, milyen sokféle jellegű és nehézségű kérdés adódik ebben a témakörben. A feladatok között tehát az osztók számára vonatkozók dominálnak, de előjön az osztók összege és szorzata, valamint a φ-függvény is. A megoldás során esetenként a képletek ügyes alkalmazására, máskor az osztópáros ötletre, időnként ügyes becslésekre van szükség, de megjelennek a Fermat-prímek, az Euler–Fermat-tétel és a Catalan-sejtés is. Néhány feladat az említett függvények közül többet kapcsol össze. Beválogattam néhány olyan régi KöMaL-feladatokat is, amelynek kitűzője világhírű magyar matematikus.

Illusztrációként kiemelném az alábbi feladatot (a tézisfüzetben szereplő feladatok, képletek és tételek számozása a disszertációbeli megfelelő feladatok, képletek és tételek számozását követi).

2.2.7. Feladat

Melyek azok az n pozitív egész számok, amelyekre teljesül, hogy bármely $t \mid n$-re $d(t) \mid d(n)$?

(*45th Austrian Mathematical Olympiad, 2014, forrás:* [8])

A feladat megoldásában bizonyítottam, hogy a megoldhatóság szükséges és elégséges feltétele az, hogy n négyzetmentes legyen.

A feladatot meggondoltam az osztók száma helyett az osztók összege függvényre is: azok az n pozitív egész számok, amelyekre bármely $t \mid n$-re $\sigma(t) \mid \sigma(n)$, szintén a négyzetmentes számok. Ugyanezt a problémát az Euler-féle φ-függvényre is megvizsgáltam. Mivel minden $a \mid b$-re $\varphi(a) \mid \varphi(b)$ teljesül, ebben az esetben bármely pozitív egész megoldása a feladatnak. Végül a különböző prímosztók, illetve a prímosztók száma függvény esetén is megkerestem a megoldásokat. Mivel bármely n pozitív egészre $1 \mid n$, de $\omega(1) = \Omega(1) = 0$ nem lehet osztója $n > 1$ esetén az $\omega(n)$-nek, illetve az $\Omega(n)$-nek, így itt a feladatot a következőképpen kell átfogalmaznunk: melyek azok az n pozitív egész számok, amelyekre teljesül, hogy bármely 1-nél nagyobb $t \mid n$-re $\omega(t) \mid \omega(n)$, illetve $\Omega(t) \mid \Omega(n)$. A megoldhatóság szükséges és elégséges feltétele ebben az esetben, hogy az $\omega(n) \leq 2$, illetve az $\Omega(n) \leq 2$ egyenlőtlenség fennálljon.

Ez a feladat is jó példája annak, miként nőhet ki egy konkrét feladatból egy egész variációsorozat, és a különböző variánsok vizsgálata egyik esetben miként vezethet akár ugyanarra a válaszra, mint az eredeti kérdés, egy másik esetben azonban miként eredményez a korábbitól lényegesen eltérő választ. A gyerekek számára is hasznos, ha minél többször érzékelik, hogy egy feladat nem feltétlen ott kell, hogy véget érjen, amikor a feltett kérdésre megtaláltuk és bebizonyítottuk a választ. Persze az nem garantált, hogy az analóg problémára is megleljük a megoldást, de egy kísérletet mindenképp megér annak megfontolása, hogy a probléma átfogalmazása, általánosítása vajon hova vezet. Fontos, hogy az ilyen lehetőségeket a diákok lássák, hogy tudjanak párhuzamokat találni, válaszokat összehasonlítani, és megoldások alapgondolatát adaptálni egy megváltozott szituációban.

3. A különböző maradékosztályokba tartozó osztók eloszlásának összehasonlítása

A fejezet kiindulópontja, hogy egy szám páros és páratlan osztóinak darabszámára, összegére és reciprokösszegére, ezek arányára, illetve különbségére milyen összefüggések teljesülnek. Természetesen merülnek fel például olyan kérdések, hogy lehet-e a páros és páratlan osztók számának különbsége tetszőlegesen nagy, vagy külön-külön vett összegük aránya tetszőleges pozitív egész.

Ezután az analóg kérdéseket először közvetlen általánosításként a kettő helyett bármely prím modulusra, majd a nulla és a nemnulla maradékosztályok helyett a két modulo 3 nem nulla maradékosztály vonatkozásában válaszoltam meg.

A ± 1 maradékosztályba eső osztók számának különbségét, illetve arányát is vizsgáltam. Az arány vizsgálatakor a -1-gyel kongruens osztók darabszámának és az 1-gyel kongruens osztók darabszámának hányadosára (jelölése: $R_1(n)$) az alábbi eredményt bizonyítottam:

3.3.5. Tétel

Ha $n = 3^\gamma \underbrace{\prod_i {q_i}^{\alpha_i}}_{A} \cdot \underbrace{\prod_j {p_j}^{\beta_j}}_{B}$, ahol $\alpha_i, \beta_j, \gamma \in \mathbb{N}$ és $q_i \equiv -1\ (3)$, $p_j \equiv 1\ (3)$ prímek, akkor

$$R_1(n) = \begin{cases} 1 & \Leftrightarrow \quad A \text{ nem négyzetszám;} \\ \dfrac{d(A)-1}{d(A)+1} & \Leftrightarrow \quad A \text{ négyzetszám.} \end{cases}$$

Pontos formulát igazoltam a két maradékosztályba eső osztók számának különbségére is (3.3.4. Tétel), illetve az osztók összegét és reciprokösszegét is vizsgáltam (3.3.7. – 3.3.13. Tételek). A reciprokösszeg vizsgálatát az osztópárok segítségével az osztók összegére vezettem vissza.

A 3.3.6. Lemmát általánosítottam nemnulla multiplikatív függvényekre. A 3.3.7. és 3.3.13. Tételek speciális eseteire több bizonyítást adtam, amit azért is tartok fontosnak, mert összekapcsolhatja a tanulókban a matematika különállónak érzékelt területeit.

A középiskolában ugyan nem foglalkozunk (még a speciális matematika tagozaton sem) a megismert számelméleti függvények átlagértékével vagy olyan „jelenségekkel”, mint a hegy- és völgytétel, de ezeknek a problémáknak a megfelelő variánsait is megvizsgáltam (3.4.3. – 3.4.5. Tételek). Itt és az értekezés több más helyén is a GeoGebra szoftvert is használtam, amit könnyű kezelhetősége miatt kifejezetten alkalmasnak gondolok arra, hogy középiskolai diákok segítségére legyen a matematikai problémamegoldásban, és tanítom is a használatát a diákjaimnak is.

A fejezet végén külön részben elemeztem a problémakör didaktikai vonatkozásait, beleértve a továbblépés lehetőségeit is.

4. Speciális egyenletek

A fejezet első részében az $x^2+y^2=z^2$ egyenlet analógiájaként az $f(x^2)+f(y^2)= = f(z^2)$ egyenletet és annak magasabb hatványokra, illetve több tagra történő általánosításait vizsgáltam. Ez a probléma is igen változatos képet mutat attól függően, hogy f melyik választott számelméleti függvény: az osztók száma és összege esetén az alapegyenlet magasabb hatványokra sem oldható meg, a különböző és összes prímosztók esetén végtelen sok megoldás van, az utóbbinál a prímhatványok körében is, de a φ-t is beleértve egyik függvény esetén sincs olyan megoldás, ahol mindhárom ismeretlen prímszám.

4.1.1. Tétel
A $\varphi(x^2)+\varphi(y^2)=\varphi(z^2)$ egyenlet nem oldható meg a prímek körében.

A bizonyítás egy diofantikus egyenlet vizsgálatából adódik. A tétel kimondása előtt érdemes a tanulókkal az egész számok körében megoldásokat kerestetni, ilyen például a $(2;3;4)$, de több olyan is van, amely két prímet tartalmaz. Ezek megtalálása után természetesen merül fel a kérdés, hogy létezik-e olyan megoldás, amelynek minden tagja prím.

A fejezet második részében az $f(xy)+f(xz)=f(yz)$ egyenletet vizsgáltam, ennek kapcsán szintén igen sok mindent lehet a tanulókkal feldolgozni, persze meghagyva annak lehetőségét, hogy ők maguk is vessenek fel kérdéseket. Például az ω és Ω függvényekre az összes megoldás megtalálása után az eredmények azonnal kiterjeszthetők tetszőleges erősen, illetve teljesen additív függvényekre (4.2.3. és 4.2.6. Tételek). A másik három számelméleti függvény esetében is bőven vannak olyan kérdések, amelyek megválaszolása érdekes kutatási feladat lehet a tanulók számára, illetve az időközben adódó segédállítások igazolása önmagában is kihívás. Bizonyos, hogy a diákok a felvetett problémákban legalább részeredményeket, részsikereket tudnak elérni.

A $d(n)$ függvény esetében megadtam az összes prímhatvány megoldást, valamint egy algoritmust az összes páronként relatív prím megoldás előállítására:

4.2.9. Tétel
(i) A $d(xy)+d(xz)=d(yz)$ egyenlet összes megoldása a prímhatványok körében:

(4.2.9.a) $$x = p_1^{rsk-1},\ y = p_2^{r(r+s)k-1},\ z = p_3^{s(r+s)k-1},$$

ahol p_i-k különböző prímek, r, s, k pozitív egészek, nem mindegyikük 1, és $(r, s) = 1$, valamint

(4.2.9.b) $$x = p_1^{\frac{k\beta-1}{2}},\ y = p_2^{\beta},\ z = p_1^{\frac{k(\beta+2)-1}{2}},$$

ahol p_i-k különböző prímek, k és β pedig páratlan pozitív egészek és nem mindketten egyenlők 1-gyel.

(ii) x-et tetszőlegesen rögzítve az összes páronként relatív prím megoldás előállítható.

A $\sigma(n)$ és a $\varphi(n)$ függvényekre is sokféle megoldást kapunk (4.2.10. – 4.2.14. Tételek), amelyek egy része nevezetes problémákhoz is kapcsolódik, például az ikerprímsejtéshez, illetve a Mersenne- és Fermat-prímekhez. Ezekről a gyerekek tanórán vélhetően hallanak, de a kérdések vizsgálata jó alkalom arra, hogy megmutassuk, ezek a „híres" prímek nemcsak a matematikatörténeti könyvek lapjain, hanem feladatmegoldásokban is főszereplők lehetnek.

Végül érdemes a gyerekeket arra is rávezetni, hogy bármely multiplikatív függvényre felírt egyenletnél igaz, hogy ha létezik megoldás, akkor végtelen sok megoldás létezik, hiszen egy $(x_0; y_0; z_0)$ megoldás mindhárom tagját bármely a mindhárom taghoz relatív prím pozitív egésszel megszorozva az egyenlet egy újabb megoldását kapjuk.

5. Számelméleti függvények kompozíciójának kommutativitása

A fejezet két dolgot ötvöz: a gyerekek által középiskolás éveikre vélhetően már jól ismert kommutativitást, és a talán kevésbé jól ismert, és biztosan kevesebb matematikai helyzetben előkerülő, de a tapasztalat alapján a tanulók által könnyen elsajátítható függvénykompozíciót. A tanulók persze már találkoztak néhány szituációban hasonló problémával, még ha nem is általánosságban fogalmazták meg a vizsgált kérdést, vagy használták egyáltalán a kommutativitás vagy kompozíció kifejezéseket, de például a függvénytranszformációknál vagy a sík egybevágóságainak egymás utáni alkalmazásánál tapasztalhatták, hogy tipikusan nem ugyanaz az eredmény, ha a transzformációk sorrendjét felcserélik.

A fejezetben az $f(g(n)) = g(f(n))$ egyenletet vizsgáltam, ahol f és g is a már megismert öt számelméleti függvény valamelyike (az osztók száma d, az osztók összege σ, φ, a különböző, illetve az összes prímosztó száma ω és Ω). Ebben az esetben is a megoldhatóság több különböző aspektusát tanulmányoztam: létezik-e legalább egy megoldás (n-ben); található-e végtelen sok megoldás; van-e végtelen sok megoldás, amikor mindkét oldal értéke egy adott k szám; megadható-e az összes megoldás. Attól függően, hogy f és g melyik függvénypár, itt is igen változatos kép rajzolódott ki. Voltak egyenletek, amelyek esetén az összes n-et meg tudtam adni, amelyre az adott függvénypárra felírt egyenlet teljesül (5.1.1. – 5.1.2. Tételek); voltak olyan párok, amelyekre minden $k \in \mathbb{Z}^+$ esetén végtelen sok olyan n-et adtam meg, amikor az egyenlet két oldalának közös értéke k (5.2.1. – 5.2.2. Tételek); volt olyan pár, amelyre végtelen sok megoldást találtam (5.2.3. – 5.2.4. Tételek), illetve megfogalmaztam feltételes eredményeket is (5.4.1. – 5.4.5. Tételek).

Ezeknek a problémáknak a tárgyalása is lehetőséget ad a differenciálásra is, a vizsgált kérdések között vannak igen egyszerűek és komplexebbek is.

Egy egyszerűbb feladat:

5.5.1. Feladat
Bizonyítsuk be, hogy az $\omega(\varphi(n)) = \varphi(\omega(n)) = 1$ egyenlet összes megoldása: $n = F_i$, vagy $n = F_i \cdot F_j$, vagy $n = 2^\alpha$, vagy $n = 2^\alpha \cdot F_i$, ahol $\alpha \in \mathbb{Z}^+$ és $F_i \neq F_j$ Fermat-prímek.

Már az $f(g(n)) = g(f(n)) = 1$ egyenletet vizsgáló feladatcsokorban (5.5. pont) is van olyan variáns (5.5.3. Probléma, $\omega(\sigma(n)) = \sigma(\omega(n)) = 1$), aminek a megoldását egyelőre csak részben ismerjük, mert a nem teljesen megoldott Nagell-Ljunggren-egyenletre vezet ([2]). Ez is jó alkalom arra, hogy a gyerekek lássák, a hasonlónak tűnő kérdések nehézsége között is óriási különbségek lehetnek.

Egy összetettebb, szintén a Fermat-prímekkel kapcsolatos tétel, amely Golomb egy állításának ([3]) általánosítása:

5.4.5. Tétel
Legyen $0 \le k \le 4$, és legyenek p_i-k olyan prímek, hogy az F_i Fermat-prímekkel képezett $\dfrac{F_i^{p_i} - 1}{F_i - 1}$ számok különböző prímeket adnak minden $0 \le i \le k$-ra. Ekkor $n = \displaystyle\prod_{i=0}^{k} F_i^{p_i - 1}$ megoldása a $\varphi(\sigma(n)) = \sigma(\varphi(n))$ egyenletnek.

6. A szakkör

A fejezetben részletesen beszámoltam arról a szakkörről, amit iskolámban, az Óbudai Árpád Gimnáziumban tartottam a 2017/18-as tanév utolsó hónapjaiban a speciális matematika tagozaton tanuló 9. osztályos diákok számára. Ahogy azt a bevezetésben már említettem, azért választottam a szakköri keretet, mert a tanórákon nincs idő és lehetőség, hogy a tanulók tanári irányítás mellett, de teljesen szabadon és önállóan kísérletezhessenek. A szakkört az 5. fejezetben szereplő problémák köré szerveztem, a célom tehát az volt – amellett, hogy még inkább megkedveltessem a gyerekekkel a számelméletet –, hogy ezeknek a kérdéseknek a vizsgálatával motiváljam őket az önálló problémafelvetésre, hogy megéljék és megérezzék, mit jelenthet a kutatás.

Az előzetes célok mellett összegeztem a szakkör tervezésének folyamatát, a gyerekek felkérését, a módszertani előkészítést, hogy didaktikailag mit tartottam fontosnak az órák tervezésénél, hogy miként valósult meg ez a gyakorlatban, vagy hogy miként kellett adott ponton stratégiát változtatnom. Részleteztem a diákok szakköri munkáját, ötleteit, saját problémajavaslataikat és megoldásaikat, és azt a sok-sok nagyon pozitív tapasztalatot és élményt, amit ezek a foglalkozások számomra, illetve reményeim és néhány visszajelzés szerint a diákok számára is jelentettek.

A fejezet záró részében bemutattam további lehetőségeket, kapcsolódási pontokat, amelyekről való gondolkodásra ugyan a szakköri órákon már nem került sor, de amelyeket szintén érdemesnek tartok arra, hogy a tanulókkal vizsgáljunk. Például az első- és másodfokú függvényekre vonatkozóan az $f(g(x)) = g(f(x))$ egyenlet vizsgálatát, ami a számelméleti függvényekre vonatkozó probléma folytonos kiterjesztésének tekinthető vagy a Fermat-prímekkel kapcsolatos exponenciális diofantikus egyenletek vizsgálatát vagy egy, az ikerprímekkel kapcsolatos problémát.

7. A disszertáció elméleti didaktikai háttere

Ebben a fejezetben a disszertáció elméleti didaktikai hátterét mutattam be. A dolgozat szemléletét nagyrészben a kutatás-alapú tanulás/tanítás („inquiry based learning", IBL) foglalja össze. A kutatás-alapú tanulás Spronken-Smith szerint egy olyan pedagógia, amely a leginkább biztosítja, hogy a tanulók átéljék a tudásalkotás folyamatait ([4]). Legfontosabb jellemzőinek összefoglalását - amelyekben a disszertáció célkitűzéseire ismerünk - olvashatjuk például a PRIMAS-projektben ([5]), amelyben magyar pedagógusok is dolgoztak ki oktatási anyagokat.

A disszertáció abban a szellemben készült, amit többek között Pólya György, Alan H. Schoenfeld és Ambrus András írnak a problémamegoldásról. Néhány fontos gondolatuk:

„A hibás megoldásokban is észre kell venni a lehető legkisebb jó részt. A próbálkozások, tévutak a matematikai alkotómunka szerves részei. Igen fontos a tanár beleérző, empatikus, segítő magatartása." ([1])

A problémamegoldás nem „terv vezérelt” („plan driven”), hanem „történés vezérelt” („event driven”): a jó problémamegoldó, habár van elgondolása arról, mit kíván vizsgálni, meglátja a problémamegoldás közben adódó lehetőséget, és kimeríti azt még akkor is, ha az nem teljesen esett egybe eredeti szándékaival. A jó problémamegoldót a pozitív kontroll is jellemzi, amely tehát azt az attitűdöt is jelenti, hogy ha egy sejtés az ellenőrzése után tévedésnek bizonyul, akkor a jó problémamegoldó nem riad meg a folytatástól, nem tántorodik el újabb gondolatok felkutatásától, számára a tévedés pozitív motiváció abba az irányba, hogy tovább gondolkodjon. ([7])

„Semmiféle gondolat sem rossz, csak rosszá válhat, ha kritika nélkül fogadjuk. Csak az rossz igazán, ha semmi gondolatunk nincs.” ([6])

A disszertáció igyekezett olyan problémákat felvetni, amelyek kiindulópontjai lehetnek további érdekes gondolatoknak.

Irodalomjegyzék

A szerzőnek a disszertációhoz kapcsolódó publikációi:

[$K1$] I. Kézér, *Some Pythagorean type equations concerning arithmetic functions*, közlésre elfogadva, megjelenik: Teaching Mathematics and Computer Science **18** (2), (2020)

[$K2$] I. Kézér, *On some problems on composition of arithmetic functions*, Teaching Mathematics and Computer Science **16** (2), (2018), 161-181.

[$K3$] I. Kézér, *Comparing various functions of the divisors of an integer in different residue classes*, Teaching Mathematics and Computer Science **14** (2), (2016), 247-258.

A szerző egyéb publikációja:

[$K4$] Kézér I., *Egy csoda a sok közül, avagy a köbszámok összege*, in „Használni akartam, nem tündökölni" tanulmánykötet, (2018), 179-190.
(ISBN 978-615-00-1636-8)

A szerzőnek a disszertációhoz kapcsolódó előadásai:

- *Néhány újabb eredmény számelméleti függvények kompozíciójáról*, Matematika és Informatika Didaktikai Kutatások Konferencia, Hajdúszoboszló, 2018.
- *Számelméleti függvények kompozíciójának vizsgálata*, Matematika és Informatika Didaktikai Kutatások Konferencia, Budapest, 2017.
- *Some problems on the sum-of-divisors function*, Spring School at the University of Wuerzburg – Perspectives on Research in Mathematics Education in the next Decade, Wuerzburg, 2016.
- *Az osztók összegével kapcsolatos néhány probléma*, Matematika és Informatika Didaktikai Kutatások Konferencia, Pozsony, 2016.

További irodalom a tézisfüzethez:

[1] Ambrus A., *Bevezetés a matematikadidaktikába*, ELTE Eötvös Kiadó, Budapest (1995), 26. oldal

[2] Y. Bugeaud, P. Mihailescu, *On the Nagell-Ljunggren equation* $\frac{x^n-1}{x-1}=y^q$, Mathematica Scandinavica **101** (2007), 177 – 183. oldal

[3] R.K. Guy, *Unsolved Problems in Number Theory*, 2nd edition, Springer-Verlag, New York (1994), B42, 99. oldal

[4] http://epa.oszk.hu/00000/00011/00153/pdf/2010-12.pdf, 31. oldal

[5] https://primas-project.eu/wp-content/uploads/sites/323/2017/11/primas_final_publication.pdf
utolsó letöltések ideje: 2021.február 10.

[6] Pólya Gy., *A gondolkodás iskolája*, Gondolat Kiadó, Budapest (1971), 244. oldal

[7] A. H. Schoenfeld, *Mathematical problem solving*, Academic Press, Inc., Orlando (1985), 125. és 134. oldal

[8] www.artofproblemsolving.com

DEBRECENI EGYETEM
EGYETEMI ÉS NEMZETI KÖNYVTÁR
H-4002 Debrecen, Egyetem tér 1, Pf.: 400
Tel.: 52/410-443, e-mail: publikaciok@lib.unideb.hu

Nyilvántartási szám: DEENK/91/2021.PL
Tárgy: PhD Publikációs Lista

Jelölt: Kézér Ildikó
Doktori Iskola: Matematika- és Számítástudományok Doktori Iskola

A PhD értekezés alapjául szolgáló közlemények

Idegen nyelvű tudományos közlemények hazai folyóiratban (3)

1. **Kézér, I.**: Some Pythagorean type equations concerning arithmetic functions.
   Teach. math. comput. sci. "Accepted by Publisher", 2021. ISSN: 1589-7389.
2. **Kézér, I.**: On some problems on composition of arithmetic functions.
   Teach. math. comput. sci. 16 (2), 161-181, 2018. ISSN: 1589-7389.
   DOI: http://dx.doi.org/10.5485/TMCS.2018.0443
3. **Kézér, I.**: Comparing various functions of the divisors of an integer in different residue classes.
   Teach. math. comput. sci. 14 (2), 247-258, 2016. ISSN: 1589-7389.
   DOI: http://dx.doi.org/10.5485/TMCS.2016.0428

További közlemények

Magyar nyelvű könyvrészletek (1)

4. **Kézér, I.**: Egy csoda a sok közül, avagy a köbszámok összege.
   In: "Használni akartam, nem tündökölni" : a 75 éves Ambrus Andrást köszöntik tanítványai, tisztelői, [Eötvös Loránd Tudományegyetem], [Budapest], 179-190, 2018. ISBN: 9786150016368

A DEENK a Jelölt által az iDEa Tudóstérbe feltöltött adatok bibliográfiai és tudománymetriai ellenőrzését a tudományos adatbázisok és a Journal Citation Reports Impact Factor lista alapján elvégezte.

Debrecen, 2021.03.10.

Short thesis for the degree of doctor of philosophy (PhD)

Arithmetic functions in secondary school

by Kézér Ildikó

Supervisors: **Dr. Ambrus András and Dr. Freud Róbert**

UNIVERSITY OF DEBRECEN

Doctoral School of Mathematical and Computational Sciences

Debrecen, 2021

1. Introduction

As a secondary school teacher I strongly believe that it is really important to create opportunities for students to experiment on their own and to do research. The main goal of the thesis is to propose and investigate some problems that offer students the framework for experimentation and for smaller or larger exploration in the world of arithmetic functions. Number theory, including arithmetic functions, is one of the few topics in high school mathematics that does not require a tremendous amount of prior knowledge. Most of the problems I studied do not require higher mathematical knowledge and are accessible for high school students, they are interesting, involve various topics and different grades of difficulty, and most of them can be divided into parts of different depth. They open up many problem solving methods and leave enough space for creativity. They also provide the opportunity for pupils to reach different levels in problem solving.

In these only partly directed discoveries students can propose questions and follow their own approach while studying a problem. Of course, this type of experimentation also includes the possibility of errors, but it is important to develop and improve the sense in the students during their high school years that mistakes are self-evident parts of any discovery, including mathematical discovery, as well. On the journey we can also highlight some connections of arithmetic functions to several other parts in high school math. So studying this topic, besides being interesting in itself, can be beneficial also in solving diverse problems or finding the basic idea behind a solution.

I think, it is an extra advantage if the use of digital aids is required in certain phases of the journey, as it is suggested in most of the problems. The computer is part of the students' everyday life and it is good to show them how mathematical software programs can serve mathematical problem solving. And usually there are kids who like programming not only in school but also in their free time, so the programming task connected to a mathematical problem can be an extra challenge for them.

Among the arithmetic functions, the number of divisors d is part of the high school curriculum. Students in the special maths program learn also about the sum of divisors σ and Euler's totient function φ in class, but these can be discussed in group study sessions with other students, too, who are interested in maths. It is also worth to introduce the number of distinct and all prime factors, ω and Ω, as it is easy to understand their definition and basic properties whereas their behavior differs in many aspects from the other three functions mentioned above.

I believe, the problems in Chapters 3 – 5 (which were created by myself) can be studied from the 9th grade with students interested in maths, but of course their prior knowledge is a decisive factor in planning. I chose the format of group study sessions as such a research does not seem feasible during regular classes, even for students in the special maths program, though they learn there about arithmetic functions. These experiments require students to work quietly on their own. Due to the diversity of the problems, only a few of them could fit into the tight time limit of a regular class. And perhaps the most important goal of these discoveries is to ensure the opportunity for students to enjoy intellectual adventures in many directions freely, without any constraints.

2. Arithmetic functions in secondary school

The first part of Chapter 2 summarizes my experiences in surveying and comparing high school textbooks and exercise books. I have been using several textbooks both in regular and special maths classes, so it was natural to check the number theory parts of other 9th grade textbooks, too. From a didactic point of view, it was interesting to contrast the various formulations of essentially identical problems and to discuss the possible advantages and disadvantages of the different presentations.

The second part of Chapter 2 is a selection of problems from monographs, KöMaL, and various Hungarian and international mathematical competitions (except for one problem). I tried to select many problems which are accessible not just for students in the special maths program. Most problems refer to the number of divisors, since it is part of the general high school curriculum, not only for students with an elevated number of maths classes.

The problems illustrate the large variety in type and difficulty of the questions in this topic. As mentioned before, most problems refer to the number of divisors, but some deal with the sum and product of divisors and Euler's totient function. Solving them may require the clever use of formulas, or the idea of pairing divisors, or making estimates, but also the Fermat primes, the Euler–Fermat theorem, and the Catalan conjecture pop up. Some problems connect different functions. I compiled a few problems from KöMaL proposed by world famous Hungarian mathematicians, as well.

I present a problem as an illustration. (The numbering of the formulas, problems and theorems is the same as in the dissertation.)

Problem 2.2.7.
Which positive integers n satisfy that $t \mid n$ implies $d(t) \mid d(n)$?

(*45th Austrian Mathematical Olympiad, 2014, source:* [8])

I proved that the necessary and sufficient condition of solvability is for n to be square free.

I also solved the variant for the sum of divisors: again, exactly the square free integers n satisfy that $t \mid n$ implies $\sigma(t) \mid \sigma(n)$. Turning to Euler's totient function, every positive integer n has this property since $\varphi(a) \mid \varphi(b)$ holds for any $a \mid b$. Finally, for the number of distinct and all prime factors, $\omega(n)$ and $\Omega(n)$, we have to assume $t > 1$, since $1 \mid n$ for every positive integer n, but $\omega(1) = \Omega(1) = 0$ is not a divisor of $\omega(n)$ or $\Omega(n)$ if $n > 1$. And we find that $1 < t \mid n$ implies $\omega(t) \mid \omega(n)$ if and only if $\omega(n) \leq 2$, and the analogue result holds also for $\Omega(n)$.

This problem serves as a good example how one can develop and extend a question, how this can build up a series of variations, and how these variants can sometimes result in exactly the same answer as the original problem, and how they can lead to a totally different outcome in other cases. I think it is useful for the students to experience that the study of a problem does not necessarily terminate with the solution being found and proved. Of course, it is not granted that we can solve the analogue problem, but it is worth an attempt to consider where the reformulation and generalization of the original problem could lead. It is important to make pupils notice these kinds of opportunities, so they can manage to find similarities, to compare solutions, and to adapt the main ideas of a certain solution in a modified situation.

3. Comparing various functions of the divisors of an integer in different residue classes

The starting point of Chapter 3 is the investigation of the difference and the ratio of the numbers, the sums, and the sums of reciprocals of the even and odd divisors of a given integer. Naturally arising questions are e.g. whether the difference of the numbers of even and odd divisors can be arbitrary large or whether the ratio of their sums can equal any integer.

A straightforward first generalization is to change the modulus 2 to any prime, and then a different direction is to replace the categories divisible and non-divisible by considering the two non-zero residue classes mod 3.

I studied both the difference and the ratio of the numbers of divisors in residue classes ± 1 mod 3. I obtained the following result for the ratio $R_1(n)$ of the number of divisors in residue class -1 and the number of divisors in residue class 1:

Theorem 3.3.5.

If $n = 3^\gamma \underbrace{\prod_i {q_i}^{\alpha_i}}_{A} \cdot \underbrace{\prod_j {p_j}^{\beta_j}}_{B}$, where $\alpha_i, \beta_j, \gamma \in \mathbb{N}$ and the primes $q_i \equiv -1$ (3), $p_j \equiv 1$ (3), then

$$R_1(n) = \begin{cases} 1 & \Leftrightarrow \quad A \text{ is not a perfect square;} \\[2ex] \dfrac{d(A)-1}{d(A)+1} & \Leftrightarrow \quad A \text{ is a perfect square.} \end{cases}$$

I also proved a formula for the difference of the numbers of the divisors in residue classes ±1 (Theorem 3.3.4.), and studied the sum and the sum of reciprocals of these divisors (Theorems 3.3.7. – 3.3.13.). The behavior of the sum of reciprocals can be derived from the sum of divisors by using divisor pairs.

I generalized the result of Lemma 3.3.6. for non-zero multiplicative functions. I gave several proofs for some special cases of Theorems 3.3.7. and 3.3.13. to help students to connect seemingly remote areas of mathematics.

Though the mean value of an arithmetic function or phenomenons like the canyon and peak theorems, are not discussed even in special maths classes, I studied their relevant variants here (Theorems 3.4.3. – 3.4.5.). In investigating these and other problems, I relied partly on the mathematical software GeoGebra. I find it a handy and easy to use tool to help high school students in mathematical problem solving, so I teach them its application.

The last section of Chapter 3 is a didactic analysis of the topic including also some possible extensions.

4. Special equations

In the first part of Chapter 4, as an analogy to $x^2+y^2=z^2$, I studied the equation $f(x^2)+f(y^2)=f(z^2)$ and its generalization to higher degrees and more terms. The situation is multifarious depending on which arithmetic function we choose: for the number and sum of divisors, there is no solution for any degree; for ω and Ω, we have infinitely many solutions, and regarding the latter there exist infinitely many solutions even among prime powers; but there are no solutions in primes for any of the five functions, including φ.

Theorem 4.1.1.
Equation $\varphi(x^2)+\varphi(y^2)=\varphi(z^2)$ has no solution in primes.

The proof lies in analysing a Diophantine equation. Before stating this theorem we should ask students to find solutions in positive integers, e.g. (2;3;4), and there are more solutions containing two primes, as well. After finding some of these, it is a natural question whether there exist solutions purely of primes.

In the second part of the chapter I studied the equation $f(xy) + f(xz) = f(yz)$. There are several aspects to elaborate and students can propose many questions themselves. For example, after finding all solutions for ω and Ω, we can generalize these for strongly or completely additive functions (Theorems 4.2.3. and 4.2.6.). There are many interesting questions to study also concerning the other three arithmetic functions including the challenge of the occurring lemmas. The students will definitely achieve at least partial results in solving these problems.

For the number of divisors I determined all solutions in prime powers and described how to obtain all pairwise coprime solutions in general:

Theorem 4.2.9.
Consider the equation $d(xy) + d(xz) = d(yz)$.

(i) All prime power solutions are:

$$x = p_1^{rsk-1},\ y = p_2^{r(r+s)k-1},\ z = p_3^{s(r+s)k-1}, \tag{4.2.9.a}$$

where p_1, p_2 and p_3 are distinct primes, r, s, k are positive integers, with at least one of them greater than 1, and $(r, s) = 1$, or

$$x = p_1^{\frac{k\beta-1}{2}},\ y = p_2^{\beta},\ z = p_1^{\frac{k(\beta+2)-1}{2}}, \tag{4.2.9.b}$$

where p_1 and p_2 are distinct primes, k and β are positive odd integers with at least one of them greater than 1.

(ii) All pairwise coprime solutions can be obtained by fixing x arbitrarily and describing the corresponding infinitely many solutions in y and z.

We obtain various types of solutions of the equation also for the sum of divisors and for φ (Theorems 4.2.10. – 4.2.14.). Some of these are related to famous problems concerning primes, e.g. the twin prime conjecture or the Mersenne and Fermat primes.

It is important for pupils to experience that those “famous” primes they learned about in class can play a leading role in their own work and not just in history books.

Finally, it is important to make pupils realize that if the equation has a solution $(x_0; y_0; z_0)$ for a multiplicative function f, then multiplying this solution by integers coprime to each of the terms generates infinitely many solutions.

5. Commutativity of composition of arithmetic functions

Chapter 5 combines two notions: commutativity, probably well known by students in high school, and composition of functions, being less familiar to them, but according to my personal experience, they can understand it quickly. They must have met these notions in certain situations, even if not studying them in general or using the terms “commutativity” and “composition”. For instance they could have experienced that transforming functions in two steps or applying two congruences of the plane, the result is typically not the same if we change the order of the two transformations.

So in this chapter I studied the equation $f(g(n)) = g(f(n))$ where each of f and g is one of the five functions listed earlier (the number of divisors d; the sum of divisors σ; φ; and the number of distinct and all prime factors ω and Ω). I examined various aspects of solvability: does there exist a solution (in n); are there infinitely many solutions; are there infinitely many solutions when both sides equal a given integer k; can we determine all solutions? The results are manifold depending on f and g. There were pairs for which I determined all solutions (Theorems 5.1.1. and 5.1.2.), for other pairs I gave infinitely many solutions when both sides equal any given integer k (Theorems 5.2.1. and 5.2.2.), in another case I found infinitely many solutions (Theorems 5.2.3. and 5.2.4.), and I also stated some conditional results (Theorems 5.4.1. – 5.4.5.).

Studying this topic is suitable for differentiation, as there arise both easy and more complex problems.

An easier example is:

Proposition 5.5.1.
$\omega(\varphi(n)) = \varphi(\omega(n)) = 1$ holds if and only if $n = F_i$, or $n = F_i \cdot F_j$, or $n = 2^\alpha$, or $n = 2^\alpha \cdot F_i$, where $\alpha \in \mathbb{Z}^+$ and $F_i \neq F_j$ are Fermat primes.

But even the equation $f(g(n)) = g(f(n)) = 1$ (Section 5.5.) contains a variant (Problem 5.5.3., $\omega(\sigma(n)) = \sigma(\omega(n)) = 1$), when not all solutions can be determined, since it leads to the only partly settled Nagell-Ljunggren equation ([2]). This is another good occasion for students to experience that there can be huge differences between seemingly similar problems.

A more complex theorem using Fermat primes is a generalization of an observation by Golomb ([3]):

Theorem 5.4.5.
Let $0 \leq k \leq 4$, F_i the ith Fermat prime, where $0 \leq i \leq k$, and p_i primes such that $\dfrac{F_i^{p_i} - 1}{F_i - 1}$ are distinct primes. Then $n = \prod_{i=0}^{k} F_i^{p_i - 1}$ is a solution of the equation $\varphi(\sigma(n)) = \sigma(\varphi(n))$.

6. The group study sessions

This chapter provides a detailed summary of the group study sessions I conducted in my school over the last months of school year 2017/18 for kids in 9th grade in the special maths program. As I mentioned it in the Introduction, I chose this format because the circumstances and lack of time in regular classes do not make it possible for students to experiment (under the teacher's guidance but) freely on their own. The sessions were held in the topic of Chapter 5. The main goal was to motivate students to propose questions while working on the material, to taste the experience of a research, and to improve their positive attitude towards number theory.

In addition to the preliminary goals, I summarized the process of planning, the invitation of the students, the didactic preparations, the stuff I thought to be crucial while planning, and how this was realized in practice, including how I had to change strategy sometimes. I gave details about the work of the pupils, the ideas they came up with, the problems they proposed and the solutions they suggested. I described the very positive experience I gained while working with these students that hopefully and according to some feedback was also shared by them.

In the last section of the chapter I presented some further ideas which were not part of the sessions but are worth studying them with students. For example: investigation of the equation $f(g(x)) = g(f(x))$ for linear and quadratic functions as a continuous extension of the question for arithmetic functions; the exponential Diophantine equations connected to Fermat primes; and a problem related to twin primes.

7. The theoretical didactic background of the dissertation

Chapter 7 provides a theoretical didactic background for the dissertation. The approach of the thesis meets the framework of inquiry based learning (IBL). According to Spronken-Smith, IBL is a pedagogy which best ensures that students experience the processes of creating new knowledge ([4]). IBL's essential features and goals - which meet the dissertation's aims - are presented in the summary of the PRIMAS project ([5]) containing also teaching materials developed by teachers from Hungary.

The dissertation's objectives meet András Ambrus', György Pólya's, and Alan H. Schoenfeld's works on problem solving. I summarize here some of their important observations.

"We need to notice the least good idea even in a false solution. Trials and errors are parts of mathematical invention. The teacher's empathetic, helpful attitude is crucial." ([1])

A competent problem-solving behaviour is not simply hierarchical and "plan driven" but rather "event driven". A competent problem solver has an idea of what he/she wants to investigate, but he/she sees the opportunity that arises during problem solving and exhausts it even if it did not fully coincide with his/her original intentions. A good problem solver is also characterized by a positive control, which therefore also means an attitude that if a conjecture turns out to be a mistake after checking it, he/she is not afraid to go on, does not stumble from finding new thoughts. A mistake is a positive motivation to continue to think. ([7])

"There is no such thing as a bad idea, something can only go wrong if we accept it without criticism. The only bad thing is not to have thoughts at all." ([6])

The dissertation tried to present some ideas that could be starting points for other interesting thoughts.

References

The author's publications in the topic:

[$K1$] I. Kézér, *Some Pythagorean type equations concerning arithmetic functions*, accepted for publication, to appear in Teaching Mathematics and Computer Science, **18** (2), (2020)

[$K2$] I. Kézér, *On some problems on composition of arithmetic functions*, Teaching Mathematics and Computer Science **16** (2), (2018), 161-181.

[$K3$] I. Kézér, *Comparing various functions of the divisors of an integer in different residue classes*, Teaching Mathematics and Computer Science **14** (2), (2016), 247-258.

Other publication from the author:

[$K4$] Kézér I., *Egy csoda a sok közül, avagy a köbszámok összege*, in „Használni akartam, nem tündökölni" tanulmánykötet, (2018), 179-190.
(ISBN 978-615-00-1636-8)

The author's conference talks in the topic:

- *Some further results about the composition of arithmetic functions*, (in Hungarian), Researches in Didactics of Mathematics and Computer Sciences, Hajdúszoboszló, 2018.
- *On some problems on composition of arithmetic functions*, (in Hungarian), Researches in Didactics of Mathematics and Computer Sciences, Budapest, 2017.
- *Some problems on the sum-of-divisors function*, (in English), Spring School at the University of Wuerzburg - Perspectives on Research in Mathematics Education in the next Decade, Wuerzburg, 2016.
- *Some problems on the sum-of-divisors function*, (in Hungarian), Researches in Didactics of Mathematics and Computer Sciences, Pozsony, 2016.

Further references to the thesis compilation:

[1] Ambrus A., *Bevezetés a matematikadidaktikába*, ELTE Eötvös Kiadó, Budapest (1995), page 26

[2] Y. Bugeaud, P. Mihailescu, *On the Nagell-Ljunggren equation* $\frac{x^n - 1}{x - 1} = y^q$, Mathematica Scandinavica **101** (2007), pages 177 – 183

[3] R.K. Guy, *Unsolved Problems in Number Theory*, 2nd edition, Springer-Verlag, New York (1994), B42, page 99

[4] http://epa.oszk.hu/00000/00011/00153/pdf/2010-12.pdf, page 31

[5] https://primas-project.eu/wp-content/uploads/sites/323/2017/11/primas_final_publication.pdf
last downloads: February 10, 2021.

[6] Pólya Gy., *A gondolkodás iskolája*, Gondolat Kiadó, Budapest (1971), page 244

[7] A. H. Schoenfeld, *Mathematical problem solving*, Academic Press, Inc., Orlando, (1985), pages 125 and 134

[8] www.artofproblemsolving.com

UNIVERSITY of DEBRECEN

UNIVERSITY AND NATIONAL LIBRARY
UNIVERSITY OF DEBRECEN
H-4002 Egyetem tér 1, Debrecen
Phone: +3652/410-443, email: publikaciok@lib.unideb.hu

Registry number: DEENK/91/2021.PL
Subject: PhD Publication List

Candidate: Ildikó Kézér
Doctoral School: Doctoral School of Mathematical and Computational Sciences

List of publications related to the dissertation

Foreign language scientific articles in Hungarian journals (3)

1. **Kézér, I.**: Some Pythagorean type equations concerning arithmetic functions.
   Teach. math. comput. sci. "Accepted by Publisher", 2021. ISSN: 1589-7389.

2. **Kézér, I.**: On some problems on composition of arithmetic functions.
   Teach. math. comput. sci. 16 (2), 161-181, 2018. ISSN: 1589-7389.
   DOI: http://dx.doi.org/10.5485/TMCS.2018.0443

3. **Kézér, I.**: Comparing various functions of the divisors of an integer in different residue classes.
   Teach. math. comput. sci. 14 (2), 247-258, 2016. ISSN: 1589-7389.
   DOI: http://dx.doi.org/10.5485/TMCS.2016.0428

List of other publications

Hungarian book chapters (1)

4. **Kézér, I.**: Egy csoda a sok közül, avagy a köbszámok összege.
   In: "Használni akartam, nem tündökölni" : a 75 éves Ambrus Andrást köszöntik tanítványai, tisztelői, [Eötvös Loránd Tudományegyetem], [Budapest], 179-190, 2018. ISBN: 9786150016368

The Candidate's publication data submitted to the iDEa Tudóstér have been validated by DEENK on the basis of the Journal Citation Report (Impact Factor) database.

10 March, 2021