

Áramlástan

Elektronikus jegyzet

<http://infosrv.tech.klte.hu/~pokoradi>

<http://pokoradilaszo.tk>

Készítette: dr. Pokorádi László, főiskolai tanár

Debrecen, 2002

1. Aerodinamikai alapfogalmak

Az áramlástan a folyadéknak vagy gáznak csövekben, csatornáknak vagy különféle testek körül szabad térben kialakuló áramlásával foglalkozó tudomány. Az áramlástanban a mozgó közeg termodinamikai állapotjellemzői, a nyomás, a sűrűség, a hőmérséklet, az entalpia, az entrópia, illetve a belső energiának az áramlásra gyakorolt hatását és az áramlásba helyezett test és az azt körüláramló közeg kölcsönhatását vizsgálják. Az összenyomhatatlan áramlásokkal általában a hidrodinamika, míg az összenyomhatóval az aerodinamika, illetve a gázdinamika foglalkozik.

1.1. Az ideális közeg

Az *ideális közeg* az aerodinamikában különleges jelentőséggel bír, a valóságban nem létező cseppfolyós vagy légnemű anyag, amely az alábbi tulajdonságokkal bír:

- nem molekuláris szerkezetű, a teret folyamatosan kitöltő, vagy más kifejezéssel: *homogén kontinuum*;
- összenyomhatatlan, azaz *inkompressibilis*;
- súrlódásmentes, azaz a közeg áramlásakor sem az áramlásba helyezett test fala és a folyadék, sem a különböző sebességű folyadékrétegek között nem ébrednek csúsztató feszültségek;
- felületi (adhéziós vagy kohéziós) feszültsége nincs.

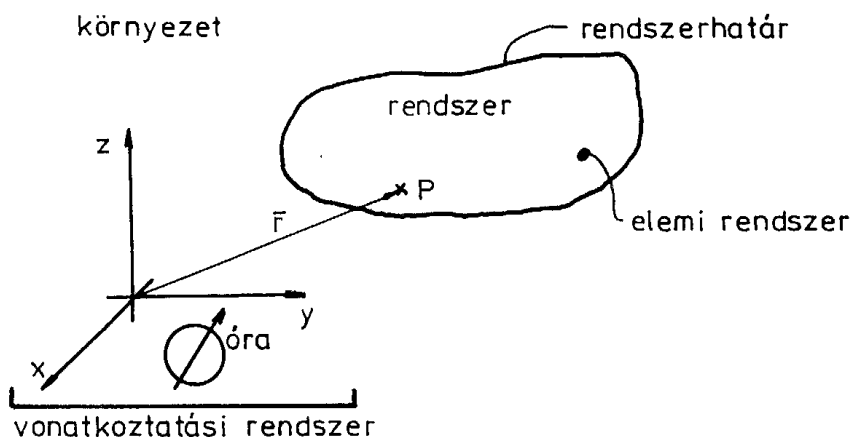
Az ideális közeg bevezetésére az áramlástan törvényszerűségeinek egyszerűbb vizsgálat és alkalmazása érdekében van szükség. A valóságos közeg — természetesen — molekuláris szerkezetű, összenyomható, súrlódásos és felületi feszültséggel rendelkezik.

Az itt leírtakhoz még egy rövid megjegyzést kell tennünk. A későbbiekben felváltva alkalmazzuk a közeg, a folyadék és a gáz kifejezéseket. Ahol ezt külön nem hangsúlyozzuk (például az aero- és hidrosztatikánál), ott a három fogalom ugyanazt az áramló cseppfolyós vagy légnemű anyagot jelenti. Természetesen, csak ott, ahol nincs jelentősége az áramló közeg halmazállapotának.

1.2. Rendszer és környezet

Rendszeren az anyagi világ vizsgálataink tárgyát képező részét értjük. Az anyagi világ azon részét, amely nem tartozik a rendszerhez, környezetnek nevezzük. A rendszer lényeges tartozéka a rendszerhatár, amely a rendszert teljesen körülzárja és elválasztja azt a környezetétől (1.1. ábra).

A rendszernek ez a fogalmi meghatározása nagyon általánosnak tűnik. Például, ha áramlástanilag vagy hőtánilag vizsgálunk egy gázturbinás hajtóművet, akkor rendszeren magát a hajtóművet és belső tereit kell érteni, a környezeten viszont a világ többi részét. A rendszerhatárt pedig a hajtómű külső burkolata, valamint a beömlő csatorna és a gázelvező cső homlokfelületei alkotják. Természetesen, a rendszer kiválasztása történhet úgy is, hogy a rendszerhatár akár egy képzeletbeli zárt felület.



1.1. ábra Rendszer és környezet

A rendszer és a környezet közötti kölcsönhatás megnyilvánulhat mechanikai, termikus vagy anyagi formában.

Szigetelt rendszer, ha az a környezetével semminemű energetikai vagy materiális kölcsönhatás nem lép.

Zárt rendszerről vagy anyag térfogatról akkor beszélünk, ha az a környezetével nem állhat anyagi

kölcsönhatásban.

Nyitott a **rendszer**, ha lehetséges, hogy környezetével materiális kölcsönhatás alakuljon ki. Ekkor a rendszerbe léphet be, vagy a rendszerből léphet ki anyag.

Ha a környezet és a rendszer között termikus energetikai kölcsönhatás, azaz hőcsere nem léphet fel, akkor **adiabaticus rendszer**ről, vagy **hőszigetelt rendszer**ről beszélünk.

Vizsgálataink **vonatkozási rendszere** a folyamatok színterét kijelölő derékszögű (vagy polár) koordináta-rendszer és az időbeli lefolyásuknak léptéket adó időskála együttese.

A vonatkoztatási rendszerhez, azaz a megfigyelőhöz képest mozdulatlan, tetszőleges, de állandó alakú és kiterjedésű nyitott rendszert **ellenőrző térfogat**nak nevezzük. Az ellenőrző térfogat határa az **ellenőrző felület**.

Az anyagi térfogat és az ellenőrző térfogat között az alábbi két lényeges különbség található:

- az anyagi térfogat és határa változtathatja az alakját, kiterjedését és az adott vonatkoztatási rendszerhez viszonyított térbeli helyzetét, ezzel szemben az ellenőrző térfogat határa, az az ellenőrző felület ezt nem teheti meg;
- az ellenőrző térfogat tömege általában változatlan és/vagy cserélődhet — mivel az anyagáram az ellenőrző felületen átléphet —, ezzel szemben az anyagi térfogaté (zárt rendszeré) soha sem.

Elemi rendszernek olyan — anyaggal folytonosan kitöltött (materiális) — térfogatot nevezünk, amely elég kicsi ahhoz, hogy belsejében a fizikai jellemzők térbeli eloszlását minden esetben egyenletesnek tekinthessük, de elegendően nagyszámú korpuszkulát (például molekulát vagy atomot) tartalmaz ahhoz, hogy az általuk meghatározott fizikai jellemzőket statisztikai átlagként foghassuk fel.

1.4. Az állapot és az állapotjelzők

Fizikai állapoton az anyagi rendszer sajátosságainak — fizikai jellemzőinek — összességét értjük. Két elemi rendszer fizikai állapota azonos, ha a megfelelő **fizikai jellemző**ik értéke az adott időpillanatban páronként egymással megegyeznek.

A fenti definíció alapján kijelenthető, hogy a fizikai jellemzők értékei csakis attól az állapottól függenek, amelyben a vizsgált időpontban az elemi rendszer található, és független attól a folyamattól, amelyen keresztül az elemi rendszer az adott állapotba jutott. Ezért a fizikai jellemzőket **állapotjelző**knak is nevezhetjük.

Egy rendszer valamely fizikai jellemzője **extenzív**, ha értékét az elemi rendszerben mérhető értékek összességéként kapjuk meg. Aerodinamikai vizsgálatoknál alkalmazott extenzív jellemzők például a tömeg, térfogat vagy a mozgásmennyiség.

Intenzívnek tekintjük a fizikai jellemzőt, ha az nem rendelkezik az elemi rendszerek szerinti összegezhetőség tulajdonságával. Intenzív fizikai jellemző például a nyomás és a hőmérséklet.

Tegyük fel, hogy van két, egyenként 1 kg tömegű, 380 K (107 °C) hőmérsékletű testünk (amelyek itt elemi rendszereknek tekinthetők), és ezeket egymás mellé helyezzük — azaz egy rendszert hozunk létre belőlük. Ennek a rendszernek a tömege 2 kg lesz, mivel a tömeg extenzív mennyiség. De a két test együttes hőmérséklete nem 760 K (vagy 214 °C) lesz, hanem továbbra is 380 K marad — mert a hőmérséklet intenzív állapotjelző.

Extenzív jellemző térfogategységre vonatkoztatott értékét az adott extenzív mennyiség **sűrűség**ének nevezzük. Ilyen például a tömegsűrűség (jele: ρ), melyet "csak" sűrűségnek szokás nevezni. Az egyéb extenzív jellemző térfogategységre vonatkoztatott értéke esetén a "sűrűség" szó elé oda kell írni az illető extenzív jellemzőt is — például: energiasűrűség.

Extenzív jellemző tömegegységre vonatkoztatott értékét a kérdéses extenzív jellemző **fajlagos érték**ének nevezzük. Ilyen jellemző például a fajlagos térfogat — vagy egyszerűen fajtérfogat —, ami nem más, mint az egységnyi tömegű anyag térfogata. Érdekességként említhetjük meg, hogy korábban alkalmazott műszaki mértékegységrendszerben a fajlagos értékeket a tömegegység helyett súlyegységre vonatkoztatták.

Können belátható, hogy az extenzív jellemzők sűrűségei és fajlagos értékei intenzív mennyiségek. A kettő közti kapcsolatról pedig kimondhatjuk, hogy egy extenzív mennyiség sűrűsége az adott mennyiség fajlagos értékének és a rendszer tömegsűrűségének szorzataként határozható meg.

Az áramló közeg fizikai jellemzői — az esetleges különleges tartományoktól eltekintve — a térben folytonosan oszlanak meg. Az ilyen térbeli megoszlásokat gyűjtőnéven **fizikai terek**nek nevezzük. A fizikai jellemzők részben **skaláris** (például nyomás vagy sűrűség) részben **vektori** (például gyorsulás vagy impulzus) jellegűek. Ennek megfelelően, mint már azt matematikából tudott, beszélhetünk **skalár**-, és **vektorterek**ről. A fizikai terek általában az időben is változnak, ezért általánosan matematikailag az

$$f = f(\mathbf{r}; \tau) = f(x; y; z; \tau) \quad (1.1)$$

alakban írható fel, ahol f skalár vagy vektor mennyiséget is jelölhet.

Homogén a fizikai tér, ha az adott f jellemző térbeli megoszlása egyenletes, az időbeni változása a tér minden

pontjában azonos mértékben és egyidejűleg következik be, azaz az (1.1) egyenlet az

$$f = f(\mathbf{r}; \tau) = f(\tau) \quad (1.2)$$

alakot veszi fel. Ha az f fizikai jellemző megoszlása térben változik, akkor **inhomogén** a fizikai tér.

Stacionárius vagy **stacioner** fizikai térről akkor beszélünk, ha az f jellemző térbeli megoszlása időben nem változik, azaz

$$f = f(\mathbf{r}; \tau) = f(\mathbf{r}) = f(x; y; z) \quad (1.3)$$

Az f jellemző időbeni változása esetén **instacioner** a fizikai tér. **Kvázistacioner** fizikai térről akkor beszélünk, ha az f jellemző időben változik, de ezt a változást — nagysága miatt — elhanyagolhatjuk.

A skalártereket szintfelületekkel (szintvonalakkal) jellemezzük, amelyek a tér azon pontjait kötik össze, amelyekben a fizikai változó értéke azonos. (például az izobárok az állandó nyomású pontokat.)

A skalárterek hely szerinti változásának jellemzésére egy vektormennyiséget, a **gradiens vektort** használunk, amelynek x ; y és z komponensei a leírt fizikai mennyiség x ; y és z irányú változásának rohamosságával arányosak:

$$\text{grad } f = \frac{\partial f(\mathbf{r}; \tau)}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial f(\mathbf{r}; \tau)}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial f(\mathbf{r}; \tau)}{\partial z} \mathbf{k} = \frac{\partial f(\mathbf{r}; \tau)}{\partial \mathbf{r}} \quad (1.4)$$

A gradiens vektor

- a skalártér legrohamosabb változásának irányával párhuzamos;
- a skalártér növekedésének irányába mutat;
- hossza arányos a változás rohamosságával;
- merőleges a szintfelületre (szintvonalra).

A vektorterek helyszerinti változását kétféleképpen jellemezhetjük.

A **divergencia** a vektortér — adott pontbeli — forrásosságát jellemző skalár érték és meghatározása az alábbiak szerint történik:

$$\text{div } \mathbf{f}(\mathbf{r}; \tau) = \frac{\partial f_x}{\partial x} + \frac{\partial f_y}{\partial y} + \frac{\partial f_z}{\partial z} \quad (1.5)$$

Pozitív értékű divergencia esetén azt mondjuk, hogy a pontban forrás van, negatív divergencia esetén pedig nyelőről beszélünk.

A **rotáció vektor** a vektortér — adott pontbeli — örvényességét mutatja meg:

$$\text{rot } \mathbf{f}(\mathbf{r}; \tau) = \left(\frac{\partial f_z}{\partial y} - \frac{\partial f_y}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial f_x}{\partial z} - \frac{\partial f_z}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \left(\frac{\partial f_y}{\partial x} - \frac{\partial f_x}{\partial y} \right) \mathbf{k} \quad (1.6)$$

Az olyan vektorteret, amelynek rotációja azonosan nulla, **örvénymentesnek** nevezzük. Minden örvénymentes vektortérhez rendelhető egy olyan

$$\varphi = \varphi(\mathbf{r}; \tau)$$

skalár–vektor függvény, amelyből a vektorteret leíró vektor–vektor függvényt gradiens képzéssel nyerhetjük, azaz:

$$\mathbf{f}(\mathbf{r}; \tau) = \text{grad } \varphi(\mathbf{r}; \tau) \quad (1.7)$$

Ezt a $\varphi(\mathbf{r}; \tau)$ függvényt az adott tér potenciálfüggvényének (például sebességi potenciálnak) nevezzük.

2. Az anyagáram kinematikája

Ebben a fejezetben az áramló közeg mozgásával foglalkozunk anélkül, hogy figyelembe vennénk a ráható erő, vagy energetikai hatásokat. A kontinuum felépítése a merev testétől abban tér el, hogy részecskéi egymáshoz képest elmozdulhatnak. Emiatt a légnemű vagy folyékony anyagi rendszerek mozgását nem tekinthetjük egyértelműen a súlypont haladó mozgásának és a rendszer valamely, a súlyponton áthaladó tengelye körül történő forgásának eredőjeként, mint ahogyan azt a mechanika tantárgy keretében a merev testek esetében megtehetjük.

2.1. A Lagrange- és az Euler-féle leírási mód

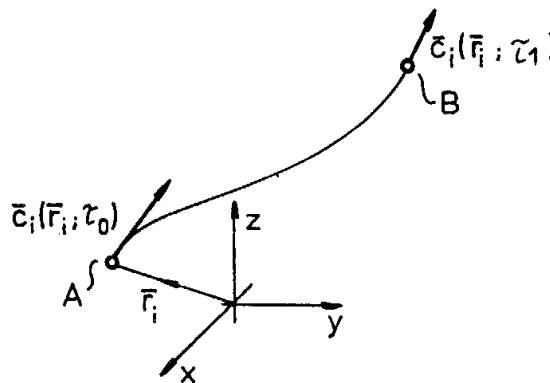
Az anyagáram kinematikájának vizsgálatakor két különböző tárgyalási mód szerint járhatunk el. A *Lagrange*-tól származó leírási mód a pontrendszerek mechanikájában használatos eljárás, míg az *Euler*-féle leírás a kontinuumszemléleten alapszik.

Lagrange¹-féle leírási mód

A kontinuum mozgását mint az egyes elemi rendszerek helyzeteinek τ idő szerinti változását írja le, azaz mindegyik elemi rész pályagörbéjét adja meg. Ehhez először is meg kell különböztetnünk az egyes elemi rendszereket. Képzeljük el, hogy egy τ_0 időpillanatban ismerjük az összes elemi rendszer pillanatnyi helyzetét, vagyis — az i -edik elem esetén — az ezt megadó \mathbf{r}_i helyvektort. Ez az \mathbf{r}_i vektor — mint név a személyt — a vizsgálat során egyértelműen megkülönbözteti az adott elemi rendszert. Így a tömegáram mozgását az egyes elemi rendszerek τ időpillanatban elfoglalt térbeli helyzetét megadó

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(\mathbf{r}_i; \tau) \quad (2.1.)$$

általános egyenlet írja le, amit a 2.1. ábra szemléltet.



2.1. ábra Lagrange-féle leírási mód

A — az elemi rendszer helye a τ_0 időpillanatban; B — az elemi rendszer helye a τ időpillanatban;

Egy kiszemelt — és az \mathbf{r}_i vektorral megjelölt — tömegelem sebességét a (2.1) egyenlet időszerinti első és második deriváltjaként kaphatjuk meg (miközben az \mathbf{r}_i vektor állandó):

$$\mathbf{c}_i = \frac{\partial \mathbf{r}(\mathbf{r}_i; \tau)}{\partial \tau} = \mathbf{c}_i(\mathbf{r}_i; \tau) \quad , \quad (2.2)$$

illetve

$$\mathbf{a}_i = \frac{\partial^2 \mathbf{r}(\mathbf{r}_i; \tau)}{\partial \tau^2} = \mathbf{a}_i(\mathbf{r}_i; \tau) \quad .$$

¹ *Lagrange, Joseph Louis (1736–1813)*: francia matematikus, fizikus. A newtoni mechanikát analitikus formába öntötte. Jelentősek az algebrai egyenletekre vonatkozó, a variációszámítás és a számelmélet terén elért eredményei. Már 19 évesen a torinói tüzériskolán tanított.

A *Lagrange*-féle szemlélet a sebességen és a gyorsuláson kívül a többi fizikai jellemzőt is (például hőmérséklet, mozgásmennyiség) az adott elemi rendszerhez köti. Így jól tükrözi a fizikai valóságot, mivel ezen jellemzőket valóban az anyagi részecskék hordozzák. Ezért ezt a tárgyalási módot szokás **anyagi leírásnak**, vagy másképpen **szubsztanciális reprezentációnak** is nevezni.

Ezt a szemléletet ott célszerű alkalmazni, ahol a vizsgálat során egy kiszemelt anyaghalmaz egyedi sorsát, jellemzőinek változását elemezzük. A leírási mód hátrányaként egyértelműen az mutatkozik, hogy konkrét műszaki feladat megoldására, egyszerű matematikai formája ellenére is, nehezen alkalmazható. Gondoljunk csak bele, hogy 1 cm^3 térfogatú, fizikai normálállapotú ($T_N = 273,15 \text{ K}$; $p_N = 101325 \text{ Pa}$) gázban $2,7 \cdot 10^{19}$ számú molekula található. Mindegyikőjük mozgásának leírása elég hosszadalmas lenne.

Euler²-féle leírási mód

Ez a tárgyalási mód nem az egyes tömegelemek mozgásának részletes időbeni lefolyását követi nyomon, hanem a közeg sebességét és a gyorsulását a tér és az idő függvényeként adja meg a

$$\mathbf{c} = \mathbf{c}(\mathbf{r}; \tau) \quad , \quad (2.3)$$

és

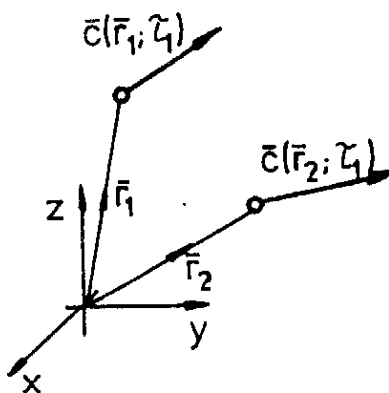
$$\mathbf{a} = \mathbf{a}(\mathbf{r}; \tau) \quad .$$

általános alakban, attól függetlenül, hogy a közeg melyik elemi része tartózkodik a tér \mathbf{r} helyvektorral jelölt pontjában a τ időpillanatban (2.2 ábra).

A (2.3) egyenlet \mathbf{r} és τ független változóit *Euler*-féle változóknak is nevezzük.

Ezen felfogás szerint a sebesség és a gyorsulás nem az anyaghoz, hanem a térhez kötött jellemző, szemben a szubsztanciális leírási móddal. Ezért ezt a tárgyalásmódot **térbeli leírásnak** is nevezik.

Az *Euler*-féle tárgyalásmód matematikailag sokkal egyszerűbb, jobban megfelel a mérési gyakorlatban általánosan alkalmazott módszereknek is. Mivel az áramló közegben a fizikai jellemzőket rendszerint nem az áramlással együtt mozgó, hanem a mérőtérben rögzített műszerrel tudjuk mérni.



2.2. ábra Euler-féle tárgyalási mód

A későbbiekben — néhány kivételtől eltekintve — az *Euler*-féle leírási módot fogjuk követni (például az 1.4. fejezetben is már ezt tettük).

Ha a vizsgálat során az (1.1) egyenletben f -el jelölt változónak a közeg c sebességét választjuk, akkor a **sebességtér** leírására szolgáló

$$\mathbf{c} = \mathbf{c}(\mathbf{r}; \tau) = \mathbf{c}(x; y; z; \tau) \quad (2.4)$$

alakú vektor–vektor függvényt kapjuk.

A fenti egyenlet az általános, azaz az úgynevezett **háromméretű**, instacioner, inhomogén sebességeteret írja

² **Euler, Leonard (1707–1783)**: svájci matematikus, fizikus. Munkássága meghatározó jelentőségű az analitikus geometria, a trigonometria, valamint az integrálszámítás területén. Maradandó eredményei fizikában az áramlásokra vonatkozó mozgásegyenletek, a merev testek mechanikáját leíró analitikus módszerek és a hangtani vizsgálatok.

le. Különleges esetekben természetesen ez az egyenlet módosulni, egyszerűsödni fog. A következőkben az ilyen áramlásokat mutatjuk be.

Találhatunk olyan sebességtereket, ahol az egymással párhuzamos síkok áramképei, sebesség és állapotjelző eloszlásai megegyeznek. Az ilyen áramlásokat **kétméretű** vagy **síkáramlás**oknak nevezzük. Síkáramlásnak tekinthetjük például a végtelen szárny körüli áramlást. Kétméretű áramlás esetén a (2.4) általános egyenlet a

$$\mathbf{c} = \mathbf{c}(\mathbf{r}; \tau) = \mathbf{c}(x; y; \tau) \quad (2.5)$$

alakot veszi fel.

Ha a közeg mozgása olyan, hogy az áramvonalak párhuzamos egyenesek vagy egymással egybevágó térgörbék, **egyméretű** vagy **egydimenziós áramlás**ról beszélünk. Ekkor a sebességeloszlást leíró (2.4) egyenlet a

$$c = c(x; \tau) \quad (2.6)$$

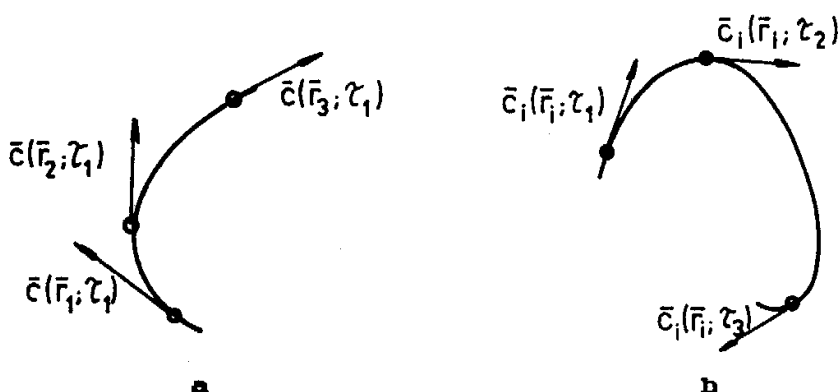
skalár–skalár függvény formájában írható fel. Egyméretű áramlásnak feltételezzük — a közeget ideálisnak véve — a csővezetékben történő áramlást.

2.2. Áramlások szemléltetése

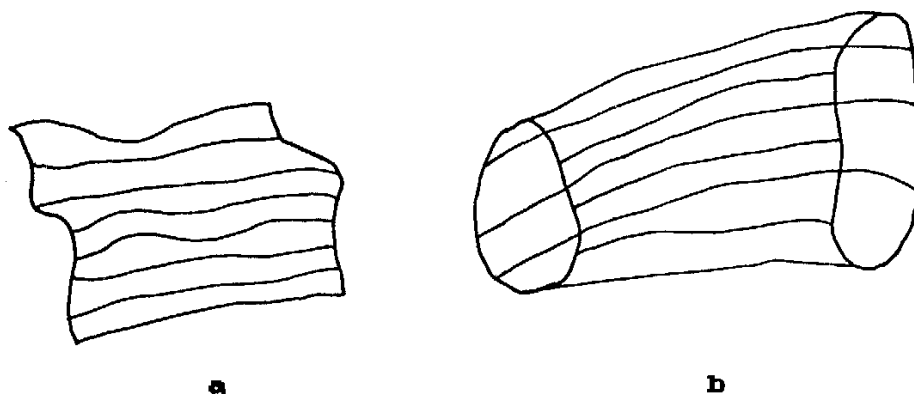
A közeg mozgását matematikailag a (2.4) egyenlettel, vagy annak valamelyik speciális alakjával tudjuk leírni. Szemléletes jellemzéséhez most definiáljunk néhány fogalmat.

Áramvonalnak azon térgörbét nevezzük, amelynek mindegyik pontjában az érintője az adott pontbeli sebességvektor irányát adja meg. Matematikailag megfogalmazva: az áramvonalak a sebességvektorok burkológörbéi (2.3.a ábra).

Pályagörbe, vagy **pálya** az a térgörbe, amelyen a kontinuum egy adott tömegeleme, elemi rendszere mozgása során végighalad (2.3.b ábra).



2.3. ábra Áramvonal (a) és pályagörbe (b)



2.4. ábra Áramfelület (a) és áramcső (b)

Vessük össze e két definíciót az előző fejezetben leírtakkal. Azt láthatjuk, hogy a pályagörbe a *Lagrange*-

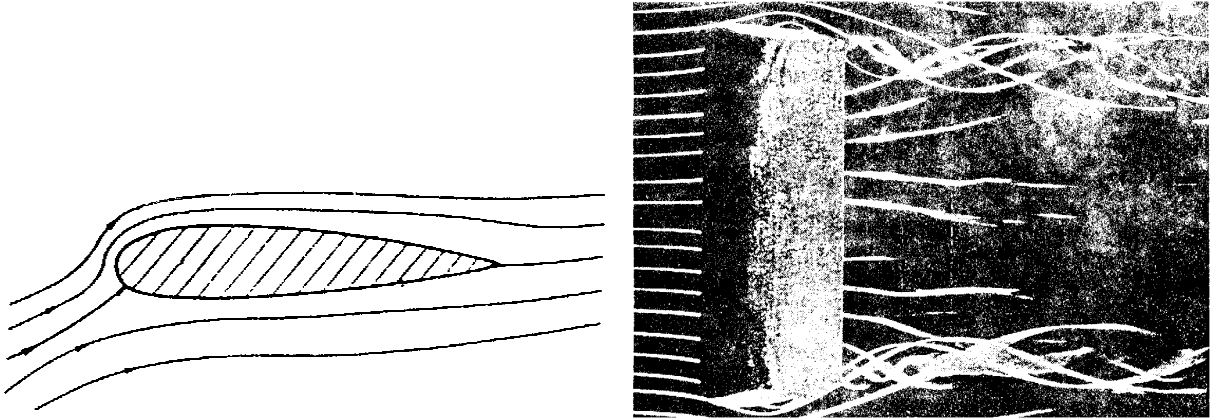
féle, míg az áramvonal az *Euler*-féle szemlélet fogalmköréhez tartozik.

Áramfelület alatt a sebességtér tetszőleges görbéjéből — de nem egy áramvonalból — kiinduló áramvonalak összességét értjük. Áramfelületet mutat be a 2.4.a ábra.

Áramcsőről akkor beszélünk, ha a kiinduló térgörbe zárt (2.4.b ábra).

Az áramfelület és az áramcső palástján az áramló közeg nem lép át, mivel a sebességvektor a felület adott pontbeli érintősíkjában fekszik.

Áramképnek tekintjük az áramvonalak összességét. Példaként egy szárnyprofil (a), illetve egy véges szárny (b) körüli áramkép látható a 2.5. ábrán.



2.5. ábra Szárnyprofil (a) és véges szárny (b) körüli áramkép

2.3. Szubsztanciális, lokális és konvektív változás

Az áramló közeg fizikai jellemzőinek változása és mozgása között szoros kapcsolat áll fenn. Az *Euler*-féle szemléletmód helyhez kötötten adja meg a fizikai jellemzők időbeni változását — lásd a (2.3) egyenletet. Ezek összessége viszont nem azonos az anyag fizikai állapotának változásával. Ezért most az *Euler*-féle reprezentáció felhasználásával írjuk le ugyanazon kontinuum elem (elemi rendszer) f fizikai jellemzője időbeni változásának vizsgálatát.

Ehhez a (2.3) egyenlet formájában írjuk fel az f jellemzőt a tér és az idő függvényében megadó egyenlettel:

$$f = f(\mathbf{r}; \tau) \quad (2.7)$$

Ezen f jellemző időbeli változását a (2.7) egyenlet idő szerinti deriváltjával kapjuk meg, amely

$$\frac{d(f(\mathbf{r}; \tau))}{d\tau} = \frac{\partial(f(\mathbf{r}; \tau))}{\partial \tau} + \frac{\partial(f(\mathbf{r}; \tau))}{\partial \mathbf{r}} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \tau} \quad (2.8)$$

alakú lesz.

Az egyenlet jobb oldalának első tagja az $f(\mathbf{r}; \tau)$ függvény τ idő szerinti parciális deriváltja. A második tag pedig az $f(\mathbf{r}; \tau)$ függvény \mathbf{r} helyvektor szerinti parciális deriváltjának és a közegelem helyzetét leíró $\mathbf{r}(\tau)$ belső függvény τ idő szerinti deriváltjának szorzata (az összetett függvények deriválásánál alkalmazott úgynevezett láncszabály alapján). Ez utóbbi differenciálhányadosról pedig köztudott, hogy a vizsgált elemi rendszer sebességét jelenti. (mivel a sebesség a helyvektor idő szerinti változása — matematikailag deriváltja), azaz:

$$\frac{d(f(\mathbf{r}; \tau))}{d\tau} = \frac{\partial(f(\mathbf{r}; \tau))}{\partial \tau} + \frac{\partial(f(\mathbf{r}; \tau))}{\partial \mathbf{r}} \mathbf{c} \quad (2.9)$$

A fenti (2.9) kifejezést az általános transzportegyenlet differenciál alakjának is szokás nevezni.

Fizikailag mit is jelent ez az egyenlet?

A (2.9) egyenlet jobb oldala egy kontinuum elem (szubsztancia) $f(\mathbf{r}; \tau)$ függvénnyel leírható fizikai jellemzőjének időbeni változását adja meg. Ezt a változást az f jellemző **szubsztanciális változásának** nevezzük.

A (2.9) egyenlet jobb oldalának első tagja a **lokális változás**, amely az f fizikai jellemzőnek a tér egy rögzített helyén időben bekövetkező változását fejezi ki.

Konvektív változásnak nevezzük a (2.9) egyenlet jobb oldalának második tagját. Ez a kontinuum elem f

jellemzőjének azt a változását fejezi ki, amelyet az adott időpillanatban az elemi rendszer az f mennyiség fizikai terében történő saját mozgása következtében szenved el.

Könnyen belátható, hogy a (2.9) egyenlet a *Lagrange*- és az *Euler*-féle reprezentáció között képez hidat.

Ha a fizikai tér homogén, vagyis

$$\left| \frac{\partial(f(\mathbf{r}; \tau))}{\partial \mathbf{r}} \right| = 0 \quad , \quad (2.10)$$

akkor az áramló közeg fizikai jellemzője csak az idő függvényében változhat, azaz a szubsztanciális változás azonosan egyenlő lesz a lokális változással. Hasonló eset áll fenn, ha a fizikai tér inhomogén, de a közeg nem áramlik, mivel.

$$\mathbf{c} = \mathbf{0} \quad .$$

Stacioner fizikai tér esetén, ha

$$\left| \frac{\partial(f(\mathbf{r}; \tau))}{\partial \tau} \right| = 0 \quad , \quad (2.11)$$

az áramló kontinuum elem fizikai jellemzője csak akkor változhat, ha ez a jellemző a térben változik, azaz ha van konvektív változása.

Ha most a sebességterekre alkalmazzuk a fent általánosan leírtakat, egyszerűen az f változó helyébe helyettesítsük be a \mathbf{c} sebességet. Ekkor a

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{c}(\mathbf{r}; \tau)}{d\tau} = \frac{\partial\mathbf{c}(\mathbf{r}; \tau)}{\partial \tau} + \frac{\partial\mathbf{c}(\mathbf{r}; \tau)}{\partial \mathbf{r}} \mathbf{c} \quad (2.12)$$

egyenletet kapjuk, ahol:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{c}(\mathbf{r}; \tau)}{d\tau} & \quad \text{— a szubsztanciális gyorsulást;} \\ \frac{\partial\mathbf{c}(\mathbf{r}; \tau)}{\partial \tau} & \quad \text{— a lokális gyorsulást;} \\ \frac{\partial\mathbf{c}(\mathbf{r}; \tau)}{\partial \mathbf{r}} \mathbf{c} & \quad \text{— a konvektív gyorsulást, és ezen belül} \\ & \quad \frac{\partial\mathbf{c}(\mathbf{r}; \tau)}{\partial \mathbf{r}} \quad \text{— a sebességtér derivált tenzorát} \end{aligned}$$

jelenti.

Nézzünk erre most egy egyszerű, köznapi példát. Egy csapból engedjük ki egy csövön keresztül vizet — amit összenyomhatatlannak tekintünk.

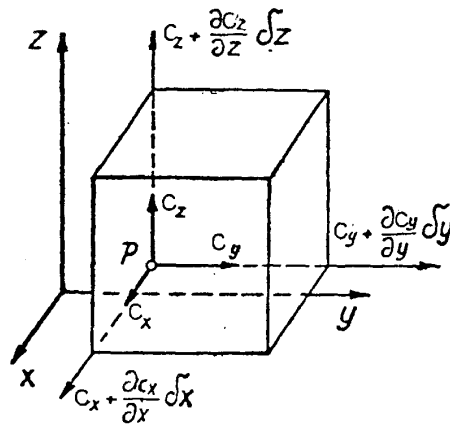
Ahol a cső keresztmetszete csökken, ott a víz sebessége — köztudomásúlag — nőni fog. Egy vízmolekula — azaz egy elemi rendszer — sebessége azért fog ott megnőni, mert a molekula, áramlása következtében, a csökkenő keresztmetszethez ér. Ezt a sebességváltozást tekintjük a konvektív gyorsulásnak. Könyökcső esetén a molekula sebességének iránya fog változni, ami szintén konvektív gyorsulás. (Mivel a sebesség vektormennyiség, így az irányváltozás is gyorsulás — lásd centrifugális gyorsulás.)

Ha a vízcsapot időben valamikor jobban kinyitjuk, a csőben a molekulák sebessége mindenütt nőni fog, attól függetlenül, hogy van-e ott keresztmetszet, illetve irányváltozás a csővezetékben vagy sem. Ez a sebességváltozás csak az időtől függ — attól, hogy mikor nyitjuk vagy zárjuk a csapot —, ezért ez lesz a lokális gyorsulás.

A fenti két gyorsulás eredője pedig a szubsztanciális gyorsulás, amelyet az adott vízmolekula el fog szenvedni. Mivel ő "nem tudja", hogy miért fog a sebessége megváltozni.

2.4. Az áramló közeg mozgásformái

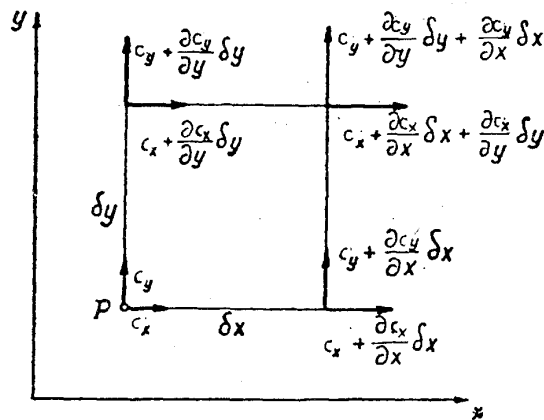
A szilárd testek mozgásával szemben egy elhatárolt folyadék rész nem csak elmozdulást (eltolódást és elfordulást), hanem alakváltozást (tisztá térfogatváltozást és szögdeformációt) is szenved vagy szenvedhet.



2.6. ábra Elemi kocka körüli sebességkomponensek

Az áramló közegből gondolatban egy kicsiny kockát körülhatárolunk (2.6. ábra) és feltételezzük, hogy a sebességek a kocka oldalain tetszés szerint különbözők. Ekkor könnyen beláthatjuk, hogy egy idő múlva a kocka alakja megváltozhat. A 2.6. ábrán az így kijelölt δx ; δy ; δz élű — kocka sarkainál lévő sebesség-összetevők közül hat látható.

Valamennyi komponens figyelembevételére esetén a test mozgásának vizsgálata rendkívül bonyolult lenne, ezért a 2.7. ábrán a kocka csak az x - y síkkal párhuzamos, a P pontot érintő lapját ábrázoljuk és végezzük a szemléltetést.



2.7. ábra Elemi négyzet körüli sebességkomponensek

A δx ; δy oldalakkal bíró négyzet az x - y síkban — a fentiekben már röviden leírtak alapján — négy féle elmozdulást végezhet. Ezek név szerint:

→ **Eltolódás**, vagy más néven **transzláció**:

A merev testszerű eltolódást (2.8 ábra), amely $\Delta \tau$ idő alatt következik be a P és a Q pontok egyenes vonalú elmozdulásával jellemezhetjük. Az ábra jelölései alapján:

$$a = c_x \Delta \tau \quad ; \quad b = c_y \Delta \tau \quad . \quad (2.13)$$

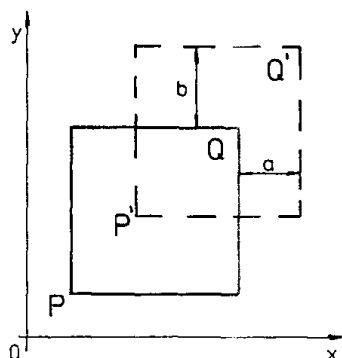
→ **Tiszta térfogatváltozás**, avagy **dilatáció**:

A $\Delta \tau$ idő alatt bekövetkező lineáris nyúlás (2.9. ábra) az oldalak végpontjainak az oldalhossz irányába eső

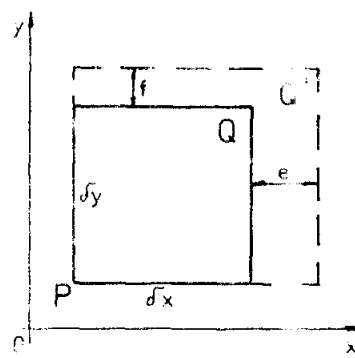
sebesség különbségéből adódik, azzal egyenesen arányos, azaz:

$$e = \frac{\partial c_x}{\partial x} \delta x \Delta \tau \quad ; \quad e = \frac{\partial c_y}{\partial y} \delta y \Delta \tau \quad . \quad (2.14)$$

Ez az elmozdulás a merev test mozgásánál nem jelentkezik.



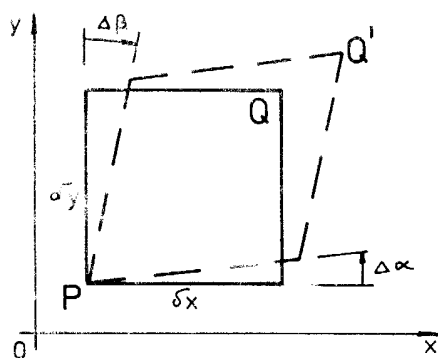
2.8. ábra Eltolódás



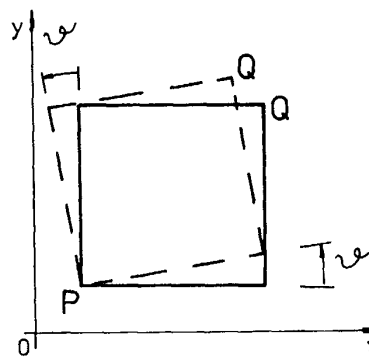
2.9. ábra Dilatáció

A négyzet oldalainak elfordulása — kis $\Delta \tau$ időt, tehát kicsi szögelfordulást feltételezve — a végpontoknak az oldalakra merőleges irányú sebességkülönbségével arányos. Ezt szemlélteti a 2.10. ábra, illetve a (2.15) egyenlet (figyelembe véve, hogy elemi nagyságú szögek esetén $\tan \alpha \approx \alpha$).

$$\Delta \alpha = \frac{\frac{\partial c_y}{\partial x} \delta x \Delta \tau}{\delta x} = \frac{\partial c_y}{\partial x} \Delta \tau \quad ; \quad \Delta \beta = -\frac{\frac{\partial c_x}{\partial y} \delta y \Delta \tau}{\delta y} = -\frac{\partial c_x}{\partial y} \Delta \tau \quad . \quad (2.15)$$



2.10. ábra Négyzet oldalainak elfordulása



2.11. ábra Rotáció

A $\Delta \beta$ kifejezésében a negatív előjel azért szükséges, mert ha a $\frac{\partial c_x}{\partial y}$ parciális differenciálhányados pozitív értékű, akkor az elfordulás a $\Delta \alpha$ elfordulással ellentétes, így azt negatívnak kell tekintenünk.

Elfordulás (rotáció):

A négyzet — merev testre is jellemző — elfordulásán, amit a 2.11. ábra szemléltet, a két oldal szögelfordulásának átlagát értjük, azaz:

$$g = \frac{\Delta \alpha + \Delta \beta}{2} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial c_y}{\partial x} - \frac{\partial c_x}{\partial y} \right) \Delta \tau \quad . \quad (2.16)$$

→ Szögdeformáció, vagy disztorzió:

A négyzet romboiddá való eltorzulása (2.10. ábra) a \mathbf{P} pontnál eredetileg lévő derékszög γ mértékű megváltozásával — ami a két szomszédos oldal szögelfordulásának különbségével egyenlő — jellemezhetjük:

$$\gamma = \Delta\alpha - \Delta\beta = \left(\frac{\partial c_y}{\partial x} - \frac{\partial c_x}{\partial y} \right) \Delta\tau \quad . \quad (2.17)$$

Ezen mozgásforma a merev test esetén nem lép fel.

Fontos megjegyeznünk, hogy a fentiekben meghatározott elmozdulások természetesen a négyzet véges (nem elemi) volta miatt csak közelítő értékűek, mivel az egyenletekben lineáris összefüggéseket feltételeztünk.

A mozgásformák megismerése után térjünk kicsit vissza a (2.12) egyenletre, azon belül is a konvektív gyorsulás értelmezésére. A bonyolult mátrixalgebrai levezetés mellőzésével a konvektív gyorsulás az alábbi módon bontható fel:

$$\frac{\partial \mathbf{c}(\mathbf{r}; \tau)}{\partial \mathbf{r}} \mathbf{c} = \text{grad} \left(\frac{\mathbf{c}^2}{2} \right) - \mathbf{c} \times \text{rot} \mathbf{c} \quad . \quad (2.18)$$

Mint a példában is említettük a konvektív gyorsulás két okból léphet fel. Egyrészt a sebesség nagyságának változása miatt (lásd dilatáció) — ezt fejezi ke a (2.18) egyenlet jobb oldalának első tagja. Másrészt a sebesség irányának változása következtében (lásd elfordulás, illetve szögdeformáció) — amit a (2.18) egyenlet jobb oldalának második tagja fejez ki.

Így az áramló közeg szubsztanciális gyorsulása az alábbi módon írható fel:

$$\mathbf{a} = \frac{\partial \mathbf{c}(\mathbf{r}; \tau)}{\partial \tau} + \text{grad} \left(\frac{\mathbf{c}^2}{2} \right) - \mathbf{c} \times \text{rot} \mathbf{c} \quad , \quad (2.19)$$

amely egyenletet a későbbiekben, az *Euler* egyenlet felírásakor fogjuk alkalmazni.

3. Az Euler egyenlet

A súrlódásmentes közeg áramlásának dinamikai alapegyenletét *Leonard Euler* svájci matematikus és fizikus építette fel, a korábbi fizikai kutatások eredményeinek összefoglalásaként. Az *Euler* egyenlet lényegében *Newton*³

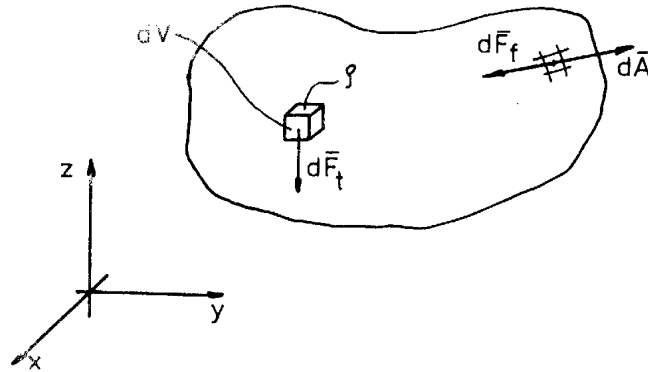
$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} \quad (3.1)$$

alakú második törvényének felírása az ideális kontinuum áramlására, ahol:

- \mathbf{F} — a testre (esetünkben a közegre) ható erők eredője;
- M — a test (az ellenőrző térfogatban lévő közeg) tömege;
- \mathbf{a} — a test (számunkra a rendszer) szubsztanciális gyorsulása.

Az *Euler* egyenlet felírásának első lépéseként, a (3.1) egyenlet bal oldalának meghatározása érdekében, vizsgáljuk meg egy tetszőleges alakú ellenőrző térfogatra ható erőket (3.1. ábra).

Térfogatnak nevezzük azokat az **erőket**, melyek a rendszer minden tömegelemére hatnak, nagyságuk egyenesen arányos az elem tömegével és az adott pontbeli térerősség nagyságával. Iránya természetesen megegyezik a térerősség vektor irányával. Legegyszerűbb példa erre a gravitációs erőter, de ide sorolhatjuk a mágneses erőtereket is.



3.1. ábra Ellenőrző térfogatra ható erők

A rendszer egy adott, elemi térfogatú részére ható $d\mathbf{F}_t$ úgynevezett elemi térfogati erő az alábbi módon határozható meg:

$$d\mathbf{F}_t = \rho \mathbf{g} dV \quad , \quad (3.2)$$

ahol:

- ρ — az elemi rendszer sűrűsége;
- \mathbf{g} — az adott pontbeli térerősség vektor;
- dV — az adott elemi rendszer térfogata.

Az egész rendszerre ható térfogati erők eredője pedig az

$$\mathbf{F}_t = \int_{(V)} \rho \mathbf{g} dV \quad (3.3)$$

térfogati integrállal lesz egyenlő.

³ *Newton, Sir Isaac (1643–1727)*: angol fizikus, matematikus. Kora tudományos életének s egyben a tudomány történetének is egyik legkiemelkedőbb alakja. Munkásságával a korábbi statikus világkép helyett dinamikus, egységes világszemléletet adott, amely megteremtette a mechanikus materializmus természettudományos alapjait.

A rendszerhatáron a környezettől átadódó erőket **felületi erők**nek nevezzük. Ilyen —ideális közeg esetén — a nyomásból származó erő.

Egy felületelemre ható $d\mathbf{F}_f$ felületi erő nagysága egyenesen arányos a felületelem, valamint a rendszer, illetve a környezet közti nyomáskülönbség nagyságával. Iránya ellentétes a felületelem vektorának irányával (mivel az mindig a rendszerből kifelé mutat), azaz:

$$d\mathbf{F}_f = -p d\mathbf{A} \quad , \quad (3.4)$$

ahol:

p — a rendszerhatáron lévő nyomáskülönbség;
 $d\mathbf{A}$ — a felületelem felületi vektora.

Az egész rendszerre ható felületi erők eredője pedig az:

$$\mathbf{F}_f = - \int_{(A)} p d\mathbf{A} \quad (3.5)$$

felületi integrállal határozható meg.

Mivel az ideális közegre sűrűlási erő nem hat, a rendszerre ható erő eredője a (3.3) és a (3.5) egyenletek felhasználásával az alábbi módon írható fel:

$$\mathbf{F} = \int_{(V)} \rho \mathbf{g} dV - \int_{(A)} p d\mathbf{A} \quad . \quad (3.6)$$

A további vizsgálataink érdekében a (3.5) egyenletet alakítsuk át a *Gauss⁴–Osztrogradszkij⁵* tétel felhasználásával:

$$\int_{(A)} p d\mathbf{A} = \int_{(V)} \text{grad } p dV \quad . \quad (3.7)$$

Ez alapján az eredő erőt meghatározó (3.6) egyenlet a

$$\mathbf{F} = \int_{(V)} \rho \mathbf{g} dV - \int_{(V)} \text{grad } p dV = \int_{(V)} \left[\mathbf{g} - \frac{1}{\rho} \text{grad } p \right] \rho dV \quad (3.8)$$

alakot veszi fel.

Következő lépésként a (3.1) egyenlet jobb oldalának részletes leírásához vegyük elő a korábbi tanulmányainkból a tömeg és a sűrűség közötti

$$m = \int_{(V)} \rho dV \quad (3.9)$$

kapcsolatot, illetve az áramló közeg gyorsulásának

$$\mathbf{a} = \frac{\partial \mathbf{c}(\mathbf{r}; \tau)}{\partial \tau} + \text{grad} \left(\frac{\mathbf{c}^2}{2} \right) - \mathbf{c} \times \text{rot } \mathbf{c} \quad (3.10)$$

⁴ *Gauss, Karl Friedrich (1777–1855)*: német matematikus, fizikus. Sokoldalú, korszakalkotó munkássága révén kortársai "princeps mathematicorum" a matematika fejedelmének nevezték. Göttingeni tanulmányai alatt ismerkedett meg és kötött barátságot Bolyai Farkassal.

⁵ *Osztrogradszkij, Mihail Vasziljevics (1801–1862)*: orosz matematikus. Alapvető eredményei születtek az analízis, az elméleti mechanika és a matematikai fizika területein.

egyenletét. Ezek alapján felírható, hogy:

$$m\mathbf{a} = \int_{(V)} \left[\frac{\partial \mathbf{c}(\mathbf{r}; \tau)}{\partial \tau} + \text{grad} \left(\frac{\mathbf{c}^2}{2} \right) - \mathbf{c} \times \text{rot} \mathbf{c} \right] \rho dV \quad . \quad (3.11)$$

A (3.8) és a (3.11) egyenletek alapján a (3.1) egyenlet az

$$\int_{(V)} \left[\mathbf{g} - \frac{1}{\rho} \text{grad} p \right] \rho dV = \int_{(V)} \left[\frac{\partial \mathbf{c}(\mathbf{r}; \tau)}{\partial \tau} + \text{grad} \left(\frac{\mathbf{c}^2}{2} \right) - \mathbf{c} \times \text{rot} \mathbf{c} \right] \rho dV \quad (3.12)$$

alakot vesz fel.

Mivel vizsgálatunkat tetszőleges térfogatú rendszerre végeztük el, a (3.12) egyenlőség a benne szereplő integrandus egyenlőségét is jelenti, azaz:

$$\mathbf{g} - \frac{1}{\rho} \text{grad} p = \frac{\partial \mathbf{c}(\mathbf{r}; \tau)}{\partial \tau} + \text{grad} \left(\frac{\mathbf{c}^2}{2} \right) - \mathbf{c} \times \text{rot} \mathbf{c} \quad . \quad (3.13)$$

Ez az **Euler egyenlet**, ami az áramlásban egyik alapegyenlete. Összenyomhatatlan közeg esetén az alábbi módon írhatjuk fel (ekkor a bal oldal második tagja változik meg):

$$\mathbf{g} - \text{grad} \frac{p}{\rho} = \frac{\partial \mathbf{c}(\mathbf{r}; \tau)}{\partial \tau} + \text{grad} \left(\frac{\mathbf{c}^2}{2} \right) - \mathbf{c} \times \text{rot} \mathbf{c} \quad . \quad (3.14)$$

Maga az *Euler* egyenlet a köznapi műszaki gyakorlatban — bár alakilag egyszerű — nem alkalmazható. Ennek oka a benne szereplő matematikai műveletek konkrét esetre történő megoldásának bonyolultsága. De, a későbbiekben — a *Bernoulli* egyenlet felírásánál — az *Euler* egyenletet fogjuk használni.

4. Hidrostatika

A hidrostatika a nyugalomban lévő kontinuum egyensúlyi feltételével, a benne fellépő nyomáseloszlás meghatározásával foglalkozó tudományág.

4.1. A hidrostatika alapegyenletei

A hidrostatika alapegyenletének integrál és differenciál alakjait az Euler egyenletnél már alkalmazott fizikai megfontolások és matematikai levezetések felhasználásával tudjuk felírni.

Mivel a nyugalomban lévő közeg gyorsulása zérus, így:

$$\mathbf{F} = \mathbf{0} \quad ,$$

azaz — a (3.6) egyenlet felhasználásával:

$$\int_{(V)} \rho \mathbf{g} dV - \int_{(A)} p d\mathbf{A} = \mathbf{0} \quad . \quad (4.1)$$

Ez az egyenlet a hidrostatika alapegyenletének integrál alakja nevet viseli

A (3.8) egyenletet alapján az alábbi egyenlőséget írhatjuk fel:

$$\int_{(V)} [\rho \mathbf{g} - \text{grad } p] \rho dV = \mathbf{0} \quad . \quad (4.2)$$

Ez az egyenlőség — mivel tetszőleges térfogatú rendszert vizsgálunk — az integrandus zérus voltát is jelenti, azaz:

$$\rho \mathbf{g} - \text{grad } p = \mathbf{0} \quad , \quad (4.3)$$

vagy a belőle levonható következtetések jobb szemléltetése és megértése érdekében:

$$\rho \mathbf{g} = \text{grad } p \quad . \quad (4.4)$$

Ez az utóbbi két egyenlet pedig a hidrostatika alapegyenletének differenciál alakja.

Mit is jelent fizikailag a (4.3), illetve az (4.4) egyenlet? Az alábbi általános tanulság vonható le belőlük:

- erőmentes térben ($\mathbf{g} = \mathbf{0}$), illetve súlytalan közeg esetén ($\rho = 0$) a nyomás a hely függvényében nem változik ($\text{grad } p = \mathbf{0}$);
- a $\text{grad } p$ nyomásnövekedés és a \mathbf{g} térerő iránya megegyezik, a térerőre merőleges irányban a nyomás nem változik;
- a nyomásváltozás $|\text{grad } p|$ nagysága egyenesen arányos a közeg ρ sűrűségével és a térerősség $|\mathbf{g}|$ nagyságával.

További, speciális következtetések levonása érdekében tétélezzük fel, hogy az erőter örvénymentes. Ekkor úgynevezett konzervatív erőterről beszélünk és — mint az már a vektoranalízisből már tudott — a térerő a

$$\mathbf{g}(\mathbf{r}; \tau) = -\text{grad } \phi(\mathbf{r}; \tau) \quad (4.5)$$

formában határozható meg, ahol:

$\phi(\mathbf{r}; \tau)$ — az erőter potenciálja, amely az egységnyi tömegű test munkavégző képességét jelenti.

A (4,5) egyenlet alapján a (4.4) kifejezés az alábbi alakot vesz fel:

$$-\text{grad } \phi = \frac{1}{\rho} \text{grad } p \quad . \quad (4.6)$$

Ezen képlet alkalmas arra, hogy a potenciális térerő hatása alatt nyugalomban lévő közeg belsejében uralkodó nyomáseloszlást meghatározzuk. Összenyomhatatlan közeget feltételezve a (4.6) egyenlet az alábbi szerint módosul:

$$-\text{grad } \phi = \text{grad } \frac{p}{\rho} \quad . \quad (4.7)$$

Átrendezve:

$$\text{grad} \left(\frac{p}{\rho} + \phi \right) = \mathbf{0} \quad , \quad (4.8)$$

azaz:

$$\frac{p}{\rho} + \phi = \text{állandó} \quad . \quad (4.9)$$

Ebből a kifejezésből — átrendezéssel — a

$$p = \rho\phi + \text{állandó} \quad (4.10)$$

összefüggéshez jutunk, amely alapján kijelenthető a hidrosztatika következő fontos tétele:

Potenciális erőterben nyugvó kontinuumban az állandó nyomású — izobár — felületek az erőter ekvipotenciális felületeivel esnek egybe.

4.2. Közeg egyensúlya különféle erőterekben

Jelen fejezetben az erőterek közül, jelentőségük és egyszerűségük miatt csak az alábbi potenciális erőterekkel foglalkozunk:

- nehézségi erőter;
- nehézségi erőterben, vízszintes irányban gyorsuló rendszer erőtere;
- a nehézségi erőterben, függőleges tengely körül forgó rendszer erőtere.

Természetesen, ezen fejezetben az úgynevezett súlyos folyadék egyensúlyát vizsgáljuk.

A közeg egyensúlya nehézségi erőterben:

Vizsgáljuk meg a Föld gravitációs erőterét. Ehhez szükséges koordináta rendszert — 4.1. ábra — úgy választjuk meg, hogy a z tengelye a Föld felszínére merőleges legyen, lefelé a pozitív irányítással. Ebből következik, hogy az x és y tengelyek által alkotott sík a Föld adott pontjában vett érintősíkja, így abban a nyomás nem változik.

Az egységnyi tömeget egy h_0 magasságról (ahol a potenciál ϕ_0) h_0 - z magasságra emelve (figyeljünk az előjelekre!!) annak helyzeti energiája:

$$\phi = \phi_0 - gz \quad (4.11)$$

nagyságú lesz. Ezt figyelembe véve az egyenlet a

$$\mathbf{g} = -\text{grad } \phi = g\mathbf{k} \quad , \quad (4.12)$$

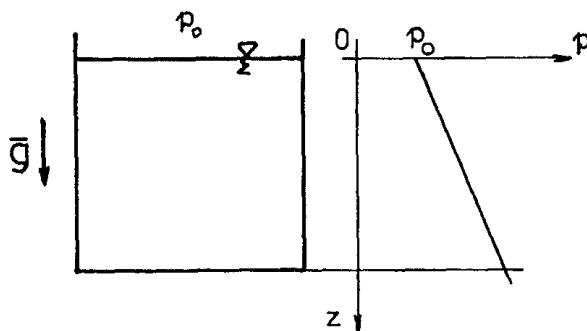
a (4.10) egyenlet pedig a

$$p = \rho g z + p_0 \quad (4.13)$$

alakot vesz fel, ahol:

g — a nehézséges gyorsulás értéke;

p_0 — a h_0 magasságon mért — a 4.1 ábra szerint környezeti — nyomás értéke, amit célszerű összevetni a (4.9) és (4.10) egyenletek jobb oldalain található *állandó*-val.



4.1. ábra Közeg egyensúlyának vizsgálata nehézségi erőterben

A közeg egyensúlya nehézségi erőterben, vízszintes irányban gyorsuló rendszer erőterében:

A gravitációs erőterben, vízszintes pályán gyorsulva mozgó rendszer minden egyes pontjára a nehézségi erőn túl még a gyorsulással arányos erő is hat. Ekkor az eredő térerő meghatározásához mindkét hatást figyelembe kell venni. Vizsgáljuk meg a 4.2. ábrán látható gyorsulva mozgó tartályt, mint rendszert, a tartállyal együtt mozgó koordináta rendszerben (mivel ekkor a közeg állónak tekinthető). Ebben az esetben az eredő erőter potenciálja:

$$\phi = \phi_z + \phi_x \quad , \quad (4.14)$$

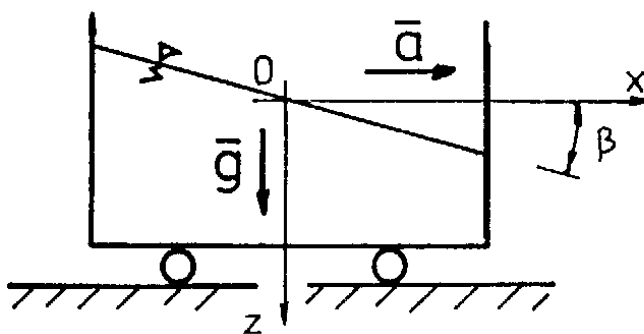
ahol:

ϕ_z — a nehézségi erőter potenciálja, ami a (4.11) egyenlet alapján:

$$\phi_z = \phi_{z0} - gz \quad ; \quad (4.15)$$

ϕ_x — a tehetetlenségi erőter potenciálja, ami a fentivel analóg módon határozható meg:

$$\phi_x = \phi_{x0} + ax \quad . \quad (4.16)$$



4.2. ábra Gravitációs erőterben, vízszintes pályán gyorsulva mozgó rendszer

Az eredő potenciál, a fenti két egyenlet alapján:

$$\phi = \phi_0 + ax - gz \quad . \quad (4.17)$$

A rendszerben uralkodó nyomáeloszlást a (4.10) egyenlet alapján határozhatjuk meg az alábbi módon:

$$p = p_0 + \rho(gz - ax) \quad . \quad (4.18)$$

Most írjuk fel az ekvipotenciális felületek egyenletét, a folyadék felszín egyenletének segítségével. Ehhez vagy a (4.18), vagy a (4.17) egyenlet használható fel. Az első esetben — a felszín sajátossága alapján — a p nyomás értéke a p_0 környezeti nyomással, a második esetben a ϕ potenciál értéke ϕ_0 -al lesz egyenlő. Minkét esetben a kiinduló egyenlet a

$$gz = ax \quad (4.19)$$

alakra módosul. Ebből pedig — egyenletrendezéssel — kapjuk:

$$z = -\frac{a}{g}x \quad . \quad (4.20)$$

Ez az egyenlet a kontinuum felszínének egyenlet, melyből látszik, hogy az ekvipotenciális — azaz izobár — felületek dőlt síkok lesznek. A síkok β dőlésszögét (lásd 4.2. ábra) a

$$\beta = \arctg\left(-\frac{a}{g}\right) \quad (4.21)$$

egyenlettel határozhatjuk meg.

A (4.17) egyenlet alapján, a (4.5) összefüggés felhasználásával, az eredő térerősség vektor komponensei:

$$\begin{aligned} \mathbf{g}_x &= -\frac{\partial\phi}{\partial x} = -\mathbf{a} = -a\mathbf{i} \\ \mathbf{g}_y &= -\frac{\partial\phi}{\partial y} = \mathbf{0} \\ \mathbf{g}_z &= -\frac{\partial\phi}{\partial z} = \mathbf{g} = g\mathbf{k} \end{aligned} \quad , \quad (4.22)$$

nagysága:

$$|\mathbf{g}| = \sqrt{g^2 + a^2} \quad . \quad (4.23)$$

Közeg egyensúlya nehézségi erőterben, függőleges tengely körül forgó rendszer erőterében:

A nehézségi erőterben függőleges tengely körül állandósult szögsebességgel forgó rendszer a vele együtt forgó koordinátarendszerekből állónak tekinthető. Ilyen rendszer látható a 4.3. ábrán, a folyadékfelszínén elhelyezett hengerkoordináta rendszerben ábrázolva. Ekkor a nehézségi erőter mellett a centrifugális erőter hatását is figyelembe kell vennünk, azaz:

$$\phi = \phi_z + \phi_r \quad , \quad (4.24)$$

ahol:

ϕ_z — a nehézségi erőter potenciálja, ami a (4.11) egyenlet alapján:

$$\phi_z = \phi_{z0} - gz \quad ; \quad (4.25)$$

ϕ_r — a centrifugális erőter potenciálja.

Ez utóbbi meghatározásához írjuk fel az egységnyi tömegű testre ha g_r centrifugális erő (vesd össze a térerő fogalmával!) egyenletét:

$$g_r = r\omega^2 \quad , \quad (4.26)$$

mint az már a fizikai és mechanikai tanulmányainkból ismert. A (4.5) egyenlet alapján kimondható, hogy:

$$\mathbf{g}_r = -\frac{\partial \phi_r}{\partial r} \quad , \quad (4.27)$$

amiből:

$$d\phi_r = -g_r dr = -r\omega^2 dr \quad . \quad (4.28)$$

Az r sugáron lévő egységnyi tömegű test munkavégző képessége, azaz a potenciálja pedig a

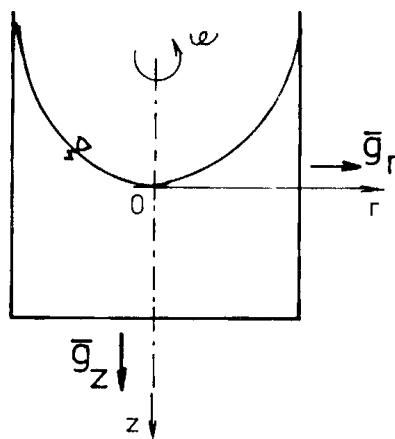
$$\phi_r = -\int_0^r r\omega^2 dr = -\frac{r^2\omega^2}{2} \quad (4.29)$$

egyenlettel határozható meg. Az eredő térerő potenciálja:

$$\phi = \phi_0 - \left(gz + \frac{r^2\omega^2}{2} \right) \quad . \quad (4.30)$$

A nyomáeloszlás pedig a (4.10) egyenlet alapján:

$$p = p_0 + \rho \left(gz + \frac{r^2\omega^2}{2} \right) \quad . \quad (4.31)$$



4.3. ábra Nehézségi erőterben, függőleges tengely körül forgó rendszer

A folyadékfelszín (és az ekvipotenciális felületek) egyenlete az előzőekben már leírtak alapján határozható meg. Vizsgáljuk először azt a speciális esetet, amikor (a felszínen) a (4.31) egyenlet esetén a nyomás a környezetivel egyenlő, ekkor:

$$gz + \frac{r^2 \omega^2}{2} = 0 \quad . \quad (4.32)$$

Ezt az egyenletet átrendezve kapjuk meg a

$$z = -\frac{r^2 \omega^2}{2g} \quad (4.33)$$

függvényt, amely a folyadékfelszín magasságát adja meg a sugár mentén. Ebből látható, hogy ilyen összetett erőtér esetén az izobár és az ekvipotenciális felületek alakja másodfokú parabolák lesznek. Meg kell itt jegyeznünk, hogy az álló rendszerhez képest a folyadékszint közepén történő süllyedésének mértéke megegyezik a külső kerületen jelentkező emelkedéssel.

Az eredő térerő komponensei a (4.5) összefüggés felhasználásával nyerhetők:

$$\begin{aligned} g_z &= -\frac{\partial \phi}{\partial z} = -g \\ g_r &= -\frac{\partial \phi}{\partial r} = -r\omega^2 \end{aligned} \quad , \quad (4.34)$$

abszolút értéke pedig:

$$|\mathbf{g}| = \sqrt{g^2 + (r\omega^2)^2} \quad . \quad (4.35)$$

5. A folytonossági törvény

Csak olyan $\mathbf{c}(\mathbf{r}; \tau)$ sebességtérrel leírható kontinuum áramlás létezik, amely kielégíti az anyagmegmaradás elvét. Az anyagmegmaradás elvét matematikai formában a folytonossági — vagy más néven kontinuitási — törvény írja le.

Áramló közeg esetére a folytonossági törvény az alábbi módon fogalmazható meg (a következőkben az anyagon mindig a tömeget értve): Tetszőleges zárt rendszer tömege az áramlás során nem változhat: sem nem szaporodhat, sem nem csökkenhet.

Ugyanez matematikai formában leírva:

$$\frac{dm}{d\tau} = 0 \quad (5.1)$$

Mivel az m tömeg a zárt rendszer extenzív — összegezhető — jellemzője, értékét a térfogategységre vonatkoztatott értékeinek térfogati integráljaként kaphatjuk meg, ezért:

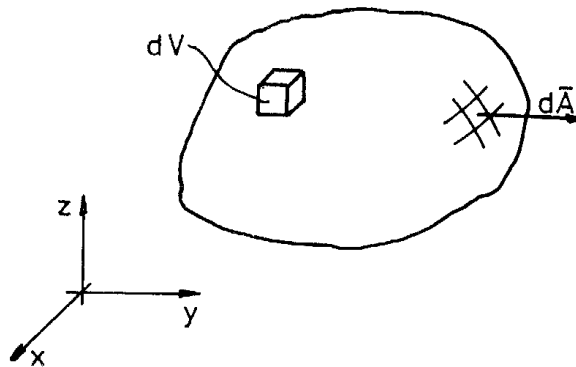
$$\frac{dm}{d\tau} = \frac{d}{d\tau} \int_{(V)} \rho(\mathbf{r}; \tau) dV = 0 \quad (5.2)$$

ahol:

ρ — a közeg sűrűsége (pontosabban fogalmazva a tömegsűrűsége);
 V — a zárt rendszer térfogata.

5.1. A folytonossági törvény integrál alakja

A folytonossági törvény integrál alakjának felírásához vizsgáljunk meg egy tetszőleges V térfogatú rendszert (5.1. ábra).



5.1. ábra A folytonossági törvény felírásához vizsgált rendszer

Első lépésként határozzuk meg az ellenőrző felületen egységnyi idő alatt ki- és belépő anyagáram eredő mennyiségét, ami a rendszer közegáramlás következtében fellépő konvektív tömegváltozást jelenti. Ehhez vizsgáljunk meg egy dA nagyságú (azaz $d\mathbf{A}$ felületvektorú) elemi felületen időegység alatt átáramló közeg térfogatát. Ezt a

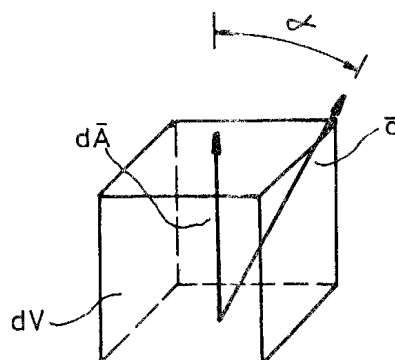
$$d\dot{V} = \mathbf{c} d\mathbf{A} \quad (5.3)$$

skalár szorzattal tudjuk meghatározni, ami egy $|d\mathbf{A}|$ alapú és $|\mathbf{c}| \cos \alpha$ magasságú elemi egyenes hasáb térfogatát adja meg (3.2. ábra).

Ha ezt az elemi térfogatot a közeg sűrűségével szorozzuk meg, az átáramlott elemi közeg

$$dm = \rho |\mathbf{c}| |d\mathbf{A}| \cos \alpha = \rho \mathbf{c} d\mathbf{A} \quad (5.4)$$

tömegét nyerjük. Az elemi tömegek összege — az A ellenőrző felületre vett integrálja — az ellenőrző felületen időegység alatt átáramlott tömeg nagyságát — a konvektív anyagáram keltette tömegváltozást — adja meg.



3.2. ábra Elemi felületen átáramló közeg térfogatának meghatározása

Mivel vizsgálataink során az ellenőrző felület elemi felületvektorai a rendszerből kifelé mutatva vesszük fel, a nyitott rendszerben az

$$\int_{(A)} \rho \mathbf{c} d\mathbf{A} > 0 \quad (5.5)$$

egyenlőtlenség az ellenőrző térfogatban fellépő tömegcsökkenésnek, az

$$\int_{(A)} \rho \mathbf{c} d\mathbf{A} < 0 \quad (5.6)$$

egyenlőtlenség az ellenőrző térfogatban fellépő tömegszaporulatnak felel meg.

A következő lépésben írjuk fel az ellenőrző térfogatban fellépő lokális tömegváltozások összegét, ami a

$$\frac{\partial m}{\partial \tau} = \int_{(V)} \frac{\partial \rho}{\partial \tau} dV \quad (5.7)$$

térfogati integrál értékével lesz egyenlő. Ekkor fizikailag az

$$\int_{(V)} \frac{\partial \rho}{\partial \tau} dV > 0 \quad (5.8)$$

egyenlőtlenség az ellenőrző térfogatban fellépő lokális tömegszaporulatot, míg az

$$\int_{(V)} \frac{\partial \rho}{\partial \tau} dV < 0 \quad (5.8)$$

egyenlőtlenség tömegcsökkenést fejez ki.

A fentiek alapján a **folytonossági törvény integrál alakja** az alábbi formában írható fel:

$$\int_{(V)} \frac{\partial \rho}{\partial \tau} dV + \int_{(A)} \rho \mathbf{c} d\mathbf{A} = 0 \quad (5.9)$$

Az (5.9) egyenlet szerint, ha az ellenőrző térfogatba adott idő alatt nagyobb tömeg áramlik be, mint amennyi távozik — (5.6) egyenlőtlenség —, akkor túlsúlyban kell lenni azon térfogatrészeknek, ahol a közeg sűrűsége időben növekszik — lásd (5.7) egyenlőtlenség —, és fordítva.

Most nézzük meg az (5.9) egyenlet néhány speciális alakját is.

Stacioner áramlás esetén:

Mivel stacionarius áramlásról akkor beszélünk, ha az áramló közeg jellemzői — jelen esetben a sűrűsége — időben nem változik, így az (5.9) egyenlet bal oldalának első tagja zérussal lesz egyenlő, azaz:

$$\int_{(V)} \frac{\partial \rho}{\partial \tau} dV = 0 \quad . \quad (5.10)$$

Ebben az esetben a folytonossági törvény integrál alakja az alábbi formában írható fel:

$$\int_{(A)} \rho c dA = 0 \quad . \quad (5.11)$$

Az ellenőrző felületen be-, illetve kilépő közegek tömegeinek összege zérus. Ellenkező esetben a rendszerben sűrűségváltozás lép fel időben, és így az áramlás nem lehet időálló.

Összenyomhatatlan közeg esetén:

Az inkompresszibilis közeg sűrűsége állandó, ezért ekkor az (5.9) egyenlet a következő alakot veszi fel:

$$\int_{(A)} c dA = 0 \quad . \quad (5.12)$$

Ennek az az oka, hogy az első tagban szereplő parciális differenciálhányados értéke zérussá válik. A második tagból a ρ sűrűség — mivel állandó — kiemelhető az integrál elé és vele az egyenlet mindkét oldala osztható. Ez pedig fizikailag azt jelenti, hogy az ellenőrző felületen be-, és kilépő közegetérfoatok összege mindig zérus.

Egyméretű áramlás esetén:

A közeg áramcsőben történő — vagyis egyméretű — áramlása esetén az áramvonalakra merőleges keresztmetszet minden egyes pontjában egyforma sebességgel és sűrűséggel rendelkezik, azaz e két jellemző — stacionarius áramlást feltételezve — csak az áramvonal mentén mért ívhossznak a függvénye. Mivel az áramcső palástján közeg nem léphet át az 5.3. ábrán látható áramcsővel kijelölt rendszer esetén csak az A_1 és A_2 jelölésű keresztmetszeten léphet ki vagy be közeg. Ekkor az (5.9) egyenlet a

$$\rho_1 c_1 A_1 = \rho_2 c_2 A_2 \quad (5.13)$$

alakot fogja felvenni. Mivel a két felület az áramcső ívhossza mentén bárhol felvehető, az egyenlőség akkor is érvényes marad, általános alakban felírható, hogy

$$\rho c A = \text{állandó} \quad , \quad (5.14)$$

ami fizikailag azt jelenti, hogy stacioner áramlás esetén az áramcső bármelyik keresztmetszetében időegység alatt ugyanannyi tömegű közeg halad át.

Az (5.14) egyenletben szereplő állandó az áramcső keresztmetszetén átáramló

$$\dot{m} = \rho c A \quad . \quad (5.15)$$

tömegáramot jelenti, amit a műszaki gyakorlatban q_m -el is szokás jelölni.

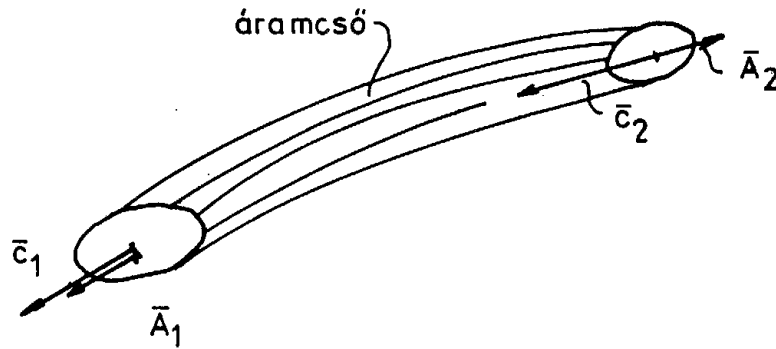
Ha a közeg inkompresszibilis, akkor a változatlan értékű sűrűséggel osztható az (5.14) egyenlet mindkét oldala, így az a

$$c A = \text{állandó} \quad (5.16)$$

alakot veszi fel, amely instacioner áramlásra is érvényes. Ebben az esetben a jobb oldalon szereplő állandó az időegység alatt átáramló

$$\dot{V} = cA \quad (5.17)$$

térfogatáramot jelenti melyet q_v -vel is jelölhetnek a mérnöki gyakorlatban.



5.3. ábra Tömegáram vizsgálata áramcsőben

A fenti egyenlet fizikai jelentése az, hogy összenyomhatatlan közeg egyméretű áramlásakor az áramcső bármelyik keresztmetszetén ugyanakkora térfogatáram halad át azonos idő alatt.

5.2. A folytonossági törvény differenciál alakja

Adott áramlástanai kérdés vizsgálatakor szükségünk lehet az anyagmegmaradás elvét a tér valamely rögzített pontjában leíró, lokális érvényű egyenletre is. Ezt az egyenletet általános esetre a folytonossági törvény integrál alakjából tudjuk levezetni.

Az (5.9) egyenlet bal oldalának második tagját képező felületi integrált a *Gauss–Osztogradszkij* tétel felhasználásával térfogati integrállá tudjuk átalakítani:

$$\int_{(A)} \rho \mathbf{c} d\mathbf{A} = \int_{(V)} \operatorname{div}(\rho \mathbf{c}) dV \quad (5.18)$$

Ekkor az (5.9) egyenlet — a két integrál összevonása után — az alábbi alakot vesz fel:

$$\int_{(V)} \left[\frac{\partial \rho}{\partial \tau} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{c}) \right] dV = 0 \quad (5.19)$$

Mivel a kiválasztott ellenőrző felület tetszőleges alakú és méretű lehet, a fenti egyenlet integrandusának zérussal kell egyenlőnek lennie, így:

$$\frac{\partial \rho}{\partial \tau} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{c}) = 0 \quad (5.20)$$

Ez az egyenlet pedig a **folytonossági törvény differenciál alakja**.

Speciális alakjai a következő formában írhatók fel:

Stacioner áramlás esetén:

Mivel ekkor az áramló közeg jellemzői időben nem változnak, a

$$\frac{\partial \rho}{\partial \tau} = 0 \quad (5.21)$$

egyenlőség miatt az (5.20) egyenlet az alábbi alakot veszi fel:

$$\operatorname{div}(\rho \mathbf{c}) = 0 \quad . \quad (5.22)$$

Összenyomhatatlan közeg esetén:

Ebben az esetben a ρ sűrűség állandó volta miatt fennáll az (5.21) egyenlőség. Továbbá az (5.22) alakú egyenlet mindkét oldala osztható ρ -val, ezért az általános differenciál alakú folytonossági törvény a

$$\operatorname{div} \mathbf{c} = 0 \quad . \quad (5.23)$$

alakot fogja felvenni. Ez az egyenlet, természetesen, mind stacioner, mind instacioner áramlásra érvényes.

Itt kell megjegyeznünk, hogy inkompresszibilis közeg áramlása esetén a sebességtér divergenciájának számértéke a forrásbőséget jelenti. Mivel anyag nem keletkezhet, és nem tűnhet el, mind a forrást, mind a nyelőt az áramlástanban segédfogalomként alkalmazzuk, leggyakrabban az áramlásba helyezett test közegre gyakorolt hatásának vizsgálatánál.

Egyméretű áramlás esetén:

Ekkor a differenciál alak felírására célszerűbb az integrál alak tárgyalásánál erre az esetre meghatározott

$$\rho c A = \dot{m} = \text{állandó} \quad , \quad (5.24)$$

egyenletet felhasználni, mely jobb oldalának differenciáljáról tudjuk, hogy zérus, azaz:

$$d\dot{m} = \frac{\partial \dot{m}}{\partial c} dc + \frac{\partial \dot{m}}{\partial \rho} d\rho + \frac{\partial \dot{m}}{\partial A} dA = 0 \quad . \quad (5.25)$$

Ha az (5.24) egyenletről a parciális differenciálhányadosokat meghatározzuk:

$$c A d\rho + \rho A dc + \rho c dA = 0 \quad , \quad (5.26)$$

amit $\rho c A \neq 0$ -val osztva, megkapjuk a keresett egyenletet:

$$\frac{d\rho}{\rho} + \frac{dc}{c} + \frac{dA}{A} = 0 \quad . \quad (5.27)$$

Ezt az alakot majd az összenyomható közeg egyméretű áramlásának vizsgálatakor fogjuk alkalmazni, fontos törvényszerűségek kimondásakor.

6. A Bernoulli egyenlet

A korábban már megismert *Euler* egyenlet, bár alapvető aerodinamikai törvényszerűséget ír le, a gyakorlati műszaki életben — a benne szereplő vektormennyiségek és differenciálhányadosaik miatt — nem alkalmazható. A fenti hiányosság kiküszöbölésére vezette le *Daniel Bernoulli*¹ svájci matematikus és fizikus a róla elnevezett aerodinamikai egyenletet.

A *Bernoulli* egyenlet az *Euler* egyenlet az áramlási tér két tetszőleges pontja közti vonalmenti integrálásával nyerhető. Így erő jellegű (dimenziójú) mennyiségek „elmozdulással való szorzásával” munka, energia jellegű skalár változókat kapunk, melyek mérése és számítási kezelése egyszerűbb, a gyakorlati életben jobban használhatóbb.

6.1. A Bernoulli egyenlet általános alakja

A *Bernoulli* egyenlet levezetéséhez először tételezzük fel, hogy az erőtér mind örvénymentes, mind örvényes erőterek eredője, azaz:

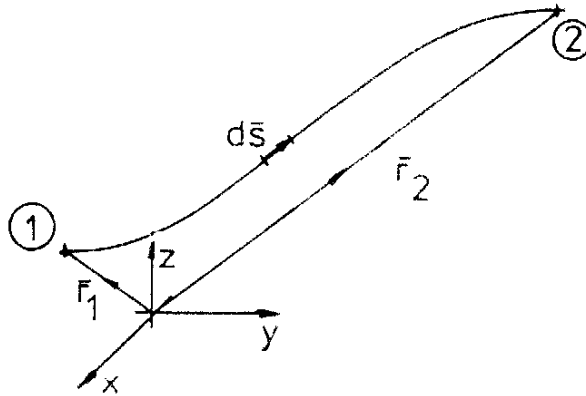
$$\mathbf{g} = -\text{grad } \phi + \mathbf{g}_{\text{II}} \quad , \quad (6.1)$$

ahol:

ϕ — a konzervatív erőtér potenciálja;
 \mathbf{g}_{II} — az örvényes erőtér télerősség vektora.

Így a kiinduló *Euler* — azaz a (3.14) — egyenlet (átrendezés után) az alábbi alakot veszi fel:

$$\frac{\partial \mathbf{c}}{\partial \tau} - \mathbf{c} \times \text{rot } \mathbf{c} + \text{grad} \left(\frac{\mathbf{c}^2}{2} \right) - \text{grad } \phi + \mathbf{g}_{\text{II}} + \text{grad} \frac{p}{\rho} = \mathbf{0} \quad . \quad (6.2)$$



6.1. ábra A Bernoulli egyenlet felírása

A *Bernoulli* egyenlet ezen kifejezés vonalmenti integráljából adódik. Az integrálást az áramlási tér bármely (⊙ és ⊚ jelű) két pontja között, tetszőleges útvonalon végezhetjük el (6.1. ábra). Ekkor:

$$\int_1^2 \frac{\partial \mathbf{c}}{\partial \tau} \cdot \mathbf{ds} - \int_1^2 \mathbf{c} \times \text{rot } \mathbf{c} \cdot \mathbf{ds} + \frac{\mathbf{c}_2^2 - \mathbf{c}_1^2}{2} - [\phi_2 - \phi_1] + \int_1^2 \mathbf{g}_{\text{II}} \cdot \mathbf{ds} + \int_1^2 \frac{dp}{\rho} = 0 \quad (6.3)$$

ahol a bal oldal:

1. tagja: a sebesség nagyságának időbeni változásából;

¹ *Bernoulli, Daniel (1700–1782)*: svájci matematikus, fizikus. A híres Bernoulli család — mely három generáción belül kilenc matematikust adott — tagja. Tudományos munkáját főleg Szentpéterváron és Bázelen folytatta.

2. tagja: a sebességtér örvényességéből;
3. tagja: az eltérő sebességnagyságokból;
4. tagja: a potenciális (örvénymentes) erőteréből;
5. tagja: a nem potenciális (örvényes) erőteréből;
6. tagja: a változó nyomáseloszlásból

származó, vagy ellenükben befektetendő munkákat jelentik.

A további tanulmányainkhoz a **Bernoulli egyenlet inkompresszibilis közeg gravitációs erőterében történő stacioner, örvénymentes áramlásra felírt alakja** is elegendő. Ekkor a (6.3) egyenleten az alábbi egyszerűsítések végezhetőek el:

1. tag: zérussal lesz egyenlő, mert az áramló közeg jellemzői időben nem változnak;
2. tag: zérussal lesz egyenlő, mert az áramlás örvénymentes;
4. tag: felhasználva, hogy a gravitációs erőterben a közeg potenciálja

$$\phi = gh \quad (6.4)$$

egyenlettel határozható meg, ahol:

h — a vizsgált pont zérus helyzeti energiájú helyhez viszonyított magassága.
 g — a nehézségi gyorsulás;

5. tag: értéke zérussá válik, mert a gravitációs erőter örvénymentes;
6. tag: az alábbi alakot veszi fel:

$$\int_1^2 \frac{dp}{\rho} = \frac{1}{\rho} \int_1^2 dp = \frac{p_2 - p_1}{\rho} \quad (6.5)$$

mert az összenyomhatatlan közeg sűrűsége állandó, ezért a ρ sűrűség az integrál jel elé kiemelhető.

A fenti átalakítás után a *Bernoulli* egyenlet:

$$\begin{aligned} \frac{c_1^2}{2} + gh_1 + \frac{p_1}{\rho} &= \frac{c_2^2}{2} + gh_2 + \frac{p_2}{\rho} \\ \frac{c^2}{2} + gh + \frac{p}{\rho} &= \text{állandó} \end{aligned} \quad (6.6)$$

alakot veszi fel. A (6.6) egyenlet minkét oldalának g nehézségi gyorsulással való osztása esetén:

$$\begin{aligned} \frac{c_1^2}{2g} + h_1 + \frac{p_1}{\rho g} &= \frac{c_2^2}{2g} + h_2 + \frac{p_2}{\rho g} \\ \frac{c^2}{2g} + h + \frac{p}{\rho g} &= \text{állandó} \end{aligned} \quad (6.7)$$

egyenletet kapjuk, melynek minden tagja hossz („magasság”) dimenziójú. Az első tagot **sebességi**, a másodikat **geometriai**, míg a harmadikat **nyomásmagasságnak** is nevezzük. A *Bernoulli* egyenlet ezen alakját gyakran energia egyenletként is értelmezik. Az első tag valóban az egységnyi tömegű közeg kinetika, a második tag pedig a potenciális (helyzeti) energiáját jelenti a tér valamely pontján. Viszont fogalmilag helytelen a harmadik tag „nyomásenergia” elnevezése, mert ez nem energia, hanem az egységnyi tömegű kontinuum által a nyomásból származó erő ellenében végzett munka, amikor a közeg a vizsgált ponton áthalad — ez az áttolási munka.

Ha a (6.6) egyenlet oldalait a ρ sűrűséggel szorozzuk, azt a

$$\frac{\rho}{2}c_1^2 + \rho gh_1 + p_1 = \frac{\rho}{2}c_2^2 + \rho gh_2 + p_2 \quad (6.8)$$

$$\frac{\rho}{2}c^2 + \rho gh + p = \text{állandó}$$

formában írhatjuk fel. Ekkor nyomásdimenziójú tagokat kapunk. Könnyen belátható, hogy az egyenlet első tagja a térfogategységnyi közeg kinetikai, a második pedig a potenciális energiáját jelenti a tér valamely pontján. Ezek a tagok tehát energia sűrűségként is értelmezhetők.

Vízszintes vagy elhanyagolható szintkülönbségű áramlás esetén a h geometriai magasság különbség zérusnak tekinthető. Ilyen esetekben a (6.8) egyenlet a

$$\frac{\rho}{2}c^2 + p = \text{állandó} = p_0 \quad (6.9)$$

alakot veszi fel, ahol az első tagot **dinamikus nyomás**nak, a második tagok **statikus nyomás**nak nevezzük. A két nyomás összege — a „középső oldalon” található állandó — pedig az úgynevezett **össznyomás**.

Az áramlásba helyezett szilárd test felületének azon pontjaiban, ahol az áramlási sebesség zérusra csökken, a (6.9) kifejezés értelmében össznyomást mérhetünk. Az ilyen pontokat **torlópont**oknak nevezzük.

6.2. A Bernoulli egyenlet alkalmazása

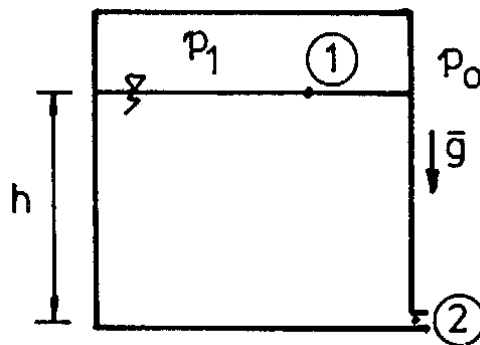
Jelen fejezetben a példák vizsgálatát az összenyomhatatlan közeg, gravitációs erőterben történő stacioner, örvénymentes áramlására végezzük el.

Zárt tartályból való kiömlés:

Határozzuk meg a folyadék kiömlési sebességét a 6.2. ábrán látható tartályból. A tartályban a folyadék fölött a környezetitől eltérő p_1 gáznyomás uralkodik. A tartály keresztmetszete végtelen nagyra tekinthető a kifolyónyíláshoz képest, így a folyadékfelszín süllyedési sebessége elhanyagolható.

A kiömlési meghatározásához először is jelöljük ki azt a két pontot, melyekre felírjuk a *Bernoulli* egyenlet megfelelő alakját. Ez a két pont legyen az:

- ① jelű pont: a folyadékfelszínén, mert itt ismert a nyomás és a közeg sebessége;
- ② jelű pont: a kifolyónyílás, mivel az itteni sebességet kell meghatároznunk.



6.2. ábra Zárt tartályból való kiömlés

Ezek után válasszuk ki a *Bernoulli* egyenlet megfelelő alakját, ami esetünkben:

$$\frac{c_1^2}{2} + gh_1 + \frac{p_1}{\rho} = \frac{c_2^2}{2} + gh_2 + \frac{p_2}{\rho} \quad (6.10)$$

Nézzük meg, hogy milyen egyszerűsítések végezhetők el:

→ a folyadék sebessége a felszínen nulla, így:

$$\frac{c_1^2}{2} = 0 \quad ;$$

→ a zérus potenciálú szintnek a kifolyónyílás magasságát jelöljük ki, ekkor:

$$gh_2 = 0 \quad .$$

A megoldáshoz szükséges (formális) behelyettesítések:

→ ha a ②-es pontot az úgynevezett nulla magasságra helyezzük, az ① jelű pont magassága az ábra szerint:

$$h_1 = h \quad ;$$

→ a ②-es pontban uralkodó nyomás megegyezik a környezeti nyomással, azaz:

$$p_2 = p_0 \quad .$$

A fenti egyszerűsítések és behelyettesítések után a (6.10) egyenlet az alábbi alakot veszi fel:

$$gh + \frac{p_1}{\rho} = \frac{c_2^2}{2} + \frac{p_2}{\rho} \quad , \quad (6.11)$$

amely átrendezésével határozhatjuk meg a keresett c_2 kiáramlási sebességet:

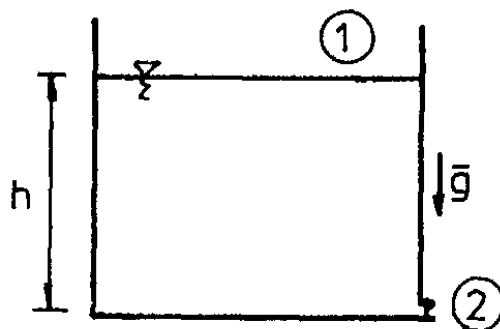
$$c_2 = \sqrt{2 \left(gh + \frac{p_1 - p_0}{\rho} \right)} \quad . \quad (6.12)$$

Természetesen, hasonló probléma esetén más adat is meghatározható — például, milyen nyomás szükséges a tartályban egy adott kiömlési sebesség biztosításához — a (6.11) egyenletből, megfelelő átrendezéssel.

Nyitott tartályból való kiömlés:

Nyitott tartály esetén (lásd 6.3. ábra) a fenti feladat egyszerűbbé válik. Ekkor ugyanis a folyadékfelszín fölötti nyomás megegyezik a környezeti — és így a kifolyónyílásnál mérttel —, azaz:

$$p_1 = p_2 \quad .$$



6.3. ábra Nyitott tartályból való kiömlés

Ezért a (6.11) egyenlet alakja a

$$gh = \frac{c_2^2}{2} \quad , \quad (6.13)$$

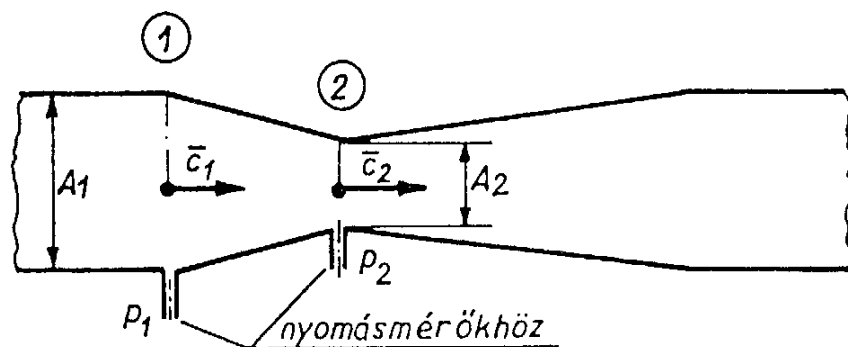
kifejezésre módosul, amelyből a kiömlési sebesség az alábbi módon határozható meg:

$$c_2 = \sqrt{2gh} \quad . \quad (6.14)$$

Ha ezt a két egyenletet összehasonlítjuk a korábbi fizikai és mechanikai tanulmányainkkal, észrevehetjük, hogy ez megegyezik a helyzeti és a mozgási energia közti kapcsolatot leíró kifejezésekkel. A vizsgált jelenség során nem is történik más, mint az 1-es pontban áll közeg a 2-es jelű pontba szabadeséssel jutva helyzeti energiája mozgási energiává alakul át. (Ezen példa is igazolja, hogy az aerodinamikai törvények pusztán csak az alapvető fizikai törvényszerűségek áramló közegre alkalmazott kifejezései.)

A Venturi cső:

A Venturi² csövet a csővezetékben áramló folyadék sebességének és mennyiségének mérésére alkalmazzák. Maga a Venturi cső egy szűkülő csőszakaszból (konfúzból) és egy bővülő csőszakaszból (diffúzból), valamint egy vagy kettő nyomásmérőből áll a 6.4. ábrának megfelelően.



6.4. ábra Venturi cső

Első lépésként jelöljük ki a vizsgálatunkhoz a két pontot, amelyekre felírhatjuk a *Bernoulli* egyenlet megfelelő alakját. Ez a kettő a még állandó keresztmetszetű csőszakaszban található ① jelű, illetve a legszűkebb keresztmetszetben lévő ②-es pont legyen (ahogyan ez a 6.4. ábrán látható).

Ekkor célszerű a (6.9) egyenletből kiindulni, mivel a két pont magassága megegyezik vagy csak nagyon kis mértékben tér el, azaz:

$$\frac{\rho}{2} c_1^2 + p_1 = \frac{\rho}{2} c_2^2 + p_2 \quad . \quad (6.15)$$

Írjuk fel a folytonossági törvényt összenyomhatatlan közeg egyméretű áramlására:

$$A_1 c_1 = A_2 c_2 \quad . \quad (6.16)$$

Ebből fejezzük ki a

$$c_2 = \left(\frac{A_1}{A_2} \right) c_1 \quad (6.17)$$

² *Venturi, G.B. (1746–1822)*: olasz fizikus. Nevéhez fűződik a fent tárgyalt, az áramló közeg sebességének mérésére szolgáló műszer.

sebességet és helyettesítsük be a (6.15) egyenletbe, ekkor:

$$\frac{\rho}{2}c_1^2 + p_1 = \frac{\rho}{2}\left(\frac{A_1}{A_2}\right)^2 c_1^2 + p_2 \quad . \quad (6.18)$$

A (6.18) egyenlet c_1 (zavartalan) sebességre történő átrendezése után az alábbi kifejezést kapjuk:

$$c_1 = \sqrt{\frac{2}{\rho} \frac{p_1 - p_2}{\left(\frac{A_1}{A_2}\right)^2 - 1}} \quad . \quad (6.19)$$

A közeg térfogatárama, pedig az 5. fejezetben tanultak alapján a

$$\dot{V} = A_1 \sqrt{\frac{2}{\rho} \frac{p_1 - p_2}{\left(\frac{A_1}{A_2}\right)^2 - 1}} \quad (6.20)$$

a tömegárama pedig a

$$\dot{m} = \rho A_1 \sqrt{\frac{2}{\rho} \frac{p_1 - p_2}{\left(\frac{A_1}{A_2}\right)^2 - 1}} \quad (6.21)$$

egyenlettel határozható meg.

Meg kell itt jegyezni, hogy a *Venturi* csöveknél általában a legszűkebb (⊙-es jelű) keresztmetszet fele a mért cső A_1 keresztmetszetének, azaz:

$$\frac{A_1}{A_2} = 2 \quad .$$

A Prandtl cső:

Az áramlás valamely pontjában uralkodó sebesség, vagy például a repülőgép repülési sebességének mérésére szolgál a *Prandtl*³ cső, melynek elvi rajza a 6.5. ábrán látható. A köznap nyelvben — helytelenül — ez a műszer a *Pitot*⁴ cső néven ismert.

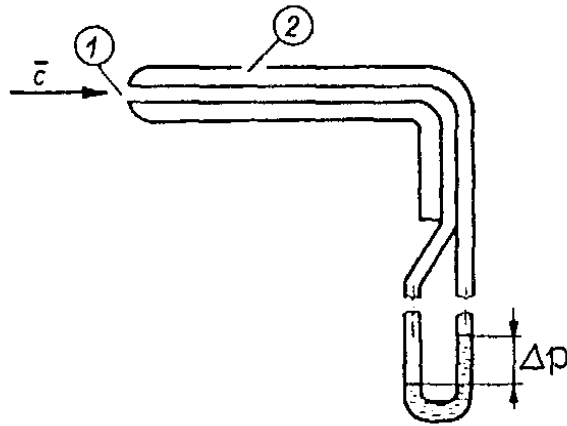
A *Prandtl* cső lényege egy, az áramlással szemben elhelyezett test (szonda), melynek két furatából külön cső vezet a nyomásmérő műszerhez. Az egyik furat a szonda orrpontján (⊙), a másik a paláston, az orrponttól kellő távolságra (⊗) található.

A cső orrpontján (az ⊙-es jelű pontban) a közeg sebessége zérus, itt úgynevezett torlópont keletkezik. A ⊗-es jelű pontban a sebesség — minimális elhanyagolással — ugyanakkora, mint a mérendő áramlási sebesség. A két pont közti magasságeltérés — a szerkezet kis mérete miatt elhanyagolható. Így a korábban felírt (6.9) egyenlet alkalmazható, azaz:

$$\frac{\rho}{2}c_1^2 + p_1 = \frac{\rho}{2}c_2^2 + p_2 \quad . \quad (6.22)$$

³ **Prandtl, Ludwig (1875–1953):** német fizikus, aerodinamikus. Nevéhez fűződik a Göttingeni Kísérleti Aerodinamikai Állomás létrehozása. Fontos szerepe volt a véges szárny elméletének kidolgozásában és a határreteg-elmélet megalapozásában. Őt tekintik a modern hidro- és aerodinamika megalapozójának.

⁴ **Pitot, Henri (1695–1771):** francia mérnök. Nevét ismerté a vízsebességmérő készülékével tette, mely az áramló közeg össznyomásának mérésén alapszik.



6.5. ábra Prandtl cső

Az előzőekben leírtak alapján kijelenthető, hogy:

$$\frac{\rho}{2} c_1^2 = 0 \quad ,$$

illetve:

$$c = c_2 \quad .$$

Továbbá a nyomásmérőről megállapítható, hogy az a két pont közti statikus nyomáskülönbséget méri, azaz:

$$\Delta p = p_1 - p_2 \quad .$$

A fenti egyszerűsítések és behelyettesítések elvégzésével a (6.22) egyenlet a

$$p_1 = \frac{\rho}{2} c^2 + p_2 \tag{6.23}$$

alakot vesz fel, amely a c sebességre történő átrendezése után kapjuk meg az áramlási sebesség meghatározásához szükséges egyenletet:

$$c = \sqrt{\frac{2}{\rho}(p_1 - p_2)} = \sqrt{\frac{2}{\rho} \Delta p} \quad . \tag{6.24}$$

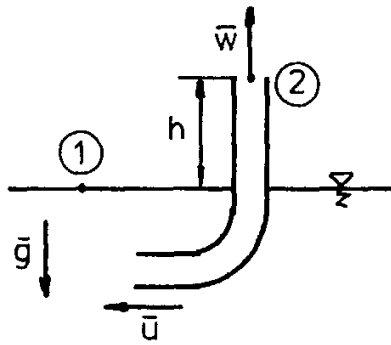
Egyszerű szivattyú:

A régi gőzmozdonyoknál menet közben a vízfelvétel a 6.6. ábrán látható cső — mint egy egyszerű szivattyú — történt. Ekkor az u sebességgel haladó cső alsó, előrehajló része a sínszalak közé épített, vízzel töltött csatornába ért. Most határozzuk meg, hogy mekkora ezen egyszerű szivattyú vízszállítása.

A feladat megoldásához írjuk fel a *Bernoulli* egyenlet a csőhöz rögzített koordináarendszerben. Az ①-es pontnak vegyük fel a zavartalan vízfelszín egy pontját. A ② jelű pont pedig a cső felső vége legyen. Válasszuk ki a *Bernoulli* egyenlet megfelelő alakját. Ez legyen a

$$\frac{c_1^2}{2} + gh_1 + \frac{p_1}{\rho} = \frac{c_2^2}{2} + gh_2 + \frac{p_2}{\rho} \tag{6.25}$$

egyenlet.



6.6. ábra Egyszerű szivattyú

Határozzuk meg az elvégzendő egyszerűsítéseket és (formális) behelyettesítéseket. Ezek:

- az ① pont magasságát vegyük zérusnak, így:

$$gh_1 = 0 \quad ;$$

- a választott vonatkoztatási rendszer miatt az ① pont sebessége:

$$c_1 = -u \quad ;$$

- a nyomás értéke mindkét pontban a környezetivel megegyezik, tehát:

$$p_1 = p_2 \quad ;$$

- a ② pontban a közeg sebessége:

$$c_2 = w \quad ;$$

- a ② pont magassága (az első egyszerűsítő feltétel miatt):

$$h_2 = h \quad .$$

A fentiek alapján a (6.25) egyenlet az alábbi alakot ölti:

$$\frac{u^2}{2} = \frac{w^2}{2} + gh \quad , \quad (6.26)$$

melyből:

$$w = \sqrt{u^2 - 2gh} \quad . \quad (6.27)$$

A fenti egyenlet matematikailag akkor van valós megoldása, ha

$$u^2 > 2gh \quad ,$$

ami fizikailag értelmezve azt jelenti, hogy csak ekkor lép ki folyadék a cső felső végén. Az

$$u^2 = 2gh$$

egyenlőség fennállása a folyadék éppen a cső végéig emelkedik fel.
A szivattyú térfogatárama a folytonossági törvény szerint a

$$\dot{V} = A\sqrt{u^2 - 2gh} \quad , \quad (6.28)$$

a tömegárama pedig a

$$\dot{m} = \rho A\sqrt{u^2 - 2gh} \quad . \quad (6.29)$$

egyenlettel határozható meg, ahol:

A — a könyökső keresztmetszete.

7. Az impulzus tétel

Egy m tömegű \mathbf{c} sebességgel mozgó anyagi pont **I impulzusán** az

$$\mathbf{I} = m\mathbf{c} \quad (7.1)$$

vektort értjük, amit más néven **mozgásmennyiségnek** nevezünk.

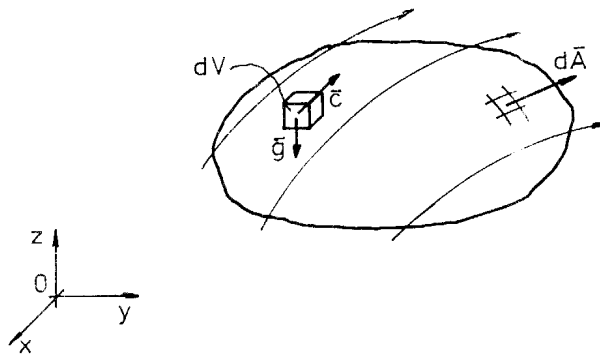
Newton második törvénye alapján kimondható, hogy a mozgásmennyiség időegységre eső megváltozása egyenlő a tömegpontra ható erők eredőjével, azaz:

$$\frac{d\mathbf{I}}{d\tau} = \frac{d}{d\tau}(m\mathbf{c}) = \sum \mathbf{F} \quad (7.2)$$

Fejezetünkben az impulzus, illetve az impulzusnyomatéki tételt fogjuk alkalmazni áramló közegre. A tételek segítségével a közeg által az áramlásba helyezett szilárd testre vagy az áramlás határoló felületre átadott erő vagy nyomaték számítható ki akkor is, ha az áramlást csupán egy ellenőrző felület mentén ismerjük.

7.1. Az impulzus tétel általános alakja

Az aerodinamika impulzus tétel általános alakjának felírását a fenti, (7.2) egyenlet alapján végezzük el (7.1. ábra).



7.1. ábra Az impulzus tétel felírása

Elsőként írjuk fel a (7.2) egyenlet jobb oldalát az *Euler* egyenlet felírásánál meghatározott módon, azaz:

$$\sum \mathbf{F} = \int_{(V)} \rho \mathbf{g} dV - \int_{(A)} p d\mathbf{A} \quad (7.3)$$

Az egyenlet bal oldalának felírásához a folytonossági törvény tanulmányozáskor alkalmazott gondolatmenetet használjuk. Ez alapján az elemi nagyságú ellenőrző felületen átlépő közeg mozgásmennyisége:

$$d\dot{\mathbf{I}} = \mathbf{c}(\rho \mathbf{c}) d\mathbf{A} \quad (7.4)$$

illetve a teljes ellenőrző felületen átlépő közeg konvektív mozgásmennyiség változása:

$$\dot{\mathbf{I}}_{konv} = \int_{(A)} \mathbf{c}(\rho \mathbf{c}) d\mathbf{A} = \int_{(A)} \mathbf{c} d\dot{m} \quad (7.5)$$

Az ellenőrző térfogatban fellépő lokális impulzusváltozás a:

$$\frac{\partial \mathbf{I}}{\partial \tau} = \int_{(V)} \frac{\partial(\rho \mathbf{c})}{\partial \tau} dV \quad (7.6)$$

térfogati integrál értékével lesz egyenlő.

A fentiek alapján a (7.2) egyenlet az alábbi alakot veszi fel:

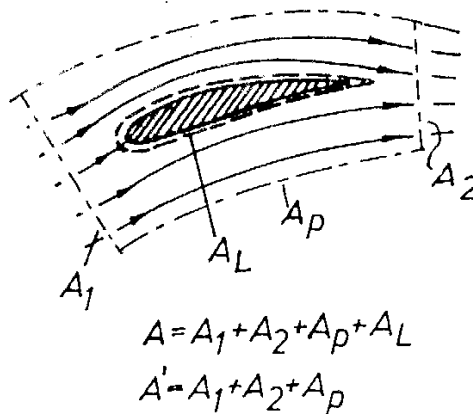
$$\frac{d\mathbf{I}}{d\tau} = \int_{(V)} \frac{\partial(\rho\mathbf{c})}{\partial\tau} dV + \int_{(A)} \mathbf{c}dm = \int_{(V)} \rho\mathbf{g}dV - \int_{(A)} p\mathbf{dA} \quad , \quad (7.7)$$

amely az impulzus tétel általános alakja.

Fizikai tartalma a következő: A nyitott rendszer mozgásmennyiségének időegységre jutó megváltozása (a bal oldal) egyrészt a rendszerhatáron átlépő kontinuumhoz kötötten be-, és kiáramló impulzusok különbsége (a "középső oldal" második tagja, másrészt a rendszerre ható erőkre)jobb oldal) vezethető vissza. Meg kell jegyezni, hogy e fenti két hatás különbségét fejezi ki a "középső oldal" első tagja. Ez a tag az ellenőrző felületen belül maradó részecskék mozgásmennyiségének változását (a lokális impulzusváltozást) adja meg és stacioner áramlás esetén azonosan zérussal lesz egyenlő. Így az időálló áramlásra felírt impulzus tétel:

$$\int_{(A)} \mathbf{c}dm = \int_{(V)} \rho\mathbf{g}dV - \int_{(A)} p\mathbf{dA} \quad (7.8)$$

alakú lesz



7.2. ábra Az impulzus tétel alkalmazása

A gyakorlati alkalmazás szempontjából célszerű a felületi erőket szétválasztani. Vegyük külön az ellenőrző felület A' jelű, úgynevezett szabad (például a 7.2. ábrán a pontvonalak), az áramlásba helyezett testtel vagy az áramlást határoló fállal nem érintkező, részét, illetve a test áramlásra gyakorolt \mathbf{F}_R felületi erőket. Így:

$$\int_{(A)} p\mathbf{dA} = \int_{(A')} p\mathbf{dA} - \mathbf{F}_R \quad . \quad (7.9)$$

(Az ellenőrző felület fent bevezetett felosztására még pontos, gyakorlati példákat a 7.3. fejezetben találhatunk.)

A (7.9) kifejezés alapján az áramlástanai impulzus tétel stacionárius áramlásra az

$$\int_{(A')} \mathbf{c}dm = \int_{(V)} \rho\mathbf{g}dV - \int_{(A')} p\mathbf{dA} + \mathbf{F}_R \quad (7.10)$$

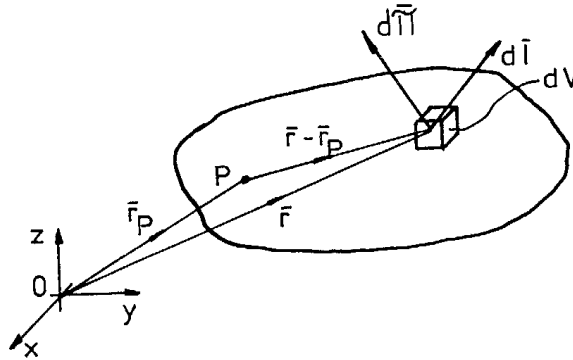
alakban írható fel.

7.2. A perdület tétel

Egy dm tömegű, \mathbf{c} sebességgel mozgó anyagi pontnak a tér valamely tetszés szerinti — \mathbf{r}_P helyvektorral megadott — P pontjára vett impulzusnyomatékán (más néven perdületén) a

$$d\mathbf{\Pi} = (\mathbf{r} - \mathbf{r}_P) \times \mathbf{c} dm \quad (7.11)$$

vektort értjük (7.3. ábra).



7.3. Perdület tétel felírása

Továbbiakban — az egyszerűbb írásmód érdekében — a koordináta-rendszer origóját a P pontban helyezzük el, így:

$$\mathbf{r}_P = \mathbf{0}$$

Egy V térfogatú rendszer impulzusnyomatéka a

$$\mathbf{\Pi} = \int_{(V)} (\mathbf{r} \times \mathbf{c}) \rho dV \quad (7.12)$$

térfogati integrállal határozható meg, mivel a perdület extenzív fizikai mennyiség.

Egy zárt rendszer bármely tetszőleges pontra vett impulzusnyomatékának időegységre eső megváltozása egyenlő a rendszerre ható erők ugyanazon pontra vett nyomatékainak eredőjével. Ez a törvény matematikailag — az impulzus tétel felírásával analóg módon — az alábbi formában írható fel:

$$\frac{d\mathbf{\Pi}}{d\tau} = \int_{(V)} \frac{\partial}{\partial \tau} [\rho(\mathbf{r} \times \mathbf{c})] dV + \int_{(A)} \rho(\mathbf{r} \times \mathbf{c}) \mathbf{c} dA = \sum \mathbf{M} \quad (7.13)$$

Stacioner áramlás esetén:

$$\int_{(V)} \frac{\partial}{\partial \tau} [\rho(\mathbf{r} \times \mathbf{c})] dV = \mathbf{0} \quad .$$

A (7.13) egyenlet jobb oldala részletesen a nyomaték és az erő közti

$$\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$$

kapcsolat felhasználásával a (7.10) egyenlet jobb oldala alapján írható fel, az alábbi módon:

$$\sum \mathbf{M} = \int_{(V)} \mathbf{r} \times \rho \mathbf{g} dV - \int_{(A)} \mathbf{r} \times p dA + \mathbf{M}_R \quad , \quad (7.14)$$

ahol:

\mathbf{M}_R — az áramlásba helyezett test vagy az áramlást határoló fal közre gyakorolt erőinek nyomatéka, azaz:

$$\mathbf{M}_R = \mathbf{r}_R \times \mathbf{F}_R \quad .$$

A (7.13) és a (7.14) kifejezések alapján az áramlástan impulzusnyomatéki tétele (figyelembe véve a 7.1. fejezetben leírt levezetést és annak indoklásait):

$$\int_{(V)} \frac{\partial}{\partial \tau} [\rho(\mathbf{r} \times \mathbf{c})] dV + \int_{(A')} \rho(\mathbf{r} \times \mathbf{c}) \mathbf{c} dA = \int_{(V)} \mathbf{r} \times \rho \mathbf{g} dV - \int_{(A')} \mathbf{r} \times p dA + \mathbf{M}_R \quad , \quad (7.15)$$

illetve stacioner áramlás esetén:

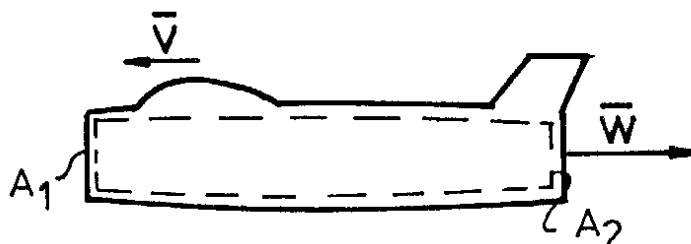
$$\int_{(A')} \rho(\mathbf{r} \times \mathbf{c}) \mathbf{c} dA = \int_{(V)} \mathbf{r} \times \rho \mathbf{g} dV - \int_{(A')} \mathbf{r} \times p dA + \mathbf{M}_R \quad , \quad (7.16)$$

Az impulzusnyomatéki tétel legfontosabb alkalmazása az áramlástechnikai gépek (szivattyúk, kompresszorok, turbinák) területén van. Az ezen gépek működésének alapelvét kifejező, úgynevezett *Euler*-féle turbina egyenlet legegyszerűbben a perdület tétel segítségével tudjuk levezetni.

7.3. Az impulzus tétel alkalmazása

Sugárhajtómű tolóereje

A sugárhajtómű tolóerejének egyszerű meghatározásához vizsgáljuk meg a 7.4. ábrán látható sugárhajtóműves repülőgépen áthaladó gázáramot. Ehhez először is jelöljük ki az ellenőrző felületet, amit az ábrán a szaggatott vonal mutat.



7.4. ábra Hajtómű tolóerő meghatározás

Ekkor az ellenőrző felület szabad részét a rajzon A_1 és A_2 jelű be-, illetve kiömlő keresztmetszetek alkotják, így a (7.10) egyenlet bal oldalán található integrál gyakorlatilag az

$$\int_{(A')} \mathbf{c} d\dot{m} = \mathbf{w}\dot{m} - \mathbf{v}\dot{m}$$

alakra egyszerűsödik, ahol:

- \mathbf{v} — a repülőgép repülési sebessége;
- \mathbf{w} — a hajtóműből kiáramló gáz sebessége.

(Tekintsünk el a tüzelőanyag betáplálás, illetve a hajtóműből történő levegő-, vagy gázvezetés okozta tömegáram-eltérésektől. Ezek úgysis nagyságrenddel vagy nagyságrendekkel kisebbek a fő gázáramnál.)

Felvetődhet a kérdés, hogy miért a kiáramló gázmennyiség impulzusa lett pozitív előjelű? Erre a magyarázatot a (7.5) kifejezés ad. Mivel az elemi felületvektorokat a rendszerből kifele mutatva vettünk fel, a rendszerből távozó impulzus pozitív, míg a rendszerbe érkező mozgásmennyiség negatív értelmezést kap.

Az egyszerűség kedvéért hanyagoljuk el a hajtóművön átáramló gáz súlyát, azaz:

$$\int_{(V)} \rho \mathbf{g} dV = \mathbf{0} \quad ,$$

illetve a környezeti levegő nyomásából származó erőket, azaz:

$$\int_{(A')} p d\mathbf{A} = \mathbf{0} \quad .$$

A fentiek alapján a (7.10) egyenlet az alábbi alakot veszi fel:

$$\mathbf{w}\dot{m} - \mathbf{v}\dot{m} = \mathbf{F} \quad .$$

Ez az \mathbf{F} erő az, amellyel a repülőgép hajtóműve hat a rajta átáramló közegre. A *D'Alambert*⁵ elv alapján viszont kimondható, hogy a gáz ugyanekkora nagyságú, de ellentétes irányú erővel fog hatni a repülőgépre, amely erőt a hajtómű tolóerejének nevezzük.

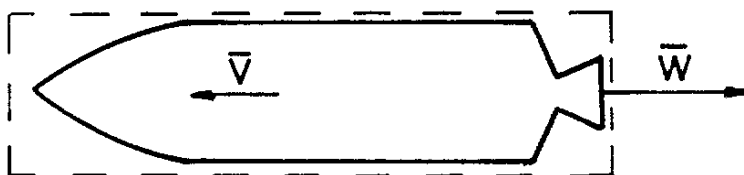
Mivel a be- és kiáramló közeg sebessége egy egyenesbe esik, és csak az erő nagyságára vagyunk kíváncsiak (iránya a repülés irányába kell hogy mutasson) a sebességek abszolút értékeivel is számolhatunk. Így a hajtómű tolóereje az

$$F = \dot{m}(w - v) \quad (7.17)$$

egyenlettel határozható meg.

Rakéta tolóereje

A rakéta tolóereje szintén az impulzus tétel segítségével számítható, az előző példához hasonló módon.



7.5. ábra Rakéta tolóerejének meghatározása

Vegyük fel a 7.5. ábrán látható rakéta körül az ellenőrző felületet (szaggatott vonal). Mivel a rakéta működési sajátossága, hogy mind a tüzelő, mind az oxidáló anyagot magával viszi, azt tapasztaljuk, a felvett ellenőrző felületen csak kiáramló gáz halad át, azaz a (7.10) kifejezés bal oldala az

$$\int_{(A')} c d\dot{m} = \mathbf{w}\dot{m}$$

alakúvá válik. Így — a sugárhajtómű tolóerő meghatározásánál figyelembe vett egyszerűsítések és fizikai megfontolások alapján — a rakétahajtómű tolóereje az:

$$F = \dot{m}w \quad (7.18)$$

kifejezéssel határozható meg.

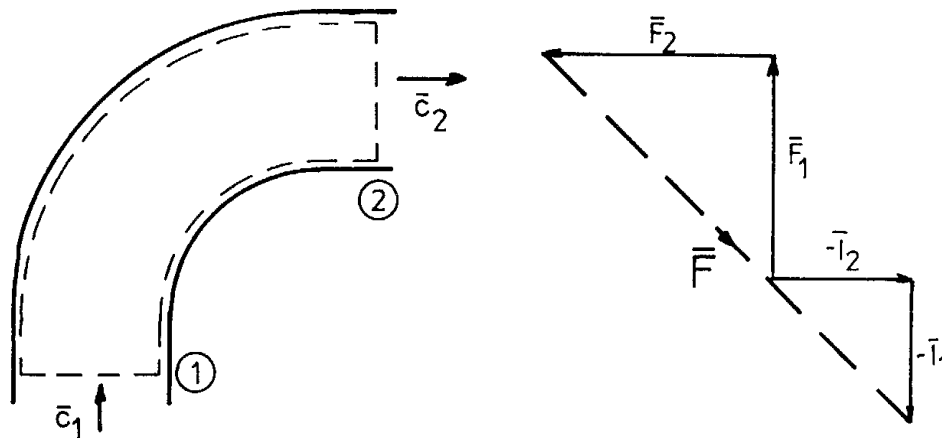
Könyöksőre ható erő

Különbféle folyadékot szállító csővezetékeknél külön figyelembe kell vennünk az irányeltéréseknél fellépő csőre ható erőket. Határozzuk most meg egy ilyen, derékszögű elfordítás miatt a csövet terhelő erőt, amelyről már most tudjuk, hogy egyenlő nagyságú, de ellentétes irányú a folyadékra ható erővel.

A csővezetékét a vízszintes síkban helyezük el, így eltekinthetünk a benne áramló folyadék súlyától. A 7.6.

⁵ *D'Alambert, Jean-Baptiste le Rond (1717–1783)*: Francia fizikus, matematikus, természetfilozófus. A francia felvilágosodás vezető alakjai közé tartozott. Az analitikus mechanika egyik megalapítója.

ábrán ezt a könyöksövet láthatjuk, ahol az ellenőrző felületet szaggatott vonal jelzi. A be-, és kilépő keresztmetszetekben (melyek együttesen alkotják a 7.1. fejezetben említett A' felületet) a nyomásból származó erőket és impulzusokat skalárisan számoljuk, majd síkban, vektorosan ábrázolva határozzuk meg az eredő erő nagyságát és irányát.



7.6. ábra Könyöksőre ható erő meghatározása

A belépő keresztmetszeten:

- a közeg mozgásmennyiségének nagysága:

$$I_1 = A_1 \rho c_1^2 \quad ;$$

- a közegre ható nyomásból származó erő nagysága

$$F_1 = p_1 A_1 \quad .$$

Mindkettő az ábrán felfelé mutat.

A kilépő keresztmetszeten:

- a közeg mozgásmennyiségének nagysága:

$$I_2 = A_2 \rho c_2^2 \quad ;$$

- a közegre ható nyomásból származó erő nagysága

$$F_2 = p_2 A_2 \quad .$$

Mindkettő az ábrán balra mutat.

Az eredő erő nagyságát a fent meghatározott vektorok alapján a *Pitagorasz*⁶ tétel felhasználásával számíthatjuk ki:

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 - (\mathbf{I}_2 + \mathbf{I}_1) \quad (7.19)$$

$$F = \sqrt{(F_1 + i_1)^2 + (F_2 + I_2)^2}$$

⁶ *Pitagorasz (i.e.VI.sz.)*: ógörög matematikus. Misztikus, legendákkal körülvett életéről alig tudunk valamit. Az itt is alkalmazott és nevét viselő tétel nem tőle származik, hiszen már előtte nyomára akadhatunk Egyiptomban vagy Babilóniában.

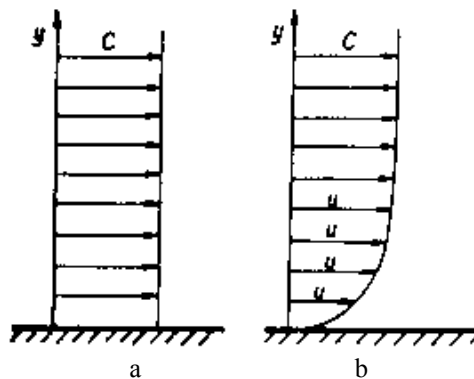
8. A kontinuumsúrlódás alapjelenségei

A valóságos folyadékokban és gázokban — az anyag jellemzőitől függően — kisebb-nagyobb súrlódó erő ébred a kontinuum egyes részecskéi között, de csak akkor, ha azok egymáshoz képest elmozdulnak. Ezért fontos hangsúlyozni, hogy valóságos közegben nyugalmi súrlódás nincs, de van a sebességgel növekvő mozgó súrlódás.

A nyugalmi súrlódás hiánya miatt, végtelen lassú elmozduláshoz végtelenül kicsi erő szükséges.

Egy síkfalal párhuzamos áramlásban az ideális kontinuumra felírt összefüggések szerint a fal jelenléte nem befolyásolja az áramképet, az egyes részecskék sebessége ugyanolyannak mutatkozik, mintha a fal ott sem lenne (8.1a ábra). Ekkor homogén sebességtér esetén a falig változatlan sebességeloszlást nyerünk, az ideális közeg áramlására érvényes törvényszerűségek alapján.

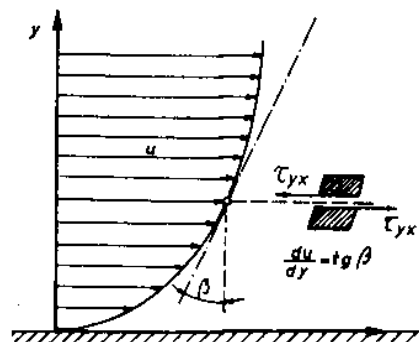
Azonban, a tapasztalat szerint a kontinuum szilárd fallal érintkező részecskéi a falhoz tapadnak, azaz a falhoz képesti relatív sebességük zérus lesz (ez az úgynevezett tapadási feltétel). Szemléletesen úgy lehet ezt elképzelni, hogy a falhoz legközelebb haladó részecske elakad a fal valamelyik egyenetlenségében. Csak a faltól bizonyos távolságnál messzebb lévő folyadékreszek sebessége éri el a súrlódásmentes áramlásra meghatározott értéket. Közben az u helyi sebességek folyamatosan változnak zérusról az ideális közeg áramlására jellemző, c -vel jelölt sebességig, ahogyan ez a 8.1b ábrán is látható.



8.1. ábra Fal melletti sebesség eloszlás súrlódásmentes (a) és súrlódásos (b) közeg esetén

8.1. A Newton formula

Az áramló közegben az áramlási sebességgel — azaz sík felület mentén a szilárd fallal — párhuzamos síkokban τ csúszató feszültség keletkezik (8.2. ábra). Ez a csúszató feszültség, a szilárd testeknél tapasztalható súrlódástól eltérően, nem függ az egymáshoz képest elcsúszó rétegek összeszorító erőitől (azaz a közegben uralkodó nyomástól), hanem csak a szomszédos rétegek közötti sebességkülönbségtől.



8.2. ábra A Newton formula felírása

Ezt a törvényt először *Sir Isaac Newton* angol fizikus fogalmazta meg. A Newton-féle súrlódási törvény szerint a keletkező csúszató feszültség:

$$\tau = \mu \frac{du}{dy} \quad (8.1)$$

ahol:

u — a közeg helyi sebessége;

y — a faltól mért távolság;

μ — a közeg anyagára jellemző arányossági tényező, melyet dinamikai viszkozitási tényezőnek nevezünk. Mértékegysége: Nms^{-2} .

A gyakorlatban inkább a ν -vel jelölt kinematikai viszkozitási tényezőt alkalmazzuk, amely a:

$$\nu = \frac{\mu}{\rho} \quad (8.2)$$

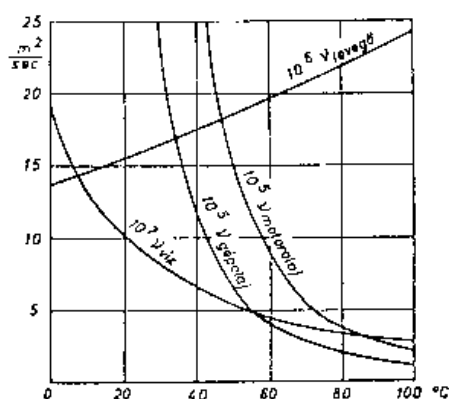
összefüggéssel számítható. Mértékegységei a m^2s^{-1} és a St (*Stokes*):

$$1\text{m}^2\text{s}^{-1} = 10^4 St$$

Így a rétegek közti csúsztató feszültség a

$$\tau = \rho\nu \frac{du}{dy} \quad (8.3)$$

alakban is kifejezhető.



8.3. ábra Anyagok kinematikai viszkozitási tényezőinek változása a hőmérséklet függvényében

A kinematikai viszkozitási tényező értéke az egyes anyagoknál a hőmérséklettel lényeges mértékben változik. A hőmérséklet növekedésével a folyadékoknál csökken, a gázok esetében pedig nő. Értékét a gázoknál a hőmérsékleten kívül a nyomás is befolyásolja. A 8.3 ábrán látható grafikon különféle anyagok kinematikai viszkozitási tényezőjének változását mutatja a hőmérséklet függvényében.

8.2. Navier–Stokes egyenlet

A *Navier*¹–*Stokes*² egyenlet a sűrűlódásos közeg áramlásának alapegyenlete, *Newton* második törvényének felírása a sűrűlódásos közeg áramlására.

Mivel a *Navier–Stokes* egyenlet lényegében a korábban megismert *Euler* egyenlet úgymond sűrűlódásos párja, levezetése hasonlóan történhet.

Sűrűlódásos kontinuum esetén a felületi erők nem csak — az ideális közegnél már megismert — nyomásból, hanem a közeg sűrűlódásából is keletkezhetnek. Ezeket mint felületegységre jutó erőket tudjuk jellemezni, amit

¹ *Navier, Louis (1785–1836)*: francia fizikus. A rugalmasság elméletével és a folyadékok sűrűlódásával foglalkozott. A "gyorsulásáról nevezetes" Coriolis közvetlen munkatársa volt.

² *Stokes, Sir George Gabriel (1819–1903)*: brit matematikus, fizikus. Nevéhez fűződik a mozgó folyadékok sűrűlódásának modern elmélete valamint a nevét viseli egy általánosan alkalmazott integráltétel is.

— a szilárdságtanból átvett kifejezéssel — feszültségeknek nevezünk. Ezen feszültségek egyikével találkoztunk a *Newton*-féle sűrűdési törvénynél. A fenti fizikai megfontolást figyelembe véve, a bonyolult vektoranalitikus levezetést mellőzve az összenyomhatatlan közeg áramlására felírt **Navier–Stokes egyenlet** az alábbi alakot veszi fel:

$$\mathbf{g} + \nu \Delta \mathbf{c} - \text{grad} \frac{p}{\rho} = \frac{\partial \mathbf{c}}{\partial \tau} + \text{grad} \left(\frac{c^2}{2} \right) - \mathbf{c} \times \text{rot} \mathbf{c} \quad (8.4)$$

Az egyenlet bal oldalának második tagja fejezi ki a közeg sűrűdése következtében fellépő erőket, és ahol:

Δ — a Laplace³ operátor:

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (8.5)$$

8.3. Nem newtoni folyadékok

A Newton formula az áramló közeg rétegei közti τ csúsztató feszültségre — mint azta a (8.1) egyenletben már leírtuk — a

$$\tau = \mu \frac{du}{dy}$$

összefüggést állapította meg. A függvényt ábrázoló egyenes, amit a 8.4. ábra szemléltet, a reológiai vonal. Az ilyen sűrűdési tulajdonságokkal bíró anyagokat newtoni közegeknek hívjuk.

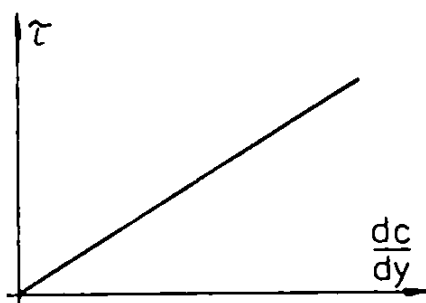
A newtoni összefüggés azonban nem mindegyik anyagra igaz, ezért az olyan anyagokat, melyekre nem igaz a (8.1) kifejezés, összefoglaló névvel **nem newtoni anyagok**nak vagy **anomális folyadék**oknak nevezzük. Sokféle nem newtoni anyagot ismerünk, ezek fontossága az élelmiszer és kozmetikai iparban jelentős. Tulajdonságaik megismerésével foglalkozó tudományág a **reológia**.

A nem newtoni folyadékok jellemzésére a newtoni anyagokétól eltérő reológiai vonalukat használjuk fel. A következőkben néhány példát mutatunk be.

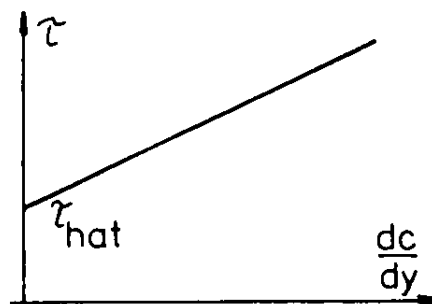
Plasztikus anyagnak nevezük az olyanokat, amelyek reológiai vonala egy állandó csúsztató feszültséggel kezdődik. Ezt a kezdő értéket τ_{hat} határ csúsztató feszültségnek nevezzük, így:

$$\tau = \tau_{hat} + \mu \frac{du}{dy} \quad \text{ha} \quad \frac{du}{dy} > 0 \quad (8.6)$$

A plasztikus közeg reológiai vonalát a 8.5. ábra mutatja. Ilyen anyag például a kakaóvaj, a fogkrém és az olajfesték.



8.4. ábra Newtoni folyadék reológiai görbéje



8.5. ábra Plasztikus anyag reológiai görbéje

³ **Laplace, Pierre Simon (1749–1827)**: francia matematikus, csillagász. Tanulmányait a beaumonti katonai iskolában végezte. Később az *École Militaire* matematika tanárává nevezték ki.

Az olajfestéknél rendkívül fontos a határfeszültség értéke. Kellő értékre való beállítása a festékipar kényes és sok gondot okozó feladata. A határfeszültség értékét úgy kell beállítani, hogy függőleges falra festve az olajfesték a falnál jelentkező τ_{hat} -ból adódó nyíróerő egyenlő (vagy nagyobb) legyen a festékréteg súlyával. Ha ugyanis a határfeszültség kicsi, a festék lecsorog. Túl nagy határfeszültség sem előnyös, mert megakadályozza a kapilláris erők munkáját s ekkor nem tűnnek el az esetnyomok.

Pszuedoplasztikusnak nevezzük azokat a közegeket, amelyek reológiai vonala a

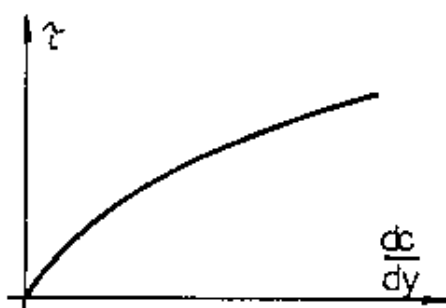
$$\tau = k \left(\frac{du}{dy} \right)^n \quad (8.7)$$

egyenlettel írható le.

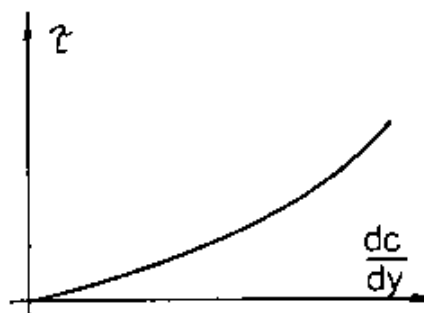
Ezen csoporton belül a struktur viszkózusnak hívjuk a 8.6. ábrán bemutatott reológiai vonalú anyagokat, amelyek molekuláik rendeződése miatt mutatják ezt az alakot. A nevük is a molekula szerkezetükről (struktúrájáról) függő viszkozitásukat jelzi. Ilyen tulajdonsággal rendelkezik például a tej, a tejszín és a sűrített paradicsom.

Ritka az olyan alakú reológiai vonal, mint amit a 8.7. ábra szemléltet. Bizonyos körülmények között, ha sok szilárd szemcse van a folyadékban, ilyen alakot kaphatunk. Ezeket az anyagokat dilatálónak nevezzük.

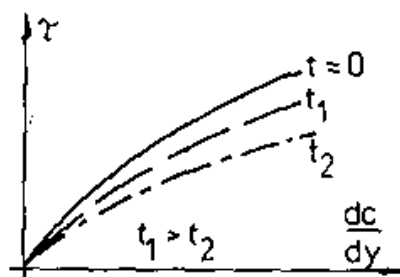
Thixotropnak nevezzük az olyan anyagokat, amelyeknek reológiai vonala "előéletük"-től függ. Például a keverés az ilyen anyagoknál molekuláris kapcsolatukat zúzza szét s így az eredeti reológiai vonala megváltozik. A változás után, bizonyos idő múlva az eredeti görbe visszaáll. Ezt szemlélteti a 8.8. ábra.



8.6. ábra Struktur viszkózus anyag reológiai görbéje



8.7. ábra Dilatáló anyag reológiai görbéje



8.8. ábra Thixotrop anyag reológiai görbéje

Viszkoelasztikus az az anyag, amelynél az

$$f \left(\tau, \frac{d\tau}{dt}, \frac{d^2\tau}{dt^2}, \frac{du}{dy}, \frac{d^2u}{dy^2} \right) = 0 \quad (8.8)$$

függvény rendkívül bonyolult függvénykapcsolatot rejt.

8.4. A lamináris és a turbulens áramlás

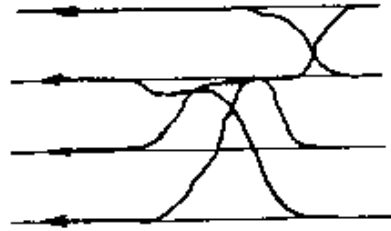
A valóságos közeg molekuláris szerkezete miatt a fő áramlási irányra merőlegesen is végezhetnek mozgásokat. Ezért az áramlásokat két csoportra oszthatjuk a molekulák mozgása alapján.

Lamináris — vagy más néven **réteges** — az áramlás, ha benne a részecskék egymás mellett, keveredés nélkül, tehát egyedi állandó pályákon haladnak (8.9. ábra). A stacionárius lamináris áramlás úgy is jellemezhető, hogy az áramlás kicsiben — molekuláris szinten — is időálló. Ezért az áramvonalak egyben a részecskék pályagörbéi is.

Turbulens — vagy gomolygó — az olyan áramlás, amelyben nem alakul ki rétegződés, hanem a szomszédos részecskék pályái — a sebességük irányának és nagyságának ingadozásai miatt — egymásba fonódnak, az áramlás keveredik (8.10. ábra). Ekkor a fő áramlási irányra merőleges azzal összemérhető mértékű sebesség-ingadozások lépnek fel. Stacioner turbulens áramlás úgy is jellemezhető, hogy az áramlás csak nagy léptékben időálló. Turbulens áramlás esetén az áramvonalak és a molekulák pályagörbéi nem azonosak egymással.



8.9. ábra Lamináris áramlás áramképe



8.10. ábra Turbulens áramlás áramképe

9. Áramlások hasonlósága

Az aerodinamikai kísérletek döntő többségét az áramlásba helyezett test kicsinyített másán, szél- vagy vízcsatornában végzik el. Ahhoz, hogy két egymással geometriailag hasonló (például a valódi és a lekicsinyített hajótest körüli) térben az áramlás szintén geometriailag hasonló legyen — azaz az áramvonalak is hasonlóak legyenek —, nem elegendő a határoló felületek hasonlósága, hanem az is szükséges, hogy a különféle eredetű erők is azonos viszonyban legyenek egymással. Ezzel a kérdéskörrel foglalkozik a fizikai folyamatok hasonlóságát vizsgáló tudományág, a **hasonlóságelmélet**. A hasonlóság elmélet alapján fejlődött ki a **dimenzióanalízis**, mint vizsgálati módszer.

A dimenzióanalízis egy, a kísérleti vagy gyakorlati vizsgálati eredmények kiértékeléséhez használt eljárás. Segítségével az ismeretlen elméleti összefüggések egyszerűbb formában megadhatóvá válhatnak. Lényege, hogy olyan összefüggést keresünk a függő és a független változók között, mely a változók dimenziója alapján helyes. A felállított összefüggéssel kapott eredmény dimenziója meg kell hogy egyezzen a keresett függő változó dimenziójával.

A hasonlóságelmélet lényegében a geometriai hasonlóság fogalmának általánosítása, a folyamatokat a **hasonlósági kritérium**ok alapján veti egybe. Ezek úgynevezett dimenzió nélküli számok (pontosan fogalmazva a dimenziójuk 1). Ha két folyamat hasonlósági kritériumai megegyeznek, akkor az a két fizikai folyamat egymással egybevethető, attól függetlenül, hogy a geometriai méretek, sebességek, erőhatások nem egyenlők.

Áramló közeg esetén az egyes folyadékreszekre ha a:

G — térerő;

P — nyomásból származó erő;

S — súrlódásból származó erő.

D'Alambert nyomán a mozgásegyenleteket úgy fogalmazhatjuk meg, hogy ezekkel az erőkkel egyensúlyt tart a **T** gyorsulásból származó úgynevezett tehetetlenségi erő. Így az áramlások hasonlóságának biztosításához ezen négy erőnek az arányát kellene állandó értéken tartani. Miután a négy erő egymással egyensúlyt tart, elegendő ezekből három erő között fennálló két viszonyt vizsgálni. Természetesen, ilyenkor az erők viszonya alatt azok abszolút értékeinek arányát értjük.

9.1. Froude⁴-szám

Vizsgáljuk meg a tehetetlenségi és a térerő viszonyát:

az egységnyi térfogatú folyadékelemre ható térerő:

$$\mathbf{G} = \rho g \quad ; \quad (9.1)$$

az egységnyi térfogatra ható tehetetlenségi erő:

$$\mathbf{T} = -\rho a \quad . \quad (9.2)$$

A gyorsulásra a dimenzióanalízisben használt megfontolások alapján az alábbi arányosságot írhatjuk fel:

$$a \sim \frac{c^2}{l} \quad (9.3)$$

ahol:

l — az áramlásba helyezett test jellemző hossz mértékegységű geometriai mérete.

Ellenőrizzük le a fenti (9.3) egyenlet helyességét, behelyettesítve a két változó mértékegységét:

⁴ **Froude, William (1810–1879)**: brit mérnök. Ő alkalmazta elsőként gyakorlatban a hasonlósági törvényt a folyadékok mechanikájában. Modellkísérleteihez először használt kísérleti vízmedencét.

$$\frac{(ms^{-1})^2}{m} = (m^2 s^{-2})m^{-1} = ms^{-2} \quad ,$$

tehát az arányosság elfogadható. Beláthatjuk úgy is az egyenlet helyességét, hogy a centrifugális gyorsulásra gondolunk. Így, a fenti arányosság alapján felírhatjuk, hogy:

$$\mathbf{T} \sim \rho \frac{c^2}{l} \quad . \quad (9.4)$$

Ekkor a tehetetlenségi és a térerő viszonya:

$$\frac{\mathbf{T}}{\mathbf{G}} = \frac{\rho \frac{c^2}{l}}{\rho g} = \frac{c^2}{lg} \quad . \quad (9.5)$$

Ezen viszonzszám

$$Fr = \frac{c}{\sqrt{lg}} \quad (9.6)$$

négyzetgyökét nevezzük a *Froude*-féle számnak. Az olyan áramlástanai jelenségek hasonlóságánál, amelyeknél a térerő lényeges szerepet játszik (például folyadékfelszínen keletkező hullámok vizsgálata) a *Froude*-számok egyenlősége a döntő.

9.2. Reynolds⁵-szám

A *Reynolds*-szám meghatározásához vizsgáljuk meg a tehetetlenségi és a súrlódó erők viszonyát.

Az egységnyi térfogatra — példaként az x irányban — ható súrlódási erő a *Navier-Stokes* egyenlet alapján:

$$S_x \sim \mu \frac{\partial^2 c_x}{\partial x^2} \quad . \quad (9.7)$$

A dimenzióanalízist és a magasabb rendű differenciálhányados definícióját alkalmazva:

$$\frac{\partial^2 c_x}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial c_x}{\partial x} \right) \quad ,$$

viszont:

$$\left(\frac{\partial c_x}{\partial x} \right) \sim \frac{c}{l} \quad .$$

A második differenciálhányados képzése dimenzió szempontjából egy hosszúságdimenzióval történő osztást jelent, azaz:

$$\frac{\partial^2 c_x}{\partial x^2} \sim \frac{c}{l^2} \quad ,$$

⁵ *Reynolds, Osborne (1842–1912)*: angol fizikus. Jelentős munkát végzett a közeg belső súrlódásának vizsgálatában.

vagyis:

$$\mathbf{S} \sim \mu \frac{c}{l^2} \quad (9.8)$$

A (9.4) és a (9.8) egyenletek alapján írhatjuk fel a tehetetlenségi és a súrlódási erők arányát:

$$\frac{\mathbf{T}}{\mathbf{S}} = \frac{\rho \frac{c^2}{l}}{\mu \frac{c}{l^2}} = \frac{\rho c l}{\mu} \quad (9.9)$$

Felhasználva a kinematikai viszkozitási tényező meghatározásának

$$\nu = \frac{\mu}{\rho} \quad (9.10)$$

összefüggését kapjuk a *Reynolds*-szám egyenletét, azaz:

$$\text{Re} = \frac{c l}{\nu} \quad (9.11)$$

Az áramló közegbe teljesen alámerülő testek körüli áramlásnál, valamint az olyan térben történő áramlás esetén, melyet a közeg teljesen kitölt (például a hidraulikai rendszerekben) a Reynold-szám azonossága a hasonlóság feltétele.

9.3. Más hasonlósági számok

Az aerodinamikában leginkább alkalmazott két fenti hasonlósági szám részletes ismertetése után, most az egyéb — köztük a hőtanban is — előforduló hasonlósági kritériumokat soroljuk fel, azok levezetése, igazolása nélkül.

Strouhal⁶-szám:

Az áramlás instacionaritásának a gázdinamikai jellemzőkre gyakorolt hatását leíró szám:

$$\text{Sh} = \frac{c \tau}{l} \quad (9.12)$$

ahol:

τ — az instacioner folyamatra jellemző idő.

Prandtl-szám:

A gázban végbemenő molekuláris impulzus és hőátviteli folyamatok viszonyát megadó szám:

$$\text{Pr} = \frac{c_p \mu}{\lambda} \quad (9.13)$$

ahol:

c_p — a közeg állandó nyomáson vett fajhője;

⁶ *Strouhal, Vincenz (1850–1922)*: cseh fizikus. A súrlódási hangok vizsgálatában ért el kiemelkedő eredményeket.

λ — a közeg hővezetési tényezője.

A *Prandtl*-szám reciproka a **Stanton-szám**:

$$St = \frac{\lambda}{c_p \mu} \quad (9.14)$$

A turbulens áramlásra vonatkoztatott μ_t turbulens viszkozitással és a λ_t turbulens hővezetési tényezővel számított *Prandtl*-szám az úgynevezett **turbulens Prandtl-szám**:

$$Pr_t = \frac{c_p \mu_t}{\lambda_t} \quad (9.15)$$

Nusselt-szám:

A hőátadás jellemzésére szolgáló hasonlósági kritérium:

$$Nu = \frac{\alpha l}{\lambda} \quad (9.16)$$

ahol:

α — hőátadási tényező.

Peclet-szám:

A közeg belső energianövekedésének és a közölt hőnek a viszonyát leíró kritérium:

$$Pe = vl \frac{c_v \rho}{\lambda} \quad (9.17)$$

ahol:

c_v — a közeg állandó térfogaton vett fajhője.

Knudsen⁷-szám:

A gázmolekulák ütközések közti s átlagos szabad úthossza és az l jellemző lineáris geometriai méret aránya:

$$Kn = \frac{s}{l} \quad (9.18)$$

$Kn \gg 1$ esetén: a közeg igen ritka (például vákuum);

$Kn \ll 1$ esetén: a közeg homogén (szilárd) testként kezelhető.

Euler-szám:

A gáz tehetlenségi, illetve a nyomáseséstől függő erők viszonyát kifejező szám:

$$Eu = \frac{\rho c^2}{\Delta p} \quad (9.19)$$

⁷ **Knudsen, Martin (1871–1949)**: dán fizikus. A hangelnyelést tanulmányozta és adta meg annak helyes magyarázatát.

ahol:

Δp — a gáz nyomásesése.

Chauchy⁸-szám:

A közeg összenyomhatósága és az áramlásba helyezett test rugalmassága közötti viszonyt kifejező szám:

$$Ca = \frac{\rho c^2}{E} \quad , \quad (9.20)$$

ahol:

E — az áramlásba helyezett test rugalmassági modulusa.

Grashof⁹-szám:

Szabad áramlásban a térerő és a súrlódási erők arányát kifejező hasonlósági kritérium:

$$Gr = \frac{\rho - \rho_0}{\rho} \frac{gl^3}{c^2} \quad , \quad (9.21)$$

ahol:

$\frac{\rho - \rho_0}{\rho}$ — a statikus felhajtóerő kifejezése.

⁸ **Chauchy, Augustin (1789–1857)**: francia matematikus. A párizsi hadmérnökök képzésére szolgáló *École Polytechnique* hallgatója volt. 1848-tól a *Sorbonne* professzora.

⁹ **Grashof Franc (1826–1893)**: német mérnök. A karlsruhei egyetemen az alkalmazott mechanika és a teoretikus gépészet tanára volt.

10. A határréteg

Az áramlásba helyezett test fala mellett kialakuló — faltól mért távolság függvényében — változó sebességű réteget **határréteg**nek nevezzük.

Súrlódásos kontinuum esetén a fallal közvetlenül érintkező réteg részecskéinek sebessége — a tapadási feltétel miatt — zérus lesz. Ezen réteg viszont a mellette haladó réteg részecskéit — a belső súrlódás következtében — fékezni fogja, így azok sebessége kisebb lesz a zavartalan áramlás sebességéhez képest. Ez a réteg pedig a fölötte lévő réteget fogja fékezni ..., míg az egyik réteg sebessége el nem éri a zavartalan áramlás sebességét. Az így kialakuló réteget nevezzük a határrétegnek. Kis viszkozitású közegeknél (mint például a víz és a levegő) a határrétegen kívül a kontinuumot jó közelítéssel súrlódásmentesnek tekinthetjük. A súrlódás hatását csak a határrétegen belül kell figyelembe vennünk.

Ha folytatjuk a fenti gondolatmenetet, azt mondhatnánk, hogy a határréteg végtelen vastag lesz. Ezért a **határréteg vastagságán** azt a faltól mért távolságot értjük, amelynél a réteg sebessége csak 1 %-al lesz kisebb a súrlódásmentes áramlásban kialakuló sebességnél. A határréteg vastagságát δ -val jelöljük:

$$u(\delta) = 0,99c \quad , \quad (10.1)$$

ahol:

c — a zavartalan áramlás sebessége;
 u — helyi áramlási sebesség.

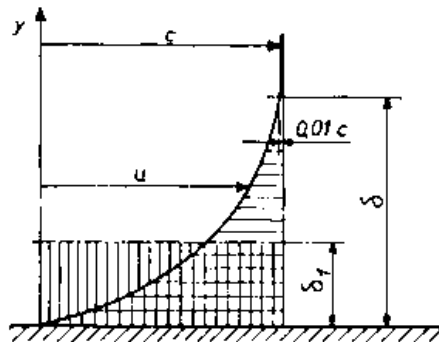
A szakirodalmak — a különféle vizsgálati szempontok alapján — több meghatározást is használnak a határréteg vastagság definiálására. Ezek:

Kiszorítási vastagság az a faltól mért, δ_1 -el jelölt távolság, amellyel a falat meg kellene vastagítani ahhoz, hogy súrlódásmentes áramlást feltételezve a fal mellett azonos közegmennyiség haladjon el, mint a valóságban, azaz:

$$\delta_1 = \frac{1}{c} \int_0^{\infty} (c - u) dy \quad , \quad (10.2)$$

ahol:

y — a faltól mért távolság.



10.1. ábra A kiszorítási vastagság meghatározása

Az egyenlet helyessége a 10.1. ábra alapján magyarázható. A vízszintesen vonalkázott terület a térfogatáram határréteg kialakulása miatti csökkenését szemlélteti. A függőlegesen vonalkázott terület viszont a falvastagság változásának hatását szemlélteti a térfogatáramra. A (10.2) egyenlet pedig e két terület egyenlőségét írja le.

Impulzus vastagság az a faltól mért és δ_2 -vel jelölt távolság, amellyel a falat meg kell vastagítani ahhoz, hogy súrlódásmentes áramlást feltételezve a fal mellett azonos mozgásmennyiségű folyadék haladjon el, mint amennyi a valóságban, azaz:

$$\delta_2 = \frac{1}{c^2} \int_0^{\infty} (c-u)udy \quad , \quad (10.3)$$

mivel:

$$d\dot{I} = (\rho u)u \quad .$$

Energia vastagság az a faltól mért, δ_3 -al jelzett távolság, amellyel a falat meg kell vastagítani, hogy súrlódásmentes közeget feltételezve a fal mellett áramló kontinuum mozgási energiája egyenlő legyen a valóságban elhaladó közegével, azaz:

$$\delta_1 = \frac{1}{c^3} \int_0^{\infty} (c-u)u^2 dy \quad , \quad (10.4)$$

mert a közegáram mozgási energiája:

$$d\dot{E}_m = \dot{m}u^2 = (\rho u)u^2 \quad .$$

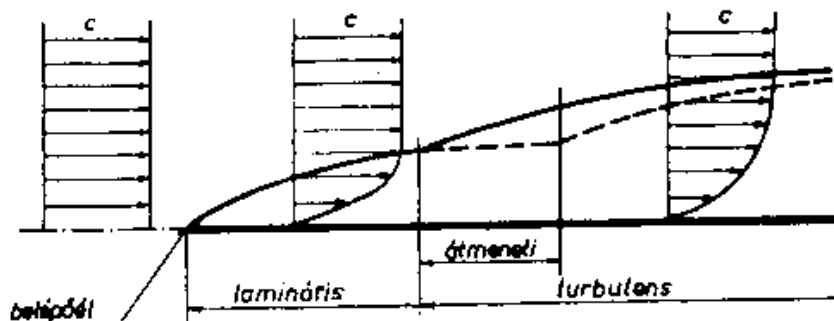
A határréteg az áramlás irányában haladva vastagodik, mivel a súrlódás ellenében a közeg munkát végez, és ezt a mozgási energiájából fedezi. Így a fal közelében haladó folyadék sebessége csökken, azaz az átáramláshoz nagyobb keresztmetszet szükséges. Növelik a határréteg vastagságát a külső oldalon állandóan belépő, újonnan lefékezett részecskék is.

10.1. A határréteg szerkezete síkfelület mentén

Ha egy homogén eloszlású áramlásba helyezünk el egy síklapot, a lap menti határréteg vastagsága a 10.2. ábrán szemléltetett módon változni.

A belépőeltől az áramlás irányában távolodva a határréteg vastagsága folyamatosan növekszik. Mind a határrétegen kívül, mind azon belül a folyadék részecskék sebességeinek iránya párhuzamos a síklappal. Ekkor az egyes folyadék részecskék a faltól mindig azonos távolságra haladnak. Az ilyen határréteget **lamináris határrétegn**ek nevezzük. Sík lap menti lamináris határrétegekben a részecskék sebességeinek csak a nagysága változik, irányuk nem.

A belépőeltől bizonyos, meghatározható távolságra azonban a határrétegen belül minőségi változás lép fel. A különböző rétegekben található részecskék áramlásuk közben az egyik rétegből a másikba kerülnek át. A kisebb sebességű folyadék részecske nagyobb sebességű rétegbe kerülve még nagyobb (nagyobb sebességű folyadék részecske kisebb sebességű rétegbe jutva még kisebb) sebességű réteg szomszédságába jut. Az ilyen, turbulens határrétegben gomolygó áramlás alakul ki, a részecskék pillanatnyi sebességének iránya sztochasztikusan változik.



10.2. ábra Sík lapmentén kialakuló határréteg

A vizsgálatok kimutatták, hogy turbulens határréteg és a fal között mindig található egy vékony réteg, melyben az áramlás lamináris. Ezt **lamináris alaprétegn**ek vagy **fali rétegn**ek nevezik.

Áramlástanilag (hidraulikailag) sima a **felület**, ha a felületi egyenetlenségek az alapréteg vastagságánál

kisebbség.

A nagyobb sebességkülönbségek miatt nagyobb csúszató feszültségek keletkeznek. A megnőtt energiaelnyelődés következtében a síklappal párhuzamos irányú átlagsebességek a turbulens határrétegben rohamosabban csökkennek, mint a lamináris határrétegben.

Hol jön létre a határrétegben az a minőségi változás?

A tapasztalatok szerint a lamináris határréteg hossza az áramlási sebességtől, valamint a közeg viszkozitásától függ. Kísérletek alapján kijelenthető, hogy a határrétegen belül az áramlás mindaddig biztosan lamináris marad, amíg a síklap élétől mért x távolsággal meghatározott Re_x jelű *Reynolds*-szám kielégíti a

$$Re_x = \frac{cx}{\nu} < 8400 \quad (10.5)$$

egyenlőtlenséget.

Szintén a tapasztalatok alapján kijelenthető, hogy ha ez a *Reynolds*-szám a

$$Re_x > 500000 \quad (10.6)$$

egyenlőtlenséget elégti ki, akkor a síklap menti határréteg biztosan turbulens.

A fenti két *Reynolds*-szám között a határréteg lehet lamináris és turbulens is. Ezen a területen a lamináris határréteg hosszabb, ha az alapáramlás turbulencia-mentes, illetve ha a síklap felülete finomabb, ha a belépőél élesebb.

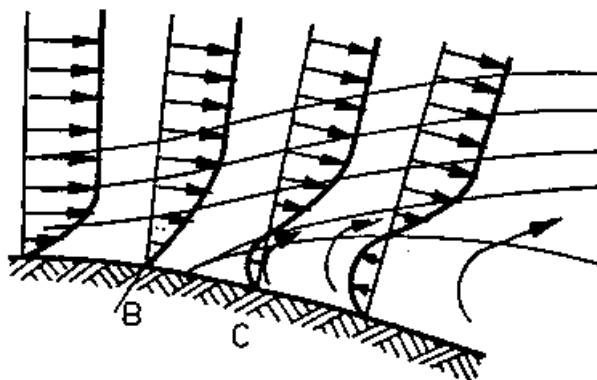
A valóságos közeg nem tökéletesen homogén, továbbá nem biztosítható teljesen a laphoz áramló kontinuum időben állandó turbulencia-mentessége sem. Ezért a határréteg laminárisból turbulensbe való átmenete időben változó helyen jön létre. Azt a szakaszt, ahol a határrétegben az áramlás lamináris és turbulens is lehet, átmeneti szakasznak, az ott kialakult határréteget átmeneti határrétegnek nevezzük.

10.2. A határréteg változása görbült felület mentén (A leválás)

Görbült felületű áramlásba helyezett test esetén a fal mellett kialakuló határréteg a belépőéltől számítva egy szakaszon lamináris lesz. De, a síklappal ellentétben itt nem lehet egyértelműen meghatározni azt a határ *Reynolds*-számot, ameddig biztosan lamináris marad a határréteg. Ez az érték nagyban függ a test alakjától. A lamináris szakasz után — a síklaphoz hasonlóan — az átmeneti és a turbulens határréteg alakul ki.

Szűkülő áramlási csatorna esetén — a határreteken kívüli áramlásban fellépő sebességnövekedés miatt — a határreteg kevésbé fog vastagodni, hosszabb szakaszon marad lamináris a síklap menti határreteghez képest.

Minőségi eltérés lesz a sík és a görbült felület menti határretek között táguló áramlási keresztmetszet esetén.



10.3. ábra A határreteg leválása

A 10.3. ábra összenyomhatatlan közeg táguló csatornában történő áramlását mutatja. Ekkor a kontinuum a nagyobb nyomás irányába áramlik (mivel a sebessége — a kontinuitás elve értelmében — csökken). A határretegben található részecskék sebessége, mozgási energiája is csökkenni fog. Ennek okai:

- a súrlódás miatt fellépő energiaelnyelődés;
- a határreteken kívüli sebesség csökkenése a táguló csatorna miatt;

→ a csatornában fellépő nyomásnövekedés.

A fentiek következtében keletkezhet az áramlásban egy olyan (az ábrán **B**-vel jelölt) pont, ahol a határrétegben lévő részecskék mozgási energiája — így sebessége — zérusra csökken. Ebben az esetben a részecskék mozgását a csatornában uralkodó nyomáseltérések fogják meghatározni. Mivel a csatornában uralkodó statikus nyomás az áramlás irányában növekszik, a fal melletti részecskék visszafelé kezdenek mozogni (lásd a C pontot). Ekkor *a határréteg leválik a falról.*

A 10.3. ábrán szemléltetett és fent leírt jelenséget áramlásleválásnak s nevezik.

11. Testek ellenállása

Súrlódásos közeg áramlásakor — mint azt már korábban többször is említettük — energiaelnyelődés lép fel. Ez a veszteség egy ellenállási erő formájában mutatható ki, ezzel az erővel kell mozgatnunk az áramlásba helyezett testet a közeghez képest.

Az ellenállási erőt F_x -el jelöljük (vízszintes $-x$ -irányú megfűvást feltételezve), és — gyakorlati számításoknál az alábbi módon határozzuk meg:

$$F_x = c_x \frac{\rho}{2} v^2 A \quad , \quad (11.1)$$

ahol:

v — az áramló közeg sebssége¹⁰;

A — az áramlásba helyezett test jellemző felülete;

c_x — az áramlásba helyezett test ellenállási erő tényezője, mértékegysége: 1.

A c_x ellenállási erő tényezőt gyakorlatilag a mért ellenállási erő és a közeg dinamikus nyomásából származó, a test jellemző felületére számított erő hányadosaként határozzák meg, azaz:

$$c_x = \frac{F_x}{\frac{\rho}{2} v^2 A} \quad . \quad (11.2)$$

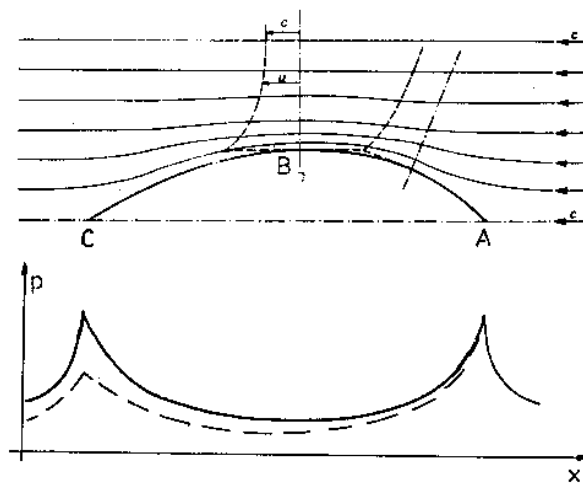
Összenyomhatatlan közeg áramlása esetén az ellenállási erőt két összetevő alkotja. Most ezekkel a komponensekkel ismerkedünk meg.

11.1. Alaki ellenállás

Végezzünk el gondolatban egy kísérletet. Helyezzünk ideális közeg áramlásába egy szimmetrikus testet (11.1. ábra).

Vizsgáljuk meg a test felületén kialakuló statikus nyomáeloszlást. Az A torlópontban a közeg teljesen lefékeződött, így ott:

$$p_A = p_\delta = p_\infty + \frac{\rho}{2} v_\infty^2 \quad . \quad (11.3)$$



11.1. ábra Az alaki ellenállás kialakulása

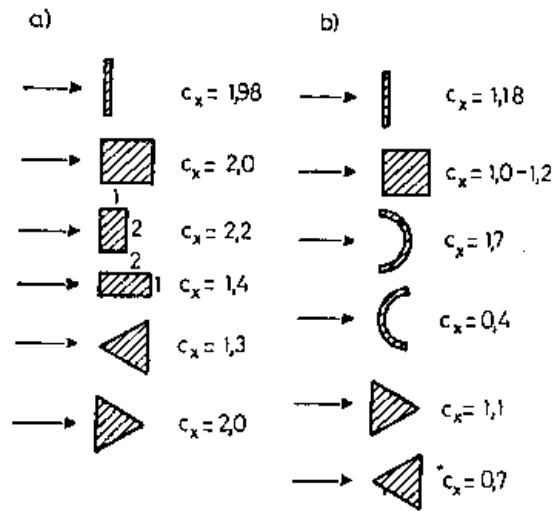
¹⁰ Eddig, az általános aerodinamikában, az áramló közeg sebességét c -vel jelöltük — a szakirodalmaknak megfelelően. A gyakorlati aerodinamikában viszont a sebesség jelölésére a v -t használjuk.

A legvastagabb helyig (a **B** pontig) a statikus nyomás csökken — a sebesség növekedése miatt. A **B** pont után a helyi sebesség csökkenni, a statikus nyomás nőni fog. A **C**, hátsó torlópontban — mivel ott újra zérus lesz a helyi sebesség — is a p_A statikus nyomás alakul ki. A nyomás változását mutatja az ábra alatti grafikonon a folyamatos vonal. Ekkor a test előtt és után (a szimmetrikus kialakítás miatt alatt és felett is) azonos nyomás uralkodik, a testre nem fog hatni aerodinamikai erő.

Most ugyanezt a testet fűjük meg sűrűlódásos közeggel. Mi történik ekkor? Hogyan fog változni a test felületén kialakuló statikus nyomáskép?

A nyomásváltozás jellege alapvetően megmarad. Az **A** pontban uralkodó nyomás — mivel a közeg addig sűrűlódásmentesnek tekinthető — megegyezik az ideális esetnél tapasztalttal. A test mellett haladva viszont a közegben, sűrűlódásos volta miatt, energiaelnyelődés lép fel, ezért a statikus nyomás fokozatosan csökkenni fog az ideális esethez képest. Ezt a nyomásváltozást szemlélteti a diagramon a szaggatott vonal.

Valójában a közeg összenergiáját kifejező p_o össznyomás fog csökkenni, de, mivel a kontinuum sebessége, azaz a dinamikus nyomása, az ideáliséval megegyezik, az összenergia csökkenése a statikus nyomás csökkenéseként fog mutatkozni.



11.2. ábra Sík (a) és térbeli (b) áramlásokba helyezett testek alak ellenállási tényezői

Ennek következtében a test mögött kisebb nyomás alakul ki, mint az ideális esetben, illetve a test előtt. A nyomáskülönbség hatására a testre egy, az áramlás irányába — test közeghez képest végzett mozgásával ellentétesen — mutató erő fog hatni. Ezt az erőt — mivel nagysága alapvetően a test alakjától függ — alakellenállásnak, vagy nyomási ellenállásnak nevezik. Számítása — a (11.1) egyenlet alapján:

$$F_{xa} = c_{xa} \frac{\rho}{2} v^2 A \quad , \quad (11.1)$$

egyenlettel történik, ahol:

c_{xa} — alak ellenállási tényező.

Az alakellenállás nagyságát lényegesen befolyásolja a határreteg leválása, illetve annak helye. A 1.2. ábrán található táblázat különféle testek alakellenállásának tényezőit tartalmazza.

11.2. Sűrűlódási ellenállás

A határretegről tanultak alapján könnyű belátni, hogy az áramlásba helyezett test fala és az áramló közeg között — a határretegben — kialakuló sűrűlódó erő a test mozgását akadályozza. Ezt az erőt sűrűlódási ellenállásnak nevezzük.

A sűrűlódási ellenállás és a határreteg kialakulása közti kapcsolatot legegyszerűbben a 10.1. fejezetben leírtak alapján lehet belátni. Síklap megfűvése esetén alak ellenállás nem jöhet létre, de a lapon mégis keletkezik egy mozgást akadályozó erő. Ez az erő a sűrűlódási ellenállás, melynek számítása az alábbi módon történik:

$$F_{xs} = c_{xs} \frac{\rho}{2} v^2 A \quad , \quad (11.2)$$

ahol:

c_{xs} — a súrlódási ellenállás tényezője.

A súrlódási ellenállás tényezőjének meghatározása számítással csak síklap mentén oldható meg egyszerűen. Görbült felület esetén a fal kontúrja, áramlási csatorna jellege befolyásolja a határreteg szerkezetét. Ezért ott a tényező meghatározása csak közelítő megoldásokkal lehetséges. Általában első közelítésként elfogadják a hasonló — azonos *Reynolds*-számú — síklap súrlódási ellenállásának tényezőjét. A továbbiakban csak a síklap súrlódási tényezőjének számítását ismertetjük.

A határreteg vizsgálatában jelentős eredményeket értek el a XX. Század első felében *Kármán Tódor*¹¹ magyar, *Ludwig Prandtl* és *Schichling* német tudósok. Az alábbiakban felsorolt egyenletek a nevükhöz kötődnek, elméleti számítások és/vagy kísérleti mérések eredményeiként születtek.

→ síklap súrlódási ellenállása lamináris határreteg esetén:

$$c_{xs} = \frac{1,328}{\sqrt{Re}} \quad . \quad (11.3)$$

→ síklap súrlódási ellenállása turbulens határreteg esetén:

$Ha \ Re < 3 \cdot 10^7$:

$$c_{xs} = \frac{0,074}{\sqrt[3]{Re}} \quad ; \quad (11.4)$$

$Ha \ 10^5 < Re < 10^9$:

$$c_{xs} = \frac{0,455}{(\lg Re)^{2,58}} \quad . \quad (11.5)$$

→ síklap súrlódási ellenállása vegyes határreteg esetén:

$$c_{xs} = \frac{0,455}{(\lg Re)^{2,58}} - \frac{1700}{Re} \quad . \quad (11.6)$$

¹¹ *Kármán Tódor (1881–1963)*: magyar származású mérnök. Főként aerodinamikával és rakétatechnikával foglalkozott. Kiemelkedők a hangsebesség feletti repülés kérdéseivel kapcsolatos eredményei. 1930-tól az Amerikai Egyesült Államokban élt, ahol több rakétatípus fejlesztését irányította.

12. Áramlás csövekben (Hidraulika)

Súrlódásos közeg valóságos (nem „csak” áram-) csőben történő áramlásakor — a közeg súrlódásos volta miatt — energiadisszipáció (elnyelődés) lép fel. Ezt a veszteséget egy Δp nyomásvesztés formájában szokás a Bernoulli-egyenlet korábban leírt alakjához hozzáadni:

$$\frac{\rho}{2} c_1^2 + \rho g h_1 + p_1 = \frac{\rho}{2} c_2^2 + \rho g h_2 + p_2 + \Delta p \quad (12.1)$$

Az így kapott egyenletet szokás **vesztéses Bernoulli-egyenletnek** is nevezni. Vezessük be a

$$h' = \frac{\Delta p}{\rho g} \quad (12.2)$$

vesztésmagasság vagy terhelő magasság fogalmát, ami az áramlási veszteségek következtében fellépő nyomómagasság csökkenést — az úgynevezett **terhelő magasságot** — jelenti.

A Δp nyomásvesztéget egyenes, kör keresztmetszetű cső esetén a

$$\Delta p = \frac{\rho}{2} c^2 \frac{l}{d} \lambda \quad (12.3)$$

egyenlettel, illetve a h' veszésmagasságot a

$$h' = \frac{c^2}{2g} \frac{l}{d} \lambda \quad (12.4)$$

szokás kifejezni, ahol:

d — a cső belső átmérője;

l — a cső hossza;

λ — a „dimenzió nélküli” csősúrlódási tényező.

A tapasztalatok szerint a csősúrlódási tényező értéke a csövekben történő áramlás vizsgálatakor alkalmazott Reynolds-számtól függ, ami a tehetetlenségi és a súrlódási erők arányát fejezi ki és ami a

$$Re = \frac{cd}{\nu} \quad (12.5)$$

formában számítható, ahol:

c — a csőben áramló közeg átlagsebessége;

d — a cső belső átmérője;

ν — a közeg kinematikai viszkozitási tényezője [St].

12.1. Lamináris áramlás csövekben

A vizsgálati eredmények alapján kimondható, hogy kicsi Reynolds-szám esetén, amikor:

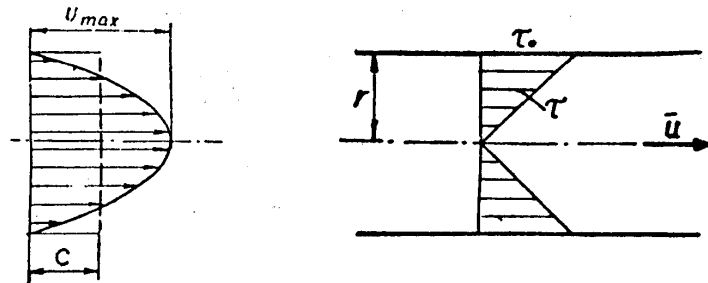
$$Re < 2320,$$

az egyenlő sebességű koncentrikus rétegek egymáson keveredés nélkül csúsznak el — azaz az áramlás lamináris lesz.

Lamináris áramlás esetén a csőben a sebesség eloszlása parabolikus (12.1.ábra), illetve a csősúrlódási tényező értékét a:

$$\lambda = \frac{64}{Re} \quad (12.6)$$

egyenlettel tudjuk meghatározni. Kísérleti eredmények szerint lamináris áramlás esetén a cső belső falának minősége nem befolyásolja a λ tényező értékét.



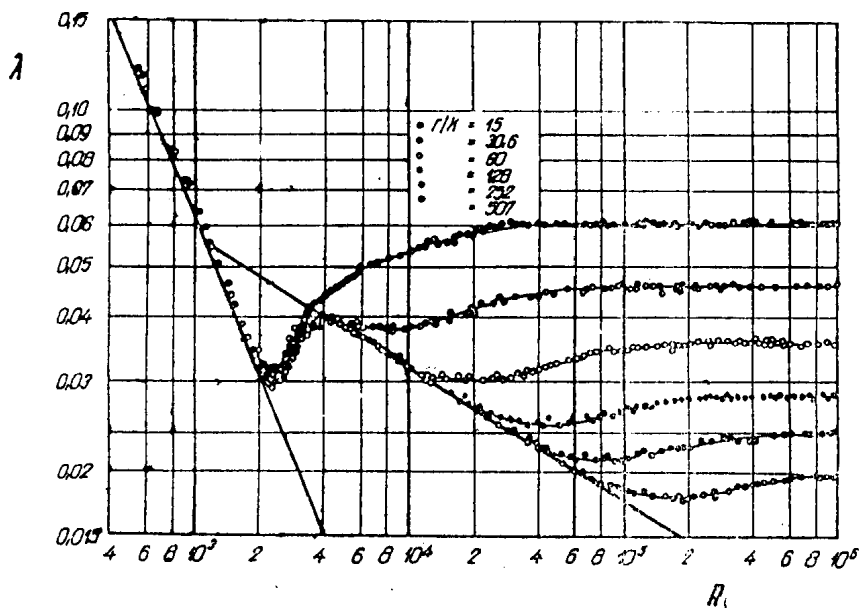
12.1. ábra Sebességprofil laminári sáramlás esetén

12.2. Turbulens áramlás csövekben.

A köznap műszaki gyakorlatban gyakrabban fordul elő csővezetékekben a turbulens áramlás. Mérési eredmények alapján kimutatható, hogy ha a

$$Re > 2320$$

egyenlőtlenség fennáll, a csövekben az áramlás turbulens.



12.2. ábra Csősúrlódási tényező meghatározása diagram segítségével

Turbulens áramlás esetén a hidraulikailag sima falú csőben sebességeloszlás szempontjából három réteget különböztetünk meg:

- közvetlenül a fal mellett az áramlás mindig réteges;
- a lamináris alapréteg után, de még mindig a fal közelében az áramlás már turbulensé válik, ebben a rétegben a sebesség csak a faltól mért távolság függvénye és így a cső átmérőjétől független;
- a cső keresztmetszetének középső részén a newtoni közeg áramlása továbbra is turbulens, sebessége — az előző rétegtől eltérően — a faltól mért távolság és a cső átmérőjének viszonyától függ.

Turbulens áramlás esetén a csősúrlódási tényező az alábbi egyenletekkel határozható meg:

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{0,316}{\sqrt[4]{\text{Re}}} & \text{ha} & \quad 2320 < \text{Re} < 8 \cdot 10^4 \\ \lambda &= 0,0054 + 0,396 \text{Re}^{-0,3} & \text{ha} & \quad 2 \cdot 10^4 < \text{Re} < 2 \cdot 10^6 \\ \lambda &= 0,0032 + 0,221 \text{Re}^{-0,237} & \text{ha} & \quad 10^5 < \text{Re} < 10^8 \end{aligned} \quad (12.7)$$

A gyakorlatban gyakran alkalmaznak különféle diagramokat a csősúrlódási tényező meghatározására. A 3.2. ábra egy ilyen diagramot szemléltet.

12.3. Idomdarabok ellenállása

Hidraulikus rendszerekben a csővezetékhez csatlakozó idomdarabok, szerelvények ellenállása, a bennük fellépő energia disszipáció meghatározása is szükséges az adott rendszer méretezése során.

A (12.1), illetve (12.2) egyenletekhez az idomdarabban fellépő veszteséget a

$$\Delta p = \xi \frac{\rho}{2} c^2 \quad , \quad (12.8)$$

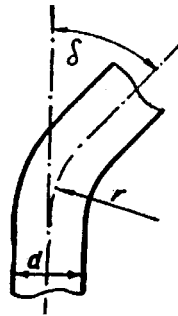
illetve a

$$h' = \xi \frac{c^2}{2g} \quad (12.9)$$

összefüggésekkel számíthatjuk, ahol:

ξ — az adott idomdarab veszteségi tényezője.

Szemléltetésképpen a 12.3. ábra különféle irányeltérésű és görbületi sugarú ívdarabok veszteségi tényezőjét mutatja.



$\delta \downarrow \quad \frac{r}{d} \rightarrow$	1	2	4	6	10
15°	0,03	0,03	0,03	0,03	0,03
45°	0,14	0,09	0,08	0,07	0,06
90°	0,51	0,30	0,23	0,18	0,20

12.3. ábra Ívdarab ellenállási tényezője (példa)

12.4. Az egyenértékű csőhossz

Az egyenértékű csőhosszon az adott csővezetékkel megegyező átmérőjű, azonos átlagsebesség mellett azonos nyomásvesztést adó egyenes csőszakasz hosszát értjük. Bevezetésére a hidraulikus rendszerekben vagy azok részegységeiben fellépő veszteségek összehasonlítása érdekében történt.

Korábbiak alapján, az idomdarabokkal és szerelvényekkel ellátott csővezetékben fellépő nyomásvesztés a

$$\Delta p = \frac{\rho}{2} \left(\sum_{i=1}^n c_i^2 \frac{l_i}{d_i} \lambda_i + \sum_{j=1}^m c_j^2 \xi_j \right) \quad (12.10)$$

egyenlettel számítható, ahol:

n — az eltérő paraméterű csőszakaszok száma;

m — az idomdarabok száma.

Ebből az l_e -vel jelölt — d átmérőjű és λ súrlódási tényezőjű — egyenértékű csőhossz:

$$l_e = \sum_{i=1}^n \frac{d}{d_i} \left(\frac{c_i}{c} \right)^2 l_i + \frac{d}{\lambda} \sum_{j=1}^m \xi_j \left(\frac{c_j}{c} \right)^2 \quad (12.11)$$

12.6. Csővezetékek jelleggörbéi

Egy csővezeték, illetve egy csőhálózat jelleggörbéje alatt olyan függvénykapcsolatot értünk, melynek független változója a folyadékcsatlakozás, függő változója pedig a csőhálózat terhelőmagassága. A függő változó nem más, mint az a mechanikai energia, amit egy külső munkagépnek — a csővezetékre kapcsolt szivattyúnak — közölni kell a folyadékkal a megfelelő áramlás biztosítása érdekében. A diagramban ábrázolt görbe — a cső vagy csőhálózat jelleggörbéje — a folyadékcsatlakozás különböző értékeire megadja a csővezeték, illetve a csőhálózat terhelőmagasságát.

A csővezeték terhelőmagassága a súrlódási veszteségmagasság és az esetleg fellépő kilépési veszteség.

Abban az esetben, ha olyan berendezés jelleggörbéjét kell meghatározni, melynél a csővezeték átmérője állandó és elágazások, illetve egyesítések nincsenek beépítve a jelleggörbe képe egy parabola.

Olyan berendezés jelleggörbéjét, amelynél magasabb helyről alacsonyabb helyre kell folyadékot szállítani a 12.6. ábra mutatja.

A q_{v0} folyadékcsatlakozásig a szivattyú beépítése fölösleges, hisz a kezdeti és végpont helyzeti energiakülönbsége fedezi a veszteségeket. Nyomáskülönbség mellett üzemelő berendezéseknél a folyadékkal közlendő energia, illetve ami ezzel egyenértékű a berendezés terhelőmagassága:

$$H_{cs} = H_p + h' \quad (12.14)$$

ahol:

H_p — a nyomómagasság.

A h' veszteségmagasság meghatározása a 8. fejezetben történt:

$$h' = \frac{c^2}{2g} \frac{l_e}{d_e} \lambda \quad (12.15)$$

Felhasználva a térfogatáram

$$q_v = cA \quad (12.16)$$

egyenletét, a

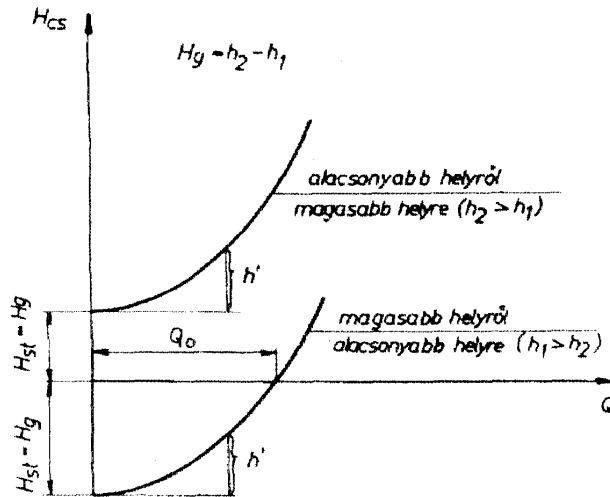
$$c = \frac{q_v}{A} \quad (12.17)$$

sebességet behelyettesítve a (12.15) egyenletbe, kapjuk a

$$h' = \frac{q_v^2}{2gA^2} \frac{l_e}{d_e} \lambda = Kq_v^2 \quad (12.18)$$

összefüggést, melyből a jelleggörbe parabola alakja könnyen belátható.

A nyomómagasság a folyadékszállítástól függetlenül állandó, ezért a jelleggörbe a zérus folyadékszállításnál innen indul ki. Hasonlóan a szintkülönbség mellett üzemelő berendezésekhez a folyadékszállítástól független részt a berendezés H_{st} statikus szállítómagasságának nevezik. A nyomáskülönbség mellett üzemelő berendezések jelleggörbéjét a 12.7. ábra mutatja. Nagyobb nyomású helyről kisebb nyomású helyre szállító berendezéseknél a q_{v0} folyadékszállításig szivattyút nem kell a rendszerbe beépíteni,



12.6. ábra Csővezeték jelleggörbéi

13. Összenyomható közeg általános áramlástana (Gázdinamika)

A gázdinamika a gázok olyan nagysebességű áramlását tanulmányozó tudományág, melyben a gázok összenyomhatósága nem hanyagolható el.

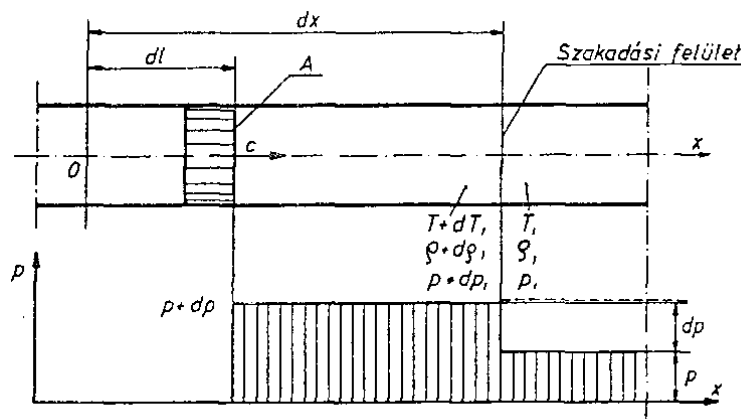
Ebben a fejezetben a vizsgálat tárgyát képező gázt összenyomhatónak, de súrlódásmentesnek tekintjük, valamint feltételezzük, hogy az áramlás és az állapotváltozások során a közeg entrópiája nem változik.

13.1. A hang terjedése, a hangsebesség

A hang terjedése nyomáshullámok sorozatából álló barotrópikus folyamat. A hanghullámok amplitúdója az atmoszférikus nyomáshoz képest rendkívül kicsiny. Alsó határa, az úgynevezett hallásküszöb $2 \cdot 10^{-5}$ Pa, a felső határa, a fájdalom küszöb 20 Pa. Ezek az értékek a nagyságrendileg 10^5 Pa értékű légköri nyomáshoz képest eleminek tekinthetők. Ezért szokás a hangot **elemi zavarásnak** is nevezni.

A hangsebesség meghatározásához képzeljük el, hogy egy állandó A keresztmetszetű cső nyugalomban lévő gázzal van kitöltve és benne egy dugattyú kicsi c sebességgel mozog (13.1. ábra). Inkompresszibilis közeg esetén a dugattyú mozgása azonnal átadódna az egész gáztömegre. Rugalmas közeg esetén viszont a dugattyú elmozdulása következtében a dugattyú előtt bizonyos zónában megnő a közeg sűrűsége. A zóna dugattyútól távolabbi határán kialakul egy szakadási felület, ahol a közeg nyomása, sűrűsége és sebessége elemi értékkel, ugrásszerűen változik meg.

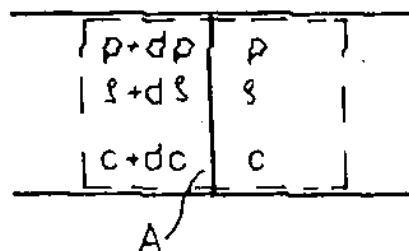
Miután ezek a változások viszonylag kicsinek, a p ; ρ és c értékeit a következő matematikai levezetésekben változatlanok tekinthetjük. Ezért a megváltozásukat csak ott kell figyelembe vennünk, ahol azok szorzóként vagy önmagukban szerepelnek.



13.1. ábra Hanghullám terjedése csőben

A fenti három jellemző közti kapcsolat vizsgálatához — az elemi erősségű hullám (vagyis a hang) terjedési sebességének meghatározásához — elsőként írjuk fel a folytonossági törvény egyméterű áramlására meghatározott differenciál alakját, figyelembe véve, hogy a cső keresztmetszete állandó:

$$\frac{dp}{\rho} + \frac{dc}{c} = 0 \quad (13.1)$$



13.2. ábra Jellemzők változása a hanghullámban

Második lépésként határozzuk meg a közegre ható erőt és írjuk fel a vizsgált szakadási felületre az impulzus tételt, ami esetünkben

$$\rho A c d c = -A d p \quad (13.2)$$

lesz, amely az egyszerűsítés után átrendezhető a

$$c d c = -\frac{d p}{\rho} \quad (13.3)$$

alakra.

Rendezzük át a (13.1) egyenletet úgy, hogy szorozzuk meg mindkét oldalát c^2 -tel:

$$c^2 \frac{d p}{\rho} + c d c = 0 \quad , \quad (13.4)$$

majd

$$c d c = -c^2 \frac{d p}{\rho} \quad . \quad (13.5)$$

A (13.5) és (13.3) egyenletek bal oldalai megegyeznek, így a jobb oldalak is egyenlők, azaz a:

$$\frac{d p}{\rho} = c^2 \frac{d p}{\rho} \quad (13.6)$$

összefüggést kaphatjuk, ahonnan:

$$c^2 = \frac{d p}{d \rho} \quad . \quad (13.7)$$

Ez a meghatározott sebesség a csőben haladó elemi hullám, azaz a hang terjedési sebessége, amit a -val jelölünk, így:

$$a = \sqrt{\frac{d p}{d \rho}} \quad . \quad (13.8)$$

Következőkben meg kell határoznunk a fenti egyenletben szereplő differenciáhányados értékét. Ehhez a politropikus állapotváltozásra érvényes

$$\frac{p}{\rho^n} = p \rho^n = \text{állandó} \quad (13.9)$$

kifejezést, ahol:

n — az állapotváltozás politropikus kitevője.

Rendezzük át úgy, hogy közben vezessük be a

$$K = \text{állandó}$$

egyszerűsítő jelölést:

$$p = \rho^n K \quad . \quad (13.10)$$

majd vegyük minkét oldal természetes alapú logaritmusát:

$$\ln p = n \ln \rho + \ln K \quad , \quad (13.11)$$

és deriváljuk a változók szerint:

$$\frac{dp}{p} = n \frac{d\rho}{\rho} \quad . \quad (13.12)$$

Ezt az egyenletet átrendezve, kapjuk:

$$\frac{dp}{d\rho} = n \frac{p}{\rho} \quad . \quad (13.13)$$

Az egyesített gáztörvény alapján kijelenthető, hogy

$$\frac{p}{\rho} = pv = RT \quad , \quad (13.14)$$

ahol:

R — a közeg gázállandója;
 T — a közeg abszolút skálán mért hőmérséklete.

Így a (13.14) és a (13.15) kifejezések szerint:

$$\frac{dp}{d\rho} = nRT \quad , \quad (13.15)$$

illetve

$$a = \sqrt{nRT} \quad . \quad (13.16)$$

A hangsebesség kiszámításához szükségessé válik az, hogy meghatározzuk, milyen hőtani állapotváltozás megy végbe a hanghullámban.

Izotermikus hangsebesség:

Newton szerint — aki elsőként alkalmazta a (13.8) egyenletet a hangsebesség kifejezésére — a hang terjedése izotermikus jelenség. Ekkor a (13.16) egyenletben szereplő politropikus kitevő értéke, mint az a hőtani tanulmányokból ismeretes:

$$n = 1 \quad ,$$

így:

$$a_{iz} = \sqrt{RT} \quad . \quad (13.17)$$

Az első, megbízható hangsebesség-mérések eredményei a *Newton* által számított értéknél általában 20 %-kal nagyobbak voltak, illetve jó közelítést inkább a mély hangok esetében adott.

Ez utóbbi tény mivel magyarázható? Ha a hanghullámok ritkán követik egymást, tehát mély a hang, az elemi nyomáshullámoknak inkább van lehetőségük a környezettel történő hőcserére (hő-kiegyenlítésre), ekkor a

folyamat izotermikussá válhat.

Adiabatikus hangsebesség:

Az izotermikus hangsebesség esetében tapasztalt eltérések okát *Laplace* tárta fel. Ő abból indult ki, hogy a hanghullámok a közegben gyorsan terjednek. Így a hullámok és a környezet között nem mehet végbe semmilyen számottevő hőcsere. Ekkor a hang terjedése adiabatikus folyamatnak tekinthető, vagyis

$$n = \kappa \quad ,$$

ekkor:

$$a_{ad} = \sqrt{\kappa RT} \quad . \quad (13.18)$$

Levegő esetén — behelyettesítve a

$$\kappa_{lev} = 1,4$$

$$R_{lev} = 287,14 \frac{kJ}{kg}$$

fizikai jellemzőket — kaphatjuk az:

$$a_{ad} = \sqrt{1,4 \cdot 287,14 T} = 20,05 \sqrt{T} \quad [ms^{-1}] \quad (13.19)$$

kifejezést.

A (13.18) egyenlettel meghatározott hangsebességet **termodinamikai**, vagy **null-frekvenciás hangsebességnek** is nevezik. Magjegyezzük, hogy a nagyfrekvenciás hanghullámok terjedési sebessége eltér a fenti módon számítottól, mivel a folyamat akkor már nem lesz adiabatikus és függ a hang frekvenciájától is.

Gondoljunk kicsit tovább a (13.16) egyenlet jelentését.

Ha a hang terjedését izobar folyamatként vizsgáljuk — azaz $n = 0$ az elemi nyomáshullám sebessége zérus értékű lesz. Vagyis a hangot terjesztő közegben nyomásváltozásoknak kell fellépni, hogy a hang terjedni tudjon! Ez a tény igazolja azt a fenti kijelentést, hogy a hang terjedése barotropikus jelenség.

Ha a hang terjedése izochor állapotváltozást okozna a terjesztő közegben — vagyis $n = \infty$ — a hang sebessége is végtelen lesz. Ez fizikailag egy olyan abszolút merev rúdként képzelhető el, melynek egyik végét mozgatjuk, másik vége pedig késlekedés nélkül követi az első mozgását.

13.2. A Mach-szám

Az eddigiekben a hanghullám terjedését — az egyszerűbb levezetés érdekében — egyméretűként kezeljük. Most az elemi zavarás tovaterjedésének általánosabb térbeli (vagyis háromméretű) viszonyait fogjuk elemezni — bár a hullámokat csak egy síkban szemléltetjük.

Képzeljük el egy ponthangforrást, amely τ időegységenként a tér minden irányában egyenletes erősségű hanghullámokat bocsát ki. Ezt a hangforrást nyugvó kontinuumban helyezük el ($c = 0$). Az ekkor keletkező hullámfelület 3τ idő elteltével kialakuló képét mutatja a 13.3.a ábra. A hullámfelületek koncentrikus gömbök, úgy, hogy sugaraik értékei: $a\tau$; $2a\tau$; $3a\tau$.

Mozgassuk a hangforrást ($c < a$) hangnál kisebb sebességgel. Ebben az esetben a hangforrás τ idő alatt $c\tau$ utat tesz meg. A szakasz elején kiadott hanghullám a hangforrás mozgása irányában $a\tau$ hosszban jut előbbre. Mint az a 13.3.b ábrából is látszik, a hangforrás előtt a hanghullámok sűrűsödnek, míg mögötte ritkulni fognak. Ezt a jelenséget *Doppler*¹ effektusnak nevezik. Ezzel magyarázható, hogy közeledő hangforrás hangja magasabb, mint a távolodóé, illetve ezzel analóg a csillagászatban vörös eltolódásnak nevezett jelenség.

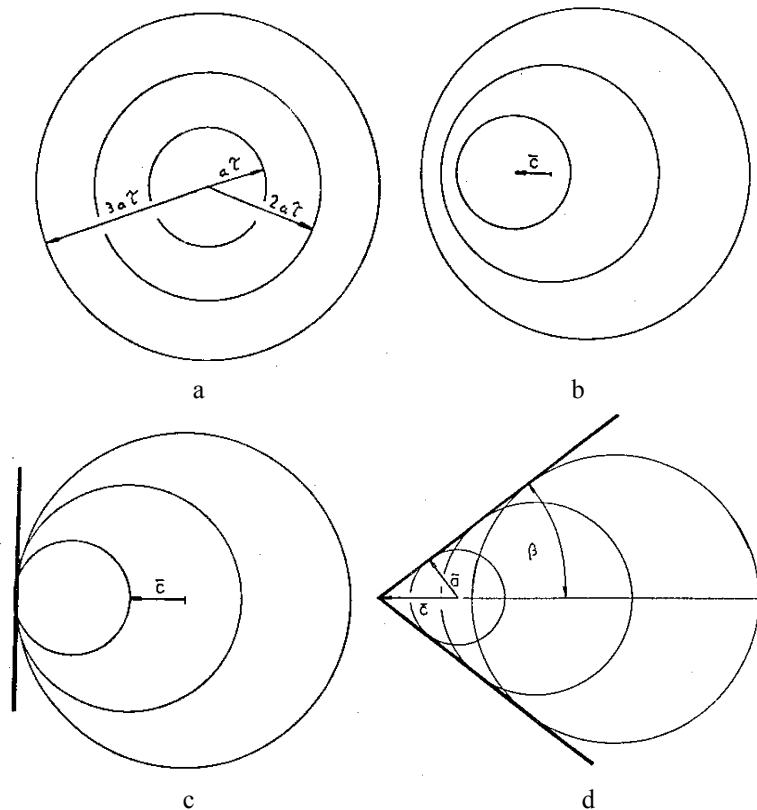
Speciális eset az, ha a hangforrást pont a hang sebességével mozgatjuk ($c = a$), ezt ábrázolja a 13.3.c ábra. Ekkor τ idő alatt mind a hangforrás, mind a hang $a\tau$ utat tesz meg, ezért a hanghullámok utoléri egymást. Így a hangforrásnál kialakult egy olyan sík felület, amelynek normálisa a hangforrás sebességvektora. Itt a síkot egy

¹ *Doppler, Johann Christian (1803–1853)*: osztrák matematikus, fizikus, csillagász. Egy időben a selmeci bányászati akadémia professzora volt. Mint fizikus, hangtannal, optikával elektromossággal és mágnességgel foglalkozott.

végtelen sugarú gömb felületeként kell elképzelnünk, ami egy "végtelen régen" kiadott hanghullám adott időbeli képét jelenti.

Ennek a felületnek az a sajátossága, hogy előtte a hangforrás által kiadott hang nem érzékelhető, ezért ez a felület a **gyenge zavarások határfelülete**. Természetesen a határfelület a hangforrással együtt mozog — ekkor hangsebességgel.

Növeljük a hangforrás haladási sebességét a helyi hangsebesség fölé ($c > a$). Ekkor τ idő alatt a hang $a\tau$, a hangforrás $c\tau$ utat tesz meg. A 13.3.d ábrán látható, hogy ebben az esetben a gömbhullámok középpontjai oly mértékben eltolódnak, hogy a hullámfrontok átmetszik egymást és egy valamennyiüket burkoló körkúp képzelhető el, amelynek tengelye a hangforrás pályájával, csúcsa a hangforrás pillanatnyi helyzetével esik egybe. Ez utóbbi azt jelenti, hogy a hanghullámok $c > a$ esetben sohasem előzik meg a hangforrást.



13.3. ábra Hang terjedése különböző sebességű hangforrás esetén

A fenti ábrák összehasonlításával azt a fontos következtetést is levonhatjuk, hogy kellően hosszú idő elteltével a hangsebességénél kisebb sebességgel haladó hangforrás keltette elemi zavarások az egész térre kiterjednek. Ha viszont a hangforrás sebessége meghaladja a helyi hangsebességet, hatása mindenkor csak egy kúpon belül lesz észlelhető. Meg kell jegyezni, hogy ha pont hangsebességgel halad a hangforrás, a kúppal azonos hatású síkot (lásd 13.3.c ábra), mint a kúp "határesetét" kezelhetjük.

Mekkora lesz az előzőekben vizsgált kúp félszöge?

Ezt a β -val jelölt félkúp szöget, a 13.3.d ábra alapján a

$$\beta = \arcsin\left(\frac{a}{c}\right) \quad (13.20)$$

módon határozhatjuk meg.

A fentiekhez hasonló eredményre juthatunk, ha a megfontolásainkat az egész térben állandó, c sebességgel áramló kontinuumra végezzük el, amikor is az áramlási tér valamely rögzített pontjában folytonosan sugárzó pontszerű hang-, azaz zavarforrás található. Ha az áramlási sebesség kisebb a helyi hangsebességénél, a zavarás a teljes térben észlelhető, míg ha az áramlási sebesség nagyobb a hangsebességénél, a zavarforrás hatása csak a csúcsával ráilleszkedő, a térben rögzített helyzetű zavarási kúp belsejében terjed. Ez alapján kijelenthető, hogy az áramlási sebesség és a hang terjedési sebességének viszonya meghatározó a zavarás hatásának kitétt áramlási zóna kiterjedésének szempontjából. Ezért a két sebesség dimenzió nélküli viszonyszámát, mint jellemző

kritériumot fogjuk fel, amelyet $Mach^2$ -számnak nevezzük:

$$M = \frac{c}{a} \quad , \quad (13.21)$$

ahol:

a — a HELYI (!) hangsebesség.

Így a (13.20) egyenlet a

$$\beta = \arcsin \frac{1}{M} \quad (13.22)$$

alakra módosul.

A $Mach$ -szám bevezetésével az áramlásokat feloszthatjuk (alapvetően):

$M < 1$ — hangsebesség alatti,
 illetve $M > 1$ — hangsebesség feletti

áramlásra.

A zavarási kúpot, mely a 13.3.d ábrán látható, **Mach-kúp**nak, a β szöget **Mach-szög**nek, az elemi zavarások hullámfrontját pedig **Mach-hullám**nak nevezik.

13.3. Az összenyomhatóság és a Mach-szám kapcsolata

A gyakorlati problémák vizsgálatakor fontos előre tudni, hogy az adott áramlási körülmények között figyelembe kell-e vennünk a közeg összenyomhatóságát (mint tudjuk az ideális közeget inkompresszibilisnek tekintjük). Ugyanis a közeg összenyomhatóságának elhanyagolása bizonyos esetekben jelentős hibákhoz vezetnek.

Minden kontinuum elem térfogatát két tényező hatása miatt változtathatja meg: a nyomás vagy a hőmérséklet megváltozása miatt.

Tegyük fel, hogy a vizsgált folyamat barotropikus (mint a hang terjedése is) — azaz a közeg sűrűsége, így térfogata is kifejezhető egyetlen változó, a nyomás függvényében.

A közeg kompresszibilitását a β összenyomhatósági együtthatóval jellemezhetjük, amely a dp nyomásváltozás hatására bekövetkező relatív térfogatváltozást fejezi ki:

$$\beta = -\frac{1}{V} \frac{dV}{dp} \quad , \quad (13.23)$$

ahol:

V — a közeg térfogata;
 dp — a fellépő nyomásváltozás;
 dV — a bekövetkező térfogatváltozás.

Vagy másképpen kifejezve:

$$\beta dp = -\frac{dV}{V} \quad . \quad (13.24)$$

Ha a V térfogatú homogén eloszlású közeg dV térfogatváltozást szenved, akkor fennáll a

² **Mach, Ernst (1838–1916)**: osztrák fizikus, filozófus. Elsőként tanulmányozta a hangnál nagyobb sebességű áramlásokat. Filozófiai nézetei komoly hatással voltak a XX. század fizikájára.

$$\frac{dV}{V} = \frac{dv}{v} \quad (13.25)$$

egyenlőség. Használjuk fel a

$$v = \frac{1}{\rho} \quad (13.26)$$

összefüggést úgy, hogy — a már korábban is használt — logaritmikusan linearizálást, ekkor:

$$\ln v = -\ln \rho \quad , \quad (13.27)$$

vagyis:

$$\frac{dv}{v} = -\frac{d\rho}{\rho} \quad . \quad (13.28)$$

Ezt a kifejezést behelyettesítve a (13.24) egyenletbe:

$$dp\beta = \frac{d\rho}{\rho} \quad . \quad (13.29)$$

Bővítsük az egyenlete jobb oldalát dp -vel és használjuk fel az

$$a^2 = \frac{dp}{d\rho} \quad (13.30)$$

egyenlőséget, ekkor kapjuk, hogy:

$$dp\beta = \frac{dp}{\rho a^2} \quad . \quad (13.31)$$

Mivel a statikus és a dinamikus nyomás értékét állandónak tekinthetjük:

$$dp = q = \frac{\rho}{2} c^2 \quad (13.32)$$

összefüggés alkalmazható. Ezt behelyettesítve a (13.31) egyenletbe, kapjuk a

$$dp\beta = \frac{d\rho}{\rho} = \frac{\frac{\rho}{2} c^2}{\rho a^2} \quad (13.33)$$

egyenlőséget, ami az egyszerűsítés és a *Mach*-szám figyelembevételével a

$$\frac{d\rho}{\rho} = \frac{1}{2} M^2 \quad (13.34)$$

alakra módosul.

A fenti egyenlet az áramló közeg *Mach*-száma és relatív sűrűségváltozása közti kapcsolatot fejezi ki. Eszerint az áramló közeg inkompresszibilisnek tekinthető, ha az áramlási sebesség az adott kontinuumban mért hangsebességhez képest kicsiny.

13.4. Összenyomható közeg változó keresztmetszetű áramcsőben történő áramlása

A gázdinamikai törvényszerűségek igazolásához kiindulásképpen a hőtanból már ismerté vált — nyitott rendszerre érvényes — energia egyenletet alkalmazzuk. Ez a

$$\frac{c^2}{2} + i = \text{állandó} \quad (13.33)$$

alakban írható fel, ahol:

i — az áramló közeg entalpiája és a

$$i = c_p T \quad , \quad (13.34)$$

illetve a

$$di = v dp = \frac{dp}{\rho} \quad (13.35)$$

módokon számítható, ahol:

c_p — a közeg állandó nyomáson vett fajhője.

A jelenség vizsgálatához írjuk fel az energia egyenlet

$$di + c dc = \frac{dp}{\rho} + c dc = 0 \quad , \quad (13.36)$$

illetve a folytonossági törvény egyméretű áramlására felírt

$$\frac{dc}{c} + \frac{d\rho}{\rho} + \frac{dA}{A} = 0 \quad (13.37)$$

differenciál alakját. A (13.36) egyenletet alakítsuk át:

$$\frac{dp}{\rho} + c dc = \frac{d\rho}{d\rho} \frac{dp}{\rho} + c dc = a^2 \frac{d\rho}{\rho} + c dc = 0 \quad . \quad (13.38)$$

Ebből:

$$\frac{d\rho}{\rho} = -\frac{cdc}{a^2} \quad , \quad (13.39)$$

amit ha a (13.37) egyenletbe behelyettesítünk és azt átrendezzük, az alábbi egyenletet kapjuk:

$$\frac{dA}{A} = \frac{cdc}{a^2} - \frac{dc}{c} = \frac{cdc}{a^2} \frac{c}{c} - \frac{dc}{c} \quad . \quad (13.40)$$

Alkalmazva a *Mach*-szám fogalmát, alakul ki a keresett kifejezés:

$$\frac{dA}{A} = (M^2 - 1) \frac{dc}{c} \quad . \quad (13.41)$$

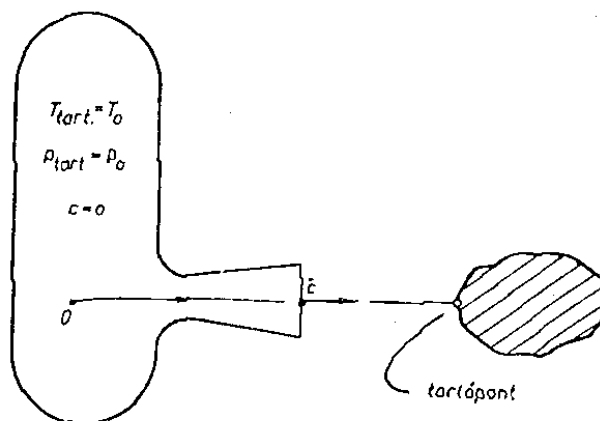
A fenti egyenlet fontos gázdinamikai törvényszerűséget fejez ki, az áramlási keresztmetszet és az áramlási sebesség változásának kapcsolatáról:

- ha az áramlás hangsebesség alatti — azaz $M < 1$ —, akkor az áramlási keresztmetszet növekedéséhez sebességcsökkenés tartozik és fordítva;
- hangsebesség feletti áramláskor — azaz $M > 1$ —, a keresztmetszet növekedéséhez sebességnövekedés tartozik és fordítva;
- az áramlási csatorna legszűkebb keresztmetszetében, amikor $dA = 0$ vagy $M = 1$, vagy $dc = 0$ érték tartozik. $M = 1$ eset — azaz a hangsebesség elérése — csak az áramlási csatorna legkisebb keresztmetszetében történhet.

Ezen törvényszerűsége a következőkben hivatkozni fogunk.

13.5. A fékezett állapotjelzők

Vizsgáljunk meg egy — a 13.4. ábrán látható, a környezetinél nagyobb nyomású — tartályból történő ideális adiabatikus kiáramlás esetét. A tartályban található, még mozdulatlan közeg állapotát a T_0 , p_0 és ρ_0 paraméterekkel jellemezhetjük. A tartály csapjának nyitásakor az összenyomható közeg a szűkülő csatornában gyorsulva kiáramlik a környezetbe.



13.4. ábra Fékezett állapotjelzők meghatározása

Hogyan változnak az áramló kontinuum állapotjelzői?
Írjuk fel erre az esetre az energia egyenletet

$$i + \frac{c^2}{2} = i_0$$

azaz:

$$c_p T + \frac{c^2}{2} = c_p T_0 \quad ,$$

átrendezve:

$$T + \frac{c^2}{2c_p} = T_0 \quad . \quad (13.42)$$

A kifejezésből látható, hogy a gáz sebességének növekedésével annak entalpiája és vele együtt a

hőmérséklete csökken, ezért a következő megnevezéseket is szokás használni.

- T_0 — a tartályhőmérséklet (ezt tudjuk mérni a tartályban);
 $\frac{c^2}{2c_p}$ — a c sebességgel áramló gáz dinamikus hőmérséklete (mozgási energiája, ami az entalpia, tehát a hőmérséklet rovására növekszik);
 T — a c sebességgel áramló gáz statikus hőmérséklete (ezt a közeggel együtt mozgó műszerrel lehet mérni).

Most helyezzünk el a gázáramban egy hőmérőt. Ekkor milyen hőmérsékletet fog mutatni a műszer?

Ez — izentropikus áramlás esetén — a tartály hőmérséklet lesz. Miért? Mert a közeg újra lefékeződik, az úgynevezett dinamikus hőmérséklet értéke zérussá válik, s így a (13.42) egyenlet alapján a statikus hőmérsékletnek a tartályhőmérséklettel kell egyenlőnek lennie. Ezt a hőmérsékletet, illetve a hozzá tartozó állapotjelzőket fékezett paramétereknek nevezzük és ezeket * felső indexszel jelöljük.

Értéküket a (13.42) kifejezés és az állapotjelzők közti kapcsolatot leíró hőtani egyenletek alapján tudjuk meghatározni. Ehhez a (13.42) egyenletet alakítsuk át a

$$c_p = \frac{\kappa}{\kappa - 1} R$$

és az

$$a^2 = \kappa RT$$

összefüggések felhasználásával:

$$T_0 = T^* = T + \frac{(\kappa - 1)c^2}{2\kappa R} = T + \frac{(\kappa - 1)c^2}{2\kappa R} \frac{\kappa RT}{\kappa RT} = T + \frac{\kappa - 1}{2} \frac{c^2}{\kappa RT} \frac{\kappa RT}{\kappa R} = T + \frac{\kappa - 1}{2} M^2 T$$

azaz:

$$T^* = T \left(1 + \frac{\kappa - 1}{2} M^2 \right) \quad (13.43)$$

A fékezett nyomás értéke:

$$p^* = p \left(1 + \frac{\kappa - 1}{2} M^2 \right)^{\frac{\kappa}{\kappa - 1}} \quad (13.44)$$

A fékezett sűrűség:

$$\rho^* = \rho \left(1 + \frac{\kappa - 1}{2} M^2 \right)^{\frac{1}{\kappa - 1}} \quad (13.45)$$

A fékezett paramétereknek a gázdinamikán kívül — többek között — a gázturbinás hajtóművek elméletében van jelentősége, ahol a különböző keresztmetszetekben a közeg állapotát csak így tudják mérésrel meghatározni. Meg kell jegyeznünk, hogy a hajtóművek hőtani számításánál nem szokás kitenni a fékezett paraméterek * felső indexét.

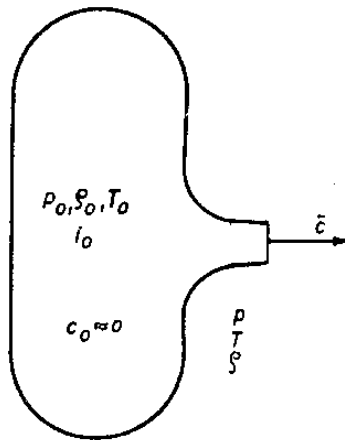
13.6. A kritikus állapotjelzők

Vizsgáljuk tovább az előző fejezetben leírt tartályból szűkülő izentropikus gázkiáramlást a következő gondolatmenet tükrében (13.5. ábra).

Ha a kiáramló gáz sebessége a szűkülő csatornában növekszik — az energia egyenlet (és az energia

megmaradás) értelmében entalpiája, azaz hőmérséklete csökken. Ha csökken a gáz hőmérséklete, csökken a gázban a hang terjedési sebessége — lásd (13.16) összefüggést. Így kialakulhat egy olyan állapot, amikor a gáz áramlási sebessége egyenlő lesz a helyi hangsebességgel.

Mikor következnek be ez a jelenség?



13.5. ábra A kritikus állapotjelzők meghatározása

Ehhez alkalmazzuk az adiabatikus hangsebesség

$$a_{ad} = \sqrt{\kappa RT} \quad (13.46)$$

egyenletét, valamint határozzuk meg a

$$i + \frac{c^2}{2} = i_0 \quad ,$$

azaz a

$$\frac{\kappa}{\kappa-1} RT + \frac{c^2}{2} = \frac{\kappa}{\kappa-1} RT_0$$

energia egyenletből az áramló közeg sebességét:

$$c = \sqrt{2 \frac{\kappa}{\kappa-1} R(T_0 - T)} \quad (13.47)$$

A fenti gondolatmenet szerint a (13.46) és a (13.47) egyenletek bal oldalai az adott esetben egyenlők, tehát akkor a jobb oldalak is, azaz:

$$\sqrt{2 \frac{\kappa}{\kappa-1} R(T_0 - T)} = \sqrt{\kappa RT} \quad (13.48)$$

Határozzuk meg és T_{krit} -ként jelöljük azt a hőmérsékletet, ahol a sebességek egyenlővé válnak.

$$2 \frac{\kappa}{\kappa-1} R(T_0 - T_{krit}) = \kappa RT_{krit} \quad (13.49)$$

$$T_0 - T_{krit} = \frac{\kappa-1}{2} T_{krit} \quad (13.50)$$

$$T_0 = \left(\frac{\kappa - 1}{2} + 1 \right) T_{krit} = \left(\frac{\kappa + 1}{2} \right) T_{krit} \quad (13.51)$$

Ebből:

$$T_{krit} = \frac{2}{\kappa - 1} T_0 \quad (13.52)$$

A hozzá tartozó p_{krit} jelű kritikus nyomás:

$$p_{krit} = p_0 \left(\frac{2}{\kappa + 1} \right)^{\frac{\kappa}{\kappa - 1}} \quad (13.53)$$

A ρ_{krit} kritikus sűrűség:

$$\rho_{krit} = \rho_0 \left(\frac{2}{\kappa + 1} \right)^{\frac{1}{\kappa - 1}} \quad (13.54)$$

A kritikus sebesség értéke a

$$c_{krit} = \sqrt{\kappa R T_{krit}} \\ c_{krit} = \sqrt{\frac{2}{\kappa + 1}} a_0 = \sqrt{\frac{2}{\kappa + 1} \frac{p_0}{\rho_0}} \quad (13.55)$$

kifejezések segítségével határozható meg.

A fenti egyenletekkel meghatározott állapotjelzőket **kritikus állapotjelzők**nek nevezzük.

Kétatomos gázok és keverékek — például a levegő — esetén a kritikus értékek:

$$\begin{aligned} p_{krit} &= 0,528 p_0 \\ \rho_{krit} &= 0,634 \rho_0 \\ T_{krit} &= 0,833 T_0 \\ c_{krit} &= 0,913 a_0 \end{aligned} \quad (13.56)$$

De miért kritikus az az állapot, amit ezek a paraméterek meghatároznak? Hol alakul ki ez az állapot az áramlási csatornában?

Kritikus sebesség — azaz a helyi hangsebesség — az áramlási csatorna legkisebb keresztmetszetében fog kialakulni. Ezt igazoltuk a (13.41) egyenlettel.

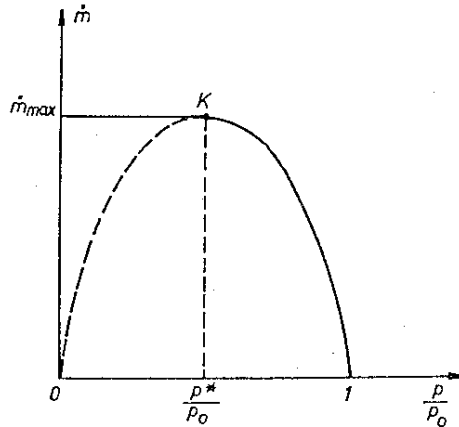
Vizsgálatunk szerint ha a kritikus hangsebességet a legkisebb keresztmetszetben éri el a kiáramló gáz, akkor ott helyi hangsebességnél nagyobb sebességet nem tudunk elérni. Ez pedig azt jelenti, hogy ha az áramlási csatorna legszűkebb keresztmetszetében elérjük a kritikus sebességet — kialakul a kritikus állapot —, tovább növelni nem tudjuk a csatornán átáramló közeg tömegáramát. Ezt a jelenséget szokás úgy is nevezni, hogy **a keresztmetszet**, vagy **a csatorna lezár**.

Ez a jelenség lép fel gázturbinák álló lapátkoszorúinál, illetve a sugárhajtóművek fűvócsöveinél, illetve (rossz méretezés esetén) kialakulhat a dugattyús hőerőgépek kipufogó rendszerében is.

Vizsgáljuk meg a tartályból kiáramló közeg tömegáramát a tartályban uralkodó, illetve a környezeti nyomások arányai függvényében. A folytonossági törvény és a hőtani alapegyenletek felhasználásával — a levezetést mellőzve —, az tömegáram az alábbi módon határozható meg:

$$\dot{m} = A \sqrt{2 \frac{\kappa}{\kappa - 1} p_0 \rho_0 \left[\left(\frac{p}{p_0} \right)^{\frac{2}{\kappa}} - \left(\frac{p}{p_0} \right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} \right]} \quad (13.61)$$

A fenti egyenlettel leírt függvény menetét láthatjuk a 13.6. ábrán. A K -val jelölt tetőponttól balra eső részét szaggatott vonallal rajzolt görbe szemlélteti.



13.6. ábra Tömegáram változása a nyomásviszony függvényében

Ha összehasonlítjuk a (13.61) összefüggés által meghatározott függvényt az előtte tanultakkal, érdekes képet kapunk.

A K maximum ponttól jobbra a tapasztalat és a függvény értéke megegyezik. Ha csökkentjük a környezeti, vagy más néven ellennyomást, a tartályból kiáramló gáz tömegárama növekszik.

A kritikus nyomásviszony elérése után hiába csökkentjük az ellennyomást, a kiáramló tömegáram állandó értékű (maximális) marad. Ekkor már nem fog az áramlási sebesség értéke növekedni a csatorna végkeresztmetszetében. Ezt mutatja az ábrán a K ponttól balra a folytonos vonal.

A maximális tömegáramot úgy tudjuk meghatározni, hogy a (13.57) egyenletbe behelyettesítjük a (13.55) és a (13.56) egyenleteket, így:

$$\dot{m}_{\max} = A_{krit} \sqrt{2 \frac{\kappa}{\kappa + 1} p_0 \rho_0 \left(\frac{2}{\kappa + 1} \right)^{\frac{2}{\kappa-1}}} \quad (13.62)$$

14. A Laval-fúvóka

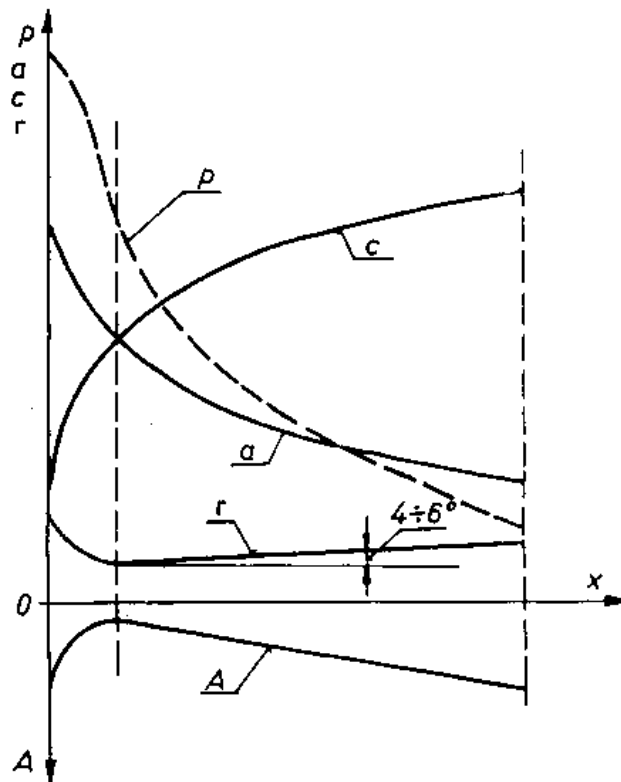
Felvetődik a kérdés, hogy miként lehet egy egyméretű hangsebesség alatti áramlást a hangsebességnél nagyobbá gyorsítani? Problémát jelent ugyanis az, hogy egy egyszerű szűkülő csatornában nem tudjuk a gáz sebességét a kritikus érték fölé növelni.

E célból a fúvókát úgy kell kialakítani, hogy keresztmetszete addig csökkenjen, amíg a gáz állapotjelzői nem érik el a kritikus értéket. Ettől kezdődően a csatorna keresztmetszetének nőnie kell. Így a korábban tanultaknak megfelelően a gázáram sebessége átlépi a hangsebességet és tovább gyorsul a fúvóka bővülő részében.

Ilyen kombinált, szűkülő majd bővülő részekből álló fúvókát először *Carl Gustav Patrik de Laval*³ svéd mérnök alkalmazott egy gőzturbinában. Ezért az ilyen kialakítású fúvókákat *Laval-fúvókáknak* vagy *Laval-csőnek* nevezik.

Most vizsgáljuk meg, hogy miért kell a hang terjedésénél nagyobb sebesség eléréséhez a fúvóka bővülő keresztmetszetű szakasza.

A hangsebesség feletti áramlásban a gyenge zavarások az áramlással szemben nem tudnak terjedni. Ha az ellennyomás kisebb, mint a fúvóka legkisebb keresztmetszetében a gáz nyomása, akkor az még nem jelenti azt, hogy a gáz további gyorsítása lehetséges. Ennek a nyomáskülönbségnek a zavaró hatása miatt a gyenge kompressziós és a depresszió-hullámok nem tudnak a fúvókába bejutni és az áramlást befolyásolni. Ezért a fúvóka falának magának kell olyan zavaró hatást kifejteni a közegáramra, amely biztosítja a nyomás csökkenését. Ilyen zavarforrás az olyan csatorna határoló fala, amelyben az áramlási keresztmetszet az áramlás irányában nő. Ezért a *Laval-fúvóka* táguló részének kúpossága $8 \sim 12^\circ$ között van (gondoljunk a súrlódásos közeg áramlásánál már megismert leválásra is).



14.1. ábra Állapotjelzők változása a Laval-fúvókában

A *Laval-cső* geometriai, illetve a gáz fizikai jellemzőinek hosszmenti változását mutatja a 14.1. ábra.

Fontos megjegyezni, hogy a *Laval-fúvóka* csak meghatározott fizikai feltételek mellett biztosítja a kívánt, kritikus feletti sebesséértékeket. Ezér most elsőként nézzük meg a méretezés főbb lépéseit. Ezek:

→ a kritikus keresztmetszet meghatározása:

³ *Laval, Carl Gustav Patrik de (1845–1913*: svéd mérnök. A gőzturbinák egyik feltalálója. A fent tárgyalt fúvókán kívül az egyfokozatú gyorsjáratú gőzturбина is a Ő nevét viseli

$$A_{krit} = \frac{\dot{m}}{\sqrt{\frac{2\kappa}{\kappa-1} p_0 \rho_0 \left(\frac{2}{\kappa-1}\right)^{\frac{2}{\kappa-1}}}} ; \quad (14.1)$$

→ a végkeresztmetszet meghatározása:

$$A_v = \frac{\dot{m}}{\sqrt{\frac{2\kappa}{\kappa-1} p_0 \rho_0 \left[\left(\frac{p_v}{p_0}\right)^{\frac{2}{\kappa}} - \left(\frac{p_v}{p_0}\right)^{\frac{\kappa+1}{\kappa}} \right]}} , \quad (14.2)$$

ahol:

p_v — a fúvóka végnyomása (tervezett ellennyomás);

a táguló csatorna hosszának meghatározása (kör vagy négyzet keresztmetszet esetén):

$$l = \frac{d_v - d_{krit}}{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}} , \quad (14.3)$$

ahol:

d_v — a végkeresztmetszet átmérője vagy oldalhossza;

d_{krit} — a kritikus keresztmetszet átmérője vagy oldalhossza;

α — a táguló csatorna kúpszöge ($\alpha = 8 \sim 12^\circ$).

De mi történik akkor, ha a fizikai körülmények eltérnek a méretezett értékektől? A 14.3. ábra a *Laval*-fúvókában kialakuló áramlási *Mach*-szám és nyomás változását ábrázolja az ellennyomás függvényében.

Az ábrából látható, az ellennyomástól függően hét áramlástanai folyamat alakulhat ki. Ezek:

I. $p_E < p < p_0$

Az Akrit legkisebb keresztmetszetben maximális, de a helyi hangsebességnél kisebb sebesség alakul ki, amely a bővülő szakaszban ismét csökkeni fog. A fúvóka ekkor, mint egy *Veturi*-cső működik. Az ellennyomás csökkenésekor az átáramló tömegáram növekedni fog.

II. $p = p_E$

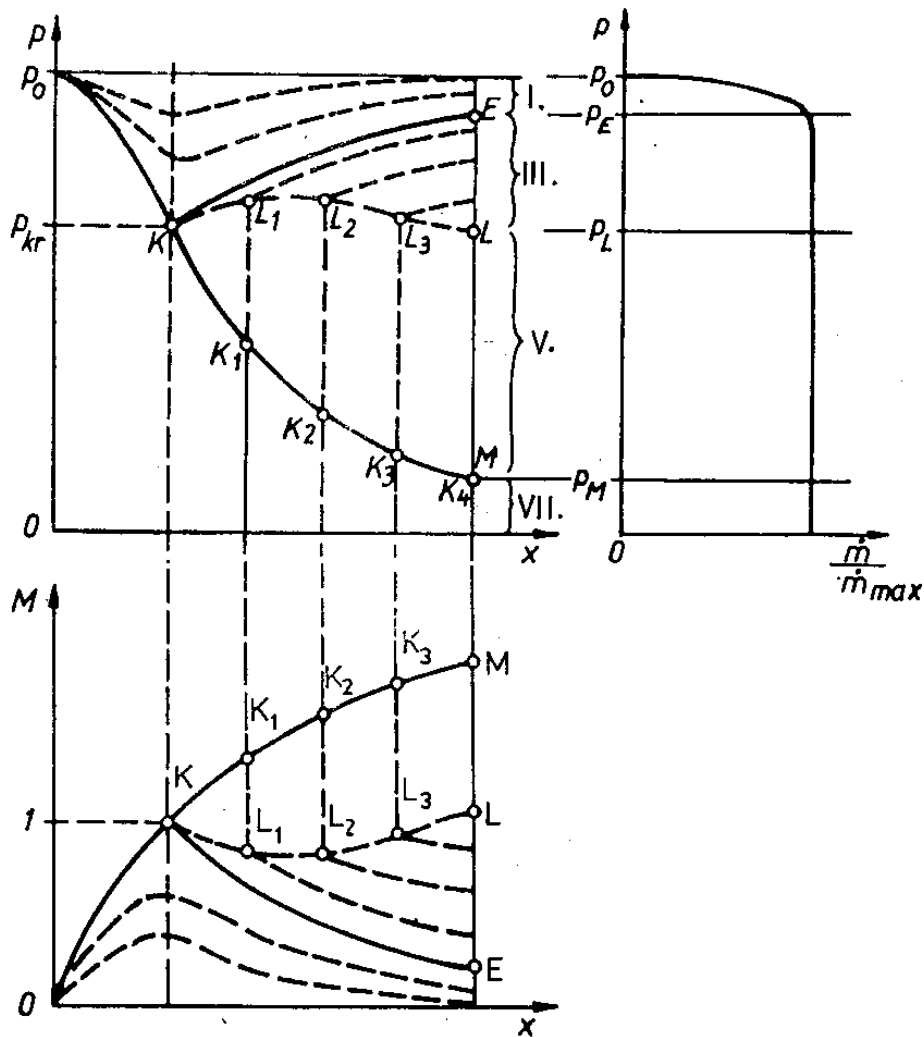
Ekkor a legkisebb keresztmetszetben a helyi hangsebesség alakul ki, de — az ellennyomás miatt — közeg sebessége újra hangsebesség alá csökken. Az átáramló közeg tömegárama a maximálissal lesz egyenlő. A továbbiakban a nyomás csökkenése esetén a tömegáram nagysága változatlan marad.

III. $p_L < p < p_E$

Ebben az esetben a gáz a fúvóka kritikus keresztmetszete mögött a hangsebesség fölé gyorsul és egy bizonyos — a p ellennyomásnál kisebb — értékig expandál (**K** pontok). Ebben a pontban viszont egy merőleges lökeshullám alakul ki, a gáz nyomása ugrásszerűen megnő, sebessége a hangsebesség alá csökken.

IV. $p = p_L$

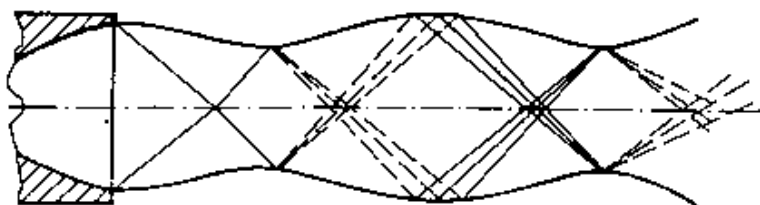
Ekkor a fent említett merőleges lökeshullám pont a fúvóka kilépő keresztmetszetében helyezkedik el.



14.2. ábra Laval-fúvóka működése az ellennyomás függvényében

V. $p_L < p < p_M$

A fúvókában a kritikustól a kilépő keresztmetszetig hangsebesség feletti lesz az áramlás. A végkeresztmetszet mögött háromdimenziós lökeshullám-rendszer alakul ki. A fúvóka elhagyása után a gázsugár — a kialakult lökeshullámok következtében — a 14.3 ábra szerinti lesz. A szaggatott vonalak expanziós, a folytonos vonalak kompressziós hullámokat jelölnek.



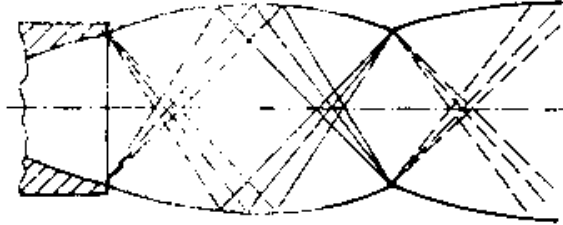
14.3. ábra A lökeshullám rendszer kialakulása az V. jelű esetben

VI. $p = p_M$

A Laval-fúvóka a méretezési üzemi állapotban működik. A fúvókát elhagyó gázsugár állandó keresztmetszetű marad és nyomása minden pontban azonos a p_M méretezési ellennyomással.

VII. $p < p_M$

A gázsugár a fúvókából kilépve tovább expandál, majd — ferde lökeshullámon keresztül — sűrűsödni, majd újra expandálni fog (14.4. ábra). Ekkor a gáz nyomása a végkeresztmetszetben — ellentétben a többi üzemmódtól — nem fog megegyezni a környezettel, hanem attól függetlenül p_M értékű lesz.



14.4. ábra A lökeshullám rendszer kialakulása az VII. jelű esetben

Végül arra a megállapításra juthatunk, hogy a *Laval*-fúvóka csak abban az esetben alkalmas a kritikusnál nagyobb sebesség elérésére, ha a fúvóka utáni nyomás megegyezik vagy kisebb, mint a fúvóka méretezési nyomása.

Laval-fúvókát alkalmazhatnak például a szuperszonikus repülőgépek sugárhajtóműveinek vagy a rakétáknak fúvócsöveinél. AZ ilyen fúvócsövek hátrányaként jelentkezik, hogy jó hatásfokkal csak a méretezett üzemmódon tud működni, szabályozásának megoldása igen bonyolult feladat.

15. Folyadék rugalmassága

Minden irányban azonosan alakváltozó (izotróp) testek alakváltozása előállítható a térfogatváltozás és a szögdeformáció eredőjeként. Folyadék rugalmasságát a térfogat és a nyírórugalmassággal jellemezhetjük. Most csak a térfogat rugalmassággal foglalkozunk.

15.1. Hangsebesség a folyadékban

A valóságos folyadékok összenyomhatóak, eredeti térfogatuk csökken a nyomásnövekedés hatására. Ezért meghatározható a térfogatváltozásból származó E rugalmassági modulus az alábbi módon:

$$E = -\frac{\Delta p}{\frac{\Delta V}{V}} = -V \cdot \frac{\Delta p}{\Delta V} \quad , \quad (15.1)$$

ahol:

- V — a folyadék térfogata zérus túlnyomás esetén;
- Δp — a nyomásváltozás nagysága;
- ΔV — a fellépő térfogatváltozás.

A rugalmassági modulusok értékei a legnagyobb mértékben a hőmérséklet változásától függenek. Mivel egy V térfogatban lévő folyadék tömege ρV a nyomásnövekedés hatására nem változik azaz:

$$dm = d(\rho V) = d\rho V + dV\rho = 0 \quad .$$

A fenti egyenlet átrendezése után:

$$\frac{dV}{V} = -\frac{d\rho}{\rho} \quad . \quad (15.2)$$

Ezt behelyettesítve a (15.1) egyenletbe, akkor a rugalmassági modulus meghatározására az

$$E = -V \cdot \frac{\Delta p}{\Delta V} = -\frac{V}{dV} \cdot dp = \frac{\rho}{d\rho} \cdot dp = \rho \cdot \frac{dp}{d\rho} \quad (15.3)$$

kifejezést kapjuk. Felhasználva a

$$a^2 = \frac{dp}{d\rho}$$

összefüggést, a rugalmassági modulus:

$$E = \rho \cdot a^2 \quad . \quad (15.4)$$

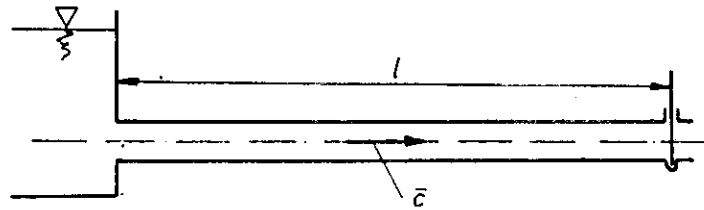
Ha ezt átrendezzük, megkapjuk a hang terjedési sebességét a folyadékban

$$a = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad . \quad (15.5)$$

A fenti egyenletből jól látszik hogy a folyadékok rugalmassága nem hanyagolható el minden esetben. Látható továbbá az is, hogy ha az összenyomhatóságtól eltekintünk, végtelen nagy hangsebességet kapunk.

15.2. Csőbe zárt folyadékoszlop rugalmassági modulusa

A továbbiakban vizsgáljunk egy tartályból hosszú csövön keresztül történő kiáramlást, úgy, hogy a csővezeték végén egy csapot helyeztek el (15.1. ábra)



15.1. ábra

Ha a folyadék tökéletesen összenyomhatatlan, akkor a csap zárásakor vagy nyitásakor a cső hossza mentén mindenütt azonos időpontban változik meg a folyadékrészek sebessége és nyomása úgy, hogy ez a változás a zárszerkezet állításának ideje alatt jelentkezne. Ekkor a csap állítása alatti sebesség és nyomásváltozásokat a *Bernoulli* egyenlet összenyomhatatlan közegre érvényes alakja segítségével határozhatjuk meg.

Valóságban a zárszerkezet állításának következtében a fentiekől eltérően alakulhatnak a folyadék jellemzői. Az eltérés annál nagyobb, minél gyorsabban változtatjuk a csap állását. Gyors változtatás esetén a gyorsulás értékek nagyobbak lesznek, minek következtében a nyomásváltozások nagyságai nagyok lesznek. Ekkor a folyadék összenyomhatósága már jelentősen befolyásolja a jelenséget.

A csővezetékben fellépő nagy mértékű nyomásváltozások a csőfal rugalmas alakváltozását is előidézik. Ezért az áramlási jellemzők meghatározásánál ezt a körülményt is figyelembe kell venni.

A fenti jelenségre *Allievi* dolgozott ki a műszaki gyakorlat számára is alkalmas számítási eljárást.

A csőbe zárt E_f rugalmassági modulusú folyadékoszlop hossza a nyomásnövekedés hatására

$$\Delta s_1 = \frac{\Delta p}{E_f} s \quad (15.6)$$

mértékben változik, ahol:

s — a folyadékoszlop hossza (15.2. ábra).

A rugalmas csőfal megnyúlása és így a d csőátmérő növekedése a folyadékoszlop hosszának további csökkenését okozza. Ez a Δs_2 -vel jelzett rövidülés az anyagmegmaradás elve alapján számítható. A Δs_2 hosszú, d átmérőjű henger térfogata egyenlőnek kell lennie az s hosszú $d + \Delta d$ külső és d belső átmérőjű gyűrű térfogatával, azaz:

$$\Delta s_2 \frac{d^2 \pi}{4} = s d \pi \frac{\Delta d}{2} \quad (15.7)$$

Átrendezve a fenti egyenletet:

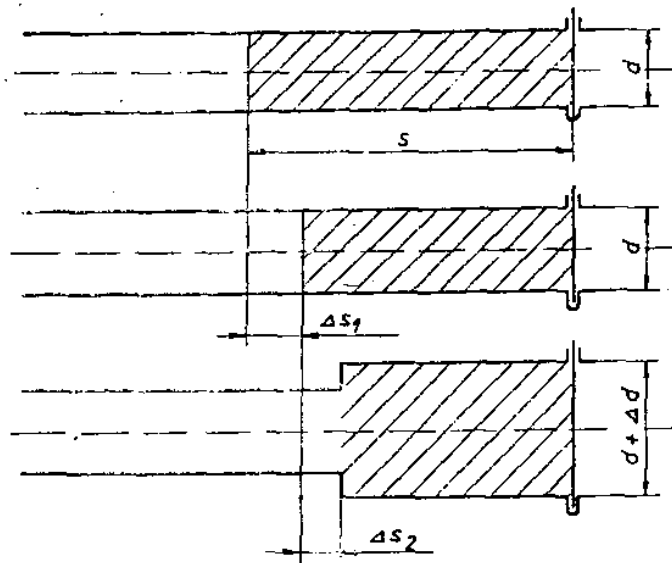
$$\Delta s_2 = 2 \cdot s \cdot \frac{\Delta d}{d} \quad (15.8)$$

Vékonyfalú csőben a nyomásnövekedés hatására ébredő feszültséget a kazánformula segítségével határozhatjuk meg.

$$\Delta \sigma = \frac{\Delta p d}{2 \delta} \quad (15.9)$$

ahol:

δ — a csőfal vastagsága.



15.2. ábra

Írjuk fel esetünkre a

$$\Delta\sigma = E_c \cdot \frac{\Delta d}{d}$$

Hooke⁴ törvényét:

$$\Delta d = \frac{1}{E_c} \Delta\sigma d \quad , \quad (15.10)$$

ahol:

E_c — a cső rugalmassági modulusa (*Young* modulus)

És amely kifejezésből átrendezéssel és a (15.9) egyenlet behelyettesítésével kapjuk a

$$\frac{\Delta d}{d} = \frac{\Delta p}{E_c} \frac{d}{2\delta} \quad , \quad (15.11)$$

kifejezést, amit ha behelyettesítünk a (15.8) egyenletbe, megkapjuk a csőfal rugalmasságából származó folyadékoszlop rövidülést

$$\Delta s_2 = s \frac{\Delta p}{E_c} \frac{d}{\delta} \quad . \quad (15.12)$$

Így a folyadékoszlop teljes rövidülése:

$$\Delta s = \Delta s_1 + \Delta s_2 = \Delta p \left(\frac{1}{E_f} + \frac{d}{\delta E_c} \right) s \quad . \quad (15.13)$$

⁴ **Hooke, Robert (1635–1703)**: angol fizikus. A fenti — róla elnevezett — törvényt 1676-ban latinul fogalmazta meg: *Ut tensio sic vis* (amilyen a nyúlás, olyan az erő).

Vezessük be a csőbe zárt folyadékoszlop E_r redukált rugalmassági modulusát:

$$\frac{1}{E_r} = \frac{1}{E_f} + \frac{d}{\delta E_c} \quad (15.14)$$

Ekkor:

$$\Delta s = s \frac{\Delta p}{E_r} \quad (15.15)$$

A cső nagy falvastagsága esetén a csőfal rugalmasságától ($E_c \approx 0$) eltekintünk, mivel ebben az esetben a folyadékoszlop kompresszibilitásától származó oszloprövidülés ugyanis nagyságrendekkel nagyobb mint a csőfal rugalmasságából származó rövidülés. A rugalmas anyagú cső esetén a folyadék kompresszibilitásától ($E_f \approx 0$) eltekintünk, mivel ebben az esetben a csőfal rugalmasságából származó rövidülés nagyságrendekkel nagyobb lesz, mint a folyadékoszlop rugalmasságából származó oszloprövidülés.

15.2. Csővezeték gyors zárása

Egy csővezeték gyors zárása esetén jelentős mérvű nyomáslengési folyamat alakulhat ki a csőrendszerben az áramló folyadék, illetve a csővezeték rugalmassága következtében. Ez a jelenség több fázisra bontható fel. A fázisok leírásánál egy tartályból való kifolyást biztosító, l hosszúságú csővezeték vizsgálunk, melyben a közeg c sebességgel áramlik és a hangterjedési sebessége a . A hangsebesség nagysága alapvetően az áramló közegtől, a cső anyagától, átmérőjétől és vastagságától függ.

→ **Hirtelen zárás**

A $\tau = 0$ időpillanatban történik és a zárószerkezet működési idejét $\Delta\tau = 0$ -nak feltételezzük.

$$\rightarrow \text{1. fázis:} \quad 0 < \tau < \frac{l}{a}$$

A zárószerkezet hirtelen zárása következtében a csap előtt a folyadékoszlop megáll és a folyadék összenyomhatósága, valamint a csőfal rugalmassága miatt lerövidül. A cső belső átmérője megnő. A nyomásfront helyi hangsebességgel halad a tartály felé, mögötte a folyadék nyomása Δp értékkel növekszik (15.3a. ábra).

$$\rightarrow \text{2. fázis:} \quad \frac{l}{a} < \tau < 2\frac{l}{a}$$

Amikor a nyomásfront eléri a tartályt, a csővezeték teljes hosszában áll a folyadék. A csőben uralkodó nagyobb nyomás hatására a közeg visszaáramlik a tartályba c sebességgel. Ennek következtében egy határfelület mentén a csőben a nyomás csökkeni fog. Ez a határfelület a sebességgel halad a tartálytól a zárószerkezet felé (15.3b. ábra).

$$\rightarrow \text{3. fázis:} \quad 2\frac{l}{a} < \tau < 3\frac{l}{a}$$

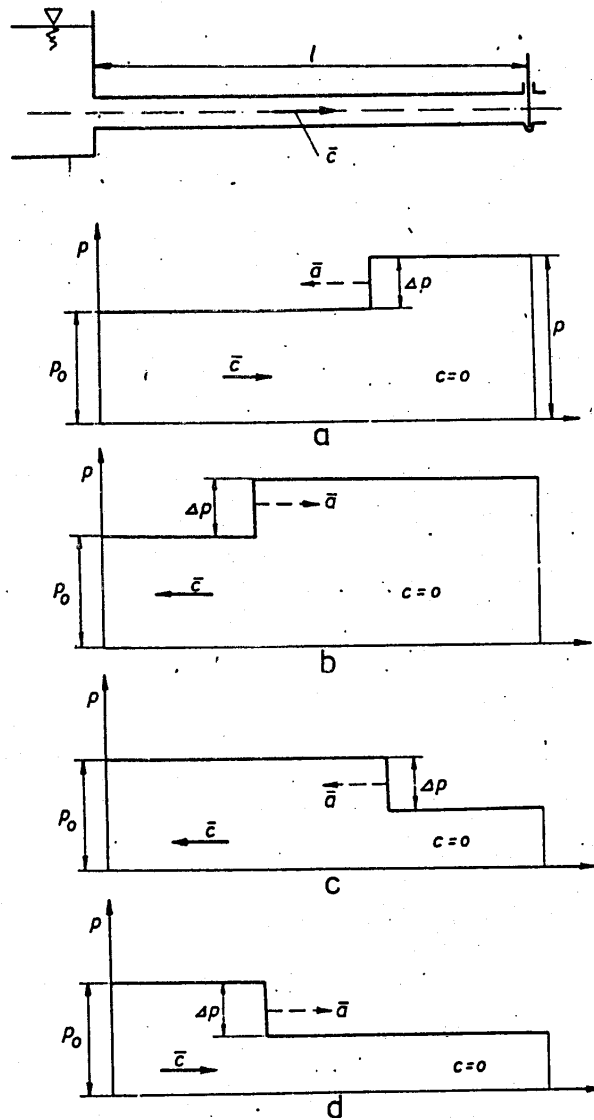
Mivel a 2. fázis alatt a csővezetékben a nyomás lecsökkent a zárás előtti értékre, a cső — a fal rugalmassága következtében — összenyomódik. Ennek hatására a folyadék c sebességgel továbbra is a tartály felé áramlik. A kialakuló Δp erősségű depressziós hullám pedig helyi hangsebességgel fog haladni a csaptól a tartály felé (15.3c. ábra). A fázis végére a depressziós hullám eléri a tartályt és a közeg újra állni fog a csővezetékben.

$$\rightarrow \text{4. fázis:} \quad 3\frac{l}{a} < \tau < 4\frac{l}{a}$$

A 3. fázis végére a csővezetékben Δp -vel kisebb nyomás alakult ki, aminek hatására folyadék c sebességgel kezd a tartályból a zárószerkezet irányába áramlani. Az áramlás következtében a csőben a nyomás növekedni fog, a nyomáshullám hangsebességgel halad a csap felé.

A 4. fázis végére — összenyomható, de súrlódásmentes folyadék esetén — újra az 1. fázis előtti helyzet alakul ki,

így a fentiekben leírt jelenség ismétlődni fog. A csővezeték kialakul — a hirtelen zárás következtében — egy jelentős mérvű nyomáslengés. Ezt a nyomáslengést a csőfal keresztirányú lengései még befolyásolni tudják, amely hatásával itt most nem foglalkozunk.



15.3. ábra Csővezeték hirtelen zárása

Sűrűdásos közeg esetén a folyamat alatt nyomásvesztés lép fel. Ennek következtében a nyomáslengés amplitúdója fokozatosan csökkeni fog és így a lengés idővel megszűnik.

Hasonló jelenség játszódik le csővezeték hirtelen nyitásakor is.

15.3. Csővezeték lassú zárása

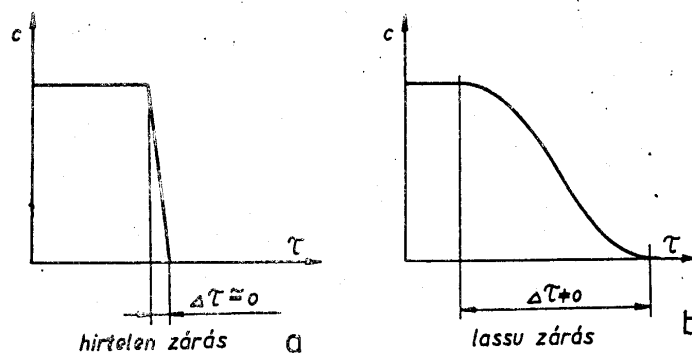
Az előző fejezetben azt vizsgáltuk, hogy nyomáslengések hogyan alakulnak ki a csővezeték $\Delta\tau = 0$ idő alatt végbemenő zárásakor. Hasonló jelenség játszódik le, ha a csővezeték zárása $\Delta\tau \approx 0$, véges idő alatt történik.

Hirtelen zárás esetén a folyadék sebessége a zárószervezet keresztmetszetében közel függőlegesen éri el a zérus értéket. Ezt mutatja a 15.4a. ábra. Lassú zárás esetén — ekkor $\Delta\tau > 0$ — egy, az előzőnél laposabb görbe szerint csökken le a közeg sebessége a kezdeti értéktől a nulláig (15.4b. ábra). A sebességcsökkenési görbe alakját alapvetően a zárószervezet működése, típusa határozza meg.

A csőben kialakuló hullámfront görbéje a sebességváltozásnak megfelelően alakul ki. Ez a valós, hirtelen zárás esetén közel függőleges (15.5. ábrán szaggatott vonallal jelölt görbe). Lassú zárásakor pedig a sebességcsökkenés görbéjének megfelelő lesz a nyomásnövekedési görbe alakja, amit a folytonos vonal szemléltet. A változó nyomású csőszakasz hossza a helyi hangsebesség ismeretében az

$$l_0 = a\Delta\tau \quad (15.16)$$

egyenlettel számítható.



15.4. ábra Csővezeték lassú zárása

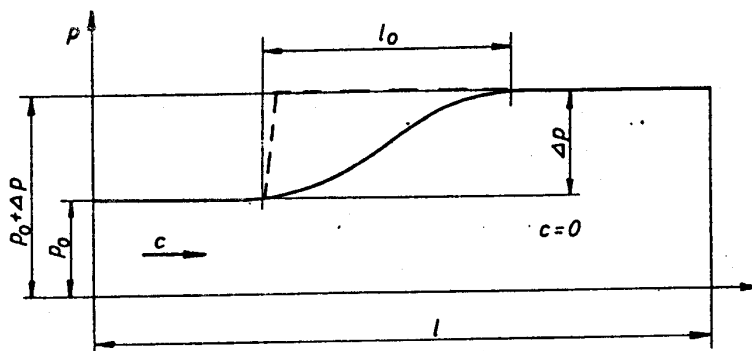
Könnyen belátható, hogy ha ez a változónyomású szakaszra érvényes az

$$l_0 > 2l \quad (15.17)$$

egyenlőtlenség, az előző fejezetben leírt folyamat második fázisában kialakuló és a tartályból a zárszerkezet felé haladó depressziós hullám eléri a csapot, annak teljes zárása előtt. Így a korábban említett Δp nyomásnövekedés nem jöhet létre. Ezért célszerű, hogy a csővezeték zárási ideje kielégítse a

$$\Delta\tau > \frac{2l}{a} \quad (15.18)$$

egyenlőtlenséget.



5.3. ábra

A csővezeték hirtelen zárásakor fellépő hidraulikus ütés jelentős szerkezeti problémát okozhat olyan rendszerekben, ahol valamilyen folyadék áramlik csővezetékben. Az ilyen rendszereket nyomásbiztosító berendezéssel kell ellátni, hogy az esetlegesen fellépő nyomásnövekedést csökkentsék. Hasonló céllal alkalmaznak olyan zárszerkezet megoldásokat, amelyek hosszú működési idejűek, ezzel a megoldással ugyanis az előbb tárgyalt lassú zárást — lásd (15.18) egyenlőtlenséget — valósítják meg.