1949

A MATEMATIKATÖRTÉNET FELHASZNÁLÁSA A GIMNÁZIUMI MATEMATIKATANÍTÁSBAN

Egyetemi doktori (PhD) értekezés

Szerző: **Matos Zoltán**

Témavezető: **Herendiné dr. Kónya Eszter**

Debreceni Egyetem

Természettudományi és Informatikai Doktori Tanács

Matematika- és Számítástudományok Doktori Iskola

Debrecen, 2021

Ezen értekezést a Debreceni Egyetem Természettudományi és Informatikai Doktori Tanács Matematika- és Számítástudományok Doktori Iskola Didaktika programja keretében készítettem a Debreceni Egyetem természettudományi doktori (PhD) fokozatának elnyerése céljából.

Nyilatkozom arról, hogy a tézisekben leírt eredmények nem képezik más PhD disszertáció részét.

Debrecen, 20. . . . .

……………………….

Matos Zoltán

Tanúsítom, hogy Matos Zoltán doktorjelölt 2017 – 2021 között a fent megnevezett Doktori Iskola Didaktika programjának keretében irányításommal végezte munkáját. Az értekezésben foglalt eredményekhez a jelölt önálló alkotó tevékenységével meghatározóan hozzájárult. Nyilatkozom továbbá arról, hogy a tézisekben leírt eredmények nem képezik más PhD disszertáció részét.

Az értekezés elfogadását javasolom.

Debrecen, 20.. . . . .

…………………………………………………………….

Herendiné dr. Kónya Eszter, témavezető

A MATEMATIKATÖRTÉNET FELHASZNÁLÁSA A GIMNÁZIUMI MATEMATIKATANÍTÁSBAN

Értekezés a doktori (Ph.D.) fokozat megszerzése érdekében
a matematika tudományágban

Írta: Matos Zoltán okleveles matematika szakos tanár

Készült a Debreceni Egyetem Matematika- és Számítástudományok doktori iskolája
(Didaktika programja) keretében

Témavezető: Herendiné Dr. Kónya Eszter

Az értekezés bírálói:

Dr. ....
Dr. ....

A bírálóbizottság:

elnök: Dr. ....
tagok: Dr. ....
Dr. ....
Dr. ....
Dr. ....

Az értekezés védésének időpontja: 20… . ……………… … .

KÖSZÖNETNYILVÁNÍTÁS

Köszönöm témavezetőmnek, Herendiné dr. Kónya Eszternek az elmúlt években nyújtott folyamatos támogatását, bíztatását, a didaktikai kutatások módszertanának és hiteles dokumentálásának megismerését elősegítő rendszeres konzultációkat.

Köszönöm Csigér Ildikó, dr. Kopasz Katalin és Tritz Árpád kollégáimnak, valamint az SZTE Gyakorló Gimnázium és Általános Iskola érintett diákjainak a pedagógiai kísérletek, valamint a hozzájuk kapcsolódó felmérések lebonyolításához nyújtott segítséget.

Köszönöm Varga Ferencné, Piroska néninek, az SZTE Bolyai Intézete könyvtárosának a segítségét, aki doktori tanulmányaim alatt végig segítőkészen lehetővé tette, hogy hozzájussak a szükséges szakirodalomhoz.

Köszönöm Karchesz Éva és Farkas Judit kolléganőimnek a kézirat tüzetes átolvasását, stilisztikai és helyesírási javítását.

Köszönöm szüleimnek, feleségemnek, anyósomnak, hogy az elmúlt években végig támogattak, időt és lehetőséget teremtettek ezen disszertáció elkészítéséhez.

TARTALOMJEGYZÉK

1. Bevezetés

Ebben a disszertációban bemutatott kutatást 16 évnyi gimnáziumi matematikatanítás tanári tapasztalatai inspirálták. Kezdeti véletlenszerű felfedezéseimet, később tudatos megfigyelések, majd a doktori iskolában eltöltött évek alatt megismert szakirodalom, végül pedagógiai kísérletek támasztották alá. Ilyen megfigyelésem volt, hogy a legtöbb téma pusztán a „számok kicserélésével" történő gyakoroltatása egy idő után nem visz előbbre. Hány diákkal érhettem volna hamarabb célhoz, ha már pályám kezdetén magaménak tudhattam volna Revuz gondolatát, miszerint

> *„A tanítás kezdeti időszakában lehet a legsúlyosabb szinte jóvátehetetlen károkat okozni azzal, hogy a valódi megértést a tanultak mechanikus gyakoroltatásával pótolják". (Revuz 1973, p. 14.)*

Miután a szolgai begyakorlás helyett, immár igyekeztem változatos feladatokkal, több problémaszituációt alkotva gyakoroltatni például az azonos alapú hatványok szorzását, egyszer a következő feladatot tűztem ki: *Végezzük el a műveletet:* $3^1 \cdot 3^2 \cdot 3^3 \cdot \dots \cdot 3^{100}$*!* Több diák egyszerre kiáltott fel: *Gauss módszer*, majd helyesen oldották meg a feladatot. Azóta minden évben megpróbálom ezt kilencedikeseknél, s hosszabb-rövidebb rávezetés után, ugyanez a szituáció ismétlődik meg. Arra gondoltam, hogy bár fizika tudásom nagyon alapszintű, mégis emlékszem Archimédesz törvényére, hiszen az utcán meztelenül kiabálva rohanó tudósról szóló történet örökre emlékezetembe vésődött, s – mintegy velejáróként – a tételt is megjegyeztem. Ugyanezt élhették át azok a diákok, akik számára a „kis Gauss története" egy módszer hosszú távú memóriába történő rögzülését segítette.

A kérdés adta magát: van-e más olyan történet, amivel egy matematikai tételnél néhány diák esetében hasonló hatást érhetnénk el? Matematikatörténeti könyveket olvasva gyűjtöttem mindent, ami a gimnáziumi tananyaghoz kapcsolódott. Olvasmányaim során feltűnt, hogy a matematikát népszerűsíteni kívánó könyvek (pl. Simon Singhtől A Nagy Fermat-sejtés) rengeteg matematikatörténeti vonatkozást tartalmaznak, azaz mások is úgy gondolhatták, hogy a matematikatörténet vonzóvá és érdekesebbé tudja tenni ezt a tantárgyat. Az órákra egyre többször bevitt, néhány másodpercet igénybe vevő megjegyzések (pl. „a differenciálhányadost eleink *külzeléki hánylatnak* nevezték") felkeltették a diákok érdeklődését, s érezhetően oldani tudták a néha unalmasnak ható órák hangulatát. Van kollégám, aki minden órán elmond egy-

egy viccet, van, aki az asztal tetejére mászva próbálja egy fontos részre felhívni a figyelmet, van, aki számítógéppel próbál színes és villogó animációkat kivetíteni. A matematikatörténet az asztalmászásnál kevesebb fáradtsággal járó, működő informatikai eszközt nem igénylő, ugyanakkor többlet tartalommal bíró pedagógiai eszközként épült be tanári kelléktáramba. Nem egyetlen és kizárólagos, s bizonyára nem minden diáknál azonos pozitív hatást elérő eszközről van szó. Ilyen valószínűleg nem is létezik.

E felismerés öröme arra késztetett, hogy beszámoljak róla közvetlen kollégáimnak és matematikát tanító ismerőseimnek, akik egymástól függetlenül ugyanazt mondták: heti 22-26 tanítási óra mellett, nincs idejük és energiájuk elolvasni és kijegyzetelni egy 200-300 oldalas könyvet azért, hogy egy-két mondatot mondjanak belőle el egy matematikaórán. Elmondott példáimat a beszélgetések során a legtöbben felírták egy papírra, hogy el ne felejtsék, ami egyértelműen mutatta számomra, hogy ezeket a kollégák is érdekesnek és a tanításba beépíthetőnek érezték. Ugyanakkor a fentebb említett érv arról is meggyőzött, hogy akármilyen szépen megírt kronologikusan felépített, vagy egy-egy személy életművét bemutató matematikatörténeti művet adnék a legtöbb tanár ismerősöm kezébe, annak a mindennapok tanítási óráira kevés kihatása lenne. Ezért úgy gondoltam, hogy a felépítés módján kell változtatni, s a tananyag felépítési logikáját követve, a tanórába való beépíthetőséget figyelembe véve kell létrehozni egy matematikatörténeti segédanyagot.

Szendrei János a matematikaoktatással kapcsolatos kutatás eredményeinek rendszerezésekor megemlíti a *„gyakorlati hatékonyságot növelő kategóriát”,* amelyhez szerinte azok a tananyagfejlesztések tartoznak, amelyet a gyakorló tanárok mindennapi munkájukba be tudnak építeni, s amely segít nekik jobban megismerni azt a tananyagot, amit tanítanak (Szendrei János, 1993).

Ez a disszertáció egy ilyen kutatási eredményt kíván bemutatni. Időszerűségét az adja, hogy az elmúlt évtizedekben a matematikatörténet szerepe jelentősen megnőtt a hazai közoktatásban. Például a 2017. január 1-től érvényes érettségi vizsgakövetelmény szerint az emelt szintű szóbeli érettségin a vizsgázó ismertetheti az adott témakör matematikatörténeti vonatkozásait. Így azok a tanárok, akik a matematikatörténetben nem jártasak, komoly problémával néztek szembe a vizsgáztatás vagy a vizsgára való felkészítés során. Számukra is használható példát szeretem volna adni arra, hogy mit, mikor s hogyan lehet matematikatörténetből tanítani magyarországi matematikaórákon.

Kutatásom elsődlegesen a közoktatást érettségi vizsgával befejezni kívánó, legfőképpen nappali tagozatos gimnazista diákok matematika tananyagát célozta meg. Felmerülhet a kérdés, hogy miért éppen ők? A válasz több összetevőjű:

- az ilyen diák a középiskolai évei alatt végig tanul matematikát;
- matematikatudást tekintve ez a legszélesebb réteg (hiszen ugyanúgy ide tartozik a matematika tagozatos diákolimpikon és a művészeti szakgimnazista is);
- e széles spektrum ellenére a matematika érettségi vizsga egységes kimeneteli követelményként jelenik meg;
- ezt a réteget ismerem a legjobban, mindennapi munkám során velük találkozom.

A disszertáció a következőképpen épül fel. Először a matematikatörténet oktatásba történő beépítésével kapcsolatos főbb kutatások történetét, és a dolgozat elméleti hátterét, majd kicsit részletesebben a matematikatörténet hazai közoktatási rendszerbe történő beépülését foglaltam össze. A következő rész a segédanyag elkészítésének kapcsán felmerülő kérdések tisztázását tartalmazza. Milyen elvek mentén, mit tartalmazva épüljön fel a segédanyag? Mi lehet az egyes tananyagtartalmak célja? Milyen formában illeszthető be a tanítási órába? A következő rész ezen általános elvek megvalósulásaként elkészített segédanyag bemutatásáról szól. Itt annak csak a bevezető algebra és számelmélettel[1] kapcsolatos részét közlöm, mivel a kipróbálási kísérletek is erre vonatkoztak. A segédanyag többi tananyaghoz kapcsolódó tartalmának egyes részei az előző fejezet példáiban jelennek meg. A következő részek a kutatási kérdések megválaszolását lehetővé tevő kipróbálást és felméréseket, majd az ezekből leszűrhető tanulságokat és következtetéseket, valamint a további kutatási lehetőségeket mutatják be.

[1] A kipróbálások és a felmérések a 2018/19-es és a 2019/20-as tanévben zajlottak, amikor ezek a részek még kilencedik évfolyam tananyagában szerepeltek. Az azóta megjelent Nemzeti alaptanterv a számelméletet 11-12. évfolyamhoz rendeli.

2. A nemzetközi kutatások áttekintése, a dolgozat elméleti háttere

2.1. A nemzetközi kutatások áttekintése

A matematikatörténet újkori kutatásának kezdeteit Vekerdi László a XVIII. századra teszi. Mivel azonban a XIX. században a történeti kutatás elsősorban a politika- és művészettörténetre fókuszált, így e fejlődés gyorsan elakadt, s – az időközben kikristályosodott segédtudományok figyelembevételével – csak a XIX. század második felében indult újra nagy lendülettel (Vekerdi, 1994). Az, hogy ezen kutatások eredményei az oktatásban felhasználhatók-e, több pedagógus (pl. Barwell, 1913), filozófus (pl. Bachelard, 1934) és matematikus (pl. Lebesgue) érdeklődését is felkeltette. Korának egyik legelismertebb matematikusa[2], Henri Poincarré egyenesen a következőképp fogalmazott: *„A nevelő feladata, hogy a gyermek lelkét újra vezesse át – néhány állomásnál gyorsabban, de egyet sem kihagyva – arra, amerre egykor apái lelke is járt. Ilyesformán a tudomány történetének kell kalauzunknak lennie." (Poincarré, 1889, p. 159.)* David Eugene Smith az 1923-ban megjelent History of Mathematics című könyvének előszavában már a matematikatörténet matematikatanár-képzésben, valamint a közép- és felsőoktatásban játszott szerepének fontosságát hangsúlyozta.

Az 1960-as évek végétől kezdődően a matematikatörténet matematikatanításba történő beépítésének lehetősége népszerű kutatási területté vált. Rengeteg cikk, könyv jelent meg ebben a témában. Számos szerző közös munkájaként, a National Council of Teachers of Mathematics[3] által 1969-ben megjelentetett, s azóta több kiadást megért *Historical Topics for the Mathematics Classroom* e téma kutatásának fejlődéséről tanúskodik. E könyv 120 egy-két oldalas „matematikatörténeti kapszulát" tartalmaz, melyeket a szerzők a matematika fejezetei köré csoportosítva rendszereztek.

E kötet megjelenésének évében alakult meg Párizsban – André Revuz közreműködésével – az első Matematikatanítással Kapcsolatos Kutatások Intézete (IREM - Institut de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques), amely azóta is összefogja az oktatás különböző szintjén egy „tankerületben" dolgozó matematikatanárokat. A matematikadidaktikai kutatások eme

[2] Elismertségét mutatja, hogy a Magyar Tudomány Akadémia által 1902-ben a matematikában áttörő eredmények elérésének elismerésére létrehozott Bolyai János Nemzetközi Matematikai díjat elsőként Poincarrénak ítélte oda a Bolyai Bizottság, amelynek tagjai között szerepelt például Jean Gaston Darboux és Félix Klein is.

[3] Az Amerikai Egyesül Államok matematikatanárainak egyesülete.

centrumainak száma azóta 36-ra emelkedett. A matematikatörténet közoktatásban történő felhasználásának lehetősége e kutatóhelyeken kezdetektől fogva a vizsgálatok tárgyát képezte.

1972-ben Exeterben, a második matematika tanításról rendezett nemzetközi kongresszus (International Congress on Mathematical Education – ICME) alkalmával létrejött egy e témával foglalkozó nemzetközi kutatócsoport, *The international study group on the relation between the History and Pedagogy of Mathematics (HPM)*, amely azóta négyévente nemzetközi konferenciát szervez, s évente három alkalommal publikál[4].

A kutatók személyes találkozásának ezeken felül több rendszeres nemzetközi találkozó és konferencia is helyet biztosít. Például

- Francia tanárközösségek 1980-as évek eleje óta megrendezett találkozójából nőtt ki, az először 1993-ban Lyonban megrendezett *Europeen Summer University on the epistemology and history in mathematics education* (ESU), melyet előbb általában három, majd 2010-től négyévente rendeznek meg.
- A Bolyai János Matematika Társulat kezdeményezésére 2000 óta kétévente kerül megrendezésre a Matematikatörténet és Matematikaoktatás konferencia (*History of Mathematics and Teaching of Mathematics*).

E konferenciák létrejötte is mutatja, hogy a matematikatörténet oktatásban való felhasználásának kutatása az 1990-es évektől újabb lendületet kapott. Több kutató sorakoztatott fel érveket a matematikatörténet oktatásba történő beépítése mellett (pl. Fauvel, 1991).

E téma kutatásának igazi mérföldköve a világ több pontján dolgozó kutatók munkáját összefoglaló *History in mathematics education – The ICMI Study* (Fauvel & van Maanen, 2000) megjelenése volt, amely azáltal, hogy az addig összegyűlt tapasztalatokat, kérdéseket és kétségeket rendszerezte, a jövőbeni kutatások irányára is kihatott.

Bár Lefebvre e témát összefoglaló cikkében figyelmeztet, hogy *„minden kategorizálási mód kockázatos és önkényes részeket hordoz”* (Lefebvre, 1993, p. 24.) mégis az 1990-es évekre felerősödött a *miért* és *hogyan* kérdések megválaszolására, illetve a válaszok kategorizálására való törekvés. Például Fried a Fauvel (1991) által adott 15 matematikatörténet mellett szóló érvet a következő három téma köré csoportosította: (1) a matematika emberibbé tétele; (2) a matematika érdekesebbé, érthetőbbé, megközelíthetőbbé tétele; (3) a problémákba, problémamegoldásba történő mélyebb betekintés lehetővé tétele (Fried, 2001).

Roy (2006) a matematikatörténet tanórába történő beépítésének (a *hogyannak*) kétféle módját ismerteti óratervekkel ellátva, foglalkozásokra lebontva. Egyfelől eredeti szövegek

[4] lásd: http://www.clab.edc.uoc.gr/HPM/

tanulmányozásával kapcsolatos tevékenységeket ír le a célok, a szükséges források, s módszertani megjegyzések feltüntetésével, másfelől ötleteket ad arra, hogy hogyan lehetne matematikatörténetet kapcsolni például idegen nyelv, földrajz vagy történelem és állampolgári ismeretek órákhoz. Utóbbi esetben ő maga is megjegyzi, hogy ehhez a gyakorlatban a másik tárgyat tanító tanár hathatós támogatására van szükség.

Jankvist (2009a) e témában íródott cikke igyekszik kategorizálni a felhasznált módszereket (a *hogyanokat*), s tőlük elválasztva a felhasználás mellett szóló érveket (a *miérteket*). A módszereket három kategóriába sorolta. Anekdotikus megközelítés, tanulási modulokon keresztüli megközelítés, valamint az integrált történeti megközelítés. Az első leginkább izolált történetekkel, anekdotákkal próbálja megfűszerezni a matematikatanítást. Ide tartoznak az elmúlt évtizedekben több magyarországi tankönyv (pl. Sokszínű matematika tankönyvsorozat[5], Út a tudáshoz tankönyvsorozat[6]) margóján megjelenő képek, valamint fejezetek elején vagy végén található történetek, anekdoták. A második kategóriába tartozik például egy matematikatörténeti témára épülő probléma hosszabb vizsgálata, tanulói kutatómunkák és kiselőadások elkészítése vagy a Quadrature matematikai magazin állandó rovatát (Textes en questions) képező eredeti szövegekkel megfogalmazott matematikai problémák tárgyalása. A harmadik kategória egy adott tananyagrészre kiterjedő matematikai anyag fejlődésének, alakulásának bemutatását jelenti. A *miért* kérdésre adott válaszokat két kategóriába sorolta. Egyfelől a tanítást és tanulást segítő motivációs tényezők, másfelől a „matematika lelkét" és fejlődését megjelenítő eszközök, amelyek lehetővé teszik a diák számára, hogy a matematikára ne készként kapott dologként tekintsen, amely a maga tökéletességében, axiomatikusan felépítve *„szállt alá az égből"*.

Az ezredfordulót követő első évtizedben a matematikatörtént oktatásba történő beemelésével kapcsolatos korábbi kétségek nagyobb figyelmet kaptak. Több kutató utal a téma iránt lelkes tanárok nehézségeire (pl. Fried, 2001; Siu, 2007), az empirikus kutatások száma növelésének szükségességére (pl. Jankvist, 2009b), vagy az ilyen tanulmányok kutatás-módszertani nehézségeire (pl. Guillemette, 2011).

[5] (Kosztolányi, Kovács, Pintér, Urbán & Vincze, 2020)
[6] (Ábrahám, Kosztolányiné Nagy & Tóth, 2012)

2.2. A kutatás módszerének bemutatása

Így a 2000-es évek első két évtizedében e téma legfontosabb kutatási céljai között – a *miért* és *hogyan* kérdések megválaszolása mellett – a matematikatörténet oktatásba történő beépítésének empirikus vizsgálata vetődött fel, amelyhez ez a disszertáció is igyekszik hozzájárulni. Célunk kettős volt. Egyfelől létrehozni egy, a magyar oktatási rendszerhez készült matematikatörténeti segédanyagot, másfelől annak kipróbálását és hatékonyságát vizsgálni. Ez az oktatási segédanyagot létrehozó kutatás annak a kutatási módszernek a használatát implikálta, melyet az angol nyelvű szakirodalom *educational design researchnek*[7] nevez. Ezt magyarul *kutatással támogatott fejlesztésnek* lehetne legbeszédesebben visszaadni, ugyanis ez a körülírásos megfogalmazás áll a legközelebb az *educational design research* azon jellemvonásához, miszerint a gyakorlati és összetett oktatási problémák megoldásának ismétlődő fejlesztése mellett helyet kap a tudományos vizsgálat is. E kettős cél érdekében szisztematikusan és egyidejűleg végzett munka tekinthető az *educational design research* legfontosabb jellemzőjének. (McKenney & Revees, 2015)

Az elmúlt években végzett kutató és fejlesztő munkánk, valamint e disszertáció felépítése (Reeves, 2006) által a *design research* folyamataként megadott lépéseket követi, melyeket összefoglalóan az *1. táblázat* szemléltet.

REEVES ÁLTAL MEGADOTT LÉPÉSEK	**KUTATÓ- ÉS FEJLESZTŐMUNKA**	**DISSZERTÁCIÓBÉLI MEGJELENÉSE**
a problémák beazonosítása és elemzése kutatók és gyakorlati szakemberek együttes tevékenységével	a segédanyag létrehozása iránti igény felismerése	bevezetés első három fejezet
egy prototípus megoldás kifejlesztése	a segédanyag rendező elveinek megfogalmazása, majd a segédanyag létrehozása	negyedik és ötödik fejezet
a megoldás tesztelése és finomítása a gyakorlatban ismétlődő ciklusokkal	kutatási kérdések megfogalmazása a segédanyag kipróbálása, javítása, újbóli kipróbálása	hatodik, hetedik és nyolcadik fejezet
visszacsatolás a tervfejlesztési elvek megalkotásához, a megoldás gyakorlatban történő általánosítása	a kutatási kérdések megválaszolása, további fejlesztési lehetőségek megfogalmazása	kilencedik fejezet

1. táblázat

[7] A design research 2003-2004-ben vált általánosan ismertté főleg az Educational Researcher és a Learning Sciences folyóiratokban megjelent cikkek nyomán.

3. A matematikatörténet beépülése a magyar iskolai gyakorlatba

3.1. Bevezetés

Az elmúlt évtizedekben végbemenő hazai változások a matematikatörténet közoktatásban való megjelenését, szerepének felértékelődését is magukkal hozták. Szénássy Barna, a matematikatörténet egyik legnagyobb magyarországi szaktekintélye a rendszerváltás éveiben így foglalta össze az akkori helyzetet.

„Megítélésem szerint a matematikatörténet szerepe az utolsó két-három évtizedben minden oktatási intézményünkben jelentősen növekedett. Az általános és középiskolában a tankönyvek, szakköri füzetek és folyóiratok nyújtanak segítséget a tanároknak, és a tanulóifjúságot is érdeklik ezek az írások, tanulmányok. Egy-egy alkalmas helyre beillesztett matematikatörténeti adat nagymértékben élénkítheti a matematikai órák egyhangúságát. A tanárképző főiskolák és tudományegyetemek is tartanak ilyen tárgyú kollégiumokat, gyakoriak a matematikatörténeti szakdolgozatok." (Staar 1990, p. 122.)

Az azóta eltelt harminc évben ezek a változási folyamatok folytatódtak, sőt felerősödtek, és a közoktatás minden területét érintették. A következőkben ebből a szempontból tekintjük át a középfokú oktatási rendszert – kiemelten a gimnáziumokat – több területen érintő változásokat. Nem célunk egy-egy ilyen terület részletes elemzése, csupán a matematikatörténetre vonatkozó főbb tendenciát akarjuk tényszerűen kiemelni, s több szempontból bemutatni a mai állapothoz vezető utat.

3.2. Matematikatörténet az elmúlt 30 év oktatási szabályozásában

A mai magyarországi közoktatási rendszer egy összetett szabályozáson alapszik. Az alappillér az elveket és szemléletet megfogalmazó, az elsajátítandó kulcskompetenciákat kijelölő Nemzeti alaptanterv (továbbiakban NAT). A kerettanterv az, amely a NAT-ban megfogalmazott műveltségterületeket, minimum óraszámokat megadva tantárgyakra bontja. Erre épül az intézményi sajátosságokat figyelembe vevő, így adott iskola osztálytípusaira készült helyi tanterv. A tartalmában és mélységében adott osztálytípushoz így kialakított tananyag mellett a valóságban legalább ilyen fontos szerepe van a kimeneti követelmények szabályozásának, az érettségi követelményt leíró rendeletnek. Kijelenthető, hogy a matematikatörténet szerepe ezen jogszabályokban az elmúlt harminc évben folyamatosan nőtt.

Az 1994-ben elfogadott első NAT[8]-ban még semmiféle utalás nincs matematikatörténetre. A 2003-as NAT[9] a matematikatanítás szerepének ismertetésekor első helyen említi a matematika kulturális örökségként való bemutatását, valamint megemlíti, hogy a bevezetőben felsorolt célok, értékek és kompetenciák megjelenítéséhez jelenjenek meg a matematika felépülési elvei. A történetiség más tudomány és művészeti ágakkal való kapcsolatként, valamint a matematikának az emberiség kultúrtörténetébe való beépülésében jelenik meg. *„A műveltségi terület tanulása során elérhető a matematika szerepének megértése a természet- és társadalomtudományokban, a humán kultúra számos ágában, a döntésképesség fejlesztésében. Mindez hozzájárul a történeti szemléletmód kialakításához is.”* Lényegében ugyanezt ismétli meg szó szerint a négy évvel később megjelent NAT[10] is.

Mindezeket azonban már sokkal korábban megfogalmazták a matematika tanításáról gondolkodók. A német természetvizsgálók és orvosok 1905-ös meráni közgyűlésén hozott határozatok kihatottak a magyar matematikaoktatásra is. Ennek is köszönhető, hogy a Beke Manó egyetemi és Mikola Sándor gimnáziumi tanár vezetésével 1906-ban létrejövő reformbizottság jelentésében már szerepelt az a cél, hogy a tanulóban fejlődjék ki annak tudata, hogy a matematika fontos kulturális tényező is (Kratofil, 1938).

A matematikatörténetet komoly szerephez először a 2012-es NAT[11] juttatja. Maga a „matematikatörténet” kifejezés is itt fordul elő először. Már az alapcéloknál a következő

[8] 31/1994. (III. 12.) Korm. rendelet a Nemzeti alaptanterv Tantervi alapelveinek kiadásáról
[9] 243/2003. (XII. 17.) Korm. rendelet a Nemzeti alaptanterv kiadásáról, bevezetéséről és alkalmazásáról
[10] 202/2007. (VII. 31.) Korm. rendelet a Nemzeti alaptanterv kiadásáról, bevezetéséről és alkalmazásáról szóló 243/2003. (XII. 17.) Korm. rendelet módosításáról
[11] 110/2012. (VI. 4.) Korm. rendelet a Nemzeti alaptanterv kiadásáról, bevezetéséről és alkalmazásáról

olvasható: *„Fontos néhány neves matematikus és a tudomány fejlődése során felmerült, érdekes matematikai probléma megismertetése a diákokkal.”*

A korábban öt kategóriába sorolt közművelődési tartalom[12] a *„Tudománytörténeti és matematikai érdekességek, neves matematikusok”* megjelenésével itt hatra módosul, a következő tartalmakkal.

- 1 – 4. osztály: Rubik-kocka.
- 5 – 8. osztály: Euklidész, Pitagorasz, René Descartes, Bolyai Farkas, Bolyai János.
- 9 – 12. osztály: Thalész, Euler, Carl Friedrich Gauss, Blaise Pascal, Georg Ferdinand Cantor, Erdős Pál, Neumann János, Rényi Alfréd.

A NAT által kijelölt elvek mentén készült kerettantervekből érthető meg leginkább, hogy a fél mondatnyi utalásokat, célokat a tantervek készítői hogyan gondolták beépíteni az adott tárgy oktatásába, így a 2012-es gimnáziumi kerettanterv[13] részletesen említi több helyen a matematikatörténet használatát. *„A matematikatanításnak ebben a szakaszában sok érdekes matematikatörténeti vonatkozással lehet közelebb hozni a tanulókhoz a tantárgyat. A témakör egyes elemeihez kapcsolódva mutassuk be néhány matematikus életútját.”*

A kerettantervnek a matematikatörténet tananyagba történő beépítésével három deklarált célja is van. Egyfelől motivációs eszközként, másfelől a matematika kultúrtörténetbe történő beágyazódásának bemutatására használja. Ezeket a célokat leginkább a matematikatörténet egy-egy mozzanatának megismertetésével, a meg nem oldott, egyszerű sejtések megfogalmazásával, és nagy matematikusok életének, munkásságának megismertetésével javasolja elérni. Harmadrészt pedig megemlíti, hogy az anyanyelvi kommunikáció fejlesztésére szánt önálló kiselőadások és prezentációk elkészítéséhez a matematikatörténet feldolgozása kiválóan alkalmas. Ez a kerettanterv egy táblázatot is tartalmaz, amelyben az adott tananyagrészeknél összesen 14 esetben tüntet fel külön kiemelve egy-egy nevet vagy fogalmat.

Például a véges és végtelen halmazokkal kapcsolatos ismereteknél (*2. táblázat*).

Ismeretek	**Fejlesztési követelmények**	**Kapcsolódási pontok**
Véges és végtelen halmazok. Végtelen számosság szemléletes fogalma. *Matematikatörténet:* Cantor.	Annak megértése, hogy csak a véges halmazok elemszáma adható meg természetes számmal.	

2. táblázat

[12] Ezek a következők: (1.) Gondolkodási módszerek, halmazok, matematika logika, kombinatorika, gráfok, (2.) Számelmélet, algebra (3.) Geometria, (4.) Függvények, az analízis elemei (5.) Statisztika, valószínűség

[13] 51/2012. (XII. 21.) számú EMMI rendelet 3. melléklete

Ugyanakkor meg kell jegyezni, hogy ahogyan a kerettanterv szövegében a matematikatörténet tipográfiailag elkülönül, ugyanúgy elválik a matematikai ismeretektől is, és több esetben erőltetettnek hat. Például Cantor munkásságának (megérthethető-e egy 9. osztályossal?) és életrajzának ismerete kevéssé segíti a véges és végtelen halmazok fogalmának megértését, így csupán a kommunikációs készség fejlesztését szolgálhatja.

A 2020-ban megjelent NAT[14]-ban szintén szerepel a matematikatörténet, de már konkrét nevek említése és az életrajzok ismertetésének követelménye nélkül. Megmarad viszont a matematikatörténet, mint érdekesség forrása, illetve a 9-12. osztályosok számára megfogalmazott általános követelményeknél, a Matematikai kommunikáció alá írva az előző NAT-ból átemelt elvárás: *„ismer a tananyaghoz kapcsolódó matematikatörténeti vonatkozásokat”*. Ugyanezt a kommunikációhoz tartozó vonalat erősíti a NAT-ból a hozzá tartozó kerettantervbe szó szerint átemelt rész. *„A tanuló a matematika szaknyelvét érti és tudatosan használja. Életkorának megfelelő matematikai, matematikatörténeti szöveget képes önállóan olvasni, értelmezni. Mind írásban, mind szóban képes gondolatait a matematika szaknyelvének szabatos alkalmazásával közölni.”*[15]Az érdekesség és figyelemfelhívó szerep – a korábban meglévő tanulói kiselőadások mellett – itt újabb feldolgozási módban is megjelenik, amikor például a *Hatvány, gyök, exponenciális függvény, logaritmus* témakörnél a következő javasolt tevékenységi formát találjuk: *„Matematikatörténeti érdekességek (például déloszi probléma) feldolgozása projektmunkában.”* Összességében a 2020-ban megjelent NAT – a korábbiakhoz hasonlóan – figyelemfelkeltő, matematikai szaknyelven zajló kommunikációt erősítő, a matematikát az emberiség kultúrtörténetéhez illesztő szerepet szánt a matematikatörténetnek, amit változatos munkaformákkal javasol elérni.

A realitásokat figyelembe véve nagyon fontos megemlíteni, hogy a legtöbb középiskolai matematikatanár az óráján tárgyalt tananyagot és annak mélységét nem a NAT-hoz, a kerettantervhez vagy a helyi tantervhez, hanem a kimeneti követelményhez igazítja. E sorok írójának munkahelyén a tanári szobában a matematikatanárok asztalán mindig ott van egy példányban kinyomtatva a mindenki által folyamatosan használt, aktuális érettségi követelmény, míg a helyi tantervet csak annak módosításakor szokta a munkaközösség-vezető emailen elküldeni. Ezért ha egy gyakorló matematikatanárt a matematikatörténet középiskolai tanórai bevezetéséről kívánnánk meggyőzni, akkor ezt a kérdést az érettségi követelmény felől érdemes megközelíteni.

[14] 5/2020. (I. 31.) Korm. rendelet A Nemzeti alaptanterv kiadásáról, bevezetéséről és alkalmazásáról szóló 110/2012. (VI. 4.) Korm. rendelet módosításáról
[15] https://www.oktatas.hu/kozneveles/kerettantervek/2020_nat/kerettanterv_gimn_9_12_evf

A matematika érettségin 1981-től kezdve 2005-ig a feladatok egy véges zárt halmazból (Gábor, Gyapjas, Hárspatakiné, Pálmay, Pogáts, Reiman, & Scharnitky, 2003) kerültek ki. Az adott feladatok megoldása nem kívánt matematikatörténeti ismeretet, így a tanuló ilyen típusú tudása az érettségin semmilyen szerepet nem kapott. Ez hozzájárult ahhoz, hogy a matematikatanárok közül sokan ne is érdeklődjenek a kimeneti követelmény szempontjából teljesen közömbös matematikatörténet iránt. Sokan úgy gondolhatták, ez egy olyan plusz információhalmaz, amivel nem szabad és nem érdemes a diákokat terhelni. Néhány, ebben a korban szocializálódott tanártársam ma is fölösleges fecsegésként, és az *„Oldjuk meg az alábbi egyenletet a valós számok halmazán!”* típusú „tiszta matematikától” való devianciaként tekint a matematikatörténetre.

A kétszintű érettségi bevezetése utáni kimeneti követelményt meghatározó 40/2002. (V. 24.) OM rendeletben még nincs szerepe a matematikatörténetnek. Azonban 2017. január 1-től hatályos érettségi követelményben a matematikatörténet megjelent az emelt szintű vizsga szóbeli részében, mivel a vizsgázó feleletének a következőket kell tartalmaznia:

„- egy, a témához tartozó, a vizsgázó választása szerinti definíció pontos kimondása;

- egy, a témához tartozó, a vizsgázó választása szerinti tétel pontos kimondása és bizonyítása;

- a kitűzött feladat megoldása;

- a téma matematikán belüli vagy azon kívüli alkalmazása, illetve matematikatörténeti vonatkozása (több ismertetése vagy egy részletesebb bemutatása)”[16].

Ettől kezdve pedig a matematikatörténet bizonyos fokú ismerete több ezer diák számára a pusztán „apró betűs”, kiegészítő anyagból elsajátítandó és vizsgán is szerepet kapó résszé emelkedett.

[16] 1. melléklet a 33/2015. (VI. 24.) EMMI rendelethez

3.3. Matematikatörténet a középiskolai tankönyvekben és feladatgyűjteményekben

Egy adott korszak matematikatanításának a jogszabályi előírások és követelmények mellett a legfontosabb mutatói az adott kor tankönyvei. Sok tanár igyekszik ezek szerint haladni, az órák anyagát pedig az adott csoporttal aktuálisan vagy a pályája során korábban használt tankönyvekből és feladatgyűjteményekből állítja össze. Éppen ezért érdemes megvizsgálni, hogy a matematikatörténet hogyan jelent meg az elmúlt időszak tankönyveiben, feladatgyűjteményeiben. Ha csak az elmúlt néhány évtized tendenciái iránt érdeklődünk, akkor is érdemes időben nagyobbat hátra lépni, hiszen egy-egy tankönyv csak jogilag évül el egyik napról a másikra. A valóságban akármilyen reform is jön, egy adott könyv ott marad a tanár könyvespolcán. Így például a mostani diákok közül is sokan olyan tanároktól tanulnak, akik a matematikát évtizedekkel korábban, még régebben írott tankönyvekből sajátították el.

A második világháború előtti középiskolai mennyiségtan tankönyvekből a matematikatörténet általában hiányzott. Persze vannak kivételek is. Ilyen például a Debrecenben megjelent, református középiskolák számára engedélyezett, Jónás Márton által a gimnáziumok és leánygimnáziumok számára írt 8 részes mennyiségtan tankönyvsorozat, amely utolsó kötetének utolsó fejezete a matematika teljes történetét kb. másfél oldalban (!) tekinti át. Az összefoglaló tömörsége a szerző személyiségéből (Németh, 2014), s mennyiségtani tankönyvekről vallott elveiből[17] adódhatott.

A hivatalos törzsanyag mellett inkább a matematikát népszerűsítő szakirodalomban találhatunk matematikatörténettel foglalkozó könyveket, ismeretterjesztő cikkeket. Utóbbiakra példa a Középiskolai Mathematikai Lapok hasábjain 1896-tól 1908-ig Baumgartner Alajos tollából megjelenő (főleg az ókori matematikát bemutató) tudománytörténeti írások. A harmincas évek ismeretterjesztő irodalmából pedig több későbbi matematikusunk visszaemlékezésében (Róka, 2013) megjelenő három ún. Egmont Colerus-féle könyvet[18] kell megemlítenünk, melyek közül a harmadik – az 1942-ben megjelent *Pythagorastól Hilbertig* – matematikatörténettel foglalkozott.

---

[17] Jónás úgy gondolta, hogy *„az ideális tankönyv: a jól összeállított, bőséges példatár."* Erről írt gondolatait a Protestáns tanügyi szemle 1933. évi 1. számában fejti ki *Az ideális mennyiségtani tankönyv* című írásában.

[18] A Franklin-társulat Búvár könyvei sorozatában a következők jelentek meg: Az egyszeregytől az integrálig. Amit a matematikából mindenkinek tudnia kell (1937); A ponttól a négy dimenzióig. Amit geometriából mindenkinek tudnia kell (1938); Pythagorastól Hilbertig. Amit a matematika történetéről mindenkinek tudnia kell (1942).

Miután az egyetemeken a tanárszakosok tantervében szerepet kaptak a matematikatörténeti szemináriumok, előadások, megjelent magyar nyelvű matematikatörténeti szakirodalom is, a matematikatörténet apránként belépett egy-egy témakör tanításának módszertanába is. Az 1980-as évek legelején a Pelle Béla által szerkesztett kétkötetes *Így tanítjuk a matematikát* módszertani könyvben (Pelle, 1982) már szerepel olyan fejezet, mint az *„Érdekességek a számelmélet történetéből”*.

A rendszerváltás előtti időszak középiskolai tankönyvei közül az első figyelemre méltó mennyiségű matematikatörténeti részt tartalmazók a gimnázium számára Hajnal Imre által írt tankönyvek[19] voltak. Három sorozat is fűződik a nevéhez. A legszélesebb körben használt a gimnáziumok számára az 1988/89-es tanévtől engedélyezett négykötetes sorozat volt. Ebben „apró betűs” kiegészítő ismertetők (pl. Pitagoraszról), történetek (pl. Cardanoról és Tartagliáról), magyar vonatkozású bizonyítások (pl. Dugonics András Pitagorasz tételére adott bizonyítása) és régi korok matematika feladatai (pl. Petzval Ottó 1856-os könyvének feladatai) is megtalálhatók. Az ilyen részek sehol sem tűnnek erőltetettnek és céltalannak. Az az évtizedekkel később megjelent NAT-ban megfogalmazott cél, hogy a tanuló képes legyen életkorának megfelelő matematikatörténeti szöveg olvasására és értelmezésére, itt már a gyakorlatban megjelenik, hiszen például a régi szövegezésű feladatok megoldásánál a tanulónak önállóan kell a szöveget olvasnia és értelmeznie, amihez a tankönyvíró minden segítséget megad. A könyvet forgatva az olvasóban az az érzés fogalmazódik meg, hogy a matematikatörténetet a szerző saját belső késztetéséből, az évtizedek alatt felhalmozott hatalmas tudásának átadási kényszeréből adódóan, a tantervek által előírt témák mélyebb megismerése érdekében írta bele. Habár az akkori érettségin nem volt elvárás az ilyen irányú tájékozottság, Hajnal Imre ezt értéknek tartotta, amit tovább kívánt adni. A tankönyv sikeres volt, amit az is mutat, hogy amikor megjelenése után közel két évtizeddel a kétszintű érettségi bevezetésével a megváltozott követelményrendszerből adódóan idejét múlttá vált, nem kivonták a forgalomból, hanem „aktualizálták”.

Ugyanilyen módon jelenik meg a matematikatörténet a jóval szűkebb közönség, a speciális matematika tagozatok számára írt tankönyvében, melynek csak egy, az I. osztály számára írt kötete jelent meg. Ennek a kis létszámú célközönségnek az elmúlt 30 évben nem íródott új tankönyv, így több tanár ma is ezt használja.

[19] (Hajnal, Némethy, 1992), melyekben Hajnal Imre a matematika, Némethy Katalin pedig a függelékben megjelenő számítástechnikai fejezeteket írta.

A gimnázium III. és IV. osztálya számára íródott, ma is megvásárolható fakultatív B változatos (a „B faktos") tankönyvekben[20] tipográfiailag a matematikatörténet nem különül el „apró betűs részként", viszont több esetben külön fejezetként van történeti kitekintő egy-egy téma végénél (pl. Az integrál és alkalmazásai). Ami az előző könyvekhez képest külön figyelmet érdemel, az a második kötet végén található *A matematika néhány filozófiai kérdése* című fejezet, amely a következő részekből áll:

- a matematikai fogalmak fejlődése;
- a függvény fogalmának fejlődése;
- a matematika fejlődésének külső és belső hajtóerői – a matematika és az alkalmazások;
- a matematika módszerei – az igazság fogalma a matematikában.

E tankönyveknél külön meg kell említeni a hozzájuk kapcsolódó tanári kézikönyvet, amelyben a szerzők[21] az előszóban leírják, hogy az akkori gondok és változások jobb megértéséhez a magyarországi gimnáziumi matematikatanítás történetét is közlik az első fejezetben.

A tankönyvpiac rendszerváltás utáni liberalizációjával több kiadó is megjelentetett középiskolák számára írt tankönyvsorozatot. A Mozaik Kiadó Sokszínű Matematika[22], valamint a Maxim Kiadó Út a tudáshoz[23] sorozata már jelentős mennyiségű matematikatörténeti ismeretet tartalmaz. Ez általában a fejezet elején (vagy végén) található rövidebb-hosszabb történeti összefoglalóban, illetve a könyvek margóján lévő matematikusok arcképeiben vagy matematikatörténeti adalékokban (pl. elnevezésekről, jelölésekről) jelenik meg. A tankönyvpiac újbóli átalakulása után megjelenő tankönyvekben, mint például (Juhász, Orosz, Paróczay, Szászné dr. Simon, 2010) ehhez hasonló módon van jelen a matematikatörténetet. Összességében elmondható tehát, hogy a matematikatörténet a tankönyvekben az elmúlt negyven évben egyre nagyobb és nagyobb teret kapott.

Hasonló tendencia figyelhető meg a feladatgyűjtemények vizsgálatakor. A

3. táblázat egymást váltó, komoly országos felhasználtsággal bíró feladatgyűjtemények matematikatörténeti vonatkozást tartalmazó feladatainak számát összegzi úgy, hogy a baloldali oszlopban a korábbi, a jobboldali oszlopban a „nekik megfelelő" újabb példatárak szerepelnek.

[20] Az 1978/79-től felmenő rendszerben induló gimnáziumi képzésben matematikaoktatás szempontjából négy lehetőség volt a zárójelben megadott heti óraszámok mellett: alap osztály (5 – 4 – 3 – 3), fakultatív „A változat" (5 – 4 – 5 – 6), „B változat" (5 – 4 – 7 – 8) és speciális matematika tagozat (8 – 8 – 9 – 9).

[21] Hajnal Imre, Nemetz Tibor és Pintér Lajos

[22] (Kosztolányi et all., 2020)

[23] (Ábrahám, et all. 2012)

cím	**Matematika feladatgyűjtemény I.**	**Matematika Gyakorló és érettségire felkészítő feladat-gyűjtemény I.**
szerzők	Bartha Gábor, Bogdán Zoltán, Csúri József, dr. Dúró Lajosné, dr. Gyapjas Ferencné, dr. Kántor Sándorné, dr. Pintér Lajosné	Dr. Gerőcs László, Orosz Gyula, Paróczay József, Szászné Simon Judit
megjelenés éve, helyszíne	1987, Budapest	2006, Budapest
történeti feladatok száma[24]	**0**	**16**
cím	**Matematika feladatgyűjtemény II.**	**Matematika Gyakorló és érettségire felkészítő feladat-gyűjtemény II.**
szerzők	Bartha Gábor, Bogdán Zoltán, dr. Dúró Lajosné, Gyapjas Ferencné, Hack Frigyes, dr. Kántor Sándorné, dr. Korányi Erzsébet	Dr. Gerőcs László, Orosz Gyula, Paróczay József, Szászné Simon Judit
megjelenés éve, helyszíne	1987, Budapest	2006, Budapest
történeti feladatok száma	**0**	**7**
cím	**Geometriai feladatok gyűjteménye I. és II.**	**Matematika Gyakorló és érettségire felkészítő feladat-gyűjtemény III. Geometriai feladatok gyűjteménye**
szerzők	Horvay Katalin, Reimann István, dr. Soós Paula, Czapáry Endre	Czapáry Endre, Czapáry Endréné, Csete Lajos, Hegyi Györgyné, Iványiné Harró Ágota, Morvai Éva, Reimann István
megjelenés éve, helyszíne	1969, Budapest	2006, Budapest
történeti feladatok száma	**3**	**13**
cím	**Összefoglaló feladatgyűjtemény matematikából**	**Egységes érettségi feladat-gyűjtemény matematika I. és II.**
szerzők	Gábor Endréné, Gyapjas Ferencné, Hárspatakiné Dékány Veronika, dr. Korányi Erzsébet, Pálmai Lóránt, Pogáts Ferenc, Dr. Reiman István, Dr. Scharnitzky Viktor	Hortobágyi István, Marosvári Péter, Pálmay Lóránt, Pósfai Péter, Siposs András, Vancsó Ödön
megjelenés éve, helyszíne	1981, Budapest	2002, Piliscsaba
történeti feladatok száma	**0**	**5**

3. táblázat

[24] Azokat a feladatokat tekintettük ilyennek, melyek olyan matematikatörténethez kapcsolódó adatokat tartalmaznak (pl. a feladat első ismert kitűzőjének nevét, a feladat kitűzésének körülményét), amelyek a feladat megoldásához nem szükségesek, tehát egyértelműen többletinformációként vannak jelen.

Hogy cél volt a matematikatörténet beemelése (s nem pusztán véletlenül pont ilyen feladatokkal egészültek ki a korábbi példatárak), az abból is látszik, hogy több esetben előfordul lényegében ugyanaz a feladat matematikatörténeti adattal kiegészítve. Például:

Egy öszvér és egy szamár terhet cipelve beszélget. A szamár így szólt: „Ha átvennék a terhedből 100 kg-ot, az enyém kétszer olyan nehéz lenne, mint a tiéd.” Az öszvér így felelt: „Az ám, de ha te adnál nekem 100 kg-ot, akkor én háromszor annyi súlyt cipelnék, mint te.” Hány kg-ot vitt az egyik, és hányat a másik?

(Bartha, et al., 1987, p. 284.)

Az ókorból maradt ránk az alábbi feladat (a hagyomány szerint Euklidesz görög matematikustól származik):

„A ló és az öszvér egymás mellett mentek, hátukon zsákokkal, mikor a ló panaszkodni kezdett nehéz terhére. Erre az öszvér azt mondta:

- Ha egy zsákot átveszek a hátadról, akkor az én csomagom kétszer olyan nehéz lesz, mint a tied. Ha azonban te vennél át egy zsákot az én hátamról, akkor a te csomagod még mindig csak olyan nehéz lenne, mint az enyém.

Hány (egyenlő nehéz) zsákot vitt a ló és az öszvér?”

(Gerőcs, et al., 2006, p. 148.)

Meg kell persze jegyezni, hogy bár a történeti vonatkozást tartalmazó feladatok száma szemmel láthatóan nőtt, azonban arányuk a feladatgyűjtemények összes feladatához képest még így is eléggé csekély, hiszen valamennyi felsorolt példatár több ezer feladatot tartalmaz. Mindazonáltal a növekvő tendenciát ezek a számok is jelzik.

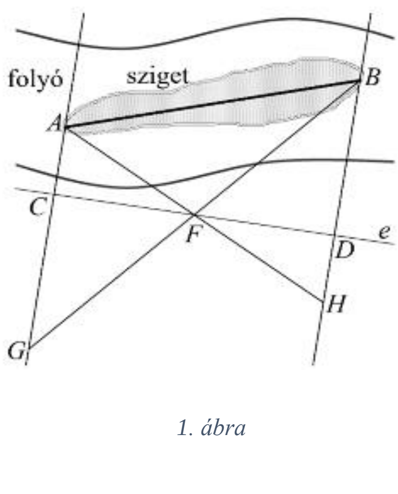
3.4. Matematikatörténet az érettségi vizsgán

A kétszintű érettségiben az elmúlt kb. 15 év alatt a matematikatörténet két módon jelent meg. Egyfelől a 2015-ös jogszabályi változásból adódóan emelt szintű szóbeli érettségin az alkalmazások említéséhez hozzá került a matematikatörténeti vonatkozások bemutatása. Ez a főleg egyszakos, illetve matematika-bölcsész szakpárral rendelkező kollégák számára könnyebbséget hozott, hiszen számukra a diákok által szóbeli felkészülésre használt anyagokban található fizikai és kémiai példák[25] sok esetben nehézséget okoztak. Számukra a matematikatörténeti vonatkozások kedvezőbbnek tűnhetnek, hiszen azokat a „saját tantárgyukon belül maradva" tudják megérteni. Ilyen irányú ismereteik bővítése is sokkal kisebb erőfeszítést igényel, és érdeklődési körükhöz is közelebb állhat, mint több, szakjuktól idegen tantárgyból vett alkalmazások megtanulása, amelyek megértéséhez szükséges alapokkal nem feltétlenül rendelkeznek. Az emelt szintű érettségi követelményeibe történő beemelés egyértelműen emelte a diákok és az ilyen vizsgára felkészítő tanárok matematikatörténet iránti érdeklődését.

A másik forma, ahol a matematikatörténet megjelent az érettségin, az az írásbeli feladatok szövege. Ezekben több alkalommal matematikatörténeti többletinformáció jelent meg. Például:

„Thalész a hét görög bölcs egyike, egy nevezetes, neki tulajdonított mérés során egy folyóban lévő sziget AB hosszát a folyóparton maradva határozta meg.

Először felvett egy e egyenest a parton. Ezen az e egyenesen megkereste azt a C, illetve D pontot, amelyekben a CA, illetve a DB irány merőleges az e egyenesre. Ezután a CD szakasz F felezőpontját is megjelölte egy jelzőkaróval. Ezt követően az AC egyenesen haladva megjelölte azt a G pontot, amelyre B, F és G egyenesre illeszkedik; és hasonlóan az AF és BD egyenesek H metszéspontját is megjelölte. Thalész azt állította, hogy a sziget hossza a GH távolsággal egyezik meg.



1. ábra

c, Igazolja Thalész állításának helyességét"!

---

[25] Az internetről elérhető, kidolgozott tételek, az alábbihoz hasonló példákat tartalmaznak: *„Gravitációs erőtérben a barometrikus magasságformulában a levegő sűrűsége a magassággal exponenciálisan csökken."*(https://www.mozaik.info.hu/Homepage/pdf/emelt_matek_eretts_temakorok_2019.pdf)

3.5. Matematikatörténet a matematikaversenyeken

Az elmúlt harminc évben a hazai matematikaversenyek palettája jelentősen kiszélesedett. Külön előny, hogy ezt a bővülést sok esetben különféle célok hozták létre, s nem pusztán az ugyanolyan típusú versenyek szaporodtak. Néhány példa az elmúlt harminc évben létrejövő más és más szempont alapján szerveződő matematikaversenyekre:

- speciálisan megszólított célközönség (pl. református gimnáziumok matematikaversenye);
- speciális témák (pl. egyenletmegoldó verseny);
- iskolai kereten túlmutató csapatversenyek (pl. Kavics Kupa);
- népszerűsítő jellegű, mozgással egybekötött verseny (pl. Medve matek).

A sokszínű kínálatban immár a kevésbé jó feladatmegoldó, de a matematikát szerető, a matematikatörténet iránt érdeklődő diákok is megtalálhatják a helyüket. Ilyen például a Természet világa c. folyóirat szerkesztősége[26] által a rendszerváltás óta, vagy csak a matematikára szorítkozva az SZTE Bolyai Intézet által[27] közel 15 éve minden tanévben kiírt középiskolás diákoknak szóló pályázat. Egy ilyen pályamunka elkészítéséhez a középiskolások számára a matematikatörténet ideális terepet biztosít. A dolgozat megírása pedig a matematika történetében való kutakodás mellett számtalan hasznos munkafolyamat (például irodalomjegyzék-készítés) gyakorlását is lehetővé teszi.

Bár számuk csekély, megemlítjük, hogy klasszikus feladatmegoldó versenyeken is előfordultak már matematikatörténeti feladatok. Példa erre a rendszerváltás után néhány évvel indult, s azóta minden évben Debrecenben megrendezett református gimnáziumok matematikaversenye. Például 2009-ben a Lévárdi & Sain (1982) 293-as feladata szerepelt a 9. osztályosok feladatsorában, 2011-ben pedig a következő felvezetéssel indult egy feladat: *„Az interneten olvashatóak szerint az alábbi feladatot sokan Einstein logikai feladványának tartják, melyet még a 19. században találtak ki."* (Bajza, 2012, p. 36.)

Ezek alapján elmondható, hogy már a középiskolások számára meghirdetett versenyeken is megjelenik a matematikatörténet.

---

[26] A verseny kiírását lásd a következő helyen: https://termvil.hu/2020/06/10/felhivas-es-versenyszabalyzat/

[27] A verseny kiírását lásd a következő helyen: http://www.math.u-szeged.hu/mathweb/index.php/hu/leendo-hallgatoinknak/versenyek-koezepiskolasoknak/69-koezepiskolas-palyazatok/655-palyazat-koezepiskolasoknak-2019-aktualis-palyazati-felhivas

3.6. A matematikatörténet középiskolai felhasználásának magyarországi úttörői

Azóta, hogy Dávid Lajos először tartott előadásokat matematikatörténetből a Budapesti Tudományegyetemen[28] addig, hogy a matematikatörténet beépüljön az érettségibe, közel száz esztendő telt el. Ez idő alatt hazánkban kiváló matematikatörténészek munkálkodtak, akik komoly eredményeket értek el a matematikatörténet egy-egy fejezetének feltárásában. Ahhoz azonban, hogy a matematikatörténet megjelenjen a közoktatásban, néhány lelkes gyakorló tanár kitartó munkájára is szükség volt.

Ilyen volt Sain Márton, aki 1915-ben Máramarosszigeten született. A világháború utáni gyermekéveit Orosházán töltötte, ahol iskoláit kezdte. 1933-ban érettségizett Hódmezővásárhelyen, a Bethlen Gábor Református Gimnáziumban, ahol a későbbi debreceni matematikus rektor, Rapcsák András osztálytársa volt. Egykori iskolájáról, Stépán Gábor és Frigyesi Miklós által 1993. április 27-én készült interjú során így nyilatkozott.

„Jó iskola volt. Németh László tanított ott. Már én nem voltam ott. Ő próbálta ezt a történelmi keretbe ágyazva tanítást minden tárgyból. Hát persze az, az egy remek dolog, csak ahhoz egy Németh Lászlói koponya kell. Mert, mert ő a kvantumelméletről is úgy írt, csak úgy mellékesen, egy kis eszmefuttatást, hogy amikor az ember elolvassa, azt hiszi, hogy egy fizikus szakember írta. Ezt nem tudja mindenki csinálni. Hát most egy kicsikét a vesszőparipámra térnénk rá. Mondjuk, a matematikát matematikatanárok nyugodtan taníthatnák a matematikatörténet keretében. Mindjárt más ügy volna. Sajnos erre későn jön rá az ember, mert, hogy mire megtanuljuk, hogy hogy kell élni, akkorára körülbelül meg is halunk."[29]

Középiskolás korában még református lelkésznek készült, ám 1938-ban matematika és fizika szakos tanári oklevelet szerzett a Pázmány Péter Tudományegyetemen, ahol kedvenc tárgya az analízis volt, melyet Fejér Lipótnál és Szász Pálnál hallgatott. Szakvizsgáját a geométer piarista tanárnál, Suták Józsefnél tette. Több iskolában is tanított. Ő szerkesztette azt a több kötetes feladatgyűjteményt, melyet az ELTE gyakorlóiskoláinak tanáraiból alakult munkaközösség állított össze. A tanítás mellett több könyvet írt önállóan vagy társszerzőként, melyek közül több matematikatörténeti témájú. Ezek (első) megjelenésük sorrendjében:

[28] A mai Eötvös Lóránd Tudományegyetem 1873-tól 1921-ig viselte a Budapesti Tudományegyetem nevet.
[29] https://www.youtube.com/watch?v=BpZ5b_ogJXM

- Matematikatörténeti ABC, Adatok, tények, érdekességek a matematika középfokú tanításához és tanulásához;
- Matematikatörténeti feladatok (Dr. Lévárdi Lászlóval közösen);
- Nincs királyi út!.

A három kötet három különböző rendezőelv szerint ad bepillantást a matematika történetébe. Az első (melynek lektora, „a matematikatörténet szerény apostola”, Szénássy Barna volt) lexikonszerűen abécérendben közöl szócikkeket. A második egy feladatgyűjtemény, ahol a feladatok nem tartalmi, hanem időrendi sorrend szerint vannak rendezve. A harmadik egy monumentális, több mint 800 oldalas mű, amely a matematika történetét az emberiség kultúrtörténetébe ágyazva tárgyalja a kezdetektől a XX. század második feléig.

Nagyon fontos kiemelni, hogy mindhárom könyvnél kimondott és következetesen betartott elv volt az, hogy középiskolai tudást feltételezve szövege érthető legyen. Éppen ezért – tartalmazzanak bármennyi hibát, tárgyi tévedést – komoly ismeretterjesztő funkciót töltöttek be, s töltenek be ma is, így középiskolai tanári körökben mindhárom népszerű lett. Gyakori forrásai lettek a Sulinet Digitális Tudásbázisnak. Számtalan az interneten keringő diákreferátum és kiselőadás PPT-jében találhatók meg hivatkozási alapként. Ugyanígy idézték és máig idézik középiskolai tankönyvek (pl. A Maxim Könyvkiadó Út a tudáshoz tankönyvsorozata) és folyóiratok ismeretterjesztő cikkei[30].

Egy másik tanár, akinek szintén országos szinten volt hatása arra, hogy a matematikatörténet bekerüljön a közoktatásba, a tankönyvíró Hajnal Imre László volt, aki 1926-ban született Hódmezővásárhelyen. Sain Mártonhoz hasonlóan a Bethlen Gábor Református Gimnáziumban érettségizett 1945-ben, s ő is református lelkésznek készült. Egyetemi tanulmányait Szegeden kezdte, majd az első elvégzett tanév után Budapestre került, ahol az ELTE-n 1950-ben matematika-fizika szakos tanári diplomát szerzett. Diplomaszerzés után egykori középiskolájába tért vissza tanítani. Az 1965-től 1988-as nyugdíjazásáig volt a JATE Ságvári Endre Gyakorló Gimnázium szakvezető tanára. Az egyetemhez való kötődése abban is kifejeződött, hogy rendszeresen oktatta a matematika szakos hallgatókat elemi matematikára.

Szerény, csendes, de hatalmas tudású ember volt, aki otthonosan mozgott a történelemben, irodalomban és a művészetekben is. Szívügye volt a matematika- és főleg a

[30] Ld. pl. (Ringler, 2010).

matematika tanításának története, amit haláláig kutatott. Ebből a témából írta 1984-ben Szegeden a doktori disszertációját, melynek címe: *A matematika tanítása a magyar gimnáziumokban az Entwurftól 1979-ig*. 1969-től nyugdíjazásáig Csongrád megyében szakfelügyelői feladatokat is ellátott a későbbi Rátz Tanár Úr Életműdíjas Tatár István párjaként. Ilyen minőségében rendszeresen tartott – ahogy a Rátz Tanár Úr életműdíjas Tarcsay Tamás fogalmazott – *„nagyon gondolatgazdag és színvonalas"* továbbképzéseket tanárok számára. Többször adott elő a matematika tanárok éves Rátz László Vándorgyűlésén is. Tankönyveiben megjelenő matematikatörténetről már korábban szóltunk. Hajnal Imre tanfelügyelőként, továbbképzések rendszeres előadójaként, tankönyvíróként, szakvezetőként, későbbi matematikatanárok tanáraként több kollégája szívébe ültette el a fogékonyságot a matematikatörténet iránt.

A magyarországi matematikatörténet-írás mellett a matematikatörténet középiskolában történő megjelenésére is hatással volt Szénássy Dénes Barna, aki Ungváron született 1913-ban. Az első világháború után családjával Gyulára költözött, ahol az elemi és a középiskolát végezte. Bár eredetileg mérnök hallgatóként szeretett volna Budapesten tanulni, mivel ott kollégiumi elhelyezést nem kapott, ezért a debreceni egyetemen, matematika – fizika szakon tanult tovább, ahol 1936-ban kapta meg középiskolai tanári oklevelét. Több középiskolában összesen 13, a debreceni egyetemen 31 tanévet tanított aktív státuszú tanárként. Matematikatörténészi tevékenysége itthon és külföldön is ismert és elismert. Könyvíróként részt vállalt abban is, hogy a matematikatörténet eljusson a középiskolásokhoz. Az 1950-es években indult Középiskolai szakköri füzetek sorozat két kötete is matematikatörténettel foglalkozik. Az 1953-ban megjelent Ligeti Béla által írt kisfüzet *A magyar matematika története a XVIII. század végéig* folytatása, a *Vázlatok a magyar matematika újkori történetéből* Szénássy Barna műve volt.

„Ő indította el a matematikatörténeti kollégiumokat, 1963-tól a matematika tanár szakos hallgatók számára kötelező tárgy lett a matematikatörténet. Szerinte a matematikatörténet az oktató- és nevelőmunkában egyaránt haszonnal alkalmazható. Az a diák, aki ismeri egy probléma gyökerét és a megoldásra tett próbálkozásokat, látja a hibákat, a közelítő megoldások fejlődését, közelebb kerül a matematikához, mert a helyükre kerülnek a fogalmak, jelentéseik világosabbá válnak. Azt vallotta, hogyha egy hallgató – a későbbi tanár vagy matematikus – nemcsak a tételek tartalmával van tisztában, hanem azzal is, hogy az egyetemes tudománytörténet mit köszönhet a magyar matematikusoknak, akkor ez egy

egészséges nemzeti önbecsülés forrása lesz."[31] – írta róla egykori tanítványa, Kántor Sándorné Varga Tünde.

A matematikatörténet közoktatásba történő beemelésére irányuló országos jelentőségű kezdeményezések mellett – a teljesség igénye nélkül – megemlítünk még néhány helyi kezdeményezést is. Példa ilyenre egyfelől az SZTE Ságvári Endre Gyakorló Gimnáziumban Kopasz Katalin 2003-as tanítási gyakorlata, melyet szakvezetőjével, Tarcsay Tamással három cikkben, a jó gyakorlat terjesztése céljából a Sulineten dokumentáltak[32]. Másfelől nem iskolai, hanem matematika tábor keretében történő tanításra is van példa, melyet Gosztonyi Katalin valósított meg, s egy esettanulmányában[33] publikált. Egy adott téma teljesen történeti alapon történő bemutatására is akad példa (Gazsó, 1972), amely szintén hozzájárulhatott a matematikatörténeti ismeretek elterjedéséhez.

[31] https://slideplayer.hu/slide/7946992/

[32] https://hirmagazin.sulinet.hu/hu/pedagogia/matematikatortenet-tanitasa-a-kozepiskolaban-i

[33] https://dtk.tankonyvtar.hu/xmlui/bitstream/handle/123456789/4687/gosztonyi_katalin_leirat.pdf?sequence=1

3.7. Összefoglaló problémafelvetés

Láthattuk tehát, hogy a nemzetközi tendenciákkal szinte párhuzamosan Magyarországon is megjelent az érdeklődés a matematikatörténet és annak iskolai felhasználása iránt. Voltak a témát magukénak érző „tudós tanárok", akik a szükséges hozzáférhető matematikatörténeti szakirodalom megteremtésével, tanárképzésben és továbbképzésben való aktív részvételükkel lefektették az alapjait annak, hogy a matematikatörténet beépülhessen a hazai matematikaoktatásba. Hiába azonban a számtalan cikk és konferencia – ahogyan arra Fried (2001) felhívja a figyelmet – a matematikatörténet felhasználásáról elmondottakból és leírtakból a gyakorlatban magukhoz az iskolákhoz kevés jutott el, ami mindenképp el kell gondolkoztassa a kutatókat.

A matematikatörténetnek az oktatás tartalmát és kimeneteli követelményeit szabályozó jogszabályokban vagy a középiskolai versenyekben való megjelenése azonban már nem engedi meg a gyakorló tanároknak, hogy ezekről a változásokról ne vegyenek tudomást. A változás ugyanakkor mindig hoz kétségeket és kérdéseket. Nemzetközi szinten a 2000-es évek elején megfogalmazódott kétségek[34] és ellenérvek szintézisét adta az „ördög ügyvédjének szerepét felvállaló" cikk (Siu, 2007), amely 16 okot sorol fel arra vonatkozólag, hogy miért nem használ a tanár matematikatörténetet a tanórán, s amelyekkel kapcsolatban 608 gyakorló és jövendőbeli tanár véleményét közli. E lehetséges okokat és a megkérdezett tanárok hozzájuk kapcsolódó véleményét az 1-es számú melléklet tartalmazza. Összesen három olyan kijelentés van, amelyekre a válaszadók közel kétharmada adta az „egyetért" vagy „teljesen egyetért választ" (utóbbi arányt zárójelben tüntettük fel).

- A tanórán erre nincs idő. (66,94%)
- Hiányzik hozzá a szükséges forrásanyag. (64,47%)
- Hiányzik hozzá a tanár képzettsége. (82,89%)

A többi megállapítás esetén az egyetértők vagy teljesen egyetértők aránya 4,94%-tól 48,19%-ig terjed. Ez a felmérés is megerősíti a bevezetőben vázolt problémát, miszerint, ha gyakorló tanárokat arról szeretnénk meggyőzni, hogy foglalkozzanak matematikatörténettel az óráikon, akkor a tananyag felépítéséhez igazodó, abba beépíthető, olyan kész segédanyagot kell rendelkezésükre bocsátani, aminek bemutatására e disszertáció is vállalkozik.

[34] (Fauvel & van Maanen, 2000) már tartalmaz egy 10 elemből álló ilyen listát.

4. A matematikatörténet tananyagba történő beépítésének sarkalatos pontjai

4.1. A matematikatörténet tanórai tanításának általános elvei

Mielőtt a mai magyarországi középiskolai tanórai anyagot „megtűzdelnénk” matematikatörténeti részekkel, fel kell tennünk a kérdést:

- Mindezt milyen alapelvek szerint tegyük?
- Mik legyenek azok a rendezőelvek, amelyek segítségével dönthetünk arról, hogy egy matematikatörténeti elem bekerüljön vagy kimaradjon, illetve ha bekerül, akkor milyen részletességgel kerüljön tárgyalásra a tanórán?

Ezen elvek megfogalmazásához érdemes figyelembe venni a hazai diákok, tanárok, szülők és a jogalkotó iskolai tanítással (és egymással) kapcsolatban támasztott elvárásait. Utóbbi leginkább a neveléssel és oktatással kapcsolatos jogszabályokból érthető meg. A diákok, tanárok és szülők elvárásairól több írás[35], iskolai felmérés[36] készült. Érdemes külön megemlíteni a 2014-ben végzett országos, nagymintás felmérést (Nikitscher, 2016), amely alapján a diákok által ideálisnak látott tanárt érdekes és élményszerű órát tartó, igazságos, tantárgyát jól ismerő, a diákot partnerként kezelő, ugyanakkor diákjai előtt tekintéllyel bíró embernek írhatnánk le (Kárpáti, 2017). Márpedig e tulajdonságokból kettőre, az érdekes órát tartó és tárgyát jól ismerőre is közvetlen hatással lehet az, ha a tanár történeti elemeket is említ a tanórán.

Rendezőelveinket úgy érdemes megfogalmazni, hogy azokat csak a jelenlegi közoktatási rendszer matematika tanítását érintő gyökeres átalakulása esetén kelljen módosítani. Tehát például függetlenek legyenek attól, hogy egy adott fogalom vagy tétel ki- vagy bekerül a követelményrendszerbe. A kétszintű érettségi bevezetése óta az elmúlt évek változásai döntő többségben ezen a szinten mozogtak. Nyilván szélsőséges esetek (pl. a matematikatörténet különálló tantárgyként jelenik meg, vagy megszűnik a matematika tantárgy), ahogyan az egész közoktatási rendszerünket, úgy a megfogalmazni kívánt elveket is felülírhatnák.

---

[35] Ld. pl. (Zétényi, 1998., Tuza, 2011.)

[36] Ld. pl. a PTE Babits Mihály Gyakorló Általános Iskola és Gimnázium esetében: https://babits.pte.hu/dokumentumfile/szulok.pdf

Véleményünk szerint két olyan elv van, amelynek be nem tartása diákból, tanárból (és a diák érettségijéért aggódó szülőből) nagyfokú ellenszenvet váltana ki, betartásuk viszont mindegyik fél megelégedésére segítené a közös munkát. Ezeket röviden a következőképpen foglalhatnánk össze.

- Mértékletesség.
- A matematikatörténet a matematikatanítás eszköze legyen.

A mértékletesség kiterjed a matematikatörténeti anyagok mennyiségére. Egy-két perc Pitagorasszal kapcsolatos információ még figyelemfelkeltő, de egy 15 perces ismertető már hosszú s unalmas lehet (márpedig a diák, mint a fentebb említett kutatások utalnak rá, érdekes órát vár a tanártól).

Ugyanígy kiterjed a mértékletesség a bevitt matematikatörténeti tananyag gyakoriságára is. Ha egy feladatgyűjtemény egy feladatról plusz információként feltünteti, hogy például *„Kb. 4000 éves egyiptomi „matematika" feladat*" (Egységes Érettségi feladatgyűjtemény[37] 1516-os feladata), akkor kiemeli a többi közül. A tanuló meg tudja jegyezni, hogy „az az egyiptomi feladat". Ha több ilyen van a fejezetben, akkor elveszíti egyedi jellegét. Ugyanígy nem érdemes minden matematikus nevét megemlíteni, aki valaha is foglalkozott egy-egy középiskolai témával, hanem elég azokról beszélni, akiknek a neve ismeretét egyébként is elvárjuk a diákoktól. Ez történhet azért, mert egy fogalom vagy tétel is kapcsolódik a nevéhez (pl. Descartes-féle koordináta rendszer), vagy mert beépült a kultúránkba (pl. van róla utca, intézmény elnevezve a közelben).

Úgy véljük, hogy a mértékletesség elve válaszként szolgál a matematikatörténetet tanórai beépítését elvető azon érvre, miszerint több diák nem szereti a történelmet, így nem fogja a matematikatörténetet sem szeretni (Fauvel & van Maanen, 2000; Siu, 2007).

A másik elv lényege, hogy a matematikatörténetet nem oktatási célként, hanem segédeszközként, a mindenkori matematika törzsanyag hatékonyabb elsajátítása és a matematika tudományának jobb megismerése érdekében alkalmazzuk. Csak akkor érdemes egy régebbi eljárást megmutatni (pl. négyzetgyök számoltatása), ha annak elvégeztetésével a mostani tananyagot gyakoroltatjuk[38]. Csak akkor érdemes egy anekdotát, történetet,

[37] (Hortobágyi et al., 2009. p. 256.)

[38] Erre példát Matos (2019) tanulmánya, amely hét középiskolások számára is megérthető négyzetgyökvonási módszert ismertet, miközben bemutatja, hogy az egyes módszerek, mely középiskolai tananyag gyakorlására és más probléma szituációba helyezésére alkalmasak.

életrajzi adatot elmondani, ha az segíti az adott tananyagrész elsajátítását, megjegyzését, hasznosságának elfogadását, a matematika fejlődésének és belső építő elvének felvillantását. Így az életrajzi adatok közlésénél célszerű arra a hasznos minimumra törekedni, amely térben és időben segít elhelyezni egy adott matematikust, vagy amelynek jelentősége van a matematika fejlődése szempontjából.

Ugyanennek az elvnek következménye, hogy a matematikatörténet nem vehet el időt a matematikai törzsanyag tanulásától. Bár számos külföldi kísérlet próbálkozik külön matematikatörténet tanításával, azt elismerik, hogy így is csak felületes matematikatörténeti ismereteket sikerül átadni diákoknak (pl. Fredette, 2010). Az általunk összeállított segédanyagnak nem célja a mély matematikatörténeti ismeretek átadása, nem szentelünk külön órát régi szövegek olvasásának, hanem történeti elemek hol nagyobb, hol kisebb terjedelmű beemelésével próbáljuk hatékonyabbá tenni a matematika megismerését és az érettségire való felkészülést.

Összességében azt gondoljuk tehát, hogy a matematikatörténet legyen egy eszköz a matematikatanár kezében, amit adott esetben, ilyen vagy olyan céllal „be tud vetni”. Egyetértünk azonban Dienes Zoltán figyelmeztetésével, miszerint *„Minden taneszköz használata bizonyos fokú merevséghez vezethet, ha valaki túlságosan a rabjává válik. Tudatában kell lennünk ennek a veszélynek!”* (Dienes, 1973, p. 43.). Ezért úgy gondoljuk, hogy a matematikatörténet használata nem zárhatja ki más (pl. IKT) eszközök használatát, s azok sem szoríthatják ki a tanár kelléktárából a matematikatörténeti adalékokat.

4.2. Mi építhető be matematikatörténetből egy tanórába?

4.2.1. A matematika nyelvezetének (szakkifejezések, jelölések) eredete

A középiskolai matematikatanulás egyik nagy nehézsége a diákok számára az, hogy el kell sajátítaniuk a tartalom mellett a matematika saját nyelvezetét is, ami a fogalmak és tételek elnevezéséből, jelölésekből és a hozzájuk kapcsolódó írásmódból áll.

Egy tábla teleírva alsó és felső indexekkel ellátott x-ekkel, szumma és integrál jelekkel, önmagában az absztrakt tudomány megtestesítője, de ez sok diák számára ijesztően hat. Pólya György hívja fel a figyelmet arra a tényre, hogy ez nem csak a „rossz tanulók” esetén lehet így.

„Nemcsak a legreménytelenebb fickóknak lehet averziójuk az algebrával szemben, hanem egészen értelmes diákoknak is. A jelölésekben mindig van valami önkényes és mesterkélt; új jelölés megtanulása új teher az emlékezőtehetség számára. Az értelmes diák visszautasítja a teher vállalását, ha nem látja, kap-e érte ellenszolgáltatást. Az értelmes diáknak az algebra iránti ellenszenve igazolást nyer, ha nincs tág lehetősége arra, hogy saját tapasztalatából győződjön meg arról, hogy a matematikai jelek nyelve segíti az értelmet. A tanár fontos feladata, sőt mondhatni, egyik legfontosabb feladata, hogy segítsen neki ilyen irányú tapasztalatokat szerezni.” (Pólya, 2000, p. 131.)

A tanárnak, ha ismeri egy jelölés vagy elnevezés kialakulásának történetét, vagy a korábbi, valamilyen ok miatt a használatból kikopottat, akkor lehetősége van arra, hogy erről beszélve a diákoknak megmutassa egy jelenleg használt jelölési mód előnyét. Például a hindu-arab számjegyekkel, helyiértékes írásmódban sokkal könnyebb műveleteket végezni, mint római számokkal. Saját tapasztalatból tudjuk, hogy a diákok sokkal könnyebben elfogadják a betűk használatát a 9. évfolyamon, ha látják a használatuk értelmét és célját. Ez utóbbiról való „meggyőzés” egyik eleme lehet a történeti rész, amiben megmutatjuk, hogy valamit milyen igény, szükség hozott létre, s ennek segítségével milyen fejlődés indulhatott meg, milyen problémák váltak könnyen kezelhetővé csupán a megfelelő jelölésmód megtalálásával.

4.2.2. Egy feladat[39] eredete, története

Matematikai folyóiratokban megjelenő cikkek bevezetőjében vagy végén sok esetben feltüntetik, hogy kitől származott az eredeti probléma, ki általánosította vagy fogalmazta át. Ugyanezt sok esetben egy középiskolai feladatmegoldó órán is meg lehet tenni. Például középszintű érettségit tenni szándékozó diákokkal is megoldható az a feladat, hogy hogyan aránylik egymáshoz az egyenlő oldalú henger, a bele írt gömb és a hengerbe írható kúp térfogata. A feladat megoldása után elmesélhető, hogy Archimédesz olyan szépnek találta a kapott arányt, hogy azt kérte, véssék a sírjára.

Számos diákban él az a téveszme, hogy a matematika fogalmak és tételek halmaza, s a feladatok pusztán ezek begyakorlására szolgálnak. Holott, ahogyan Vincze Szilvia fogalmaz:

> *„Aki a matematika titkát a problémák táján keresi valószínűleg nem nagyot fog tévedni. A matematika bármely ágához tartozó feladat elemzése hozzájárul a feladatok megoldásához szükséges matematikai gondolkodás természetének megismeréséhez.” (Vincze 2003, p. 230.)*

Ezt a gondolatot erősítheti diákjainkban az, ha látják, hogy egy-egy feladat kitűzőjének, vagy egy más, korábban kitűzött probléma megoldójának neve ugyanúgy fennmaradhat a történelemben, mint egy tétel felfedezőjéé, s egy jó feladat meg- vagy átfogalmazása, megoldása vagy általánosítása sokszor ugyanolyan elismerést érdemlő teljesítmény, mint egy új matematikai fogalom megalkotása.

Bár ebben a disszertációban nem vizsgáljuk, de tapasztalataink alapján úgy gondoljuk, hogy a feladatok történetének említése apró segítség azon probléma kezelésére is, hogy a tanulók döntő többsége az életszerű feladatokat is csak mechanikusan oldja, s nem figyel az élet adta feltételekre[40].

[39] Bár egyes szerzők a problémát és a feladatot élesen megkülönböztetik, ahogyan Ambrus András is (Ambrus, 2004) Claus felfogását követi, mi is szubjektív választóvonalat látva nem teszünk éles különbséget a kettő között. Így a továbbiakban, a középiskolában inkább használatos feladat elnevezéssel élünk, s csak a legtöbb középiskolás számára valóban összetett megoldási módokat igénylő feladatokat nevezzük problémának.

[40] Például Csíkos Csaba nemzetközi kutatást idézve megemlíti, hogy a tanulók elsöprő többsége 10-et adta meg a következő feladat megoldásaként: „Pisti 4 darab, egyenként 2,5 méter hosszú deszkát vásárolt. Hány darab 1 méteres darabot tudott ezekből lefűrészelni?” (Csíkos, 2002. p. 11.)

4.2.3. A matematika egy-egy ágának kialakulása

Ahogyan érdemes egy-egy feladat történetét megemlíteni, ugyanúgy indokoltnak tartjuk a matematika egy-egy ágát létrehívó probléma (pl. Königsberg hídjai) és problémakör (pl. földmérés, derékszögelés) a csoport szintjéhez igazított mélységben történő tanórai tárgyalását is.

Evvel alkalmunk nyílik annak megemlítésére is, hogy van a matematikának olyan ága (pl. valószínűségszámítás), amit gyakorlati problémákra adott válaszkeresés, s van (pl. hiperbolikus geometria), amit az absztrakt gondolkodás hozott létre. Első esetben a gyakorlati problémák megoldását követte a létrejövő fogalmak és állítások rendszerezése, illetve a tudományág axiomatikus felépítése, míg másik esetben az egzakt felépítést (akár évtizedekkel később) követően jelentek meg alkalmazások, s az elméleti problémák megoldása során létrejövő modell adott gyakorlati probléma megoldásához segítséget.

4.2.4. Matematikusokhoz kapcsolódó történetek, életrajzi adatok

Aki matematikát tanul, találkozik matematikusok neveivel, hiszen tételek (pl. Pitagorasz-tétel), fogalmak (pl. Feuerbach-kör), vagy akár egész tudományág (euklideszi geometria) gyakran viseli matematikus vagy matematikusok nevét. Mindenki megtapasztalhatja, hogy ez a fajta hivatkozás milyen hasznos, ha például találkozik a *„körhöz külső pontból húzott érintő- és szelőszakaszok tétele”* elnevezéssel. Nem lett volna rövidebb XY tételének nevezni? – tegyük fel a (költői) kérdést a diákoknak. A matematika kultúrtörténeti beágyazottságát mutatja, hogy az elnevezésekben országonként és nyelvenként[41] vannak eltérések, amit mindenképp érdemesnek tartunk diákoknak megemlíteni.

Annyit elmondani egy matematikusról, hogy mikor született, s milyen származású (akár pontos adatok helyett csak azt, hogy XVII. századi francia matematikus) biztosan nem vesz el 10-15 másodpercnél többet egy tanórából. Így ellenérvként (azt leszámítva, hogy esetleg a tanár sem tudja) csak annyit lehet mondani, hogy a diák „úgyis elfelejti”. Mellette viszont elmondható, hogy ha van egy-két diák, aki megjegyzi, vagy akkor és ott az adott

[41] Például Thalész tétele alatt több országban a párhuzamos szelők/szelőszakaszok tételét értik.

matematikust térben és időben el tudta helyezni, akkor már nem volt hiábavaló a mondat. A nemzetiség elmondása mellett szóló érv lehet, hogy ez a név kiolvasásánál sok esetben segítséget jelent. Így a tantárgyak közötti kapcsolatként is megemlítendő, hogy például Cauchy nevének helyes kiejtésével gyakoroltattuk a francia olvasási szabályokat[42].

Ráadásul sokszor már ezek a minimális életrajzi adatok is bepillantást engednek a matematika épülésébe, amit szinte vétek szó nélkül hagynia a matematikatanárnak. Például fakultáción a valószínűség fogalmának tisztázásakor a diák találkozik a Kolmogorov axiómákkal (Andrej Nyikolajevics Kolmogorov orosz matematikus 1903 – 1987), majd jó néhány órával később a Bayes-tétellel (Thomas Bayes angol matematikus, presbiteriánus lelkész 1702 – 1761). Itt pedig felhívhatjuk a figyelmet arra, hogy a valószínűség fogalmának axiomatikus megalkotása közel 200 évvel egy ezt használó tétel után született meg, azaz a valószínűségszámítás szép példája annak, hogy évtizedeken, évszázadokon keresztül felhalmozott ismereteket axiomatizálnak és rendszereznek, s nem az alapfogalmak és axiómák megalkotásával jön létre a matematika egy ága.

A jelenlegi magyarországi matematikatanítás alapvető céljai között szerepel, hogy *„a tanuló megismerje a matematikai gondolkodás természetét és a matematika alapvető sajátosságait”* (2020-as NAT). A megfelelő életrajzi adatok segítségével újra és újra felhívva a különböző témáknál erre a diákok figyelmét sokat tehetünk e cél megvalósításáért.

Különösen fontosnak tartjuk egy-egy matematikus életrajzából a születési adatain és nemzetiségén túl az esetleges magyar vagy helyi kötődését. Ilyen lehet például, ha a középponti és kerületi szögek tételének bizonyításakor Bolyai Farkas bizonyítását választjuk (Hajnal, 1991), vagy legalább megemlítjük létezését.

[42] Francia szakosként a francia olvasási szabályokat többször elsősorban a diákok által is ismert tulajdonneveken (pl. Renault, La Fontaine, Bastille stb.) keresztül tanítottam, ami nagyon jól bevált.

4.3. Miért építsünk be matematikatörténetet a tanórába?

4.3.1. Hosszú távú memóriába való beépülés segítése

Gyakori jelenség, hogy a tanultakat a diákok jelentős része néhány óra múlva elfelejti. Fontos gyakorlati kérdés tehát, hogy mivel tudnánk segíteni a hosszú távú memóriába való rögzülést.

Ehhez a matematikatörténet kétféleképpen is hozzájárulhat. Egyfelől lehetőséget ad egy tananyaghoz kapcsolódó történet elmeséléséhez, amihez kötve a diák könnyebben megjegyezheti magát a tananyagot is (pl. a „kis Gauss története" és az első *n* pozitív egész összegének zárt alakban történő felírása).

Szendrei Julianna így fogalmazza meg a másik okot, amiért a matematikatörténet segítheti a tananyag hosszú távú memóriába történő rögzülését:

„Érdekes korban élünk. Most találkozik össze a pedagógia sok gyakorlati tanácsa az agykutatás konkrét kutatási eredményeivel. A hosszú távú memóriába való bevésés folyamatáról már igen sok bizonyított eredmény látott napvilágot. Az egyik legkiemeltebb kutatási terület a megértés közben történő ismétlés és a már tanultak más oldalról való megvilágításának fontossága. Az ezzel kapcsolatos kísérleteket ausztriai egyetemek végezték. Azt találták, hogy ismétlésen kívül a több szempontú megközelítés segítette leginkább a hosszú távú memóriába való rögzítést, valamint a tanultaknak problémaszituációkban való alkalmazását." (Szendrei Julianna, 2005, p. 186.)

A matematika története során rengeteg probléma merült fel, amikre a kor matematikusai – más eszközük nem lévén – elemi módszerekkel adtak választ. Ezeknek a problémáknak és/vagy megoldási módszerüknek a középiskolai tananyagba történő integrálása lehetőséget ad egy adott tétel több szempontú megvilágítására, más-más problémaszituációba való elhelyezésére.

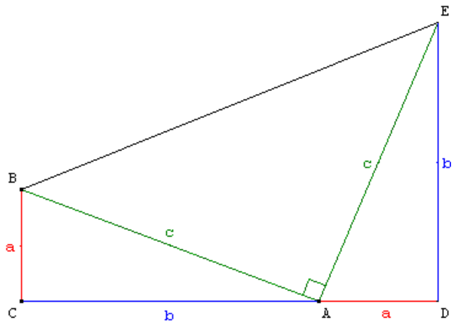
Példaként gondolhatunk arra, hogy a Pitagorasz-tételnek számtalan olyan bizonyítása maradt ránk, amelyeket a diákok is megértenek. Ilyen például Garfield (már a neve hallatán felfigyelnek a diákok) által az 1870-es években felfedezett bizonyítás[43].

[43] Forrás: (Deledicq & Casiro, 1998)

A *2. ábra* szerinti a és b alapú, $(a + b)$ magasságú trapéz területét felírjuk a trapéz területképletével és a három háromszög területének összegeként:

$$\frac{a+b}{2} \cdot (a+b) = \frac{a \cdot b}{2} + \frac{a \cdot b}{2} + \frac{c \cdot c}{2}$$

Innen ekvivalens átalakítással adódik a tétel.



2. ábra

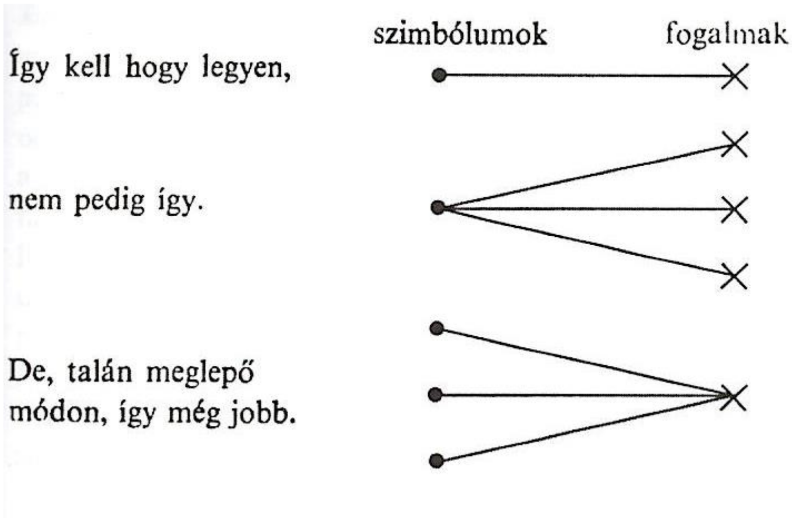
A trapéz területképletét tanítva egyszerre adódik lehetőségünk a Pitagorasz-tétel (újbóli) bizonyítására, így egy régebbi ismeret felelevenítésére és az újonnan tanult ismeret, a trapéz területképletének egy klasszikus területszámítási feladatoktól gyökeresen eltérő szituációban történő alkalmazására. Ugyanez a helyzet a nevezetes azonosságok használatával, és betűs kifejezésekkel történő műveletvégzéssel. A feladat a diákok korához tökéletesen alkalmazkodó diszkussziójaként a tanár felteheti a kérdést, milyen ábrát kapunk, ha az eredeti háromszög egyenlőszárú. Mindehhez pedig társulhat egy apró történet[44], ami szintén segíti a hosszú távú memóriába történő rögzülést.

4.3.2. Egy fogalom vagy tétel mélyebb megértésének segítése

Egy adott tétel vagy fogalom megértésének több szintje lehetséges. Az amerikai kutató, Usiskin egy fogalom megértésének ötféle aspektusát különbözteti meg, köztük a (mintegy legmagasabb szintet jelentő) történeti aspektust is (Usiskin, 2012). Elmélete szerint a megértés különféle típusú mozzanatai összekapcsolódnak, s egymásra hatással vannak. Egy ilyen mozzanat a történetiség, amely tehát nagyban segítheti a mélyebb szintű megértést. Például a számrendszerek tanításánál hasznos, ha ellenpéldákat is mutatunk a helyiértékes írásmódra (tízes alapú, de nem helyiértékes az egyiptomi, nem tízes alapú és nem helyiértékes a római számírás).

Skemp a fogalom és az őket jelölő szimbólumok kapcsolatát a *3. ábra* segítségével írja le (Skemp, 2005. p. 107.).

[44] James Abram Garfield az USA második olyan elnöke volt, akit megöltek. Állítólag képes volt egyszerre egyik kezével latinul, másikkal görögül írni.



3. ábra

A fogalmak megértése szempontjából (ahogyan ő is megjegyzi meglepő módon) az utolsót tartja jobbnak, amit később a következővel indokol:

„Ha egyszer megtanulunk valamit megfelelően osztályba sorolni, akkor az út nagy részét megtettük afelé, hogy elsajátítsuk, hogyan is bánunk vele. […] A »megfelelő« olyan módot vagy módokat jelent, amelyek segítenek számunkra az éppen felmerülő probléma megoldásában, és így minél több módon tudunk osztályba sorolni, annál nagyobb azoknak a problémáknak a változatossága, amelyeket képesek vagyunk megoldani. És minél több szimbólumot tudunk ugyanahhoz a fogalomhoz hozzákapcsolni, annál többféle módon tudjuk a kérdéses fogalmat osztályba sorolni.” (Skemp, 2005., p. 112.)

Márpedig sok olyan matematikai fogalom létezik, amely jelölésére történelme során többféle szimbólumot használtak, amelyek valamilyen ok folytán kikoptak. Ez az ok gyakran az adott fogalom valamely tulajdonságából adódott, amely megfelelő megjelenítésére az adott szimbólum vagy szimbólumrendszer alkalmatlan volt. Például a pozitív egész számok halmazának végtelen tulajdonsága miatt, ezen számok tízes alapú, de nem helyiértékes egyiptomi számírásban történő megjelenítése csak végtelen különböző szimbólummal lenne lehetséges. Így az egyiptomi számírás diákoknak történő megmutatásával hangsúlyt kap e számhalmaz egy fontos tulajdonsága, s ezáltal a fogalom mélyebb megértése.

4.3.3. Más tudományokhoz való kapcsolódás

Gyakran találkozhatunk avval a jelenséggel, hogy a diák egy adott ismeretet csak egy bizonyos tantárgy óráin tud használni (pl. a matematikaórán hibátlanul dolgozó megijed egy egyenletrendezéstől fizikaórán). A probléma kezelése komplex módszert igényel, aminek egyik komponense lehet az, ha a tanulót a „tantárgyak között mozgatjuk”, azaz egy matematikaórán előkerülő fogalom kapcsán beszélünk például nyelvészetről, történelemről, földrajzról, vagy irodalomról. Bár ehhez – Sain Márton korábban idézett szavaival élve – tényleg „*Németh Lászlói koponya kell”* vagy legalább egy ilyen szempontból összeállított, s a tanár rendelkezésére álló segédanyag.

Egy másik komponens lehet az is, ha a tanuló megtapasztalja, hogy egy adott tantárgy által hozott probléma milyen matematikai eszközrendszer megjelenését, fejlődését segítette elő. A matematikatörténet mindkét komponensnek ideális teret biztosít, ahogyan azt a következő példa is mutatja.

A korábbi korok elnevezései ma gyakran viccesnek hathatnak a diákok számára, így elmondhatjuk nekik, hogy például Géresi István a nagybányai iskola egykori tanítója a XVII. században a kivonni szó helyett a *ki lopni, ki vinni, ki venni, subtrahalni* szavakat használta (Szénássy, 1970). A tantárgyak közötti kapcsolat pedig tovább szőhető azáltal, hogy több idegen nyelvben a ma is használt szakkifejezés – az itteni alakokhoz hasonlóan – latinból épült be a mai műnyelvbe (pl. a kivonás szó franciául soustarction, angolul substraction, németül Subtraction, spanyolul sustracción). Nagybánya nevét kimondva szóba kerülhet annak földrajzi elhelyezkedése és/vagy a magyar festészettörténet meghatározó eleme, az egykor ott működő festőiskola. Ilyen esetben felmerülhet kérdésként az is, hogy mi kell ahhoz, hogy egy szó meggyökeresedjék a nyelvben[45]. A puszta figyelemfelkeltésen túl a tantárgyak közötti kapcsolatokat erősítve mutatja ez a tanórából egy-két percnél nem többet elvevő példa, hogy a matematika fejlődése és az emberiség kultúrtörténetének fejlődése (jelen esetben a nyelvújítás) elválaszthatatlanok.

[45] erről ld. (Keresztesi, 1935).

4.3.4. Motivációs eszköz

Ahogyan arra több szakirodalom is felhívja a figyelmet[46], egy tanórán a legjobb fegyelmezési eszköz a figyelem fenntartása, így egy tanár számára minden hasznos lehet, amivel a figyelmet fel tudja kelteni és fenn tudja tartani. Különösen fontos ez olyan diákok esetében, akik számára a matematika önmagában nem bír figyelemfelkeltő erővel. Számukra ilyen erővel bírhatnak például korábbi korok matematikusainak különcségei (pl. a pithagoreusok tartózkodtak a lóbabtól), hozzájuk kapcsolódó legendák (pl. Bhaskara matematika könyvet írt pártában maradt bánatos leányának megvigasztalására), egy régies nyelvezetű, régebbi kor feladatának megoldása, vagy egy általuk már ismert eredmény régi korokban történő meghatározása (pl. négyzetgyökkereső eljárások, vagy a kör kerületének és átmérőjének hányadosa, ami a Bibliában 3 volt az ószövetségi korban[47]).

Egyetértünk Schoenfelddel, aki felhívja a figyelmet arra, hogy a problémamegoldásban fontos szerepe van a tanuló hozzáállásának, a tananyagról és a matematikáról alkotott véleményének (Schoenfeld, 1985). Így, ha ezek az érdekességnek szánt történetek a tanulók egy részénél figyelemfelkeltő erővel bírnak, akkor a tanórából rájuk szánt néhány perc busásan megtérül, s talán könnyebb lesz a feladatok megoldására rávenni a diákokat.

Egy másik ok miatt is lehet motiváló erejű a matematikatörténet. A legtöbb diákban ott motoszkál a kérdés: miért kell ezt tanulni? A probléma kezelésének egyik útja lehet, ha egy probléma felmerülésének történeti okaira, vagy egy fogalom és összefüggés korábbi alkalmazásaira világítunk rá a tanórákon. Például a logarléc megmutatásakor a logaritmus azonosságait jeleníthetjük meg fizikailag (tananyaghoz kapcsolódóan) miközben rávilágítunk arra, hogy néhány évtizede még ténylegesen ennek az absztraktnak tűnő fogalomnak és azonosságainak segítségével számoltak eleink. Ráadásul – ahogyan évenként tapasztalom – az, hogy a lécek mechanikus tologatásával szorozni és osztani lehet, sok diák érdeklődését kelti fel, s ők ezért innentől már nem foglalkoznak avval, hogy mi haszna van a logaritmusnak, s miért is kell nekik ezt tanulniuk. Ahogyan Dienes Zoltán írja: *„[a gyerek] sosem kérdezi meg, hogy ami érdekes, egyúttal hasznos-e”* (Dienes, 1973, p. 31.).

[46] Például (Boros, 1996) e témáról szóló fejezetének egyenesen az a címe, hogy Figyelem – fegyelem.
[47] *„Azután készített egy öntött tengert, amelynek egyik pereme a másik peremétől tíz könyöknyire volt, kör alakú, és öt könyök magas volt, és harminc könyök hosszú zsinór érte körül.”* (1Kir 7,23)

4.3.5. A matematika megjelenítése élő tudományként

Egy 12 évig iskolai keretben matematikát tanuló olyan diákban, aki tökéletes felépítésben a matematikának csak az eredményeit kapja meg készen, önkéntelenül is kialakulhat az a torz kép, miszerint a matematika egy lezárt tudomány. Lezárt abban az értelemben, hogy egy kész axiómarendszerben gondolkodunk, abban lineárisan haladunk, s az előrehaladást maximum újabb tétel megalkotása / megtalálása (?) jelentheti. Egy ilyen diáknak miért jutna eszébe, hogy például az alapoknál történő módosítással akár több fejlődési út is létrehozható. Ez történhet egy-egy axióma helyettesítésével (pl. Bolyai Farkas helyettesítő axiómái), vagy egy adott úton belül a jelölési rendszer módosításával. Márpedig a matematika története során több alkalommal az igazán nagy előrelépést egy jelölési rendszer megváltoztatása (pl. római számokról való áttérés a helyiértékes számírásra) vagy új típusú szemlélet és kérdésfeltevés (pl. a geometria algebrizálásaként az analitikus geometria megjelenése) alapozta meg.

4.3.6. A matematika nyelvének megértéséhez és elfogadásához való hozzájárulás

Hajlamosak lehetünk természetesnek venni az általunk használt matematikai szaknyelvet, noha az egy hosszú és nem lezárt kialakulási folyamat eredménye. Ha a tanár felhívja erre a diákok figyelmét, segítheti őket a tanulásban. Például sok diák nem tudja megjegyezni, hogy a háromszög melyik nevezetes vonalai melyik nevezetes pontban metszik egymást. Érdemes (több alkalommal) felhívni a figyelmet arra a tényre, hogy a ma használt magyar matematikai műnyelv nagy része viszonylag későn kezdett el kialakulni, s így volt idő és lehetőség eléggé beszédes szakszavakat alkotni. Így a súlyvonalak a súlypontban, a magasságvonalak a magasságpontban metszik egymást. Ez nem minden nyelvben van így. Elnevezhették volna eleink „gravitációs pontnak”[48] is a súlypontot, így a mai beszédes név csupán nyelvújítóink jól átgondolt döntésén múlt. Mindezek nyilván a tananyag memorizálását is segítik.

[48] Például franciául a súlypont: centre de gravité, a súlyvonal médiane.

Tudatosíthatjuk diákjainkban továbbá, hogy a matematikai jelölések esetében is jelen van a „hagyományőrző írásmód”. Ennek egy formája, ha tisztázzuk, hogy hallgatólagos szabályként, csupán hagyományt őrizve írjuk például a következőket:

- bizonyos betűk bizonyos fogalmakra történő használata (pl. k, l, m: egész számok);
- megszokott sorrend tartása (pl. 3x: együttható – ismeretlen);
- „idegennek ható” jelölési mód (pl. $P(\xi = 3)$: annak a valószínűsége, hogy a valószínűségi változónak nevezett függvény által felvett érték 3).

A tanórákból erre szánt néhány perc semmiképpen sem nevezhető hasztalan időnek. Ha kihagyjuk, előbb-utóbb úgyis valamelyik diák felteszi például azt a kérdést, hogy ha *ő nem k-val, hanem z-vel jelölte az adott egész számot, az baj-e.*

4.3.7. Tanterven kívüli matematikai tartalmak beemelése

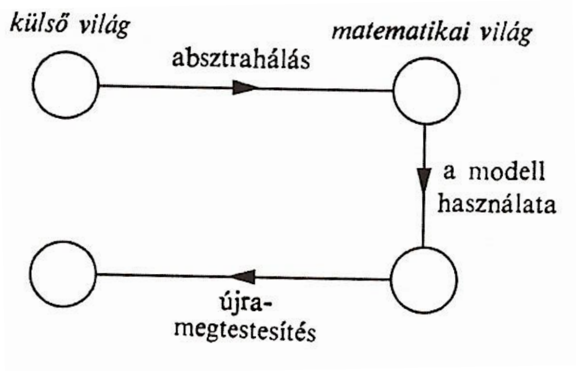
Bármennyire is törekszik rá valaki, a középiskolai matematika nem építhető fel szigorú axiomatikus tárgyalással. A középiskolai diákok erre még nem érettek. Vannak állítások, amiket érdemes bizonyítani, vannak, amiket elegendő részlegesen (pl. természetes számokra bizonyítjuk, de a tételt már valós számokra mondjuk ki), s vannak, amiknek bizonyítását teljesen elhagyjuk. Tananyagtól és osztálytól függően mind a három eljárást hasznosnak tartjuk avval a kikötéssel, hogy a két utóbbi esetben a bizonyítás részlegességére vagy hiányára hívjuk fel a diákok figyelmét. Az egyes részek között valamifajta logikai kapcsolat viszont elengedhetetlenül hozzátartozik a matematikaoktatáshoz. Márpedig ezt a logikai kapcsolatot, több esetben a matematikatörténet tudja biztosítani, amint arra Munkácsy Katalin is felhívja a figyelmet.

> *„A történetiség elve, a matematikatörténeti ismeretekkel való foglalkozás lehetővé teszi fontos fogalmak megemlítését, szemléletes bemutatását akkor is, ha azok egyébként nem szerepelhetnek az előírt tananyagban, a következetesség didaktikai elvének megsértése nélkül.”* (Munkácsy, 2002, p. 89.)

Példa erre a Bolyai-Lobacsevszkij-féle geometria, illetve az abszolút geometria, amelyekről úgy gondoljuk, minden magyar középiskolás diáknak érdemes hallania. 9. osztályban, amikor az euklideszi geometria tárgyalását elkezdjük, érdemes időt szánni arra, hogy beszéljünk arról is, hogy ezen axiómarendszert hogyan próbálták redukálni, majd módosítani a történelem során. Az axióma és az axiomatikus felépítés fogalma is biztosan jobban megérthető, ha egy felépített rendszer közlése helyett említést teszünk arról, hogy mit okoz az alapok ilyen vagy olyan típusú módosítása.

4.3.8. Nevelés a lényeg kiszűrésére

Skemp a feladatmegoldást a középiskolában is jól használható *4. ábra* segítségével írja le (Skemp, 2005, p. 321.). A megfogalmazott problémából (például egy szöveges feladatból) megalkotunk egy matematikai modellt (például egy egyenletet). Miután a matematikai modellben feldolgozzuk a feladatot (azaz megoldjuk az egyenletet), a kapott eredményt visszakonvertáljuk a kiindulási probléma nyelvére (azaz adunk egy szöveges választ).



4. ábra

Amint arra több tanulmány is rámutat[49], a három lépésből a diákok számára a legnehezebb a matematikai modell megalkotása. Ennek egyik lépése a feladat megoldásához szükséges adatok és a megoldás szempontjából indifferens zajok szétválasztása. Példaként álljon itt egy korábbi érettségi feladat, s kevesebb zajjal történő átfogalmazása:

Az eredeti feladat:

„Egy nemzetközi konferencia 5 résztvevője áll egy asztal körül a kávészünetben (jelölje őket *A*, *B*, *C*, *D*, illetve *E*). Tudjuk, hogy *A* ismer mindenkit az asztalnál. *B* nem ismeri *E*-t, de a többieket ismeri. *C* két résztvevőt ismer, *D* pedig hármat.

Ábrázolja az ötfős társaság tagjai közötti ismeretségeket egy gráffal, és adja meg, hogy kiket ismer az asztalnál az *E*-vel jelölt személy! (Minden ismeretség kölcsönös.)”

(Középszintű érettségi, 2020. május 5.)

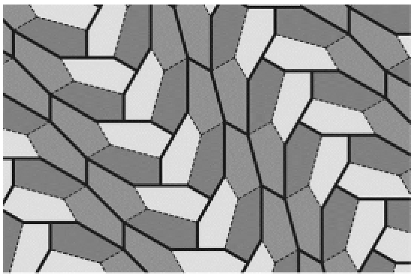
[49] Ld. pl. (Csíkos, 2002.)

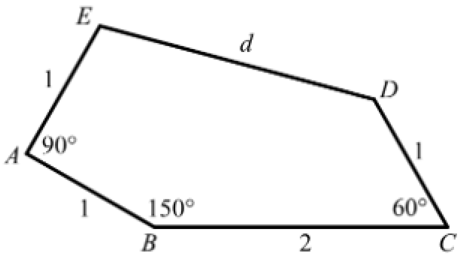
A feladat átfogalmazva, kevesebb zajjal:

„*A, B, C, D, E* körben áll. A jelen lévő személyek közül *A* mindenkit, *B E*-t leszámítva mindenkit, *C* kettő, *D* pedig három embert ismer. (Minden ismeretség kölcsönös.) Ábrázolja ezen társaság tagjai közötti ismeretségeket egy gráffal, s adja meg, hogy kiket ismer a társaságból *E*!”

A zajoknak ugyanakkor komoly pedagógiai szerepük is van. Ezek teszik életszerűvé a feladatokat, tanítják a lényeg kiszűrését, ezáltal pedig az absztrakciós folyamat részei. Ezeket a funkciókat történeti adalékokkal szintén elérhetjük, amint az az *5. ábra*látható 2017. május 9-i emelt szintű érettségi feladat példája mutatja.

5. Az interneten érdekes hírként jelent meg 2015-ben, hogy a matematikusok újabb, egybevágó ötszögekből álló hézagmentes síklefedést (parkettázást) fedeztek fel. (A két ábrán a parkettázás egy részlete, illetve a parketta egyik ötszögének néhány adata látható: $EA = AB = CD = 1$, $BC = 2$, $EAB\angle = 90°$, $ABC\angle = 150°$, $BCD\angle = 60°$.)





a) Igazolja, hogy az ábrán megadott ötszög *B* csúcsából húzott két átló 75°-os szöget zár be egymással!

5. ábra

Azon felül, hogy a történeti bevezető nem tűnik erőltetettnek, többlettartalommal is bír. Ugyanis, ha egy feladatot történet vezet be, akkor az egyben felhívja a figyelmet annak életből való kiragadottságára, így bújtatott módon figyelmezteti a tanulókat a feladat életszerű mivoltára is.

4.4. Hogyan valósítható meg a matematikatörténet tanórába történő beemelése?

Hisszük, hogy a tanár a saját maga által hasznosnak vélt módon tud a leghatékonyabban dolgozni. Ha valaki kényszerűségből kezd IKT eszközöket használni vagy pármunkában dolgoztatni, az hiteltelen lesz diákjai előtt, akik azonnal megérzik a kényszeredett váltást. Klein Sándor a Varga Tamás féle komplex matematikatanítás kapcsán a következőt írta: *„Magyarországon az 1974-es országos elterjesztést elrendelő határozat volt a »vég kezdete«: újra bebizonyosodott, hogy a jót nem lehet ráerőltetni az emberekre.”* (Klein, 2005, p. 8.) Tanulva az akkori hibából, az elkészített segédanyagban sehol nem írtuk elő, hogy mit milyen munkaformában kell megvalósítani, sőt külön megemlítjük, hogy az egyes anyagrészek jellegét figyelembe véve többféle feldolgozási módszert is hatékonynak gondolunk.

A bemutatott anyagrészek jelentős része rövid, fél és két perc között elmondható adalék, melyet szerintünk leghasznosabb, ha a tanár oszt meg a diákokkal. Ugyanezt megteheti hosszabb részek, például egy régebbi algoritmus ismertetése esetén is. Ennek a tanári magyarázatnak előnye, hogy az irányítás végig a tanárnál van. Ha akarja, néhány tervezett részt kihagyva felgyorsítja mondanivalóját, vagy érdeklődő tekintetek esetén valamiben jobban elmélyülhet.

Ugyanakkor több tananyagrész tanítása is elképzelhető pár- vagy csoportmunkában. Például miután a tanár ismerteti, hogy Chuquet milyen jelöléseket használt, kiadható, hogy az egymás mellett ülők egyike alkosson algebrai kifejezést evvel a jelölésmóddal, a másik tanuló pedig írja ezt át mai alakra. Hasonló feladat, például a korabeli és a mai jelölések összepárosítása akár interaktív táblán is kitűzhető.

A 2020-ban megjelent NAT-hoz tartozó kerettantervben több helyen is ajánlott tevékenységi formák között szerepel a tanulói kiselőadás, melyek közül több matematikatörténeti témájú (pl. 10-estől különböző alapú számrendszerek használatáról a múltban és ennek mai napig tartó hatásairól). A segédanyag több ilyen témát érint, éppen ezért az órán elmondandóknál valamivel többet, háttérismereteket, valamint forrást is tartalmaz. Így a tanár, ha ezt a módszert választja, rendelkezik azokkal a szükséges információkkal, amikkel el tudja indítani a diákot az önálló felkészülés útján. Ugyanez lehetővé teszi a tanár számára is, hogy egy-egy résznek utána nézzen.

5. A kidolgozott segédanyag bemutatása

5.1. A segédanyag felépítése

Ez a fejezet a segédanyag egy részét – mint az általános elvek egy adott témakörben történő megjelenítését – tartalmazza. A segédanyag bevezetője az előző fejezet összefoglalását tartalmazza, aminek fontos szerepe van abban, hogy a kipróbáló tanár megértse azt a szemléletet, amelyet a matematikatörténet tanórai megjelenítése kapcsán fogalmaztunk meg.

A dolgozatban a 9. évfolyamon tanított algebra és számelmélet témakörhöz készült fejezettel foglalkozunk. Ennek a témakörnek a választását az alábbiak indokolják.

- A segédanyag első, részletesen kidolgozott fejezetéhez minél korábban előkerülő témát szerettünk volna választani, mivel a diákok között meglévő különbségért itt okolható a legkevésbé a gimnáziumi matematikaoktatás.
- Tapasztalatunk szerint, ha a diáknak van valahol lehetősége kilépni a saját matematikatudásáról alkotott képéből, akkor az ez az évfolyam. Új tanár és osztálytársak veszik körül, akik többsége nem tudja, hogy korábban milyen jegye volt matematikából, vagy mit nem sikerült megértenie a korábbi tanulmányok során. A gimnáziumi tananyag is úgy van felépítve, hogy kilencedik évfolyamon szinte csak az általános iskolai anyag rendszerező ismétlése és kibővítése történik. Így például, ha valakinek eddig nem sikerült megértenie a függvényeket, akkor itt szinte elejéről kezdheti azok tanulását. Ezen az évfolyamon a tanár-diák kapcsolat sem terhelt még esetleges korábbi konfliktusok emlékétől.
- A kerettanterv kétéves bontásban adja meg a tanítandó anyagokat. Például a geometriai transzformációk kilencedik, tizedik vagy mindkét évfolyamon taníthatók. Viszont tapasztalatunk szerint a bevezető algebrai részt – bár törvényileg lehetőség lenne akár tizedik évfolyamon is tanítani – valamennyi tanár a kilencedik évfolyam elején tanítja. Így a kísérleti és a kontrollcsoportban párhuzamos haladása itt volt a legjobban mérhető.
- Ez az egyik legnagyobb középiskolai témakör. A rendelkezésre álló idő azonban általában nagyon feszített tempót igényel, így a beépíthetőség kérdése itt különösen releváns. Ez nem így lenne egy olyan témakör esetén, ahol a megtanítandó tananyag mennyiségéhez képest arányaiban sokkal több idő áll rendelkezésre (pl. logika).

- Ezt a témakört a benne előforduló témák (hatványozás, algebrai törtekkel való számolás, számelmélet) nagyon változatossá teszik, így sok különböző matematikatörténeti rész kapcsolható hozzá. Ez pedig lehetőséget teremthet arra, hogy a kipróbáló tanárnak tényleges választása legyen a beépíteni kívánt blokkok kiválasztásakor.
- Az is lényeges szempont volt, hogy a kipróbáló tanár a kísérlet előtt egy-két hónappal (ne sokkal korábban, s ne is közvetlenül a tanóra előtt) át tudja nézni a segédanyagot, át tudja venni a szemléletét, s ha kérdése van, azt a kipróbálás előtt fel tudja tenni. Erre augusztusban még reális esély van, amikor a tanár az új tanévet készíti elő, míg tanév közben ez kevésbé megvalósítható.

A segédanyag a 9. osztályos algebra és számelmélet témakörének következő menetrend szerinti felépítését követi (*4. táblázat*).

ÓRA SORSZÁMA	ÓRA TÍPUSA	AZ ÓRA CÍME	MAT.TÖRTÉNETI BLOKKOK SZÁMA
1.	új anyag feldolgozó	**Betűk használata a matematikában**	**3**
2.	új anyag feldolgozó	**Hatványozás egész kitevőre**	**1**
3.	új anyag feldolgozó	**A hatványozás azonosságai: $a^n \cdot a^m$; $a^n : a^m$; $(a^n)^k$**	**1**
4.	új anyag feldolgozó	A hatványozás azonosságai: $a^n \cdot b^n$; $a^n : b^n$	0
5.	új anyag feldolgozó	Kéttagú összeg négyzete	0
6.	új anyag feldolgozó	Háromtagú összeg négyzete, kéttagú összeg köbe	0
7.	új anyag feldolgozó	**Binomiális tétel**	**1**
8.	új anyag feldolgozó	**Számok normál alakja, gyakorlás**	**1**
9.	új anyag feldolgozó	**Algebrai kifejezések átalakítása**	**1**
10.	új anyag feldolgozó	Szorzattá alakítás kiemeléssel	0
11.	új anyag feldolgozó	Szorzattá alakítás kiemeléssel	0
12.	új anyag feldolgozó	Szorzattá alakítás nevezetes azonossággal ($a^2 - b^2$)	0

ÓRA SORSZÁMA	ÓRA TÍPUSA	AZ ÓRA CÍME	MAT.TÖRTÉNETI BLOKKOK SZÁMA
13.	új anyag feldolgozó	Szorzattá alakítás nevezetes azonossággal ($a^3 \pm b^3$)	0
14.	új anyag feldolgozó	**Algebrai törtek egyszerűsítése**	**1**
15.	új anyag feldolgozó	Algebrai törtek szorzása, osztása	0
16.	új anyag feldolgozó	Algebrai törtek összeadása, kivonása	0
17.	feladatmegoldó	Algebrai törtek összeadása, kivonása	0
18.	feladatmegoldó	Gyakorlás	0
19.	új anyag feldolgozó	**Emeletes törtek, lánctörtek**	**1**
20.	feladatmegoldó	Gyakorlás	0
21.	új anyag feldolgozó	Oszthatóság és tulajdonságai	0
22.	új anyag feldolgozó	Oszthatósági szabályok	0
23.	új anyag feldolgozó	Prímszámok, összetett számok	0
24.	új anyag feldolgozó	Legnagyobb közös osztó, legkisebb közös többszörös	0
25.	új anyag feldolgozó	Osztók száma	0
26.	feladatmegoldó	**Vegyes számelméleti feladatok**	**1**
27.	új anyag feldolgozó	**Számrendszerek**	**4**
28.	feladatmegoldó	Számrendszerekkel kapcsolatos feladatok megoldása	0
29.	feladatmegoldó	Gyakorlás	0
30.	összefoglaló	Összefoglalás	0
31.	összefoglaló	Összefoglalás	0
32.	témazáró dolgozat	Témazáró dolgozat	0

4. táblázat

Ez a menetrend a segédanyag összeállítása szempontjából két dolgot jelent. Egyfelől az egyes matematikatörténeti részeket ezen felépítés szerint haladva adjuk meg mindig ott, ahol a tanuló már rendelkezik a szükséges ismeretekkel és készségekkel. Az ettől való főbb eltérési lehetőségekre minden blokknál a kapcsolódási pontok résznél utalunk. Másfelől jelenti azt is, hogy a matematikatörténeti blokkokat mindig egy itt feltüntetett tanóra keretébe ágyazva adjuk meg.

Amennyiben kapcsolódhat matematikatörténet a tanórához, akkor azt a következő struktúrában mutatjuk be.

- Az óra címe.

- Az óra célja.

- Az óra menete (a felsorolt részeknél zárójelben feltüntetve, a hozzá kapcsolódó matematikatörténeti blokk).
  A későbbi hivatkozások könnyítésére minden blokkot egy elé írt betűvel láttunk el. A matematikatörténeti blokk felirat utáni zárójeles szám arra utal, hogy ennek tárgyalása várhatóan mennyi időt vesz igénybe. Ha ez kevesebb, mint egy perc, azt < 1' jelzéssel jelöltük. Fontos, hogy ez a szám csak magára a matematikatörténetre vonatkozik. Sok esetben egy feladat vagy egy elméleti rész a matematikatörténet említése nélkül is szerepelhet a tanórán. A tanórarészlet leírásakor már a teljes feladatra szánt időt adtuk meg.

- Az adott blokk (zárójelben feltüntetve annak nehézsége).
  A matematikatörténeti blokk címe utáni zárójelbe tett pozitív egész szám, jelzésül szolgál a megmutatandó rész nehézségét illetően. 1-es jelzést kapott a bármely osztályba bevihető blokk. Ezek főleg apróbb, tanári ismeretközlő részek (pl. honnan származik egy elnevezés). 2-es jelzésű a gyengébb osztályokba bevihető, de már az osztálytól is cselekvő aktivitást igénylő rész (pl. egy feladat elvégzése). 3-as jelzést kapott az átlagos, 4-est az átlagosnál kicsit jobb, és 5-öst a kifejezetten jó képességű, például speciális matematika tagozatos osztályok számára szánt rész. Több helyen két szám (pl. 2-3) jelzi, hogy a matematikatörténeti rész annak bontásával különböző szinten is tárgyalásra kerülhet. Természetesen ez a skálázás elég szubjektív, így csak tájékoztató jellegű.
  Az egyes részekhez tartozó anyagok mindig egy matematikatörténeti ismertetővel indulnak. Ez sokszor több információt tartalmaz annál, mint amit érdemes a diákoknak elmondani. A többletinformációk a tanárnak szólnak, aki így a számára kedvezőnek tűnő mélységben tudja az adott részt ismertetni.

- Forrás.

  A blokkokban leírtak valóságtartalmát igyekeztünk vagy elsődleges, vagy legalább egymástól független forrásokból ellenőrizni. Mivel azonban e blokkok nem egy matematikatörténeti könyv fejezeteinek, hanem oktatási segédanyagnak készültek, ezért e részben mindegyik blokkhoz igyekeztünk a magyar nyelvű, s bárki által könnyen hozzáférhető forrásmunkákat megjelölni. Amennyiben a blokk szó szerinti idézetet tartalmazott egy műből, az itt feltüntetésre került. Így ha tanárnak vagy diáknak további kérdése van, akkor idegennyelv-ismeret nélkül is el tud kezdeni egy adott résszel kapcsolatos kutatást. Ugyanígy a közérthetőség indokolta a forrásmunka megjelölésének módját is.

  Előfordulhat egy tanárral, hogy egy történet vagy feladat órán való bemutatását nem a tanmenet és a tanórára való felkészülés, hanem az adott tanórán váratlanul előkerülő szituáció szüli. Így végezetül néhány ilyen lehetséges (a segédanyag összeállítójával már megtörtént) esetet tárgyalunk, amelyre a tanár matematikatörténeti tartalommal felelhet. Az ezekhez kapcsolódó matematikatörténeti blokkoknál a források nincsenek pluszként feltüntetve, hiszen természetükből adódóan e blokkok nem egy esetleges mélyebb kutatómunka (pl. tanulói kiselőadás) kiindulópontjai.

- Az adott blokk egy lehetséges beépítése a tanórába.

  Itt megadjuk, hogy egy adott rész mennyi időt vesz igénybe, illetve leírjuk a korábbi tapasztalatokból adódó tanácsokat, megjegyzéseket. Ez a rész, a kutatási módszerünkből (design research) adódóan folyamatosan bővül. Hangsúlyozzuk azonban, hogy ez csak példa arra, hogy hogyan lehet beépíteni az adott részt egy tanórába, így a teljes óratervből csak a matematikatörténeti blokk szerepel részletezve. A tanóra többi részében a tanár a saját óratervét tudja követni.

- A matematikatörténeti blokk funkciója az adott tanórán belül.

  A tanterven kívüli matematikai tartalmak matematikatörténettel történő beemelésére ebben a témakörben nem gondoltunk sort keríteni, így ez a funkció, itt nem jelenik meg.

- Lehetséges kapcsolódási pontok alatt soroljuk fel az olyan tananyagrészeket, ahol az adott blokk szintén tárgyalható.

5.2. Matematikatörténeti blokkok a 9. osztályos algebra és számelmélet témakör tanításához

Ebben a fejezetben az algebra és számelmélet témakörhöz kapcsolódó matematikatörténeti blokkokat, a 2018/19-es és 2019/20-as tanévben történő kipróbálások után végrehajtott apróbb módosításokkal együtt a *4. táblázatban* megjelölt tanórák szerint haladva ismertetjük.

5.2.1. Betűk használata a matematikában

Az óra célja:

- a betűk matematikában történő használatának megvilágítása;
- a formalizmus szükségszerűségének beláttatása és a formális matematika előnyeinek tisztázása;
- a betűs kifejezésekkel kapcsolatos fogalmak, elnevezések és jelölések tisztázása;
- az absztrakciós készség fejlesztése (áttérés számokról betűkre).

Az óra menete:

- a halmazokkal kapcsolatos előző dolgozat megbeszélése;
- a téma felvezetése (A);
- Miért használunk a matematikában betűs kifejezéseket? (B);
- betűs kifejezések értelmezési tartománya;
- betűs kifejezések csoportosítása;
- betűs kifejezések fokszáma (C);
- házi feladat feladása.

[A] MATEMATIKATÖRTÉNETI BLOKK (1')

Az algebra szó eredete, s különféle megfelelői (nehézségi szint: 1)

Az ókori görög matematika legfőbb eredményeinek jelentős része a geometria és (a számokat őselemként tisztelő püthagoreusoknak köszönhetően) kisebb részben a számelmélet területén született. A görögök utáni évszázadokban az európai matematika fejlődése megállt.

Például bár más területeken maradandót alkottak, a római civilizáció egyetlen figyelemre méltó matematikust sem adott a világnak.

Az első komoly továbblépést a keleti (indiai, kínai és arab) matematikusok tették meg. A mi algebra szavunk is az arabul író perzsa tudós al-Hvárizmi (780 – 845) Kitáb al-Dzsabr va l-Mukábala (dzsabr: összeilleszkedés, újraegyesítés) című könyvének címéből származik.

Maróthi György már az 1740-es években használta az „algebra" szót. Ám a mindenképpen magyarosítani akaró korabeli matematikusaink számtalan ajánlással éltek, amelyre íme néhány példa: betö-vetés (Dugonics András, 1784), betüzvény (Besnyák, 1786), betütudákosság (Bartzafalvi Szabó Dávid, 1787), betűszámvetés (19. század). Nyelvújítóink ezen törekvései szépen mutatják, hogy még az akkori iskolai elemi algebrára is betűkkel való számolásként tekintettek. Ezért írja Dugonics András: *„Ha az én édes Eleim azért nevezhették az Arithmetikát számvetésnek, mert e tudomány a számok egybe-vetésében foglalatoskodik; meg-engedik Kedves Utoim, hogy az Algebrát Betö-vetésnek nevezzem, mivel e tudomány a betök egybe-vetéséről elmélkedik."(Dugonics,1784 p. 14.)*

Forrás

Keresztesi Mária: *A magyar matematikai műnyelv története*. Debrecen, 1935.

Dugonics András: *A tudákosságnak első könyve mellyben foglaltatik betö-vetés (algebra)*. Pest, 1784.

Az anyag beépítése a tanórába

Idő	Az óra menete	Megjegyzés
1'	A címben (algebra és számelmélet) szereplő algebra szó magyarázásakor, annak megemlítése, hogy volt idő, mikor ezt betűvetésnek próbálták eleink nevezni.	Egy-két mondatos tanári megjegyzés, melynek célja a betűs kifejezések bevezetése.

A matematikatörténeti blokk funkciója

Hozzájárul a matematika nyelvének megértéséhez és elfogadásához, mert rávilágít az elnevezésre, s magyarázattal él későbbi, idegennek tűnő elnevezésekre.

A matematikát nem lezárt, hanem élő tudományként segít megjeleníteni, mert bepillantást enged a matematika nyelvezetének fejlődésébe.

A matematika más tudományokhoz való hozzákapcsolása, mert a nyelvújítás folyamatának megemlítésén keresztül kapcsolódik a nyelvtanhoz.

[B] MATEMATIKATÖRTÉNETI BLOKK (3')

Retorikus, szinkopált, formális matematika fogalma (nehézségi szint: 1)

A matematika általában olyan fogalmakkal és módszerekkel dolgozik, melyek az életben és más tudományokban csak áttételesen fordulnak elő, így szükség volt egy tömör és pontos, sajátos matematikai szaknyelv kialakítására. Ez egy több évszázados (s máig nem lezárt) folyamat.

Kezdetben, az úgynevezett retorikus matematika korszakában a matematikusok mindent élőszóban és írásos köznyelven fejeztek ki. Evvel az „írásmóddal" azonban a ma egyszerűnek tűnő feladatok is komplikáltak. Próbáljuk csak megoldani (formalizálás nélkül) a következő feladatot: Melyik az a szám, amely felénél eggyel nagyobb számhoz a szám harmadának a kétszeresét adva, az eredeti szám ötödénél hattal többet kapunk? Példánk jól mutatja, hogy még egy ilyen egyszerű feladat is szinte kezelhetetlenné válik, vagyis egyenletek és egyenlőtlenségek megoldását célzó algebra ilyenfajta jelölési móddal (azaz formális matematika hiányával) csak hatalmas isteni adottsággal művelhető.

Később (elsőként az alexandriai Diofantosz (200 – 284)) szórövidítéseket kezdtek alkalmazni. A matematikának ezt a korszakát nevezik szinkopált matematikának. Példaként álljon itt a reneszánsz kori matematika jelölési próbálkozása.

Nicolas Chuquet (1445 – 1488) után Estienne La Roche (1470 – 1530) a következő jelöléseket használta: a francia plus (több, plusz) és moins (kevesebb, mínusz) szavak kezdőbetűjéből az összeadást $\tilde{p}$ –vel, a kivonást $\tilde{m}$ –vel jelölte. Ismeretlenre nem vezetett be betűt, hanem annak fokát az együttható felső indexébe írta. Így a konstans tag a 0 fokú tag lett.

Egyenlőségjel helyett az egaulx szót használta (Sain, 1986). Például: $2^3\tilde{p}3^2\tilde{m}5^1\ egaulx 7^0$-t ma így írnánk: $2x^3 + 3x^2 - 5x = 7$

A jelölések megreformálásának másik jelentős úttörője François de Viète (1540 – 1603), aki foglalkozására nézve jogász volt, és csak a csillagászati érdeklődése kedvéért kezdett matematikával foglalatoskodni. *„Az egyenletmegoldás általános módszereit kereste. Ezért igyekezett az algebrai egyenleteket szimbólumokkal felírni. Az együtthatók helyett betűket használt. Az ismeretlen mennyiségeket magánhangzókkal, az együtthatókat mássalhangzókkal jelölte."* (Sain, 1978. p. 228.)

Ahogyan a jelek elszakadtak az őket eredetileg jelentő szavaktól, s önálló jelentéssel bíró szimbólumokká váltak, úgy jött létre a mai korra jellemző formális matematika.

Forrás

Sain Márton: *Matematikatörténeti ABC Adatok, tények, érdekességek a matematika középfokú tanításához és tanulásához* Tankönyvkiadó, 3. Kiadás, Budapest, 1978.
Sain Márton: *Nincs királyi út!.* Gondolat Könyvkiadó, Budapest, 1986.

https://hu.wikipedia.org/wiki/Matematika

Az anyag beépítése a tanórába

Idő	Az óra menete	Megjegyzés
10'	Miért van szükség betűkre a matematikában? • képletek tanulhatósága • egységesség, nyelvfüggetlenség • rövidség • formalizmus szerepe a számolásban Ez utóbbinál kerül elő példaként a B blokk.	A tanár kérdésekkel vezeti rá a diákokat a betűs kifejezések hasznára. A végén ezekre példaként beszél a formális matematika kialakulásának történetéről röviden.

A matematikatörténeti blokk funkciója

A motiváció eszköze, mivel a diákok által is használt eszközrendszer hátterére világít rá.

Hozzájárul a matematika nyelvének megértéséhez és elfogadásához, mert rámutat arra, hogy a matematikai fejlődést életből jövő problémák táplálják, jelölésrendszere pedig ezek szolgálatában fejlődött olyanná, amilyennek ma ismerjük.

A hosszú távú memóriába való beépülés segítése, mert az egyhatározatlanú monom fokszámának fogalmát sajátos problémaszituációba helyezve használja.

A matematikát nem lezárt, hanem élő tudományként segít megjeleníteni, mivel felvillantja a mai formális matematika létrejöttét, s kiszakítja a diákot a „mindig is így volt" szemléletből.

Lehetséges kapcsolódási pont:

- szöveges feladatok.

[C] MATEMATIKATÖRTÉNETI BLOKK (1')

Betűs kifejezésekkel kapcsolatos elnevezések eredete (nehézségi szint: 1)

ismeretlen

Az ismeretlen, a latin incognitus szó szerinti lefordításából keletkezett, s kortól függően volt ismeretlen (1693), esmeretlen (1784), ösmeretlen (1839). A 19. század elején történő erőszakos magyar megfelelők gyártása során javasolt „titoktartó betsű" (Pethe 1812) nem vette figyelembe a műszavakkal kapcsolatos olyan alapvető kritériumot, hogy azok könnyen ragozhatók és toldalékolhatók, valamint rövidek legyenek, így használata nem terjedt el. Ugyanezen okoknál fogva, a genfi zsoltárokat magyar nyelvre fordító Szenczi Molnár Albert matematikát jelentő „bizonyos erősségből és megmutatásból álló tudomány" kifejezésének esélye sem volt a megmaradásra.

együttható

Pethe Ferenc 19. század eleji szóalkotása, amely a latin coefficiens szószerinti fordításaként keletkezett.

egynemű

A latin homogeneus helyett Apáczai Csere János által a XVII. század közepén bevezetett kifejezés.

Forrás

Keresztesi Mária: *A magyar matematikai műnyelv története*. Debrecen, 1935.

Az anyag beépítése a tanórába

Idő	Az óra menete	Megjegyzés
8'	Betűs kifejezésekkel kapcsolatos alapvető fogalmak tisztázásakor az előkerülő szavak eredetéről néhány információadalék megemlítése.	

A matematikatörténeti blokk funkciója

A motiváció eszköze, mert néhány régi megnevezés ma mókásan hathat (pl. titoktartó betsű).

Hozzájárul a matematika nyelvének megértéséhez és elfogadásához, mert rávilágít az elnevezésre, s magyarázattal él későbbi, idegennek tűnő elnevezésekre.

A matematikát nem lezárt, hanem élő tudományként segít megjeleníteni, mert bepillantást enged a matematika nyelvezetének fejlődésébe.

A matematika más tudományokhoz való hozzákapcsolása, mert a nyelvújítás folyamatának megemlítésén keresztül kapcsolódik a nyelvtanhoz.

5.2.2. Hatványozás egész kitevőre

Az óra célja:

- az egész kitevős hatványozás fogalmának és a hozzá kapcsolódó elnevezéseknek, jelöléseknek tisztázása;
- az n-edik gyök és a logaritmus fogalmának előkészítése;
- számolás gyakoroltatása.

Az óra menete:

- házi feladat ellenőrzése;
- a hatványozás, mint a szorzásra épülő művelet megjelenése;
- a hatványozás során használt elnevezések tisztázása (D);
- az egész kitevőjű hatvány fogalmának bevezetése;
- feladatok megoldása;
- házi feladat feladása.

[D] MATEMATIKATÖRTÉNETI BLOKK (< 1')

Hatványozással kapcsolatos elnevezések (nehézségi szint: 1)

A 19. században a korábbi idegen kifejezéseket felváltandó, kisebb részben azok szó szerinti lefordításával, nagyobb részben inkább új szavak gyártásával próbálkoztak a nyelvújítók. Az előbbinek volt eredménye a latin *exponens* kifejezés szó szerinti fordításaként megjelenő *kitevő* szavunk, amelyről Ábel Károly (1836- 1877), 19. századi tankönyvíró középiskolai tanár azt mondta *„ennek ki kell tenni a szűrét” (Keresztesi, 1935, p. 39.).* Ennek ellenére főnévi alakban máig tartja magát. Talán e heves ellenállás okozta, hogy melléknévi alakja (kitevőleges, kitevői) helyett továbbra is a latin alakot őrizzük: *exponenciális* (pl. exponenciális egyenlet, exponenciális függvény).

Nagy Károly, a reformkor tankönyvírója és a tehetséggondozás úttörője, a kitevőre a mára kikopott „mutató” szót használta (Kántor Sándorné Varga, 2013).

Forrás

Kántor Sándorné Varga Tünde: Nagy Károly (Révkomárom, 1797 – Párizs, 1868), a reformkor tankönyvírója, a tehetséggondozás úttörője. *Polygon XXI.* (1-2.), 2013.

Keresztesi Mária: *A magyar matematikai műnyelv története*. Debrecen, 1935.

Az anyag beépítése a tanórába

Idő	Az óra menete	Megjegyzés
2'	Az $2^3 = 8$ kifejezésben szereplő számok elnevezése.	A tanórán az elnevezések, (hatvány)alap, kitevő, (hatvány)érték tisztázásakor a kitevő/exponens elnevezéseknél hangzik el például tanári ismeretközlésként.

A matematikatörténeti blokk funkciója

Hozzájárul a matematika nyelvének megértéséhez és elfogadásához, mert rávilágít az elnevezésre, s magyarázattal él későbbi, idegennek tűnő elnevezésekre.
A matematikát nem lezárt, hanem élő tudományként segít megjeleníteni, mert bepillantást enged a matematika nyelvezetének fejlődésébe.
A matematika más tudományokhoz való hozzákapcsolása, mert a nyelvújítás folyamatának megemlítésén keresztül kapcsolódik a nyelvtanhoz.

5.2.3. A hatványozás azonosságai: azonos alapú hatványok szorzása és osztása, hatvány hatványozása

Az óra célja:

- az azonos alapú hatványok szorzására és osztására, valamint a hatvány hatványozására vonatkozó azonosság megismerése;
- egész számok körében végzett összeadás, kivonás, szorzás gyakorlása;
- betűs kifejezésekkel való számolás;
- többtagú összegekkel való számolás;
- az első n pozitív egész összegének zárt alakjára vonatkozó formula megismerése.

Az óra menete:

- házi feladat ellenőrzése;
- az azonosság fogalmának tisztázása, korábban tanult példák azonosságokra;
- azonos alapú hatványok szorzása (E);
- azonos alapú hatványok osztása;
- hatvány hatványozására vonatkozó azonosság;
- házi feladat feladása.

[E] MATEMATIKATÖRTÉNETI BLOKK (2')

A „kis Gauss" története (nehézségi szint: 2 - 3)

A jól ismert anekdota egyik verziója szerint, *„A gyermek Gauss tanítója [Büttner] már korán észrevette tanítványa kivételes tehetségét. Az akkori idők megszokott módján a tanító egyszerre több osztállyal foglalkozott. Ugyanazon teremben együtt volt mind a négy osztály. Míg a tanító az egyik évfolyamot irányította, addig a többinek valamilyen önálló munkát adott. Egy ilyen alkalommal a hatéves Gauss osztálya azt a feladatot kapta, hogy adják össze a természetes számokat 1-től 40-ig. Alig tűzte ki a tanító a feladatot, a kis Gauss már vitte is ki palatábláját a katedra asztalára, és szász tájszólással mutatta az eredményt: »Da liggest es.« (Itt fekszik.) A tanító már-már megfenyítette volna, amikor a szeme a palatáblán megakadt a helyes eredményen. (820) »Hogy kaptad meg az eredményt?« kérdezte. A kisfiú mint magától értetődőt felelte: 40 meg 1 az 41; 39 meg 2 az 41. Húsz ilyen pár van, tehát az eredmény 20-szor 41, azaz 820." (Sain, 1978, p. 99.)*

A történetnek számtalan változata ismert. Változhat például Gauss életkora (6, 7, …, 10 éves volt), az összeadandó számok (40-ig, 100-ig, 700-ig stb.), az összeadás módszere stb.

Az egész történet Wolfgang Sartorius Gausst búcsúztató beszédéből ered. Itt Sartorius számtani sorozatról beszélt (s nem arról, hogy mettől meddig kellett számokat összeadni), nem említette sem Gauss életkorát, sem pedig a módszert, amivel a számokat összeadta. Ez utóbbiakat már a későbbi korok tették hozzá (Hayes, 2006).

Forrás

Hayes, Brian: *Gauss's Day of Reckoning.* American Scientist, 94. (3.), 2006, Retrieved from https://www.americanscientist.org/article/gausss-day-of-reckoning

Sain Márton: *Nincs királyi út!.* Gondolat Könyvkiadó, Budapest, 1986.

Az anyag beépítése a tanórába

Idő	Az óra menete	Megjegyzés
7'	Adjuk meg a következő szorzatot egyetlen hatványként! $$a^1 \cdot a^2 \cdot a^3 \cdot a^4 \cdot \ldots \cdot a^{99} \cdot a^{100}$$ A kis Gauss történetének elmesélése (pl. 40-ig), majd a kitűzött feladat önálló tanulói megoldása végül közös ellenőrzése.	Az azonosság alkalmazásával egy újabb problémával, az összeg zárt alakra hozásával találkozik a tanuló. A „Gauss-féle módszer” közel hozza, szemléletessé és megjegyezhetővé teszi a megoldást. Elképzelhető, hogy egy korábban tanult módszer elevenedik fel és kerül alkalmazásra új problémahelyzetben.

A matematikatörténeti blokk funkciója

A motiváció eszköze, mert a tanuló mesés, könnyen megjegyezhető történettel találkozik.

A hosszú távú memóriába való beépülés segítése, mert a formula hozzákapcsolódhat a történethez.

Egy fogalom vagy tétel mélyebb megértésének segítése, mert megmutatja a formula egyik lehetséges keletkezését.

A matematikát nem lezárt, hanem élő tudományként segít megjeleníteni, mert a matematika fejlődésének egy lehetséges pillanatát mutatja be.

A matematika más tudományokhoz való hozzákapcsolása, mert a tanulóban erősíti a történelemtudományban fontos forráskritikai szemléletet.

Lehetséges kapcsolódási pontok:

- a hatványozás gyakorlásakor gyakorló órán;
- a hatványozás modul összefoglalásakor;
- az algebra és számelmélet témakör összefoglalásakor;
- számtani sorozatok tanításakor;
- Gauss nevének bármilyen említésekor (pl. szabályos sokszögek, egyenletrendszerek megoldása stb.).

5.2.4. A binomiális tétel

Az óra célja:

- a binomiális tétel megismerése;
- egész számok körében végzett összeadás, kivonás, szorzás gyakorlása;
- a hatványozás azonosságainak gyakorlása;
- betűs kifejezésekkel való számolás, absztrakciós készség fejlesztése;
- többtagú összegekkel való számolás;
- az általánosítás lehetőségeire történő figyelemfelhívás;
- a rekurzív gondolkodás fejlesztése.

Az óra menete:

- házi feladat ellenőrzése;
- a téma felvezetése (pl. az eddig tanult kéttagú összeg második és harmadik hatványára vonatkozó formula általánosításának lehetőségei);
- a binomiális tétel története (F);
- a binomiális tétel gyakorlása fokozatosan nehezedő feladatokon keresztül, a Pascal háromszög néhány egyszerű tulajdonsága;
- házi feladat feladása.

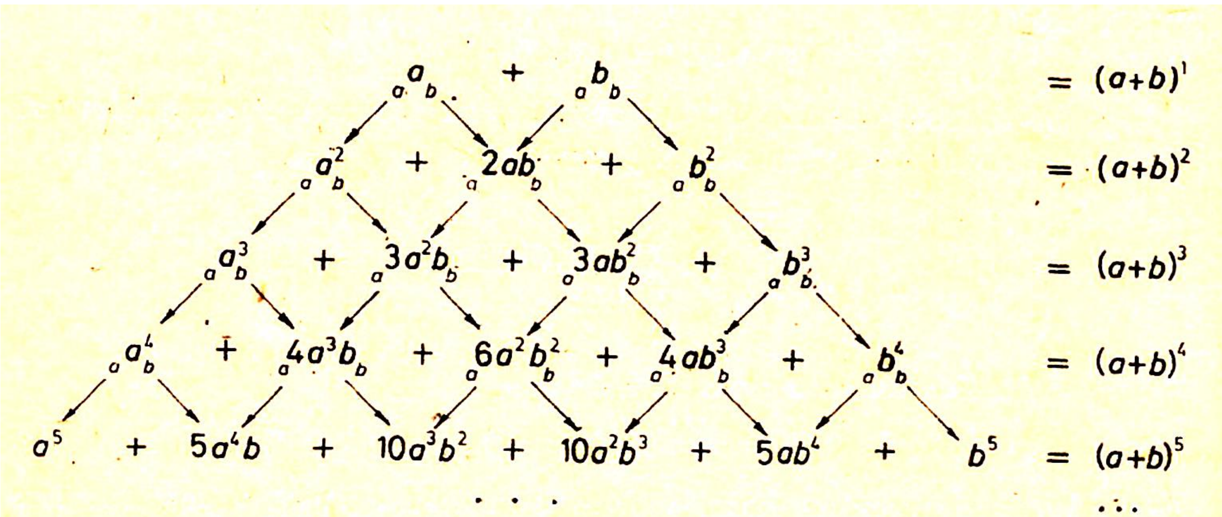
[F] MATEMATIKATÖRTÉNETI BLOKK 1. (2')

A binomiális tétel története (nehézségi szint: 2)

A formulát, a Pascal-háromszöggel együtt gyakran Blaise Pascalnak (1623 – 1662) tulajdonítják, de a korábbi korok matematikája számára sem volt ismeretlen. Ismerte már a kínai Yang Hui (1238 – 1298) és a mai Irán területén lévő Neisápur városában született és meghalt költő, Omar Khajjám (1048 – 1131) is. Kínában és Indiában az 1100-as években (vagy előbb) fedezhették fel. A formulát általánosabb alakjában Isaac Newton 1665-ben írta le és bizonyította. Ezért Newton-féle binomiális tételnek is szokták nevezni. Mindez szép példája annak, hogy egy matematikai tételt egymástól függetlenül is többen fedezhetnek fel.

A tétel korai ismerete arra enged következtetni, hogy azt elemi úton is könnyen meg lehet találni. Ilyen lehetséges út lehetett például a következő.

Az $(a + b)$ n-edik hatványát úgy fogjuk fel, mint az $(n - 1)$-edik hatványának és $(a + b)$-nek a szorzatát. Ezt úgy végezzük el, hogy a meglévő részt először a-val, majd b-vel szorozzuk, és a szorzatokat összeadjuk. Ezt szemlélteti a *6. ábra* (*Lévárdi, Sain, 1982, p. 116.*) Itt az a és b alsó indexek az indexelt tag szorzását jelképezik a-val, illetve b-vel és a nyilak a már összevont eredmény felé mutatnak. (Nyilván a betűk ilyen használata a mai kor matematikájának jelölésmódját tükrözi.)



6. ábra

Forrás

Lévárdi László – Sain Márton*: Matematikatörténeti feladatok*, Tankönyvkiadó, Budapest, 1982.

Az anyag beépítése a tanórába

Idő	Az óra menete	Megjegyzés
7'	A binomiális tétel fent ismertetett bevezetése és összekapcsolása a Pascal-háromszöggel.	A felépítés gondolatmenete rekurzív: (0, 1, 2 kitevőre ismert), (*n-1*)-edik kitevőről lépünk az *n*-edik kitevőre. Előkészíti a teljes indukciót.

A matematikatörténet funkciója

Hozzájárul a matematika nyelvének megértéséhez és elfogadásához, mert a tanuló találkozik avval a ténnyel, hogy egy fogalmat, tételt, több ember egymástól függetlenül is felfedezhet, ami magyarázatul szolgál arra, hogy a matematikai elnevezések nyelv- és országfüggőek.

A hosszú távú memóriába való beépülés segítése, mert ez a fajta nagyon elemi levezetés segít megérteni a binomiális tételt, a Pascal-háromszög elnevezés pedig segít a megjegyzésben.

Egy fogalom vagy tétel mélyebb megértésének segítése, mert a tételt nem készen kapja meg a diák, hanem megérti annak egyik megtalálási útját.

A matematikát nem lezárt, hanem élő tudományként segít megjeleníteni, mert a tanuló látja, hogy ugyanazt a tételt egymástól függetlenül többben is megtalálták.

A matematika más tudományokhoz való hozzákapcsolása, mert a tanuló matematika órán is találkozik fizikusok neveivel, vagy látja, hogy ugyanaz az ember irodalomban és matematikában is tudott maradandót alkotni (vs. humán és reál gondolkodásúak szembeállítása).

Lehetséges kapcsolódási pontok:

- nevezetes azonosságok;
- kombinációk, binomiális együtthatók;
- binomiális eloszlás.

5.2.5. Számok normál alakja, feladatok megoldása

Az óra célja:

- a normál alak fogalmának tisztázása;
- racionális számokkal végzett alapműveletek gyakorlása;
- betűs kifejezésekkel való számolás;
- többtagú összegekkel való számolás;
- az első *n* pozitív egész összegének zárt alakjára vonatkozó formula átismétlése;
- korábban tanultak önálló felhasználása feladatok megoldásában.

Az óra menete:

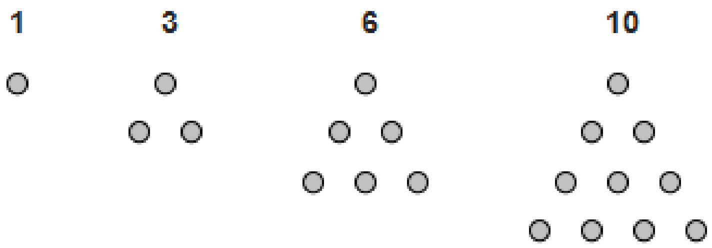
- házi feladat ellenőrzése;
- normál alak fogalma, gyakorló feladatok normál alak felírására;
- korábban tanult ismeretek gyakorlása;
- korábban tanult ismeretek alkalmazását igénylő feladatok (G);
- házi feladat feladása.

[G] MATEMATIKATÖRTÉNETI BLOKK (1’)

Háromszögszámok (nehézségi szint: 3)

Püthagorasz (Kr. e. 570 – Kr. e. 495) körül még életében egy filozófiai iskola, közösség szerveződött Krotón városában. A püthagoreusok szigorú életelvek (pl. nem ettek lóbabot) és babonák (pl. nem vették fel a földre hullott kenyeret) szerint éltek. Hittek a lélekvándorlásban. Társaságuknak Püthagorasz feltétlen irányítója volt, akiről rengeteg legenda terjengett. Állítólag – misztériumát növelve – mindig egy lepel mögül szólt követőihez, így nem volt látható, csak hallható. Ezekkel a külsőségekkel a püthagoreus iskola szinte egy szektává nőtte ki magát, amely a nők és férfiak számára egyaránt nyitva állt.

A püthagoreusok szívesen foglalkoztak úgynevezett figurális, vagyis olyan számokkal, amelyeket például kavicsok mértani alakzatba helyezésével tudtak megjeleníteni. Ilyenek voltak a négyzetszámok (1, 4, 9 stb.) és a háromszögszámok. Utóbbiak az első *n* pozitív egész összegének megjelenítéseként jöttek létre (*7. ábra*).



7. ábra[50]

A számok ilyen megjelenítésével könnyen felismerhető néhány összefüggés.

FELADAT

Igazoljuk, hogy bármelyik háromszögszám 8-szorosához egyet hozzáadva négyzetszámot kapunk.

MEGOLDÁS

Ábrázoljuk az első néhány háromszögszámot. Ekkor észrevehetjük, hogy az *n*-edik háromszögszám megegyezik az első *n* pozitív egész összegével, vagyis igazolandó, hogy

$(1 + 2 + 3 + \ldots + n) \cdot 8 + 1$ négyzetszám.

$$\frac{n(n+1)}{2} \cdot 8 + 1 = 4n^2 + 4n + 1 = (2n+1)^2$$

Forrás

Filep László: *A tudományok királynője (a matematika fejlődése).* Budapest, Typotex, 1997.

Szabó Árpád: *A görög matematika kibontakozása*, Magvető Kiadó, Budapest, 1978.

https://hu.wikipedia.org/wiki/H%C3%A1romsz%C3%B6gsz%C3%A1mok

[50] Forrás: https://hu.wikipedia.org/wiki/H%C3%A1romsz%C3%B6gsz%C3%A1mok

Az anyag beépítése a tanórába

Idő	Az óra menete	Megjegyzés
6’	Matematikatörténeti bevezető a háromszög-számokról. A feladat kitűzése. *Igazoljuk, hogy bármelyik háromszögszám 8-szorosához egyet hozzáadva négyzet-számot kapunk.* Önálló tanulói feladatmegoldás után közös ellenőrzés.	Szükség esetén segítő kérdésekkel (például: Hogyan fejezhető ki az *n*-edik háromszög-szám?) lehet vezetni a tanulókat.

A matematikatörténet funkciója

A motiváció eszköze, mert könnyen érthető, érdekes történettel találkozik a tanuló.

Hozzájárul a matematika nyelvének megértéséhez és elfogadásához, mert előjöhet, hogy a ma is használt négyzetszám egy speciális figurális szám, s magyarázatot ad az elnevezésre.

A hosszú távú memóriába való beépülés segítése, mert ezen a feladaton keresztül korábban tanult ismereteket ismétlünk át.

Egy fogalom vagy tétel mélyebb megértésének segítése, mert a feladat megoldása a korábban tanult ismeretek használatát igényli, és gyakoroltatja a szövegértést.

Lehetséges kapcsolódási pont:

- kéttagú összeg négyzetére vonatkozó azonosság.

5.2.6. Algebrai kifejezések átalakítása

Az óra célja:

- a korábban bevezetett elnevezések és fogalmak (pl. másodfokú polinom) használatának gyakorlása;
- zárójel felbontásának gyakorlása;
- betűs kifejezésekkel való számolás;
- többtagú összegekkel való számolás;
- korábban tanultak önálló felhasználása feladatok megoldásában;
- a bizonyítás igényének felkeltése és megfogalmazása;
- szövegesen elmondott, konkrét példákon megismert eljárás általános alakban történő felírása.

Az óra menete:

- házi feladat ellenőrzése;
- algebrai kifejezés átalakítási lehetőségeinek áttekintése;
- szorzatból összeg alakra történő áttérés gyakorlása példákon keresztül (H);
- házi feladat feladása.

[H] MATEMATIKATÖRTÉNETI BLOKK (6')

Regula pigrorum (=lusták szabálya) (nehézségi szint: 2-3)

Ez a 12. századból származó szabály lehetővé teszi, hogy a szorzáshoz a szorzótáblákat csak az ötösig kelljen megtanulni a tízes helyett. Innen a neve, lusták szabálya. Európában Petrus de Dacia (1235 – 1289), feltehetőleg dán származású, Svédországban elhunyt domonkos rendi szerzetes munkája révén vált ismerté. A hazánkban megjelent könyvek közül például Maróthi György 1743-as Arithmeticája tartalmazza (hiszen a diákok nem csak a középkorban nem szerették a szorzótáblát tanulni).

A szabály segítségével 5-nél nagyobb számok szorzatát a következőképpen számíthatjuk ki. Egymás alá írjuk a két tényezőt, s melléjük azokat a számokat, amelyek ezeket 10-re egészítik ki. (Emiatt hívták régen komplementeres szorzásnak is.) A bal felső és a jobb alsó (vagy a bal alsó és jobb felső) különbsége adja a szorzat tízeseit, az ötnél kisebb, jobb oldali jegyek szorzata pedig a szorzat egyeseit.

Például: kiszámítandó, a 8·7.

8	2
7	3

8 – 3 = 5; 2·3=6, így 8·7=56.

Oldjuk meg a feladatot általánosan is, azaz végezzük el az $a \cdot b$ szorzást, ahol 5 < a, b < 10 és $a, b \in \mathbb{Z}$.

a	$10 - a$
b	$10 - b$

Az eredmény: $\overline{a-(10-b)\quad(10-a)(10-b)} =$

$$= 10[a-(10-b)] + 1 \cdot (10-a)(10-b) =$$

$$= 10a - 100 + 10b + 100 - 10b - 10a + ab = ab$$

Forrás

Szénássy Barna: *A magyarországi matematika története (A legrégibb időktől a 20. század elejéig),* Akadémiai Kiadó, Budapest, 1970.

Az anyag beépítése a tanórába

Idő	Az óra menete	Megjegyzés
10'	A „lusták szabálya” elnevezés magyarázata. A szabály bemutatása több példán ($7\cdot 9$, $6\cdot 8$) keresztül. Oldjuk meg a feladatot általánosan is, azaz végezzük el az a · b szorzást, ahol $5 < a, b < 10$ és $a, b \in \mathbb{Z}$.	Elmondható a diákoknak, hogy miért is kellett a szorzótáblát 1×1-től 10×10-ig tanulni, s miért nem volt szükség például a 12-es szorzótáblára. Példaként elvégezhető egy írásbeli szorzás. Tapasztalat szerint mindig van, aki megkérdezi, hogy *„Ez mindig működik?”*. Ekkor érdemes kimondani, hogy ez a kérdés a bizonyítás igényét jelenti.

A matematikatörténet funkciója

A motiváció eszköze, mivel mindenki által birtokolt ismerethez (szorzás) ad újfajta megközelítést.

A hosszú távú memóriába való beépülés segítése, mert új problémaszituációban gyakoroltatja a zárójelfelbontást.

Egy fogalom vagy tétel mélyebb megértésének segítése, mert a helyiértékes írásmód kihasználása jelentős szerephez jut a bizonyítás során.

A matematikát nem lezárt, hanem élő tudományként segít megjeleníteni, mert bemutat egy régi szabályt, amely egykori tananyagból mára történeti érdekességgé változott.

Lehetséges kapcsolódási pontok:

- más alapú számrendszerekben végzett műveletek;
- számjegyekkel kapcsolatos szöveges feladatok.

5.2.7. Gyakorlás, algebrai törtek egyszerűsítése

Az óra célja:

- a korábban bevezetett elnevezések és fogalmak (pl. másodfokú polinom) használatának gyakorlása;
- zárójel felbontásának gyakorlása;
- betűs kifejezésekkel és többtagú összegekkel való számoláshoz szoktatás;
- korábban tanult ismeretek gyakorlása;
- korábban tanultak önálló felhasználása feladatok megoldásában.

Az óra menete:

- házi feladat ellenőrzése;
- azonosságok segítségével történő szorzattá alakítás gyakorlása fokozatosan nehezedő példákon keresztül;
- feladatok megoldása (I);
- házi feladat feladása.

[I] MATEMATIKATÖRTÉNETI BLOKK (2')

Feladat a Bakhsáli Kéziratból (nehézségi szint: 4)

A jelenleg ismert legrégebbi dél-ázsiai matematikai kézirat, amely a mai Pakisztán területén lévő Bakhshali falu mellől került elő 1881-ben. A nyírfakéregre (!) íródott kézirat nem teljes, mivel csupán 70 nyírfakéreg lap maradt fenn, de ezek közül több is sérült. Jelenleg az Oxfordi Egyetem könyvtára őrzi. A keletkezés dátumát a különböző kutatók más-más szempont alapján a 2. és a 12. század (ezer éves különbség) közötti időszakra tették. 2017-ben a kéziratból három mintát elemeztek szénizotópos kormeghatározással; a vizsgálat szerint a minták az időszámításunk szerinti 3., 7. és 9. századból származnak. Máig rejtély fedi, hogy a különböző évszázadokból származó részek miképpen kerültek egybe. A következő feladatra a kézirat ötletes megoldást ad:

FELADAT

„Melyik az a természetes szám, amely négyzetszám lesz, ha hozzáadunk 5-öt, de négyzetszámmá válik akkor is, ha 11-et elveszünk belőle?” (Lévárdi & Sain, 1982. p. 37.)

MEGOLDÁS

A két négyzetszám különbsége 16, így $x^2 - y^2 = 16$, ahol $x, y \in \mathbb{N}$.

$$(x - y)(x + y) = 16$$

Mivel e szorzat tényezői természetes számok,

így $x - y = 1$ és $x + y = 16$, ahonnan 2-vel osztva a két egyenlet összegét: $x = \frac{17}{2}; y = \frac{15}{2}$

vagy $x - y = 2$ és $x + y = 8$, ahonnan 2-vel osztva a két egyenlet összegét: $x = 5; y = 3$.

A feladat szövegének természetes számokra való megszorítása miatt megoldást csak az utóbbi eset ad, tehát a két négyzetszám a 25 és a 9, s a feladat megoldása 25 – 5 = 20.

Ha $x - y = 4$ és $x + y = 4$, akkor 2-vel osztva a két egyenlet összegét: $x = 4; y = 0$. Ekkor a keresett szám a 11.

Forrás

Lévárdi László – Sain Márton*: Matematikatörténeti feladatok*, Tankönyvkiadó, Budapest, 1982.

https://hu.wikipedia.org/wiki/Bakhs%C3%A1l%C3%AD_k%C3%A9zirat

Az anyag beépítése a tanórába

Idő	Az óra menete	Megjegyzés
10’	A tanár ismerteti a feladat eredetét. *Melyik az a természetes szám, amely négyzetszám lesz, ha hozzáadunk 5-öt, de négyzetszámmá válik akkor is, ha 11-et elveszünk belőle?* Közös feladatmegoldás.	

A matematikatörténet funkciója

Egy fogalom vagy tétel mélyebb megértésének segítése, mert a tananyagot a szokványostól eltérő problémaszituációba helyezi.

A matematikát nem lezárt, hanem élő tudományként segít megjeleníteni, mert felvillantja a matematika folyamatos fejlődését.

A matematika más tudományokhoz való hozzákapcsolása, mert megemlíthetjük a kormeghatározás kérdését.

Lehetséges kapcsolódási pontok:

- az $a^2 - b^2$ azonosság tanításakor, kiemelkedően jó képességű osztályban;
- oszthatósági feladatok megoldásakor;
- egyenletrendszerek megoldásakor.

5.2.8. Emeletes törtek, lánctörtek

Az óra célja:

- alapműveletek elvégzésének gyakorlása;
- műveleti sorrend gyakorlása;
- betűs kifejezésekkel való műveletvégzés;
- korábban tanult ismeretek gyakorlása;
- korábban tanultak önálló felhasználása feladatok megoldásában.

Az óra menete:

- házi feladat ellenőrzése;
- műveletek emeletes törtekkel;
- lánctörtekre példa, egy szám átírása lánctört alakra;
- lánctört értékének kiszámolása;
- feladatok megoldása (J);
- házi feladat feladása.

[J] MATEMATIKATÖRTÉNETI BLOKK 1. (1')

Bombelli négyzetgyök-keresési módszere (nehézségi szint: 3 – 4)

Raffael Bombelli (1526 – 1572) olasz matematikus L'Algebra című művében végtelen lánctört segítségével közelíti 13 négyzetgyökét a következőképpen:

$\sqrt{13} = 3 + x$ $(0 < x < 1)$ (*)

Mindkét oldalt négyzetre emelve: $13 = 9 + 6x + x^2$, ahonnan

$$4 = x(x+6)$$

$$\frac{4}{6+x} = x$$

amit (*)-ba behelyettesítve kapjuk, hogy

$$\sqrt{13} = 3 + \frac{4}{6+x}$$

majd ezt ismételve

$$\sqrt{13} = 3 + \cfrac{4}{6 + \cfrac{4}{6 + \cfrac{4}{6 + \cdots}}}$$

Így az egyes törtek értékét kiszámolva a következő $\sqrt{13}$-hoz konvergáló sorozathoz jutunk: 3; $3 + \frac{4}{6} = 3,\dot{6}$; $3 + \frac{4}{6+\frac{4}{6}} = 3{,}6$; $3 + \frac{4}{6+\frac{4}{6+\frac{4}{6}}} = 3,\dot{6}\dot{0}$; $3 + \frac{4}{6+\frac{4}{6+\frac{4}{6+\frac{4}{6}}}} \approx 3{,}6055045872$.

Összehasonlításként (zsebszámológéppel) $\sqrt{13} \approx 3{,}605551275$, azaz sorozatunk ötödik tagja már négytizedesjegy pontossággal adja meg $\sqrt{13}$ értékét. Megjegyezzük, hogy kevésbé „szerencsés” szám választása esetén a konvergencia nem ennyire gyors. Fontos kiemelnünk, hogy Bombelli lánctörtje tulajdonképpen egy sorozatot definiált, amely a $\sqrt{13}$-hoz konvergál. Azonban ez nem jelenti azt, hogy csak ez az egyetlen ilyen tulajdonságú sorozat.

Euler (1707 – 1783) módszerével könnyen tudunk másik $\sqrt{13}$-hoz tartó sorozatot konstruálni. Ha $x = \sqrt{13}$, akkor $x^2 = 13$. Mindkét oldalhoz x-et adva:

$$x^2 + x = x + 13$$

$$x(x+1) = (x+1) + 12$$

$$x = 1 + \frac{12}{1+x}$$

$$\sqrt{13} = 1 + \frac{12}{2+\frac{12}{2+\frac{12}{\dots}}}$$

Így a következő sorozatot kapjuk: 1; 7; $\frac{5}{2} = 2{,}5$; $\frac{31}{7} \approx 4{,}43$; $\frac{61}{19} \approx 3{,}21$.

A diákok korábbi tanulmányaiban egy művelet bevezetését annak írásbeli elvégzésének megtanulása követte. A négyzetgyökvonás az első művelet[51], aminek eredményét a diák nem tanulja meg előállítani, hanem táblázat vagy számológép segítségével határozza meg. Így sok diákban még ott van egyfajta természetes kíváncsiság arra vonatkozólag, hogy milyen algoritmussal lehet tetszőleges pontossággal meghatározni egy szám négyzetgyökét.

Forrás

Matos Zoltán: Square root in secondary school. *Teaching Mathematics and Computer Science, 17/1*, 2019.

https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Extras/Bombelli_algebra/

Az anyag beépítése a tanórába

Idő	Az óra menete	Megjegyzés
12'	A tanár a $\sqrt{13}$ példáján keresztül ismerteti Bombelli algoritmusát. A tanulók önállóan közelítik a $\sqrt{40}$-et.	A tanár az algoritmus ismertetésekor folyamatos kérdésekkel rávezeti a soron következő lépésekre a diákokat. Mindkét algoritmus ismertetése esetén pármunkában ugyanaz a szám közelíttethető.

[51] Bár a négyzetgyökvonás matematikai értelemben nem egy, a valós számok összeadásához hasonló kétváltozós művelet, a diákok ebben az életkorban műveletként tekintenek rá.

A matematikatörténet funkciója

A motiváció eszköze, mert mindenki által érthető módszert mutat egy szám négyzetgyökének tetszőlegesen pontos közelítésére.

Egy fogalom vagy tétel mélyebb megértésének segítése, mert a tanuló a tanórán szerzett ismereteket (formalizálás, kikötés tétel, kéttagú összeg négyzetre emelése, egyenletrendezés, szorzattá alakítás), valamint fogalmak (racionális, irracionális, valós számok) tulajdonságait egy szokatlan problémaszituációban alkalmazhatja.

A matematikát nem lezárt, hanem élő tudományként segít megjeleníteni, mert beszélhetünk arról, hogy ugyanazt a problémát többen, többféleképpen oldották meg, illetve megjelenik egy olyan módszer, amit a számológépek megjelenése kiszorított.

Lehetséges kapcsolódási pontok:

- négyzetgyök;
- nevezetes számhalmazok (racionális – irracionális számok) átismétlésekor magasabb évfolyamon (itt olyan racionális tagú sorozatokat konstruálunk, amelyek irracionális számot közelítenek meg tetszőleges pontossággal).

5.2.9. Prímszámok, összetett számok

Az óra célja:

- prímszám, összetett szám fogalmának tisztázása, a számelmélet alaptételének ismertetése;
- korában tanultak átismétlése, más problémaszituációba történő helyezése;
- a számelmélet gyakorlati felhasználásának felvillantása;
- a direkt és indirekt bizonyítás fogalmának tisztázása.

Az óra menete:

- házi feladat ellenőrzése;
- prímszám, összetett szám fogalmának tisztázása;

- végtelen sok prímszám létezésének bizonyítása;
- prímszám kereső algoritmus ismertetése (K);
- prímszámokkal kapcsolatos feladatok;
- házi feladat feladása.

[K] MATEMATIKATÖRTÉNETI BLOKK (5')

Eratoszthenész szitája (nehézségi szint: 1-2)

A görög Eratoszthenész (Kr. e. 276? – 196?) több eredménnyel gazdagította az ókori tudományt. Bár a valós adatnak csupán az ötvened részét kapta, korának legjobb becslését sikerült adnia a Föld kerületére. *„A matematikusok számára leginkább szitája őrzi Eratoszthenész nevét. A szita prímszámok megkeresésére szolgál. Felírjuk egymás után a páratlan számokat, majd 3-tól indulva minden harmadikat, 5-től indulva minden ötödiket stb. kihúzzuk. Végül a ki nem húzott számok lesznek a prímek, hozzájuk véve az egyetlen páros prímszámot a 2-őt. […] Számtáblázatát Eratoszthenész egy pergamenlapra írta fel, amit egy keretre feszített és átszúrta a kieső számokat. A laikus szomszédok azt gondolták, hogy valami különleges szitát készít így, ezért elnevezték az eszközt Eratoszthenész szitájának."* (Filep, 1997. p. 96.)

Forrás

Filep László: *A tudományok királynője (a matematika fejlődése).* Typotex, Budapest, 1997.

Az anyag beépítése a tanórába

Idő	Az óra menete	Megjegyzés
5'	Tanári ismeretközlés. Például 60-ig felírjuk a pozitív egész (páratlan) számokat. A tanár elkezdi, a tanulók befejezik a szita készítését.	Felvetődhet kérdésként, mely számok többszörösét kell kihúzni ahhoz, hogy a ki nem húzott számok között már biztosan csak prím maradjon.

A matematikatörténet funkciója

A motiváció eszköze, mert egyszerű prímkereső eljárás.

A matematikát nem lezárt, hanem élő tudományként segít megjeleníteni, mert a tanuló egy régi prímszámkereső eljárással találkozik.

5.2.10. Vegyes számelméleti feladatok

Az óra célja:

- alapműveletek elvégzésének gyakorlása;
- korábban tanult ismeretek gyakorlása;
- korábban tanultak önálló felhasználása feladatok megoldásában.

Az óra menete:

- házi feladat ellenőrzése;
- feladatok megoldása (L);
- házi feladat feladása.

[L] MATEMATIKATÖRTÉNETI BLOKK (2')

Feladat a „Tíz klasszikusból" (nehézségi szint: 3-4)

Az ókori és középkori kínai matematikáról jól áttekinthető képet ad egy gyűjteményes mű, amelyben megpróbálták a szükséges matematikai ismereteket összefoglalni. A könyv első leírója Csang Can (Kr. e. 150 tájékán) egy kínai államférfi. A mű címe ekkor Csiu-csang Szun-su (Matematika kilenc fejezetben) volt. E könyvet sokszor írták újra, és egészítették ki. A legjelentősebb bővítést – a tízedik fejezetet – Liu Hui írta Kr. u. a 3. században (több, mint 300 évvel a megkezdés után). Az így kiegészült művet szokták „Tíz klasszikusként" emlegetni. Sok száz évig – szinte változatlanul – ez volt a kínai hivatalnokok számára előírt tananyag. Ebből a műből való (az egyébként napjaink példatáraiból is ismerős) következő feladat.

FELADAT

Melyik az a természetes szám, amely osztva 3-mal, 4-gyel, 5-tel és 6-tal, maradékul rendre 1-et, 2-t, 3-at, 4-et ad? (Lévárdi & Sain, 1982, p. 29.)

MEGOLDÁS

Az osztó és a hozzá tartozó maradék különbsége mindegyik esetben 2. Ha tehát a keresett számhoz 2-t adunk, akkor az új szám osztható mindegyik felsorolt osztóval. Az ilyen számok az osztók közös többszörösei. Ezek közül a legkisebb a 60. A feltételnek megfelelő legkisebb szám tehát az 58. Az összes ilyen szám pedig $60n - 2$ alakú, ahol $n \in \mathbb{Z}^+$.

Forrás

Lévárdi László – Sain Márton: *Matematikatörténeti feladatok*, Tankönyvkiadó, Budapest, 1982.

Sain Márton: *Nincs királyi út!.* Gondolat Könyvkiadó, Budapest, 1986.

Az anyag beépítése a tanórába

Idő	Az óra menete	Megjegyzés
8'	A tanár a történeti rész ismertetése után kitűzi a feladatot: *Melyik az a természetes szám, amely osztva 3-mal, 4-gyel, 5-tel és 6-tal, maradékul rendre 1-et, 2-t, 3-at, 4-et ad?* A diákok 3 – 4 percig önállóan gondolkodnak rajta, majd közösen megbeszélik a megoldást.	Átlagos képességű osztályban érdemes átfogalmazni a feladatot úgy, hogy *„melyik a legkisebb olyan természetes szám, amely…”* (ekkor a megoldás az 58) Ilyen esetben is megkérdezhető, hogy csak egy ilyen szám van-e, miért kell a legkisebb feltétel stb. Házi feladatként célszerű egy hasonlót feladni. Például: Melyik az a legkisebb pozitív egész szám, amely 4-gyel osztva 3, 5-tel osztva 4 maradékot ad?

A matematikatörténet funkciója

A motiváció eszköze, mert történet kapcsolódik a feladathoz, ami egy idegen kultúra világába enged bepillantani.

Egy fogalom vagy tétel mélyebb megértésének segítése, mert a tanulónak korábban tanult ismereteket új problémaszituációban kell felhasználnia.

A matematikát nem lezárt, hanem élő tudományként segít megjeleníteni, mert a történet rávilágít a kutató és a meglévő ismerteket átadó szemlélet közti különbségre, s megmutatja, hogy a matematika fejlődik, még ha történetében voltak is stagnáló időszakok.

Lehetséges kapcsolódási pontok:

- legkisebb közös többszörös;
- osztási maradékok.

5.2.11. Számrendszerek

Az óra célja:

- alapműveletek elvégzésének gyakorlása;
- a helyiértékes számrendszer fogalmának átismétlése, előnyeinek megjelenítése;
- a római számírás logikájának megértése;
- annak beláttatása, hogy egy megfelelő írásmód mekkora jelentőséggel bír;
- annak hangsúlyozása, hogy a jelenleg használt jelölési formák mögött több évezred tapasztalata és gondolata van.

Az óra menete:

- házi feladat ellenőrzése;
- téma felvezetése, a számok írásáról (M);
- az általunk használt számrendszer: tízes alapú, helyiértékes;
- példa nem helyiértékes, tízes alapú számrendszerre: az egyiptomi számírás (N);
- példa nem helyiértékes, nem tízes alapú számrendszerre: római számok (O);

- példa nem tízes alapú, helyiértékes számrendszerekre (P);
- házi feladat feladása.

[M] MATEMATIKATÖRTÉNETI BLOKK (6')

Számnélküliség, alfabetikus és egyéb számírási fajták (nehézségi szint: 1)

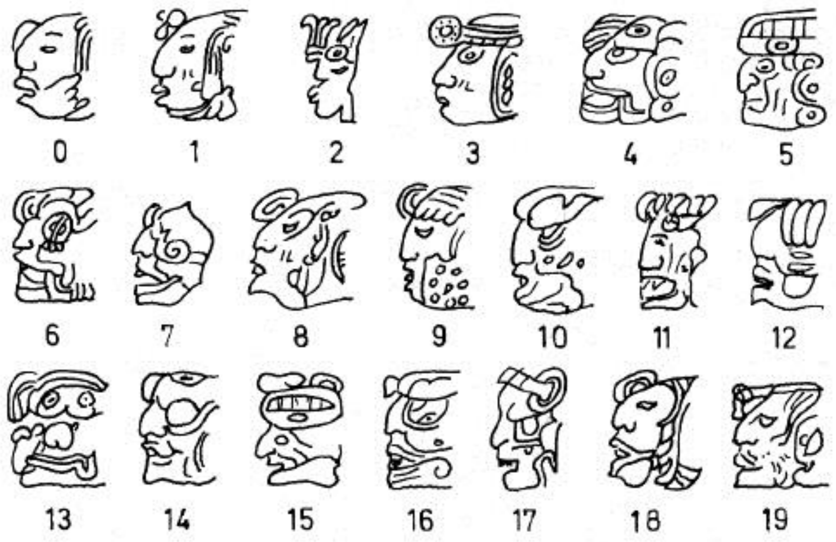
Bár manapság természetesnek tűnik a számolás, hiszen már a bölcsődés gyerek is (legalább a bújócskához használt mondóka szintjén) ismeri a számokat, és az alsó tagozaton tananyag a négy alapművelet szóbeli és írásbeli elvégzése, ennek ellenére a mai korban is élnek emberek, akinek nyelve (például a valpiri) egyáltalán nem tartalmaz egytől különböző számokat. Ha megkérdeznek valakit, hogy hány gyereke van, a számuk megnevezése helyett felsorolja a gyerekek nevét. Hogy mérnek ezek az emberek távolságot, időt stb? Nem meglepő, hogy ez a nép – mivel nyelve, azaz gondolkodásának közege ilyen – nem adott matematikusokat a világnak. Fontosak tehát a számok, de a leírásuknak van-e ugyanekkora jelentősége? Fontos-e egyáltalán, hogy hogyan írjuk le őket?

Számos népnél (pl. görögök, zsidók, perzsák, arabok) találkozunk avval, hogy a számokra nem voltak speciális jeleik, hanem az írásra szolgáló jeleket használták. Ha szükséges volt, a betűktől való megkülönböztetésül kiegészítő jelet (pl. felülvonást, aláhúzást vagy ékezetet) tettek.

Például a görög alfabetikus számok a következőképpen néztek ki:1 = $\bar{\alpha}$, 2 = $\bar{\beta}$ stb.

Ennek a fajta számírásnak előnye, hogy nem kellett külön új jeleket tanulni.

Más népek hoztak létre külön jeleket, amelyek sokszor egészen érdekes alakot öltöttek. Például a maják „ünnepi” számírásának jegyei a szinte művészeti értékkel bíró fejszámok voltak (*8. ábra*), amelyek szintén alkalmatlanok lennének napi szintű használatra.



8. ábra[52]

Forrás

Filep László: *A tudományok királynője (a matematika fejlődése).* Typotex, Budapest, 1997.

Sain Márton: *Nincs királyi út!.* Gondolat Könyvkiadó, Budapest, 1986.

https://www.youtube.com/watch?v=s0bgZVc9siw

Az anyag beépítése a tanórába

Idő	Az óra menete	Megjegyzés
6’	A tanár figyelemfelkeltő előadást tart a számokról, s rávilágít arra, hogy civilizációnkban természetesnek tűnő dolgok az emberiség kultúrtörténetében nem mindig voltak jelen.	

[52] Forrás: (Sain, 1986, p. 428.)

A matematikatörténet funkciója

A motiváció eszköze, mert figyelemfelkeltő, és a diák saját megszokott jelölési rendszerétől eltérővel találkozhat.

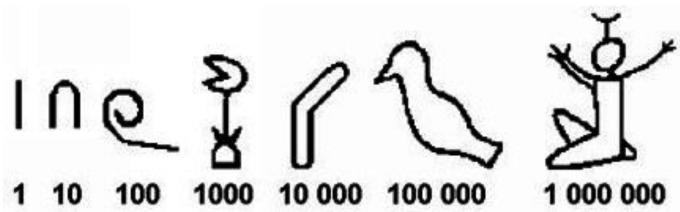
Hozzájárul a matematika nyelvének megértéséhez és elfogadásához, mert felhívja a figyelmet arra, hogy többféleképpen jelölhető ugyanaz, s a mi jelölésünk igen letisztult és egyszerű (hindu arab számjegyek vs. maja fejszámok).

A matematikát nem lezárt, hanem élő tudományként segít megjeleníteni, mert rávilágít arra, hogy különböző népek milyen jelöléseket használtak ugyanarra a matematikai fogalomra.

[N] MATEMATIKATÖRTÉNETI BLOKK (8')

Az egyiptomi számírás (nehézségi szint: 2)

Az egyiptomiak számírása úgynevezett hieroglifikus számírás volt, ahol a számokra nem betűket, hanem saját karaktereket vezettek be. Ezeknek a jeleknek értékük van, amelyeket a rendszer csomószámainak nevezünk. Az egyiptomiaknál ezen értékek tíz hatványai szerint jöttek, így a rendszert tízes alapúnak nevezhetjük (*9. ábra*)[53].



9. ábra

A számok értékét a leírt számjegyek értékének összege adja (*10. ábra*) [54].

10. ábra

[53] https://hirmagazin.sulinet.hu/hu/pedagogia/a-szamiras-fejlodese
[54] https://hirmagazin.sulinet.hu/hu/pedagogia/a-szamiras-fejlodese

Így ebben a rendszerben az összeadás nagyon könnyen elvégezhető művelet, hiszen csak egymás mellé kell írni a jegyeket, s ha valamelyikből túl sok van, azt be kell váltani.

Hasonlóan könnyen elvégezhető művelet a duplázás, amikor minden jelből kétszer annyit kell írni. Érdekességként megjegyezhető, hogy például az első magyar szerző tollából származó matematikakönyv, Magyarországi György Mester 1499-es aritmetikája még kilenc alapműveletet sorol fel, köztük a kétszerezést.

Az egyiptomiak az egész számok egész számmal történő szorzását erre a két műveletre vezették vissza. Leírták a számot, s mellé az egyest. Alá kétszerezéssel kapva a szám kétszeresét, s mellé, hogy kettő, majd ebből kétszerezéssel kapva az eredeti szám négyszeresét, s mellé, hogy négy stb. Ezt követően a megfelelő sorok számait összeadták.

Például (anakronisztikusan mai számírással írva): $13 \cdot 12$.

1	12
2	24
4	48
8	96

Mivel $13 = 1 + 4 + 8$, így $13 \cdot 12 = 12 + 48 + 96 = 156$

Ezt a fajta „egyiptomi szorzást” még a középkorban is tanították Európa szerte.

Az egyiptomiak számírásának azonban hátrányai is voltak. Először is mivel tíznek végtelen sok pozitív egész kitevőjű hatványa van, végtelen sok jelet igényelne, másodszor az egy-egy szám leírásához használt karakterek száma túl sok is lehet. Például a 789 számhoz 24 karakter kell.

Forrás

Filep László: *A tudományok királynője (a matematika fejlődése).* Typotex, Budapest, 1997.

Sain Márton: *Nincs királyi út!.* Gondolat Könyvkiadó, Budapest, 1986.

https://hirmagazin.sulinet.hu/hu/pedagogia/a-szamiras-fejlodese

Az anyag beépítése a tanórába

Idő	Az óra menete	Megjegyzés
8'	A tanár bemutatja az egyiptomi számírást. Kérdésekkel rávezeti a tanulókat arra, hogy az összeadás és a duplázás könnyen elvégezhetők, majd megmutatja az egyiptomi szorzást. A tanulók önállóan is elvégeznek egy szorzást egyiptomi módon. A tanár kérdésekkel rávezeti a tanulókat ezen számírás fogyatékosságaira.	Az eljárás kulcsa, hogy minden pozitív egész számot fel tudunk írni kettő hatványok összegeként. Ez kérdésként felmerülhet már ennél a feladatnál (illetve utalhatunk rá a kettes számrendszer tanításánál).

A matematikatörténet funkciója

A motiváció eszköze, mert a diák saját megszokott jelölési rendszerétől és számolási algoritmusától eltérővel találkozhat, amely könnyen érthető.

Hozzájárul a matematika nyelvének megértéséhez és elfogadásához, mert felhívja a figyelmet arra, hogy többféleképpen jelölhető ugyanaz, s a mi jelölésünk igen letisztult és egyszerű.

Egy fogalom vagy tétel mélyebb megértésének segítése, mert a tanuló lát példát tízes alapú, de nem helyiértékes számrendszerre.

A matematikát nem lezárt, hanem élő tudományként segít megjeleníteni, mert rávilágít arra, hogy különböző népek, különböző korokban milyen jelölést használtak ugyanarra a matematika fogalomra.

A matematika más tudományokhoz való hozzákapcsolása, mert a tanuló megismeri az egyiptomi kultúra egy olyan részletét is, amellyel a történelemórán nem találkozik.

[O] MATEMATIKATÖRTÉNETI BLOKK (8')

A római számírás, átállás a hindu-arab számokra (nehézségi szint: 2)

Szintén hieroglifikus számírás, amely csomószámainál az egyiptomi számírás hosszúság problémáját kezelendő, „felező” számokat iktattak be. Így egy tízes alapú rendszer vonásait magán viselő, se nem tízes, se nem helyiértékes rendszer jött létre.

A római csomószámok: I = 1, V = 5, X = 10, L = 50, C = 100, D = 500, M = 1000. A nagyobb számok leírásához a szám fölé tett vonallal jelölték az ezerszerest, például: $\overline{XV}\,CLVII = 15.157$, így nem csak a hosszúság, de a szükséges karakterek számának problémáját is tudták kezelni. Avval, hogy az azonos tízes helyiértéken lévő nagyobb szám elé írt kisebb szám esetén azt kivonják (IV = 5 – 1 = 4), s a mögé írt kisebb szám esetén pedig azt hozzáadják (VI = 5 + 1 = 6), egy olyan sajátságos rendszert hoztak létre, ami számolásra teljesen alkalmatlan lett. Ekkor kezdett el terjedni a kavicsos számoló tábla, melynek módosult változata, az abakusz a világ számos helyén (pl. Oroszország, Kína) még a XX. században is használatos volt. Megjegyezzük azonban, hogy abban az esetben, ha a „kivonásos” írásmódot elhagynánk, s helyette áttérnénk az összeadásos írásmódra (pl. XLIV helyett XXXXIIII-t írnánk), akkor az összeadás művelete már könnyen elvégezhetővé válna. Utóbbi írásmódot őrzi az órákon – esztétikai okból – IV helyett használt IIII.

A római számok használata Európában sokáig megmaradt. A hindu számírás arab közvetítéssel került csak Európába az 1100-as években, ezért is szokás hindu-arab számírásnak nevezni. Elterjesztésében nagy szerepe volt az első francia származású pápának, II. Szilveszternek, aki Szent István számára a koronát küldte, s aki szerzetes korában még Gerbert d'Aurillac néven matematika könyvet is írt. Az arab számírás másik terjesztője a 100 évvel később élt Leonardo di Pisa, más néven Fibonacci volt, aki fiatal korában kereskedő apjához utazott Afrikába. Itt ismerkedett meg a hindu-arab számírással, amit a római számoknál egyszerűbbnek és hatékonyabbnak talált. 1202-ben Liber Abacci (Az abakusz könyve, avagy „Könyv a számtanról”) címmel kiadta az utazásai során tanultakat.

A hindu-arab számjegyeket azonban nehezen fogadta be Európa, hiszen a közember nem értette, a kereskedők pedig csalástól féltek (római számok elé/mögé/közé nehezebb újabb jegyet iktatni, mint az arab számírással felírt szám esetén). 1299-ben például Firenze városa törvényileg tiltotta meg a hindu-arab számok és a nulla használatát (a római számok között nincs nulla). Az első olyan könyv, amelyben az oldalak számozása már hindu-arab számokkal történt, egy 1471-es Petrarca kiadás volt. Pénzérméken Szicíliában 1138-ban, Franciaországban 1485-ben, Magyarországon 1499-ben, Oroszországban 1654-ben használtak először hindu-arab számjegyeket.

Forrás

Filep László: *A tudományok királynője (a matematika fejlődése).* Typotex, Budapest, 1997.

Sain Márton: *Nincs királyi út!.* Gondolat Könyvkiadó, Budapest, 1986.

Az anyag beépítése a tanórába

Idő	Az óra menete	Megjegyzés
8’	A tanár bemutatja a római számírást, kifejezetten annak logikai felépítésére koncentrálva. Feladatként a diákok átváltanak római számokat arab, majd arab számokat római számokra.	

A matematikatörténet funkciója

A motiváció eszköze, mert a diák saját megszokott jelölési rendszerétől eltérővel találkozhat.

Hozzájárul a matematika nyelvének megértéséhez és elfogadásához, mert felhívja a figyelmet arra, hogy többféleképpen jelölhető ugyanaz, s a mi jelölésünk igen letisztult és egyszerű.

Egy fogalom vagy tétel mélyebb megértésének segítése, mert a tanuló lát példát nem tízes alapú, nem helyiértékes számrendszerre.

A matematikát nem lezárt, hanem élő tudományként segít megjeleníteni, mert bemutat egy jelölésváltást, ami a matematikában a diák számára is érthető módon tette lehetővé a matematika fejlődését.

[P] MATEMATIKATÖRTÉNETI BLOKK (6')

A kettes számrendszer (nehézségi szint: 1)

Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 – 1716) – akiről Nagy Frigyes porosz király azt mondta, hogy „önmagában egy akadémia" – volt az, aki 1703-ban megjelent könyvében megadta a kettes számrendszer leírását. *„Ő, aki főleg azért foglalkozott matematikával, hogy abban feltalálja a gondolkodás legáltalánosabb törvényeit, természetes, hogy a 2-es számrendszert is igyekezett beilleszteni filozófiai-teológiai rendszerébe. Csodás párhuzamot látott abban, hogy amint az összes szám felírásához csak az »egy« és a »semmi« szükséges, ugyanúgy a Biblia teremtéstörténete szerint Isten a világot a semmiből teremtette. Csak két ősprincípium létezik: Isten és a Semmi. E kettőből jött létre Minden, ahogy az 1 számjegy a »semmi« -vel létrehozta az összes számot." (Sain, 1986, p. 300.)*

A nem tízes alapú számrendszerek nyomai (nehézségi szint: 1)

Egy nép életében az egykor használt, nem tízes alapú számrendszernek egyik nyoma nyelvében található. Például az egykori húszas alapú kelta számrendszer nyoma a franciaországi francia nyelvben a nyolcvan képzése: *quatre-vingts*, ami magyarul négy húszat jelent. Érdekes, hogy a szintén franciául beszélő, de más eredetű svájciak vagy belgák nem így, hanem önálló szóval (octante, huitante) fejezik ki a nyolcvanat. Szintén húszas számrendszert használtak a maják.

Korábban használt, más alapú számrendszerek nyoma a német és az angol nyelvben is megtalálható: 12-ig van a számoknak önálló neve. A nagyobb számokat ugyanakkor már a tízesekhez kapcsolható összetétellel képzik. De 12-es számrendszer maradványa az év 12 hónapra; a nap kétszer 12 órára történő felosztása vagy a számos nyelvben előforduló *„tucat"* szó. Az egykori babiloni 60-as számrendszer maradványa a szögek (1° = 60′; 1′= 60′′) és az időegység felosztása (1 óra = 60 perc; 1 perc = 60 másodperc).

„Az ugorok közös hetes számrendszerére a nyelvi bizonyíték az 1 – 7 számnevek közös gyökere, valamint a »hét« szó kettős jelentése: jelenti a hét számot és a hét napból álló egységet. Csak kevés nyelvben van így. A magyar mesék és regék nem véletlenül beszélnek hétmérföldes csizmáról, hétfejű sárkányról, hetedhét (azaz 49) országról." (Filep, 1997. p. 39.) Az ugor népeken kívül Afrikában és a Közel-Keleten találkozunk a hetes számrendszer nyomaival. Bizonyos afrikai népeknél ma is misztikus szerepet tölt be a hetes szám, ezért neve tabu, s kimondásához inkább a 6 + 1-et használják.

„A nem tízes alapú számrendszerek haszna" (nehézségi szint: 1)

A 20. századi európai matematika egyik legkiemelkedőbb alakja Fejér Lipót volt, akinek diák korában problémája akadt a matematikával. Állítólag *„számtanból tanárt kellett mellé fogadni, mert nehezen boldogult a számolásokkal. Csak miután a tízes számrendszeren kívül más számrendszerekkel is megismerkedett, akkor kezdett megmutatkozni tehetsége."*[55]

Forrás

Filep László: *A tudományok királynője (a matematika fejlődése).* Typotex, Budapest, 1997.

Sain Márton: *Nincs királyi út!.* Gondolat Könyvkiadó, Budapest, 1986.

http://konyvtar.ady-debr.sulinet.hu/konyvlap/tananyag/matek/magymagy.htm

Az anyag beépítése a tanórába

Idő	Az óra menete	Megjegyzés
20'	A tanár bemutatja a kettes számrendszert egy példán keresztül. Megmutat egy átváltást, majd a tanulókkal váltat át kettes számrendszerben felírt számot tízes számrendszerbe majd fordítva. Megemlíti, hogy a kettes számrendszert pl. az informatika használja, mert így minden szám felírható két karakterrel. A két karakter helyettesíthető bármivel: elektromos impulzussal és annak hiányával, felmutatott és lehajtott ujjal, „tával és tivel" stb. Elmeséli Leibniz történetét. A tanulók más számrendszerekben felírt számokkal végeznek átváltásokat. Közösen megbeszélik, hogy milyen nyomai vannak más alapú szám-rendszereknek az egyes népeknél.	

55 http://konyvtar.ady-debr.sulinet.hu/konyvlap/tananyag/matek/magymagy.htm

A matematikatörténet funkciója

Egy fogalom vagy tétel mélyebb megértésének segítése, mert a tanuló lát példákat más számrendszerek használatára, s így egy matematikai fogalom, a számrendszer fogalma élet-közelibbé válik.

A matematika más tudományokhoz való hozzákapcsolása, mert a tanuló látja, hogy hogyan használja a legkülönfélébb tudomány a matematikát, s milyen hatással van a matematika például a nyelvre.

5.3. Szituációkhoz kapcsolódó matematikatörténeti anyagok

A következőkben matematika órán elő-előforduló szituációkhoz adunk matematikatörténeti adalékokat. Ebben a fejezetben csak a matematikatörténeti részt írjuk le és a hozzá kapcsolódó pedagógiai többletet. Az itt közöltek mind 1-es nehézségűek.

5.3.1. A diák a nevező és a számláló elnevezéseket hibásan használja, vagy azt mondja „alul", „felül".

[Q] Matematikatörténet (1')

A magát „szócsinálónak" nevező Maróthi György 1743-ban jelentette meg Arithmetica vagy a számvetésnek mestersége című könyvét, amely az első magyar nyelvű iskolai matematika tankönyv. Magyarosítása végiggondolt és célszerű volt, így számos általa bevezetett szakszó maradt meg. Ilyenek például az összeadás, kivonás, (sok)szor(o)zás, számlálás, törtszám, hiba, kerület.

Nem maradtak fent viszont a tört számlálója és nevezője helyett javasolt kifejezései. Ő ugyanis az Arithmetica bevezetőjében így fogalmazott: *„A Fractiokban, hogy a felső számot Numeratornak, az alsót Denominatornak hívják, annak ugyan van valami haszna. De mivel gyakorta abban is megakadhat a gyenge Számvető, hogy a felsőt hívják-e Numeratornak, vagy az alsót: Én jobbnak gondoltam, ha egyiket Felsönek, másikat Alsónak nevezzűk, mert így nem lehet tévedés benne." (Maróthi, 1743, p. 5.).* A könyvben végig jelen vannak a latinos s velük párhuzamosan a magyar elnevezések. A Fractiokrol / Törtt-számokról szóló fejezet elején, ismételten tisztázva az elnevezéseket a következőt írja: *„A Felsöt hívják deákul Numeratornak; az Alsót Denominatornak. De mi Magyarul a Numreatort tsak Felsönek, a Denominatort Alsónak fogjuk hívni. A kinek tetzik tartsa meg a Deák neveket."* (Maróthi, 1743, p. 179-180.)

Sajnos a tört alsó és tört felső elnevezések annak ellenére sem honosodtak meg nyelvünkben, hogy olyan nagynevű matematikus, mint Vályi Gyula, a kolozsvári egyetem tanára is megpróbálta elterjeszteni. Maradtak ezek helyett a számláló és a nevező, a latin numeratror és denominator szó szerinti magyar fordításai.

A matematikatörténet funkciója

A motiváció eszköze, mert a diák által is használt, saját maga által alkotott szónak már a történelemben való előfordulásáról hall.

Hozzájárul a matematika nyelvének megértéséhez és elfogadásához, mert egy mostani elnevezés eredetére világít rá, s rámutat arra, hogy bár többször is próbálták meghonosítani az „alsót" és „felsőt", azok mégsem mentek át a használatba.

A matematikát nem lezárt, hanem élő tudományként segít megjeleníteni, mert rávilágít arra, hogy matematikai szaknyelvünk folyamatosan változik.

A matematika más tudományokhoz való hozzákapcsolása, mert a tanuló a műnyelv kialakulásán keresztül a matematika és a nyelvészet kapcsolatával találkozik.

5.3.2. A diák túl nehéznek talál egy eljárást, s ezt szóvá is teszi.

[R] Matematikatörténet (1')

Proklosz azt írja, hogy *„egy alkalommal maga Ptolemaiosz király, miután meghallgatta Euklidész egyik matematikai tárgyú előadását, azt kérdezte volna tőle: Miért nem lehet a matematikát egyszerűbben tanítani? Euklidész pedig azt felelte volna erre: azért nem, mert a matematikához nem vezet királyi út."* (Szabó, 1983, p. 9.)

A matematikatörténet funkciója

A motiváció eszköze, mert a diákok látják, hogy egy provokatív kérdésre a tanár egy történettel tud felelni.

5.3.3. A diák megkérdezi, hogy „Mi haszna van ennek?”

[S] Matematikatörténet (1’)

Sztobaiosz a következő történetet jegyezte fel Euklideszről. *„Megkérdezte egyszer valaki Euklidésztől: Aztán mi haszna lesz abból, ha megtanulta a matematika tételeit bizonyításaikkal együtt? Euklidész pedig erre - mondja tovább a folytatás - szólította volna rabszolgáját: Adjon már egy oboloszt a kérdezőnek, hogy valami haszna is legyen abból, amit tanult. - Mert antik elgondolás szerint azt, aki elég földhöz ragadt ahhoz, hogy a matematikának (és főként pedig a matematikai bizonyításnak) a hasznát keresse, ahelyett, hogy belefelejtkeznék a matematikai gondolatok szépségébe - azt csak így lehet kifizetni.”* (Szabó, 1983. p. 9.)

A matematikatörténet funkciója

A motiváció eszköze, mert a diákok látják, hogy egy provokatív kérdésre a tanár egy történettel tud felelni.

A matematika más tudományokhoz való hozzákapcsolása, mert a tanuló beleláthat az ókori görög gondolkodásmódba.

5.3.4. Amikor a tanár hibázik

[T] Matematikatörténet (<1’)

Riesz Frigyes a 20. század egyik legjelentősebb magyar matematikusa volt. *„Egyszer egyetemi előadásán a táblára helyesen felírt tételt szóban rosszul mondta el. Amikor erre figyelmeztették, akkor azt mondta: »Ne azt figyeljék, amit mondok, hanem azt, amit írok.« Később egy másik tételt jól mondott el, de rosszul írta föl. Ekkor azt mondta: »Ne azt figyeljék, amit írok, hanem amit mondok.« Néhány perc múlva mind szóban, mind írásban eltévesztett valamit. Ekkor azt* *mondta: »Ne azt figyeljék, amit írok, se nem azt, amit mondok, csak arra figyeljenek, amit gondolok.«"*[56]

A matematikatörténet funkciója

A motiváció eszköze, mert érdekes és mulatságos történettel szemléltethetjük emberi gyarlóságunkat.

5.3.5. Amikor kiderül valakiről, hogy a szokások mozgatják

[U] Matematikatörténet (1')

Az első világháború után, a kincses város egyeteme, a Kolozsvári Magyar Királyi Ferenc József Tudományegyetem először rövid ideig Budapesten, majd 1921-től gróf Klebelsberg Kunónak köszönhetően Szegeden talált új otthonra, így ez az intézmény lett a jelenlegi Szegedi Tudományegyetem elődje. Matematika Intézete, a Bolyai Intézet két egymást követően itt munkálkodó „triumvirátusnak" köszönhetően gyorsan ismertté vált az egész világon. Az elsőt Riesz Frigyes, Haár Alfréd és Kerékjártó Béla, a másodikat Kalmár László, Rédei László és Szőkefalvi-Nagy Béla alkotta. Emléküket közös plakett őrzi a szegedi Dóm téren a Panteonban.

Rédei Lászlóról, az algebra eme kiváló, és igen szórakozott művelőjéről rengeteg történet maradt fenn. Ezek közül az egyik így szól:

„Szeles időben sétált az egyetem felé. Félúton rá akart gyújtani, s hogy a szembeszél ki ne oltsa a gyufát, megállt és hátrafordult. A sikeres akció után nyugodtan megindult, s gondolataiból csak akkor eszmélt föl, amikor lakásába érve felesége, Jolánka, meglepett arccal fogadta: Mi az, Laci, ma nem tart előadást?"[57]

[56]Forrás: http://konyvtar.ady-debr.sulinet.hu/konyvlap/tananyag/matek/magymagy.htm
[57] http://www.math.u-szeged.hu/~csakany/Sz%C3%B6vegek/redeietc.pdf

A matematikatörténet funkciója

A motiváció eszköze, mert érdekes és mulatságos történettel szemléltethetjük emberi gyarlóságunkat.

A matematika más tudományokhoz való hozzákapcsolása, mert a tanuló a triumvirátus szóval találkozik, mert szóba kerül a trianoni szerződés és annak egyik következménye.

5.3.6. Amikor kiderül, hogy a diáknak problémája van az írásbeli az osztással

[V] Matematikatörténet (<1')

Szénássy Barna a 16. és 17. századi magyarországi matematikaoktatás helyzetét elemezve a következőt írja: *„Vajon kereshetünk-e a kulturális téren visszaeső, elszegényedő országban sok kiemelkedő matematikai munkát, amikor abban az időben még voltak olyan – kedvezőbb körülmények között munkálkodó – külföldi egyetemek is, amelyek azzal szereztek hírnevet, hogy a hallgatóik osztani tudtak?”* (Szénássy, 1970, p. 35.)

A matematikatörténet funkciója

A matematikát nem lezárt, hanem élő tudományként segít megjeleníteni, mert a tanuló belepillanthat abba, hogy más korokban mi okozott kihívást, s mára egy egykori egyetemi tananyag az általános iskola alsó tagozatának tananyagává vált.

5.3.7. Amikor a diák kávés pohárral érkezik az órára, vagy arról panaszkodik, hogy fáj a feje, mert nem ivott kávét

[W] Matematikatörténet (<1')

Rényi Alfréd a XX. századi magyar matematika egyik meghatározó alakja volt. Ő hozta létre a Magyar Tudományos Akadémia világhírűvé vált Alkalmazott Matematikai Intézetét, amelyet haláláig vezetett. Ez a mai Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézet, amely a magyarországi és európai matematikai kutatások egyik fellegvára. Rényi eredményei között a

Goldbach-sejtéssel kapcsolatos komoly eredmények is szerepelnek. Ezen sejtés szerint minden kettőnél nagyobb páros egész szám felírható két prímszám összegeként.

Rényi fiatalon, 48 évesen hunyt el, amiben szerepe volt a cigarettának és a rengeteg feketekávénak. Híres mondása szerint: „*A matematikus olyan gép, amely kávéból tételeket készít.”*

A matematikatörténet funkciója

A matematika más tudományokhoz való hozzákapcsolása, mert egészséges életmódra nevelünk.

6. Kutatási kérdések és a hozzájuk kapcsolódó hipotézisek

A 2018 augusztusára összeállított segédanyagot két lépcsőben próbáltuk ki. Először annak összeállítója (a dolgozat szerzője) akciókutatás jelleggel a saját maga által tanított csoportban, míg a következő tanévben ugyanazon intézmény egy másik tanára tette ezt.

Az első kipróbálás után a segédanyagon apróbb javításokat végeztünk. Szerkezetében változás nem történt, új elemként a két utolsó szituációhoz kapcsolódó blokk (5.3.6. és 5.3.7. fejezet) került be.

A kipróbálások során az alábbi kérdésekre kerestük a válaszokat.

K.1. Alkalmas-e a segédanyag arra, hogy egy középiskolai tanár különböző profilú osztályok matematikaóráján használja?
K.2. Meghagyja-e a segédanyag a tanár szabadságát abban, hogy saját ízlésének és habitusának megfelelően építsen be matematikatörténeti blokkokat a tanórába?
K.3. A diákok számára ezen történeti elemek segítik-e egy adott fogalom mélyebb megértését?
K.4. A diákok számára ezen történeti elemek segítik-e egy adott matematikai tartalom hosszú távú memóriába történő rögzülését?
K.5. Képes-e a segédanyag hozzájárulni ahhoz, hogy a diákok matematika tantárgyhoz való hozzáállása pozitív irányba változzon?

Ezen kutatási kérdésekhez rendre az alábbi hipotézisek kapcsolódtak.

H.1. Igen alkalmas. Ez leginkább felépítéséből adódik. Egyfelől a blokkok rövidsége lehetővé teszi a tanórába való beépülést annak veszélye nélkül, hogy a tanár a tananyaggal lemaradjon, másfelől pedig a felépülése nem kronologikus, hanem a tananyag logikáját követi.

H.2. A tanári szabadság nem sérül, az adott blokkok szabadon építhetők be. Ez a szabadság vonatkozik a beépülés helyére (a legtöbb blokk több tananyaghoz is kapcsolódhat), illetve a feldolgozási módszerre.

H.3. Igen, több diáknak segítséget nyújtanak.

H.4. Igen, több diáknak segítséget nyújtanak.

H.5. Igen, képes hozzájárulni ahhoz, hogy a *diákok matematikához való hozzáállása pozitív irányba változzék.*

7. Az első kipróbálás és a kapcsolódó felmérések eredményei

7.1. A tanítási kísérlet és a kapcsolódó felmérések körülményeinek bemutatása

Az első kipróbálásra a 2018/19-es tanévben, az SZTE Gyakorló Gimnázium és Általános Iskola kilencedik évfolyama általános tantervű biológia-fizika-kémia orientációs osztályának egyik csoportjában került sor. Ez az osztálytípus egyedi a városban, s elsősorban jövendőbeli orvos, gyógyszerész, bionika, vegyész szakosoknak ajánlják. Ebből is adódóan, matematikai képességeiket tekintve az ide felvett diákok az országos átlagnál jobbak, azonban a tantárgy iránti érdeklődésük inkább külső okokból, a felvételijükhöz szükséges jó jegy megszerzéséből eredeztethető. A matematikát az első két évben, névsor szerinti csoportbontásban két külön tanárnál tanulják. A 11. évfolyamtól kezdődően a korábbi két csoport „egyesül", a matematika fakultációt választók pedig – más osztályok hasonló tanulóival együtt – az alapnál kettővel magasabb óraszámban egy külön tanárral alkotnak önálló, 20-25 fős emelt szintű csoportot. E két csoport között az átjárás félévenként – a középből emelt szintre lépés esetén különbözeti vizsga letétele mellett – lehetséges. A segédanyagot kipróbáló osztály matematika heti óraszáma a négy évfolyamon a következő módon alakul: 3,5[58]; 3; 3; 3 (fakultáció választása esetén az utóbbi két évfolyamon heti 5).

A kipróbálás dokumentálásaként az órák után feljegyzések készültek. Volt óra, amely egészéről hangfelvétel készült.

A segédanyag kipróbálásán túl, a 2018/19-es tanévben két felmérés lebonyolítására is sor került a 34 fős osztály mindkét felében. A vizsgált csoportokat jellemző bemeneti adatokat az *5. táblázat* mutatja. A félkövéren szedett rész a teljes, 17 fős csoportra vonatkozik, míg az alatta lévő 13 fős mintát az adott kategóriában a két-két legjobban, illetve legrosszabbul teljesítő diák eredményének elhagyásával kaptuk.

[58] A 9. évfolyamon az első félévben 4, második félévben 3 matematika órát tartunk.

		8. osztályos matematika felvételi pontok[59] átlaga (legkisebb – legnagyobb pontszám) *(szórása)*	8. osztályos magyar felvételi pontok[60] átlaga (legkisebb – legnagyobb pontszám) *(szórása)*	hozott pontok[61] átlaga *(szórása)*
A csoport (kontrollcsoport)	**teljes 17 fő**	**36,53 (25 – 49)** ***(5,87)***	**40,88 (29 – 47)** ***(4,79)***	**98,34** ***(2,29)***
	redukált 13 fő	36,62 (31 – 40) *(2,61)*	41,23 (36 – 46) *(3,38)*	98,72 *(1,89)*
B csoport (kísérleti csoport)	**teljes 17 fő**	**35,06 (28 – 44)** ***(3,93)***	**41,53 (34 – 47)** ***(4,03)***	**98,99** ***(1,46)***
	redukált 13 fő	34,92 (30 – 40) *(2,53)*	41,85 (36 – 46) *(2,98)*	99,32 *(0,88)*

5. *táblázat*

Ahogyan az adatokból is látszik, az osztály jó képességű diákokból állt, s a táblázatban megjelenő szempontok alapján homogénnek mondható. A névsor szerinti bontásban létrejövő, külön-külön is homogén két csoport között jelentős különbség nem volt tapasztalható. A matematika tanulása mindkét csoportban elsősorban külső motivációból adódott: a diákokat a jó jegy, a jó érettségi, a magas felvételi pontszám és a szülői elvárás motiválta.

A két csoportban matematikát tanító tanárok személyisége nagyon sok közös vonást hordoz, tanításról alkotott elképzelésük hasonló. Barátok, a tanári szobában egymás mellett ülnek. Mindketten jó viszonyt ápolnak diákjaikkal, s ritkán keverednek konfliktusba diákkal, szülővel. Röviden a következőképp jellemezhetők:

A: 39 éves férfi, aki Szegeden végzett matematika és fizika szakon. Eddig két iskolában tanított. Először a kísérlet helyszínét adó gyakorló gimnáziumban, majd 12 évig egy szegedi szakközépiskolában, ahol mindkét szakját tanította. Többször volt osztályfőnök. Innen három éve tért vissza első s jelenlegi munkahelyére, a gyakorló gimnáziumba. Bár Szegeden 3 évig absztrakt algebrai témában vett részt PhD képzésben, a speciális matematika tagozatos osztályokban geometriát és valószínűségszámítást tanít.

[59] Maximum 50 pont.
[60] Maximum 50 pont.
[61] Maximum 100 pont (7. osztály év végi és a 8. osztály félévi jegyei: magyar nyelv és irodalom, történelem, matematika, biológia, kémia, fizika tárgyakból; az utóbbi három tantárgy eredményét duplán számolva).

B: A segédanyag összeállítója, 37 éves férfi, aki Szegeden végzett matematika, francia és református vallástanár szakon. Első munkahelyén tanít. Három alkalommal volt osztályfőnök. A matematika mellett utazást és turizmust, valamint francia célnyelvi civilizációt tanított néhány évig. Bár egyetemistaként analízis szakirányos volt, és a Debreceni Egyetem doktori képzésében tett komplex vizsgájának fő tárgya is a klasszikus és modern analízis volt, a speciális matematika tagozatos osztályokban geometriát és valószínűségszámítást tanít.

Bár a két csoport óráinak helyszíne és időpontja általában nem egyezett meg a kísérlet kimenetelét befolyásoló különbség ebben a tekintetben nem volt. A vizsgált időszak óráiban az új tananyagot mindkét tanár jellemzően frontális osztálymunkában közös, illetve egyéni feladatmegoldáson keresztül dolgozta fel, hagyományos „tábla-kréta”, illetve „füzet-toll” eszközhasználattal. Előre szervezett pár- és csoportmunkára egyik csoportban sem került sor. Ugyanakkor, mindkét tanár engedte, hogy egyik szomszéd a másiknak magyarázza el egy feladat megoldását, vagy egyszerűen két tanuló részeredményeiket egymással megosztva, közösen dolgozzon a kiadott feladaton. Az órák légköre mindkét csoportban oldott volt, a diákok mertek kérdezni.

7.2. Tapasztalatok és a felmérések eredményeinek bemutatása kutatási kérdések szerint

7.2.1. A segédanyag tanórába történő beépíthetőségének tanári tapasztalatai

A segédanyag első, tudatos kipróbálása után a következő tapasztalatok voltak tényszerűen megállapíthatók.

- Az A csoport az algebra és számelmélet témát, matematikatörténeti elemek nélkül szeptember 19-től november 14-ig, összesen 27 tanórán át, a B csoport matematikatörténeti elemekkel szeptember 19-től november 16-ig, összesen 30 tanórán keresztül tanulta. A különbség három órában a B csoport, az A csoport által nem tanult témaköröket nézett át (betűs kifejezések rendszerezése, lánctörtek; periodikus sorozatra vivő feladatok). A segédanyagot kipróbáló tanár nem maradt le sem tanmenetéhez, sem korábbi években megszokott ütemtervéhez képest, így elmondható, hogy a segédanyag kipróbált elemei gyakorlatilag időveszteség nélkül épültek be a matematikaórába[62].
- A kerettanterv a megtanítandó tananyagot 9-10. évfolyamra adja meg. Mivel a 10. évfolyam után a két csoport egy csoporttá olvad össze, s a fakultációt választók pedig szintén más csoportból jövő diákokkal alkotnak új csoportot, ezért a vizsgált iskolában „kőbe vésett elv", hogy bár a 9. és 10. évfolyamon tanító tanárok saját elképzelésük szerint építhetik fel a tananyagot, a 10. végére a helyi tantervben meghatározott részek tanítását minden osztályban be kell fejezni. Fontos megemlíteni a segédanyag kipróbálásának utóéleteként, hogy ez az elv itt nem sérült. A két csoport párhuzamosan tudott haladni úgy a kilencedik, mint a tizedik évfolyamon, vagyis a történeti elemek tanórába ilyen módon történő beemelése csakugyan nem járt időtöbblettel.
- A kipróbálás során a matematikatörténeti elemek mindig tanári közlésként jelentek meg, így erősítették a tanár „tananyagforrás szerepét". Ugyanakkor ez nem volt előírás, csupán a kipróbáló tanár személyiségéből adódott ez a feldolgozási forma.

[62] (Siu, 2007.) rámutat arra, hogy a tanárok legnagyobb része az időveszteségtől való félelemmel magyarázza azt, hogy nem használ matematikatörténetet a tanórán. Ez a tapasztalat pedig pontosan e félelem alaptalanságát mutatja.

- Mivel a segédanyag tananyaghoz illeszkedő felépítésű, nem igényelt külön felkészülést a tanártól. A blokkok rövidsége, s az a tény, hogy nem igényeltek előzetes tudást, lehetővé tette, hogy elég legyen a tanóra előtt a megfelelő résznél kinyitni s átismételni.
- A tanulók többsége érdeklődött a történetek iránt, az elhangzottakat lejegyzetelte a füzetébe, kérdezett, hozzászólt, vagyis aktív résztvevője volt az órák azon részeinek, amikor matematikatörténetről volt szó.
- A tanórákba beépítésre került blokkok a következők voltak: A, B, C, D, E, H, J, K, M, N, O, P, Q, S, V.
- Az I blokkot ehhez az osztályhoz túl nehéznek éreztük, így nem került kipróbálásra.
- Tervben volt a háromszögszámokkal kapcsolatos G blokknak a hatványozás modul utolsó tanóráján történő bemutatása is, de idő hiányában ez elmaradt[63].
- A segédanyag blokkjainak matematikatörténeti tartalma egymásétól független, mindig egy-egy adott tananyagrészhez kapcsolódik. Így mindegyik blokk külön-külön, a többi ismerete nélkül is megérthető. Ez a fajta epizódszerű felépítési mód lehetővé teszi, hogy a tanár ízlésének, rendelkezésére álló idejének, adott csoportja érdeklődésének és matematikai tudásszintjének megfelelően szabadon válasszon a blokkok közül.

Ezek alapján megerősítve látjuk az első két kutatási kérdésre megfogalmazott hipotézisünket, miszerint a segédanyag alkalmas arra, hogy középiskolában tanító tanár mindennapi munkájában használja, illetve meghagyja a tanár szabadságát, aki ízlésének megfelelően, az aktuális körülményekhez igazodva tudja beépíteni saját órájába.

7.2.2. A történetiség és a tananyag mélyebb megértésének kapcsolata

A B csoport esetében a történetiség az algebrai kifejezéseknél és a számrendszereknél került elő a leghangsúlyosabban. Ez utóbbi teljes egészében történeti alapon épült fel a blokkok alapján a következőképpen:

- a mi számírásunk két jellemzője a tízes alap és a helyiértékes írásmód;

[63] Az adott tanóra előtt munkaközösségi értekezlet volt, amely elhúzódott, s belenyúlt a tanórába. A helyzethez rugalmasan alkalmazkodva, ezt a feladatot kihagytuk.

- példa tízes alapú, de nem helyiértékes számírásra: egyiptomi számírás;
    - Hány jel szükséges egy-egy szám, illetve valamennyi pozitív egész szám leírásához?
    - egyiptomi összeadás, szorzás
- példa nem tízes alapú, nem helyiértékes számírásra: római számírás;
    - a felépítés logikája
    - műveletvégzési nehézségek
- példák nem tízes alapú, de helyiértékes számírásra.
    - nem tízes alapú számrendszerbeli szám értékének meghatározása
    - a nem tízes alapú számrendszerek nyomai (pl. számok neve különböző nyelveken, óra, szögmérés)
    - átírás tízes alapú számrendszerből nem tízes alapú számrendszerbe
    - néhány egyszerűbb feladat (összeadás elvégzése nem tízes alapú számrendszerben, egy összeadásból a számrendszer alapjának kitalálása)

Az A csoport a számrendszereket csak az alábbi felsorolásban látható utolsó pontban (példák nem tízes alapú, de helyiértékes számírásra) leírtak szerint tanulmányozta. Az órán megoldott feladataik többsége a számrendszerek közti átváltással foglalkozott.

A számrendszerek tanulásával záródó számelmélet fejezetből mindkét csoport röpdolgozatot írt. Mindkét röpdolgozat tartalmazott (mindkét irányba történő) átváltós feladatot. A két csoport eredményei között különbség nem mutatkozott, mivel a tanulók kb. 90%-a helyesen oldotta meg a feladatot. Mindkét csoportban a számrendszerek tanulása után három héttel 2018. december 7-én (az A csoport a nap hatodik, a B csoport a nap negyedik tanórájában), előzetes bejelentés nélkül, a tanóra első 20 percében egy felmérő feladatsort írattunk, amelynek célja az volt, hogy megvizsgáljuk, a matematikatörténet segíti-e a tananyag mélyebb megértését. Így a feladatsor kizárólag olyan, a számrendszerekkel kapcsolatba hozható feladatokat tartalmazott, amelyeket egyik csoport diákjai sem oldottak meg a korábbi tanórákon. A felmérést a diákok név nélkül írták. Tudták, hogy jegyet nem kapnak rá, csupán arra vagyunk kíváncsiak, hogy mennyire sikerült megérteni egy korábban tanult tananyagot. A feladatsor megírását mindkét csoport komolyan vette. Csendben dolgoztak, és a lapok beadása után kérték a feladatok megbeszélését.

Az alábbiakban ismertetjük a feladatokat és a diákok válaszainak statisztikáját. A válaszokat az „üres”, „rossz”, „értékelhető” és „helyes” kategóriákba soroltuk. Az „üres” azt jelenti, hogy a diák nem írt semmit. „Értékelhető”-nek tekintettük az elvi hibát nem tartalmazó, de nem tökéletes válaszokat (pl. csak számolási hibája volt a diáknak).

1. Feladat

Egy szótag lehet hosszú (egyszerűsítve hosszú magánhangzó szerepel benne), vagy rövid (rövid magánhangzó van benne). A hosszú szótagot 1-gyel a rövid szótagot 0-val jelöljük.

Például

kakas → 00

lányok → 10

pénzéhes → 110

Milyen számsorozat felelne meg az „akácfa” szónak?

Megoldás: 010

A csoport				B csoport			
üres	rossz	értékelhető	helyes	üres	rossz	értékelhető	helyes
-	-	-	15 (100%)	-	-	-	16 (100%)

6. táblázat

2. Feladat

Igaz-e, hogy bármelyik tízes számrendszerbeli pozitív egész számhoz tartozik pontosan egy (rövid és hosszú ütemekből álló) tapssorozat, és az a tapssorozat csak azt az egy számot jelöli? Válaszát keretezze be!

IGAZ HAMIS

Megoldás: IGAZ

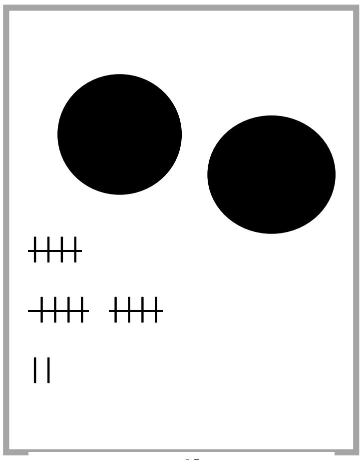
A csoport				B csoport			
üres	rossz	értékelhető	helyes	üres	rossz	értékelhető	helyes
-	6 (40%)	-	9 (60%)	-	8 (50%)	-	8 (50%)

7. táblázat

3. FELADAT

Az általános iskola harmadik osztályába járó Péter egy nap megszámolta a házuk előtt elmenő autókat. Minden elmenő autó esetén húzott egy vonalat. Ha már volt négy vonala, akkor az ötödiket keresztbe húzta: 卌.

Mikor volt sok áthúzott ötöse, akkor a könnyebb összeszámolás végett öt-öt ilyen áthúzott részt bekarikázott, majd a karikát besatírozta. Kisfüzete, amiben a számolást vezette akkora volt, hogy egy oldalra maximum öt ilyen bekarikázott rész kerülhetett (amit Péter mindig ki is használt, nem lapozott úgy, hogy még volt hely az oldalon).



11. ábra

Péter 4 teljes oldalt írt így tele. Az ötödik oldalra már csak két karika három áthúzott rész és két szimpla vonal került.

Hány autót számolt meg aznap Péter?

Megoldás: $2 + 3\cdot5 + 2\cdot5^2 + 4\cdot5^3 = 2 + 15 + 50 + 500 = 567$

A csoport				B csoport			
üres	rossz	értékelhető	helyes	üres	rossz	értékelhető	helyes
-	4 (26,67%)	2 (13,33%)	9 (60%)	-	2 (12,5%)	4 (25%)	10 (62,5%)

8. táblázat

4. FELADAT

Tízes számrendszerben hogyan írjuk azt a legkisebb pozitív egész számot, amely kettes számrendszerbeli alakja már hétjegyű?

Megoldás: $1000000_2 = 64$

A csoport				B csoport			
üres	rossz	értékelhető	helyes	üres	rossz	értékelhető	helyes
1 (6,67%)	8 (53,33%)	-	6 (40%)	-	1 (6,25%)	1 (6,25%)	14 (87,5%)

9. táblázat

5. FELADAT

Tízes számrendszerben hogyan írjuk azt a legnagyobb pozitív egész számot, amely hármas számrendszerbeli alakja négyjegyű?

Megoldás: $2222_3 = 80$

A csoport				B csoport			
üres	rossz	értékelhető	helyes	üres	rossz	értékelhető	helyes
2 (13,33%)	9 (60%)	2 (13,33%)	2 (13,33%)	-	2 (12,5%)	2 (12,5%)	12 (75%)

10. táblázat

6. FELADAT

Hány olyan pozitív egész szám van, amely négyes számrendszerbeli alakja négyjegyű?

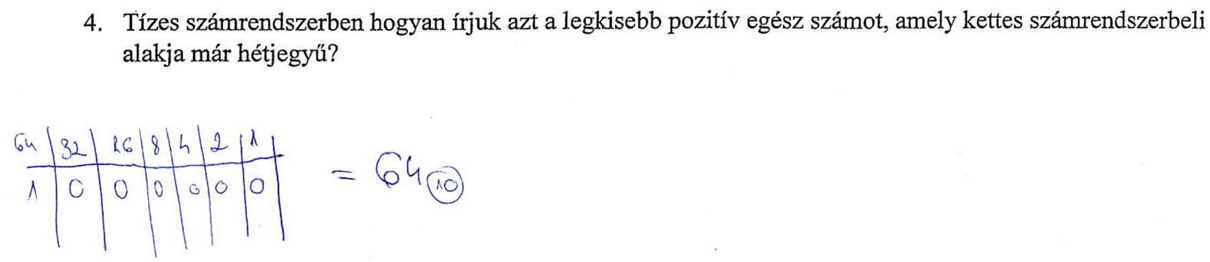
Megoldás: A legkisebb $1000_4 = 64$, a legnagyobb: $3333_4 = 255$, azaz $255 – 63 = 192$ ilyen szám van.

A csoport				B csoport			
üres	rossz	értékelhető	helyes	üres	rossz	értékelhető	helyes
4 (26,67%)	8 (53,33%)	-	3 (20%)	2 (12,5%)	11 (68,75%)	2 (12,5%)	1 (6,25%)

11. táblázat

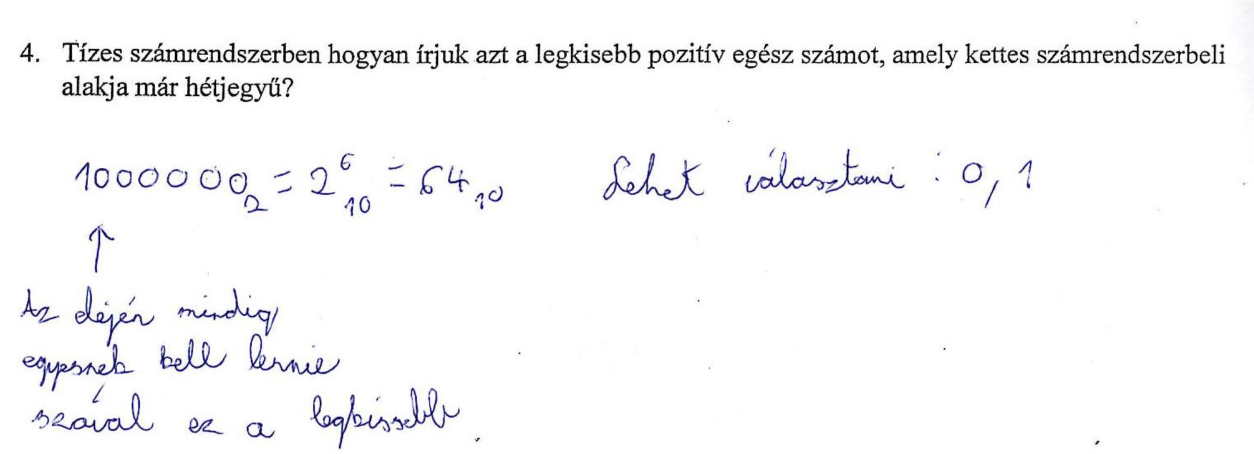
Az első három és az utolsó feladat esetében szignifikáns eltérés nem mutatkozik a két csoport megoldásaiban. Míg az első feladatok könnyűeknek, addig az utolsó feladat túl nehéznek bizonyult. (Mivel a feladatsor órán nem látott feladatokat tartalmazott, ezért hogy a diákok ne rémüljenek meg már az első feladat láttán, az első kettőt kifejezetten könnyűnek, mindenki számára megoldhatóak terveztük. Az eredményeket látva elmondható, hogy ezt a célunkat sikeresen valósítottuk meg.)

A negyedik és ötödik feladat esetében viszont jelentős eltérés mutatkozott a két csoport megoldásai között. Az igazán érdekes pedig nem a helyes és helytelen válaszok száma közti szembeötlő különbség, hanem az, hogy a B csoport valamennyi (!) tagjának dolgozatában megjelenik a helyiérték fogalma a kettő és három hatványok táblázatba foglalt, jobbról balra növekvő sorrendben történő felírásában, ahogyan azt a *12. ábra* mutatja.



12. ábra

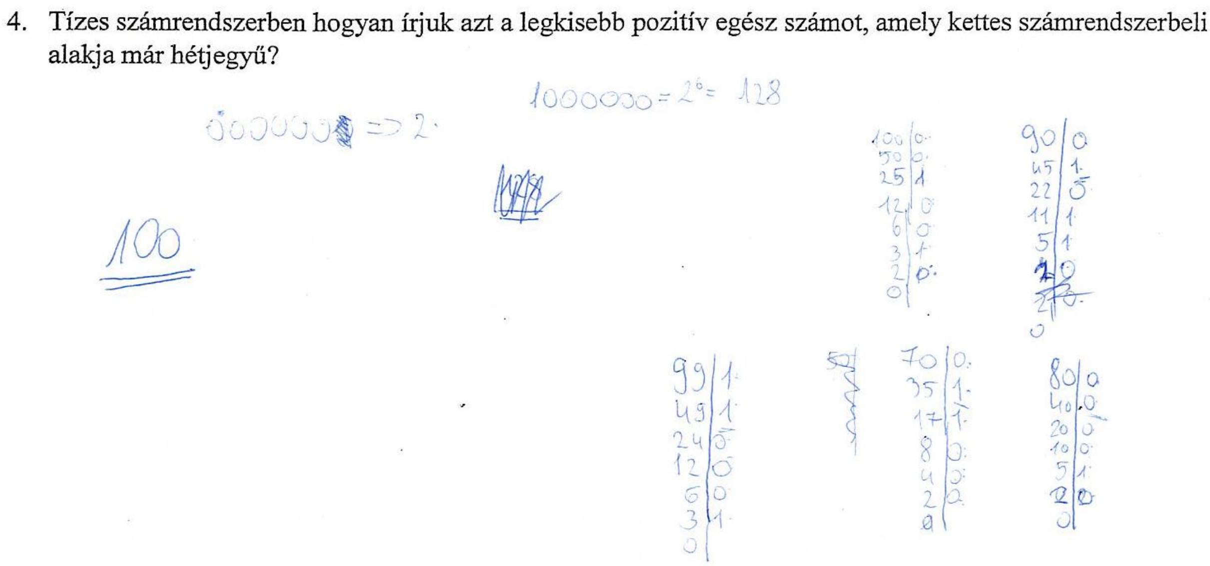
Ez az A csoport esetében még a helyes válaszoknál is hiányzik, mivel ott minden estben felírták a keresett számot, majd helyesen meghatározták annak értékét (lásd 13. *ábra*).



13. ábra

Az A csoportban 7 dolgozatban tűnik föl az a vonal, amelyet a *14. ábra* szemléltet. A diák osztani kezd, ami annak a jele, hogy formálisan emlékezetében maradt, hogy a számrendszerek közti átváltásoknál volt „valami osztogatós algoritmus”[64]. A diák akkor órán látta, megjegyezte, s a téma végén írandó röpdolgozatban még tudta alkalmazni. (A két csoport között a számelmélet témát lezáró röpdolgozatában még nem volt különbség a számrendszerek közti átváltós feladatokban.) Mivel azonban mélyebb megértés nem társult hozzá, ezért mint egy fölösleges teher, kilökődött a memóriájából.

[64] Az A csoport 10-es alapú helyiértékes számrendszerben felírt számot tanórán úgy írta át más alapú számrendszerben, hogy az átírni kívánt számot elosztották az új számrendszer alapszámával. A kapott hányados egészrészét ismét elosztották az alapszámmal, majd ezt a műveletet addig folytatták, amíg a hányados 0 nem lett. A maradékokat „visszafelé írva” kapták a szám új számrendszerben felírt alakját.



4. Tízes számrendszerben hogyan írjuk azt a legkisebb pozitív egész számot, amely kettes számrendszerbeli alakja már hétjegyű?

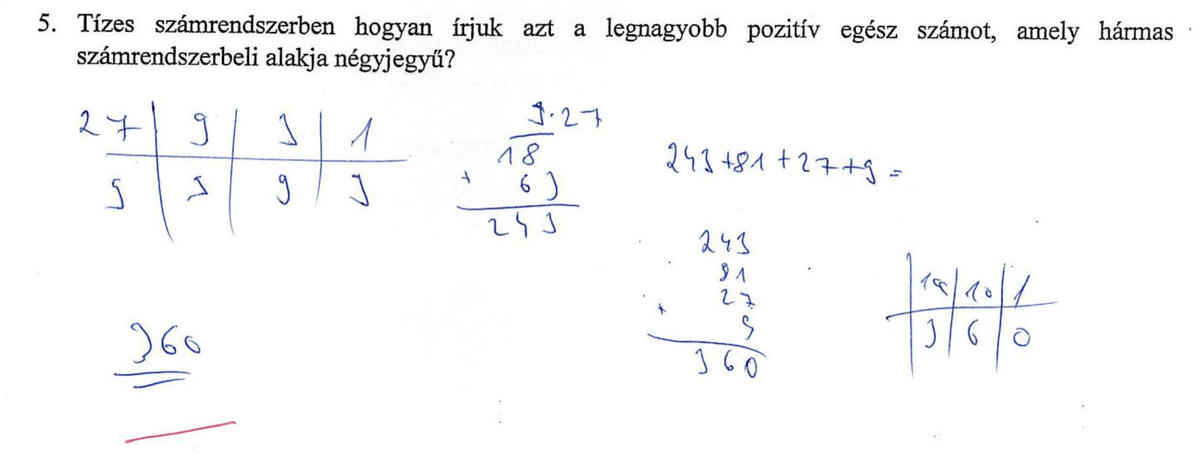
$1000000 = 2^6 = 128$

100

14. ábra

Ez a diák (A csoport) itt és az ötödik feladatánál is megpróbálta nagyságrendileg megtippelni a végeredményt (70, 80, 90, 99, 100), majd a megtippelt eredményét váltotta át (a végét elrontva) kettes számrendszerbe. Ezt addig folytatta, amíg egy már hétjegyű számot nem gondolt találni.

A negyedik és ötödik feladatnál, ahol többféle számrendszerről volt szó, az A csoport több diákja ezt a módszert próbálta valahogyan használni. Ugyanezeket a feladatokat a B csoport tagjainak legalább háromnegyede hibátlanul tudta megoldani. Náluk még a hibás megoldásnál is (*15. ábra*) előkerül egy táblázat, amiben három hatványai szerepelnek. A mellékelt feladatban a hiba abból eredt, hogy a legnagyobb számot az általa ismert legnagyobb számjegy, a 9 segítségével írta fel, figyelmen kívül hagyva a tényt, hogy hármas számrendszerben nem használhat 9-est számjegyet.



15. *ábra*

A kísérleti csoport tagjai egyértelműen sikeresebben tudták megoldani ezeket a feladatokat. Ennek oka abban rejlik, hogy a helyiértékes írásmód fogalmát jobban fel tudták idézni, s jobban tudták alkalmazni. Hogyan járulhatott hozzá a matematikatörtént ahhoz, hogy ez a különbség előálljon a két csoport között?

- Megadta az tanóra vázát, ami így kvázi történeti alapon épült fel.
- Logikai átmenetet biztosított a különféle számírások között.
- Mozgósította a diák már meglévő ismereteit (római számok).
- Több esetben ellenpéldát adott (pl. tízes alapú, de nem helyiértékes rendszer).
- Rávilágított arra a tényre, hogy az alapműveletek végzésekor nem az alapszámnak, hanem a helyiértékes írásmódnak van komoly jelentősége (pl. az egyiptomi tízes alapú számírásban teljesen másként kellett összeadni, de hármas alapú helyiértékes számíráskor az írásbeli összeadás elve nem tér el a tízes alapú rendszerben tanultétól), így ennek a témának ez a kulcsfogalma.
- Érdekessé és a napi élethez kapcsolódóvá tette a számrendszereket, míg a másik csoport rutineljárásokat sajátított el.

A vizsgált tananyag esetében azt tapasztaltuk tehát, hogy a helyi értékes írásmód fogalmát mélyebben megértették a kísérleti csoport tanulói. Ez pedig a *H. 3.* hipotézisünkkel összhangban lévő eredmény.

7.2.3. Történetiség és a tananyag hosszú távú memóriába való rögzülésének kapcsolata

Közel két hónappal később a két csoportot még egy felmérésnek vetettük alá. Ennek célja annak megvizsgálása volt, hogy a történeti felépítés segítette-e a hosszú távú memóriába történő beépülést, így most olyan feladatokat tűztünk ki, amelyeket mindkét csoport látott tanórán, s megoldási menetüket (a dolgozat eredményei alapján) „sikeresen sajátította el". Mivel a számrendszerek témakör tanításakor a B csoport e témát teljes mértékben történeti keretben tanulta, ezért a felmérésnél ismét ez a témakör került elő.

A kísérlet lebonyolítása az előzőhöz hasonlóan zajlott. Egy tanóra elején a következő két kérdést kellett megválaszolni (számológép használata nélkül).

1. Írja fel az 1221_3 tízes számrendszerbeli alakját!
2. Írja fel a 345 kettes számrendszerbeli alakját!

A felmérésre 2019. január 31-én, az A csoport esetén az 5. órában, a B csoport esetén a 4. órában került sor. Nevet nem kellett a lapra írni, jegyet nem kaptak rá. Elmondtuk a diákoknak, hogy csupán arra vagyunk kíváncsiak, mennyire emlékeznek egy korábban látott feladattípus megoldására. A feladatokat mindenki addig írhatta, amíg befejezte a megoldását, így nem egészen 10 perc múlva szedtük vissza a lapokat. A feladatok megoldását a diákok ismét mindkét csoportban komolyan vették, ami abban is megmutatkozott, hogy csendben dolgoztak a feladaton, majd a lap beadásakor kérték a megoldások megbeszélését.

A diákok megoldásait az előző felmérésével megegyező módon helyes, értékelhető, rossz és üres kategóriákba soroltuk.

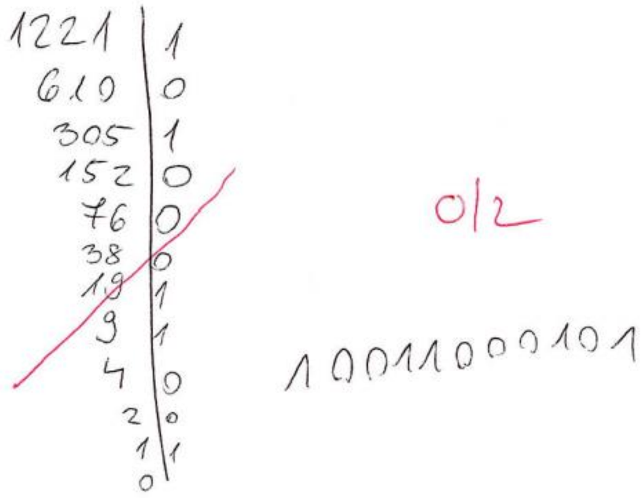
A két csoport eredményét *12. táblázat* foglalja össze.

	A csoport				B csoport			
	helyes	értékelhető	rossz	üres	helyes	értékelhető	rossz	üres
1. feladat (átváltás 3-asból 10-es számrendszerbe)	3	0	8	3	13	2	2	0
2. feladat (átváltás 10-esből 2-es számrendszerbe)	5	4	5	0	12	3	2	0

12. táblázat

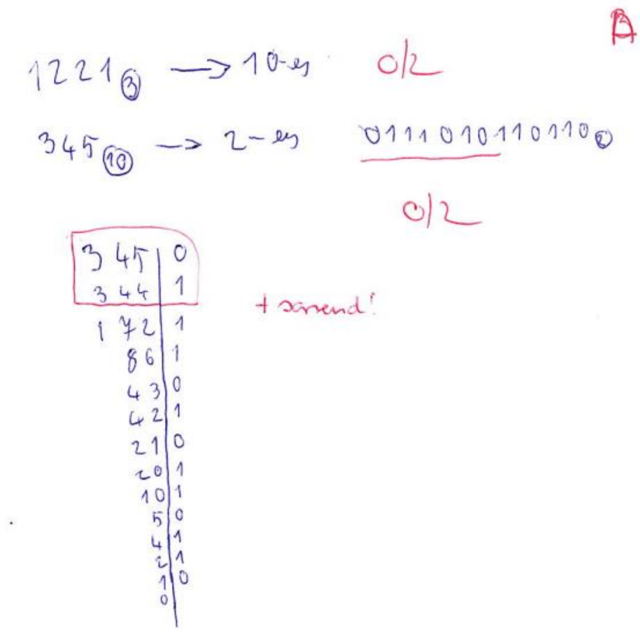
A pontszámoknál látszó különbség mellett itt is érdekesebbek a válaszok, amik a decemberi kísérlet eredményét erősítették meg. Az A csoport jelentős része csak arra emlékezett, hogy átváltáskor egy vonalat húzva kell osztani, s a maradékokat figyelni. Ez a következőkből látszik:

- 3 fő a 2. feladatban is így járt el: az 1221-et 3-mal osztotta, s a maradékokból kapott számjegyek adták a 10-es számrendszerbéli számot. Ráadásul egyik összekeverve a következő feladattal, nem 3-mal, hanem 2-vel osztott (*16. ábra*).



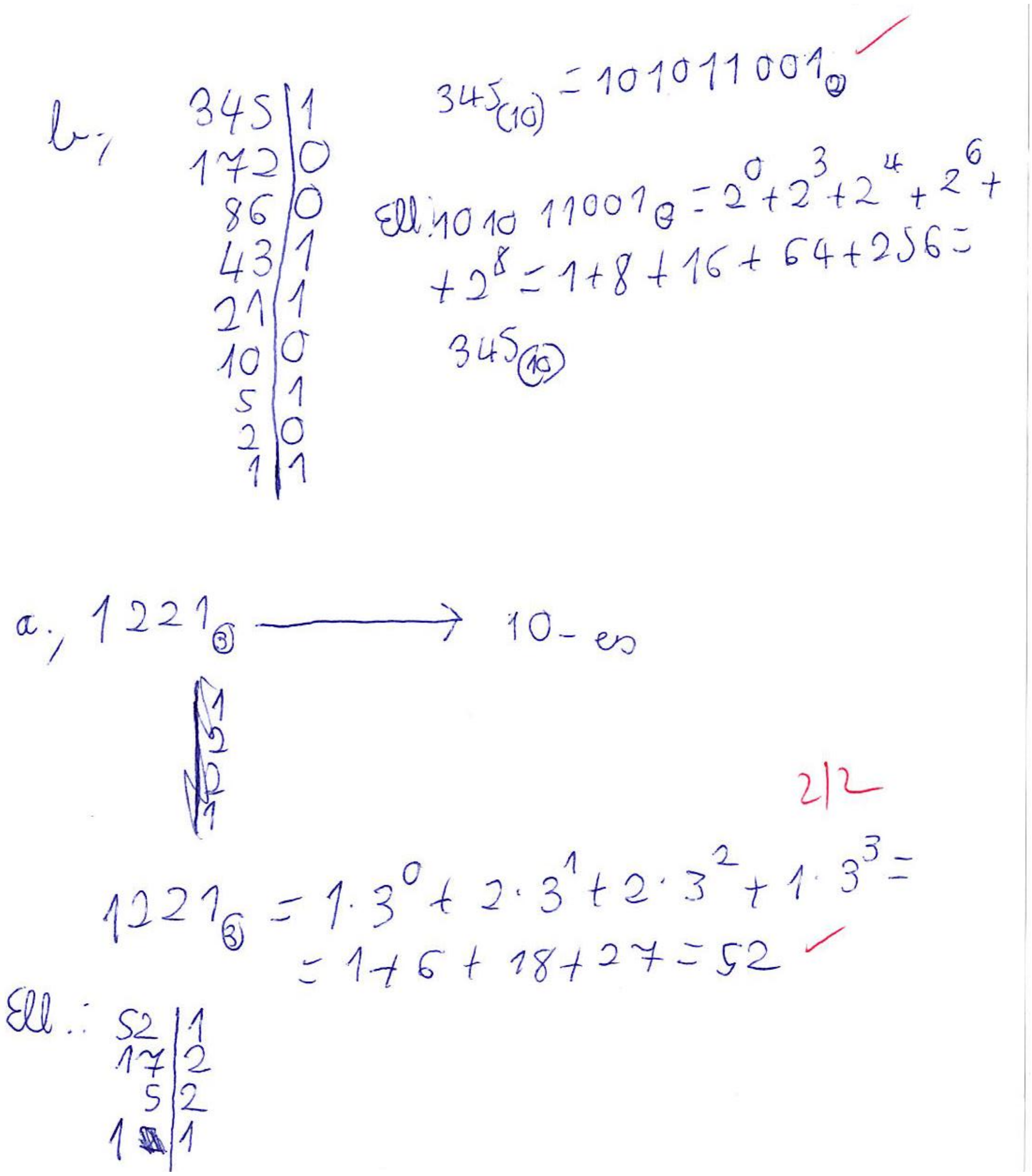
16. ábra

- 4 fő felejtette el, hogy a maradékok milyen sorrendben adják a 2-es számrendszerbéli számot az első feladatban. ketten elszámolták, s az sem zavarta őket, hogy első helyre 0-t írtak (*17. ábra*).



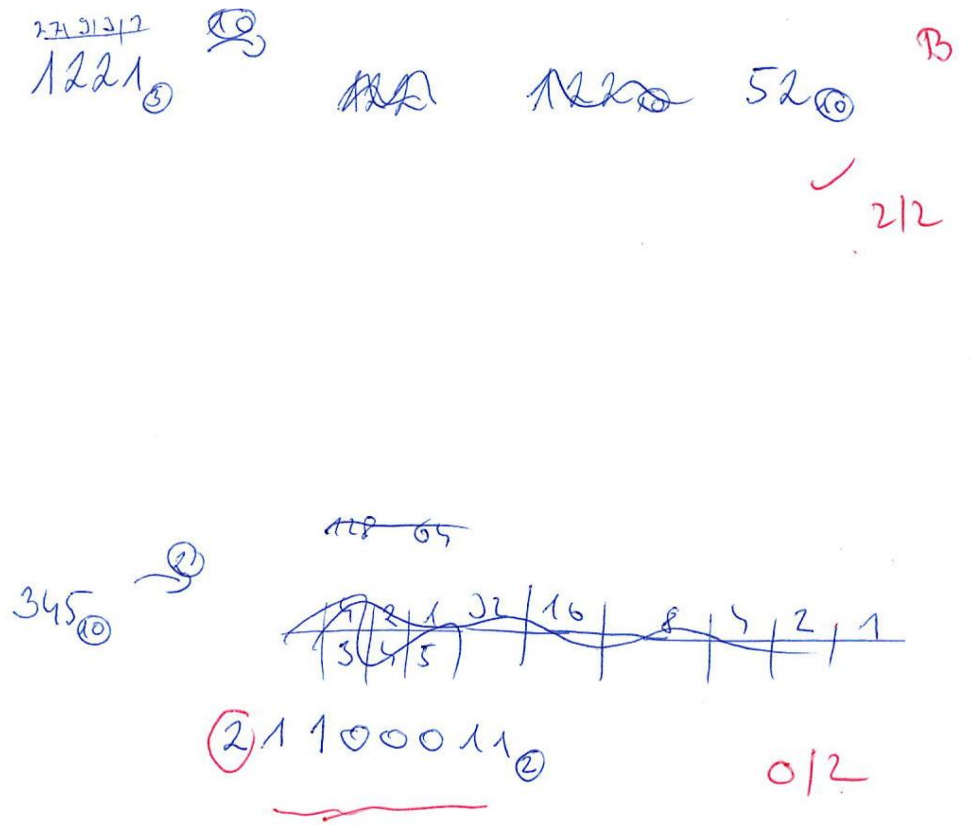
17. ábra

- Ha valaki érti a helyiértékes írásmód lényegét, akkor egy nem tízes alapú számrendszerbeli szám értékének meghatározása tudásának közvetlen alkalmazása. Míg azok számára, akik csak az „osztós algoritmust” jegyezték meg, módszerük visszafelé történő alkalmazásával kénytelenek megoldani egy nem tízes alapú számrendszerbeli szám értékének meghatározását. Ezért fordulhatott elő, hogy az A csoport 3 diákja is a számára könnyebbnek tűnő második feladattal kezdte a megoldást. (Közülük kettő rossz sorrendben írta fel a maradékokat.) Egyikük pedig az első feladatnál ugyanevvel az osztásos algoritmussal ellenőrizte a kapott eredményét (*18. ábra*).



18. *ábra*

A B csoport esetében itt is minden dolgozatban (jó és rossz megoldások esetében is) megjelent egy alapszám szerinti helyiérték táblázat.



19. ábra

A B csoport esetében egy olyan tanuló volt, aki nem bírta egyik feladatot sem megoldani. Két tanuló egy-egy feladatnál követett el elvi hibát. Az egyik tanuló a hármas alapú számrendszerben a helyiérték táblázatból kihagyta az 1–et, míg a másik diák a kettes számrendszerbeli szám felírásakor használt az egyik helyen 2-es számjegyet (*19. ábra*). A többi diáknál viszont csak számolási hiba fordult elő.

A két csoport eredménye közti különbséget ebben az esetben is avval magyarázhatjuk, hogy a kontrollcsoport tagjai a számrendszerek tanulásakor a hangsúlyt nem a helyiérték fogalmára helyezték, hanem egy egyszerű algoritmus elsajátítására, amit a téma végén írandó röpdolgozatban, témazáró dolgozatban még tökéletesen tudtak reprodukálni, de aztán egy-két hónap alatt szinte teljesen elfelejtettek. Velük szemben a B csoport diákjai jóval mélyebben sajátították el a helyiértékes írásmód fogalmát, mivel annak logikáját is sikerült megérteni. Ez hozzásegítette őket ahhoz, hogy hosszabb távon is emlékezzenek egy korábban látott feladat megoldási algoritmusára, ami azt mutatja, hogy a matematikatörténet segítheti a tananyag hosszú távú memóriába történő rögzítését.

7.2.4. A matematikatörténet hatása a diákok matematikához való hozzáállására

A diákok matematikához való hozzáállásával kapcsolatban a kísérleti órák utáni feljegyzések, továbbá a tanév egésze során a tanár (a szerző) által tett megfigyelések alapján a következőket mondhatjuk el.

- A kísérleti csoport diákjai kedvelték a matematikaórákat, amit az is mutatott, hogy sajnálták, ha elmaradt egy óra (amire a tanévben négy alkalommal is sor került), és „nem morogtak, zúgolódtak", sőt örömmel vették tudomásul, amikor egy másik elmaradó tanóra helyett matematika órát tartottunk. Erre két alkalommal, egy magyar és egy vizuális kultúra óra helyett került sor. Nyilván ennek több oka lehet, de az biztos, hogy a történeti elemek beépítése nem utáltatta meg velük sem a matematikát, sem az órát tartó tanárt.
- A történeti szemlélet kialakításaként mindig szóba szokott kerülni, hogy a diákok által használt, (Bartha, et all. 2007) példatár szerzői közül kettő is a kísérlet helyszínéül szolgáló iskolában tanított. Ez ebben a csoportban is így történt októberben a nevezetes azonosságok tanulásakor. Tanév vége felé, amikor az egyenleteknél ismét előkerült ez a példatár, két diák emlékezett rá, s megkérdezték, tudunk-e valamit a többi szerzőről. Ilyen korábban még nem fordult elő, ami azt mutatja, hogy a történetekkel rá lehetett őket ébreszteni arra, hogy a minket körülvevő világnak – legyen szó tananyagról, feladatról vagy a tankönyvről – története van, és semmi nem varázsütésre keletkezett, vagy szállt alá az égből, ahogyan Jankvist (2009a) fogalmaz.
- E sorok lejegyzésekor túl vagyunk a 2019/20-as tanév második felén, a digitális oktatásra történő átállás tapasztalatain. Az ekkor 10. évfolyamos csoport tagjai végig aktívan követték a számukra elküldött tananyagot, házi feladataikat rendben megcsinálták, s elküldték az azt értékelő tanárnak. A következő tanév tantermi óráin, 11. évfolyamon sem derültek ki indokolatlanul nagy hiányosságok a kísérleti időszakban tanított tananyag vonatkozásában.

Hogyan járulhatott hozzá a matematikatörténet ezen, kétségtelenül szubjektív, de nagyon pozitív benyomások kialakulásához?

- A matematikaóráknak, a tantárgynak és magának a tanárnak is „humánusabb” jelleget adott, ahogyan arra több kutató felhívta a figyelmet (pl. Fauvel, 1991; Fried, 2001)
- A folyamatos definíció, példa, tétel, bizonyítás, feladat ciklikus ismétlődése meg-megszakadt. Az időnként előkerülő rövid, könnyen követhető történetek meg tudták ragadni a diákok figyelmét.

A segédanyag saját csoportban történő kipróbálása így lezárult. A témakör kipróbáláshoz való kiválasztása szerencsésnek bizonyult, mivel

- a kísérleti és kontrollcsoport a kérdéses tananyagot a tanév ugyanazon időszakában tanulta;
- a rendelkezésre álló blokkok száma és sokfélesége lehetőséget biztosított a kipróbáló tanár számára, hogy azokat a körülményekből (pl. csoport befogadóképessége, időhiány) adódó döntésének megfelelően hagyja ki, vagy különböző mélységben építse be.

A kihagyott blokkokat semmiképpen sem gondoltuk törölni a segédanyagból, hiszen egy másik osztály esetén azokat továbbra is beépíthetőnek gondoljuk. Ugyanakkor – másik osztályoknál jelentkező szituációk miatt – segédanyagunkat további két szituációs elemmel bővítettük.

Mivel kutatási módszerünk, az *educational design research* legfőbb vonását a született megoldások ismétlődő tesztelése és finomítása adja, ezért úgy gondoltuk, hogy segédanyagunkat immár a segédanyag összeállítójától különböző személy is próbálja ki, értelemszerűen más tanulókkal.

8. A második kipróbálás és a kapcsolódó felmérések eredményei

8.1. A tanítási kísérlet és a kapcsolódó felmérések körülményeinek bemutatása

A 2019/20-as tanévben az apróbb korrigáláson átesett segédanyagot ugyanazon iskolában egy magyar-történelem orientációjú osztály névsor szerint megbontott egyik felében próbáltuk ki, így az osztály két csoportjából az egyik a kísérleti (B), míg másik a kontrollcsoport (A) szerepét töltötte be.

Az ilyen osztályok tanulói, a biológia-kémia-fizika orientációjú osztály tanulóihoz hasonlóan, a matematikát az első két évben névsor szerinti csoportbontásban két külön tanárnál tanulják. A 11. évfolyamtól kezdődően a diákok vagy a két csoport egyesülésével létrejövő középszintű, vagy évfolyam szinten szervezett fakultációs csoportban folytatják tovább matematika tanulmányaikat. Ezen osztály matematika óraszáma mind a négy évfolyamon heti három, 11. és 12.-ben fakultációt választók esetében heti öt.

A kipróbálás megszervezése a következőképpen történt. 2019. júniusában a kipróbálást végző tanár megkapta kinyomtatva a kb. 40 oldalas segédanyagot. Nyári szünet alatt áttanulmányozta, majd augusztusban a tanév előkészítésekor részletesen megbeszéltük annak tartalmát és koncepcióját. Kiderült, hogy már első olvasatra elnyerte tetszését, s szívesen próbálja ki. Tisztáztuk, hogy teljes szabadságot kap az egyes tartalmi elemek beépítése tekintetében. Nem kell erőltetnie olyat, amit az adott csoportban értelmetlennek gondol. Ugyanez áll az egyes blokkok tartalmának mélységére is, amelyek több esetben azért részletesek, hogy a tanár rendelkezzék némi többletinformációval az esetlegesen felmerülő kérdés esetén. Egyetértettünk abban, hogy akkor sikeres a kipróbálás, ha a diákok nem érzik úgy, hogy egy kísérlet részesei, hanem számukra a matematika órához szervesen hozzá fog tartozni, hogy néha történeti részekről is hallanak.

A két csoport 8. osztályos felvételijének eredményeit[65] a *13. táblázat* tartalmazza. A félkövéren szedett rész a teljes csoportra vonatkozik, az alatta lévő mintát, az adott kategóriában két-két legjobban, illetve legrosszabbul teljesítő diák eredményének elhagyásával kaptuk.

[65] A biológia-kémia-fizika orientációs osztállyal ellentétben, itt hozott pontok helyett a diák által választott (történelem vagy magyar) szóbeli vizsgán szerzett pontok számítottak, amiket itt irrelevánsnak érzünk közölni.

		8. osztályos matematika felvételi pontok átlaga (legkisebb – legnagyobb pontszáma) *(szórása)*	8. osztályos magyar felvételi pontok átlaga (legkisebb – legnagyobb pontszáma) *(szórása)*
A csoport (kontrollcsoport)	**teljes 16 fő**	**29,69 (17 – 41)** ***(6,98)***	**37,81 (27 – 47)** ***(5,51)***
	redukált 12 fő	29,67 (22 – 38) *(4,73)*	37,92 (31 – 45) *(3,95)*
B csoport (kísérleti csoport)	**teljes 15 fő**	**26,87 (15 -38)** ***(6,12)***	**37,07 (26 - 46)** ***(5,47)***
	redukált 11fő	26,72 (23 – 32) *(2,93)*	37,27 (30 – 41) *(3,28)*

13. *táblázat*

Hogy egy előzetes képet kapjunk a tanulók „előéletéről” és a matematika tantárgyhoz való viszonyukról, mindkét csoport az első matematika óráján (név nélkül) kitöltötte az alábbi tíz kérdésből álló ismerkedési kérdőívet.

1. *Melyik általános iskolába jártál?*
2. *Hányas voltál matematikából 7. illetve 8. év végén?*
3. *Heti hány órában tanultad a matematikát 8. osztályban?*
4. *Jártál-e 7-8. osztályban matematika szakkörre?*
5. *Milyen matematika versenyen vettél részt általános iskolában? (csapatverseny és egyéni is). Írd le az elért eredményedet is!*
6. *Melyik témakört/témaköröket szeretted a legjobban a matematikán belül?*
7. *Melyik témakört/témaköröket szeretted a legkevésbé a matematikán belül?*
8. *Nevezz meg két matematikust, akikről már hallottál!*
9. *Ha ismersz matematikusról szóló történetet, legendát, akkor néhány szóban írd le! (Az sem baj, ha nincs ilyen ismereted ☺)*
10. *El tudod-e most képzelni, hogy olyan továbbtanulási irányt válassz magadnak, ahol emelt szinten kell tanulni a matematikát? (Ha konkrét elképzelésed van, írd le!)*

A jobb összehasonlíthatóságért a diákok válaszainak összefoglalását a *14. táblázat* tartalmazza:

	A csoport (kontrollcsoport – 16 fő)	B csoport (kísérleti csoport – 15 fő)
7. osztályos matematika átlag	4,56	4,4
8. osztályos matematika átlag	4,44	4,46
8. osztályban a matematikát legalább heti négy órában tanulók száma	11	12
matematika szakköre járók száma	7	1
matematikaversenyen NEM résztvevő diákok száma	8	7
átlagosan egy diákra jutó kedvelt témakörök száma	24/16 = 1,5	22/15 ≈ 1,47
átlagosan egy diákra jutó nem kedvelt témakörök száma	17/16 ≈ 1,06	22/15 ≈ 1,47
legalább egy matematikust megnevezni tudó diákok száma	15	8
matematikusról szóló történetet ismerő diákok száma	1	3
matematikát emelt szinten továbbtanulni NEM szándékozó diákok száma	10	15

14. táblázat

A táblázatban nem megjelenő első kérdésre adott válaszokból kitűnt, hogy az A csoportból három diák jött a makói Kálvin Téri Református Általános Iskolából, ahol a matematikaoktatás régiós szinten is kiemelkedő. Ezeknél a diákoknál a 8. osztályos heti matematika óraszám 5 volt. A B csoportban viszont nem volt ebből az iskolából érkező diák.

Az A csoport adatai – a felvételi adatokhoz hasonlóan – e kérdőív alapján is egy kicsit kedvezőbbnek mutatkoztak. A matematikai felkészültséget jelző részeknél (átlag, óraszám) ez a különbség kevésbé, a motiváltságra utaló részeknél erősebben jelent meg: jóval nagyobb arányban látogattak matematika szakkört, többen tartották elképzelhetőnek, hogy emelt szinten tanuljanak matematikát, kevesebb számukra unszimpatikus témakört soroltak föl.

Így a bemeneti adatok összessége (felvételi pontszámok és a kérdőív) azt mutatta, hogy a kísérleti csoport valamelyest gyengébb matematikai képességű, s e tárgy iránt kevésbé motivált és érdeklődő diákokból fog állni, mint a kontrollcsoport. Ugyanakkor a különbség nem mutatkozott nagynak.

A két csoport tanárait tényszerűen a következőkkel írhatjuk le.

A: Szegeden végzett 2003-ban matematika, 2007-ben fizika szakon. Fizika módszertani PhD-ja megszerzése után, fizika szakmódszertanos lett az egyetemen. A PhD-s évei alatt óraadóként, több szegedi középiskolában is tanított. Az SZTE Gyakorló Gimnáziumban 10 éve tanít főleg fizikát, de 6 éve matematikát is. 4 évig volt osztályfőnöke egy informatika orientációs osztálynak, ahol végig matematikát is tanított. Előző és jelenlegi osztályában is a kísérleti csoport matematika tanárával voltak párban egymás osztályában osztályfőnök – osztályfőnök helyettes funkcióban.

B: Matematika – francia szakon végzett Szegeden. Első munkahelyén tanít 22 éve. Pályakezdőként egy évig tanított francia nyelvet is. Francia nyelvű matematikaórái mindig voltak az iskola kéttanítási nyelvű tagozatán. 11 éve tanít matematika tagozaton geometriát és valószínűségszámítást. Második alkalommal osztályfőnök francia kéttannyelvű osztályban. A 2019/20-as tanévben mentortanár szakvizsgát szerzett. Mivel nyitott az új dolgok iránt és a matematika iránt érdeklődik, azonnal igent mondott arra, hogy kipróbálná-e az elkészült segédanyagot.

A kísérlet dokumentálásaként minden óráról hangfelvétel készült. A tanórák jelentős részén, főleg a matematikatörténeti blokkok megjelenésekor személyes megfigyelőként vettünk részt az órán, feljegyzéseket készítve figyeltük a diákok reakcióit és a kolléga munkáját. A tanár a kinyomtatott segédanyagot az órákra magával vitte, megjegyzéseit, észrevételeit vagy már a tanórán, vagy rögtön az óra után rávezette. Az órák után mindig hosszabb-rövidebb megbeszélést tartottunk, amelyekről feljegyzések készültek.

8.2. Tapasztalatok bemutatása, a kutatási kérdések szerint

8.2.1. A segédanyag tanórába történő beépíthetőségének tanári tapasztalatai

Az A csoport az algebra és számelmélet témakört 2019.10.02-től kezdte tanulni, s a 36. órán, 2020.01.15-én írt belőle témazáró dolgozatot. A B csoport ugyanezt 2019.10.01-én kezdte, s a 34. órán, 2020. 01. 08-án írt témazáró dolgozatot. Az A csoport két órával azért töltött többet az adott témával, mert egy-egy tanórán megnézték a négyzetgyök fogalmát, illetve a gyökvonás azonosságait, tehát mondhatnánk a két csoport párhuzamosan haladt. Mindkét csoport haladási naplójának részletét, a beépített matematikatörténeti blokkok helyének megjelölésével kiegészítve, az 2-es számú melléklet tartalmazza.

A *15. táblázat* a kísérletet végző tanár beépítéssel kapcsolatos tapasztalatait, észrevételeit, illetve a tanórákon történteket tartalmazza. A dőlten szedett mondatok az itt idézett formákban hangzottak el a tanórákon, vagy a későbbi megbeszéléseken.

matematikatörténeti blokk	**a kísérletet végző tanár tapasztalatai**
A, elnevezések	1 helyett 2 percet vett igénybe. A betö-vetés, betüzvény, betütudákosság szavak hallatán a diákok *„kuncogtak”*. A tanár bevezető kérdésére (*„Tudjátok-e honnan ered az algebra szavunk?”*) volt válasz: *„valami arab matematikustól*”.
B, retorikus, szinkopált, formális matematika fogalma	Maga a tanár is hasznosnak ítélte meg, hogy megbeszélésre került az, miért van szükség betűkre a matematikában. A gyerekeknek nagyon tetszett. Mivel volt franciás az osztályban, ezért ő azonnal tudta, hogy az egaulx a francia égal (többes számban égaux) szóból származhatott. A fokszámok jelölésével azonban a diákok nem tudtak mit kezdeni. Azt javasolta, ezt ennek későbbre (pl. a hatványozás utánra való) helyezésével javítsam, mivel tapasztalata szerint ebben a témában nem építhetünk az általános iskolából hozott ismeretre.

D, elnevezések	A tanár számára is hasznos volt végiggondolni, hogy valami főnévi alakban magyarosítva, melléknévi alakban latinosan használatos. A tanórán az exponenciális növekedés kifejezést a diákok mondták.
E, a kis Gauss története	A tanár a funkciókhoz odaírta: *„a tanuló ráébredhet, hogy számológéppel a kezében is szüksége van a mat-i általánosításokra”.* Az összes azonosság megtárgyalása után, (ahogyan a kapcsolódási pontok is jelzik) egy gyakorló órán került elő, *„amikor már éppen eléggé unták”*. A feladat kitűzésekor a csoport matematikából egyik leggyengébb (!) diákja megkérdezte: *„Használhatjuk a Gauss-módszert?”* Válasz az volt: „*Igen, ha elmondod a többieknek is.”* A kérdező diáknak ritkán volt ilyen sikerélménye az addigi matematika órákon.
F, a binomiális tétel története	A rekurzív felépítést a diákok *„nehezen vették”*, de azt már értették, hogy az *a* kitevői csökkennek, miközben a *b* kitevői nőnek. Másnap a tanár megkérte őket órán, hogy üssék be a google-ba: „Yang hui triangle”. A kijövő oldalakat látva az egyik lány megszólalt: *„Nem ezt beszéltük meg tegnap?”*
G, háromszögszámok	Teljes négyzetté kiegészítés után a következő felépítésben vették. 1, Alakítsuk teljes négyzetté a következő kifejezést: $\frac{n(n+1)}{2} \cdot 8 + 1$ A diákok kaptak időt az önálló feladatmegoldásra, majd megbeszélték a feladatot. 2, A tanár beszélt a püthagoreusokról és a háromszögszámokról, s feltette a kérdést, hogy melyik a 20. háromszögszám? Az önálló feladatmegoldás után megbeszélték az eredményt, majd általánosították a feladatot.

	3, Visszautalás „a Gauss módszerre": mi az n-edik háromszögszám? 4, Ennek megbeszélése után a következő feladatot kapták a diákok: Igazoljuk, hogy bármely háromszögszám 8-szorosához 1-et adva négyzetszámot kapunk. A diákok észrevették, hogy *„ez volt az előző feladat"*.
J, Bombelli négyzetgyök keresési módszere	A tanár eredetileg a négyzetgyökfüggvénynél akart róla beszélni, de a 37. tanóra végén felmerült (órához nem kapcsolódó) tanulói kérdésként, hogy hogyan kell négyzetgyököt vonni, így a tanulók természetes kíváncsiságát kihasználva az algebrai törteknél mutatta meg. Kb. 15 percet vett igénybe, míg két példát közösen megnéztek. Házi feladatban a $\sqrt{40}$-et kellett lánctörttel közelíteni. A jelen lévő 13 tanulóból csak 4 nem tudta megcsinálni. Később – korábbi gyakorlatával összehasonlítva – meglepődve tapasztalata, s egyértelműen ennek a momentumnak tulajdonította, hogy *„a diákok magabiztosabbak lettek az emeletes törtekkel való számolásban, és nem okoz nekik problémát a műveleti sorrend"*.
K, Erathosztenész szitája	A tanár nagyon hasznosnak ítélte meg. A tanórán ennek a blokknak a megbeszélése után, feltette a kérdést, hogy mekkora lesz a legnagyobb prímszám, mire több tanuló azonnal mondta, hogy *„de hát ez az eljárás sosem áll meg, így látszik, hogy nincs legnagyobb prímszám."* Ezek után, humán osztályról lévén szó, feleslegesnek is érezte, hogy bizonyítást mutasson arra, hogy végtelen sok prímszám létezik.
L, feladat a „Tíz klasszikusból"	Első lépésében a legkisebb olyan természetes számot keresték meg, amely 3-mal, 4-gyel, 5-tel és 6-tal osztva 1-

	et, 2-t, 3-at, 4-et ad maradékul, majd felírták, hogy milyen alakú az összes ilyen szám (s visszautaltak a formális matematika kapcsán a betűs kifejezések használatára). 8 perc alatt valóban végeztek a feladattal. A diákok egyik házi feladata volt megtalálni a legkisebb pozitív egész számot, amely 2-vel, 3-mal, 4-gyel, 5-tel, 6-tal osztva rendre 1, 2, 3, 4, 5 maradékot ad. 13 diák csinálta meg helyesen, s kettő tovább gondolva megadta az összes ilyen számot.
M, számnélküliség, alfabetikus és egyéb számírási fajták	A diákokat érdekelte. Ők tették fel a kérdést a görög alfabetikus számírás kapcsán: *„És hogy adtak össze írásban?”*
P, a nem tízes alapú számrendszerek nyomai	A teljes blokkból csak ez a rész került elő. A diákokat érdekelte, s ők hozták fel példának az órát, valamint a szögek átváltását.
Q, a nevező és a számláló elnevezések	Ez a szituáció a kísérletet végző tanár több osztályában is előkerült. Volt osztálya, ahol ő maga hozta szóba (11-ben, áttérés más alapú logaritmusnál: *„ami alul van, azt az alsóba írjuk, ami a felül van, azt a felsőbe írjuk.”* A kísérleti csoportban kétszer, rögtön a tanév elején, majd később a segédanyag kipróbálásakor, az algebrai törtek kapcsán is előkerült.

15. *táblázat*

A tananyagrész lezárását követő témazáró dolgozat után[66], január 10-én, a kísérletet végző tanárral egy interjút készítettünk, amelyet hangfelvétellel rögzítettünk. Bár minden óra után tartottunk néhány perces megbeszélést, itt újratárgyaltuk az összes blokk kapcsán tapasztaltakat. A beszélgetés elsődleges célja azonban az volt, hogy a benne kialakult globális képet fogalmazza meg. Ekkor és a korábbi órák utáni beszélgetéseken elhangzott főbb gondolatai a következők voltak.

[66] Ezt a dolgozatot mindkét csoportban valamennyi diák megírta. A kísérleti csoportban egy kettes, egy hármas, kilenc négyes és négy ötös (átlaguk 4,07), a kontrollcsoportban egy kettes, hat hármas, három négyes és hat ötös dolgozat (átlaguk 3,86) született.

- Nagyon hasznosnak ítélte meg, hogy részt vett ebben a kipróbálásban, mivel több mindenre ő is másként tekint (pl. jelölések, elnevezések), s van, amit így más szemszögből is végiggondolt[67] (pl. lánctörtek tanításának szerepe a műveletei sorrendben és az emeletes törtekkel végzett műveletekben).
- A segédanyaggal kapcsolatban semmiféle negatívumot nem tapasztalt.
- A segédanyagot annyira hasznosnak érezte, hogy ahol lehetett, más csoportjainál is beépítette a tanóráiba.
- A matematikatörténeti blokkok beépítése az óráiba nem okozott időveszteséget.
- A matematikatörténeti blokkok rövidsége lehetővé tette alkalom szülte kisebb holtidők kitöltését, így a rendelkezésre álló idő hatékonyabb kihasználását (pl. egy tizedikes osztályban óra végén maradt egy perc, amit kitöltött avval, hogy az órához kapcsolódó történeti dolgot mondott el).
- A diákok többségét érdekelte, aktívan vettek részt az órákon, jegyzeteltek, hozzászóltak, kérdeztek.
- A kinyomtatott segédanyagot, amelyre megjegyzéseit vezette (ennek a „Gauss módszerhez" tartozó részét szemlélteti a *20. ábra*), majd szeretné visszakérni, illetve nagyon hasznosnak tartana egy ilyen könyvet, amely a teljes középiskolai tananyagot felöleli.

[5], mert a matematika fejlődésének egy lehetséges pillanatát mutatja be

[6], mert a tanuló megismeri Gauss nevét

[7], mert a tanulóban felerősödhet a történelemtudományban fontos forráskritikai szemlélet

[8], mert a tanuló ráébredhet, hogy számológéppel a kezében is szüksége van a mat-i általánosításra

Lehetséges kapcsolódási pont

- a hatványozás gyakorlásakor gyakorló órán itt csináltam, amikor már
- a hatványozás modul összefoglalásakor éppen eléggé unták
- az algebra és számelmélet témakör összefoglalásakor
- számtani sorozatok tanításakor
- Gauss nevének bármilyen említésekor (pl. szabályos sokszögek, egyenletrendszerek megoldása, stb.)

20. *ábra*

[67] Szendrei János korábban is idézett cikke (Szendrei János, 1993) a matematikaoktatásban lévő kutatások kategorizálásakor a gyakorlati hatékonyságot növelő kategória kapcsán említi: *„A tanárok örülnek annak a kutatásnak, ami segít nekik megérteni, amit tanítanak, és ötleteket ad nekik a tanításhoz."*

Első kutatási kérdésünkre (a segédanyag gyakorlatban történő alkalmazhatósága) a következő tények alapján igenlő választ fogalmazhattunk meg.

- A segédanyag összeállítójától különböző tanár a blokkok egy részét bevitte a saját tanórájára (s ezt önkéntesen is megtette a vizsgált csoporttól eltérő osztályában is).
- Előfordult, hogy valamelyik blokk egy diákban felmerülő kérdésre adott választ.
- A blokkok időveszteség nélkül voltak beépíthetők a tanórába.
- A blokkok szervesen hozzákapcsolódtak a matematika tananyaghoz.
- A segédanyagot, a tananyaghoz kapcsolódó szerkesztési elve, valamint blokkjainak rövidsége könnyen használhatóvá tette.

Második kutatási kérdésünkre (segédanyag és a tanári szabadság) szinten igenlő választ fogalmazhattunk meg a következők alapján.

- Két különböző tanár egy-egy csoportjában nem ugyanazokat a blokkokat építette be.
- A segédanyag összeállítójától különböző kipróbáló saját felépítésben, saját koncepciójához adaptáltan épített be néhány blokkot (pl. háromszögszámokkal kapcsolatos blokk).
- A kipróbálás alkalmával előfordult, hogy egy előre nem látott szituáció módosította a bemutatni kívánt blokk tárgyalását, amihez a kipróbáló azonnal alkalmazkodni tudott.

8.2.2. Történetiség és a hosszú távú memóriába történő rögzülés kapcsolatának vizsgálata

Közel két hónappal a témazáró dolgozat után, 2020. március 5-én a két csoporttal egy közös felmérést írattunk, melynek célja annak megvizsgálása volt, hogy a matematikatörténet segítette-e a hosszú távú memóriába történő beépülést.

Az A csoport 5. a B csoport a 2. órában, a tanóra elején kapott egy feladatlapot, amelyet név nélkül töltöttek ki. Elmondtuk, hogy jegyet nem kapnak rá, csupán arra vagyunk kíváncsiak, hogy mire emlékeznek a korábban tanultakból. A diákok a feladatok megoldását szemmel láthatóan most is komolyan vették.

A feladatokat olyan témák kapcsán válogattuk össze, amelyeknél a B csoport tanóráin szó esett matematikatörténeti vonatkozásokról is. A feladatsort mindkét csoportot tanító tanár átnézte, nehogy olyan feladatot tartalmazzon, amelyet valamelyik csoport nem tanult.

Az alábbiakban ismertetjük a feladatokat, a helyes megoldásokat, a diákok eredményeit összefoglaló táblázatokat és a megoldások értékelését. Az eredmények értékeléséhez emlékeztetünk arra, hogy az A csoport diákjainak bemeneti adatai (8. osztályos felvételi és az ismerkedési kérdőív eredményei) „enyhén” kedvezőbbek voltak.

1. FELADAT

Hányad fokúak a következő kifejezések?

a, $2x^3$

b, $3xy^2$

c, $2x^2 + 3x + 5$

d, $3x^2y^4 + 5xy^3z – 2y^2 + 1$

Helyes válaszok: *a)3* *b) 3* *c) 2* *d)6*

Helyes válaszok száma kérdésenként

	a	b	c	d
A csoport	8	1	5	2
B csoport	5	0	5	0

16. táblázat

Helyes válaszok száma dolgozatonként

	4	3	2	1	0
A csoport	0	0	5	6	4
B csoport	0	0	4	2	8

17. táblázat

Ebben a feladatban az A csoport esetében több helyes válasz született, mint a B csoportban (16 vs. 10). Ugyanakkor, ha egyesével nézzük meg a dolgozatokat, akkor a kép árnyaltabb. Mind a két egyhatározatlanú polinomok fokszámát 4-4 fő állapította meg helyesen a két csoportban. Következetesen helyes megoldásról az ő esetükben lehet beszélni, ők azok, akik az egyhatározatlanú polinom fokszámának fogalmát értik.

A többhatározatlanú polinomok fokszáma következetesen egyetlen dolgozatban sem volt helyesen megadva, s a következő főbb hibák kerültek elő:

- fokszám = tagok száma;
- fokszám = valamelyik változó legmagasabb hatványa;
- fokszám = változók száma.

Így azt lehet mondani, hogy a két csoport polinomok fokszámával kapcsolatos ismeretei között eltérés ez alapján nem mutatható ki.[68]

2. FELADAT

Hogy néz ki kibontva (összeg alakban) az $(a + b)^4$?

Helyes válasz: $a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$

	A csoport	B csoport
hibátlan megoldás	1	3
elírásból / elszámolásból adódó hibát tartalmazó	0	1
rossz megoldás	14	10
üres	0	0

18. táblázat

A B csoport tanulói jobban emlékeztek a Pascal háromszögre. Többen oldották meg helyesen a feladatot, s a rossz megoldásokat adók közül is ketten helyes Pascal háromszöget rajzoltak fel. A következő főbb hibák fordultak elő:

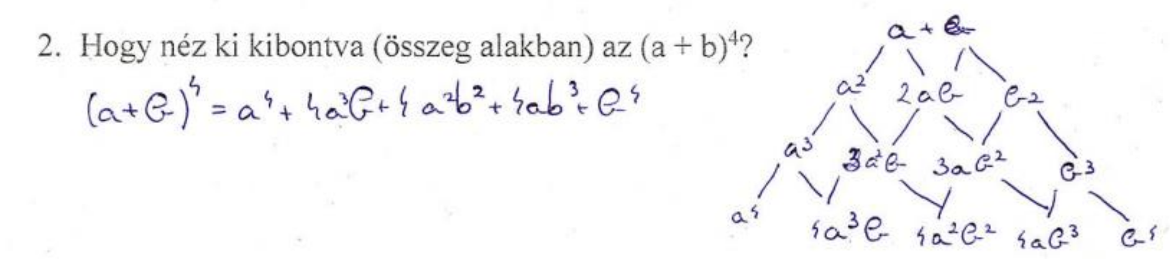
- tagonként emeltek negyedik hatványra (A csoportnál 4, a B csoportnál 1 fő)
- hamis analógiával $a^4 + 4ab + b^4$ –t kaptak (A csoportnál 2, B csoportnál 1 fő)
- rosszul bontott zárójelet[69] vagy vont össze (A csoportnál 4, B csoportnál 0 fő)

[68] Ugyanezen tanévben, ugyanebben az iskolában 140 11. és 12. évfolyamos diák megkérdezésével felmérést végeztünk hasonló módszerrel. Ennek egyik része volt annak felmérése, hogy a diákok menyire vannak tisztában a polinom fokszámának fogalmával. Ott az egyhatározatlanú polinomok esetében 140 diákból közel 130, többhatározatlanú polinomok esetén 8 diák adott következetesen helyes választ. A hibák jelentős része az előzőekben ismertetett fogalmi zavarból adódott. A két felmérésből külön-külön és együtt is tanulságul vonható le, hogy az adott iskola diákjai a polinomok fokszámának fogalmát inkább a használat során, például az egyenleteknél látott elnevezések analógiájaként sajátítják el. Mivel többismeretlenes egyenlettel ritkán találkoznak, s fokszámról ott nem szoktak beszélni, így a helyes elnevezések nem is épülnek be szervesen matematikai ismereteik közé.

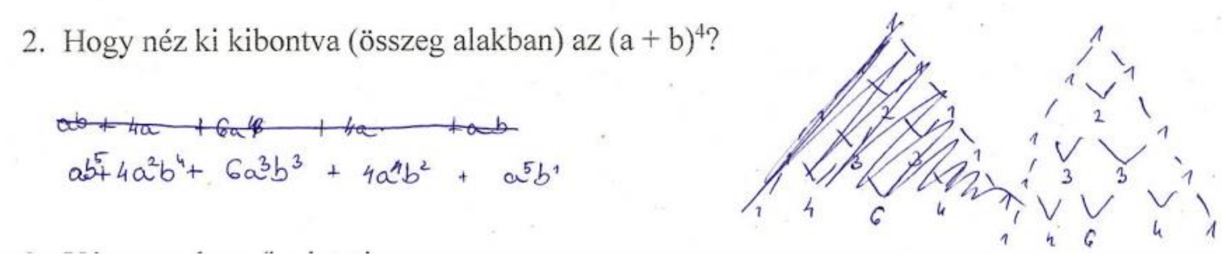
[69] Többen a negyedik hatványra emelést (a negyedik hatvány fogalmának helyes értelmezése szerint) úgy próbálták elvégezni, hogy az (a + b)-t beszorozták (a + b)-vel, majd a kapott szorzatot ismét beszorozták (a + b)-vel, majd ismét.

A kéttagú összeg *n*-edik hatványát mindkét csoport a 26. tanóráján vette. Az A csoport egy tanórán általánosította a kéttagú összeg második hatványára vonatkozó formulát, harmadik, negyedik, és pozitív egész kitevőre (bár a tanóra címében csak a köb szerepel). A B csoport a polinomok tanulása során azonosságokat írt fel, melyeket sorszámmal láttak el. Egyes számú azonosság volt a kéttagú összeg négyzete, kettes számú azonosság volt kéttagú összeg köbe, hármas számú azonosság volt a két tag összegének és különbségének szorzata, négyes számú azonosság volt a háromtagú összeg négyzete, s ötös számú azonosság a binomiális tétel. Így összességében a két csoport a kéttagú összeg negyedik (és magasabbfokú) hatványára körülbelül ugyanannyi időt szánt.

A B csoport tanulói közül a feladatot három ember oldotta meg hibátlanul. Egy fő helyes elvet követve valószínűleg elszámolásból adódóan tévedett (lásd *21. ábra*). Mind a négy diáknál (és egy teljesen rossz választ adó esetében is) fellelhető a felrajzolt Pascal háromszög (lásd. *22. ábra*).

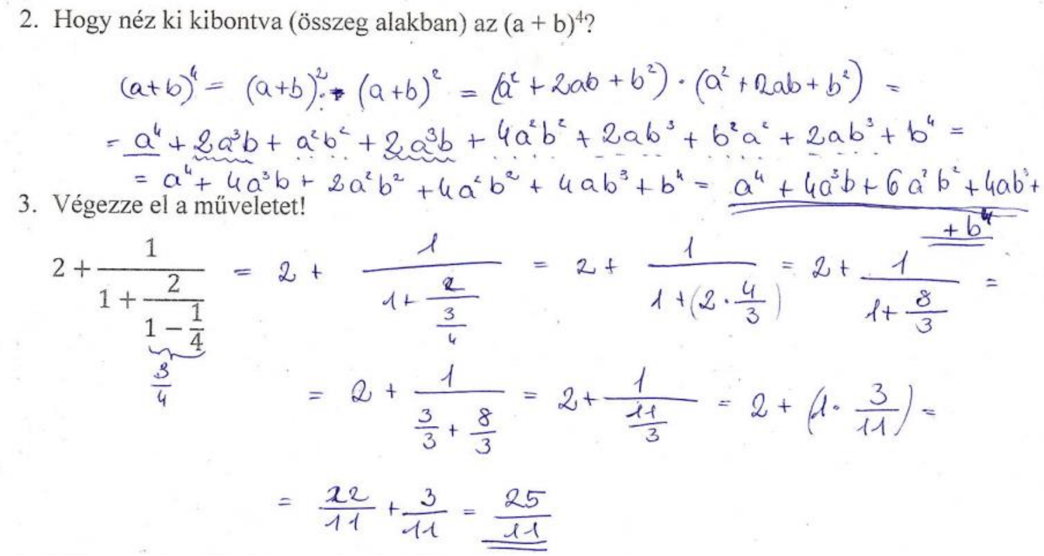


21. ábra



22. ábra

Velük szemben az A csoport egyetlen helyes választ adó diákja a szorzást végezte el (*23. ábra*).



2. Hogy néz ki kibontva (összeg alakban) az $(a + b)^4$?

$$(a+b)^4 = (a+b)^2 \cdot (a+b)^2 = (a^2+2ab+b^2)\cdot(a^2+2ab+b^2) =$$
$$= a^4 + 2a^3b + a^2b^2 + 2a^3b + 4a^2b^2 + 2ab^3 + b^2a^2 + 2ab^3 + b^4 =$$
$$= a^4 + 4a^3b + 2a^2b^2 + 4a^2b^2 + 4ab^3 + b^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

3. Végezze el a műveletet!

$$2+\cfrac{1}{1+\cfrac{2}{\underbrace{1-\frac{1}{4}}_{\frac{3}{4}}}} = 2+\cfrac{1}{1+\cfrac{2}{\frac{3}{4}}} = 2+\frac{1}{1+\left(2\cdot\frac{4}{3}\right)} = 2+\frac{1}{1+\frac{8}{3}} =$$
$$= 2+\frac{1}{\frac{3}{3}+\frac{8}{3}} = 2+\frac{1}{\frac{11}{3}} = 2+\left(1\cdot\frac{3}{11}\right) =$$
$$= \frac{22}{11}+\frac{3}{11} = \frac{25}{11}$$

23. ábra

Az itt mértek egy lehetséges magyarázata lehet az, hogy a számokat tartalmazó háromszöghöz kapcsolódó név és némi történet lehetővé tette, hogy a matematikai tartalom valamihez tapadva épüljön be a hosszú távú memóriába. Ráadásul a diákok időt töltöttek avval, hogy felírták Yang Hui nevét, időt, míg meghallgatták, hogy a történelem során ezt többen egymástól függetlenül is felfedezték. Mindeközben azonban a táblára felrajzolt háromszöget nézték, s arról beszéltek többféle vonatkozásban.

3. Feladat

Végezze el a műveletet!

$$2+\cfrac{1}{1+\cfrac{2}{1-\frac{1}{4}}}$$

Helyes válasz: $2+\frac{1}{1+\frac{2}{1-\frac{1}{4}}} = 2+\frac{1}{1+\frac{8}{3}} = 2+\frac{3}{11} = \frac{25}{11}$

	A csoport	B csoport
helyes megoldás	5	8
maximum egy számolási (de nem elvi) hiba	0	1
rossz megoldás	9	4
üres	1	1

19. táblázat

A harmadik feladat eredményeiben lényeges különbség volt megfigyelhető, a kísérleti csoport javára. Az eredmény is igazolta a kísérleti csoport tanárának korábbi észrevételét miszerint azt tapasztalta, hogy „[azok a diákok, akik számolnak lánctörtekkel] *magabiztosabbak lettek az emeletes törtekkel való számolásban, és nem okoz nekik problémát a műveleti sorrend”*. Az ehhez kapcsolódó matematikatörténeti blokk célt adott a tanóra lánctörtekkel való számolós részének azáltal, hogy bizonyos diákokban rejlő természetes kíváncsiságot elégített ki.

Mindezek összessége megerősítette azt a hipotézisünket, hogy a matematikatörténettel támogatott oktatás segítette a vonatkozó tananyagrészek hosszú távú emlékezetbe történő beépülését.

8.2.3. A matematikatörténet hatása a diákok matematikához való hozzáállására

Hogy a történeti blokkok pozitív irányba befolyásolták-e a diákok matematikához való hozzáállását, azt az alábbi szempontok megvizsgálásával kívántuk eldönteni[70]:

- elfogadjuk azt, hogy ha a diáknak sikerélménye van egy tantárgy tanulásakor, akkor ahhoz pozitívan áll hozzá[71];
- a csoportot tanító tanár véleménye;
- külső szemlélő által tapasztaltak.

Első megközelítésként abból indultunk, ki, hogy ha a diáknak sikerélménye van egy tárgyban, akkor ahhoz pozitívan áll hozzá. Siker alatt értjük azt, ha a diák a tantárggyal kapcsolatos kisebb-nagyobb kitűzött célját el tudja érni. Például megold egy feladatot, megért egy tananyagrészt, jó jegyet kap egy dolgozatra vagy a tanév végén.

Itt a matematikaoktatás eredményességét jelző tényszerű adatként megemlítjük a két csoport félévi és év végi osztályzatait (*20. táblázat*). Meg kell azonban jegyezni, hogy az év végi eredményeket nagyban befolyásolhatta a digitális oktatással zárult második félév is.

	A csoport		B csoport	
jegyek	félév	év vége	félév	év vége
jeles	6	5	8	10
jó	4	10	5	5
közepes	6	1	2	
a jegyek átlaga:	4	4,25	4,4	4,67

20. táblázat

Egy csoport tantárgyhoz való hozzáállásáról sokat elmond a csoportot tanító tanár benyomása. Éppen ezért mindkét tanárt a tanév végén arra kértük, hogy értékeljék csoportjuk éves munkáját. E kérésünknek eleget téve, egymástól függetlenül, a következő értékelést adták:

---

[70] Mindenképpen kerülni szerettük volna a „Mennyire szereted a matematikát?” típusú direkt kérdéses felmérést, mivel a felmérést az iskolában tanító tanár (sőt esetleg az osztály saját tanára) végezte volna.

[71] (Csapó, 2000) úgy találta, hogy a középiskola elején a legmagasabb az osztályzatok és a tantárgyi attitűdök közti interakció. Ekkor az osztályzatok és a tantárgyi attitűd közti korrelációs együttható az általa vizsgált tíz tantárgyból az idegen nyelvé (0,529) után matematikából a legmagasabb 0,508.

A csoport

„A matematikacsoport 16 főből áll, 10 fiú és 6 leány. A tanulók között igazoltan SNI-s diák nincs. Egy tanuló esetében felmerült év közben a gyanú, hogy figyelemzavaros lehet, a család és az osztályfőnök egyeztet a kérdésben.

Az osztály humán orientációja matematikából leginkább az attitűdben érzékelhető: az eleve kudarcra ítéltség érzésével és ennek kinyilvánításával többször találkoztam. Talán ez okozhatta azt is, hogy ha kicsit is kihívás elé állítottam őket, akkor a többség inkább megvárta, amíg más megoldja a problémát helyette.

Az alapvetően nyitott diákok munkamorálja nem túl jó: erős hajlamuk van arra, hogy a hatékony és precíz munka helyett »elbeszéljék« az órát, kihívás volt őket az iskolában a tapasztalataim szerint elvárható óramenethez szoktatni. Ugyanakkor, ha sikerül elfogadniuk, hogy »matekozni kell«, akkor nyitottak a közös munkára, többen lelkesen jelentkeznek, és segítik a közös feladatmegoldást – ennek szintje azonban elmarad a kilencedik évfolyamon elvárhatótól. Probléma a gondolkodás és a feladatmegoldás sebessége. Amiben igazán jók tudtak lenni, az a világosan megfogalmazott algoritmusok megtanulása, és ismert problémahelyzetekben való alkalmazása, sajnos a csoport többségében nem tud érdemben foglalkozni valódi gondolkodtató kérdésekkel.”

B csoport

„A humán orientációjú osztály két csoportra bontva tanulja a matematikát, a szétválasztás névsor szerint történt. Heti óraszámuk 3. Ebbe a csoportba 15 tanuló jár, 5 fiú és 10 lány. Általános iskolában a többség jeles eredményű volt matematikából, 2-3 fő volt négyes.

Az év eleji ismétlés során azonnal látszódott, hogy nem a matematika az, ami leginkább érdekli őket. Saját megfogalmazásuk szerint elsősorban az fontos számukra, hogy minél jobb osztályzatot kapjanak. Szerencsére ennek érdekében hajlandóak voltak dolgozni. Kezdettől fogva azt tapasztaltam, hogy a munkához való hozzáállásuk kifogástalan: az órai munkában aktívan részt vesznek; ha valamit nem értenek, akkor rákérdeznek; a házi feladatokat tisztességgel igyekeznek maximálisan megcsinálni.

Nehézséget az okozott nekik, ami más csoportoknál is probléma: az általános iskolai osztályukban ők nyilvánvalóan a jók közé tartoztak, amíg a náluk gyengébb osztálytársaknak elmagyarázták újra és újra a tananyagot, addig bőven volt idejük megérteni és megtanulni az ismereteket, begyakorolni a módszereket. Ehhez képest a gimnáziumi tempó sokkal gyorsabb, nincs elég idő a gyakorlásra, így sokkal több energiát kell befektetniük az otthoni munkába. Nagyon sok gyerek most szembesült azzal, hogy otthon is kell „tanulnia" a matematikát, mert nem sajátított el mindent az órán.

Elégedettséggel tapasztalták, hogy csak a mat-fizes[72] osztályhoz képest tanulnak kevesebbet matematikából: ez önbizalmukat is növelte egy kicsit.

Az órákon egy fiú tanuló emelkedett ki jelentősen a többiek közül: sokkal gyorsabban és pontosabban dolgozott, mint a többiek. Neki gyakran voltak a tananyagon túlra mutató kérdései is, a többiek ezért nem „haragudtak rá", inkább elismerték tudását. Neki nemcsak az órai munkája kiemelkedő, dolgozatai is gyakorlatilag hibátlanok.

Az órai munkában nagyon aktívan és előremutatóan vett részt egy 4-5 fős lánycsapat. Nekik még arra is volt energiájuk és tudásuk, hogy a kicsit lemaradó társaikat segítsék. Az ő munkájuk azért volt »hasznos«, mert nem értettek meg mindent elsőre, viszont mertek kérdezni.

A csoportban az órai munka alapján nincs erősen lemaradó tanuló, felszólítás esetén mindenki tudja, hogy hol járunk. A számonkéréseknél azonban van különbség a tanulók között: az előbb említett lányok közül az egyik soha nem tudott jeles dolgozatot írni, pedig az órai munkája alapján képesnek tartottam rá. Ő egyébként a digitális oktatásban jól szerepelt, mert nem volt meg az iskolai stresszes környezet. A digitális oktatás során heti tananyagot kaptak a gyerekek, melyhez hetente egy alkalommal tartozott zoom konzultáció, hetente egyszer kellett leckét elküldeniük (teljes feladat kidolgozás). Ez a módszer nagyon bevált nekik, saját maguk tudták beosztani az elsajátítás tempóját, volt idő a tananyag megérésére.

A csoportban év végén 5 négyes osztályzat született, a többiek jelest kaptak és 1 tanuló dicséretet."

Utóbbi szaktanár véleményét alátámasztják az első félév óralátogatásain tapasztaltak. A diákok mertek kérdezni, segítettek egymásnak. Ugyanakkor a pusztán külső motiváltság abban

[72] Az iskolában működik egy speciális matematika és emelt szintű fizika csoportokból álló osztály.

is látszott, hogy kicsöngetéskor „kikapcsoltak”, s megszűnt a matematika óra. Ugyanakkor, amíg a tanóra tartott, ott voltak, s hajlandóak voltak tenni a saját fejlődésükért.

Mindez azt mutatja, hogy a tanév előrehaladtával a B csoport matematika tanulásával kapcsolatos attitűdje egyértelműen pozitívan változott, holott az iskolába érkezésükkor kitöltött ismerkedési teszt, a 8. osztályos matematika szakköri részvétel, valamint továbbtanulási szándékok nem ezt predestinálták. Az A csoportnál ugyanilyen változás nem, sőt inkább negatív irányba történő elmozdulás volt érzékelhető.

Mivel a B csoport esetén az attitűdbeli pozitív irányú változás (főleg ahhoz képest, amit a megismerkedési kérdőív előre jelzett) már néhány hónap után érzékelhető volt, azt kutatandó, hogy ennek van-e a matematikatörténethez köze, felmérést készítettünk. Erre a témazáró dolgozat után kb. egy héttel, 2020. január 16-án került sor. A felmérésnek kettős célja volt:

- megvizsgálni mennyire okozott „maradandó élményt” a tanulókban az órán hallott matematikatörténet;
- a diákok felméréssel kapcsolatos reakciójának megfigyelése.

Utóbbit azért tartottuk lényegesnek, mivel a diákokat egyértelműen a jobb jegy motiválta eddig. Kérdés volt tehát, hogy egy témazáró utáni, matematikatörténeti kérdőív iránt a legkisebb érdeklődést mutatják-e úgy, hogy az semmilyen kihatással nincs a jegyükre.

Óra elején egy feladatlapot kaptak, amelyet név nélkül kellett kitölteniük. Elmondtuk, hogy semmiféle osztályzatot nem kapnak rá, s arra vagyunk kíváncsiak, mennyire emlékeznek a tanultakra. A diákok csendben dolgoztak, majd amikor a kísérletet végző tanár, kb. 8 perc múlva beszedte a lapokat, először az egyik lány jegyezte meg, majd többen a szavába vágva, helyeselve mondták el, hogy ők az első kérdésben leírtakra emlékeznek, de a neveket nem tudják már hozzájuk kötni, így kérik (!), beszéljék át a feladatokat. Ez a reakció egyértelművé tette, hogy a történeti dolgokhoz alapvetően pozitívan, s érdeklődve viszonyulnak. Ezek az alapvetően jó jegyre hajtó diákok, bár már túl voltak a témazárón, mégis kérték, hogy beszéljenek át egy olyan „tananyagot”, amely nem fog szerepelni későbbi számonkérésekben, s jegyszerzésükre semmiféle hatása nem lesz. A megbeszélés alatt többen a füzetükben jegyzeteltek.

A feladatlap a következő feladatokat tartalmazta. Mellékeljük a jelenlévő 15 diák válaszait bemutató összefoglaló táblázatokat.

1. Írd a megfelelő matematikus neve mellé a hozzá tartozó rész betűjelét! (Minden betű pontosan egy matematikushoz tartozik, és minden matematikushoz pontosan egy betű tartozik.)

Püthagorasz (Pitagorasz):

Csang Can:

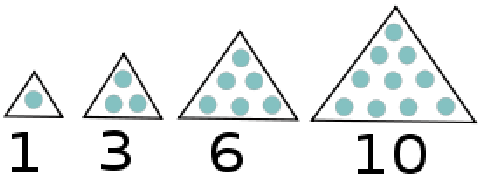
Carl Friedrich Gauss:

Blaise Pascal:

Maróthi György:

Raffael Bombelli:

A:



B:

1

1 1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

1 5 10 10 5 1

……………………………………………………

C: $\sqrt{13} = 3 + \cfrac{4}{6+\cfrac{4}{6+\cfrac{4}{6+\cdots}}}$

D: $1 + 2 + 3 + \cdots + 100 = \frac{(1+100)\cdot 100}{2}$

E: *tört alsó = nevező; tört fölső = számláló*

F: *Melyik az a természetes szám, amely osztva 3-mal, 4-gyel, 5-tel és 6-tal, maradékul rendre 1-et, 2-t, 3-at, 4-et ad?*

A helyesen válaszolók számát a *21. táblázat* tartalmazza

	Püthagorasz - A	Csang Can – F	Gauss – D	Pascal – B	Maróthi – E	Bombelli – C
helyes válaszok száma	7	3	9	13	8	4

21. *táblázat*

Az első feladatban elsősorban azoknál az embereknél születtek helyes válaszok, akiknek a nevét egyébként is ismerik a diákok. Pitagorasz nevéhez tétel, Pascaléhoz a háromszög és fizika órán tanultak, Gausshoz a diákok által Gauss-módszernek nevezett eljárás kapcsolódik. Ez utóbbi két alkalommal is előjött (E és G blokk). Maróthi esetében ez a magyarázat nem állná meg a helyét. Ő azonban több alkalommal került elő az adott csoportban. Először az első tanítási héten, mert a kísérletet végző tanár az általános iskolában tanult számolások átismétlésével kezdett, s rögtön az első órák egyikén előjött a számláló felsőnek és a nevező alsónak történő elnevezése. A tanév elkezdésekor – a segédanyagot már ismerve – a tanár megemlítette Maróthi nevét. Ugyanez később az algebrai törteknél is lejátszódott, csak akkor már azt is megemlített, hogy Maróthi mellett Vályi Gyula is próbálta ezt az elnevezést népszerűsíteni. Ezek az eredmények, s az, hogy a diákok beszámolója szerint a feladatokra emlékeztek, de a neveket nem jegyezték meg, megerősíti azt a korábbi alapelvünket, amely alapján a tanárnak mértékletesen kell a matematikatörténetet „adagolni", s elsősorban azokat a neveket említeni, amelyekkel a diákok egyébként is találkoznak. Ha ennél mélyebb matematikatörténeti ismeretek átadására vállalkoznánk, akkor az már plusz teherként, megjegyzendő tananyagként jelenne meg a diák számára, s nem elsősorban a matematika törzsanyag elsajátítását szolgálná.

2. Igaz vagy hamis?

a, A matematikában előfordulhat az, hogy egy már ismert fogalom újfajta jelölésének bevezetése hatalmas fejlődést eredményez, s egészen új lehetőségeket teremt.

b, A matematikában a fejlődést mindig egy újabb és újabb tétel felfedezése jelenti.

c, A betűk használata a matematikában sok esetben lényegesen le tudja egyszerűsíteni egy feladat megoldását.

d, A matematikai fogalmak jelölése az idők során nem változik.

e, Előfordulhat, hogy egymástól függetlenül több ember ugyanazt a matematikai fogalmat vezeti be, vagy ugyanazt a tételt fedezi fel.

f, A matematikában a jelölések megfelelő megválasztásának hatalmas szerepe lehet egy-egy feladat megoldásában.

	a - igaz	b – hamis	c – igaz	d – hamis	e - igaz	f – igaz
helyes válaszok száma	11	6	11	15	15	10

22. táblázat

A második feladat tanulsága az, hogy a mesés történetekből, anekdotákból megérthető kérdésekre kimagaslóan nagy arányban születtek helyes válaszok. A diákok érdeklődési körétől távolabb álló kérdésekben pedig egészen alacsony lett a helyes válaszok aránya.

Fontos megjegyezni azt is, hogy ezeknek a diákoknak, ha nem választanak fakultációt, akkor is a tanmenetek szerint összesen 414 (= 3·3·36 + 3·30) gimnáziumi matematikaórája lesz, aminek ez a téma kevesebb, mint 10%-át teszi ki. Valószínűleg, ha a többi témánál is hasonló mértékben kerülne elő matematikatörténet, akkor az érettségi megkezdésére már a valóságot közelítő kép alakulhatna ki bennük a matematika fejlődéséről. Ez pedig azt jelenti, hogy ilyen mennyiségű és arányú matematikatörténeti elem is elegendő a NAT által megfogalmazott célok teljesítéséhez.

Összességében, így a következőket láttuk igazoltnak.

- A kísérleti csoport matematikához való viszonya pozitívan változott, amire a diákok tanulmányi eredményéből és a csoportot tanító tanár véleményéből következtethetünk.
- Ugyanezeket figyelembe véve, a kontrollcsoport esetében ez nem mondható el.

- A változás annak ellenére így történt, hogy a bemeneti adatok (megismerkedési kérdőív és felvételi eredmények) alapján a megvalósult folyamat ellenkezőjére lehetett számítani.
- A kísérleti csoport diákjainak többsége érdeklődött a matematikatörténeti részek iránt, amire a következőkből következtethetünk. Volt, akiben felmerülő kérdést egy ilyen blokk válaszolt meg, s volt, akit sikerélményhez juttatott. A diákok a kérdőívek kitöltését komolyan vették, s mindig kérték, hogy a válaszokat beszéljék meg.

Ugyanakkor, hogy a pozitív attitűdbéli változáshoz hozzájárultak-e a matematikatörténeti elemek, nem gondoljuk ennyiből kimutathatónak, (illetve megcáfolhatónak sem), mivel

- az eredmények kialakulása és az attitűdbéli pozitív változás egy teljes tanévnyi munka eredménye. Márpedig nem tudhatjuk, hogy ebben mekkora szerepet játszott az első félév mintegy 80%-át kitevő órák egy részébe bevitt matematikatörténet.
- Bármennyire is közeli egymáshoz a két csoportot tanító tanár stílusa, tananyag-felépítése, alkalmazott módszerei, két különböző személyiség is okozhatta a tapasztalt attitűdváltozások közti különbséget.

9. Eredmények, további lehetőségek

A két egymás utáni tanévben történő kipróbálás és az elvégzett felmérések alapján kutatási kérdéseinkre a következő válaszok születtek.

K.1. Alkalmas-e a segédanyag arra, hogy gyakorló középiskolai matematikatanár használja?
A segédanyag alkalmas arra, hogy egy gyakorló matematikatanár segédeszköze legyen, s tanítási gyakorlatába beépüljön, mivel

- tananyaghoz kapcsolódó felépítési módja nem követel a matematikatörténetet használni kívánótól külön kutató munkát, hanem kész segítő anyagként áll a felhasználó rendelkezésére;
- tartalma alkalmazkodik az érettségi követelményéhez, amely emelt szinten adott témákhoz kapcsolódó matematikatörténeti elemek szóbeli vizsgába történő beépítését is kéri;
- a rövidebb blokkok lehetővé teszik az egy-két perces apróbb holtidők kitöltését, ahogyan erre a kipróbáló kolléga kitért, a hosszabb részek pedig (pl. számrendszerekkel kapcsolatos részek) akár az egész tanóra vázát is képesek megadni, ahogyan ez az első kipróbáláskor történt;
- mindkét kipróbálás megerősítette azt az összeállítói szándékot, hogy a blokkok beépítése ne okozzon időbeni lemaradást, ami válasz a Siu által felhozott egyes számú ellenérvre (Siu, 2007);
- nem követel a tanár személyiségétől idegen feldolgozási módot.

K.2. Stílusa, felépítése megkövetel-e egy adott feldolgozási módot, vagy meghagyja a tanár szabadságát, aki saját ízlésének megfelelően építheti be órájába?
A segédanyag felépítésé és stílusa meghagyja a tanár szabadságát, mivel

- a segédanyag evvel kapcsolatban semmilyen előírást nem tartalmaz;
- a két különböző kipróbáló tanár több blokkot más mélységben (pl. P blokk) épített be az órájába. Az is előfordult, hogy egyik tanár kihagyott egy olyan blokkot, amit a másik tanított (pl. H blokk).
- A segédanyag blokkjai mozgathatók az egyes tananyagok között. Ezt a segédanyag is tartalmazza. Másfelől a kipróbálás során is sor került arra, hogy egy tanulóban felmerülő

kérdésre adott válaszként a kipróbáló tanár nem az általa betervezett időpontban, hanem korábban ismertette egy adott blokk tartalmát (pl. második kipróbálás során a J blokk).

K.3. Segítenek-e ezen történeti elemek a diák számára egy adott fogalom mélyebb megértésében?

A segédanyag több olyan blokkot is tartalmaz, amely több diák számára segít a matematikai tartalom mélyebb megértésében, amit alátámaszt

- a 2018/19-es tanévben végzett első kísérlet;
- a 2019/20-as tanévben végzett második felmérés 3. feladatára (lánctört értékének kiszámolása) született megoldások;
- a második kipróbálás utáni tanári beszámoló azon része, amely szerint „*a diákok magabiztosabbak lettek az emeletes törtekkel való számolásban, és nem okoz nekik problémát a műveleti sorrend”*.

K.4. Segítik-e ezen történeti elemek a diák számára a matematikai tartalom hosszú távú memóriába történő rögzülését?

A segédanyag több olyan blokkot is tartalmaz, amely több diák számára segíti a matematikai tartalom hosszú távú memóriába történő rögzülését, amit alátámaszt

- a 2018/19-es tanévben végzett második, a számrendszerek közti átváltásos feladatot tartalmazó felmérés eredménye;
- a 2019/20-as tanében végzett második felmérés 2. feladatára (kéttagú összeg negyedik hatványának felbontása) született megoldások.

K.5. Képes-e a segédanyag hozzájárulni ahhoz, hogy a diákok matematika tantárgyhoz való hozzáállása pozitív irányba változzon?

A segédanyag történeti blokkjai használatának hatását a diákok matematikához való hozzáállásában nem látjuk egyértelműen kimutathatónak. Bár a két tanév során mindkét kísérleti csoportnál érzékelhető volt egyfajta pozitív attitűdbéli változás, a segédanyagnak erre történő egyértelmű hatását nem sikerült kimutatni.

Ezek alapján a kutatást a következő irányokban gondoljuk folytathatónak:

- a teljes középiskolai tananyaghoz kapcsolódó matematikatörténeti segédanyag összeállítása;
- több különböző iskola további tanárainak bevonása a segédanyag elkészült részeinek kipróbálásába;
- kísérleti tanítás végzése a teljes 9. évfolyamon egymás utáni tanévekben lehetőleg ugyanolyan típusú osztályban úgy, hogy a kísérleti és kontrollcsoport tanára szerepet cseréljen.

10. Irodalomjegyzék

Felhasznált irodalom

[1] Ambrus, A. (2004). *Bevezetés a matematika didaktikába.* Budapest, Eötvös Kiadó.

[2] Bachelard, G. (1934). *La formation de l'esprit scientifique.* Paris, Vrin. http://classiques.uqac.ca/classiques/bachelard_gaston/formation_esprit_scientifique/formation_esprit_scientifique.html

[3] Baumgart, J.K. (Eds.) (1969). *Historical Topics for the Mathematics Classroom.* National Council of Teachers of Mathematic.

[4] Barwell, M. (1913). The advisibility of including some instruction in the school course on the history of mathematics. *The matematical gazette, 7,* 72 – 79.

[5] Biblia (ford. Magyar Bibliatanács Ószövetségi és Újszövetségi Bibliafordító Szakbizottsága), Budapest, A Magyarországi Református Egyház Kálvin János Kiadója.

[6] Boros, G. (1996). *Bevezetés a valláspedagógiába.* Budapest, Károli Gáspár Református Egyetem.

[7] Csapó, B. (2000). A tantárgyakkal kapcsolatos attitűdök összefüggései. *Magyar pedagógia,* 3, 343 – 366.

http://www.edu.u-szeged.hu/~csapo/publ/attitud.pdf

[8] Csíkos, Cs. (2002). Hány éves a kapitány?. *Iskolakultúra,* 12, 10 – 16.

http://real.mtak.hu/60766/1/EPA00011_iskolakultura_2002_12_010-016.pdf

[9] Dienes, Z. (1973). *Építsük fel a matematikát*. Budapest, Gondolat Kiadó.

[10] Dugonics, A, (1784). *A tudákosságnak első könyve mellyben foglaltatik betö-vetés (algebra).* Pest.

[11] Fauvel, J. (1991). Using History in mathematics education. *For the Learning of Mathemtics,* vol 11, no 2, pp. 3 -6.

[12] Fauvel, J., & van Maanen J. (Eds.) (2000). *History in Mathematics Education: The ICMI Study.* Kluwer Academic Publishers.

[13] Filep, L. (1997). *A tudományok királynője (a matematika fejlődése).* Budapest, Typotex.

[14] Fredette, I. (2010). *L'histoire des mathématiques: un outil pour l'humanisation des mathématiques au secondaire*. (Université de Québec à Montréal, Kanada).

https://archipel.uqam.ca/3780/

[15] Fried, M. N. (2001). Can Mathematics Education and History of Mathematics Coexist? *Science & Education, 10,* pp. 391 – 408.

[16] Gazsó, I. (1972). *A mérés és a mértékegységek története, tanítása*. Budapest, Tankönyvkiadó.

[17] Guillemette, D. (2011). L'histoire dans l'enseignement des mathématiques: sur la méthodologie de recherche. *Petit x*, 86, pp. 5 - 26.
https://irem.univ-grenoble-alpes.fr/medias/fichier/86x1_1560843776060-pdf

[18] Hayes, B. (2006). *Gauss's Day of Reckoning.* American Scientist, 94. (3.), DOI: 10.1511.
https://www.americanscientist.org/article/gausss-day-of-reckoning

[19] Jankvist, U. T. (2009a) A categorisation of the „whys" and „hows" of using history in mathematics education. *Educational Studies in Mathematics. 71 (3),* pp. 235 – 261.

[20] Janvist, U. T. (2009b). On empirical research in the field of using history in mathematics education. *Revista Latinoamerciana de Investigación en Matemática Educativa*, 12 (1). pp. 67-101.

[21] Jónás, M. (1933). Az ideális mennyiségtani tankönyv. *Protestáns tanügyi szemle* VII. (1.), 31-32.
https://library.hungaricana.hu/hu/view/ProtestansTanugyiSzemle _1933/?pg=40&layout=s

[22] Kántor Sándorné Varga, T. (2013). Nagy Károly (Révkomárom, 1797 – Párizs, 1868), a reformkor tankönyvírója, a tehetséggondozás úttörője. *Polygon XXI.* (1-2.), 1 – 17.

[23] Kántor Sándorné Varga, T. (2017). Maróthi György és a matematika oktatása A 300 éve született Maróthi György emlékére. *Polygon XXIV.* (2.), 1 – 17.

[24] Kárpáti, J. (2017), *Ki a jó tanár? – ahogyan a diákok látják a pedagógust.* https://hogyanmondjamelneked.hu/elmenypedagogia/2017/09/12/ki-a-jo-tanar-ahogyan-a-diakok-latjak-a-pedagogust

[25] Keresztesi, M. (1935). *A magyar matematikai műnyelv története*. Debrecen, Harmathy Nyomdavállalat.

[26] Klein, S. (2005). Előszó a második magyar kiadáshoz. In. *A matematikatanulás pszichológiája* (pp. 7- 11.) (2nd ed.). Budapest, Edge 2000 Kiadó. (Eredeti könyv publikálva 1971-ben)

[27] Lefebvre, J. (1993). Histoire des mathématiques. *Bulletin AMQ, 33/3,* pp. 22 – 27.

[28] dr. Lévárdi, L., Sain, M. (1982). *Matematikatörténeti feladatok*. Budapest, Tankönyvkiadó.

[29] Ligeti, B. (1953). *A magyar matematika története a XVIII. század végéig.* Budapest, Tankönyvkiadó Vállalat.

[30] Maróthi, Gy. (1743). *Arithmetica vagy a számvetésnek mestersége*. Debrecen.

[31] Matos, Z. (2019). Square root in secondary school. *Teaching Mathematics and Computer Science, 17/1,* 59-72. DOI: 10.5485.

[32] McKenney, S., Reves, T. C. (2015). Educational Design research. In. J. Micahel Spector, M. David Merrill, Jan Elen, M. J. Bishop (Eds.) *Handbook of Research on Educational Communications Technology* (pp. 3 – 29.). https://www.researchgate.net/publication/265092587_Educational_Design_Research

[33] Munkácsy, K., (2002). A matematikatörténet szerepe a matematika tanításában Magyarországi tapasztalatok. *Iskolakultúra, 5, 89-94.* https://epa.oszk.hu/00000/00011/00060/pdf/

[34] Németh, T. (2014). *Kemenesaljai életrajzi lexikon.* Csönge, Kemenesaljai Regionális Ifjúsági Szervezet. http://cellbibl-digit.cellkabel.hu/kemenesaljai_eletrajzi_lexikon.pdf

[35] Niktscher, P. (2016). *Milyen a jó pedagógus? – elvárások, szerepek, kompetenciák az empirikus kutatások tükrében.* https://ofi.oh.gov.hu/publikacio/milyen-jo-pedagogus-elvarasok-szerepek-kompetenciak-az-empirikus-kutatasok-tukreben

[36] Pelle, B. (Ed.) (1982). *Így tanítjuk a matematikát (Vols . 1 – 2)* (2nd ed). Budapest, Tankönyvkiadó

[37] Poincarré, H. (1889). La logique et l'intuition dans la science mathématique et dans l'enseignement*. L'Enseignement Mathématique, 1, 157 – 162.* https://www.e-periodica.ch/cntmng?pid=ens-001:1899:1::57

[38] Pólya, Gy. (2000). *A gondolkodás iskolája.* Budapest, Akkord Kiadó Kft.

[39] Reeves, T.C. (2006). Design research from a technology perspective. In: Van den Akker, J. Gravemeijer, K, McKenney, S. & Nieveen, N. (Eds). (2006). *Educational design research.* London: Routledge, 52-66.

[40] Revuz, A. (1973). *Modern matematika –élő matematika.* Budapest, Gondolat Kiadó. (A fordítás az 5. kiadásból készült.)

[41] Ringler, A. (2010). *Régi ötletek új megoldások A Mozaik Kiadó gondozásában megjelent matematikai és fizikai tárgyú dolgozatok.* Szeged, Mozaik Kiadó.

[42] Róka, S. (2013). *Miért lettem matematikus visszaemlékezések.* Budapest, Typotex.

[43] Roy, P. (2006). *Intégration de l'histoire des mathématiques dans l'enseignement.* https://archipel.uqam.ca/3461/1/M9547.pdf

[44] Sain, M. (1978). *Matematikatörténeti ABC Adatok, tények, érdekességek a matematika középfokú tanításához és tanulásához* (3rh ed.). Budapest, Tankönyvkiadó.

[45] Sain, M. (1986). *Nincs királyi út!.* Budapest, Gondolat Könyvkiadó.

[46] Schoenfeld, A. (1985). *Mathematical Problem Solving.* New York, Academic Press INC.

[47] Siu, M. (2007). *No, I don't use history of mathematics in my class. Why?.* In F. Furinghetti, S. Kaijser, & C. Tzanakis, Proceedings HPM2004 &ESU4 (revised edition) (pp. 368 – 382). Uppsala, Uppsala Universitet.

[48] Skemp, R.R. (2005). *A matematikatanulás pszichológiája* (2nd ed.). Budapest, Edge 2000 Kiadó. (Eredeti könyv publikálva 1971-ben.)

[49] Smith, D. E. (1958). *History of Mathematics*. New York, Dover. (Eredeti könyv publikálva 1923-ban)

[50] Staar, Gy. (1990). *A megélt matematika.* Budapest, Gondolat Könyvkiadó.

[51] Szabó, Á. (1978). *A görög matematika kibontakozása*. Budapest, Magvető Kiadó

[52] Szabó, Á. (1983). Előszó. In Euklidész, *Elemek* (pp. 7 – 44). Budapest, Gondolat Könyvkiadó.

[53] Szendrei, János. (1993). Mi kutatás a matematikaoktatásban?. *Polygon III.* (1.), 11-18.

[54] Szendrei, Julianna. (2005). *Gondolod, hogy egyre megy? Dialógusok a matematikatanításról.* Budapest, Typotex.

[55] Szénássy, B. (1970). *A magyarországi matematika története (A legrégibb időktől a 20. század elejéig).* Budapest, Akadémiai Kiadó.

[56] Tarcsay, T. (2003). *Matematikatörténet tanítása a középiskolában I-III.* https://hirmagazin.sulinet.hu/hu/pedagogia/matematikatortenet-tanitasa-a-kozepiskolaban-i https://hirmagazin.sulinet.hu/hu/pedagogia/matematikatortenet-tanitasa-a-kozepiskolaban-ii https://hirmagazin.sulinet.hu/hu/pedagogia/matematikatortenet-tanitasa-a-kozepiskolaban-iii

[57] Tuza, T. (2011). Mit vár el a szülő?. *Módszertani közlemények, (51), 1, 7-10.).* http://acta.bibl.u-szeged.hu/29045/1/modszertani_051_001_007-010.pdf

[58] Usiskin, Z. (2012). What does it mean to understand some mathematics?, *12th International Congress on Mathematical Education.* https://www.mathunion.org

[59] Vekerdi, L. (1994). A tudománytörténet-írás történetéről. In Vekerdi L. (Ed.), *Tudás és tudomány* (pp. 5- 44). Budapest, Typotex.

[60] Vincze, Sz. (2003). A matematikai képesség összetevőinek vizsgálata és kapcsolata az intelligenciával. *Magyar Pedagógia,* 2, 229-261. http://www.magyarpedagogia.hu

[61] Zétényi, Á. (1998). A hatékony tanár. *Iskolakultúra, (8), 10, 68 – 74.* http://epa.oszk.hu/00000/00011/00020/pdf/iskolakultura_EPA00011_1998_10_068-074.pdf

[62] http://www.clab.edc.uoc.gr/HPM/

[63] https://termvil.hu/2020/06/10/felhivas-es-versenyszabalyzat/

[64] http://www.math.u-szeged.hu/mathweb/index.php/hu/leendo-hallgatoinknak/versenyek-koezepiskolasoknak/69-koezepiskolas-palyazatok/655-palyazat-koezepiskolasoknak-2019-aktualis-palyazati-felhivas

[65] https://www.youtube.com/watch?v=BpZ5b_ogJXM

[66] https://slideplayer.hu/slide/7946992/

[67] https://hirmagazin.sulinet.hu/hu/pedagogia/a-szamiras-fejlodese

[68] https://dtk.tankonyvtar.hu/xmlui/bitstream/handle/123456789/4687/gosztonyi_katalin_leirat.pdf?sequence=1

[69] https://babits.pte.hu/dokumentumfile/szulok.pdf

[70] https://hu.wikipedia.org/wiki/Matematika

[71] https://hu.wikipedia.org/wiki/H%C3%A1romsz%C3%B6gsz%C3%A1mok

[72] https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Extras/Bombelli_algebra/

[73] https://hu.wikipedia.org/wiki/Bakhs%C3%A1l%C3%AD_k%C3%A9zirat

[74] https://www.youtube.com/watch?v=s0bgZVc9siw

[75] http://konyvtar.ady-debr.sulinet.hu/konyvlap/tananyag/matek/magymagy.htm

[76] http://www.math.u-szeged.hu/~csakany/Sz%C3%B6vegek/redeietc.pdf

Tankönyvek, feladatgyűjtemények, tanári kézikönyvek

[77] Ábrahám, G., Kosztolányiné Nagy, E., Tóth, J., (2012). *Matematika 9.* (2nd ed.). Szeged, Maxim Könyvkiadó.

[78] Ábrahám, G., Kosztolányiné Nagy, E., Tóth, J., (2012). *Matematika 10.* (2nd ed.). Szeged, Maxim Könyvkiadó.

[79] Ábrahám, G., Kosztolányiné Nagy, E., Tóth, J., (2012). *Matematika 11.* (2nd ed.). Szeged, Maxim Könyvkiadó.

[80] Ábrahám, G., Kosztolányiné Nagy, E., Tóth, J., (2012). *Matematika 12.* (2nd ed.). Szeged, Maxim Könyvkiadó.

[81] Bajza, I., (2012). *Református iskolák országos matematikaversenyei 2007 – 2011*. Debrecen, Tiszántúli Református Egyházkerület.

[82] Bartha, G., Bogdán, Z., Csúri, J., dr. Dúró, L., dr. Gyapjas, F., dr. Kántor, S., dr. Pintér, L. (2007). *Matematika feladatgyűjtemény I.* (18th ed.). Budapest, Nemzeti Tankönyvkiadó.

[83] Bartha, G., Bogdán, Z., dr. Dúró, L., dr. Gyapjas, F., Hack, F., dr. Kántor, S., dr. Korányi, E. (1994). *Matematika feladatgyűjtemény II.* (7th ed.). Budapest, Nemzeti Tankönyvkiadó.

[84] Czapáry, E., Czapár, E., Csete, L., Hegyi, Gy., Iványiné Harró, Á., Morvai, É., Reiman, I. (2006). *Matematika Gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény III. Geometriai feladatok gyűjteménye*. Budapest, Nemzeti Tankönyvkiadó.

[85] Czapáry, E., dr. Soós, P. (1991). *Geometriai feladatok gyűjteménye II.* (21th ed.). Budapest, Tankönyvkiadó.

[86] Deledicq, A., Casiro, F. (1998). *Pythagore & Thalès*. Paris, ACL-Les Éditions du Kangourou.

[87] Gábor, E., Gyapjas, F., Hárspatakiné Dékány, V., Dr. Korányi, E., … Dr. Scharnitzky, V. (2003). *Összefoglaló feladatgyűjtemény matematikából* (22th ed.). Budapest, Nemzeti Tankönyvkiadó.

[88] Gerőcs, L., Orosz, Gy., Paróczay, J., Szászné Simon, J. (2006). *Matematika Gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény I.* Budapest, Nemzeti Tankönyvkiadó.

[89] Gerőcs, L., Orosz, Gy., Paróczay, J., Szászné Simon, J. (2006). *Matematika Gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény II.* Budapest, Nemzeti Tankönyvkiadó.

[90] Hajnal, I. (1993). *Matematika a speciális matematika I. osztálya számára* (3th ed.). Budapest, Nemzeti Tankönyvkiadó.

[91] Hajnal, I., Némethy, K. (1992). *Matematika I. (4th ed.).* Budapest, Tankönyvkiadó.
[92] Hajnal, I., Némethy, K. (1992). *Matematika II.* (3rd ed.) Budapest, Tankönyvkiadó.
[93] Hajnal, I., Némethy, K. (1992). *Matematika III.* (2nd ed.) Budapest, Tankönyvkiadó.
[94] Hajnal, I., Némethy, K. (1992). *Matematika IV.* Budapest, Tankönyvkiadó.
[95] Hajnal, I., dr. Nemetz, T., dr. Pintér, L. (1985). *Tanári kézikönyv a fakultatív „B" tantervű gimnáziumi matematika-tankönyvekhez.* Budapest, Tankönyvkiadó.
[96] Hajnal, I., dr. Nemetz, T., dr. Pintér, L., dr. Urbán, J. (2001). *Matematika (fakultatív B változat) IV. osztály* (12th ed.). Budapest, Nemzeti Tankönyvkiadó.
[97] Hortobágyi, I., Marosvári, P., Pálmay, L., Pósfai, P., Siposs, A., Vancsó, Ö. (2009). *Egységes érettségi feladatgyűjtemény Matematika I.* (7th ed.). Piliscsaba, Konsept-H Kiadó.
[98] Hortobágyi, I., Marosvári, P., Pálmay, L., Pósfai, P., Siposs, A., Vancsó, Ö. (2010). *Egységes érettségi feladatgyűjtemény Matematika II.* (8th ed.). Piliscsaba, Konsept-H Kiadó.
[99] Horvay, K., Reiman, I. (1990). *Geometriai feladatok gyűjteménye I.* (20th ed.). Budapest, Tankönyvkiadó.
[100] Jónás, M. (1943). *Mennyiségtan VIII. rész.* Debrecen, Debrecen sz. kir. város és a Tiszántúli református egyházkerület könyvnyomda-vállalata.
[101] Juhász, I., Orosz, Gy., Paróczay, J., Szászné dr. Simon, J. (2010). *Matematika 9., Az érthető matematika.* Budapest, Nemzeti Tankönyvkiadó.
[102] Kosztolányi, J., Kovács, I., Pintér, K., Urbán, J., Vincze, I., (2020). *Sokszínű matematika 9.* (18th ed.) Szeged, Mozaik Kiadó.
[103] Kosztolányi, J., Kovács, I., Pintér, K., Urbán, J., Vincze, I., (2020). *Sokszínű matematika 10.* (19th ed.) Szeged, Mozaik Kiadó.
[104] Kosztolányi, J., Kovács, I., Pintér, K., Urbán, J., Vincze, I., (2020). *Sokszínű matematika 11.* (18th ed.) Szeged, Mozaik Kiadó.
[105] Kosztolányi, J., Kovács, I., Pintér, K., Urbán, J., Vincze, I., (2020). *Sokszínű matematika 12.* (15th ed.) Szeged, Mozaik Kiadó.
[106] Kratofil, D. (1938). A geometria tanításának vezérkönyve I. rész. In. *A Gyakorló Polgári Iskola Könyvtára.* Szeged.

[107] https://www.mozaik.info.hu/Homepage/pdf/emelt_matek_eretts_temakorok_2019.pdf
[108] http://dload.oktatas.educatio.hu/erettsegi/feladatok2005osz/kozep/k_mat_05okt_fl.pdf
[109] http://dload.oktatas.educatio.hu/erettsegi/feladatok_2018osz_emelt/e_mat_18okt_fl.pdf

Jogszabályok

[110] 31/1994. (III. 12.) Korm. rendelet a Nemzeti alaptanterv Tantervi alapelveinek kiadásáról

[111] 40/2002. (V. 24.) OM rendelet az érettségi vizsga követelményeiről

[112] 243/2003. (XII. 17.) Korm. rendelet a Nemzeti alaptanterv kiadásáról, bevezetéséről és alkalmazásáról

[113] 202/2007. (VII. 31.) Korm. rendelet a Nemzeti alaptanterv kiadásáról, bevezetéséről és alkalmazásáról szóló 243/2003. (XII. 17.) Korm. rendelet módosításáról

[114] 110/2012. (VI. 4.) Korm. rendelet a Nemzeti alaptanterv kiadásáról, bevezetéséről és alkalmazásáról

[115] 51/2012. (XII. 21.) számú EMMI rendelet 3. melléklete

[116] 33/2015. (VI. 24.) EMMI rendelet 1. melléklete

[117] 5/2020. (I. 31.) Korm. rendelet A Nemzeti alaptanterv kiadásáról, bevezetéséről és alkalmazásáról szóló 110/2012. (VI. 4.) Korm. rendelet módosításáról

[118] https://www.oktatas.hu/kozneveles/kerettantervek/2020_nat/kerettanterv_gimn_9_12_evf

11. Összegzés

Kutatásunk a hazai és nemzetközi didaktikai kutatások egyik fejezetéhez, a matematikatörténet középiskolai matematikaoktatásba történő beépíthetőségének vizsgálatához kíván hozzájárulni. E kitűzött célt egy kifejezetten a magyarországi közoktatási viszonyokhoz illeszkedő matematikatörténeti segédanyag elkészítésével, egy fejezetének két alkalommal történő kipróbálásával, a tapasztalatok dokumentálásával és elemzésével kívántuk elérni.

A dolgozat **első fejezete** a témaválasztás hátterét, egy gyakorló középiskolai tanár mindennapjaival való kapcsolatát és aktualitását mutatja be.

A **2. fejezetben** a témához kapcsolódó nemzetközi kutatásokat és a kutatási módszerünket ismertetjük.

Az 1960-as évek végétől kezdődően a matematikatörténet matematikatanításba történő beépítésének lehetősége népszerű kutatási területté vált. Az 1990-es évekre felerősödött a *miért* és *hogyan* kérdések megválaszolására, illetve a válaszok kategorizálására való törekvés (Fried, 2001; Jankvist 2009a). Az ezredfordulót követő első évtizedben a matematikatörtént oktatásba történő beemelésével kapcsolatos korábbi kétségek nagyobb figyelmet kaptak. Több kutató utal a téma iránt lelkes tanárok nehézségeire (pl. Fried, 2001; Siu, 2007), az empirikus kutatások száma növelésének szükségességére (pl. Jankvist, 2009b), vagy az ilyen tanulmányok kutatás-módszertani nehézségeire (pl. Guillemette, 2011).

A 2000-es évek első két évtizedében e téma legfontosabb kutatási céljai között a matematikatörténet oktatásba történő beépítésének empirikus vizsgálata vetődött fel, amelyhez ez a disszertáció is igyekszik hozzájárulni. Célunk így egyfelől egy, a magyar oktatási rendszerhez készült matematikatörténeti segédanyag létrehozása, másfelől annak kipróbálása és hatékonyságának vizsgálata lett. Ez az oktatási segédanyagot létrehozó kutatás annak a kutatási módszernek a használatát implikálta, melyet az angol nyelvű szakirodalom *educational design researchnek* nevez. Ennek legfőbb jellemvonása az, hogy összetett oktatási problémák megoldásának ismétlődő fejlesztése mellett helyet kap a tudományos vizsgálat is (McKenney & Revees, 2015). Az elmúlt években végzett kutató és fejlesztő munkánk, valamint e disszertáció felépítése (Reeves, 2006) által a *design research* folyamataként megadott lépéseket követi, melyek a következők: a problémák beazonosítása és elemzése; egy prototípus megoldás kifejlesztése; a megoldás folyamatos tesztelése és finomítása; visszacsatolás a tervfejlesztési elvek megalkotásához, a megoldás gyakorlatban történő általánosítása.

A **3. fejezetben** a matematikatörténet magyar iskolai gyakorlatba történő beépülését tárgyaljuk az alábbi területekre fókuszálva:

- az oktatás tartalmi és kimeneti követelményét leíró jogszabályok,
- a középiskolai tankönyvek és feladatgyűjtemények,
- érettségi vizsga,
- középiskolai matematikaversenyek,
- a matematikatörténet középiskolai felhasználásának hazai úttörői.

A fejezet összefoglaló problémafelvetéssel zárul, miszerint bár valamennyi ismertetett területen a matematikatörténet jelentőségének növekedése figyelhető meg, a matematikatanárok több érvet is felhozhatnak arra, hogy miért nem használnak matematikatörténetet a tanórán. A (Siu, 2007) által leírt ellenérvek jelentős részére egy a középiskolai tananyag felépítési elvét követő (tehát például nem kronologikus felépítésű) matematikatörténeti segédanyag elkészítésével adtunk egy lehetséges választ.

A **4. fejezet** a matematikatörténeti segédanyaggal kapcsolatos gyakorlati kérdésekkel foglalkozik. Elsőként a matematikatörténetet tanórai beépíthetőségének két általunk megfogalmazott alapelvét ismertetjük. Ezek:

- a mértékletesség;
- a matematikatörténet a matematikatanítás eszköze legyen.

Ezen elveket figyelembe véve, a nemzetközi kutatások eredményeit is összegezve a *mit* és *miért* kérdésekre az alábbi válaszokat adjuk.

Mi építhető be matematikatörténetből a tanórába?

- A matematika nyelvezetének (szakkifejezések, jelölések) eredete.
- Egy feladat eredete, története.
- A matematika egy-egy ágának kialakulása.
- Matematikusokhoz kapcsolódó történetek, életrajzi adatok.

Miért építsünk be matematikatörténetet a tanórába?

- Mert segítheti a tananyag hosszú távú memóriába való rögzülését.
- Mert segítheti egy fogalom vagy tétel mélyebb megértését.
- Mert segíti a matematika más tudományokkal való összekapcsolását.
- Mert tanulást motiváló eszköz lehet.
- Mert segíti a matematika élő tudományként való megjelenítését.

- Mert hozzájárulhat a matematika nyelvezetének elfogadásához és megértéséhez.
- Mert általa tanterven kívüli matematikai elemeket is beemelhetünk a tanórába.
- Mert segíthet a lényeg kiszűrésére történő nevelésben.

Az **5. fejezet** az elkészült segédanyag egy részét – mint az általános elvek egy adott témakörben történő megjelenítését – a 2019/20-as tanévig a 9. évfolyamon tanított algebra és számelmélet témakörhöz készült fejezetet tartalmazza.

A segédanyag két részből áll. Egyfelől ezen a témakörön végighaladva több tananyaghoz a diákok szintjéhez illeszkedő matematikatörténeti elemeket ajánl a következő felépítést követve:

- Az óra címe.
- Az óra célja.
- Az óra menetének főbb pontjai.
- Az adott tananyagrészhez kapcsolódó matematikatörténeti blokk.
- A matematikatörténeti rész általában magyarul hozzáférhető forrása.
- Az adott blokk egy lehetséges beépítése a tanórába.
- A matematikatörténeti blokk funkciója az adott tanórán belül.
- Lehetséges kapcsolódási pontok, ahol felsoroljuk azokat az egyéb tananyagrészeket, ahol az adott blokk szintén tárgyalható.

Másfelől nem tananyaghoz, hanem tanórai szituációkhoz (pl. a tanár számolási hibát vét) kapcsolódó blokkokat is tartalmaz.

A **6. fejezet** a kutatási kéréseket és a hozzájuk kapcsolódó hipotéziseket írja le.

A segédanyag kipróbálásai során az alábbi kérdésekre kerestük a válaszokat.

K.1. Alkalmas-e a segédanyag arra, hogy egy középiskolai tanár különböző profilú osztályok matematikaóráján használja?

K.2. Meghagyja-e a segédanyag a tanár szabadságát abban, hogy saját ízlésének és habitusának megfelelően építsen be matematikatörténeti blokkokat a tanórába?

K.3. A diákok számára ezen történeti elemek segítik-e egy adott fogalom mélyebb megértését?

K.4. A diákok számára ezen történeti elemek segítik-e egy adott matematikai tartalom hosszú távú memóriába történő rögzülését?

K.5. Képes-e a segédanyag hozzájárulni ahhoz, hogy a diákok matematika tantárgyhoz való hozzáállása pozitív irányba változzon?

Ezen kutatási kérdésekhez rendre az alábbi hipotézisek kapcsolódtak.

H.1. Igen alkalmas. Ez leginkább felépítéséből adódik. Egyfelől a blokkok rövidsége lehetővé teszi a tanórába való beépülést annak veszélye nélkül, hogy a tanár a tananyaggal lemaradjon, másfelől pedig a felépülése nem kronologikus, hanem a tananyag logikáját követi.

H.2. A tanári szabadság nem sérül, az adott blokkok szabadon építhetők be. Ez a szabadság vonatkozik a beépülés helyére (a legtöbb blokk több tananyaghoz is kapcsolódhat), illetve a feldolgozási módszerre.

H.3. Igen, több diáknak segítséget nyújtanak.

H.4. Igen, több diáknak segítséget nyújtanak.

H.5. Igen, képes hozzájárulni ahhoz, hogy a diákok matematikához való hozzáállása pozitív irányba változzék.

A **7. fejezet** a segédanyag első (akciókutatás jelleggel végzett) kipróbálását és a kapcsolódó felmérések eredményét ismerteti.

Az első kipróbálásra a 2018/19-es tanévben, az SZTE Gyakorló Gimnázium és Általános Iskola kilencedik évfolyama általános tantervű biológia-fizika-kémia orientációs osztályának egyik csoportjában került sor, ahol a diákok a matematikát az első két évben, névsor szerinti csoportbontásban két külön tanárnál tanulták. Az osztály egyik fele a segédanyagot kipróbáló kísérleti, az osztály másik fele pedig a kontrollcsoport szerepét töltötte be.

A segédanyagot kipróbáló tanár (a szerző) tapasztalatai kedvezőek voltak, s tényszerűen lejegyzésre kerültek. Ezek a K.1. K.2. és K.5. kutatási kérdés esetén is a kutatási hipotézist erősítették meg.

A történetiség és a tananyag mélyebb megértésének kapcsolatát a K.3. kutatási kérdésre a választ a számrendszerek témakörrel kapcsolatos órán nem látott feladatok megoldatásával kerestük. A két bevezető feladat esetében szignifikáns eltérés nem, azonban két feladat esetében jelentős különbség mutatkozott a két csoport megoldásai között. A kísérleti csoport tagjai egyértelműen sikeresebben tudták megoldani ezeket a feladatokat. Ennek oka abban rejlik, hogy a helyiértékes írásmód fogalmát jobban fel tudták idézni, s jobban tudták alkalmazni.

A történetiség és a hosszú távú memóriába való rögzülés kapcsolatát (azaz a K. 4. kérdést) vizsgálandó, mindkét csoport tagjait egy matematika óra elején váratlanul arra kértük, hogy oldjanak meg két hónappal korábbi tanórákon látott feladatokat. Mindkét feladat esetében a kísérleti csoport tagjai sokkal nagyobb arányban adtak helyes választ, mint a kontrollcsoport tagjai. Az eredmények közti különbséget avval magyarázhatjuk, hogy a kontrollcsoport tagjai a számrendszerek tanulásakor a hangsúlyt nem a helyiérték fogalmára helyezték, hanem egy egyszerű algoritmus elsajátítására, amit egy rövid ideig még tökéletesen tudtak reprodukálni, de aztán egy-két hónap alatt szinte teljesen elfelejtettek. Velük szemben a kísérleti csoport diákjai jóval mélyebben sajátították el a helyiértékes írásmód fogalmát, mivel annak logikáját is sikerült megérteni. Ez hozzásegítette őket ahhoz, hogy hosszabb távon is emlékezzenek egy korábban látott feladat megoldási algoritmusára, ami azt mutatja, hogy a matematikatörténet segítheti a tananyag hosszú távú memóriába történő rögzítését.

A **8. fejezet** a segédanyag egy újabb, más tanárral történő kipróbálását és a kapcsolódó felmérések eredményét ismerteti.

A 2019/20-as tanévben az apróbb korrigáláson átesett segédanyagot ugyanazon iskolában egy magyar-történelem orientációjú osztály névsor szerint megbontott egyik felében próbáltuk ki, így az osztály két csoportjából az egyik a kísérleti, míg másik a kontrollcsoport szerepét töltötte be. A kísérleti csoport tanára a tanév előtt megkapta és áttanulmányozta a segédanyagot, majd részletesen megbeszéltük vele annak koncepcióját.

A kísérlet dokumentálásaként minden óráról hangfelvétel készült. A tanórák jelentős részén, főleg a matematikatörténeti blokkok megjelenésekor személyes megfigyelőként vettünk részt az órán, feljegyzéseket készítve figyeltük a diákok reakcióit és a kolléga munkáját. Az órák után mindig hosszabb-rövidebb megbeszélést tartottunk, amelyekről feljegyzések készültek. Az így szerzett tapasztalatok valamint azoknak a korábbi kipróbálás kapcsán látottakkal való összevetése alapján a K.1. és K.2. kutatási kérdésekre egyértelmű igen választ fogalmazhattunk meg.

Közel két hónappal a témazáró dolgozat után a két csoporttal váratlanul egy közös felmérést írattunk, melynek célja annak megvizsgálása volt, hogy a K.4. kérdéssel összhangban matematikatörténet segítette-e a hosszú távú memóriába történő beépülést. Ehhez mindkét csoport által korábbi tanórákon megoldott feladatokat válogattunk olyan témákból, amelyeknél a kísérleti csoport tanóráin szó esett matematikatörténeti vonatkozásokról is. A feladatok megoldásának elemzése megerősítette azt a hipotézisünket, hogy a matematikatörténettel támogatott oktatás segítette a vonatkozó tananyagrészek hosszú távú emlékezetbe történő beépülését.

K. 5. kérdésre a szaktanárok véleménye, a félévi és év végi osztályzatok összevetése valamint a tanórákon külső szemlélőként szerzett tapasztalatok alapján próbáltunk válaszolni. Egyértelműen megállapítható volt, hogy a kísérleti csoport tanulóinak matematikához való hozzáállása pozitív irányban változott. Azonban ennek az órákon látott matematikatörténeti blokkokkal való kapcsolatát nem látjuk kimutathatónak az alábbiak miatt.

- Egy, a kísérleti csoporttal a témazáró dolgozat utáni matematikatörténeti kérdésekből álló kérdőív kitöltetésekor, a helyes válaszok aránya nem volt „kiugróan magas”.
- Az eredmények kialakulása és az attitűdbéli pozitív változás egy teljes tanévnyi munka eredménye. Márpedig nem tudhatjuk, hogy ebben mekkora szerepet játszott az első félév mintegy 80%-át kitevő órák egy részébe bevitt matematikatörténet.
- Bármennyire is közeli egymáshoz a két csoportot tanító tanár stílusa, tananyag-felépítése, alkalmazott módszerei, két különböző személyiség is okozhatta a tapasztalt attitűdváltozások közti különbséget.

A **9. fejezet** a kutatási kérdésekre adott válaszokat, azok indoklását valamint kutatásunk folytatásának további lehetséges irányait tartalmazza.

A két kipróbálás és a felmérések után az első négy kutatási kérdésre a kutatási hipotézisek elfogadásával tudunk felelni. K. 5. esetében elmondhatjuk, hogy bár a két tanév során mindkét kísérleti csoportnál érzékelhető volt egyfajta pozitív attitűdbéli változás, a segédanyagnak erre történő egyértelmű hatását nem sikerült kimutatni.

Ezek alapján a kutatást a következő irányokban gondoljuk folytathatónak:

- a teljes középiskolai tananyaghoz kapcsolódó matematikatörténeti segédanyag összeállítása;
- több különböző iskola további tanárainak bevonása a segédanyag elkészült részeinek kipróbálásába;
- kísérleti tanítás végzése a teljes 9. évfolyamon egymás utáni tanévekben lehetőleg ugyanolyan típusú osztályban úgy, hogy a kísérleti és kontrollcsoport tanára szerepet cseréljen.

12. Summary

Our research aims to contribute to one of the chapters of domestic and international didactic research, the study of the integration of the history of mathematics into secondary school mathematics education. We wanted to achieve this goal by preparing a mathematics history resource material specifically for Hungarian public education, testing one of its chapters on two occasions, and documenting and analysing the results.

The **first chapter** of the thesis presents the background of the topic choice, and its relationship and actuality with the everyday work of a practicing secondary school teacher.

Chapter 2 describes international research related to the topic and our research method.

Beginning in the late 1960s, the possibility of integrating the history of mathematics into mathematics teaching became a popular field of research. By the 1990s, efforts to answer the questions of why and how and to categorise the answers intensified (Fried, 2001; Jankvist 2009a). In the first decade of the new millennium, previous doubts about the integration of the history of mathematics in the education received more attention. Several researchers point to the difficulties of teachers enthusiastic about the topic (e.g. Fried, 2001; Siu, 2007), the need to increase the number of empirical researches (e.g. Jankvist, 2009b), and the research-methodological difficulties of such studies (e.g. Guillemette, 2011).

One of the most important research goals of this topic in the first two decades of the 2000s was the empirical study of the integration of the history of mathematics into education, to which this dissertation also seeks to contribute. Thus, our aims were, on the one hand, to create a mathematical history resource material for the Hungarian education system, and, on the other hand, to test it and examine its efficiency. This research which created the teaching resource material implied the use of a research method called *educational design research* in the English language professional literature. The main feature of this is that, in addition to the repeated development of solutions to complex educational problems, scientific research is also included (McKenney & Revees, 2015). Our research and development work in recent years and the structure of this dissertation (Reeves, 2006) follow the steps given as a process of *design research*, which are the following: identification and analysis of problems; developing a prototype solution; continuous testing and refinement of the solution; feedback to the creation of design development principles, generalisation of the solution in practice.

In **Chapter 3**, we discuss the integration of the history of mathematics into Hungarian school practices, focusing on the following areas:

- legislation describing the content and output requirements of education,
- secondary school textbooks and assignments,
- secondary school graduation examination,
- secondary school mathematics competitions,
- Hungarian pioneers in the use of the history of mathematics in secondary schools.

The chapter is concluded with a summary of the problem that, although the importance of the history of mathematics has increased in all the areas described, mathematics teachers can make several arguments as to why they do not teach the history of mathematics in their lessons. For a significant number of the counter-arguments described (Siu, 2007), we provided a possible answer by preparing a history of mathematics resource material that follows the structural principles of the secondary school curriculum (i.e., it is not chronologically structured).

Chapter 4 discusses practical issues related to the history of mathematics resource material. First, we describe the two principles we have formulated for the integration of the history of mathematics into the classroom. These are:

- moderation;
- make the history of mathematics a tool for teaching mathematics.

Taking these principles into consideration and summarising the results of international research on the questions of *what* and *why*, we give the following answers.

What can be integrated from the history of mathematics into the lesson?

- The origins of the language of mathematics (technical terms, symbols).
- The origin and history of a problem.
- The formation of different branches of mathematics.
- Stories and biographical data of mathematicians.

Why incorporate a history of mathematics into the lesson?

- Because it can help to record the curriculum in long-term memory.
- Because it can help to gain a deeper understanding of a concept or thesis.
- Because it helps to connect mathematics with other sciences.
- Because it can be a motivating tool for learning.
- Because it helps to portray mathematics as a living science.
- Because it can contribute to the acceptance and understanding of the language of mathematics.
- Because it allows us to include mathematical elements outside the curriculum in the lesson.
- Because it can help to educate for filtering out the point.

Chapter 5 contains a part of the completed resource material – as a presentation of the general principles in a given topic – a chapter on the topic of algebra and number theory taught in the 9^{th} grade until the 2019/2020 academic year.

The resource material consists of two parts. On the one hand, going through the topics, it recommends elements of mathematical history that fit the level of the students for several curricula, following the structure below:

- The title of the lesson.
- The purpose of the lesson.
- The main points of the lesson.
- A block of mathematics history related to the given part of the curriculum.
- The source of the history of mathematics usually available in Hungarian.
- One possible integration of the given block into the lesson.
- The function of the mathematics history block within the given lesson.
- Possible connection points where we list the other parts of the curriculum where that block can also be discussed.

On the other hand, it also contains blocks related not to the curriculum but to classroom situations (e.g., the teacher making a calculation error).

Chapter 6 describes the research requests and the hypotheses associated with them.

During the testing of the resource material, we sought answers to the following questions.

K.1. Is the resource material suitable for use by a secondary school teacher in mathematics classes for groups of different profiles?

K.2. Does the resource material allow the teacher to integrate mathematical history blocks into the lesson according to their own taste and habits?

K.3. Regarding the students, do these historical elements help them gain a deeper understanding of a particular concept?

K.4. Regarding the students, do these historical elements help to retain a particular mathematical content in the long-term memory?

K.5. Is the resource material able to help change students' attitudes towards mathematics in a positive direction?

The following hypotheses were related to these research questions, respectively.

H.1. Yes, it is suitable. This is mostly due to its structure. On the one hand, the brevity of the blocks allows integration into the lesson without the risk of the teacher falling behind with the curriculum, and on the other hand, its structure is not chronological but follows the logic of the curriculum.

H.2. The teacher's freedom is not hindered, the given blocks can be freely incorporated. This freedom applies to the place of incorporation (most blocks can be linked to more than one part of the curriculum) and the method of processing.

H.3. Yes, they help more students.

H.4. Yes, they help more students.

H.5. Yes, it can contribute to a positive change in students' attitudes towards mathematics.

Chapter 7 describes the first trial (performed as an action research) of the resource material and the results of the related tests.

The first test took place in the 2018/19 academic year, in a group of the general curriculum biology-physics-chemistry orientation class of the ninth grade of SZTE Practicing Secondary and Primary School, where students were divided by alphabetical order for mathematics lessons and taught by two different teachers in the first two years. One half of the group was the experimental one testing the resource material and the other half played the role of the control group.

The experience of the teacher testing the resource material (the author) had positive results and these were factually recorded. These confirmed research hypotheses in the case of K.1., K.2., and K.5. research questions.

We sought the answer to the research question: the relationship between historicity and a deeper understanding of the curriculum described in K.3. by solving problems not seen in the lessons related to the topic of number systems. There was no significant difference for the two introductory problems, but for the next two problems there was a significant difference between the solutions of the two groups. The members of the experimental group were clearly able to solve these tasks more successfully. The reason for this is that they were better able to recall and apply the concept of place values.

To examine the relationship between historicity and long-term memory retention (i.e., question K. 4.), members of both groups were unexpectedly asked at the beginning of a mathematics lesson to solve problems they had seen in lessons two months earlier. For both problems, members of the experimental group gave a much higher proportion of correct answers than the members of the control group. The difference between the results can be explained by the fact that the members of the control group did not focus on the concept of place value when learning number systems, but on mastering a simple algorithm that they could perfectly reproduce for a short time but then almost completely forgot. In contrast, the students of the experimental group mastered the concept of space value much more deeply, as its logic was also understood. This helped them to remember the solution algorithm of a previously seen problem in the longer term, which shows that the history of mathematics can help to record the curriculum in long-term memory.

Chapter 8 describes the trial of the resource material with another teacher and the results of related tests.

In the 2019/20 school year, the resource material that underwent minor modifications was tested in one half of a Hungarian-history oriented class in the same school, so that one of the two groups in the class served as the experimental group and the other as the control group. The teacher of the experimental group received and studied the resource material before the school year, and then we discussed its concepts in detail with them.

An audio recording of each lesson was made to document the experiment. For a significant portion of the lessons, especially when the history of mathematics blocks were being taught, we attended the class as a personal observer, observing the students' reactions and the work of the colleague by taking notes. After the lessons, we always had a longer or shorter discussion, which was recorded. Based on the experience gained in this way and their comparison with what was seen in connection with the previous trial, we were able to formulate clearly yes answers to research questions K.1. and K.2.

Nearly two months after the topic-ending test, we had both groups write a surprise test, the aim of which was to examine whether mathematics history in accordance with question K.4. helped to integrate it into long-term memory. To this end, we selected problems solved by both groups in previous lessons from topics where mathematical history aspects were also discussed in the lessons of the experimental group. The analysis of their solutions for the problems confirmed our hypothesis that education supported by the history of mathematics helped to integrate the relevant parts of the curriculum into long-term memory.

We tried to answer question K.5. on the basis of the opinions of the teachers, the comparison of the semester and year-end grades and the experience gained as an external observer in the lessons. It was clear that the attitudes of the students in the experimental group towards mathematics changed in a positive direction. However, our relationship to the mathematical history blocks seen in the classes is not seen to be detectable for the following reasons.

- When completing a questionnaire with the experimental group on mathematical history questions after the final dissertation, the proportion of correct answers was not "remarkably high".
- The development of results and a positive change in attitude are the result of a full school year of work. However, we do not know to what extent the history of mathematics, which accounted for about 80% of the hours in the first semester, played a role in this.

- No matter how close the style, curriculum structure and methods used of the teacher teaching the two groups, two different personalities may have caused the difference between the attitudinal changes experienced.

Chapter 9 contains the answers to the research questions, their rationale, and other possible directions for continuing our research.

After the two trials and tests, we can answer the first four research questions by accepting the research hypotheses. In the case of question K. 5., we can say that although there was a kind of positive change in attitude in both experimental groups during the two school years, the clear effect of the resource material on this could not be demonstrated.

Based on these, we think that the research can be continued in the following directions:

- compilation of the mathematics history resource material for the full secondary school curriculum;
- the involvement of additional teachers from several different schools in the testing of the completed resource material;
- conducting experimental teaching throughout the 9th grade in consecutive school years, preferably in the same type of class, with the teachers of the experimental and control group changing roles.

13. Mellékletek

1-es számú melléklet

(Siu, 2007-es cikkében közölt felmérésének eredménye)

A megbetűzött oszlopokban az adott választ adók százalékos megoszlása van feltüntetve.

A: Egyáltalán nem ért vele egyet.

B: Nem ért vele egyet.

C: Nincs véleménye.

D: Egyetért.

E: Teljesen egyetért.

	A	B	C	D	E
1. *A tanórán erre nincs idő.*	3,95	20,07	9,04	49,51	17,43
2. *Ez nem matematika.*	45,06	42,43	7,57	3,13	1,81
3. *Hogyan tegyek fel erre vonatkozó kérdést dolgozatban?*	9,54	27,80	29,27	29,11	4,28
4. *Ez nem javítja a tanulók osztályzatát.*	5,60	35,36	29,11	25,00	4,93
5. *A tanulók nem szeretik.*	9,87	46,38	27,80	13,65	2,30
6. *A diákok ezt történelemnek tekintik, s utálják a történelem órákat.*	8,88	44,24	28,46	17,11	1,31
7. *A diákok ugyanolyan unalmasnak találják, mint magát a matematika tantárgyat.*	7,57	42,44	24,34	24,01	1,64
8. *A tanulóknak nincs elegendő általános kulturális ismerete ennek értékelésére.*	5,59	28,95	19,24	39,31	6,91
9. *A matematikában a haladás a nehéz problémák rutinszerűvé tétele, akkor minek fáradozzon a visszatekintéssel?*	18,91	49,51	21,55	8,88	1,15
10. *Hiányzik hozzá a szükséges forrásanyag.*	4,61	20,73	10,19	45,56	18,91
11. *Hiányzik hozzá a tanár képzettsége.*	1,65	6,25	9,21	55,26	27,63
12. *Nem vagyok hivatásos matematikatörténész. Hogyan lehetnék biztos az elmondottak pontosságában?*	4,11	31,25	24,67	33.22	6,75
13. *Az ahogy történt sokszor kanyargós volt, s inkább összezavarhatja a diákot, mintsem segítené a megértésben.*	4,44	38,65	28,78	24,51	3,62
14. *Vajon valóban segít-e eredeti szövegeket olvasni, ami egy nagyon nehéz feladat?*	1,97	17,76	32,08	41,94	6,25
15. *Nem segíti-e a kulturális sovinizmust és nacionalizmust?*	10,85	32,56	47,54	7,41	1,64

2-es számú melléklet

Részlet a 2019/20-as tanévben végzett kísérlet kísérleti és kontrollcsoport haladási naplójából, a beépített matematikatörténeti blokkok feltűntetésével.

Kísérleti csoport

óraszám	dátum	óra címe **(beépített matematikatörténeti blokk)**
13.	2019-10-01	Számolás törtekkel **(Q)**
14.	2019-10-02	Betűs kifejezések a matematikában **(A, B)**
15.	2019-10-03	Gyakorlás
16.	2019-10-08	Pozitív egész kitevős hatvány **(D)**
17.	2019-10-09	Gyakorlás
18.	2019-10-10	Egész kitevős hatvány
19.	2019-10-15	Egész kitevős hatvány
20.	2019-10-16	Számok normálalakja **(E)**
21.	2019-10-17	Polinomok
22.	2019-10-22	Két tag összegének, illetve különbségének négyzete
23.	2019-10-24	Két tag összegének, illetve különbségének négyzete
24.	2019-11-05	Ugyanazon két tag összegének és különbségének szorzata
25.	2019-11-06	Két tag összegének, illetve különbségének a köbe
26.	2019-11-07	Gyakorlás **(F)**
27.	2019-11-12	Gyakorlás
28.	2019-11-13	Polinomok szorzattá alakítása kiemeléssel
29.	2019-11-14	gyakorlás
30.	2019-11-19	Polinomok szorzattá alakítása kiemeléssel
31.	2019-11-20	Szorzattá alakítás azonosságok alkalmazásával
32.	2019-11-21	Szorzattá alakítás azonosságok alkalmazásával
33.	2019-11-26	Teljes négyzetté alakítás
34.	2019-11-27	Gyakorlás
35.	2019-11-28	Gyakorlás **(G)**
36.	2019-12-03	Algebrai törtek egyszerűsítése, helyettesítési értéke
37.	2019-12-04	Műveletek algebrai törtekkel
38.	2019-12-05	Műveletek algebrai törtekkel **(J)**
39.	2019-12-10	Oszthatóság, oszthatósági szabályok
40.	2019-12-11	Oszthatóság, oszthatósági szabályok **(L)**
41.	2019-12-12	Prímszám, összetett szám, a számelmélet alaptétele **(K)**
42.	2019-12-17	Legnagyobb közös osztó, legkisebb közös többszörös
43.	2019-12-18	Számrendszerek **(M, P)**
44.	2019-12-19	Összefoglalás
45.	2020-01-07	Összefoglalás
46.	2020-01-08	Témazáró dolgozat

Kontrollcsoport

óraszám	dátum	óra címe
13.	2019-10-02	Betűs kifejezések a matematikában
14.	2019-10-03	Pozitív egész kitevős hatvány
15.	2019-10-07	Egséz kitevős hatvány
16.	2019-10-09	Egész kitevős hatvány
17.	2019-10-10	Gyakorlás
18.	2019-10-14	Számok normálalakja
19.	2019-10-16	Dolgozatírás
20.	2019-10-17	Feladatok
21.	2019-10-21	Gyakorlás
22.	2019-10-24	Polinomok
23.	2019-11-04	Nevezetes szorzatok
24.	2019-11-06	Ugyanazon két tag összegének és különbségének szorzata
25.	2019-11-07	Két tag összegének, illetve különbségének négyzete
26.	2019-11-11	Két tag összegének, illetve különbségének a köbe
27.	2019-11-13	Szorzattá alakítás kiemeléssel
28.	2019-11-14	Szorzattá alakítás kiemeléssel
29.	2019-11-18	Szorzattá alakítás azonosságok alkalmazásával
30.	2019-11-20	Teljes négyzetté alakítás
31.	2019-11-21	Rendszerezés
32.	2019-11-25	Algebrai törtek egyszerűsítése, helyettesítési értéke
33.	2019-11-27	Műveletek algebrai törtekkel
34.	2019-11-28	Műveletek algebrai törtekkel
35.	2019-12-02	Feladatok
36.	2019-12-04	Feladatok
37.	2019-12-05	Röpdolgozat
38.	2019-12-09	Feladatok
39.	2019-12-11	Az oszthatóság fogalma
40.	2019-12-12	Oszthatósági szabályok
41.	2019-12-16	Prímszám, összetett szám
42.	2019-12-18	Legnagyobb közös osztó, legkisebb közös többszörös
43.	2019-12-19	Számrendszerek
44.	2020-01-06	Négyzetgyökvonás
45.	2020-01-08	A négyzetgyökvonás azonosságai
46.	2020-01-09	Összefoglalás
47.	2020-01-13	Gyakorló feladatok
48.	2020-01-15	Témazáró dolgozat