

Doktori (PhD) értekezés tézisei

# Funkcionális renormálási csoport módszer optimalizálása és alkalmazásai

Márián István Gábor

Témavezető: Dr. Nándori István



DEBRECENI EGYETEM  
Fizikai Tudományok Doktori Iskola  
Debrecen, 2020



# 1. Bevezetés

Az elméleti fizika két egyik legnagyobb eredménye a speciális relativitáselmélet és a kvantummechanika. A fizika alapvető elméletének ezen területeket össze kell egyeztetnie, azaz egyszerre kell relativisztikusnak és kvantálnak lennie. Így formálódott meg a kvantumtérelmélet, mely a természet alapvető kölcsönhatásait elemi részecskék kölcsönhatásával jellemzi, melyek a még alapvetőbb objektumok, a kvantum mezők gerjesztései. A speciális relativitáselmélet és kvantummechanika egyesítésének következtében a fizikai mennyiségek, mint például a vákuumban mért töltése, vagy tömege a részecskéknek skálafüggővé válnak a kvantumfluktuációk hatása miatt. Ez azt jelenti, hogy még egy kölcsönhatás erőssége is függ attól, hogy milyen energia-, vagy impulzusskálán történt az adott kölcsönhatás. A funkcionális renormálsi csoport (FRG) módszer egy hatásos eszközt biztosít ezen skálafüggés vizsgálatára, ami figyelembe veszi a rendszer fluktuációit különböző skálákon a megfelelő módusú fluktuációk eliminálásával.

## 2. Motiváció

Habár az FRG egy egzakt módszer, az egyenlet megoldásához a legtöbb esetben közelítések szükségesek. Közelítések használatakor azonban az eredmények függést mutathatnak az úgynevezett regulátor függvénytől. Így felmerül a kérdés, melyik regulátor függvény biztosítja a fizikai mennyiségek, mint például a kritikus exponensek legpontosabb jóslatait.

A közelítő eredmények hamis jóslatokat is adhatnak, például egy nem-fizikai fixpontot jelezve, ami egy nem létező fázisátmenet jelenlétére utal. Emiatt elengedhetetlenül fontos tudni, hogy melyek azok a közelítések, amik elegendően pontosak ahhoz, hogy megbízható eredményeket szolgáltatassanak különböző modellek vizsgálatakor.

Egy másik érdekes kérdés, hogy lehetséges-e az Univerzum időbeli fejlődését az átmenetét a különböző hőmérsékleti és energiaskálák között egy renormálási csoport (RG) evolúciónak tekinteni. Ez a kapcsolat azt eredményezheti, hogy miután egy lehetséges Higgs-inflációs modell paraméterei rögzítésre kerülnek az infláció energiaskáláján, figyelembe véve asztrofizikai megfigyeléseket, azután az RG módszer használatával kiszámolható az RG futása az elektromos skáláig, ahol a Standard modell Higgs potenciál paramétereit kell visszaadnia.

Mindemellett az RG megközelítés nem csak az infláció utáni szakaszra, hanem az infláció előtti időszakra is alkalmazható lehet a nagyobb energiák felé, egészen akár a Planck skáláig. Így az inflációs potenciálnak ebben a periódusban is lehet RG evolúciója. Lehetséges ezt a mechanizmust az infláció indukálására felhasználni?

A tézisem ezen kérdéseket járja körül bemutatva a kutatásom eredményeit, amik választ adhatnak ezen témakörökben.

### 3. Eredmények

Az optimalizálás kérdésének megválaszolásához a minimális érzékenység elvét alkalmaztam a kompakt tartójú, sima (CSS) regulátor optimalizálásához az  $O(N)$  és a tömeges sine-Gordon (MSG) modell keretében lokális potenciál közelítésben (LPA). A CSS regulátor paramétereit optimalizáltam egy másik módszerrel is, kihasználva a spontán szimmetriasértés (SSB) hiányának megkövetelését az egy-dimenziós sine-Gordon modellben.

**T1:** Alapos vizsgálatnak vettem alá a CSS regulátort különböző optimalizálási módszerekkel, három különböző dimenzióban, három modellre, LPA-ban és LPA'-ban, két különböző normálással, amely azt mutatta, hogy a CSS regulátor Litim limesze az optimális választás. [1,2]

Tanulmányoztam az FRG módszer megbízhatóságát az  $O(N)$  modellek esetében különös figyelmet szentelve a csonkolt Taylor sorfejtett potenciál és a lokális pontenciál közelítésre, megvizsgálva, hogy ezek elengedőek-e, hogy a Mermin-Wagner tételt helyesen visszaadják.

**T2:** SSB mindig megjelenik a csonkolt  $O(N)$  modellben, olyan esetben is, amikor ez nem megengedett. Azonban a minimum körül Taylor sorfejtett potenciált és az egzakt (nem csonkolt) LPA-t használva, az eredmények helyesen visszaadják a Mermin-Wagner tételt az  $O(N \geq 2)$  modellekre, minden dimenzióban. A két-dimenziós Ising modell ( $N = 1$ ) az egyedüli kivétel, amikor az egzaktul kezelt LPA hibás kvalitatív képet ad, tévesen az SSB hiányát jelezve. [3,4]

Az FRG módszer a kozmológiában is alkalmazható, ha az Univerzum időbeli fejlődését azonosítani lehet egy RG skálázással. Az MSG modellt, mint Higgs inflációs skalármezőt javasolva tanulmányoztam ezen foratókönyv következményeit.

**T3:** A javasolt MSG modell egy kitűnő Higgs-inflációs elméletnek bizonyult, hiszen figyelemreméltó egyezést mutat a kozmológiai megfigyelésekkel. Az RG analízisét végrehajtva azt találtam, hogy a modell képes egyszerre leírni a kozmológiai és elektroyenge skálán történő méréseket, valamint nagyságrendileg visszaadja a Higgs részecske tömegét az infláció utáni elektroyenge skálán, a nagyenergiás (UV) kezdőértékektől függetlenül. [5]

Mindez azt sugallja, hogy az RG megközelítés nem csak az infláció utáni szakaszra, hanem az infláció előtti időszakra is alkalmazható lehet a nagyobb energiák felé, egészen akár a Planck skáláig.

**T4:** Egy új inflációs mechanizmust javasoltam, amely szerint az inflációt a potenciál RG futása indukálja az Univerzum korai szakaszában, ami megoldhatja a kezdeti feltétel problémáját. A mechanizmus az effektív potenciál konvexifikációjára alapszik az alacsony energiás (IR) határesetben. A kezdeti feltételezés, hogy a Planck skála körüli nagy energiákon az inflaton vákuum várható értéke beragadt egy hamis vákuumba, majd ahogyan a potenciál ellaposodik elegendi a várható értéket, elindítva az inflációt. Megmutattam ezen forgatókönyv alkalmazhatóságát az MSG modellre, amely kiváló egyezést mutat a kozmológiai mérésekkel, rögzítve a modell paramétereit az infláció skáláján. Meghatároztam az MSG potenciál RG evolúcióját a funkcionális RG módszer használatával, megmutatva a lokális minimumok eltűnését a Planck skálától az inflációs skáláig történő RG futás következtében. [6]

## 4. Jelen dolgozat eredményeire vonatkozó közlemények

1. I. G. Márián, U. D. Jentschura, I. Nándori, *The numerically optimized regulator and the functional renormalization group*, J. Phys. G **41** 055001 (2014)
2. I. Nándori, I. G. Márián, V. Bacsó, *Spontaneous symmetry breaking and optimization of functional renormalization group*, Phys. Rev. D **89** 047701 (2014)
3. N. Defenu, P. Mati, I. G. Márián, I. Nándori, A. Trombettoni, *Truncation effects in the functional renormalization group study of spontaneous symmetry breaking*, JHEP **05** 141 (2015)
4. N. Defenu, V. Bacsó, I. G. Márián, I. Nándori, A. Trombettoni, *Berezinskii-Kosterlitz-Thouless transition and criticality of an elliptic deformation of the sine-Gordon model*, J. Phys. A, **52** 345002 (2019)
5. I. G. Márián, N. Defenu, U. D. Jentschura, A. Trombettoni, I. Nándori, *Pseudo-periodic natural Higgs inflation*, Nucl. Phys. B **945** 114642 (2019)
6. I. G. Márián, N. Defenu, U. D. Jentschura, A. Trombettoni, I. Nándori, *Renormalization-group running induced cosmic inflation*, JCAP **06** 028 (2020)

## 5. Disszertációhoz nem kapcsolódó közlemények

1. Zs. Iszály, K. Lovász, I. Nagy, I. G. Márián, J. Rácz, I. A. Szabó, L. Tóth, N. F. Vas, V. Vékony, I. Nándori, *Efficiency of magnetic hyperthermia in the presence of rotating and static fields*, JMMM **466** 452 (2018)



Nyilvántartási szám: DEENK/336/2020.PL  
Tárgy: PhD Publikációs Lista

Jelölt: Márián István Gábor

Doktori Iskola: Fizikai Tudományok Doktori Iskola

### **A PhD értekezés alapjául szolgáló közlemények**

Idegen nyelvű tudományos közlemények külföldi folyóiratban (6)

1. **Márián, I. G.**, Defenu, N., Jentschura, U. D., Trombettoni, A., Nándori, I.: Renormalization-group running induced cosmic inflation.  
*J. Cosmol. Astropart. Phys.* 2020 (06), 028-028, 2020. EISSN: 1475-7516.  
DOI: <http://dx.doi.org/10.1088/1475-7516/2020/06/028>  
IF: 5.21 (2019)
2. Defenu, N., Borbélyné Bacsó, V., **Márián, I. G.**, Nándori, I., Trombettoni, A.: Berezinskii-Kosterlitz-Thouless transition and criticality of an elliptic deformation of the sine-Gordon model.  
*J. Phys. A-Math. Theor.* 52 (34), 1-18, 2019. ISSN: 1751-8113.  
DOI: <http://dx.doi.org/10.1088/1751-8121/ab31c5>  
IF: 1.996
3. **Márián, I. G.**, Defenu, N., Jentschura, U. D., Trombettoni, A., Nándori, I.: Pseudo-periodic natural Higgs inflation.  
*Nucl. Phys. B.* 945, 1-19, 2019. ISSN: 0550-3213.  
DOI: <http://dx.doi.org/10.1016/j.nuclphysb.2019.114642>  
IF: 2.817
4. Defenu, N., Mati, P., **Márián, I. G.**, Nándori, I., Trombettoni, A.: Truncation effects in the functional renormalization group study of spontaneous symmetry breaking.  
*J. High Energy Phys.* 2015 (5), 1-11, 2015. ISSN: 1126-6708.  
DOI: [http://dx.doi.org/10.1007/JHEP05\(2015\)141](http://dx.doi.org/10.1007/JHEP05(2015)141)  
IF: 6.023
5. Nándori, I., **Márián, I. G.**, Borbélyné Bacsó, V.: Spontaneous symmetry breaking and optimization of functional renormalization group.  
*Phys. Rev. D.* 89 (4), 047701-5, 2014. ISSN: 1550-7998.  
DOI: <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevD.89.047701>  
IF: 4.643





6. **Márián, I. G.**, Jentschura, U. D., Nándori, I.: The numerically optimized regulator and the functional renormalization group.

*J. Phys. G-Nucl. Part. Phys.* 41 (5), 1-17, 2014. ISSN: 0954-3899.

DOI: <http://dx.doi.org/10.1088/0954-3899/41/5/055001>

IF: 2.777

### További közlemények

#### Idegen nyelvű tudományos közlemények külföldi folyóiratban (1)

7. Iszály, Z., Lovász, K., Nagy, I., **Márián, I. G.**, Rácz, J., Szabó, I. A., Tóth, L., Vas, N. F., Vékony, V., Nándori, I.: Efficiency of magnetic hyperthermia in the presence of rotating and static fields.

*J. Magn. Magn. Mater.* 466, 452-462, 2018. ISSN: 0304-8853.

DOI: <http://dx.doi.org/10.1016/j.jmmm.2018.07.043>

IF: 2.683

**A közlő folyóiratok összesített impakt faktora: 26,149**

**A közlő folyóiratok összesített impakt faktora (az értekezés alapjául szolgáló közleményekre):  
23,466**

A DEENK a Jelölt által az iDEa Tudóstérbe feltöltött adatok bibliográfiai és tudománytermetriai ellenőrzését a tudományos adatbázisok és a Journal Citation Reports Impact Factor lista alapján elvégezte.

Debrecen, 2020.11.11.





Short thesis for the degree of doctor of philosophy (PhD)

# Optimization and Applications of the Functional Renormalization Group

István Gábor Márián

Supervisor: Dr. István Nándori



UNIVERSITY OF DEBRECEN  
Doctoral School of Physics  
Debrecen, 2020



# 1. Introduction

Two of the greatest achievements in theoretical physics are the theory of special relativity and quantum mechanics. A fundamental theory of physics must unite these areas and be both relativistic and quantized. This is how quantum field theory was formed describing the fundamental forces of nature as interactions between elementary particles, which are excitations of the more fundamental objects, the quantum fields. One of the consequences of unifying the theory of special relativity and quantum mechanics is that the physical quantities such as the charge or mass of a particle measured in vacuum become scale-dependent due to quantum fluctuations. This means that even the strength of an interaction depends on the energy or momentum scale of the interaction. A powerful tool to describe this scale-dependence is the functional renormalization group (FRG) method which takes into account the fluctuations of a system at different scales by integrating out the modes of fluctuations successively. It can be used to study critical phenomena, phase diagrams, phase transitions of a large number of models providing a deep insight into their universal properties.

## 2. Motivation

The FRG equation is an exact one, however, in most cases approximations are needed to obtain a solution. When approximations are used the results could depend on the so called regulator function. The question arises, which regulator function gives the most accurate predictions for physical quantities such as critical exponents at a certain level of approximation?

Approximate results may also suggest unphysical properties of a system, like the presence of a fixed point indicating a spurious phase transition. Thus, it is crucial to know what is a sufficient approximation that produces reliable results when different models are investigated.

Another interesting question is whether it is possible to view the time evolution of the Universe going through different temperatures and energy scales as a renormalization group (RG) flow. A consequence of this connection is the possibility to constrain the parameters of a candidate Higgs-inflationary model at the scale of inflation by astrophysical observations, and then calculate its RG running down to the electroweak scale by the RG method, where it should recover the measured parameters of the Standard model Higgs potential.

Furthermore, the RG approach could be applied not only in the post-inflationary, but also in the pre-inflationary period up to very high energies around the Planck scale. Thus the inflationary potential can have an RG evolution in this period. Is it possible to use this mechanism to induce inflation?

My thesis is centered around these questions presenting the results of my research which provide some of the answers.

### 3. Results

To answer the question of optimization I have studied the compactly supported smooth (CSS) regulator using the optimization method called the principle of minimal sensitivity. I have applied this principle in the framework of the  $O(N)$  and the massive sine-Gordon (MSG) models in local potential approximation (LPA). The parameters of the CSS regulator has been also optimized based on the requirement of the absence of spontaneous symmetry breaking (SSB) in the one-dimensional sine-Gordon model beyond LPA.

**T1:** The CSS regulator was thoroughly investigated with various optimization methods, in three different dimensions, for three different models, both in LPA and LPA' and with two different normalization all indicating that the Litim limit of the CSS regulator is the optimal choice. [1,2]

I examined the reliability of the FRG method on  $O(N)$  models paying special attention to its truncated Taylor expanded potential and the local potential approximation discussing what is sufficient to recover the Mermin-Wagner theorem.

**T2:** SSB always appears in the truncated  $O(N)$  models, even when it should not, however the Taylor expanded potential around the minimum and the LPA when treated exactly, without truncations, is sufficient to reproduce the Mermin-Wagner theorem for the  $O(N \geq 2)$  models in all dimensions. The only exception when the exactly treated LPA gives an incorrect qualitative picture is for the two-dimensional Ising model ( $N = 1$ ), where it incorrectly predicts the absence of SSB. [3,4]

FRG can also find its applications in cosmology if the time evolution of the Universe can be identified with an RG scaling. I have investigated

the consequence of this scenario proposing the MSG model as a Higgs-inflationary scalar field.

**T3:** The proposed MSG model proved to be an excellent candidate for a Higgs-inflationary theory, since it provides a remarkable agreement with cosmological observations. By performing its RG analysis I have found that it can simultaneously describe the physics both at cosmological and electroweak scales and it recovers the Higgs mass by the correct order of magnitude at the electroweak scale in the post-inflation period independently of the high-energy (UV) initial conditions. [5]

Furthermore, the RG approach could be applied not only in the post-inflationary, but also in the pre-inflationary period up to very high energies around the Planck scale.

**T4:** I have proposed a new inflationary scenario which suggests that the inflation was induced by the RG running of the potential in the pre-inflationary period which could also solve the initial condition problem. It is based on the convexification of the effective potential in the low-energy (IR) limit. The vacuum expectation value of the inflaton field is assumed to be trapped in a false vacuum at high energies around the Planck scale then it is released as the potential flattens out inducing inflation. I have showed the validity of the mechanism for the MSG model, which has an excellent agreement with cosmological measurements fixing its parameters at the scale of inflation. I have calculated the RG evolution of the model using the functional RG method demonstrating the disappearance of its second minima due to the RG running from the Planck scale towards the scale of inflation. [6]

## 4. Publications on the results of the present thesis

1. I. G. Máriań, U. D. Jentschura, I. Nándori, *The numerically optimized regulator and the functional renormalization group*, J. Phys. G **41** 055001 (2014)
2. I. Nándori, I. G. Máriań, V. Bacsó, *Spontaneous symmetry breaking and optimization of functional renormalization group*, Phys. Rev. D **89** 047701 (2014)
3. N. Defenu, P. Mati, I. G. Máriań, I. Nándori, A. Trombettoni, *Truncation effects in the functional renormalization group study of spontaneous symmetry breaking*, JHEP **05** 141 (2015)
4. N. Defenu, V. Bacsó, I. G. Máriań, I. Nándori, A. Trombettoni, *Berezinskii-Kosterlitz-Thouless transition and criticality of an elliptic deformation of the sine-Gordon model*, J. Phys. A, **52** 345002 (2019)
5. I. G. Máriań, N. Defenu, U. D. Jentschura, A. Trombettoni, I. Nándori, *Pseudo-periodic natural Higgs inflation*, Nucl. Phys. B **945** 114642 (2019)
6. I. G. Máriań, N. Defenu, U. D. Jentschura, A. Trombettoni, I. Nándori, *Renormalization-group running induced cosmic inflation*, JCAP **06** 028 (2020)

## 5. Publications not related to the dissertation

1. Zs. Iszály, K. Lovász, I. Nagy, I. G. Máriań, J. Rácz, I. A. Szabó, L. Tóth, N. F. Vas, V. Vékony, I. Nándori, *Efficiency of magnetic hyperthermia in the presence of rotating and static fields*, JMMM **466** 452 (2018)



Registry number: DEENK/336/2020.PL  
Subject: PhD Publication List

Candidate: István Gábor Márián  
Doctoral School: Doctoral School of Physics

### List of publications related to the dissertation

#### Foreign language scientific articles in international journals (6)

1. **Márián, I. G.**, Defenu, N., Jentschura, U. D., Trombettoni, A., Nándori, I.: Renormalization-group running induced cosmic inflation.  
*J. Cosmol. Astropart. Phys.* 2020 (06), 028-028, 2020. EISSN: 1475-7516.  
DOI: <http://dx.doi.org/10.1088/1475-7516/2020/06/028>  
IF: 5.21 (2019)
2. Defenu, N., Borbélyné Bacsó, V., **Márián, I. G.**, Nándori, I., Trombettoni, A.: Berezinskii-Kosterlitz-Thouless transition and criticality of an elliptic deformation of the sine-Gordon model.  
*J. Phys. A-Math. Theor.* 52 (34), 1-18, 2019. ISSN: 1751-8113.  
DOI: <http://dx.doi.org/10.1088/1751-8121/ab31c5>  
IF: 1.996
3. **Márián, I. G.**, Defenu, N., Jentschura, U. D., Trombettoni, A., Nándori, I.: Pseudo-periodic natural Higgs inflation.  
*Nucl. Phys. B.* 945, 1-19, 2019. ISSN: 0550-3213.  
DOI: <http://dx.doi.org/10.1016/j.nuclphysb.2019.114642>  
IF: 2.817
4. Defenu, N., Mati, P., **Márián, I. G.**, Nándori, I., Trombettoni, A.: Truncation effects in the functional renormalization group study of spontaneous symmetry breaking.  
*J. High Energy Phys.* 2015 (5), 1-11, 2015. ISSN: 1126-6708.  
DOI: [http://dx.doi.org/10.1007/JHEP05\(2015\)141](http://dx.doi.org/10.1007/JHEP05(2015)141)  
IF: 6.023
5. Nándori, I., **Márián, I. G.**, Borbélyné Bacsó, V.: Spontaneous symmetry breaking and optimization of functional renormalization group.  
*Phys. Rev. D.* 89 (4), 047701-5, 2014. ISSN: 1550-7998.  
DOI: <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevD.89.047701>  
IF: 4.643





6. **Márián, I. G.**, Jentschura, U. D., Nándori, I.: The numerically optimized regulator and the functional renormalization group.

*J. Phys. G-Nucl. Part. Phys.* 41 (5), 1-17, 2014. ISSN: 0954-3899.

DOI: <http://dx.doi.org/10.1088/0954-3899/41/5/055001>

IF: 2.777

### List of other publications

#### Foreign language scientific articles in international journals (1)

7. Iszály, Z., Lovász, K., Nagy, I., **Márián, I. G.**, Rácz, J., Szabó, I. A., Tóth, L., Vas, N. F., Vékony, V., Nándori, I.: Efficiency of magnetic hyperthermia in the presence of rotating and static fields.

*J. Magn. Magn. Mater.* 466, 452-462, 2018. ISSN: 0304-8853.

DOI: <http://dx.doi.org/10.1016/j.jmmm.2018.07.043>

IF: 2.683

**Total IF of journals (all publications): 26,149**

**Total IF of journals (publications related to the dissertation): 23,466**

The Candidate's publication data submitted to the iDEa Tudóstér have been validated by DEENK on the basis of the Journal Citation Report (Impact Factor) database.

11 November, 2020

