BINOMIÁLIS EGYÜTTHATÓKKAL ÉS HATVÁNYÖSSZEGEKKEL KAPCSOLATOS DIOFANTIKUS EREDMÉNYEK

doktori (PhD) értekezés

Készítette:

Rakaczki Csaba

Debreceni Egyetem, Debrecen, 2005

Ezen értekezést a Debreceni Egyetem Matematika- és Számítástudományok Doktori Iskola Diofantikus és konstruktív számelmélet programja keretében készítettem a Debreceni Egyetem TTK doktori (PhD) fokozatának elnyerése céljából. Debrecen, 2005.

....

Rakaczki Csaba
jelölt

Tanúsítom, hogy Rakaczki Csaba doktorjelölt 1999-2002 között a fent nevezett Doktori Iskola Diofantikus és konstruktív számelmélet programjának keretében irányításommal végezte munkáját.
Az értekezésben foglaltak a jelölt önálló munkáján alapulnak, az eredményekhez önálló alkotó tevékenységével meghatározóan hozzájárult.
Az értekezés elfogadását javaslom.

Debrecen, 2005.

....

Dr. Győry Kálmán
témavezető

Köszönetnyilvánítás

Ezúton is szeretnék köszönetet mondani mindazoknak, akik közvetve vagy közvetlenül hozzájárultak a disszertációm elkészítéséhez.

Szüleimnek, akik felneveltek és elindítottak az életben, bátyámnak az állandó biztatásáért,

Témavezetőmnek, Dr. Győry Kálmánnak, akinek hasznos tanácsai és útmutatásai nélkül ez a disszertáció nem készülhetett volna el,

Kollégáimnak, Dr. Hajdu Lajosnak és Dr. Pintér Ákosnak, akikhez bármikor fordulhattam szakmai segítségért.

Tartalomjegyzék

1 BEVEZETÉS

A diofantikus egyenletek elméletében központi helyet foglalnak el a kétismeretlenes polinomiális egyenletek, azok egész és racionális megoldásainak a vizsgálata. A megoldásszám végességével kapcsolatban számos fontos eredmény született, Runge, Thue, Mordell, Siegel és mások végességi eredményeket nyertek egyenletek egy-egy széles osztályára. Végül 1929-ben Siegel [61] általánosságban megmutatta, hogy ha $F(x, y)$ egy racionális együtthatós, abszolut irreducibilis polinom, úgy az

$$F(x, y) = 0$$

egyenletnek csak véges sok x, y egész megoldása van, feltéve hogy az egyenlet által definiált algebrai görbe g génuszára $g > 0$ teljesül. 1983-ban Faltings [22] azt is bebizonyította, hogy $g > 1$ esetén még a racionális megoldások száma is véges.

Siegel és Faltings nevezetes tételei ineffektívek, azaz a bizonyításaik nem szolgáltatnak semmilyen eljárást a megoldások megkeresésére. Megjegyezzük továbbá, hogy ezen általános tételeknek egy-egy egyenletosztályra való alkalmazása gyakran sikertelen marad, mivel a reducibilitás eldöntése és a génusz megállapítása esetenként komoly nehézségekbe ütközik. Ez a helyzet az

$$f(x) = g(y) \tag{1.1}$$

alakú egyenleteknél, ahol f és g racionális együtthatós polinomok. Az ilyen típusú egyenletek különösen fontosak és érdekesek azokban a speciális esetekben, amikor f és g közül legalább az egyik mint z polinomja $z(z-1)\cdots(z-(m-1))$, $\binom{z}{n}$, z^k vagy $1^l + 2^l + \cdots + z^l$ alakú, ahol m, n, k, l adott pozitív egész számok. Ezen egyenletosztályok megoldásszámával igen sokan foglalkoztak. Ujabban Bilu és Tichy [9] teljes általánosságban jellemezték azon f, g polinompárokat, melyekre (1.1)-nek véges sok egész megoldása van. Tételük azonban ineffektív. Továbbá olyan komplikált feltételeket tartalmaz, hogy az említett egyenletosztályokra való alkalmazása jórészt mindmáig eredménytelennek bizonyult.

Disszertációnk további három fejezetből áll. A 2. és a 3. fejezetben (1.1) típusú egyenletek egy-egy fontos, sokat vizsgált osztályára nyerünk általános ineffektív végességi eredményeket. Tételeink a korábbi, idevágó eredmények messzemenő általánosításai és egyben lényeges pontosításai, finomításai. A 4. fejezetben a 2. fejezet bizonyos eredményeinek effektív változatát adjuk, sőt a tekintett egyenleteket egy sor konkrét esetben teljesen megoldjuk.

Az alábbiakban röviden vázoljuk az egyes fejezetek legfontosabb eredményeit.

II

A 2. fejezetben az

$$x\,(x-1)\cdots(x-(m-1)) = \lambda y\,(y-1)\cdots(y-(n-1)) + l \tag{1.2}$$

típusú egyenletek megoldásszámával foglalkozunk, ahol m, $n \geq 1$ adott pozitív egészek, $\lambda(\neq 0)$ és l pedig rögzített racionális számok. Az $l = 0$ speciális esetben számos szerző, köztük Saradha, Shorey és Tijdeman [50]-[56] nyertek végességi eredményeket az (1.2) alakú egyenletekre vonatkozóan. [5]-ben Beukers, Shorey és Tijdeman leírták mindazon m, n és λ számhármasokat, amelyek mellett $l = 0$ esetén (1.2)-nek végtelen sok racionális, illetve egész megoldása lehet.

Disszertációnk második fejezetének egyik fő eredménye az 2.2. Tétel, mely az említett [5]-beli eredmények általánosítása tetszőleges l esetére. Következményként (2.1. Tétel) jellemezzük mindazon a, b, k, m és n egészeket, melyekre a sokat vizsgált

$$a\binom{x}{m} + k = b\binom{y}{n} \tag{1.3}$$

egyenletnek végtelen sok $x \geq m$, $y \geq n$ egész megoldása lehet.

A fejezet második felében az (1.3) egyenletre vonatkozó eredményünket kiterjesztjük az általánosabb

$$F\left(\binom{x}{m}\right) = b\binom{y}{n} \tag{1.4}$$

egyenletekre, ahol F nem szükségképpen lineáris (mint (1.3)-ban), hanem prímfokszámú egész együtthatós polinom (2.7. és 2.8. Tétel).

Az (1.3) és (1.4) alakú egyenletekre vonatkozó tételeink jelentős mértékű ineffektív általánosításai számos korábbi, ilyen irányú eredménynek.

Az 2.2. Tétel bizonyítása során először jellemezzük azon

$$F(x, y) = x\,(x-1)\cdots(x-(m-1)) - \lambda y\,(y-1)\cdots(y-(n-1)) - l$$

alakú racionális együtthatós polinomokat, melyek abszolut irreducibilisek, és melyeknek a génusza pozitív, illetve nagyobb mint 1. Ezt követően Siegel és

Faltings említett tételeit alkalmazzuk. Külön is foglalkozunk azzal az esettel, amikor $F(x,y)$ reducibilis, és szükséges és elégséges feltételt fogalmazunk meg arra vonatkozóan, hogy ekkor (1.2)-nek véges sok megoldása legyen.

III

Igen gazdag irodalma van az

$$S_m(x) = g(y),\ x \geq 1, y \text{ egész ismeretlenek,} \tag{1.5}$$

alakú egyenleteknek, ahol $m \geq 1$ adott egész, $S_m(x) = 1^m + 2^m + \cdots + x^m$ és $g(y)$ racionális együtthatós polinom. Mint ismeretes, $S_m(x)$ felírható az x $(m+1)$-ed fokú racionális együtthatós polinomjaként.

A $g(y) = y^n$ speciális esetben adott n mellett Schäffer [57] 1956-ban meghatározta mindazon m, n párokat, melyekre (1.5)-nek végtelen sok megoldása van. Később Schäffer eredményének Győry, Tijdeman, Voorhove, Brindza és mások több irányú kiterjesztését és általánosítását adták, egyebek között arra az esetre, amikor n is ismeretlen.

Egy másik irányban Bilu, Brindza, Kirschenhofer, Pintér és Tichy [7] $y(y-1)\cdots(y-(n-1))$ alakú $g(y)$ polinomok esetén ujabban meghatározta azon m, n párokat, melyekre (1.5)-nek végtelen sok megoldása van.

A 3. fejezet fő eredménye a 3.1. Tételünk, mely adott m mellett az összes olyan racionális együtthatós g polinom leírását adja, melyekre az (1.5) egyenletnek végtelen sok megoldása lehet. Tételünk lényegében közös általánosítása Schäffer [57], valamint Bilu és társai [7] fent említett nevezetes tételeinek. A 3.1. Tétel alkalmazásával még pontosabb állítást nyerünk (3.2. Tétel) abban az esetben, amikor $g(y)$ $F\left(\binom{y}{n}\right)$ alakú, ahol $n \geq 1$ adott egész szám, F pedig egy lineáris vagy páratlan prímfokszámú racionális együtthatós polinom.

A 3.1. és 3.2. Tételeink bizonyítása végső soron Bilu és Tichy [9] már említett általános tételén alapszik. Ezen általános tétel alkalmazásához azonban kilenc, többségükben az $S_m(x)$ polinom különféle speciális tulajdonságaival foglalkozó lemmára, valamint hosszú, bonyolult okoskodásokra lesz szükségünk.

IV

Az (1.2), (1.3) és (1.4) egyenletekre vonatkozó végességi tételeink nem effektívek, mivel bizonyításainkban felhasználjuk Siegel, Faltings, valamint Bilu és Tichy ineffektív eredményeit.

A 4. fejezetben az a és b-re tett bizonyos feltételek mellett effektív felső korlátot nyerünk (4.1. Következmény) az (1.3) egyenlet megoldásaira abban az esetben , amikor $m \geq 5$ és $n \in \{2, 4\}$. Eredményünket kiterjesztjük (4.1. Tétel) az általánosabb

$$a\binom{x}{m} + f(x) + g(x) = b\binom{y}{n}$$

egyenletre is, ahol $g(x) \in \mathbb{Z}[x]$ és $f(x) \in \mathbb{Q}[x]$ egész értékű, legfeljebb $m-1$-ed fokú polinom. Ezen eredmény egy alkalmazásaként effektív felső korlátot adunk (4.2. Következmény) mindazon $x \geq m$, $y \geq n$ egészekre, amelyekre az

$$f(x) + g(x), \binom{x}{m}, \binom{y}{n}$$

számok valamilyen sorrendben számtani sorozatot alkotnak. A bizonyítás során a vizsgált egyenleteket hiperelliptikus egyenletekre vezetjük vissza, majd pedig Baker [3] hiperelliptikus egyenletekre vonatkozó nevezetes effektív tételét alkalmazzuk.

Végül a

$$2\binom{x}{m} = \binom{y}{n} + k \tag{1.6}$$

egyenlet összes megoldását meghatározzuk (4.2. Tétel) abban az esetben, amikor (m, n) vagy $(n, m) \in \{(2,3), (2,6), (3,4), (4,6)\}$ és $0 \leq k \leq 10$. Az (1.6) alakú egyenleteket elliptikus egyenletekre redukáljuk, s azután a Gebel, Pethő és Zimmer [25] módszerén alapuló SIMATH programcsomagot használjuk a megoldások megkeresésére.

A 4.1. és 4.2. Tételeink egy sor korábbi eredmény jelentős mértékű általánosításai, kiterjesztései, illetve pontosításai.

Értekezésünk eredményeit a [44], [45], [46] és [47] dolgozatainkban publikáltuk.

2 AZ $F\left(\binom{x}{m}\right) = b\binom{y}{n}$ ALAKÚ DIOFANTIKUS EGYENLETEKRŐL

2.1 BEVEZETÉS

Ebben a fejezetben az

$$F\left(\binom{x}{m}\right) = b\binom{y}{n},\ x \geq m, y \geq n \tag{2.1}$$

alakú diofantikus egyenletek x, y egész megoldásainak számára vonatkozóan nyerünk végességi eredményeket, ahol $F(x)$ egész együtthatós polinom, $b \neq 0$ és m, $n \geq 1$ pedig tetszőleges, de rögzített egészek.

A fejezet első részében a lineáris esettel foglalkozunk, amikor az $F(x)$ polinom lineáris. Ebben az esetben az általunk vizsgált egyenlet

$$a\binom{x}{m} + k = b\binom{y}{n} \quad x \geq m, y \geq n, \tag{2.2}$$

alakba írható át, ahol a, b, k, m, n adott egészek az $a \neq 0$, $b \neq 0$ és $1 < m \leq n$ tulajdonsággal. A triviális $m = n$, $a = b$ és $k = 0$ esetben a (2.2) egyenletnek nyilván végtelen sok egész $x \geq m, y \geq n$ megoldása van. A $k = 0$ esetben az a, b, m, n paraméterek különféle speciális megválasztása mellett számos végességi és numerikus eredmény található a szakirodalomban; például az [1], [10], [19], [29], [35], [36], [41], [66], [67], [75], [76] cikkekben a szerzők az összes egész megoldást leírták. A $k = 0$ esetben az első általános végességi eredmény Kisstől [32] származik, aki 1988-ban megmutatta, hogy ha m egy adott páratlan prím, akkor az

$$\binom{x}{m} = \binom{y}{2} \tag{2.3}$$

diofantikus egyenletnek csak véges sok $x \geq m$, $y \geq 2$ egész megoldása van, amely megoldások effektíve meghatározhatóak. Brindza [14] három évvel később általánosította Kiss eredményét arra az esetre, amikor $m \geq 3$ tetszőleges, adott egész szám.

A (2.2) egyenletre vonatkozó 2.1. Tételünk az említett végességi tételek messzemenő, ineffektív általánosítása. Megjegyezzük, hogy a 4. fejezetben a (2.2) egyenlet vizsgálatára visszatérünk és speciális a, b és k értékek mellett effektív végességi eredményeket nyerünk, sőt bizonyos esetekben az összes megoldást is meghatározzuk.

A (2.2) egyenlet speciális esete az

$$x\,(x-1)\cdots(x-(m-1)) = \lambda y\,(y-1)\cdots(y-(n-1)) + l \tag{2.4}$$

egyenletnek, ahol $\lambda, l \in \mathbb{Q}$ és $\lambda \neq 0$. A homogén esetben, azaz amikor $l = 0$, Beukers, Shorey és Tijdeman [5] egy algebrai-geometriai módszert alkalmazva leírták az összes $(m, n) \in \mathbb{N}^2$ párt és $\lambda \neq 0$ racionális paramétert, amelyek mellett a (2.4) egyenletnek csak véges sok x, y egész, illetve racionális megoldása van. A bizonyításuk során meghatározták az összes $F(x, y) = x\,(x-1)\cdots(x-(m-1)) - \lambda y\,(y-1)\cdots(y-(n-1))$ alakú polinomot, amelyek irreducibilisek a komplex számok teste felett, illetve, amely polinomokkal az $F(x, y) = 0$ görbék génusza 0 vagy 1. Végül ezen eredményeket Siegel [61] és Faltings [22] nevezetes végességi tételeivel kombinálva nyerték a szerzők [5]-ben az említett általános ineffektív végességi eredményt.

A 2.2. Tételünkben Beukers, Shorey és Tijdeman eredményét általánosítjuk tetszőleges l esetére. Végességi állítást bizonyítunk a (2.4) egyenlet egész, illetve racionális megoldásainak számára. Ez az eredmény a fejezet első részének a fő eredménye. A 2.1. Tételünk ennek speciális esete.

A fejezet második felében a (2.1) egyenlet azon eseteivel foglalkozunk, amikor az $F(x) \in \mathbb{Z}[x]$ polinom fokszáma prímszám. Davenport, Lewis és Schinzel [20], Schinzel [58] és Fried [23], [24] néhány korábbi eredményét kiterjesztve, Bilu és Tichy [9] 2000-ben egy általános ineffektív végességi tételt nyertek az $f(x) = g(y)$ alakú diofantikus egyenletekre vonatkozóan. Bár az eredmény általános, a feltételrendszer bonyolultsága miatt igen nehéz konkrét esetekben alkalmazni. A tétel bizonyos alkalmazásai találhatók például a [7], [8] és [16] cikkekben. Bilu és Tichy említett eredményét használva Kulkarni és Sury [33] végességi eredményt bizonyított az $x\,(x+1)\cdots(x+(n-1)) = g(y)$ típusú egyenletekre, ahol $g(y) \in \mathbb{Q}[y]$ egy legalább másodfokú polinom.

A 2.7. és 2.8. Tételünkben jellemezzük mindazon prímfokszámú $F(x)$ polinomokat és m, n egészeket, melyekre a (2.1) egyenletnek csak véges sok megoldása van. A bizonyításunkban egyebek között a [33]-beli eredményeket kombináljuk Ping-Zhi [39] és Brindza [12] végességi eredményeivel és Siegel fent említett, nevezetes tételével. Mivel a felhasznált eredmények többsége ineffektív, ezért a jelen fejezetben megfogalmazott és bizonyított eredményeink nem effektívek.

Végül megjegyezzük, hogy a fejezetben tárgyalt eredményeinket lineáris $F(x)$ esetén a [45] dolgozatunkban, prímfokszámú $F(x)$ esetén pedig a [46] cikkben publikáltuk.

2.2 LINEÁRIS ESET

2.2.1 EREDMÉNYEK

Az első tételünkben teljesen leírjuk azon (m, n) párokat és a, b, k egész paramétereket, amelyekre az alábbi (2.5) egyenletnek lehet végtelen sok x, y egész megoldása. Ezzel Kiss [32] és Brindza [14] említett végességi eredményeit ineffektív formában messzemenően általánosítjuk.

2.1. Tétel *Legyenek a, b, k, m, n egész számok és tegyük fel, hogy $a \neq 0, b \neq 0$ és $1 < m \leq n$. Ekkor eltekintve az alábbi esetektől*

1) $m = n, a = b, k = 0$*;*

2) $(m, n) = (2, 2)$*;*

3) $(m, n) = (2, 4)$ *és* $\frac{-24k+3a}{b} = 1$ *vagy* $-\frac{9}{16}$*;*

4) $(m, n) = (4, 4)$ *és* $\frac{-24k+a}{b} = 1$*;*

az

$$a\binom{x}{m} + k = b\binom{y}{n}, \quad x \geq m, y \geq n, \tag{2.5}$$

egyenletnek csak véges sok x, y egész megoldása van. Továbbá a fent felsorolt kivételes esetek mindegyikében meg tudjuk választani az a, b és k paramétereket úgy, hogy a (2.5) egyenletnek végtelen sok x, y egész megoldása legyen.

Megjegyezzük, hogy a fenti tételünket tartalmazó [45] dolgozatunk megjelenése után egy évvel, tőlünk függetlenül Stoll és Tichy [64] a 2.1. Tételünk egy kevésbé pontos változatát publikálták.

A 2.1. Tétel speciális esete az alábbi végességi eredményünknek:

2.2. Tétel *Legyen*

$$f(x) = x\,(x-1)\cdots(x-(m-1)) \quad \textit{és } g(y) = \lambda y\,(y-1)\cdots(y-(n-1)) + l$$

ahol $m, n \in \mathbb{N}$, $m \le n$ *és* $\lambda, l \in \mathbb{Q}$. *Tegyük fel, hogy* $\lambda \neq 0$. *Ekkor az*

$$f(x) = g(y) \tag{2.6}$$

egyenletnek csak véges sok x, y *egész megoldása van, kivéve az alábbi eseteket:*

1) $m = n$ *és* $\lambda = 1, l = 0$ *vagy* $m = n$ *páratlan,* $\lambda = -1, l = 0$;

2) $(m, n) = (2, 2)$;

3) $(m, n) = (2, 4)$, $4\lambda - 4l = 1$ *vagy* $9\lambda + 16l = -4$;

4) $(m, n) = (4, 4)$, $\lambda - l = 1$.

Továbbá a (2.6) *egyenletnek csak véges sok* x, y *racionális megoldása van, eltekintve az* 1)-4)*, illetve az alábbi esetektől:*

5) $(m, n) = (2, 3)$;

6) $(m, n) = (2, 4)$, $9\lambda + 16l \neq -4$;

7) $(m, n) = (2, 6)$, $-\frac{225}{64}\lambda + l = -\frac{1}{4}$;

8) $(m, n) = (3, 3)$;

9) $m = n = 4$, $-\lambda + l = \frac{9}{16}$ *és* $l \neq -\frac{7}{16}$, *vagy* $\frac{9}{16}\lambda + l = -1$ *és* $l \neq -\frac{7}{16}$.

A fent felsorolt esetek valóban kivételesek abban az értelemben, hogy minden esetben meg tudjuk választani a λ, l *paramétereket oly módon, hogy a* (2.6) *egyenletnek végtelen sok* x, y *megoldása legyen.*

Tételünk ineffektív. Megjegyezzük, hogy ha speciálisan $\lambda = 1$, $l \in \mathbb{Z}$, $lnko(m, n) > 1$ és az $f(x) - g(y)$ polinom $\mathbb{Q}$ felett irreducibilis, úgy Runge [49] ismert tétele felhasználásával a (2.6) egyenlet x, y egész megoldásaira egy effektív felső korlát adható. Ebben az esetben a legjobb korlát Tengelytől [67],

[68] származik, aki egy hatékony algoritmust dolgozott ki ilyen típusú konkrét egyenletek megoldására.

$l = 0$ esetén a 2.2. Tételünk visszaadja Beukers, Shorey és Tijdeman-nak [5] a bevezetőben már említett eredményét.

A következő tételünkben egy még általánosabb alakú egyenletet vizsgálunk. Bár az egyenlet általánosabb, a 2.3. Tételt vissza lehet vezetni a 2.2. Tételre.

2.3. Tétel *Legyenek d_1 és d_2 pozitív racionális számok, és $\tilde{\lambda} \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$, $\tilde{l} \in \mathbb{Q}$. Ekkor az*

$$x\,(x + d_1) \cdots (x + (m-1)\,d_1) = \tilde{\lambda} y\,(y + d_2) \cdots (y + (n-1)\,d_2) + \tilde{l} \tag{2.7}$$

egyenletnek, ahol $m, n \in \mathbb{N}$ és $m \leq n$, csak véges sok egész, illetve racionális x, y megoldása van, eltekintve a 2.2 Tételben felsorolt kivételes esetektől a

$$\lambda = (-1)^{m+n} \tilde{\lambda} \frac{d_2^n}{d_1^m} \qquad \text{és} \qquad l = (-1)^m \frac{\tilde{l}}{d_1^m}$$

választással.

Ez az állítás az $\tilde{l} = 0$ speciális esetben magába foglalja Beukers, Shorey és Tijdeman [5]-beli végességi eredményét az

$$x\,(x + d_1) \cdots (x + (m-1)\,d_1) = y\,(y + d_2) \cdots (y + (n-1)\,d_2) \tag{2.8}$$

egyenletre vonatkozóan.

2.2.2 IRREDUCIBILITÁS

Az alábbi, önmagukban is érdekes eredmények lényeges szerepet fognak játszani a 2.1-2.3 Tételek bizonyításában. Először leírjuk az összes olyan λ, l, m, n paraméter értékeket, amelyek mellett az $x\,(x-1) \cdots (x-(m-1)) - \lambda y\,(y-1) \cdots (y-(n-1)) - l$ polinom reducibilis $\mathbb{C}[x, y]$-ban.

Beukers, Shorey és Tijdeman [5] 1999-ben meghatározták az összes

$$x\,(x+1) \cdots (x+m-1) - \lambda y\,(y+1) \cdots (y+n-1)$$

alakú, $\mathbb{C}[x, y]$-ban reducibilis polinomot, ahol m, n pozitív egész számok, $m \leq n$ és $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Következő tételünk ezen eredmény általánosítása az inhomogén esetre. $l = 0$ esetén a 2.4. Tétel visszadja Beukers-ék eredményét.

2.4. Tétel *Legyenek m, n pozitív egész számok az $m \le n$ tulájdonsággal, és legyen $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $l \in \mathbb{C}$. Ha az $F(x,y) = x(x-1)\cdots(x-(m-1)) - \lambda y(y-1)\cdots(y-(n-1)) - l$ polinom reducibilis a komplex számok teste felett, akkor az alábbi feltételek valamelyike fennáll:*

1) $m = n$, $\lambda = 1$, $l = 0$ *és* $x - y$ *egy faktora* $F(x,y)$*-nak;*

2) $m = n$ *páratlan egészek,* $\lambda = -1$, $l = 0$ *és* $x + y - m + 1$ *egy faktora* $F(x,y)$*-nak;*

3) $(m,n) = (2,2)$, $\lambda - 4l = 1$ *és*
$F(x,y) = \frac{1}{4}(2x - 2Ay + A - 1)(2x + 2Ay - A - 1)$, *ahol* $A = \sqrt{4l+1}$*;*

4) $(m,n) = (2,4)$, $4\lambda - 4l = 1$ *és*
$F(x,y) = \frac{1}{4}\left(2x + 2Ay^2 - 6Ay + 2A - 1\right)\left(2x - 2Ay^2 + 6Ay - 2A - 1\right)$, *ahol* $A = \sqrt{l + \frac{1}{4}}$*;*

5) $(m,n) = (4,4)$, $\lambda - l = 1$ *és*

$$F(x,y) = \left(x^2 - 3x + Ay^2 - 3Ay + A + 1\right) \times \\ \times \left(x^2 - 3x - Ay^2 + 3Ay - A + 1\right),$$

ahol $A = \sqrt{l+1}$*;*

6) $(m,n) = (4,4)$, $\lambda = -1$, $l = -\frac{7}{16}$ *és*
$F(x,y) = \left(x^2 - \sqrt{2}xy - \left(3 - \frac{3}{2}\sqrt{2}\right)x + y^2 - \left(3 - \frac{3}{2}\sqrt{2}\right)y + \frac{13}{4} - \frac{9}{4}\sqrt{2}\right) \times$
$\times \left(x^2 + \sqrt{2}xy - \left(3 + \frac{3}{2}\sqrt{2}\right)x + y^2 - \left(3 + \frac{3}{2}\sqrt{2}\right)y + \frac{13}{4} + \frac{9}{4}\sqrt{2}\right)$*;*

7) $(m,n) = (6,6)$, $\lambda = -1$, $l = -\frac{320}{27}$ *és*

$$F(x,y) = \left(y^2 - 5y + x^2 - 5x + \frac{20}{3}\right)\left(y^4 - 10y^3 - x^2y^2 + 5xy^2 + \right. \\ \left. + \frac{85}{3}y^2 + 5x^2y - 25xy - \frac{50}{3}y + x^4 - 10x^3 + \frac{85}{3}x^2 - \frac{50}{3}x + \frac{16}{9}\right).$$

A most következő öt állításban a 2.4. Tétel 3)-7) eseteivel foglalkozunk részletesebben, azaz, amikor λ, $l \in \mathbb{C}$, $\lambda \neq 0$ és az $F(x,y)$ polinom reducibilis $\mathbb{C}[x,y]$-ban. Az állításokban szükséges és elégséges feltételeket adunk meg arra vonatkozóan, hogy az $F(x,y) = 0$ egyenletnek végtelen sok x, y egész, illetve racionális megoldása legyen. Az 1)-es és a 2)-es esetekben $F(x,y) = 0$-nak nyilván van végtelen sok egész, és ezáltal racionális megoldása is.

2.1. Állítás *Legyen* $A = \sqrt{4l+1}$*, ahol* $l \in \mathbb{C}$ *tetszőleges. Ekkor az*

$$\frac{1}{4}(2x - 2Ay + A - 1)(2x + 2Ay - A - 1) = 0 \tag{2.9}$$

egyenletnek akkor és csak akkor van végtelen sok x, y *racionális megoldása, ha* $A \in \mathbb{Q}$*. Továbbá akkor és csak akkor van végtelen sok* x, y *egész megoldás, ha* $A = \sqrt{4l+1} = \frac{c}{d}$*, ahol* c *és* d *relatív prím páratlan egészek.*

2.2. Állítás *Legyen* $A = \sqrt{l + \frac{1}{4}}$, $l \in \mathbb{C}$*. Ekkor az*

$$\frac{1}{4}\left(2x + 2Ay^2 - 6Ay + 2A - 1\right)\left(2x - 2Ay^2 + 6Ay - 2A - 1\right) = 0 \tag{2.10}$$

egyenletnek akkor és csak akkor van végtelen sok x, y *racionális megoldása, ha* $A \in \mathbb{Q}$*. Továbbá akkor és csak akkor van végtelen sok* x, y *egész megoldás, ha* $A = c/d$*, ahol* c *és* d *relatív prímek,* d *páros és a* $2u^2 - 6u + 2 \equiv 0$ *mod* d *kongruencia megoldható.*

Két, a és b p-adikus szám Hilbert szimbólumán az alábbi számot értjük:

$$(a,b) = \begin{cases} +1 & \text{ha } z^2 = ax^2 + by^2\text{-nek van nemnulla megoldása,} \\ -1 & \text{egyébként.} \end{cases}$$

2.3. Állítás *Legyen* $A = \sqrt{l+1}$, $l \in \mathbb{C}$*. Ekkor az*

$$\left(x^2 - 3x + Ay^2 - 3Ay + A + 1\right)\left(x^2 - 3x - Ay^2 + 3Ay - A + 1\right) = 0 \tag{2.11}$$

egyenletnek akkor és csak akkor van végtelen sok x, y *racionális megoldása, ha* $A = \frac{c}{d} \in \mathbb{Q}$*, ahol* c *és* d *relatív prím egészek, és a* $\left(\frac{c}{5c+5d}, \frac{d}{5c+5d}\right)$, $\left(\frac{-c}{5c+5d}, \frac{d}{5c+5d}\right)$ *Hilbert szimbólumok valamelyike egyenlő eggyel. Végtelen sok egész megoldás pedig akkor és csak akkor van, ha* c, d *páratlan egészek és a*

$$d\,(2x-3)^2 - c\,(2y-3)^2 = 5\,(d-c) \tag{2.12}$$

egyenletnek van végtelen sok egész megoldása.

Megjegyezzük, hogy léteznek olyan c, d páratlan egész számok, amelyekre a (2.12) egyenletnek van végtelen sok egész megoldása. Legyen például $c = 1$ és $d = 5$. Ekkor $x = (b_w + 3)/2, y = (a_w + 3)/2$ megoldásai (2.12)-nek, amennyiben $(a_0, b_0) = (5, 3)$ és $(a_{w+1}, b_{w+1}) = (9a_w + 20b_w, 4a_w + 9b_w)$, ahol $w = 0, 1, 2, \ldots$

Az utolsó két állításunk arra vonatkozik, hogy amennyiben az $F(x, y)$ polinomunk olyan alakú, mint amit a 2.4. Tétel 6)-os, illetve 7)-es eseteiben láthatunk, akkor az $F(x, y) = 0$ egyenletnek nincs racionális megoldása.

2.4. Állítás *Az*

$$\left(x^2-\sqrt{2}xy-\left(3-\frac{3}{2}\sqrt{2}\right)x+y^2-\left(3-\frac{3}{2}\sqrt{2}\right)y+\frac{13}{4}-\frac{9}{4}\sqrt{2}\right)\times \times\left(x^2+\sqrt{2}xy-\left(3+\frac{3}{2}\sqrt{2}\right)x+y^2-\left(3+\frac{3}{2}\sqrt{2}\right)y+\frac{13}{4}+\frac{9}{4}\sqrt{2}\right)=0 \tag{2.13}$$

egyenletnek nincs racionális megoldása.

2.5. Állítás *Az*

$$\left(y^2-5y+\frac{20}{3}-5x+x^2\right)\left(y^4-10y^3-x^2y^2+5xy^2+\frac{85}{3}y^2+ +5x^2y-25xy-\frac{50}{3}y+x^4-10x^3+\frac{85}{3}x^2-\frac{50}{3}x+\frac{16}{9}\right)=0 \tag{2.14}$$

egyenletnek nincs racionális megoldása.

2.2.3 GÉNUSZ

Tekintsük a

$$C: x\,(x-1)\cdots(x-(m-1))=\lambda y\,(y-1)\cdots(y-(n-1))+l$$

alakú görbéket, ahol $n\geq m>1$, $\lambda\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$ és $l\in\mathbb{C}$. A következő két tételben felsoroljuk mindazon m, n, λ, l értékeket, melyekre a megfelelő C görbe génusza 0, illetve 1.

2.5. Tétel *Tegyük fel, hogy a C görbe irreducibilis a komplex számok teste felett. Ha C génusza 0, akkor az alábbi esetek valamelyike fennáll:*

1) $(m,n)=(2,2)$, $\lambda-4l\neq 1$;

2) $(m,n)=(2,3)$, $t\lambda+l=-\frac{1}{4}, t^2=\frac{4}{27}$;

3) $(m,n)=(2,4)$, $\frac{9}{16}\lambda+l=-\frac{1}{4}$;

4) $(m,n)=(2,6)$, $t\lambda+l=-\frac{1}{4}, 27t^2+320t-2304=0$;

5) $(m,n)=(3,3)$, $l\neq 0$ *és* $t\,(\lambda\pm 1)=-l$, $t^2=\frac{4}{27}$;

6) $(m,n) = (3,4)$, $\lambda = \frac{64}{225}t$, $l = \frac{14}{225}t$, $t^2 = 3$*;*

7) $(m,n) = (3,6)$, $\lambda = \frac{3}{392}t$ *és* $l = \frac{20}{441}t$, $t^2 = 21$*.*

2.6. Tétel *Tegyük fel, hogy a* C *görbe irreducibilis a komplex számok teste felett. Ha* C *génusza 1, akkor az alábbi esetek valamelyike teljesül:*

1) $(m,n) = (2,3)$, $\frac{2}{9}t\lambda + l \neq -\frac{1}{4}$, $t^2 = 3$*;*

2) $(m,n) = (2,4)$, $\frac{9}{16}\lambda + l \neq -\frac{1}{4}$*;*

3) $(m,n) = (2,5)$, $t\lambda + l = -\frac{1}{4}, 3125t^4 - 47500t^2 + 82944 = 0$*;*

4) $(m,n) = (2,6)$, $-\frac{225}{64}\lambda + l = -\frac{1}{4}$*;*

5) $(m,n) = (2,8)$, $t\lambda + l = -\frac{1}{4}, t^3 + 576t^2 - 54432t - 4665600 = 0$*;*

6) $(m,n) = (3,3)$, $l = 0$ *vagy* $l \neq 0$ *és* $t(\lambda \pm 1) \neq -l$, $t^2 = \frac{4}{27}$*;*

7) $(m,n) = (3,4)$, $-\lambda + l = t$ *és* $(\lambda, l) \neq \left(-\frac{32}{25}t, -\frac{7}{25}t\right)$, $t^2 = \frac{4}{27}$*;*

8) $(m,n) = (3,6)$, $\lambda = -\frac{256s}{2025+576t}$, $l = \frac{2s}{9} - \frac{100s}{225+64t}$, *ahol* $s^2 = 3$ *és* $27t^2 + 320t - 2304 = 0$*;*

9) $m = n = 4$, $-\lambda + l = \frac{9}{16}$ *és* $l \neq -\frac{7}{16}$, *vagy* $\frac{9}{16}\lambda + l = -1$ *és* $l \neq -\frac{7}{16}$*.*

Az $l = 0$ esetben a 2.5. és a 2.6. Tételek speciális esetként visszaadják Beukers, Shorey és Tijdeman

$$x(x+1)\cdots(x+m-1) = \lambda y(y+1)\cdots(y+n-1)$$

alakú görbék génuszára adott [5]-beli eredményét. Megjegyezzük továbbá, hogy 2001-ben Avanzi és Zannier [2] meghatározták az összes 1 génuszú, $f(x) = g(y)$ alakú görbét, ahol az f és a g polinomok fokszáma relatív prím. A 2.6. Tételben szereplő 1)-es, 3)-as és 7)-es esetek ezen eredmény felhasználásával is levezethetőek.

2.2.4 FELHASZNÁLT EREDMÉNYEK

Vezessünk be néhány jelölést. Legyen

$f(x) = x(x-1)\cdots(x-(m-1))$, $g(y) = \lambda y(y-1)\cdots(y-(n-1)) + l$, ahol $1 < m \leq n \in \mathbb{N}$ és $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $l \in \mathbb{C}$. Az $f(x) - g(y)$ polinom irreducibilitásának a vizsgálatához fel fogjuk használni az alábbi lemmákat, amelyek közül a 2.1.-2.5. Lemmák Beukers, Shorey és Tijdeman [5] eredményei.

Egy polinom stacionáris pontján a polinom deriváltjának egy gyökét értjük. Legyen $\tilde{f}$, $\tilde{g} \in \mathbb{C}[x]$ és jelölje $S_{\tilde{f}}$ és $S_{\tilde{g}}$ az $\tilde{f}$ és a $\tilde{g}$ polinomok stacionáris pontjainak halmazát. Tegyük fel, hogy ezen stacionáris pontok egyszeresek. Legyen $m = \deg(\tilde{f})$ és $n = \deg(\tilde{g})$, továbbá legyen bármely $a \in \mathbb{C}$ komplex szám esetén

$$m_a = \#\{\alpha \in S_{\tilde{f}} \mid \tilde{f}(\alpha) = a\},$$
$$n_a = \#\left\{\beta \in S_{\tilde{g}} \mid \tilde{g}(\beta) = a\right\}.$$

Tegyük fel, hogy az $\tilde{f}(x) - \tilde{g}(y)$ polinom reducibilis a komplex számok teste felett, azaz

$$\tilde{f}(x) - \tilde{g}(y) = G_1(x,y)G_2(x,y),$$

ahol $G_1, G_2 \in \mathbb{C}[x,y]$. Jelölje δ a súlyozott fokszámot, amit az alábbi módon definiálunk: $\delta\left(x^a y^b\right) = na + mb$.

2.1. Lemma *Jelölje m_1, m_2 a G_1, G_2 polinomok súlyozott fokszámát. Ekkor*

$$m_1 m_2 \leq mn \sum_{a \in \mathbb{C}} m_a n_a.$$

Továbbá, $m_1 + m_2 = mn$ és m_1 és m_2 többszörösei mn/d-nek, ahol $d = lnko(m,n)$.

2.2. Lemma *Tegyük fel, hogy $n_a \leq 1$ bármely $a \in \mathbb{C}$ esetén. Ekkor $n = lnko(m,n)$ és az $\tilde{f}(x) - \tilde{g}(y)$ polinomnak van y-ban elsőfokú faktora.*

2.3. Lemma *Legyen $\tilde{f}(x) = x(x-1)\cdots(x-(m-1))$. Ekkor bármely $a \in \mathbb{C}$ komplex szám esetén $m_a \leq 2$. Továbbá, ha m páratlan, akkor $m_a \leq 1$ minden $a \in \mathbb{C}$-re.*

2.4. Lemma *Jelöljön d egy páros pozitív egész számot. Legyen $\overline{f}(x) = \left(x-1^2\right)\left(x-3^2\right)\cdots\left(x-(d-1)^2\right)$, $\overline{m_a} = \#\left\{\alpha \in S_{\overline{f}} \mid \overline{f}(\alpha) = a\right\}$. Ekkor $\overline{m_a} \leq 1$ minden $a \in \mathbb{C}$ komplex számra.*

A következő lemma a génusszal kapcsolatos 2.5 és 2.6 Tételek bizonyításánál fog lényeges szerepet játszani.

2.5. Lemma *Legyenek $f,\ g \in \mathbb{C}[X]$ m-ed, illetve n-ed fokú komplex együtthatós polinomok. Tegyük fel, hogy $f(X) - g(Y)$ irreducibilis, továbbá, hogy az f és g polinomok stacionáris pontjai egyszeresek. Legyen $r_\alpha = \#\{y \in S_g \mid f(\alpha) = g(y)\}$ minden $\alpha \in S_f$ esetén. Jelölje g_C a $C : f(X) = g(Y)$ görbe génuszát. Ekkor*

$$2g_C = \sum_{\alpha \in S_f} (n - 2r_\alpha) - m + 2 - lnko\,(m, n)\,.$$

A következő két nevezetes és mély ineffektív eredmény Siegel és Faltings már említett tételei.

2.6. Lemma *[Siegel [61]] Egy pozitív génuszú, irreducibilis algebrai görbén csak véges sok egész pont van.*

2.7. Lemma *[Faltings [22]] Egy 1-nél nagyobb génuszú, irreducibilis algebrai görbén található racionális pontok száma véges.*

2.2.5 A TÉTELEK BIZONYÍTÁSA

A 2.4 Tétel bizonyítása. Legyen $F(x,y) = f(x) - g(y)$, ahol $f(x) = x\,(x-1)\cdots(x-(m-1))$ és $g(y) = \lambda y\,(y-1)\cdots(y-(n-1)) + l$. Tegyük fel, hogy $F(x,y)$ reducibilis $\mathbb{C}[x,y]$-ban. Vizsgáljuk először azt az esetet, amikor n páratlan. Ebben az esetben a 2.2. Lemmából és a 2.3. Lemmából kapjuk, hogy $n = d$ és $f(x) - g(y)$-nak van y-ban elsőfokú faktora. Mivel $m \le n$, és $d = lnko(m,n) = n$ azt kapjuk, hogy $m = n$. Továbbá, a szimmetria miatt a fent említett faktor lineáris lesz x-ben is. Ezért $f\,(x) - g\,(y)$-t fel lehet írni

$$f\,(x) - g\,(y) = (ax + y + c)\,T\,(x,y) \tag{2.15}$$

alakban, ahol $a, c \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$, $T \in \mathbb{C}[x,y]$. Legyen $Q(x) = -ax - c$. Ekkor a (2.15)-ből következik, hogy

$$f\,(x) = g\,(Q\,(x))\,.$$

Mivel $f(x) = x\,(x-1)\cdots(x-(m-1))$, ezért $Q(0), Q(1), \ldots, Q(m-1)$ gyökei lesznek a g polinomnak, így $g\left(Q\left(\frac{m-1}{2}\right)\right)$ nulla. Másrészt, mivel

$$g(y) = \lambda y\,(y-1)\cdots(y-(n-1)) + l$$

és a korábbiak alapján

$$g\left(y\right)=\lambda\left(y+c\right)\left(y+a+c\right)\cdots\left(y+\left(m-1\right)a+c\right),$$

kapjuk, hogy

$$\lambda\left(c+a+c+2a+c+\cdots+\left(m-1\right)a+c\right)=-\lambda\left(1+2+\cdots\left(m-1\right)\right).$$

Ebből következik, hogy $c=\left(1-m\right)\left(1+a\right)/2$, továbbá

$$Q\left(x\right)=-ax+\frac{m-1}{2}a+\frac{m-1}{2},$$

és ezáltal

$$Q\left(\frac{m-1}{2}\right)=\frac{m-1}{2}.$$

A korábbiak szerint

$$g\left(Q\left(\frac{m-1}{2}\right)\right)=0.$$

Az utolsó két egyenlőségből azt kapjuk, hogy

$$\lambda\frac{m-1}{2}\left(\frac{m-1}{2}-1\right)\cdots\left(\frac{m-1}{2}-\left(m-1\right)\right)+l=0,$$

amiből következik, hogy $l=0$. Az $l=0$ esetet Beukers, Shorey és Tijdeman [5] teljesen leírták, így ezzel itt nem foglalkozunk a továbbiakban.

Tegyük fel ezek után, hogy n páros és $l\neq 0$. Mivel $g(y)=g(n-1-y)$, ezért

$$g\left(\frac{n-1-y}{2}\right)=\lambda 2^{-n}\left(y^2-1^2\right)\left(y^2-3^2\right)\cdots\left(y^2-\left(n-1\right)^2\right)+l.$$

Legyen

$$h\left(v\right)=\lambda 2^{-n}\left(v-1^2\right)\left(v-3^2\right)\cdots\left(v-\left(n-1\right)^2\right)+l.$$

Ekkor a 2.4. Lemmából következik, hogy

$$\#\left\{\alpha\in S_h\ \mid\ h\left(\alpha\right)=a\right\}\leq 1$$

minden $a\in\mathbb{C}$ esetén.

Tegyük fel, hogy $f(x)-g(y)$-nak van egy olyan $K(x,y)$ irreducibilis faktora, amelyik $\frac{n}{2}$-nél kisebb fokszámú az y változóban. Ebben az esetben $K(x,y)$

vagy $K(x, n-1-y)K(x, y)$ egy olyan nem triviális faktora lesz $f(x) - g(y)$-nak, amelyik szimmetrikus az $y \to n-1-y$ transzformációra vonatkozóan. Ebből következik, hogy az $f(x) - h(v)$ polinomnak van v-ben lineáris faktora és $\frac{n}{2} = lnko\left(m, \frac{n}{2}\right)$. Így $n = m$ vagy $n = 2m$.

Vizsgáljuk először azt az esetet, amikor $n = m$. Mivel tudjuk, hogy az $f(x) - h(v)$ polinomnak van egy olyan faktora, ami a v változóban lineáris és x-ben másodfokú, ezért írhatjuk, hogy

$$f(x) - h(v) = \left(ax^2 + bx + c + v\right) T(x, v),$$

ahol $a, b, c \in \mathbb{C}, a \neq 0, T \in \mathbb{C}[x, v]$. Legyen $Q(x) = -ax^2 - bx - c$. Ekkor $Q \in \mathbb{C}[x]$ másodfokú, és teljesül rá, hogy $f(x) = h(Q(x))$. Mint látjuk $\deg h = \frac{m}{2}$, Q másodfokú, amiből következik, hogy a $Q(0), Q(1), \ldots, Q(m-1)$ komplex számok között pontosan $\frac{m}{2}$ különböző szám van. Ezért létezik egy $j \in \{1, 2, \ldots m-1\}$ egész szám, amire $Q(0) = Q(j)$. Ebből egyszerű számítással kapjuk, hogy $j = -\frac{b}{a}$. Legyen $u \in \{1, 2, \ldots m-1\} \setminus \{j\}$. A korábbiak miatt létezik egy $v \in \{1, 2, \ldots m-1\} \setminus \{j, u\}$ egész, amire $Q(u) = Q(v)$. Ebből

$$u + v = -\frac{b}{a}, \quad -\frac{b}{a} = m - 1$$

következik. A fent leírtak alapján így

$$\begin{aligned} Q(0) &= Q(m-1) \\ Q(1) &= Q(m-2) \\ &\vdots \\ Q\left(\frac{m-2}{2}\right) &= Q\left(\frac{m}{2}\right). \end{aligned}$$

Ennek következtében a $h(v)$ polinomot az alábbi alakban is felírhatjuk:

$$h(v) = \lambda 2^{-m} \left(v - Q(0)\right)\left(v - Q(1)\right) \cdots \left(v - Q\left(\frac{m-2}{2}\right)\right).$$

Másrészt viszont $h(v)$ definíciója és $m = n$ miatt

$$h(v) = \lambda 2^{-m} \left(v - 1^2\right)\left(v - 3^2\right) \cdots \left(v - (m-1)^2\right) + l.$$

Tegyük fel, hogy $m \geq 8$. Összehasonlítva $v^{m/2-1}$, $v^{m/2-2}$ és $v^{m/2-3}$ együtthatóit a fenti két formulában a következő egyenletrendszerhez jutunk:

$$\sum_{i=0}^{k-1}(2i+1)^2=\sum_{i=0}^{k-1}Q(i),$$

$$\sum_{i=0}^{k-1}\sum_{j=0}^{i-1}(2i+1)^2(2j+1)^2=\sum_{i=0}^{k-1}\sum_{j=0}^{i-1}Q(i)Q(j),$$

$$\sum_{i=0}^{k-1}\sum_{j=0}^{i-1}\sum_{t=0}^{j-1}(2i+1)^2(2j+1)^2(2t+1)^2=\sum_{i=0}^{k-1}\sum_{j=0}^{i-1}\sum_{t=0}^{j-1}Q(i)Q(j)Q(t),$$

ahol $k=m/2$. Könnyen ellenőrizhető, hogy ennek az egyenletrendszernek nincs megoldása, amiből az következik, hogy az $f(x)-g(y)$ polinomnak nincs olyan irreducibilis faktora, ami $n/2$-nél kisebb fokszámú y-ban. A fennmaradó $(m,n)=(2,2),(4,4),(6,6)$ esetekben egyszerű számolás adja, hogy ilyen faktor csak az $(m,n)=(6,6)$ esetben van, amikor $f(x)-g(y)=\left(y^2-5y+x^2-5x+\frac{20}{3}\right)\left(y^4-10y^3-x^2y^2+5xy^2+\frac{85}{3}y^2+5x^2y-25xy-\right.$ $\left.-\frac{50}{3}y+x^4-10x^3+\frac{85}{3}x^2-\frac{50}{3}x+\frac{16}{9}\right)$.

Ezek után vizsgáljuk azt az esetet, amikor $n=2m$. Tudjuk, hogy ekkor $f(x)-h(v)$-nek van olyan faktora, ami mind x-ben, mind v-ben lineáris. Ezért $f(x)-h(v)$ felírható

$$f(x)-h(v)=(ax+b+v)T(x,v) \tag{2.16}$$

alakban, ahol $a\in\mathbb{C}\setminus\{0\}, b\in\mathbb{C}, T\in\mathbb{C}[c,v]$. Legyen $L(x)=-ax-b$. Ekkor $L\in\mathbb{C}[x]$ olyan lineáris polinom, amelyre

$$f(x)=h(L(x)).$$

Ebből pedig következik, hogy $L(0),L(1),\ldots,L(m-1)$ különböző gyökei a h polinomnak. Ezért

$$h(v)=\lambda 2^{-n}\left(v-L(0)\right)\left(v-L(1)\right)\cdots\left(v-L\left(m-1\right)\right).$$

Felhasználva $h(v)$ definícióját és azt, hogy most $n=2m$

$$h(v)=\lambda 2^{-2m}\left(v-1^2\right)\left(v-3^2\right)\cdots\left(v-(2m-1)^2\right)+l$$

adódik. Ha feltesszük, hogy $m\geq 4$ és összehasonlítjuk $h(v)$ előző két felírásában v^{m-1}, v^{m-2} és v^{m-3} együtthatóit, akkor az alábbi egyenletrendszerhez jutunk:

$$\sum_{i=0}^{m-1}(2i+1)^2=\sum_{i=0}^{m-1}L(i),$$

$$\sum_{i=0}^{m-1}\sum_{j=0}^{i-1}(2i+1)^2(2j+1)^2=\sum_{i=0}^{m-1}\sum_{j=0}^{i-1}L(i)L(j),$$

$$\sum_{i=0}^{m-1}\sum_{j=0}^{i-1}\sum_{t=0}^{j-1}(2i+1)^2(2j+1)^2(2t+1)^2=\sum_{i=0}^{m-1}\sum_{j=0}^{i-1}\sum_{t=0}^{j-1}L(i)L(j)L(t).$$

Mivel ez az egyenletrendszer nem megoldható, így azt kapjuk, hogy $m<4$. A kimaradó $(m,n)=(2,4),(3,6)$ esetekben könnyű ellenőrizni, hogy $f(x)-g(y)$-nak nincs olyan irreducibilis faktora, amelyiknek az y változóban a fokszáma kisebb, mint $n/2$.

Hátra van még annak az esetnek a vizsgálata, amikor az $f(x)-g(y)$ polinomnak csak olyan faktorai vannak, amelyek az y változóban $\frac{n}{2}$ fokszámúak. Felhasználva, hogy $n_a\leq 2$ bármely $a\in\mathbb{C}$ esetén, a 2.1. Lemmából következik, hogy:

$$\left(\frac{mn}{2}\right)^2\leq mn\sum_a m_an_a\leq 2mn\,(m-1)\,.$$

Ebből

$$n\leq 8\left(1-\frac{1}{m}\right)<8,$$

adódik, így $n=2,4$ vagy 6. Mivel $\frac{mn}{2}$ többszöröse $\frac{mn}{d}$-nek, ezért d páros és $m=2,4$ vagy 6. A kimaradó eseteket külön-külön vizsgáljuk.

Legyen először $(m,n)=(2,2)$. Ha $f(x)-g(y)$ reducibilis, akkor az

$$\left(\frac{mn}{2}\right)^2\leq mn\sum_a m_an_a$$

egyenlőtlenség miatt

$$4\leq 4\sum_a m_an_a$$

teljesül. Mivel

$$m_a=\begin{cases}1 & \text{ha} \quad a=-\frac{1}{4}\\ 0 & \text{egyébként,}\end{cases}$$

így, ha $n_{-\frac{1}{4}} = 0$ akkor $f(x) - g(y)$ irreducibilis. Azonban, $n_{-\frac{1}{4}} = 0$ akkor és csak akkor, ha $\lambda\left(-\frac{1}{4}\right) + l \neq -\frac{1}{4}$ azaz, ha $\lambda - 4l \neq 1$.

Ha viszont $\lambda - 4l = 1$, akkor $f(x) - g(y)$ reducibilis és

$$f(x) - g(y) = \frac{1}{4}\left(2x - 2Ay + A - 1\right)\left(2x + 2Ay - A - 1\right),$$

ahol $A = \sqrt{l+1}$.

Legyen ezután $(m, n) = (2, 4)$. A fentiekhez hasonlóan, ha $f(x) - g(y)$ reducibilis, akkor $16 \leq 8n_{-\frac{1}{4}}$. Tehát, ha $-\lambda + l \neq -\frac{1}{4}$, akkor az $f(x) - g(y)$ polinom irreducibilis.

Abban az esetben, ha $-\lambda + l = -\frac{1}{4}$, akkor

$$f(x) - g(y) = \frac{1}{4}\left(2x + 2Ay^2 - 6Ay + 2A - 1\right)\left(2x - 2Ay^2 + 6Ay - 2A - 1\right),$$

ahol $A = \sqrt{l + \frac{1}{4}}$.

Tegyük fel, hogy $(m, n) = (4, 4)$. Ekkor

$$64 \leq 16m_{-1}n_{-1} + 16m_{\frac{9}{16}}n_{\frac{9}{16}} = 32n_{-1} + 16n_{\frac{9}{16}},$$

mivel $m_{-1} = 2, m_{\frac{9}{16}} = 1$. Így $f(x) - g(y)$ csak akkor lehet reducibilis, ha $n_{-1} = 1$ és $n_{\frac{9}{16}} = 2$, vagy $n_{-1} = 2$.

Az első esetben $\lambda = -1$, $l = -\frac{7}{16}$, továbbá

$$f(x) - g(y) = \left(x^2 - 3x + Ay^2 - 3Ay + A + 1\right)\left(x^2 - 3x - Ay^2 + 3Ay - A + 1\right),$$

ahol $A = \sqrt{l+1}$.

A második esetben $-\lambda + l = 1$, és

$$\begin{aligned} f(x) - g(y) = &\left(\frac{13}{4} - \frac{9}{4}\sqrt{2} - \left(3 - \frac{3}{2}\sqrt{2}\right)y - \left(3 - \frac{3}{2}\sqrt{2}\right)x + x^2 + y^2 - \sqrt{2}xy\right) \\ &\times \left(\frac{13}{4} + \frac{9}{4}\sqrt{2} - \left(3 + \frac{3}{2}\sqrt{2}\right)y - \left(3 + \frac{3}{2}\sqrt{2}\right)x + x^2 + y^2 + \sqrt{2}xy\right). \end{aligned}$$

Az $(m, n) = (2, 6), (4, 6), (6, 6)$ esetekben a fenti módszert megismételve azt kapjuk, hogy az $f(x) - g(y)$ polinomnak nincs y-ban $n/2$ fokú faktora. Ezzel a tételünket beláttuk.

$\square$

A továbbiakban foglalkozzunk a 2.4 Tétel kivételes eseteivel. Valójában ezen esetekben a görbénk reducibilis és a megoldásokra vonatkozó állításokat a 2.1. Állítás - 2.5. Állítás tartalmazza. Nézzük meg most ezen állítások bizonyítását.

A 2.1. Állítás bizonyítása. Az egyenlet, amit először vizsgálunk:

$$(2x - 2Ay + A - 1)\,(2x + 2Ay - A - 1) = 0, \tag{2.17}$$

ahol $A = \sqrt{4l+1}, l \in \mathbb{Q}$. Nyilvánvaló, hogy ennek az egyenletnek akkor és csak akkor lehet végtelen sok x, y racionális megoldása, ha $\sqrt{4l+1}$ is racionális. Tegyük fel, hogy $A = \sqrt{4l+1} = \frac{c}{d}$, ahol c, d relatív prím egészek. A fenti egyenletnek csak akkor lehet végtelen sok x, y egész megoldása, ha végtelen sok x, y egészre teljesül, hogy

$$2x - 2Ay + A - 1 = 0 \qquad \text{vagy} \qquad 2x + 2Ay - A - 1 = 0,$$

azaz, ha

$$2x - 2\frac{c}{d}y + \frac{c-d}{d} = 0 \qquad \text{vagy} \qquad 2x + 2\frac{c}{d}y - \frac{c+d}{d} = 0.$$

Könnyű leellenőrizni, hogy ezen utolsó két egyenlet esetén pontosan akkor van végtelen sok egész megoldás, ha c és d is páratlan egész szám.

□

A 2.2. Állítás bizonyítása. Legyen

$$\left(2x + 2Ay^2 - 6Ay + 2A - 1\right)\left(2x - 2Ay^2 + 6Ay - 2A - 1\right) = 0,$$

ahol $A = \sqrt{l + \frac{1}{4}}, \quad l \in \mathbb{Q}$. Világos, hogy végtelen sok x, y racionális megoldás akkor és csak akkor van, ha A racionális. Vizsgáljuk most az egész megoldásokat. Tegyük fel tehát, hogy $A = \frac{c}{d}$, ahol $c, d \in \mathbb{Z}$ és $lnko(c, d) = 1$. Ha x, y egy egész megoldás, akkor

$$x + \frac{c}{d}y^2 - 3\frac{c}{d}y + \frac{c}{d} - \frac{1}{2} = 0 \tag{2.18}$$

vagy

$$x - \frac{c}{d}y^2 + 3\frac{c}{d}y - \frac{c}{d} - \frac{1}{2} = 0. \tag{2.19}$$

A (2.18) egyenletből kapjuk, hogy $2dx + 2cy^2 - 6cy + 2c - d = 0$. Ebből pedig az következik, hogy d páros és $2y^2 - 6y + 2 \equiv 0 \mod d$. Mivel $y^2 - 3y + 1$ mindig páratlan, ezért $2 \parallel d$. Könnyen ellenőrizhető, hogy a $2u^2 - 6u + 2 \equiv 0 \mod d$ kongruencia bármely y megoldása esetén, ahol most d-ről feltesszük, hogy páros,

$$x = \frac{d - 2c\left(y^2 - 3y + 1\right)}{2d}, y$$

egy egész megoldása lesz (2.18)-nak. A (2.19) egyenlet vizsgálata során teljesen hasonlóan kell eljárni.

□

A 2.3. Állítás bizonyítása. Tekintsük a következő egyenletet

$$\left(x^2 - 3x + Ay^2 - 3Ay + A + 1\right)\left(x^2 - 3x - Ay^2 + 3Ay - A + 1\right) = 0,$$

ahol $A = \sqrt{l+1}$. Könnyen látszik, hogy ennek az egyenletnek akkor és csak akkor van végtelen sok x, y racionális megoldása, ha A racionális és a következő két Hilbert szimbólum valamelyike egyenlő 1-gyel

$$\left(\frac{c}{5c+5d}, \frac{d}{5c+5d}\right), \quad \left(\frac{-c}{5c+5d}, \frac{d}{5c+5d}\right),$$

ahol $A = c/d$, $lnko(c, d) = 1$. Továbbá, ha x, y egy egész megoldás, akkor

$$x^2 - 3x + \frac{c}{d}y^2 - 3\frac{c}{d}y + \frac{c}{d} + 1 = 0 \tag{2.20}$$

vagy

$$x^2 - 3x - \frac{c}{d}y^2 + 3\frac{c}{d}y - \frac{c}{d} + 1 = 0. \tag{2.21}$$

Abban az esetben, ha (2.20) áll fenn, akkor $d \mid y^2 - 3y + 1$, amiből következik, hogy d páratlan és $c \mid x^2 - 3x + 1$. Ebből azt kapjuk, hogy c szintén páratlan. Így teljesül, hogy

$$\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{5}{4} + \frac{c}{d}\left(\left(y - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{5}{4}\right) = 0,$$

azaz $d\,(2x-3)^2 + c\,(2y-3)^2 = 5\,(c+d)$. Ezen utóbbi egyenletnek viszont csak véges sok megoldása van.

A (2.21) egyenletből azt kapjuk, hogy

$$\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{5}{4}-\frac{c}{d}\left(\left(y-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{5}{4}\right)=0,$$

és ezáltal $d\,(2x-3)^2-c\,(2y-3)^2=5\,(d-c)\,.$

Összegezve, akkor és csak akkor van végtelen sok egész megoldás, ha végtelen sok egész megoldása van a

$$d\,(2u-3)^2-c\,(2v-3)^2=5\,(d-c)\,,$$

egyenletnek, ahol d és c páratlanok. □

A 2.4. Állítás bizonyítása. Tegyük fel, hogy

$$\left(\frac{13}{4}-\frac{9}{4}\sqrt{2}-\left(3-\frac{3}{2}\sqrt{2}\right)y-\left(3-\frac{3}{2}\sqrt{2}\right)x+x^2+y^2-\sqrt{2}xy\right)\times$$

$$\times\left(\frac{13}{4}+\frac{9}{4}\sqrt{2}-\left(3+\frac{3}{2}\sqrt{2}\right)y-\left(3+\frac{3}{2}\sqrt{2}\right)x+x^2+y^2+\sqrt{2}xy\right)=0.$$

Ha $(x,y)\in\mathbb{Q}^2$ egy megoldás, akkor

$$\frac{13}{4}-\frac{9}{4}\sqrt{2}-\left(3-\frac{3}{2}\sqrt{2}\right)y-\left(3-\frac{3}{2}\sqrt{2}\right)x+x^2+y^2-\sqrt{2}xy=0 \tag{2.22}$$

vagy

$$\frac{13}{4}+\frac{9}{4}\sqrt{2}-\left(3+\frac{3}{2}\sqrt{2}\right)y-\left(3+\frac{3}{2}\sqrt{2}\right)x+x^2+y^2+\sqrt{2}xy=0. \tag{2.23}$$

A (2.22) egyenletet átírhatjuk

$$\frac{13}{4}-3y-3x+x^2+y^2+\sqrt{2}\left(\frac{3}{2}y+\frac{3}{2}x-xy-\frac{9}{4}\right)=0,$$

alakba, amiből látszik, hogy

$$\frac{13}{4}-3y-3x+x^2+y^2=0 \qquad \text{és} \qquad \frac{3}{2}y+\frac{3}{2}x-xy-\frac{9}{4}=0.$$

Ebből egyszerű számítással az következik, hogy $(x-y)^2=\frac{5}{4}$, ami nyilvánvalóan ellentmondás. Hasonló ellentmondásra jutunk a (2.23) egyenlet esetében is. □

A 2.5. Állítás bizonyítása. Tegyük fel először, hogy $(x, y) \in \mathbb{Q}^2$ megoldása az

$$y^2 - 5y + \frac{20}{3} - 5x + x^2 = 0 \tag{2.24}$$

egyenletnek. Ebből egyszerű teljes négyzetre hozással kapjuk, hogy

$$u^2 + v^2 = \frac{35}{6},$$

ahol $u = \frac{a}{b}$, $v = \frac{c}{d}$, $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$, $lnko(a, b) = lnko(c, d) = 1$. Ebből átszorzással következik, hogy

$$(6ad)^2 + (6bc)^2 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot b^2 d^2,$$

ami lehetetlen.

Ezek után tegyük fel, hogy $x = \frac{a}{b}$ és $y = \frac{c}{d}$, $a, b, c, d \in \mathbb{Z}, lnko(a, b) = lnko(c, d) = 1$ racionális számokra teljesül, hogy

$$\begin{aligned} y^4 - 10y^3 - x^2y^2 + 5xy^2 + \frac{85}{3}y^2 + 5x^2y - 25xy - \frac{50}{3}y + x^4 \\ - 10x^3 + \frac{85}{3}x^2 - \frac{50}{3}x + \frac{16}{9} = 0. \end{aligned} \tag{2.25}$$

Ebből behelyettesítéssel az alábbi egyenlethez jutunk:

$$\begin{aligned} 3b^4c^4 - 30b^4c^3d - 3a^2b^2c^2d^2 + 15ab^3c^2d^2 + 85b^4c^2d^2 + 15a^2b^2cd^3 \\ - 75ab^3cd^3 - 50b^4cd^3 + \frac{16}{3}b^4d^4 + 85a^2b^2d^4 - 50ab^3d^4 + 3a^4d^4 - 30a^3bd^4 = 0. \end{aligned} \tag{2.26}$$

Ennek következtében $3 \mid b^4d^4$. Mivel (2.25) szimmetrikus x-ben illetve y-ban, feltehetjük, hogy $3 \mid b$ és így $3 \nmid a$. Legyen $b = 3^k e$, $d = 3^t f$, ahol $lnko(3, e) = lnko(3, f) = 1$ és $k \geq 1$, $t \geq 0$. Ekkor (2.26)-ban minden tag osztható lesz $3^{\min\{4k+1, 4t+1\}}$-gyel.

Ha $t < k$, akkor (2.26) minden tagja osztható lesz 3^{4t+2}-vel, kivéve a $3a^4d^4$ tagot, ami ellentmondás.

Így $t \geq k$. Mivel $k \geq 1$, így $t \geq 1$, amiből következik, hogy $3 \mid d$, továbbá $k = t$. Viszont ekkor

$$3^{5k+1} \mid 3b^4c^4 - 3a^2b^2c^2d^2 + 3a^4d^4 = 3^{4k+1}\left(e^4c^4 - a^2e^2c^2f^2 + a^4f^4\right).$$

De ebben az esetben $3 \mid acef$, ami lehetetlen.

$\square$

A 2.5 és 2.6 Tételek bizonyítása. Legyen

$$f(x) = x(x-1)\cdots(x-(m-1)) \text{ és } g(y) = \lambda y(y-1)\cdots(y-(n-1)) + l,$$

ahol feltesszük, hogy $1 < m \leq n$, $\lambda, l \in \mathbb{C}$, továbbá $\lambda \neq 0$.

A 2.3. Lemmából tudjuk, hogy $r_\alpha \leq 1$, ha n páratlan, és $r_\alpha \leq 2$ egyébként. Legyen $\delta(n) = 2$, ha n páratlan és 4, ha n páros. Mivel $|\, S_f \,| = m - 1$ ezért

$$2g_C = \sum_{\alpha \in S_f} (n - 2r_\alpha) - m + 2 - lnko\,(m, n) \geq$$

$$\geq (n - \delta(n))(m-1) - 2(m-1) + m - lnko\,(m, n) =$$

$$= (n - \delta(n) - 2)(m-1) + m - lnko\,(m, n).$$

Ha feltesszük, hogy $n \geq 9$ vagy $n = 7$, akkor $n - \delta(n) - 2 \geq 3$ amiből az következik, hogy $2g_C \geq 3(m-1)$ és így $g_C > 1$. $n = 8$ esetén $n - \delta(n) - 2 = 2$ és $2g_C \geq 2(m-1) + m - lnko(m, 8) \geq 2(m-1)$, azaz $m \geq 3$-ra $g_C > 1$. Ha $n = 5$, akkor $2g_C \geq m - 1 + m - lnko(m, 5)$. Így $g_C > 1$ feltéve, hogy $m = 3, 4, 5$. Tehát a fentiek alapján csak a következő esetekkel kell foglalkozni: $m = 2, n = 2, 3, 4, 5, 6, 8$; $m = 3, n = 3, 4, 6$; $m = 4, n = 4, 6$; $m = 5, n = 6$; $m = 6, n = 6$.

Részletesen csak az $(m, n) = (2, 2), (2, 3)$ és $(2, 4)$ eseteket tárgyaljuk, a többinél egyszerűen meg kell ismételni a most leírt módszert. Legyen először $(m, n) = (2, 2)$. Ekkor $S_f = S_g = \left\{\frac{1}{2}\right\}$ és

$$2g_C = 2 - 2r_{\frac{1}{2}} - 2 + 2 - 2 = -2r_{\frac{1}{2}}.$$

Ha $-\frac{1}{4}\lambda + l \neq -\frac{1}{4}$, akkor $g_C = 0$, máskülönben a görbe reducibilis.

Legyen most $(m, n) = (2, 3)$. Ebben az esetben $S_f = \left\{\frac{1}{2}\right\}$, $S_g = \left\{1 + \frac{\sqrt{3}}{3}, 1 - \frac{\sqrt{3}}{3}\right\}$. Ezt felhasználva $2g_C = 2 - 2r_{\frac{1}{2}}$. Világos, hogy ha $r_{\frac{1}{2}} = 0$, akkor $g_C = 1$, míg $r_{\frac{1}{2}} = 1$ esetén $g_C = 0$. Viszont, $r_{\frac{1}{2}} = 1$ akkor és csak akkor teljesül, ha $\pm\frac{2\sqrt{3}}{9}\lambda + l = -\frac{1}{4}$.

Ha $(m, n) = (2, 4)$, akkor $S_f = \left\{\frac{1}{2}\right\}$, $S_g = \left\{\frac{3}{2}, \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}, \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}\right\}$. Most $2g_C = 2 - 2r_{\frac{1}{2}}$. Így, ha $r_{\frac{1}{2}} = 0$, akkor $g_C = 1$, és ha $r_{\frac{1}{2}} = 1$, akkor $g_C = 0$. Ha $r_{\frac{1}{2}} = 2$, akkor $-\lambda + l = -\frac{1}{4}$, és a görbe reducibilis. Másrészt $r_{\frac{1}{2}} = 1$ akkor és csak akkor teljesül, ha $\frac{9}{16}\lambda + l = -\frac{1}{4}$. $\square$

A 2.2 Tétel bizonyítása. Tekintsük az alábbi algebrai görbét:

$$x\,(x-1)\cdots(x-(m-1)) = \lambda y\,(y-1)\cdots(y-(n-1)) + l, \tag{2.27}$$

ahol $m, n \in \mathbb{N}$, $m \leq n$, $\lambda, l \in \mathbb{Q}$ és $\lambda \neq 0$. Kombinálva a 2.4, 2.5 és a 2.6 Tételeket a 2.6 és a 2.7 Lemmákkal azt kapjuk, hogy a (2.27) egyenletnek a 2.2 Tételben felsorolt kivételes esetektől eltekintve csak véges sok egész, illetve racionális megoldása van. A továbbiakban megmutatjuk, hogy minden kivételes esetben megválaszthatóak a λ, l paraméterek úgy, hogy a (2.27) egyenletnek legyen végtelen sok x, y megoldása.

Az 1)-es esetben a görbének lineáris faktora van, amiből könnyen kapható végtelen sok megoldás. Amikor $(m, n) = (2, 2)$, az egyenletünket visszavezethetjük Pell-egyenletre. Könnyen látszik például, hogy ha $\lambda = 2$ és $l = k\,(k-1)$, ahol k egy páratlan szám, akkor egyenletünknek végtelen sok egész megoldása lesz. Ha $(m, n) = (2, 4)$ és $4\lambda - 4l = 1$, akkor a görbénk ismét csak reducibilis. Ezt az esetet pedig a 2.2. Állításban tárgyaltuk. Az $(m, n) = (4, 4), \lambda - l = 1$ esetet pedig a 2.3. Állításban vizsgáltuk. Az 5)-ös, 6)-os, 7)-es, 8)-as és 9)-es eseteknél a görbénk 1 génuszú, és λ, l alkalmas megválasztása mellett a görbét egy biracionális transzformációval átalakítjuk egy elliptikus görbévé. Ezután megmutatjuk, hogy az eredeti görbén létezik egy olyan racionális pont, aminek a transzformáció utáni képe egy nem-torzió pont lesz a transzformált elliptikus görbén. Ez azt jelenti, hogy az elliptikus görbén végtelen sok racionális pont van, és mivel a transzformáció biracionális, ezért az eredeti görbén is végtelen sok racionális pont található. A részleteket csak az 5)-ös esetben adjuk meg.

Tekintsük az alábbi görbét:

$$x(x-1) - \lambda y(y-1)(y-2) - l = 0, \tag{2.28}$$

ahol $\lambda, l \in \mathbb{Z}$ és $\lambda \neq 0$. Oldjuk meg az $x(x-1) - l = 0$ egyenletet x-re. A megoldások:

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+4l}}{2}.$$

Legyen $l = \left(k^2 - 1\right)/4$ ahol $k \in \mathbb{Z}$ páratlan és relatív prím λ-hoz. Ekkor (2.28)-ba behelyettesítve kapjuk, hogy

$$x(x-1) - \lambda y(y-1)(y-2) - \frac{1}{4}k^2 + \frac{1}{4} = 0. \tag{2.29}$$

Világos, hogy a $P = ((1-k)/2, 2)$ pont rajta van ezen a görbén. Végrehajtva az

$$x = \frac{32\lambda - V}{64\lambda}, \quad y = \frac{U + 16\lambda}{16\lambda}$$

biracionális transzformációt a (2.29) görbén, az alábbi elliptikus görbéhez jutunk:

$$V^2 = U^3 - 256\lambda^2 U + 1024\lambda^2 k^2 \tag{2.30}$$

Ezen elliptikus görbe diszkriminánsa

$$\Delta = -67108864\lambda^6 + 2811552\lambda^4 k^4.$$

A P pontnak a transzformáció általi képe a $W = (16\lambda, 32\lambda k)$ pont, ami nyilvánvalóan egy racionális pont. Könnyen látható, hogy $32\lambda k$ akkor és csak akkor osztója a Δ diszkriminánsnak, ha k osztja $2^{21}\lambda^5$-t. Viszont, mivel $lnko(\lambda, k) = 1$ és k páratlan, a jól ismert Nagell-Lutz [62] tételből következik, hogy a W pont egy nem-torzió pont a (2.30) elliptikus görbén. Ebből azt kapjuk, hogy az elliptikus görbénken végtelen sok racionális pont van. Mivel a transzformációnk biracionális volt, így az eredeti (2.29) görbénken is végtelen sok racionális pont van.

A fennmaradó esetek mindegyikében megadunk most végtelen sok olyan görbét, amin végtelen sok racionális pont van. Az 5)-ös esetben ismertetett módszert követve könnyen ellenőrizhető, hogy az alábbi görbéken valóban található végtelen sok racionális pont.

6) $(m, n) = (2, 4)$, $9\lambda + 16l \neq -4$, és

$$x(x-1) - 3ty(y-1)(y-2)(y-3) - \frac{1}{4}k^2 + \frac{1}{4} = 0,$$

ahol $k, t \in \mathbb{N}$ és $lnko(t, k) = 1$, $lnko(k, 208) = 1$

7) $(m, n) = (2, 6)$, $-\frac{1}{4} = -\frac{225}{64}\lambda + l$, és

$$x(x-1) - \frac{16}{225}k^2 y(y-1)(y-2)(y-3)(y-4)(y-5) - \frac{1}{4}k^2 + \frac{1}{4} = 0,$$

ahol $k \in \mathbb{N}$.

8) $(m, n) = (3, 3)$, és

$$x(x-1)(x-2) - y(y-1)(y-2) - 3k^2 + 9k - 6 = 0,$$

ahol $k \in \mathbb{N}$ olyan, hogy $(2k-3) \nmid 2^9 3^5 13$.

9) $(m, n) = (4, 4)$, $-\lambda + l = \frac{9}{16}$, $l \neq -\frac{7}{16}$, és

$$x(x-1)(x-2)(x-3) - \left(k(k-1)(k-2)(k-3) - \frac{9}{16}\right) \times \\ \times\, y(y-1)(y-2)(y-3) - k(k-1)(k-2)(k-3) = 0,$$

ahol $k > 4$.

Továbbá, $(m,n) = (4,4)$, $\frac{9}{16}\lambda + l = -1$, $l \neq -\frac{7}{16}$, és

$$x(x-1)(x-2)(x-3) - \left(-\frac{16}{9}k(k-1)(k-2)(k-3) - \frac{16}{9}\right) \times \\ \times\, y(y-1)(y-2)(y-3) - k(k-1)(k-2)(k-3) = 0,$$

ahol $k \nmid 3^{13}5^{16}$.

□

A 2.3 Tétel bizonyítása. Az egyenletünk most:

$$x\,(x+d_1)\cdots(x+(m-1)\,d_1) = \tilde{\lambda} y\,(y+d_2)\cdots(y+(n-1)\,d_2) + \tilde{l}$$

alakú, ahol $m \leq n$ és $m, n \in \mathbb{N}$. Ebből az egyenletből azt kapjuk, hogy

$$X\,(X-1)\cdots(X-(m-1)) = \lambda Y\,(Y-1)\cdots(Y-(n-1)) + l,$$

ahol

$$X = -\frac{x}{d_1},\;\; Y = -\frac{y}{d_2},\;\; \lambda = (-1)^{m+n}\tilde{\lambda}\frac{d_2^n}{d_1^m},\;\; l = (-1)^m\frac{\tilde{l}}{d_1^m}.$$

Alkalmazva a 2.2 Tételt állításunk bizonyítást nyert.

□

A 2.1 Tétel bizonyítása. Legyenek a, b, k egészek, ahol $a \neq 0$, $b \neq 0$, továbbá legyenek m, n pozitív egészek az $m \leq n$ tulajdonsággal. A (2.5) egyenletet átírhatjuk

$$x\,(x-1)\cdots(x-(m-1)) = \lambda y\,(y-1)\cdots(y-(n-1)) + l \tag{2.31}$$

alakba, ahol

$$\lambda = \frac{bm!}{an!} \qquad \text{és} \qquad l = \frac{-km!}{a}.$$

Ekkor a (2.31) egyenletre alkalmazhatjuk a 2.2. Tételt. Könnyen látszik, hogy eltekintve az $m = n$, $a = b$ és $k = 0$ esettől, a (2.31) egyenletnek csak akkor lehet végtelen sok egész megoldása, ha $(m, n) \in \{(2, 2), (2, 4), (4, 4)\}$.

Amikor $(m, n) = (2, 2)$, (2.31)-ből a következő egyenlethez jutunk:

$$a\,(2x-1)^2 - b\,(2y-1)^2 = -8k + a - b. \tag{2.32}$$

Nem nehéz (2.32)-ben megválasztani az a, b és k paramétereket, hogy az egyenletnek végtelen sok x, y egész megoldása legyen. Legyen például $a = 1$, $b = 6$, $k = -1$. Könnyen ellenőrizhető, (például $\bmod 4$) hogy az $u^2 - 6v^2 = 3$ Pell egyenlet minden megoldása páratlan, és $(u, v) = (27, 11)$ egy megoldás. Így (2.32)-nek valóban van végtelen sok megoldása.

Ha $(m, n) = (2, 4)$, akkor (2.31) az alábbi egyenletre vezet:

$$x\,(x-1) = \lambda y\,(y-1)\,(y-2)\,(y-3) + l, \tag{2.33}$$

ahol $\lambda = b/12a$, $l = -2k/a$. A 2.4 és 2.5 Tételekből tudjuk, hogy ha

$$4\lambda - 4l \neq 1 \quad \text{és} \quad 9\lambda + 16l \neq -4,$$

azaz, ha

$$\frac{-24k + 3a}{b} \neq 1 \quad \text{és} \quad \frac{-24k + 3a}{b} \neq -\frac{9}{16},$$

akkor (2.33)-nak csak véges sok egész megoldása van. Továbbá azt is tudjuk, hogy $(-24k + 3a)/b = 1$ esetén a görbénk reducibilis. Alkalmazva a 2.2. Állítást azt állapíthatjuk meg, hogy akkor és csak akkor lehet végtelen sok x, y egész megoldás, ha

$$\frac{b}{3a} = \left(\frac{c}{d}\right)^2$$

alakú, ahol $c, d \in \mathbb{Z}, (c, d) = 1$ és az $u^2 - 3u + 1 \equiv 0 \bmod d$ kongruencia megoldható.

Ha $a = 25$, $b = 147$, $k = -3$ akkor $(-24k + 3a)/b = 1$, és

$$x = (1 + 7\left(5t^2 + 5t + 1\right))/2, \quad y = 4 + 5t$$

bármely $t \geq 0$ pozitív egész esetén megoldása lesz a (2.5) egyenletnek.

Abban az esetben, amikor $(-24k+3a)/b=-9/16$, az egyenletünk a következő:

$$(2x-1)^2=\frac{b}{48a}\left(4y^2-12y-1\right)(2y-3)^2. \tag{2.34}$$

Ismét nem nehéz feladat megválasztani az a,b,k egészeket úgy, hogy legyen végtelen sok megoldás. Például, legyen $a=1$, $b=720$, $k=17$, ekkor $(-24k+3a)/b=-9/16$. Most

$$x=(15a_{w+1}b_{w+1}+1)/2, \quad y=(a_{w+1}+3)/2$$

minden w-re megoldás lesz, ahol a_w és b_w az alábbi rekurzióval van definiálva: $(a_0,b_0)=(5,1)$, $(a_{w+1},b_{w+1})=(4a_w+15b_w,a_w+4b_w)$.

Legyen végül $(m,n)=(4,4)$. Ekkor (2.28)-nak akkor és csak akkor lehet végtelen sok megoldása, ha $\lambda-l=1$, azaz, ha $(-24k+a)/b=1$. Ebben az esetben (2.31) a

$$z^2=\frac{16b}{a}\left(y^2-3y+1\right)^2 \tag{2.35}$$

egyenletre vezet, ahol $z=(2x-3)^2-5$. Ismét egyszerű olyan a,b,k egészeket választani, amelyek mellett a (2.35) egyenletnek van végtelen sok megoldása. Például legyen $a=25$, $b=1$, $k=1$, így $(-24k+a)/b=1$. Ekkor a (2.5) egyenletnek

$$x=(a_{w+1}+3)/2, \quad y=(5b_{w+1}+3)/2$$

egész megoldásai minden w természetes szám esetén, ahol a_w és b_w a következőképpen van meghatározva: $(a_0,b_0)=(3,1)$, $(a_{w+1},b_{w+1})=(9a_w+20b_w,4a_w+9b_w)$.

□

2.3 PRÍMFOKSZÁMÚ ESET

2.3.1 EREDMÉNYEK

Ezen alfejezet első tételében meghatározzuk mindazon (m, n) számpárokat és $F(x)$ másodfokú, egész együtthatós polinomokat, amelyekre az

$$F\left(\binom{x}{m}\right) = b\binom{y}{n} \tag{2.36}$$

egyenletnek csak véges sok $x \geq m$, $y \geq n$ egész megoldása van.

2.7. Tétel *Legyen $F(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$ egy másodfokú egész együtthatós polinom, $b \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, m, $n \geq 2$ pozitív egészek. Ekkor a (2.36) egyenletnek csak véges sok $x \geq m$, $y \geq n$ egész megoldása van, kivéve az $n = 2$, $2a_1^2 - 8a_0a_2 - a_2b = 0$ és az $(n, m) \in \{(2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (4,1), (4,2), (4,4)\}$ eseteket. A kivételes esetek mindegyikében meg lehet választani a $F(x)$ polinomot és a b egész számot úgy, hogy a (2.36) egyenletnek végtelen sok egész megoldása legyen.*

A második tételünkben a páratlan prímfokszámú $F(x)$ polinomok esetét vizsgáljuk. Azért választjuk szét a páros, illetve a páratlan prímfokszámú eseteket két tételre, mert a tételek bizonyítása során eltérő módszereket használunk.

2.8. Tétel *Legyen $F(x) = a_px^p + a_{p-1}x^{p-1} + \cdots + a_1x + a_0 \in \mathbb{Z}[x]$, ahol $a_p \neq 0$, $p \geq 3$ prím. Legyenek továbbá m, $n \geq 2$ pozitív egészek, és $b \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Ekkor a (2.36) egyenletnek csak véges sok $x \geq m$, $y \geq n$ egész megoldása van, kivéve az alábbi eseteket:*

i) $n = 2$, $m = 1, 2$ *vagy* 4;

ii) $n = p$ *és* $F(x) = \frac{b}{p!}\delta(x)(\delta(x) + 1)\cdots(\delta(x) + p - 1)$, *ahol* $\delta(x) \in \mathbb{Q}[x]$ *lineáris;*

iii) $n = 2p$, $m = 1$, 2 *vagy* 4, *és* $F(x) = \frac{b}{(2p)!}\left(\delta(x) - \frac{1}{4}\right)\left(\delta(x) - \frac{9}{4}\right)\cdots\left(\delta(x) - \frac{(2p-1)^2}{4}\right)$, *ahol* $\delta(x) \in \mathbb{Q}[x]$ *lineáris.*

A tételek bizonyítása során minden kivételes esetben megadunk olyan konkrét egyenleteket, amelyek rendelkeznek végtelen sok x, y egész megoldással.

A 2.7. és a 2.8. Tételek kiterjesztései a 2.1. Tételünknek, amelyben az $F(x)$ polinom egy lineáris polinom volt.

2.3.2 SEGÉDEREDMÉNYEK

A következő lemmák alapvető fontosságú szerepet játszanak a tételeink bizonyításában. Ezen eredmények megfogalmazásához vezessünk be néhány jelölést. A továbbiakban jelöljön $\delta(x)$ egy lineáris, $p(x)$ egy nem-nulla racionális együtthatós polinomot. Legyen

$$\phi(x) = \left(x - \frac{1}{4}\right)\left(x - \frac{9}{4}\right) \cdots \left(x - \frac{(n-1)^2}{4}\right),$$

$$\psi(x) = x(x+1)(x+2)\cdots(x+(n-1)).$$

Tetszőleges $n \geq 1$ egész és $g(x) \in \mathbb{Q}[x]$ polinom esetén definiáljuk az $(n, g(x))$ speciális párt az alábbi módon:

· I Speciális pár: $(n, \psi(p(x)))$, ahol $p(x)$ nem-konstans polinom.

· II Speciális pár: n páros, $g(x) = \phi\left(\delta(x)\, p(x)^2\right)$, ahol $p(x)$ lehet konstans polinom is.

· III Speciális pár: n páros, $g(x) = \phi\left(c\delta(x)^r\right)$, ahol c nem-nulla konstans és $r \geq 3$ páratlan egész.

· IV Speciális pár: n páros, $g(x) = \phi\left(\left(a\delta(x)^2 + b\right) p(x)^2\right)$, ahol $a, b \in \mathbb{Q}$.

· V Speciális pár: n páros, $g(x) = \phi\left(p(x)^2\right)$.

· VI Speciális pár: $n = 4$, $g(x) = b\delta(x)^2 + \frac{9}{16}$, ahol $b \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$.

2.8. Lemma *(Kulkarni, Sury, [33]) Legyen $g(x)$ legalább másodfokú, racionális együtthatós polinom és legyen $f(z) = z(z+1)(z+2)\cdots(z+(n-1))$, ahol $n \geq 3$. Ha a*

$$g(x) = f(z) \tag{2.37}$$

egyenletnek van végtelen sok x, z egész megoldása, akkor $(n, g(x))$ speciális pár.

Nagyon sokan foglalkoztak az $f(x) = y^m$ szuperelliptikus egyenletekkel, ahol $f(x)$ egy legalább harmadfokú, egész, vagy algebrai egész együtthatós polinom, $m \geq 2$ pozitív egész. LeVeque [34] volt az első, aki végességi kritériumot adott a szuperelliptikus egyenletek egész megoldásainak a számára vonatkozóan. Az eredmény ineffektív, azaz a módszere segítségével nem lehet meghatározni az egyenlet összes megoldását. Baker [3] volt az első, akinek sikerült effektív eredményt szolgáltatnia $f(x) = y^m$ alakú egyenletekre. Azóta Baker eredményének számos általánosítása és kiterjesztése látott napvilágot. A következő lemma valójában LeVeque tételének effektív változata.

Legyen $\mathbf{K}$ egy algebrai számtest, $O_{\mathbf{K}}$ pedig ezen számtest algebrai egészeinek a gyűrűje.

2.9. Lemma *(Brindza, [12]) Legyen*

$$f(x) = a_0x^N + \cdots + a_N = a_0 \prod_{i=1}^{n} (x - \alpha_i)^{r_i}$$

egy $O_{\mathbf{K}}[x]$-beli polinom, $a_0 \neq 0$ és $\alpha_i \neq \alpha_j$ minden $i \neq j$ esetén. Legyen továbbá $b \in O_{\mathbf{K}}$, $m > 1$ és $q_i = m/(m, r_i)$, $i = 1, 2, \cdots, n$. Tegyük fel, hogy $(q_1, q_2, \cdots, q_n)$ nem permutációja $(q, 1, \cdots, 1)$-nek vagy $(2, 2, 1, \cdots, 1)$-nek, ahol $q \geq 1$. Ekkor az

$$f(x) = by^m$$

egyenletnek csak véges sok $x, y \in O_{\mathbf{K}}$ megoldása van, és ezek a megoldások effektíve meghatározhatóak.

A következő lemma egyszerű következménye a 2.9. Lemmának és Ping-Zhi egy megjegyzésének ([39], 143. oldal). Ping-Zhi a cikkében karakterizálja azon a, c algebrai és $m \geq 3$ racionális egészeket, amelyekre az $\binom{x}{m} - \frac{c}{a}$ polinomnak legalább három egyszeres gyöke van. Megjegyezzük, hogy [39]-ben az $m = 3$ esetben $c/a = \pm\sqrt{3}/108$ érték szerepel, ami egy elírás. A helyes érték $\pm\sqrt{3}/27$.

2.10. Lemma *Legyenek $a \neq 0$, $b \neq 0$ és c $O_{\mathbf{K}}$-beli elemek, és legyenek $m \geq 3$, $r \geq 2$ racionális egészek. Ekkor eltekintve az $m = 4$, $c/a = -1/24$ vagy $3/128$; $m = 3$, $c/a = \pm\sqrt{3}/27$; $m = 6$, $c/a = -7\sqrt{7}/1215 - 2/243$ vagy $c/a = 7\sqrt{7}/1215 - 2/243$ esetektől, az $\binom{x}{m} - \frac{c}{a}$ polinomnak van legalább három egyszeres gyöke, és az*

$$a\binom{x}{m} = by^r + c$$

egyenletnek csak véges sok és effektíve meghatározható $x, y \in O_{\mathbf{K}}$ megoldása van.

2.3.3 BIZONYÍTÁSOK

A 2.7. Tétel bizonyítása. Vizsgáljuk az

$$a_2\binom{x}{m}^2+a_1\binom{x}{m}+a_0=b\binom{y}{n} \tag{2.38}$$

egyenletet, ahol $a_2\neq 0$, a_1, a_0 és $b\neq 0$ egész számok. Világos, hogy ha a (2.38) egyenletnek van végtelen sok $x\geq m$ és $y\geq n$ megoldása, akkor a

$$c_2x^2+c_1x+c_0=z\,(z+1)\cdots(z+(n-1)) \tag{2.39}$$

egyenletnek szintén van végtelen sok egész megoldása, ahol most

$$c_i=\frac{n!}{b}a_i,\quad i=0,1,2\quad \text{és}\quad z=y-(n-1)\,.$$

Így a 2.8. Lemmából következik, hogy $n=2$ vagy $n=4$, és $(n,c_2x^2+c_1x+c_0)$ speciális pár.

Ha $\underline{n=2}$, akkor (2.38)-ból következik, hogy

$$h\left(\binom{x}{m}\right):=8a_2\left[\binom{x}{m}^2+\frac{a_1}{a_2}\binom{x}{m}+\frac{8a_0+b}{8a_2}\right]=b\,(2y-1)^2$$

és így

$$8a_2\left(\binom{x}{m}-\alpha_1\right)\left(\binom{x}{m}-\alpha_2\right)=b\,(2y-1)^2\,, \tag{2.40}$$

ahol α_1, α_2 a $h(x)$ polinom gyökei.

Abban az esetben ha $\alpha_1=\alpha_2$, akkor $2a_1^2-8a_0a_2-a_2b=0$. Továbbá (2.40)-ből következik, hogy

$$\left(4a_2\binom{x}{m}+2a_1\right)^2=2a_2b\,(2y-1)^2\,.$$

Ez viszont csak akkor teljesülhet, ha $2a_2b$ négyzetszám. Így, ha az $F(x)$ polinomot x^2+3x+2-nek, b-t pedig 2-nek választjuk, akkor a (2.36) egyenletnek x, $y=\binom{x}{m}+2$ megoldása lesz bármely $x\geq m$ esetén.

Ezek után tegyük fel, hogy $\alpha_1 \neq \alpha_2$, azaz $2a_1^2 - 8a_0a_2 - a_2b \neq 0$. $m = 1$ vagy 2 esetén könnyen meg lehet adni olyan egyenletet, amelyik végtelen sok x, y egész megoldással rendelkezik. Ilyenek lesznek például a (2.41) és a (2.42) egyenletek a későbbiekben. Ha $m \geq 3$ és

$$(m, \alpha_1) \text{ vagy } (m, \alpha_2) \notin H = \left\{ \left(4, \frac{-1}{24}\right), \left(4, \frac{3}{128}\right), \left(3, \frac{\sqrt{3}}{27}\right), \left(3, \frac{-\sqrt{3}}{27}\right), \left(6, \frac{-7\sqrt{7}}{1215} - \frac{2}{243}\right), \left(6, \frac{7\sqrt{7}}{1215} - \frac{2}{243}\right) \right\},$$

akkor a 2.10. Lemmából tudjuk, hogy a $h\left(\binom{x}{m}\right)$ polinomnak van legalább három egyszeres gyöke és így nyílván van legalább három páratlan multiplicitású gyöke is. Így a 2.9. Lemmából levezethető, hogy (2.40)-nek és ezáltal (2.38)-nak is csak véges sok egész megoldása van. Valójában tehát csak azon esetekkel kell a továbbiakban foglalkoznunk, amikor az alábbi polinomok valamelyike faktora a $h\left(\binom{x}{m}\right)$ polinomnak.

(a) $\binom{x}{4} + \frac{1}{24} = \frac{1}{24}\left(x - \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^2 \left(x - \frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^2$

(b) $\binom{x}{4} - \frac{3}{128} = \frac{1}{24}\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 \left(x - \frac{3+\sqrt{10}}{2}\right)\left(x - \frac{3-\sqrt{10}}{2}\right)$

(c) $\binom{x}{3} + \frac{\sqrt{3}}{27} = \frac{1}{6}\left(x - \frac{3-2\sqrt{3}}{3}\right)\left(x - \frac{3+\sqrt{3}}{3}\right)^2$

(d) $\binom{x}{3} - \frac{\sqrt{3}}{27} = \frac{1}{6}\left(x - \frac{3+2\sqrt{3}}{3}\right)\left(x - \frac{3-\sqrt{3}}{3}\right)^2$

(e) $\binom{x}{6} + \frac{7\sqrt{7}}{1215} + \frac{2}{243} = \frac{1}{720}(x-\beta_1)(x-\beta_2)(x-\beta_3)^2(x-\beta_4)^2$

(f) $\binom{x}{6} - \frac{7\sqrt{7}}{1215} + \frac{2}{243} = \frac{1}{720}(x-\gamma_1)(x-\gamma_2)(x-\gamma_3)^2(x-\gamma_4)^2$

ahol

$$\beta_1 = \frac{30 + \sqrt{105 - 48\sqrt{7}}}{6}, \beta_2 = \frac{30 - \sqrt{105 - 48\sqrt{7}}}{6},$$

$$\beta_3 = \frac{30 + \sqrt{105 + 24\sqrt{7}}}{6}, \beta_4 = \frac{30 - \sqrt{105 + 24\sqrt{7}}}{6}$$

$$\gamma_1=\frac{30+\sqrt{105+48\sqrt{7}}}{6},\gamma_2=\frac{30-\sqrt{105+48\sqrt{7}}}{6},$$
$$\gamma_3=\frac{30+\sqrt{105-24\sqrt{7}}}{6},\gamma_4=\frac{30-\sqrt{105-24\sqrt{7}}}{6}.$$

Könnyen látszik, hogy $m=6$ esetén, azaz az (e) és (f) esetekben a $h(\binom{x}{m})$ polinomnak mindig lesz legalább három egyszeres gyöke. Amikor $m=4$, azaz (a) és (b) esetén, a $h(\binom{x}{m})$ polinomnak szintén van legalább három egyszeres gyöke, kivéve, ha $(\alpha_1,\alpha_2)=(-1/24,3/128)$. Hasonlóan, nem nehéz észrevenni, hogy abban az esetben, ha $m=3$, azaz a (c) és (d) esetekben, $h(\binom{x}{m})$-nek van legalább három páratlan multiplicitású gyöke, eltekintve az $(\alpha_1,\alpha_2)=\left(\sqrt{3}/27,-\sqrt{3}/27\right)$ lehetőségtől. Viszont ekkor azt kapjuk a 2.9. Lemma alapján, hogy a fent felsorolt két eset kivételével (2.40)-nek csak véges sok egész megoldása van.

A kimaradó két esetben, azaz amikor $m=3$ és $\alpha_1=\pm\sqrt{3}/27$, $\alpha_2=\mp\sqrt{3}/27$, illetve amikor $m=4$ és $\alpha_1=-1/24$, $\alpha_2=3/128$ vagy fordítva, meg lehet adni olyan egyenleteket, amelyeknek végtelen sok egész megoldása van; lásd például a (2.43) és a (2.44) egyenleteket alább.

A fejezet további részében a már korábban említett kivételes, azaz végtelen sok megoldással rendelkező, egyenletekre adunk példákat.

Az első egyenletnél $\underline{m=1}$. Az

$$x^2+2x+1=\binom{y}{2} \tag{2.41}$$

egyenletnek az

$$x=\frac{b_w-2}{2},\quad y=\frac{a_w+1}{2},\qquad w=0,1,\dots$$

egész számok végtelen sok megoldását adják, ahol az a_w és b_w egészek a következő rekurzióval definiáltak: $(a_0,b_0)=(3,2)$, $(a_{w+1},b_{w+1})=(3a_w+4b_w,2a_w+3b_w)$.

$\underline{m=2}$ esetén könnyű ellenőrizni, hogy a

$$8\binom{x}{2}^2+\binom{x}{2}-1=8\binom{y}{2} \tag{2.42}$$

egyenletnek van végtelen sok egész megoldása, nevezetesen:

$$x = \frac{a_{2w} + 1}{2}, \quad y = \frac{a_{2w} b_{2w} + 2}{4}, \qquad w = 0, 1, \ldots,$$

ahol $(a_0, b_0) = (3, 2)$, $(a_{w+1}, b_{w+1}) = (3a_w + 4b_w, 2a_w + 3b_w)$.
Az $\underline{m = 3}$ esetben

$$243 \binom{x}{3}^2 - 3 = 16 \binom{y}{2} \tag{2.43}$$

egyenlet végtelen sok egész megoldással rendelkezik. Valóban, az

$$x = b_w + 1, \quad y = \frac{a_w}{8} \left(3b_w^2 - 1 \right) + \frac{1}{2}, \qquad w = 0, 1, \ldots$$

egész számok megoldások, feltéve, hogy $(a_0, b_0) = (4, 2)$, $(a_{w+1}, b_{w+1}) = (5a_w + 12b_w, 2a_w + 5b_w)$.
Végül egy példa $\underline{m = 4}$ esetén:

$$384 \binom{x}{4}^2 + 7 \binom{x}{4} - 1 = 5 \binom{y}{2}. \tag{2.44}$$

Ezen egyenletnek az

$$x = \frac{a_w + 3}{2}, \quad y = \frac{b_w \left(x^2 - 3x + 1 \right) (2x - 3) + 1}{2}, \qquad w = 0, 1, \ldots$$

egészek mind megoldásai, ha $(a_0, b_0) = (5, 1)$ és $(a_{w+1}, b_{w+1}) = (4a_w + 15b_w, a_w + 4b_w)$.

Ha $\underline{n = 4}$, akkor (2.38) a

$$384 a_2 \left(\binom{x}{m} - \alpha_1 \right) \left(\binom{x}{m} - \alpha_2 \right) = b \left((2y - 3)^2 - 5 \right)^2 \tag{2.45}$$

egyenlethez vezet, ahol α_1, α_2 a $24a_2 x^2 + 24a_1 x + 24a_0 + b = 0$ egyenlet gyökei. Az $n = 2$ esethez hasonlóan levezethető, hogy a (2.45) egyenletnek csak akkor lehet végtelen sok egész megoldása, ha $\alpha_1 = \alpha_2$, vagy ha $m = 1$, 2, vagy $m = 3$ és $(\alpha_1, \alpha_2) = \left(\sqrt{3}/27, -\sqrt{3}/27 \right)$, vagy $m = 4$ és $(\alpha_1, \alpha_2) = (-1/24, 3/128)$.

Amikor $\alpha_1 = \alpha_2$, azt kapjuk, hogy $2\alpha_1 = -a_1/a_2$ és $6a_1^2 - 24a_0a_2 - a_2b = 0$. Így (2.45)-ből következik, hogy

$$\left(12a_2\binom{x}{m} + 6a_1\right)^2 = 6a_2b\left(y^2 - 3y + 1\right)^2.$$

Nyilvánvaló, hogy ennek az egyenletnek csak akkor van egyáltalán egész megoldása, ha $6a_2b = u^2$, ahol $u \in \mathbb{Z}$. Ezt felhasználva kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}(2.46)\qquad &\left(12a_2\binom{x}{m} + 6a_1 - u\left(y^2 - 3y + 1\right)\right)\\ &\qquad \times \left(12a_2\binom{x}{m} + 6a_1 + u\left(y^2 - 3y + 1\right)\right) = 0.\end{aligned}$$

Így, nyilván csak akkor lehet végtelen sok egész megoldás, ha vagy a

$$48a_2\binom{x}{m} + 24a_1 + 5u = u\,(2y-3)^2$$

vagy a

$$-48a_2\binom{x}{m} - 24a_1 + 5u = u\,(2y-3)^2$$

egyenletnek van végtelen sok egész megoldása. Viszont a 2.10. Lemmából tudjuk, hogy ez csak akkor lehetséges, ha $m = 1$, 2, vagy 4.

Mind a három esetben megadható olyan egyenlet, amelyiknek végtelen sok x, y egész megoldása van. Például $\underline{m=1}$ esetén az

$$x^2 - 10x + 9 = 384\binom{y}{4}$$

egyenletnek az alábbi egészek megoldásai:

$$y \geq 4 \quad \text{tetszőleges}\,, \quad x = (2y-3)^2\,.$$

$\underline{m=2}$-re tekintsük az alábbi egyenletet:

$$\binom{x}{2}^2 - 10\binom{x}{2} + 9 = 384\binom{y}{4}$$

az

$$y = \frac{b_{2w}+3}{2}, \quad x = \frac{a_{2w}+1}{2}, \qquad w = 0, 1, \ldots$$

megoldásokkal, ahol $(a_0, b_0) = (99, 35)$ és $(a_{w+1}, b_{w+1}) = (3a_w + 8b_w, a_w + 3b_w)$. Végül, amikor $\underline{m = 4}$, akkor egy ilyen egyenlet a

$$-3\binom{x}{4}^2 + \binom{x}{4} = -2\binom{y}{4}$$

az

$$x \geq 4 \quad \text{tetszőleges} \;, \quad y = \frac{x^2 - 3x + 4}{2}$$

egész megoldásokkal.

Vizsgáljuk most azt az esetet, amikor $\alpha_1 \neq \alpha_2$. Ha $m \geq 3$, akkor az $n = 2$ esetnél tárgyaltak szerint csak abban az esetben nem lesz legalább három páratlan multiplicitású gyöke a (2.45) egyenlet bal oldalának, ha $m = 3$ és $(\alpha_1, \alpha_2) = \left(\sqrt{3}/27, -\sqrt{3}/27\right)$, vagy ha $m = 4$ és $(\alpha_1, \alpha_2) = (-1/24, 3/128)$. Eltekintve ezen két kivételtől a 2.10. Lemmából ismét azt kapjuk, hogy csak véges sok egész megoldás létezik.

Ha $m = 3$ és $\alpha_1 = \sqrt{3}/27$, $\alpha_2 = -\sqrt{3}/27$, akkor egyenletünket visszavezethetjük a

$$2a_2\left(27x^2(x-1)^2(x-2)^2 - 4\right) - 81b\left(y^2 - 3y + 1\right)^2 = 0 \tag{2.47}$$

egyenletre. Mivel a (2.47) görbe génusza 3, továbbá a görbe irreducibilis, így a 2.6. Lemma miatt ismét csak véges sok egész megoldás lehetséges.

$m = 4$ és $(\alpha_1, \alpha_2) = (-1/24, 3/128)$ esetében a helyzet hasonló, azaz egy irreducibilis pozitív génuszú görbét kapunk, amelyen mint tudjuk a 2.6. Lemmából, csak véges sok egész pont van.

□

A 2.8. Tétel bizonyítása. Legyen $F(x) = a_p x^p + a_{p-1}x^{p-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \in \mathbb{Z}[x]$, ahol $a_p \neq 0$ és $p \geq 3$ prímszám. Legyen továbbá b egy nullától különböző egész. Nyilvánvaló, hogy abban az esetben, ha a (2.36) egyenletnek van végtelen sok egész megoldása, akkor ugyanez igaz a

$$c_p x^p + c_{p-1}x^{p-1} + \cdots + c_1 x + c_0 = z\,(z+1)\cdots(z+(n-1)) \tag{2.48}$$

egyenletre is, ahol

$$c_i = \frac{n!}{b}a_i, \quad i = 0, 1, \ldots, p \quad \text{és} \quad z = y - (n-1)\,.$$

Így a 2.8. Lemmából kapjuk, hogy vagy $n = 2$ vagy $n > 2$ és $(n, c(x) = c_p x^p + c_{p-1}x^{p-1} + \cdots + c_1 x + c_0)$ speciális pár.

Mivel p prím, ezért tudjuk, hogy $c(x)$ felbonthatatlan, azaz ha $c(x)=u(v(x))$ valamely $u(x)$, $v(x)\in\mathbb{Q}[x]$ polinomok esetén, akkor az $u(x)$ és $v(x)$ polinomok valamelyike lineáris. Ezt felhasználva, illetve megnézve az egyes speciális párokat és a tartalmazott polinomok fokszámát láthatjuk, hogy (2.48)-nak csak akkor lehet végtelen sok egész megoldása, ha $n=2$ vagy $n=p$ vagy $n=2p$.

Foglalkozzunk először azon esetekkel, amikor $n=p$ vagy $n=2p$. Mivel $n>2$ és $\deg F=p>2$ prím, ezért $(n,c(x))$ nem lehet III-as, IV-es, V-ös vagy VI-os tipusú speciális pár.

Abban az esetben, ha $(n,c(x))$ I-es tipusú speciális pár, akkor

$$c(x)=p(x)(p(x)+1)\cdots(p(x)+n-1)=\psi(p(x)).$$

Mivel feltettük, hogy $n>2$, így $n=p$ következik. Ekkor

$$c(x)=\delta\left(x\right)\left(\delta\left(x\right)+1\right)\cdots\left(\delta\left(x\right)+p-1\right),$$

ahol $\delta(x)\in\mathbb{Q}[x]$ lineáris. Most (2.36)-ból kapjuk, hogy

$$\frac{b}{p!}\delta\left(\binom{x}{m}\right)\left(\delta\left(\binom{x}{m}\right)+1\right)\cdots\left(\delta\left(\binom{x}{m}\right)+p-1\right)= \\ =\frac{b}{p!}y(y-1)\cdots(y-p+1).$$

Világos, hogy ha $\delta\left(x\right)\in\mathbb{Z}[x]$, akkor

$$x\geq m,\qquad y=\delta\left(\binom{x}{m}\right)+p-1$$

megoldása (2.36)-nak. Így a 2.8. Tétel *ii*) esetében valóban van végtelen sok egész megoldás.

Vizsgáljuk most azt az esetet, amikor $(n,c(x))$ II-es tipusú speciális pár. Ekkor a 2.8. Lemmából következik, hogy

(2.49)
$$n=2p \text{ és } F(x)=\frac{b}{(2p)!}\left(\delta\left(x\right)-\frac{1}{4}\right)\left(\delta\left(x\right)-\frac{9}{4}\right)\cdots\left(\delta\left(x\right)-\frac{(2p-1)^2}{4}\right),$$

ahol $\delta(x)\in\mathbb{Q}[x]$ lineáris polinom. (2.49)-et (2.36)-ba behelyettesítve kapjuk, hogy

$$\phi_{2p}\left(\delta\left(\binom{x}{m}\right)\right)=y(y-1)\cdots(y-2p+1), \tag{2.50}$$

ahol

$$\phi_{2p}(x) = \left(x - \frac{1}{4}\right)\left(x - \frac{9}{4}\right)\cdots\left(x - \frac{(2p-1)^2}{4}\right),$$

és $\delta(x) \in \mathbb{Q}[x]$ lineáris. Mivel

$$y(y-1)\cdots(y-2p+1) = \phi_{2p}\left(\left(y - p + \frac{1}{2}\right)^2\right),$$

ebből következik, hogy a (2.50)-nek csak abban az esetben van végtelen sok egész megoldása, ha a

$$4\delta\left(\binom{x}{m}\right) = (2y-2p+1)^2$$

egyenletnek is van végtelen sok egész megoldása. Azonban a 2.10. Lemmából tudjuk, hogy ez csak akkor lehetséges, ha $m = 1$, 2 vagy 4. Ezen esetek mindegyikében megadunk egy-egy olyan konkrét egyenletet, nevezetesen a (2.54), (2.55) és a (2.56) egyenleteket, amelyeknek van végtelen sok megoldása.

Ezek után foglalkozzunk az $\underline{n = 2}$ esettel. Most (2.36)-ból az alábbi egyenletre jutunk:

$$8F\left(\binom{x}{m}\right) + b = b\,(2y-1)^2. \tag{2.51}$$

Ezt az egyenletet írhatjuk

$$H\left(\binom{x}{m}\right) := 8a_p \prod_{i=1}^{t}\left(\binom{x}{m} - \alpha_i\right)^{r_i} = b\,(2y-1)^2, \tag{2.52}$$

alakban, ahol $\alpha_i \neq \alpha_j$, ha $i \neq j$. Mivel a $F(x)$ polinom fokszáma páratlan prím, ezért biztos, hogy létezik egy olyan $k \in \{1, 2, \ldots, t\}$ index, amire r_k páratlan. Ismét felhasználva a 2.10. Lemmát arra a következtetésre jutunk, hogy eltekintve az $m = 1$ vagy 2, $m = 3$ és $\alpha_k = \pm\sqrt{3}/27$, $m = 4$ és $\alpha_k = -1/24$ vagy $3/128$, $m = 6$ és $\alpha_k = -2/243 \pm 7\sqrt{7}/1215$ esetektől, (2.52) bal oldalán található polinomnak lesz legalább három páratlan multiplicitású gyöke. Ekkor viszont a 2.9. Lemmából következik, hogy ezen esetek kivételével a (2.36)-nak csak véges sok egész megoldása van. Az $m = 1$, 2 és 4 esetekben megadunk végtelen sok megoldással rendelkező egyenleteket, lásd a (2.57), (2.58) és (2.59) egyenleteket.

Az $m=3$ és $\alpha_k=\pm\sqrt{3}/27$, illetve az $m=6$ és $\alpha_k=-2/243\pm 7\sqrt{7}/1215$ esetekben megmutatjuk, hogy csak véges sok megoldás lehetséges. Valójában ezt csak az $m=3$ és $\alpha_k=\sqrt{3}/27$ esetben fogjuk megmutatni, a maradék három esetben a bizonyítás teljesen hasonló módon történik.

Tegyük fel tehát, hogy $m=3$ és $\alpha_k=\sqrt{3}/27$. Ha létezik egy olyan $j\in\{1,2,\dots,t\}\setminus\{k\}$ index, amelyre r_j páratlan (2.52)-ben, akkor mivel az indexek összege páratlan, azt a következtetést vonhatjuk le, hogy a (2.52) bal oldalán található polinomnak van legalább három páratlan multiplicitású gyöke. De ekkor a 2.9. Lemmából tudjuk, hogy csak véges sok megoldás lehetséges. Így tehát azt kapjuk, hogy amennyiben a (2.52) egyenletnek van végtelen sok megoldása, akkor eltekintve r_k-tól, az összes r_i kitevő (2.52)-ben páros. Mivel $\sqrt{3}/27$ definiáló főpolinomja $f(x)=x^2-1/243$ és $\sqrt{3}/27$ gyöke a $H(x)\in\mathbb{Q}[x]$ polinomnak, így

$$H(x)=8a_pf(x)^{r_k}H_1(x), \tag{2.53}$$

ahol $H_1(x)\in\mathbb{Q}[x]$ és $f(x)$ relatív prímek. Ebből viszont az következik, hogy $-\sqrt{3}/27$ szintén gyöke $H(x)$-nek, mégpedig szintén r_k multiplicitással, azaz páratlan multiplicitással. Ez az ellentmondás az mutatja, hogy csak véges sok megoldás van.

A következő példákban olyan kivételes egyenletekre adunk példákat, amelyeknek végtelen sok egész megoldása van abban az esetben, amikor $(n,c(x))$ II-es tipusú speciális pár vagy $n=2$.

<u>$(n,c(x))$ II-es tipusú speciális pár, $n=2p$, $m=1$:</u> A

$$\frac{b}{(2p)!}\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}-\frac{9}{4}\right)\cdots\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}-\frac{(2p-1)^2}{4}\right)=b\binom{y}{2p} \tag{2.54}$$

egyenletnek végtelen sok egész megoldása van, nevezetesen

$$y\geq 2p \quad \text{tetszőleges egész}\ , \quad x=(2y-2p)(y-p+1)\,.$$

<u>$(n,c(x))$ II-es tipusú speciális pár, $n=2p$, $m=2$:</u> A

$$\frac{b}{(2p)!}\left(\frac{1}{4}\binom{x}{2}+\frac{15}{4}-\frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{4}\binom{x}{2}+\frac{15}{4}-\frac{9}{4}\right)\cdots \\ \cdots\left(\frac{1}{4}\binom{x}{2}+\frac{15}{4}-\frac{(2p-1)^2}{4}\right)=b\binom{y}{2p} \tag{2.55}$$

egyenlet esetén

$$x=\frac{a_{2w+1}+1}{2},\quad y=\frac{b_{2w+1}-2}{4}+p,\qquad w=0,1,\ldots$$

egész megoldások, ahol $(a_0,b_0)=(3,8)$, $(a_{w+1},b_{w+1})=(3a_w+4b_w,2a_w+3b_w)$.

$(n,c(x))$ II-es tipusú speciális pár, $n=2p$, $m=4$: A

$$\frac{b}{(2p)!}\left(6\binom{x}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\right)\left(6\binom{x}{4}+\frac{1}{4}-\frac{9}{4}\right)\cdots \\ \cdots\left(6\binom{x}{4}+\frac{1}{4}-\frac{(2p-1)^2}{4}\right)=b\binom{y}{2p} \tag{2.56}$$

egyenletnek az

$$x\geq 4\quad \text{tetszőleges },\quad y=\frac{x^2-3x+2p}{2}$$

egész számok végtelen sok egész megoldását adják.

$n=2$, $m=1$: A

$$\frac{b}{2}\left[\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\right)\left(2^kx^k+\cdots+2x+1\right)^2-\frac{1}{4}\right]=b\binom{y}{2} \tag{2.57}$$

egyenletnek

$$x=\frac{(2w+1)^2-1}{2},\quad y=\frac{(2w+1)\left(2^kx^k+\cdots+2x+1\right)+1}{2},\ w=0,1,\ldots,$$

ahol $k=(p-1)/2$, egész megoldásai.

$n=2,\ m=2$: A

$$\frac{b}{2}\left[\left(\frac{1}{4}\binom{x}{2}+\frac{15}{4}\right)\left(2^k\binom{x}{2}^k+\cdots+2\binom{x}{2}+1\right)^2-\frac{1}{4}\right]=b\binom{y}{2} \tag{2.58}$$

egyenletnek az alábbi egészek végtelen sok megoldását adják:

$$x=\frac{a_{2w+1}+1}{2},\quad y=\frac{b_{2w+1}\left(2^k\binom{x}{2}^k+\cdots+2\binom{x}{2}+1\right)+2}{4},\qquad w=0,1,\ldots,$$

ahol $k=(p-1)/2$, és $(a_0,b_0)=(3,8)$, $(a_{w+1},b_{w+1})=(3a_w+4b_w,2a_w+3b_w)$.

$n=2,\ m=4$: A

$$\frac{b}{2}\left[\left(6\binom{x}{4}+\frac{1}{4}\right)\left(2^k\binom{x}{4}^k+\cdots+2\binom{x}{4}+1\right)^2-\frac{1}{4}\right]=b\binom{y}{2} \tag{2.59}$$

egyenletnek van végtelen sok egész megoldása, például

$$x\geq 4\quad\text{tetszőleges},\quad y=\frac{\left(x^2-3x+1\right)\left(2^k\binom{x}{4}^k+\cdots+2\binom{x}{4}+1\right)+1}{2},$$

ahol $k=(p-1)/2$. □

3 HATVÁNYÖSSZEGEK POLINOMÉRTÉKEI

3.1 BEVEZETÉS

Ebben a fejezetben az

$$S_m(x) = g(y),\ x, y \text{ pozitív egész ismeretlenek,} \tag{3.1}$$

diofantikus egyenlet megoldásszámának vizsgálatával foglalkozunk, ahol $g(y)$ egy legalább harmadfokú, racionális együtthatós polinom, m tetszőleges, adott pozitív egész, és

$$S_m(x) = 1^m + 2^m + \cdots + x^m.$$

Schäffer [57] 1956-ban egy ineffektív végességi eredményt nyert a (3.1) egyenletre vonatkozóan abban a speciális esetben, amikor $g(y) = y^n$. Megmutatta, hogy ha (m, n) különbözik az $(1, 2)$, $(3, 2)$, $(3, 4)$ és $(5, 2)$ pároktól, úgy $g(y) = y^n$ mellett (3.1)-nek csak véges sok megoldása van. Ezen eredmény effektív változatát Győry, Tijdeman és Voorhove [28] bizonyították be, akik sokkal általánosabban vizsgálták Schäffer egyenletét abból a szempontból, hogy nem csak az x, y változókat tekintették ismeretlennek, hanem az n kitevőt is. Később eredményük számos általánosítása és kiterjesztése látott napvilágot, lásd például a [13], [15], [17], [21], [31], [42], [70]-[73] publikációkat, és az ott megadott hivatkozásokat. Nemrégiben Jacobson, Pintér és Walsh [30], illetve Bennett, Győry és Pintér [4] $g(y) = y^n$ esetén $n = 2$, $m \leq 58$ páros pozitív egész, illetve tetszőleges $n \geq 2$ és $m \leq 11$ értékek mellett meghatározták (3.1) összes pozitív egész x, y megoldását. A fenti vizsgálatok összefoglaló leírása megtalálható Győry és Pintér [27] áttekintő cikkében.

Egy másik irányban Bilu, Brindza, Kirschenhofer, Pintér és Tichy [7] 2002-ben bebizonyították, hogy $g(y) = y(y-1)\cdots(y-(n-1))$ esetén a (3.1) egyenletnek csak véges sok x, y egész megoldása van, feltéve, hogy $m \geq 1$, $n \geq 2$ és $(m, n) \neq (1, 2)$.

Disszertációnk ezen részében, a 3.1. Tételünkben teljes általánosságban jellemezni fogjuk azokat a pozitív m egészeket és $g(y) \in \mathbb{Q}[y]$ polinomokat, amelyek esetén (3.1)-nek lehet végtelen sok x, y egész megoldása. Továbbá, minden ilyen lehetséges $(m, g(y))$ párhoz megadunk olyan (3.1) alakú diofantikus egyenletet, amelyik ténylegesen végtelen sok x, y egész megoldással rendelkezik. Ezen eredményünk egy alkalmazásaként a 3.2. Tételünkben meghatározzuk az összes olyan m pozitív egész számot, és $F(x)$ egész együtthatós, lineáris, illetve páratlan prímfokszámú polinomot, amelyekre az

$$S_m(x) = F\left(\binom{y}{n}\right)$$

egyenletnek csak véges sok x, y egész megoldása lehet.

A 3.1. és 3.2. Tételeinkből lényegében speciális esetként adódnak Schäffer [57] és Bilu, Brindza, Kirschenhofer, Pintér és Tichy [7] fent említett nevezetes tételei. Mind a két eredményünk ineffektív, ami annak a következménye, hogy a bizonyításokban felhasználjuk Bilu és Tichy [9] $f(x) = g(y)$ típusú diofantikus egyenletekre vonatkozó ineffektív végességi tételét.

A jelen fejezet eredményeit a [47] dolgozatunkban publikáltuk.

3.2 EREDMÉNYEK

A fejezet eredményeinek ismertetéséhez vezessünk be néhány jelölést, elnevezést. A továbbiakban $\delta(x) \in \mathbb{Q}[x]$ lineáris, racionális együtthatós polinomot, $q(x) \in \mathbb{Q}[x]$ pedig nem azonosan nulla racionális együtthatós polinomot fog jelölni. Mint ismeretes, $S_m(x) = 1^m + 2^m + \cdots + x^m$ x-ben egy $m+1$-ed fokú racionális együtthatós polinom, amelyre igaz, hogy páratlan m esetén felírható

$$S_m(x) = \psi_m\left((x + 1/2)^2\right)$$

alakban, ahol $\psi_m(x) \in \mathbb{Q}[x]$. Definiáljunk most úgynevezett speciális típusú $(m, g(x))$ párokat az alábbi módon:

- I-es speciális típus: $(m, S_m(q(x)))$, ahol $q(x)$ nem konstans polinom.
- II-es speciális típus: m páratlan és $g(x) = \psi_m\left(\delta(x)\, q(x)^2\right)$.
- III-as speciális típus: m páratlan és $g(x) = \psi_m\left(c\delta(x)^t\right)$, ahol $c \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$, $t \geq 3$ páratlan egész.

- IV-es speciális típus: m páratlan és $g(x) = \psi_m\left(\left(a\delta\left(x\right)^2 + b\right) q(x)^2\right)$, ahol $a, b \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$.
- V-ös speciális típus: m páratlan és $g(x) = \psi_m\left(q(x)^2\right)$.
- VI-os speciális típus: $m = 3$ és $g(x) = \delta(x)q(x)^2$.
- VII-es speciális típus: $m = 3$ és $g(x) = q(x)^2$.

3.1. Tétel *Legyen m egy tetszőleges pozitív egész és $g(x) \in \mathbb{Q}[x]$ egy legalább harmadfokú polinom. Ekkor az*

$$S_m(x) = g(y) \tag{3.2}$$

egyenletnek csak véges sok x, y egész megoldása van, kivéve, ha az $(m, g(x))$ pár speciális típusú. Továbbá, minden ilyen kivételes esetben meg lehet választani a $\delta(x)$, $q(x)$ polinomokat és az a, b, c, t paramétereket úgy, hogy a megfelelő $g(x)$ polinom és m egész mellett a (3.2) *egyenletnek legyen végtelen sok x, y egész megoldása.*

Mint láthatjuk, a 3.1. Tételben jellemezzük az összes olyan $(m, g(y))$ párt, amelyek mellett (3.2)-nek lehet végtelen sok megoldása. Így speciális esetekben, rögzített m és $g(y)$ mellett, csak azt kell megvizsgálni, hogy a $g(y)$ polinom lehet-e a tételben felsorolt alakú.

Amennyiben speciálisan $g(y) = F\left(\binom{y}{n}\right)$ alakú, ahol F racionális együtthatós polinom és $n \geq 1$ adott egész szám, úgy a 3.1. Tételünkből a következő pontosabb állítást vezetjük le.

3.2. Tétel *Legyen $F(x) \in \mathbb{Q}[x]$ racionális együtthatós p-ed fokú polinom, ahol $p = 1$ vagy $p \geq 3$ prímszám. Ekkor az*

$$S_m(x) = F\left(\binom{y}{n}\right) \tag{3.3}$$

egyenletnek, ahol $n > 2$ ha $p = 1$, csak véges sok egész megoldása van, eltekintve az alábbi kivételektől:

- *$p = 1$ és $(m, n) \in \{(1, 4), (2, 3), (3, 4)\}$,*
- *$F(x) = S_m(\delta(x))$, ahol $p \geq 3$, $m = p - 1$ és $\delta(x) \in \mathbb{Q}[x]$ lineáris,*
- *$F(x) = \psi_m(\delta(x))$ és $n = 1$, 2 vagy 4, ahol $\delta(x) \in \mathbb{Q}[x]$ lineáris,*

- *$m = 3$, $F(x) = \delta(x)q(x)^2$ és $n = 1$, 2 vagy 4, ahol $\delta(x) \in \mathbb{Q}[x]$ lineáris.*

Az $F(x) = n!x$ speciális választás mellett a 3.2. Tételből azt kapjuk, hogy ha $m \geq 1$, $n > 2$ és $(m,n) \neq (1,4), (2,3), (3,4)$, akkor az

$$S_m(x) = y(y-1)\cdots(y-(n-1)) \tag{3.4}$$

egyenletnek csak véges sok x, y egész megoldása van. Ez lényegében Bilu, Brindza, Kirschenhofer, Pintér és Tichy (3.4) egyenletre vonatkozó [7]-beli eredménye. Abban az esetben pedig, ha $F(x) = x^p$ és $n = 1$, a 3.2. Tétel lényegében visszaadja Schäffer [57] 1956-os végességi állítását az $S_m(x) = y^n$ egyenletre vonatkozóan.

3.3 SEGÉDEREDMÉNYEK

A bizonyításokban lényeges szerepet fog játszani Bilu és Tichy általános ineffektív végességi kritériuma $f(x) = g(y)$ alakú diofantikus egyenletekre vonatkozóan. Ahhoz, hogy kimondjuk ezt a kritériumot, definiálunk úgynevezett standard párokat. Legyenek a, b nullától különböző racionális számok.

A *első standard pár:* $(x^t, ax^r q(x)^t)$ vagy fordítva $(ax^r q(x)^t, x^t)$, ahol $0 \leq r < t$, $(r,t) = 1$ és $r + \deg q(x) > 0$.

A *második standard pár:* $\left(x^2, \left(ax^2 + b\right) q(x)^2\right)$ (vagy fordítva).

Jelölje $D_k(x,a)$ a k-adik Dickson polinomot, amit a következőképpen definiálunk:

$$D_k(x,a) = \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor} \frac{k}{k-i} \binom{k-i}{i} (-a)^i \, x^{k-2i}. \tag{3.5}$$

A *harmadik standard pár:* $\left(D_k(x,a^t), D_t(x,a^k)\right)$, ahol $(k,t) = 1$.

A *negyedik standard pár:* $\left(a^{-k/2} D_k(x,a), b^{-t/2} D_t(x,b)\right)$, ahol $(k,t) = 2$.

A *ötödik standard pár:* $\left(\left(ax^2 - 1\right)^3, 3x^4 - 4x^3\right)$ (vagy fordítva).

A következő tétel Bilu és Tichy [9] fő eredménye.

3.1. Lemma *Legyenek $f(x)$, $g(x) \in \mathbb{Q}[x]$ nem konstans polinomok. Tegyük fel, hogy az $f(x) = g(y)$ egyenletnek létezik végtelen sok x, y egész megoldása. Ekkor $f(x) = \varphi\left(f_1\left(\lambda(x)\right)\right)$ és $g(x) = \varphi\left(g_1\left(\mu(x)\right)\right)$, ahol $\lambda(x)$, $\mu(x) \in \mathbb{Q}[x]$ lineáris polinomok, $\varphi(x) \in \mathbb{Q}[x]$, és $(f_1(x), g_1(x))$ valamilyen standard pár.*

Azt mondjuk, hogy egy $F(x) \in \mathbb{C}[x]$ polinom *felbontható*, ha felírható $F(x) = G_1(G_2(x))$ alakban, ahol $G_1(x)$, $G_2(x) \in \mathbb{C}[x]$. A felbontás *nem triviális*, ha $\deg G_1(x)$, $\deg G_2(x) > 1$. Két $F(x) = G_1(G_2(x))$ és $F(x) = H_1(H_2(x))$ felbontást *ekvivalensnek* nevezünk, ha létezik egy $t(x) \in \mathbb{C}[x]$ lineáris polinom úgy, hogy $G_1(x) = H_1(t(x))$ és $H_2(x) = t(G_2(x))$. A továbbiakban az egyszerűség kedvéért azt mondjuk, hogy a $F(x)$ polinom *felbontható*, ha létezik nem triviális felbontása, és *felbonthatatlan* egyébként. A következő két lemma Biluéktól származik [7]. Az első az n-edik Bernoulli polinom felbonthatóságáról szól. Az n-edik Bernoulli polinom $B_n(x)$ a következő formulával van definiálva:

$$te^{tx}/\left(e^t - 1\right) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n(x)t^n/n!.$$

Legyen $B_n = B_n(0)$.

3.2. Lemma *$B_n(x)$ felbonthatatlan minden páratlan n esetén. Ha $n = 2m$ páros, akkor pedig $B_n(x)$ bármely nem triviális felbontása ekvivalens a $B_n(x) = \widetilde{B}_m\left((x-1/2)^2\right)$ felbontással, ahol $\widetilde{B}_m(x) \in \mathbb{Q}[x]$ egy m-ed fokú felbonthatatlan polinom.*

A következő eredmény egy technikai jellegű lemma, amire szintén szükségünk lesz a bizonyításoknál.

3.3. Lemma *Legyen a_1, b_1, $c_1 \in \mathbb{Q}\backslash\{0\}$ és a_0, b_0, $c_0 \in \mathbb{Q}$. Ekkor az $S_m(a_1x+a_0)$ polinom nem lehet sem $b_1x^q + b_0$ alakú, ahol $q \geq 3$, sem pedig $c_1D_k(x,a) + c_0$ alakú, ahol $D_k(x,a)$ a k-adik Dickson polinom $k > 4$-gyel és $a \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$.*

A most következő lemma egyszerű következménye a 3.2. Lemmának és az alábbi jól ismert összefüggésnek:

$$S_m(x) = (B_{m+1}(x+1) - B_{m+1})/(m+1). \tag{3.6}$$

3.4. Lemma *Páros m esetén az $S_m(x)$ polinom felbonthatatlan. Amikor $m = 2k-1$ pozitív páratlan egész, akkor bármely nem triviális felbontása $S_m(x)$-nek ekvivalens az*

$$S_m(x) = \psi_m\left(\left(x + \frac{1}{2}\right)^2\right) \tag{3.7}$$

felbontással, ahol $\psi_m(x) = t(\widetilde{B}_k(x))$, $t(x) = (x - B_{m+1})/(m+1)$, továbbá $\widetilde{B}_k(x)$ a 3.2. Lemmában megadott polinom.

A következő két lemmából azt tudhatjuk meg, hogy a $B_m(x)$ és a $\psi'_m(x)$ polinomoknak van legalább egy nem-valós gyökük, feltéve, hogy $m \geq 6$.

3.5. Lemma *Tegyük fel, hogy $m \geq 6$. Ekkor az m-edik $B_m(x)$ Bernoulli polinomnak van nem-valós gyöke.*

3.6. Lemma *Ha $m > 6$ páratlan egész, akkor mind a $\psi'_m(x)$, mind a $\psi'_m(ax^2+b)$ polinomnak van nem-valós gyöke, ahol a, b racionális számok és $a \neq 0$.*

Egy $P(x) \in \mathbb{C}[x]$ polinom esetén a c komplex számot a polinom *extrémumának* nevezzük, ha a $P(x) - c$-nek van többszörös gyöke. Ekkor, ha $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ jelöli a $P(x) - c$ polinom különböző gyökeinek a multiplicitását, akkor azt mondjuk, hogy c P-típusa $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s)$. A 3.7. Lemma a Dickson polinomok bizonyos tulajdonságáról szól. A lemma bizonyítása végett l. például [6, Proposition 3.3].

3.7. Lemma *Tegyük fel, hogy $a \neq 0$, $k \geq 3$. Ekkor a $D_k(x, a)$ polinomnak pontosan két extrémuma van, nevezetesen $\pm 2a^{\frac{k}{2}}$. Ha k páratlan, akkor mind a két extrémum (1,2,2,...,2) P-típusú. Ha k páros, akkor viszont $2a^{\frac{k}{2}}$ P-típusa (1,1,2,...,2), míg $-2a^{\frac{k}{2}}$ P-típusa (2,2,...,2).*

A következő lemma Ping-Zhi egy eredménye [39].

3.8. Lemma *Legyenek $a \neq 0$, $b \neq 0$, c és $m \geq 3$ egész számok. Ekkor eltekintve azon esetektől amikor $m = 4, c/a = -1/24$ vagy $3/128$, $r = 2$ és b/a nem egy teljes négyzet, az*

$$a\binom{x}{m} = by^r + c \tag{3.8}$$

egyenlet minden x, $y > 1$, $r > 1$ egész megoldására teljesül, hogy

$$\max(|\, x \,|, y, r) < C_1,$$

ahol C_1 egy effektíve kiszámítható konstans, ami csak az a, b, c és m értékektől függ.

A most következő két lemma Brillhart-tól származik [11]. Ezen lemmák az m-edik $B_m(x)$ Bernoulli polinom néhány fontos tulajdonságáról szólnak.

3.9. Lemma *Páratlan m esetén $B_m(x)$-nek nincs többszörös gyöke. Páros m esetén x^2-x-b lehet az egyetlen polinom, amelyik többszörös faktora $B_m(x)$-nek $\mathbb{Q}$ felett, ahol b egy pozitív páratlan egész.*

3.10. Lemma *Valós b mellett $B_m(x)$-nek akkor és csak akkor van $\frac{1}{2} + \frac{bi}{2}$ alakú gyöke, ha m páratlan és $b = 0$.*

3.4 BIZONYÍTÁSOK

A bizonyításokat a 3.5. és a 3.6. Lemma bizonyításával kezdjük.

A 3.5. Lemma bizonyítása. Könnyen ellenőrizhető, hogy a $B_6(x)$ polinomnak van nem-valós gyöke. Legyen $m \geq 6$ és tegyük fel, hogy az állítás igaz erre az m-re. Megmutatjuk, hogy ekkor az állítás $m+1$-re is igaz lesz. Ha ugyanis indirekt módon feltesszük, hogy $B_{m+1}(x)$-nek csak valós gyöke van, akkor a 3.9. Lemmából azt kapjuk, hogy a

$$B'_{m+1}(x) = (m+1)B_m(x)$$

polinom minden gyöke valós szám, ami nyilván ellentmondás. □

A 3.6. Lemma bizonyítása. Mivel

$$S_m(x) = \frac{B_{m+1}(x+1) - B_{m+1}}{m+1} = \psi_m\left(\left(x + \frac{1}{2}\right)^2\right), \tag{3.9}$$

ebből következik, hogy

$$B_m\left(x + \frac{1}{2}\right) = S'_m\left(x - \frac{1}{2}\right) = 2x\psi'_m\left(x^2\right). \tag{3.10}$$

A 3.5. Lemma alapján $B_m(x+1/2)$-nek van nem-valós gyöke, azaz

$$\exists\, c, d \in \mathbb{R} : d \neq 0 \text{ úgy, hogy } \psi'_m\left((c+di)^2\right) = \psi'_m\left(c^2 - d^2 + 2cdi\right) = 0. \tag{3.11}$$

Ha $c = 0$, akkor (3.10) és (3.11) tudjuk, hogy $B_m(1/2 + di) = 0$. Viszont ez ellentmond a 3.10. Lemmának. Ezáltal $c \neq 0$, továbbá

$$\psi'_m(x) = A \prod_{j=1}^{\frac{m-1}{2}} (x - \alpha_j), \tag{3.12}$$

ahol $\alpha_1 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ és $A \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$. Ebből viszont könnyen látható, hogy

$$\psi_m'\left(ax^2+b\right)=A\prod_{j=1}^{\frac{m-1}{2}}\left(ax^2+b-\alpha_j\right), \tag{3.13}$$

amiből kapjuk, hogy $x=\sqrt{(\alpha_1-b)/a}$ egy nem-valós gyöke $\psi_m'\left(ax^2+b\right)$-nek. □

A 3.1. Tétel bizonyítása. Legyen $g(x)\in\mathbb{Q}[x]$ legalább harmadfokú racionális együtthatós polinom. Tegyük fel, hogy a (3.2) egyenletnek van végtelen sok x, y egész megoldása. Ekkor a 3.1. Lemma alapján léteznek $\lambda(x)$, $\mu(x)$, $\varphi(x)$, $f_1(x)$, $g_1(x)\in\mathbb{Q}[x]$ polinomok, amelyek közül $\lambda(x)$, $\mu(x)$ lineáris, úgy hogy

$$S_m(x)=\varphi(f_1(\lambda(x))),\quad \text{és}\quad g(x)=\varphi(g_1(\mu(x))), \tag{3.14}$$

ahol $(f_1(x),g_1(x))$ standard pár. Mivel $\deg S_m(x)=m+1$, így a 3.4. Lemmából kapjuk, hogy $\deg\varphi(x)=1$ vagy $(m+1)/2$ vagy $m+1$.

Tegyük fel, hogy $\deg\varphi(x)=m+1$. Ekkor (3.14)-ből következik, hogy $\deg f_1(x)=1$. Tehát $S_m(x)=\varphi(t(x))$, ahol $t(x)\in\mathbb{Q}[x]$ lineáris polinom. Ha

$$t(x)=t_1x+t_0,\ \text{ akkor legyen}\quad t^{-1}(x)=\frac{1}{t_1}x-\frac{t_0}{t_1}.$$

Ekkor $S_m(t^{-1}(x))=\varphi(t(t^{-1}(x)))=\varphi(x)$. Az eddigiekből ezáltal azt kapjuk, hogy

$$g(x)=\varphi(g_1(\mu(x)))=S_m(t^{-1}(g_1(\mu(x))))=S_m(q(x)),$$

ahol $q(x)=t^{-1}(g_1(\mu(x)))\in\mathbb{Q}[x]$. Így tehát, ha $\deg\varphi(x)=m+1$, akkor (3.2)-nek csak akkor lehet végtelen sok egész megoldása, ha a $g(x)$ polinom $S_m(q(x))$ alakú, ahol $q(x)\in\mathbb{Q}[x]$. Nyilvánvaló, hogy ha $q(y)\in\mathbb{Z}$ végtelen sok y egész esetén, akkor ezen y-okra $x=q(y)$, y megoldásai lesznek (3.2)-nek.

A továbbiakban azt az esetet tekintjük, amikor $\deg\varphi(x)=1$. Legyen $\varphi(x)=\varphi_1x+\varphi_0$, ahol φ_1, $\varphi_0\in\mathbb{Q}$ és $\varphi_1\neq 0$. Vizsgáljuk meg most az öt standard párnak megfelelő eseteket egyenként.

Tegyük fel először, hogy (3.14)-ben $(f_1(x),g_1(x))$ I-es standard pár. Ekkor (3.14) alapján az következik, hogy vagy

i) $S_m\left(\lambda^{-1}(x)\right) = \varphi_1 x^t + \varphi_0$,

vagy

ii) $S_m\left(\lambda^{-1}(x)\right) = \varphi_1 a x^r q(x)^t + \varphi_0$, ahol $0 \le r < t$, $(r,t) = 1$ és $r + \deg q(x) > 0$.

Az első esetben a 3.3. Lemmából ellentmondást kapunk, ha $t = m+1 \ge 3$. A kimaradó $m = 1$ esetén i)-ből egy egyszerű számolás azt adja, hogy $\varphi_0 = -1/8$ és

$$g(x) = \frac{1}{2}\left(2\varphi_1 a\mu(x) q(\mu(x))^2\right) - \frac{1}{8} = \psi_1\left(\delta(x) q_1(x)^2\right),$$

ahol $\delta(x) = 2\varphi_1 a\mu(x)$ és $q_1(x) = q(\mu(x))$. Így ahhoz jutunk, hogy az $(m, g(x))$ pár II-es speciális típusú $m = 1$-gyel.

A második esetben $g\left(\mu^{-1}(x)\right) = \varphi_1 x^t + \varphi_0$. Ennek következtében, ha $t = \deg g(x) > 3$, akkor $r \le 3$ és a $q(x)$ polinom csak konstans polinom lehet. Ellenkező esetben ugyanis az $S_m\left(\lambda^{-1}(x)\right) - \varphi_0$ polinomnak lenne egy legalább négyszeres multiplicitású gyöke. Viszont a 3.9. Lemmából, illetve abból, hogy

$$\frac{d}{dx}\left(S_m(x) - \varphi_0\right) = \frac{d}{dx}\frac{B_{m+1}(x+1)}{m+1} = B_m(x+1)$$

azt kapjuk, hogy $S_m(x) - \varphi_0$-nak nem lehet olyan gyöke, aminek a multiplicitása legalább négy. Ismert, hogy ha egy algebrai egyenletben az ismeretlen változó helyett a változó egy lineáris polinomját írjuk, akkor az így kapott egyenletben a gyökök száma, illetve a gyökök multiplicitása ugyanaz marad, mint az eredeti egyenlet esetén. Ebből következik, hogy $S_m\left(\lambda^{-1}(x)\right) - \varphi_0$-nak nincs olyan gyöke, amelynek a multiplicitása legalább négy lenne. Ezek szerint

$$S_m\left(\lambda^{-1}(x)\right) = \varphi x^r + \varphi_0, \quad \text{ahol} \quad \varphi \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}. \tag{3.15}$$

Alkalmazva az 3.3. Lemmát kapjuk, hogy r csak 2 lehet. Ekkor az i) esethez hasonlóan $\varphi_0 = -1/8$, és így

$$g(x) = \varphi_1 \mu(x)^t - \frac{1}{8} = \frac{1}{2}\left(2\varphi_1 \mu(x)^t\right) - \frac{1}{8} = \psi_1\left(c\delta(x)^t\right), \tag{3.16}$$

ahol $t > 3$ páratlan. Azaz az $(m, g(x))$ pár III-as speciális típusú.

Ha $t = 3$, akkor

$$S_m(x) = \varphi_1 a \lambda(x)^r q(\lambda(x))^3 + \varphi_0, \tag{3.17}$$

ahol $r = 1$ vagy 2. Abban az esetben amikor $q(x)$ konstans polinom, valójában visszakapjuk (3.15)-öt, ezért feltehetjük, hogy $q(x)$ nem konstans polinom. Ekkor viszont

$$\begin{aligned} B_m(x+1) &= S_m'(x) = \\ &= \varphi_1 a\lambda(x)^{r-1}q(\lambda(x))^2\left(r\lambda'(x)q(\lambda(x)) + 3\lambda(x)q'(\lambda(x))\lambda'(x)\right). \end{aligned}$$

Ebből azt a következtetést vonhatjuk le, hogy $B_m(x)$-nek van egy többszörös faktora, nevezetesen $q(\lambda(x-1))$. Így a 3.9. Lemmából következik, hogy m páros és $q(\lambda(x-1))$ csak $x^2 - x - b$ alakú lehet, ahol b egy pozitív, páratlan egész. Összehasonlítva (3.17)-ben a fokszámokat azt kapjuk, hogy m értéke csak 6 lehet, míg $r = 1$. Ebben az esetben viszont az $S_6(x) - \varphi_0$ polinomnak lenne egy háromszoros multiplicitású gyöke, ami azt eredményezné, hogy $B_6(x)$-nek van kétszeres multiplicitású gyöke. Azonban $B_6(x)$ diszkriminánsa 31/1815156, ami nyilván ellentmondás.

Legyen most (3.14)-ben $(f_1(x), g_1(x))$ II-es standard pár. Ekkor vagy

i) $S_m\left(\lambda^{-1}(x)\right) = \varphi_1 x^2 + \varphi_0$

vagy

ii) $S_m\left(\lambda^{-1}(x)\right) = \varphi_1\left(ax^2 + b\right)q(x)^2 + \varphi_0$.

Az első esetben nyilván $m = 1$, $\varphi_0 = -1/8$. Ennek következtében

$$g(x) = \varphi_1(a\mu(x)^2 + b)q(\mu(x))^2 - \frac{1}{8} = \psi_1\left(\left(2\varphi_1 a\mu(x)^2 + 2\varphi_1 b\right)q(\mu(x))^2\right),$$

azaz az $(m, g(x))$ pár IV-es speciális típusú $m = 1$ értékkel. A második esetben $\deg g(x) = 2$. De ez nem lehet a tételünk feltételei miatt.

Vizsgáljuk most azt, amikor $(f_1(x), g_1(x))$ III-as standard pár. Most (3.14)-ből tudjuk, hogy

$$S_m\left(\lambda^{-1}(x)\right) = \varphi\left(f_1(x)\right) = \varphi_1 D_k(x, a^t) + \varphi_0. \tag{3.18}$$

Mivel $\deg D_k(x, a^t) = k$ és $\deg S_m\left(\lambda^{-1}(x)\right) = m + 1$, a 3.3. Lemmából adódik, hogy (3.18) nem lehetséges, ha $m > 3$. Amikor $m = 1$, (3.18)-ból következik, hogy

$$k = 2,\ \varphi_1 = \frac{1}{8u^2} \text{ és } \varphi_0 = \frac{a^t}{4u^2} - \frac{1}{8},$$

ahol $u \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$. Ezáltal

$$g(x) = \varphi_1 D_t(\mu(x), a^2) + \varphi_0 = \frac{1}{2}\left(\frac{D_t(\mu(x), a^2) + 2a^t}{4u^2}\right) - \frac{1}{8}.$$

A 3.7. Lemmából tudjuk, hogy a $D_t(\mu(x), a^2)$ polinomnak pontosan két extrémuma van: $\pm 2a^t$. Mivel most t páratlan, $-2a^t$ P-típusa $(1, 2, 2, \dots, 2)$. Ebből viszont következik, hogy $D_t(\mu(x), a^2) + 2a^t = \delta_1(x) q_1(x)^2$, ahol $\delta_1(x)$, $q_1(x) \in \mathbb{Q}[x]$ és $\deg \delta_1(x) = 1$. Ezért az $(m, g(x))$ pár most II-es speciális típusú $m = 1$-gyel, $\delta(x) = \delta_1(x)/4u^2$-tel és $q(x) = q_1(x)/2u$-val.

Ha $m = 2$, akkor $k = 3$, $(t, 3) = 1$, továbbá $S_2(x) = \varphi_1 D_3(\lambda(x), a^t) + \varphi_0$, amiből kiszámítható, hogy $\varphi_0 = 0$ és

$$2x(2x+1)(2x+2) = 24\varphi_1 D_t(\mu(y), a^3). \tag{3.19}$$

A 2.8. Lemmából levezethető, hogy ha (3.19)-nek van végtelen sok egész megoldása, akkor

$$24\varphi_1 D_t(\mu(y), a^3) = p(y)(p(y)+1)(p(y)+2), \quad \text{ahol } p(y) \in \mathbb{Q}[y]. \tag{3.20}$$

Azonban, (3.20)-ból azt olvashatjuk le, hogy $t = 3 \deg p(y)$, ami ellentmond annak, hogy $(t, 3) = 1$.

Végül, ha $m = 3$, akkor egyszerű számolással kapjuk (3.18), hogy $m = 3$, $k = 4$, t páratlan, $\varphi_0 = 2\varphi_1 a^{2t}$ és $g(x) = \varphi_1 \left(D_t(\mu(x), a^4) + 2a^{2t}\right)$. Ismét alkalmazva a 3.7. Lemmát azt kapjuk, hogy $(m, g(x) = \delta(x) q(x)^2)$ VI-os speciális típusú.

Legyen $(f_1(x), g_1(x))$ IV-es standard pár.
Ekkor

$$S_m\left(\lambda^{-1}(x)\right) = \varphi\left(f_1(x)\right) = \varphi_1 a^{-\frac{k}{2}} D_k(x, a) + \varphi_0, \text{ ahol } k \geq 2 \text{ páros.} \tag{3.21}$$

Viszont a 3.3. Lemma miatt ez csak akkor lehetséges, ha $m > 3$. Mivel k páros, ezért csak az $m = 1$, illetve az $m = 3$ esetekkel kell foglalkozni. Összehasonlítva a megfelelő együtthatókat (3.21)-ben kapjuk, hogy $m = 1$ esetén $\varphi_0 = 2\varphi_1 - 1/8$, míg $m = 3$ esetében $\varphi_0 = 2\varphi_1$. Felhasználva a 3.7. Lemmát az első esetben

$$\begin{aligned} g(x) &= \varphi_1 b^{-t/2} D_t(\mu(x), b) + \varphi_0 = \\ &= \varphi_1 b^{-t/2}\left(D_t(\mu(x), b) + 2b^{t/2}\right) - \frac{1}{8} = \psi_1\left(cq(x)^2\right), \end{aligned}$$

ahol $c = 2\varphi_1 b^{-t/2}$, a második esetben pedig

$$g(x) = \varphi_1 b^{-t/2} D_t(\mu(x), b) + \varphi_0 = \varphi_1 b^{-t/2}\left(D_t(\mu(x), b) + 2b^{t/2}\right) = \varphi_1 b^{-t/2} q(x)^2$$

következik. Könnyen látható, hogy mind a két esetben (3.2)-nek csak akkor lehet végtelen sok egész megoldása, ha a c és a $\varphi_1 b^{-t/2}$ racionális számok négyzet számok. Ekkor jutunk az V-ös, illetve a VII-es speciális típusokhoz.

Végül legyen $(f_1(x), g_1(x))$ V-ös standard pár.
Ekkor (3.14)-ből következik, hogy az alábbi két eset valamelyike fennáll:

i) $S_m\left(\lambda^{-1}(x)\right) = \varphi\left(f_1(x)\right) = \varphi_1\left(ax^2 - 1\right)^3 + \varphi_0$,

ii) $S_m\left(\lambda^{-1}(x)\right) = \varphi\left(f_1(x)\right) = \varphi_1\left(3x^4 - 4x^3\right) + \varphi_0$.

Mind a két esetben azt látjuk, hogy az $S_m\left(\lambda^{-1}(x)\right) - \varphi_0$ polinomnak van egy olyan gyöke, amelyiknek a multiplicitása legalább három. Mivel $\deg S_m(x) = m+1$, így az *i*) esetben $m = 5$, míg a *ii*) esetben $m = 3$. Az eddigiek alapján tehát az $S_m(x) - \varphi_0$ polinomnak is van legalább egy olyan gyöke, aminek a multiplicitása nagyobb, mint kettő. Viszont Brillhartnak az n-edik $B_n(x)$ Bernoulli polinomra vonatkozó 3.9. Lemmája és a

$$\frac{d}{dx}\left(S_m(x) - \varphi_0\right) = \frac{d}{dx}\frac{B_{m+1}(x+1)}{m+1} = B_m(x+1)$$

összefüggés miatt ez $m = 3$ és $m = 5$ esetén nem lehetséges.

Tekintsük most azt az esetet, amikor $\deg \varphi(x) = (m+1)/2$.

Nyilvánvaló, hogy ebben az esetben m páratlan, továbbá (3.14)-ből adódik, hogy $\deg f_1(x) = 2$. Ekkor viszont $(f_1(x), g_1(x))$ nem lehet V-ös standard pár. Továbbá, a 3.4. Lemmából tudjuk, hogy az $S_m(x)$ polinomnak létezik nem triviális felbontása és minden nem triviális felbontás ekvivalens az $S_m(x) = \psi_m\left((x+1/2)^2\right)$ felbontással, azaz létezik egy $u(x) = u_1 x + u_0$ lineáris polinom úgy, hogy

$$\varphi(x) = \psi_m(u(x)) \quad \text{és} \quad u\left(f_1(\lambda(x))\right) = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2. \tag{3.22}$$

Ismét vizsgáljuk meg a lehetséges $(f_1(x), g_1(x))$ standard párokat.

Tegyük fel tehát először, hogy (3.14)-ben $(f_1(x), g_1(x))$ I-es standard pár.

Legyen először $(f_1(x), g_1(x)) = (x^t, ax^r p(x)^t)$, ahol $0 \leq r < t$, $(r,t) = 1$ és $r + \deg p(x) > 0$. Mivel $\deg f_1(x) = 2$, ezért $(f_1(x), g_1(x)) = (x^2, axp(x)^2)$. Ha $\lambda(x) = \lambda_1 x + \lambda_0$, akkor (3.22)-ből kiszámíthatjuk, hogy $u(x) = (1/\lambda_1^2)x$, továbbá, hogy

$$g(x) = \psi_m(u(g_1(\mu(x)))) = \psi_m\left(\frac{a\mu(x)p(\mu(x))^2}{\lambda_1^2}\right). \tag{3.23}$$

Ha ekkor a $\delta(x)$ polinomot $\delta(x) = a\mu(x)/\lambda_1^2$ módon, a $q(x)$ polinomot pedig $q(x) = p(\mu(x))$ módon definiáljuk, akkor az $(m, g(x))$ pár pontosan II-es speciális típusú.

Itt jegyezzük meg, hogy amennyiben $(m, g(x))$ II-es speciális típusú, akkor a $\delta(x) \in \mathbb{Q}[x]$ és a $q(x) \in \mathbb{Q}[x]$ polinomokat meg lehet úgy választani, hogy a (3.2) egyenletnek legyen végtelen sok egész megoldása. Valóban, ha $\delta(y)$ végtelen sok egész y esetén racionális szám négyzete, és ezen y-okra $\sqrt{\delta(y)}q(y) - 1/2 \in \mathbb{Z}$, akkor $x = \sqrt{\delta(y)}q(y) - 1/2$, y egész megoldásai (3.2)-nek. Legyen például $\delta(x) = x$ és $q(x) = x^t + \cdots + x + 1/2$. Ekkor minden k egész esetén $x = (2k+1)q((2k+1)^2) - 1/2$ és $y = (2k+1)^2$ megoldásai (3.2)-nek.

A fordított esetben $(f_1(x), g_1(x)) = (ax^r p(x)^t, x^t)$, ahol $0 \leq r < t$, $(r,t) = 1$ és $r + \deg p(x) > 0$. Mivel $\deg f_1(x) = 2$, ezért két lehetőség adódik

i) $r = 0$, $t = 1$ és $\deg p(x) = 2$

vagy

ii) $r = 2$, $t > 2$ páratlan és $\deg p(x) = 0$.

i) esetén $g_1(x) = x$ és így

$$g(x) = \psi_m(u(g_1(\mu(x)))) = \psi_m(u(\mu(x))). \tag{3.24}$$

Ekkor az $(m, g(x))$ pár II-es speciális típusú, ahol most $\delta(x) = u(\mu(x))$ és $q(x) \equiv 1$. A *ii)* esetben (3.22)-ből következik, hogy $f_1(x) = bx^2$ és $u(x) = x/(b\lambda_1^2)$, ahol $b \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$. Így

$$g(x) = \psi_m(u(g_1(\mu(x)))) = \psi_m\left(\frac{(\mu(x))^t}{b\lambda_1^2}\right). \tag{3.25}$$

Könnyű látni, hogy ekkor az $(m, g(x))$ pár III-as speciális típusú $\delta(x) = \mu(x)$, $c = 1/(b\lambda_1^2)$ választással, ahol $t \geq 3$ páratlan.

Vegyük észre, hogy ha a $\delta(x) \in \mathbb{Q}[x]$ lineáris polinomot, a $c \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ racionális számot és a $t \geq 3$ páratlan egészt meg tudjuk választani oly módon, hogy $c\delta(y)^t$ végtelen sok egész y esetén legyen racionális szám négyzete és $\sqrt{c\delta(y)^t} - 1/2 \in \mathbb{Z}$ teljesüljön ezen y-okra, akkor (3.2)-nek lesz végtelen sok egész megoldása, nevezetesen $x = \sqrt{c\delta(y)^t} - 1/2$, y. Például, legyen $c = 1/4$, $t = 29$, $\delta(x) = x$, ekkor $x = -1/2 + (2k+1)^{29}/2$, $y = (2k+1)^2$ minden k egész esetén megoldása lesz (3.2)-nek.

Legyen most $(f_1(x), g_1(x))$ II-es standard pár.

Ekkor $(f_1(x), g_1(x)) = (x^2, (ax^2+b)p(x)^2)$ vagy fordítva. Ha $f_1(x) = (ax^2 + b)p(x)^2$, akkor $g_1(x) = x^2$ és $p(x)$ egy konstans polinom. Ennek következtében

$$g(x) = \psi_m(u(g_1(\mu(x)))) = \psi_m\left(u_1\mu(x)^2 + u_0\right). \tag{3.26}$$

Ez pedig pontosan azt jelenti, hogy az $(m, g(x))$ pár IV-es speciális típusú $q(x) \equiv$ 1-gyel. Abban az esetben, amikor $f_1(x) = x^2$, (3.22)-ből egyszerű számítás után kapjuk, hogy $u(x) = x/(\lambda_1^2)$. Így

$$g(x) = \psi_m(u(g_1(\mu(x)))) = \psi_m\left(\frac{\left(a\mu(x)^2 + b\right)p(\mu(x))^2}{\lambda_1^2}\right). \tag{3.27}$$

Amennyiben felhasználjuk a $\delta(x) = \mu(x)$, $q(x) = p(\mu(x))/\lambda_1$ jelölést, az alábbi egyenlőséghez jutunk:

$$g(x) = \psi_m\left(\left(a\delta(x)^2 + b\right)q(x)^2\right).$$

Ez pedig azt mutatja számunkra, hogy az $(m, g(x))$ pár IV-es speciális típusú. A II-es és a III-as speciális típusokhoz hasonlóan könnyen látható, hogy ha $\left(a\delta(y)^2 + b\right)q(y)^2$ racionális szám négyzete és $\sqrt{\left(a\delta(y)^2 + b\right)q(y)^2} - 1/2 \in \mathbb{Z}$ teljesül végtelen sok y egészre, akkor (3.2)-nek van végtelen sok x, y egész megoldása.

Legyen például $a = 8$, $b = -119$, $\delta(x) = 2x - 13$ és $q(x) \in \mathbb{Q}[x]$ egy olyan polinom, amelyre $q(x) - 1/2 \in \mathbb{Z}[x]$. Ekkor (3.2)-nek valóban van végtelen sok egész megoldása, nevezetesen:

$$x = \frac{2a_{2w+1}q(y) - 1}{2}, \quad y = \frac{b_{2w+1} + 26}{4}, \qquad w = 0, 1, \ldots,$$

ahol $(a_0, b_0) = (3,8)$, $(a_{w+1}, b_{w+1}) = (3a_w + 4b_w, 2a_w + 3b_w)$.

Legyen $(f_1(x), g_1(x))$ III-as standard pár.

Ebben az esetben $(f_1(x), g_1(x)) = (D_2(x, a^t), D_t(x, a^2))$, ahol t páratlan. Behelyettesítve (3.22)-be az $f_1(x) = x^2 - 2a^t$-t, azt kapjuk, hogy $u_1 = 1/\lambda_1^2$, illetve $u_0 = 2a^t/\lambda_1^2$, továbbá

$$g(x) = \psi_m(u(g_1(\mu(x)))) = \psi_m\left(\frac{D_t(\mu(x), a^2) + 2a^t}{\lambda_1^2}\right). \tag{3.28}$$

A 3.7. Lemmából tudjuk, hogy a $D_t(\mu(x), a^2)/\lambda_1^2$ polinomnak pontosan két extrémuma van, mégpedig: $\pm 2a^t/\lambda_1^2$. Mivel most t páratlan, azt is tudjuk, hogy mind a két extrémum $(1,2,2,\ldots,2)$ P-típusú. Az eddigiekből könnyen következik, hogy $g(x) = \psi_m(\delta(x)q(x)^2)$, ahol $\delta(x)$, $q(x) \in \mathbb{Q}[x]$ és $\deg\delta(x) = 1$. Azaz az $(m, g(x))$ pár II-es speciális típusú.

Végül tételezzük fel, hogy $(f_1(x), g_1(x))$ IV-es standard pár.

Most $(f_1(x), g_1(x)) = (a^{-1}D_2(x,a), b^{-t/2}D_t(x,b))$ páros t természetes számmal. Ismét (3.22)-ből kapjuk, hogy $u_1 = a/\lambda_1^2$, $u_0 = 2a/\lambda_1^2$ és

$$g(x) = \psi_m(u(g_1(\mu(x)))) = \psi_m\left(\frac{ab^{-t/2}D_t(\mu(x), b) + 2a}{\lambda_1^2}\right). \tag{3.29}$$

Most az $ab^{-t/2}D_t(\mu(x), b)/\lambda_1^2$ extrémumai $\pm 2b^{t/2}ab^{-t/2}/\lambda_1^2 = \pm 2a/\lambda_1^2$, továbbá a $-2a/\lambda_1^2$ extrémum $(2,2,\ldots,2)$ P-típusú a 3.7. Lemma következtében. Ezért a korábbiakhoz hasonlóan $g(x) = \psi_m(q(x)^2)$ és az $(m, g(x))$ pár V-ös speciális típusú. Ismét könnyű észrevenni, hogy ha itt $q(x) - 1/2 \in \mathbb{Z}[x]$, akkor (3.2)-nek van végtelen sok egész megoldása, például $(x,y) = (q(k) - 1/2, k)$, ahol $k \in \mathbb{Z}$.

Ezzel a tételünk bizonyítását befejeztük. $\square$

A 3.2. Tétel bizonyítása. Abban az esetben, ha $\deg F(x) = 1$ azaz a $F(x)$ polinom lineáris, a (3.3) egyenletünk

$$S_m(x) = a\binom{y}{n} + b \tag{3.30}$$

alakú, ahol $a \neq 0$, b racionális számok. Tegyük fel, hogy $n > 2$ és (3.30)-nak van végtelen sok x, y egész megoldása. Ekkor a 3.1. Tétel és a 2.8. Lemma szerint

azt tudjuk, hogy
(3.31)
$$\left(m, \frac{a}{n!}f_n(y)+b\right) \text{ speciális típusú és } \left(n, \frac{n!}{a}\left(S_m(x)-b\right)\right) \text{ speciális pár,}$$

ahol $f_n(x) = x(x-1)\cdots(x-(n-1))$. Hasonlítsuk most össze minden lehetséges (speciális típus, speciális pár) esetben a megfelelő polinomok fokszámait. Ekkor az alábbi táblázathoz jutunk, ahol C ellentmondást jelöl, p jelöli a 2.8. Lemmában a $p(x)$ polinom, míg q a 3.1. Tételben a $q(x)$ polinom fokszámát. A sorindexekben, illetve az oszlopindexekben a megfelelő $\left(m, \frac{a}{n!}f_n(y)+b\right)$ speciális típust, illetve $\left(n, \frac{n!}{a}\left(S_m(x)-b\right)\right)$speciális párt jelöljük.

	I	**II**	**III**	**IV**	**V**	**VI**
I	$p=q=1$ $n=m+1$	p=0, q=2 n=2(m+1)	C	p=0, q=1 n=m+1	p=q=1 n=m+1	m=1, n=4
II	p=2, q=0 m+1=2n	C	C	p=1, q=0 m+1=2n	p=2, q=0 m+1=2n	C
III	C	C	C	C	C	C
IV	p=1, q=0 n=m+1	p=0, q=1 n=2(m+1)	C	p=q=0 n=m+1	p=1, q=0 n=m+1	m=1, n=4 q=1
V	p=q=1 n=m+1	p=0, q=2 n=2(m+1)	C	p=0, q=1 n=m+1	p=q=1 n=m+1	m=1, n=4 q=2
VI	C	C	C	C	C	C
VII	m=3, n=4	m=3, n=8 p=0	C	m=3, n=4	m=3, n=4	C

1. Táblázat

Például, ha $\left(m, \frac{a}{n!}f_n(y)+b\right)$ II-es speciális típusú és $\left(n, \frac{n!}{a}\left(S_m(x)-b\right)\right)$ I-es speciális pár, akkor tudjuk, hogy

$$\frac{a}{n!}f_n(y)+b = \psi_m\left(\delta\left(x\right)q(x)^2\right) \text{ és } \frac{n!}{a}\left(S_m(x)-b\right) = \psi\left(p(x)\right). \tag{3.32}$$

Összehasonlítva a fokszámokat

$$n = \frac{m+1}{2}\left(2\deg q(x)+1\right) \text{ és } m+1 = n\deg p(x). \tag{3.33}$$

Ebből következik, hogy $2 = \deg p(x)\,(2\deg q(x)+1)$, amiből azonnal látszik, hogy $\deg q(x) = 0$, $\deg p(x) = 2$ és $m+1 = 2n$. Abban az esetben pedig, amikor $\left(m, \frac{a}{n!}f_n(y)+b\right)$ II-es speciális típusú és $\left(n, \frac{n!}{a}\left(S_m(x)-b\right)\right)$ II-es speciális pár, a fokszámok összahasonlítása után kapjuk, hogy

$$n = \frac{m+1}{2}\,(2\deg q(x)+1) \text{ és } m+1 = \frac{n}{2}\,(2\deg p(x)+1)\,,$$

amiből $4 = (2\deg q(x)+1)\,(2\deg p(x)+1)$ következik. Ez viszont nyílván nem lehetséges.

Ezek után azon esetekkel foglalkozunk, amelyeknél nem jutunk ellentmondásra a fokszámok összehasonlításából.

A speciális típusok és a speciális párok definíciójából, illetve az 1. Táblázatból láthatjuk, hogy a (II,I), (II,IV) és a (II,V) esetekben

$$\frac{ac}{n!}f_n'(cy+d) = \psi_m'(y)\,. \tag{3.34}$$

Mivel $f_n'(cy+d)$ minden gyöke valós, a 3.6. Lemmából azt a következtetést vonhatjuk le, hogy $m < 6$. Viszont ezen esetekben tudjuk azt is, hogy $m+1 = 2n$, ezért (m,n) csak az $(5,3)$ pár lehet, mert $n > 2$. Azonban, ha $m = 5$ és $n = 3$, akkor (3.34) nem teljesülhet, mert a $\psi_5'(y)$ polinomnak van racionális gyöke, míg az $f_3'(y)$ polinomnak csak irracionális gyökei vannak.

A (IV,I), (IV,IV), (IV,V), (V,I), (V,IV), (V,V) esetekben

$$\frac{ac}{n!}f_n'(cy+d) = \psi_m'\left(uy^2+v\right)2uy, \tag{3.35}$$

ahol c, d, u, $v \in \mathbb{Q}$ és $cu \neq 0$. Ismét használva a korábbi elvet és a 3.6. Lemmát kapjuk, hogy (m,n) csak $(3,4)$ vagy $(5,6)$ lehet. Ha $(m,n) = (5,6)$, akkor (3.35)-ből következik, hogy

$$\frac{ac}{n!}f_6'(cy+d) = \frac{uy}{48}\left(4(uy^2+v)-1\right)\left(12(uy^2+v)-7\right). \tag{3.36}$$

Ha ebbe az egyenlőségbe behelyettesítünk $y = 0$-t, akkor kapjuk, hogy $d = 5/2$. Továbbá, mivel $(15+\sqrt{105+24\sqrt{7}})/6$ gyöke $f_6'(y)$-nak, (3.36)-ból következik, hogy ekkor

$$\left(4\left(u\frac{105+24\sqrt{7}}{36c^2}+v\right)-1\right)\left(12\left(u\frac{105+24\sqrt{7}}{36c^2}+v\right)-7\right) = 0. \tag{3.37}$$

Viszont (3.37) $\sqrt{7}$ irracionalitása miatt nem teljesülhet. Ebből pedig az következik, hogy az (m,n) pár nem lehet $(5,6)$.

Ha az (I,I), (I,IV) és (I,V) eseteket tekintjük, akkor láthatjuk, hogy

$$\frac{a}{n!}f_n(cy+d)+b=S_m(y). \tag{3.38}$$

Ebből viszont egyszerűen következik, hogy

$$\frac{ac}{n!}f_n'(c(y-1)+d)=S_m'(y-1)=B_m(y). \tag{3.39}$$

De ekkor csak $m<6$ lehetséges a 3.5. Lemma miatt. Most $n=m+1$-t felhasználva arra következtethetünk, hogy az (m,n) pár csak $(2,3)$, $(3,4)$, $(4,5)$ vagy $(5,6)$ lehet. Tudjuk azonban, hogy 0, $1/2$ és 1 gyökei a $B_3(y)$ és a $B_5(y)$ polinomoknak. Ezen kívül nem nehéz ellenőrizni, hogy az $f_4'(y)$, $f_6'(y)$ és $f_5''(y)$ polinomok mindegyikének csak egy racionális gyöke van. Ezáltal (3.39)-ből következik, hogy $-c+d=d=-c/2+d$ és így $c=0$, ami nyilván ellentmondásra vezet. Ennek következtében az (m,n) pár nem lehet $(3,4)$, $(4,5)$ vagy $(5,6)$.

Most az (I,II), (IV,II), (V,II), (VII,II) eseteket vizsgálva könnyen látható, hogy ekkor

$$\frac{n!}{a}\left(S_m(x)-b\right)=\phi_n(cx+d). \tag{3.40}$$

(3.40)-ből egyszerűen adódik, hogy

$$B_m(x)=S_m'(x-1)=\frac{ac}{n!}\phi_n'(c(x-1)+d). \tag{3.41}$$

De a 3.5. Lemmából ismét azt a következtetést vonhatjuk le, hogy $m<6$, mert $\phi_n'(x)$ minden gyöke valós. Felhasználva, hogy ezen esetekben $n=2(m+1)$ azt kapjuk, hogy (m,n) csak $(1,4)$, $(2,6)$, $(3,8)$, $(4,10)$ vagy $(5,12)$ valamelyike lehet. Könnyen ellenőrizhető, hogy a $\phi_8'(x)$, $\phi_{12}'(x)$ és $\phi_{10}''(x)$ polinomok egyikének sincs racionális gyöke. Ugyanakkor viszont $B_{2k+1}(1/2)=0$ bármely $k\geq 0$-ra. De ez azt is jelenti, hogy (3.41)-ben (m,n) nem lehet $(3,8)$, $(4,10)$ vagy $(5,12)$. Abban az esetben, ha $m=2$ és $n=6$, összehasonlítva a $B_2(x)$ polinom és a $\phi_6'(c(x-1)+d)$ polinom gyökeit (3.41)-ben azt kapjuk, hogy $c=\pm 4\sqrt{21}/3$. De (3.41)-ben c racionális, ezért $(m,n)\neq(2,6)$.

Mindezek után minden kimaradó esetben, azaz amikor $(m, n) = (1, 4)$, $(2, 3)$, $(3, 4)$ megadunk egy konkrét egyenletet, amelyiknek van végtelen sok x, y egész megoldása.

(m,n)	EGYENLET	MEGOLDÁSOK
(1,4)	$S_1(x) = 3\binom{y}{4}+1$	$x = \frac{y^2-3y}{2}$, $y \geq 4$
(2,3)	$S_2(x) = \frac{1}{4}\binom{y}{3}$	$y = 2x + 2$, $x \geq 1$
(3,4)	$S_3(x) = 24\binom{y}{4} + 1$	$x = \frac{a_w-1}{2}$, $y = \frac{b_w+3}{2}$

Az előző táblázat utolsó sorában a_w és b_w az alábbi rekurzióval definiált: $(a_0, b_0) = (21, 15)$, továbbá

$$(a_{w+1}, b_{w+1}) = (3a_w + 4b_w, 2a_w + 3b_w),\ w = 0, 1, \ldots.$$

A lineáris eset vizsgálata után tegyük fel, hogy $p = \deg F(x) \geq 3$ prím, és a (3.3) egyenletnek van végtelen sok $y \geq n$, $x \geq 1$ egész megoldása. Világos, hogy ekkor az

$$S_m(x) = F(y) \tag{3.42}$$

egyenletnek szintén van végtelen sok egész megoldása. Ekkor a 3.1. Tételből következik, hogy $(m, F(x))$ valamilyen speciális típus. Mivel $\deg F(x) = p \geq 3$ prím, ezért a speciális típusok definíciója miatt $(m, F(x))$ csak akkor lehet speciális típusú, ha $m \in \{1, 3, p-1, 2p-1\}$.

Ha $m = 1$, akkor az egyenlet, amit vizsgálni kell

$$S_1(x) = 1 + 2 + \cdots + x = \binom{x+1}{2} = F\left(\binom{y}{n}\right) \tag{3.43}$$

alakú. Ekkor a 2.8. Tételből tudjuk, hogy (3.43)-nak csak akkor lehet végtelen sok egész megoldása, ha $n = 1$, 2 vagy 4. A 2.2 fejezetben mind a három esetben adtunk meg olyan konkrét egyenleteket, amelyeknek végtelen sok egész megoldása van.

$m = 3$ esetén valójában $F(x) = \delta(x)q(x)^2$, ahol $\delta(x)$, $q(x) \in \mathbb{Q}[x]$ és $\deg \delta(x) = 1$. Ekkor

$$(x(x+1))^2 = 4\delta\left(\binom{y}{n}\right) q\left(\binom{y}{n}\right)^2. \tag{3.44}$$

Most a 3.8. Lemmából tudjuk, hogy (3.44)-nek csak véges sok megoldása van, eltekintve az $n = 1$, 2 és 4 esetektől.

Az $m = p - 1$ eset csak akkor fordulhat elő, ha $F(x) = S_m(q(x))$, ahol $q(x)$ lineáris, racionális együtthatós polinom. Viszont ekkor az egyenletünk:

$$S_m(x) = S_m\left(q\left(\binom{y}{n}\right)\right). \tag{3.45}$$

Nyilván, abban az esetben, ha $q(x) \in \mathbb{Z}[x]$, akkor $x = q\left(\binom{y}{n}\right)$, $y \geq n$ megoldása (3.45)-nek.

Az utolsó, azaz az $m = 2p - 1$ esetben $F(x) = \psi_m(\delta(x))$, ahol $\delta(x)$ lineáris. Az eddigiek alapján

$$\psi_m\left(\left(x + \frac{1}{2}\right)^2\right) = S_m(x) = F\left(\binom{y}{n}\right) = \psi_m\left(\delta\left(\binom{y}{n}\right)\right). \tag{3.46}$$

Nyilvánvaló, hogy (3.46)-nak csak akkor lehet végtelen sok egész megoldása, ha a

$$4\delta\left(\binom{y}{n}\right) = (2x+1)^2 \tag{3.47}$$

egyenletnek is van végtelen sok egész megoldása. Ez viszont a 3.8. Lemma miatt csak akkor teljesülhet, ha $n = 1$, 2 vagy 4.

Könnyen látható, hogy a

$$4\left(\frac{1}{2}y + \frac{1}{4}\right) = (2x+1)^2 \tag{3.48}$$

egyenletnek van végtelen sok megoldása. Ha $n = 2$, akkor legyen az egyenletünk

$$4\left(\frac{1}{4}\binom{y}{2} + \frac{15}{4}\right) = (2x+1)^2 \tag{3.49}$$

alakú, aminek

$$x = \frac{b_{2w+1} - 2}{4}, \quad y = \frac{a_{2w+1} + 1}{2}, \quad w = 0, 1, \ldots$$

egész megoldásai, ahol$(a_0, b_0) = (3, 8)$, $(a_{w+1}, b_{w+1}) = (3a_w + 4b_w, 2a_w + 3b_w)$. Végül, amikor $n = 4$, akkor bármely $y \geq 4$ egész számra az

$$x = \frac{y^2 - 3y}{2}, \quad y$$

megoldása a

$$4\left(6\binom{y}{4} + \frac{1}{4}\right) = (2x+1)^2 \tag{3.50}$$

egyenletnek.

□

4 $a\binom{x}{m} + k = b\binom{y}{n}$ ALAKÚ EGYENLETEKRE VONATKOZÓ EFFEKTÍV ÉS NUMERIKUS EREDÉNYEK

4.1 BEVEZETÉS

A 2. fejezetben, a 2.1. Tételünkben általános végességi állítást nyertünk az

$$a\binom{x}{m} + k = b\binom{y}{n}, \quad x \geq m, y \geq n \tag{4.1}$$

egyenletre vonatkozóan, mely szerint $(m, n) \neq (2, 2)$, $(2, 4)$, $(4, 4)$ esetén a (4.1) egyenletnek csak véges sok x, y egész megoldása van. A 2.1. Tételünk azonban ineffektív, azaz a bizonyítása nem szolgáltat semmilyen eljárást a megoldások meghatározására. Ebben a fejezetben bizonyos a, b, k, m, n paraméterértékek esetén effektív felső korlátot adunk a (4.1) egyenlet x, y megoldásaira, sőt néhány konkrét esetben az összes megoldást is meghatározzuk.

Mint már a 2. fejezetben említettük, 1988-ban Kiss[32] bebizonyította, hogy ha m egy adott páratlan prím, akkor az

$$\binom{x}{m} = \binom{y}{2} \tag{4.2}$$

diofantikus egyenletnek csak véges sok $x \geq m$, $y \geq 2$ egész megoldása van, és ezek effektíve meghatározhatóak. 1991-ben Brindza [14] általánosította Kiss eredményét arra az esetre, amikor $m \geq 3$ tetszőleges, adott egész szám. A (4.1) egyenletre vonatkozó eredményünk lényegében speciális esetként tartalmazza Kiss és Brindza említett effektív végességi tételeit.

A fentinél általánosabb probléma az

$$a\binom{x}{m} + f(x) + g(x) = b\binom{y}{n} \tag{4.3}$$

egyenlet $x \geq m$, $y \geq n$ megoldásaira vonatkozó effektív felső korlát megadása, ahol $a \neq 0$, $b \neq 0$ egész számok, m, n pozitív egészek, $f(x)$ egész értékű, legfeljebb $m-1$-ed fokú polinom és $g(x) \in \mathbb{Z}[x]$. A 4.1. Tételünkben egy ilyen felső korlát létezését bizonyítjuk, feltéve, hogy $m \geq 5$, $n \in \{2,4\}$ és létezik olyan p prím melyre

$$m \geq p \geq \frac{m+3}{2} \qquad \text{és} \qquad (a,p)=1 \tag{4.4}$$

teljesül. Megjegyezzük, hogy amennyiben m elegendően nagy $|a|$-hoz képest, ilyen p prím mindig létezik.

A bizonyítás során a problémát visszavezetjük

$$u^2 = A\binom{x}{m} + B\,(f(x)+g(x)) + C \tag{4.5}$$

típusú diofantikus egyenletekre, ahol A, B, C adott egészek, x és u ismeretlen egészek. A (4.5) egyenlet valójában egy speciális hiperelliptikus egyenlet. Baker [3] 1969-ben bebizonyította, hogy ha $h(x)$ egy legalább három egyszeres gyökkel rendelkező egész együtthatós polinom, és d zérustól különböző egész szám, úgy a

$$h(x) = dy^2 \tag{4.6}$$

hiperelliptikus egyenlet valamennyi $(x,y) \in \mathbb{Z}^2$ megoldására

$$\max\{|x|,|y|\} < C_1$$

teljesül, ahol C_1 egy csak h-tól és d-től függő effektív konstans. Ez elvileg lehetővé tette (4.6) típusú egyenletek konkrét esetekben való megoldását. Baker említett eredményét azóta többen általánosították és javították (lásd pl. [60] 6. és 8. fejezetét és az ottani megfelelő referenciákat). 1993-ban Pintér [40] Baker fent említett eredményének felhasználásával megmutatta, hogy bizonyos feltételek teljesülése esetén (4.5)-nek csak véges sok, effektíve meghatározható egész megoldása létezik. Továbbá, abban a speciális esetben, amikor $f(x) + g(x) = k$ konstans polinom, Ping-Zhi [39] nyert Pintéréhez hasonló állítást.

A 4.1. Következményben a 4.1. Tételünket speciálisabb (4.1) egyenletekre alkalmazzuk. A 4.2. Következményben pedig effektív felső korlátot adunk azon x, y egészekre, amelyekre az

$$f(x)+g(x), \binom{x}{m}, \binom{y}{n}$$

számok valamilyen sorrendben számtani sorozatot eredményeznek.

Mint a 2. fejezet bevezetőjében említettük, $a=b=1$ és $k=0$ esetén sok numerikus eredmény született a (4.1) egyenletre vonatkozóan. Az $m=3$, $n=2$ esetben Avanesov [1], $m=2$, $n=4$ esetén de Weger [75] és tőle függetlenül Pintér [41], $m=3$, $n=4$ esetben de Weger [76], $m=6$, $n=2$ valamint $m=6$, $n=4$ esetén Stroeker és de Weger [66], illetve tőlük függetlenül Hajdu és Pintér [29], $m=3$, $n=6$, illetve $m=2$, $n=8$ és $m=4$, $n=8$ esetekben pedig Stroeker és de Weger [66] a (4.1) egyenlet összes megoldását meghatározták a fenti feltételek esetén. A 4.2. Tételünkben a $-10\leq k\leq 0$ és

$$(m,n)\in\{(2,3),(3,2),(3,4),(4,3),(2,6),(6,2),(4,6),(6,4)\}$$

választás mellett meghatározzuk a (4.1) egyenlet összes x, y egész megoldását abban a speciális esetben, amikor $a=2$ és $b=1$. A bizonyítás során a fent említett feltételek mellett a (4.1) egyenletet áttranszformáljuk

$$u^2=v^3+rv+s \tag{4.7}$$

alakú elliptikus egyenletekké, ahol r, s csak m, n és k értékeitől függő egészek, u, v egész ismeretlenek. 1994-ben Gebel, Pethő és Zimmer [25], illetve tőlük függetlenül Stroeker és Tzanakis [65] hatékony algoritmust dolgoztak ki konkrét elliptikus egyenletek egész megoldásainak a meghatározására. Ez az eljárás implementálásra került a SIMATH [63] matematikai programcsomagban. Ezt a programcsomagot fogjuk felhasználni a transzformált elliptikus egyenleteink megoldására.

A 4.2. Következményt és a 4.2. Tételt a [44] cikkükben publikáltuk.

4.2 EREDMÉNYEK

A fejezet első tétele a (4.3) egyenletre vonatkozó effektív végességi eredmény.

4.1. Tétel *Legyenek $a\neq 0$, $b\neq 0$, $m\geq 5$ egész számok, $n\in\{2,4\}$, $f(x)\in\mathbb{Q}[x]$ egy egész értékű, legfeljebb $m-1$-ed fokú polinom, és legyen $g(x)\in\mathbb{Z}[x]$. Tegyük fel továbbá, hogy a egy olyan egész, amelyhez létezik egy p prím a* (4.4) *tulajdonsággal. Ekkor a* (4.3) *egyenlet $x\geq m$, $y\geq n$ megoldásaira*

$$\max\{|x|,|y|\}<C_2$$

teljesül, ahol C_2 egy effektíve kiszámítható konstans, mely csupán a, b, m, f és g-től függ.

A következő állítások egyszerűen adódnak a 4.1. Tételünkből.

4.1. Következmény *Legyenek a, b, m, n egész számok a 4.1. Tételben meghatározott tulajdonságokkal, és legyen k egész. Ekkor a (4.1) egyenletnek csak véges sok megoldása van, és az összes megoldás effektíve meghatározható.*

Eredményünk az $m \geq 5$, $k = 0$ speciális esetben magába foglalja Kiss [32] és Brindza [14] említett végességi tételeit. Továbbá megjegyezzük, hogy legujabban Stoll és Tichy [64] az $n = 2$ speciális esetben hasonló eredményre jutottak a (4.1) egyenletre vonatkozóan.

4.2. Következmény *Legyen $m \geq 5$ egész szám és $n \in \{2, 4\}$. Továbbá legyen $f(x) \in \mathbb{Q}[x]$ egy egész értékű, legfeljebb $m-1$-ed fokú polinom, és legyen $g(x) \in \mathbb{Z}[x]$. Ekkor létezik egy effektíve kiszámítható C_3 konstans, ami csak m-től, illetve az $f(x)$ és a $g(x)$ polinomoktól függ, úgy, hogy ha az $x \geq m, y \geq n$ egészekre az*

$$f(x) + g(x), \binom{x}{m}, \binom{y}{n}$$

számok valamilyen sorrendben számtani sorozatot alkotnak, akkor

$$\max\{x, y\} \leq C_3. \tag{4.8}$$

A 4.2. Következményt arra a speciális esetre alkalmazva, amikor $f(x) = \binom{x}{k}$, ahol $1 \leq k \leq m-1$ és $g(x) \equiv 0$, azt kapjuk, hogy amennyiben $m \geq 5, n \in \{2, 4\}$ és az $\binom{x}{k}, \binom{x}{m}, \binom{y}{n}$ binomiális együtthatók valamilyen sorrendben számtani sorozatot alkotnak, akkor (4.8) teljesül egy olyan effektíve meghatározható C_3 konstanssal, ami csak m értékétől függ.

Megjegyezzük, hogy $m = n = 2$ esetén a 4.2. Következmény nem lesz igaz. Ebben az esetben ugyanis a $0, \binom{x}{2}, \binom{y}{2}$ számtani sorozat a

$$2\left(2x-1\right)^2 - \left(2y-1\right)^2 = 1 \tag{4.9}$$

Pell-egyenletre vezet, aminek van végtelen sok $x, y \geq 2$ egész megoldása. Nem tudjuk viszont, hogy vajon a 4.1. Tétel igaz-e $m = 3$, illetve $m = 4$ esetén.

A következő tételben azon speciális számtani sorozatokkal foglalkozunk, amelyeknek három egymást követő tagja: egy k konstans és két $\binom{x}{m}$, $\binom{y}{n}$ binomiális együttható ebben a sorrendben. Mint már említettük, ez a probléma a

$$2\binom{x}{m} = \binom{y}{n} + k \tag{4.10}$$

egyenlet vizsgálatára vezet. Az alábbi 4.2. Tételünkben a (4.10) egyenlet összes megoldását megadjuk abban az esetben, amikor

$$(m,n) \text{ vagy } (n,m) \in \{(2,3),(2,6),(3,4),(4,6)\} \tag{4.11}$$

és

$$0 \leq k \leq 10. \tag{4.12}$$

Mint fentebb említettük, a (4.11) feltétel mellett a (4.10) egyenletet elliptikus egyenletté lehet transzformálni. A következő táblázatban a tekintett m, n értékek mellett láthatjuk a (4.10) egyenletünket, a transzformált elliptikus egyenleteket és a megfelelő transzformációkat.

	egyenlet	transzformált elliptikus egyenlet	transzformáció
(4.13)	$2\binom{x}{2}=\binom{y}{3}+k$	$u^2=v^3-36v+324(4k+1)$	$u=36x-18$, $v=6y-6$
(4.14)	$2\binom{x}{3}=\binom{y}{2}+k$	$u^2=v^3-36v-81(8k-1)$	$u=18y-9$, $v=6x-6$
(4.15)	$2\binom{x}{3}=\binom{y}{4}+k$	$u^2=v^3-64v-64(24k+1)$	$u=2(2y-3)^2-10$, $v=8x-8$
(4.16)	$2\binom{x}{4}=\binom{y}{3}+k$	$u^2=v^3-64v+256(12k+1)$	$u=4(2x-3)^2-20$, $v=8y-8$
(4.17)	$2\binom{x}{2}=\binom{y}{6}+k$	$u^2=v^3-302400v+$ $4320000(972k+235)$	$u=64800x-32400$, $v=45(2y-5)^2-525$
(4.18)	$2\binom{x}{6}=\binom{y}{2}+k$	$u^2=v^3-302400v-$ $1080000(1944k-211)$	$u=32400y-16200$, $v=45(2x-5)^2-525$
(4.19)	$2\binom{x}{4}=\binom{y}{6}+k$	$u^2=v^3-33600v+$ $160000(972k+73)$	$u=900(2x-3)^2-$ -4500, $v=15(2y-5)-175$
(4.20)	$2\binom{x}{6}=\binom{y}{4}+k$	$u^2=v^3-33600v-$ $40000(1944k-49)$	$u=450(2y-3)^2-$ -2250, $v=15(2x-5)^2-175$

4.1 Táblázat

Az alábbi tételünk a (4.13)-(4.20) egyenletek összes megoldását szolgáltatja $0 \leq k \leq 10$ mellett. Megjegyezzük, hogy módszerünkkel ezen egyenletek 10-nél nagyobb k-kra is megoldhatók. Sőt, eredményünk "kis" a és b együtthatók esetén a (4.1) egyenletünkre is kiterjeszthető, amennyiben m, n-re (4.11) teljesül. Valójában pusztán számítógépes kapacitástól függ, hogy mekkora a, b és k értékek mellett lehet még kiszámolni a fellépő elliptikus egyenletek megoldására szolgáló algoritmusban felhasznált paramétereket, s ezáltal megoldani a (4.1) egyenletet.

4.2. Tétel *Legyenek m, n és k egész számok a* (4.11) *és a* (4.12) *tulajdonsággal. Ekkor a* 4.1 *Táblázatban szereplő nyolc egyenlet minden* $(x,y)\in\mathbb{N}^2, x\geq m, y\geq n$*, megoldását megadjuk a* $4.2-4.9$ *Táblázatokban.*

Az alábbi táblázatokban csak azokat a k értékeket tüntetjük fel, melyekre a megfelelő egyenletnek van megoldása.

(4.13)	$2\binom{x}{2}=\binom{y}{3}+k$
k	(x,y)
0	(85,36), (5,6), (8,8), (1190,205)
1	(2,3), (970,179)
2	(158,54), (167,56), (25482929,157357), (4,5), (37,21), (3,4), (1234,210)
5	(3,3)
6	(743,150), (758,152), (2530912508,3374701), (61,29), (10,9)
7	(7,7), (5209,547), (22,15)
8	(4,4)
10	(195,62), (71,32), (5,5), (6,6), (360311,9202), (5866,592)

4.2 Táblázat

(4.14)	$2\binom{x}{3}=\binom{y}{2}+k$
k	(x,y)
1	(3,2)
2	(20,68), (4,4)
4	(6,9), (7,12), (590,11672)
5	(4,3), (90,686), (5,6), (12,30), (11,26), (166,1731)
7	(4,2), (15,43), (8,15)
9	(10,22)
10	(5,5)

4.3 Táblázat

(4.15)	$2\binom{x}{3} = \binom{y}{4} + k$
k	(x, y)
0	(7,8), (11,11)
1	(3,4)
3	(4,5)
5	(5,6), (6,7)
7	(4,4)

4.4 Táblázat

(4.16)	$2\binom{x}{4} = \binom{y}{3} + k$
k	(x, y)
0	(5,5)
1	(4,3)
6	(5,4)
9	(5,3)
10	(6,6)

4.5 Táblázat

(4.17)	$2\binom{x}{2} = \binom{y}{6} + k$
k	(x, y)
0	(15,10), (22,11)
1	(2,6)
2	(90,16), (6,8)
5	(3,6), (4,7)
6	(10,9), (31,12), (42,13)

4.6 Táblázat

(4.18)	$2\binom{x}{6} = \binom{y}{2} + k$
k	(x, y)
0	(18,273)
1	(6,2), (8,11)
4	(7,5)
8	(7,4)

4.7 Táblázat

(4.19)	$2\binom{x}{4} = \binom{y}{6} + k$
k	(x, y)
1	(4,6)
2	(6,8)
3	(5,7)
9	(5,6)

4.8 Táblázat

(4.20)	$2\binom{x}{6} = \binom{y}{4} + k$
k	(x, y)
1	(6,4)
9	(7,5)

4.9 Táblázat

4.3 SEGÉDEREDMÉNYEK

A 4.1. Tétel bizonyításához az alábbi eredményeket fogjuk felhasználni:

4.1. Lemma *Bármely $m \geq 5$ egész számhoz létezik olyan p prím, amelyre*

$$m \geq p \geq \frac{m+3}{2}.$$

Bizonyítás. Mint általában, jelölje $\pi(x)$ az x-nél nem nagyobb prímek számát. Ekkor Rosser és Schoenfeld [48] egy tétele következtében

$$\frac{3x}{5\log x} < \pi(2x) - \pi(x), \qquad \text{ha} \qquad x \geq 20.5.$$

Ebből következik, hogy az állításunk igaz abban az esetben, ha $20.5 \leq \frac{m+3}{2}$. Ha pedig $\frac{m+3}{2} < 20.5$, közvetlen számítással lehet ellenőrizni, hogy a 4.1. Lemma állítása akkor is helyes. □

A következő lemma Pintér [40] egy eredményének a módosított verziója.

4.2. Lemma *Legyen $m \geq 5$ egész szám, $\tilde{f}(x) \in \mathbb{Q}[x]$ egy legfeljebb $m-1$-ed fokú egész értékű polinom és $\tilde{g}(x) \in \mathbb{Z}[x]$ tetszőleges egész együtthatójú polinom. Legyen továbbá a olyan egész szám, amelyhez létezik egy p prím az*

$$m \geq p \geq \frac{m+3}{2} \qquad \text{és} \qquad (a,p) = 1$$

tulajdonsággal. Ekkor az

$$F(x) = a\binom{x}{m} + \tilde{f}(x) + \tilde{g}(x)$$

polinomnak létezik legalább három egyszeres gyöke.

Bizonyítás. Az állítás igazolásához Pintér gondolatmenetét követjük apróbb módosítással. Legyen $f_i(x) = x(x-1)\cdots(x-i+1)$, $i = 1, \ldots, m$ és $f_0(x) = 1$. Mivel $\tilde{f}(x)$ egész értékű polinom, ezért fel lehet írni

$$\tilde{f}(x) = a_{m-1}\binom{x}{m-1} + \ldots + a_1\binom{x}{1} + a_0$$

alakban (lásd [43]), ahol az $a_{m-1}, \ldots, a_1, a_0$ együtthatók egész számok. Így

$$m!F(x) = af_m(x)+\ldots+a_p m(m-1)\cdots(p+1)f_p(x)+\ldots+m!a_0+m!\tilde{g}(x) \in \mathbb{Z}[x].$$

Tetszőleges $S(x) \in \mathbb{Z}[x]$ polinom esetén jelölje $(S(x))_p$ az $S(x)$ polinom $\mathbb{Z}_p[x]$-beli képét a $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_p$ kanonikus homomorfizmusra vonatkozóan. Ezen jelölést felhasználva kapjuk, hogy létezik egy $h(x) \in \mathbb{Z}[x]$ $m-p$-ed fokú polinom úgy, hogy

$$(m!F(x))_p = (f_p(x))_p(h(x))_p.$$

Mivel az $(f_p(x))_p$ minden gyöke egyszeres, ezért az $(m!F(x))_p$ polinomnak, és ezáltal az $m!F(x)$ polinomnak is van legalább $p-(m-p) = 2p-m \geq 3$ egyszeres gyöke. □

A következő lemma Baker [3] említett híres eredménye hiperelliptikus egyenletekre vonatkozóan.

4.3. Lemma *Legyen $h(x) \in \mathbb{Z}[x]$ egy legalább három egyszeres gyökkel rendelkező egész együtthatós polinom, d pedig egy zérustól különböző egész. Ekkor a*

$$h(x) = dy^2$$

egyenlet minden x, y egész megoldására

$$\max\{|\, x \,|, |\, y \,|\} \leq C_1$$

teljesül, ahol C_1 egy csak a d-től és h-tól függő és effektíve kiszámítható konstans.

4.4 BIZONYÍTÁSOK

A 4.1. Tétel bizonyítása. Tegyük fel, hogy teljesülnek a tétel feltételei. Könnyen megmutatható, hogy $n \in \{2, 4\}$ esetén a (4.3) egyenlet az alábbi egyenletek valamelyikére vezet:

$$8a\binom{x}{m} + 8(f(x)+g(x)) + b = b(2y-1)^2, \tag{4.21}$$

$$24a\binom{x}{m} + 24(f(x)+g(x)) + b = b(y^2-3y+1)^2. \tag{4.22}$$

Külön-külön alkalmazva a 4.2. Lemmát és a 4.3. Lemmát erre a két egyenletre, rögtön kapjuk a tételünk állítását. □

A 4.1. Következmény bizonyítása. A következmény állítása egyszerűen adódik, alkalmazva a 4.1. Tételt arra az esetre, amikor $f(x)+g(x)\equiv k$ konstans polinom. □

A 4.2. Következmény bizonyítása. Tegyük fel, hogy az $x\geq m, y\geq n$ egész számokra, ahol $m\geq 5$ és $n\in\{2,4\}$, az

$$f(x)+g(x), \binom{x}{m}, \binom{y}{n}$$

számok valamilyen sorrendben számtani sorozatot alkotnak. Könnyen ellenőrizhető, hogy ekkor (x,y) megoldása lesz valamelyik egyenletnek az alábbiak közül:

$$2\binom{x}{m}-(f(x)+g(x))=\binom{y}{n}, \tag{4.23}$$

$$\binom{x}{m}+(f(x)+g(x))=2\binom{y}{n}, \tag{4.24}$$

$$-\binom{x}{m}+2(f(x)+g(x))=\binom{y}{n}. \tag{4.25}$$

A 4.1. Lemmából következik, hogy létezik olyan p prím, amire

$$m\geq p\geq \frac{m+3}{2}.$$

Mivel ekkor $p\geq 5$ és a (4.23) - (4.25) egyenletekben $\binom{x}{m}$ együtthatója ± 1 vagy 2, ezért alkalmazhatjuk rájuk 4.1. Tételt, és az állítás következik. □

A 4.2. Tétel bizonyításához szükségünk lesz néhány további jelölés bevezetésére. Legyen E egy, az

$$E: y^2=x^3+ax+b=p(x) \qquad (a,b\in\mathbb{Z}) \tag{4.26}$$

alakban megadott elliptikus görbe. Mordell [37] egy nevezetes eredményéből tudjuk, hogy az E elliptikus görbén található racionális pontok egy végesen generált csoportot alkotnak, melyet Mordell-Weil csoportnak is nevezünk. Jelöljük ezt a csoportot $E(\mathbb{Q})$-val. Legyen r az $E(\mathbb{Q})$ csoport torziómentes rangja, τ az E-n lévő torziópontok, azaz véges rendű pontok száma. A görbén lévő bármely P pont esetén $\hat{h}(P)$ jelölje P kanonikus magasságát. Tudjuk, hogy ekkor $\hat{h}$ egy pozitív definit kvadratikus forma; legyen λ ezen kvadratikus forma legkisebb sajátértéke. Legyen továbbá Δ_0 az E görbe diszkriminánsa. Ekkor

$$\Delta_0 = 4a^3 + 27b^2.$$

Jelölje $P_1, \ldots, P_r \in E(\mathbb{Q})$ az E elliptikus görbe Mordell-Weil csoportjának egy bázisát, és legyen u_i a P_i, $i = 1, \ldots, r$ pontok elliptikus logaritmusa. Végül legyen $u_i' = gu/\omega_1$, ahol ω_1 az E valós periódusa. Az elliptikus egyenletek elméletéből tudjuk, hogy bármely $P \in E(\mathbb{Q})$ racionális pont egyértelműen írható fel

$$P = \sum_{i=1}^{r} n_i P_i + P_{r+1} \qquad n_i \in \mathbb{Z}$$

alakban, ahol P_{r+1} egy torziópont. Legyen

$$N = \max_{1 \le i \le r} \{|n_i|\}.$$

A következő eredmény, mely Pethő, Zimmer, Gebel és Herrmann [38] eredménye, egy felső korlátot ad az N értékre abban az esetben, amikor a P pont egy egész koordinátájú pontja az $E(\mathbb{Q})$ csoportnak.

4.4. Lemma *Legyen E a (4.26) által definiált elliptikus görbe. Tegyük fel, hogy a $P = (x, y) \in E(\mathbb{Q})$ egész koordinátájú pont az alábbi módon reprezentált, ahol P_{r+1} egy torziópontot jelöl:*

$$P = \sum_{i=1}^{r} n_i P_i + P_{r+1}.$$

Ekkor $N = \max_{1 \le i \le r} \{|n_i|\}$-re teljesül, hogy

$$N \le N_0 = \sqrt{(k_1/2 + k_2)/\lambda},$$

ahol

$$k_2 = \log \max \left\{ |\, 2a\,|^{\frac{1}{2}}, |\, 4b\,|^{\frac{1}{3}} \right\},$$

$$k_1 = 5 \times 10^{64} k_3 \log\left(k_3\left(k_3 + \log k_4\right)\right),$$

$$k_3 = \frac{32}{3}\sqrt{|\,\Delta_0\,|}\left(8 + \frac{1}{2}\log|\,\Delta_0\,|\right)^4,$$

$$k_4 = 10^4 \max\left\{16a^2, 256\sqrt{|\,\Delta_0\,|}^3\right\}.$$

Továbbá

$$|\sum_{i=1}^{r} n_i u_i^{'} + n_{r+1}\,| \leq k_5 \exp\left\{-\lambda N^2 + k_2\right\},$$

ahol $n_{r+1} \in \mathbb{Z}$, $k_5 = 2\tau/\left(3\omega_1\right)$.

Megjegyezzük, hogy a fenti N_0 felső korlát általában túl nagy ahhoz, hogy akár számítógép segítségével is meghatározhassuk pusztán az N_0 felhasználásával az összes egész pontot egy konkrét elliptikus görbén. Éppen ezért rendszerint valamilyen redukciós eljárásra van szükség. Jelen esetben az N-re vonatkozó korlát redukálására az alábbi, de Wegertől [74] származó Lemmát használjuk.

4.5. Lemma *Legyen* Θ_1, $\Theta_2 \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, x_1, $x_2 \in \mathbb{Z}$ *és*

$$\Lambda = x_1\Theta_1 + x_2\Theta_2,$$

$$X = \max\{|x_1|, |x_2|\}.$$

Tegyük fel, hogy valamilyen c, d pozitív számokkal

$$|\Lambda| \leq c\exp\{-\delta X\},$$

és

$$X \leq X_0$$

teljesül. Legyen $\Theta = -\frac{\Theta_1}{\Theta_2}$, *az* a_0, a_1, a_2, $\ldots$ *számok pedig jelöljék a* Θ *szám lánctörtjegyeit. Vezessük be a következő jelöléseket:*

$$t = -1 + \frac{\log(\sqrt{5}X_0 + 1)}{\log\frac{1+\sqrt{5}}{2}},$$

$$A = \max_{0\leq k\leq t}\{a_{k+1}\}.$$

Ekkor minden X_1 *valós számra, ha* $X \geq X_1$, *akkor*

$$X \leq \frac{1}{\delta}\log\frac{c(A+2)}{\Theta_2} + \frac{1}{\delta}\log X.$$

A 4.2. Tétel bizonyítása. A 4.2. Tétel bizonyítását csak a $2\binom{x}{3} = \binom{y}{2}$ egyenlet esetén részletezzük. A többi egyenletet hasonlóan lehet megoldani. A 4.1 Táblázatból kiolvasva kapjuk, hogy valójában ekkor az

$$E := \{(u, v) \mid u^2 = v^3 - 36v + 81\} \cup \{\mathcal{O}\}.$$

elliptikus egyenletet kell vizsgálnunk. Az $E(\mathbb{Q})$ csoport paramétereit a SIMATH [63] matematikai programcsomaggal számoltuk ki. Az $E(\mathbb{Q})$ csoport rangja $r = 1$, a diszkrimináns $\Delta_0 = -9477$. $E(\mathbb{Q})$-nak két torziópontja van: $\mathcal{O}$ és $P_2 = (3, 0)$. Így $\tau = 2$,

$$P_1 = (6, 9), \qquad \hat{h}(P_1) = 0.1801176633\ldots \quad .$$

Az egyetlen pozitív sajátértéke $\hat{h}$-nek:

$$\lambda = 0.1801176633\ldots \quad .$$

A valós periódus:

$$\omega_1 = 1.6179172250\ldots \quad .$$

A P_1 pont elliptikus logaritmusa $u_1 = 0.2793301565\ldots$. Ezek felhasználásával

$$k_2 \leq 2.14, \qquad k_3 \leq 2.6 \times 10^7, \qquad k_4 \leq 2.37 \times 10^{12}$$

és így

$$k_1 \leq 4.44 \times 10^{73}.$$

Alkalmazva a 4.4. Lemmát azt kapjuk, hogy

$$N \leq 1.1 \times 10^{37}.$$

Ezek után használjuk a 4.5. Lemmában szereplő redukciós eljárást a felső korlát csökkentésére. Az első redukció után új felső korlátként $N \leq 80$-t kapunk. A következő után $N \leq 45$-höz jutunk. A harmadik redukció pedig már nem ad új korlátot. Ennek következtében meg kell vizsgálnunk az összes

$$P = n_1 P_1 + n_2 P_2, \quad |n_1| \leq 45, \; n_2 \in \{0, 1\}$$

pontról, hogy rajta van-e a görbénken. Ezt elvégezve azt kapjuk, hogy az E görbén az összes egész koordinátájú pont:

$$(v, \pm u) = (3, 0), (6, 9), (0, 9), (4, 1), (-6, 9), (15, 54), (28, 145).$$

Ebből, illetve a 4.1 Táblázatból viszont az következik, hogy a $2\binom{x}{3} = \binom{y}{2}$ egyenletnek nincs $x \geq 3, y \geq 2$ egész megoldása. $\square$

5 ÖSSZEFOGLALÓ

Disszertációnk számos új ineffektív, effektív és numerikus eredményt tartalmaz binomiális együtthatókkal, illetve hatványösszegekkel kapcsolatos diofantikus egyenletekre vonatkozóan. Amint azt az egyes fejezetekben részletesen kifejtettük, eredményeink a korábbi, idevágó eredmények messzemenő általánosításai és egyben lényeges pontosításai, finomításai.

Értekezésünkben először általános ineffektív állítást bizonyítunk az

$$F\left(\binom{x}{m}\right) = b\binom{y}{n} \tag{5.1}$$

alakú egyenletek $x \geq m$, $y \geq n$ egész megoldásaira vonatkozóan, ahol m, n adott pozitív egész számok, $F(x)$ pedig egy lineáris, vagy prímfokszámú egész együtthatós polinom. Az 2.1., 2.7. és 2.8. Tételeinkben jellemzzük mindazon b, m, n egészeket és $F(x) \in \mathbb{Z}[x]$ lineáris, másodfokú, illetve páratlan prímfokszámú polinomokat, melyekre az (5.1) egyenletnek csak véges sok x, y egész megoldása van.

A három tétel bizonyítása eltérő módszereken alapul.

A lineáris eset valójában egyszerű következménye a 2.2. Tételünknek, amelyben meghatározzuk mindazon m, n pozitív egészeket és $\lambda \neq 0$, l racionális paramétereket, amelyek mellett az

$$F(x, y) = x\,(x-1)\cdots(x-m+1) - \lambda y\,(y-1)\cdots(y-n+1) - l = 0 \tag{5.2}$$

egyenlet csak véges sok x, y egész, illetve racionális megoldással rendelkezik. Ezen eredmény bizonyításában Beukers, Shorey és Tijdeman [5] egy algebrai-geometriai módszerét kombináljuk többek között Siegel [61] és Faltings [22] nevezetes végességi tételeivel.

A prímfokszámú esetekben (2.7. és 2.8. Tételek) Kulkarni és Sury [33], Ping-Zhi [39], Brindza [12] és Siegel [61] végességi eredményeit alkalmazzuk, számos más technikai lemmával együtt.

Az 3.1. Tételben jellemezzük az összes olyan $(m, g(y))$ párt, amelyek mellett az

$$S_m(x) = 1^m + 2^m + \cdots + x^m = g(y) \tag{5.3}$$

egyenletnek lehet végtelen sok megoldása, ahol m pozitív egész, $g(y) \in \mathbb{Q}[y]$ pedig egy legalább harmadfokú polinom. Így speciális esetekben, rögzített m és

$g(y)$ mellett, csak azt kell megvizsgálni, hogy a $g(y)$ polinom lehet-e a tételben felsorolt alakú.

Amennyiben speciálisan $g(y) = F\left(\binom{y}{n}\right)$ alakú, ahol F racionális együtthatós polinom és $n \geq 1$ adott egész szám, úgy a 3.1. Tételünkből egy pontosabb (3.2. Tétel) állítást is levezetünk.

Ezen két tétel bizonyításában az $S_m(x)$ polinom tulajdonságaira vonatkozó számos lemma mellett, felhasználjuk Bilu és Tichy [9] általános ineffektív végességi eredményét az $f(x) = g(y)$ alakú egyenletekre vonatkozóan.

Disszertációnk végén a 4.1 Következményben bizonyos feltételek mellett a 2.1. Tétel egy effektív változatát bizonyítjuk. Lineáris $F(x)$ polinom esetén megadunk egy konkrétan kiszámítható felső korlátot az (5.1) egyenlet megoldásaira. Eredményünket kiterjesztjük (4.1. Tétel) az általánosabb

$$a\binom{x}{m} + f(x) + g(x) = b\binom{y}{n}$$

egyenletre is, ahol $g(x) \in \mathbb{Z}[x]$ és $f(x) \in \mathbb{Q}[x]$ egész értékű, legfeljebb $m-1$-ed fokú polinom. Ezen eredmény egy alkalmazásaként effektív felső korlátot adunk (4.2. Következmény) mindazon $x \geq m$, $y \geq n$ egészekre, amelyekre az

$$f(x) + g(x), \binom{x}{m}, \binom{y}{n}$$

számok valamilyen sorrendben számtani sorozatot alkotnak. A bizonyítás során a vizsgált egyenleteket hiperelliptikus egyenletekre vezetjük vissza, majd pedig Baker [3] hiperelliptikus egyenletekre vonatkozó nevezetes effektív tételét alkalmazzuk.

Végül a

$$2\binom{x}{m} = \binom{y}{n} + k \tag{5.4}$$

egyenlet összes megoldását meghatározzuk (4.2. Tétel) abban az esetben, amikor (m, n) vagy $(n, m) \in \{(2,3), (2,6), (3,4), (4,6)\}$ és $0 \leq k \leq 10$. Az (5.4) alakú egyenleteket elliptikus egyenletekre redukáljuk, s azután a Gebel, Pethő és Zimmer [25] módszerén alapuló SIMATH programcsomagot használjuk a megoldások megkeresésére.

A 4.1. és 4.2. Tételeink egy sor korábbi eredmény jelentős mértékű általánosításai, kiterjesztései, illetve pontosításai.

6 SUMMARY

The investigation of integer and rational solutions of polynomial equations in two unknowns plays an important role in the theory of diophantine equations. Many important results have been obtained on the finiteness of the number of solutions. Runge, Thue, Mordell, Siegel and others established finiteness results for some wide classes of equations. Finally, in 1929 Siegel [61] showed in full generality that if $F(x, y)$ is an absolute irreducible polynomial with rational coefficients then the equation

$$F(x, y) = 0 \tag{6.1}$$

has only finitely many integer solutions x, y, provided that the genus g of the algebraic curve defined by (6.1) is positive. In 1983 Faltings [22] proved that if $g > 1$ then even the number of rational solutions is finite.

The famous theorems of Siegel and Faltings are ineffective, that is they do not furnish any algorithms for finding the solutions. Further, we remark that it is not easy at all to apply these results to special equations, because in general it is difficult to decide the reducibility or compute the genus.

There is a similar situation in case of equations of the shape

$$f(x) = g(y), \tag{6.2}$$

where f and g are polynomials with rational coefficients. The equations of this kind are especially important and interesting in those cases when $f(x)$ or $g(x)$ is of the form $x(x-1)\cdots(x-(m-1))$, $\binom{x}{n}$, x^k or $1^l + 2^l + \cdots + x^l$, where m, n, k, l are given positive integers. There are several results concerning the number of solutions of these classes of equations. Extending some earlier works of Davenport, Lewis and Schinzel [20], Schinzel [58] and Fried [23], [24], Bilu and Tichy [9] have recently published a general finiteness criterion for (6.2). More precisely, they characterized those polynomials f and g for which equation (6.2) has only finitely many integer solutions x, y. Their theorem is ineffective and contains very complicated conditions. Hence, it is in general a hard problem to apply this criterion to the above mentioned classes of equations.

Our dissertation consists of four chapters. In Chapters 2 and 3 we give general ineffective finiteness results for some important classes of equation of the form (6.2). Our theorems are considerable generalizations and refinements of the earlier relevant results. In Chapter 4 we prove some effective versions of certain results of Chapter 2 and we resolve some concrete equations under consideration.

We remark that the results of the present thesis have been published in our papers [44], [45], [46] and [47].

Now we summarize chapter by chapter the most important results of our dissertation.

II

In Chapter 2 we investigate the number of integer and rational solutions x, y of equations of the form

$$x\,(x-1)\cdots(x-(m-1)) = \lambda y\,(y-1)\cdots(y-(n-1)) + l, \tag{6.3}$$

where $m, n \in \mathbb{N}$ with $m \le n$ and $\lambda, l \in \mathbb{Q}$ with $\lambda \neq 0$.

In case $l = 0$ equation (6.3) was studied by several authors, including Saradha, Shorey [50]-[52] and Saradha, Shorey, Tijdeman [53]-[56]. For a survey of recent results on (6.3) we refer to [59]. Using an algebraic-geometrical approach, Beukers, Shorey and Tijdeman [5] gave all the values of parameters λ, m, n for which (6.3) has only finitely many integer or rational solutions x, y, respectively.

One of the main results of Chapter 2 is Theorem 2.2 which is a generalization of this result of Beukers, Shorey and Tijdeman for arbitrary rational number l. In the proof first we characterize (cf. Theorems 2.4 to 2.6) those polynomials

$$F(x,y) = x\,(x-1)\cdots(x-(m-1)) - \lambda y\,(y-1)\cdots(y-(n-1)) - l$$

which are irreducible over $\mathbb{C}$ and for which the curves $F(x,y) = 0$ have genus 0 or 1. Then the theorems of Siegel [61] and Faltings [22] imply the finiteness of the number of integer and rational solutions, respectively. Further, when $F(x,y)$ is reducible, we describe those cases when $F(x,y) = 0$ has infinitely many solutions.

An important special case of (6.3) is the combinatorial diophantine equation

$$a\binom{x}{m} + k = b\binom{y}{n} \quad \text{in integer } x \ge m, y \ge n, \tag{6.4}$$

where a, b are non-zero integers, and k, m, n are integers with $1 < m \le n$.

In the trivial case $m = n$, $a = b$ and $k = 0$, equation (6.4) has obviously infinitely many solutions. In 1988, Kiss [32] showed that if m is a given odd prime, then the equation

$$\binom{x}{m} = \binom{y}{2} \tag{6.5}$$

has only finitely many integer solutions $x \geq m$, $y \geq 2$ which can be effectively determined. In 1991, this was generalized by Brindza [14] to the case when $m \geq 3$ is an arbitrary but fixed integer.

As an application of our Theorem 2.2 we establish a general finiteness result (cf. Theorem 2.1) for equation (6.4) which includes, in an ineffective form, the above-quoted results of [32] and [14].

In the second part of Chapter 2 we extend our result concerning equation (6.4) to the more general equation

$$F\left(\binom{x}{m}\right) = b\binom{y}{n}, \tag{6.6}$$

where the polynomial $F(x) \in \mathbb{Z}[x]$ is not linear like in (6.4), the degree of F is a prime number. In Theorem 2.7 and Theorem 2.8 we describe all the pairs (m, n) and polynomials F for which (6.6) may have infinitely many integer solutions $x \geq m$, $y \geq n$. Further, we give for each of these pairs (m, n) an equation of the form (6.6) which has infinitely many solutions.

Using the above-mentioned general ineffective result of Bilu and Tichy [9], Kulkarni and Sury [33] have recently obtained a finiteness result concerning equations of the form $x(x+1)\cdots(x+(m-1)) = g(y)$, where $g(y) \in \mathbb{Q}[y]$ is of degree ≥ 2. In the proof of Theorem 2.7 and 2.8 we combine among other things this theorem of [33] with some finiteness theorems of Ping-Zhi [39], Brindza [12] and Siegel [61].

III

In Chapter 3 we study the diophantine equation

$$S_m(x) = g(y) \quad \text{in positive integers } x, y, \tag{6.7}$$

where $g(y)$ is a polynomial with rational coefficients, m is a positive integer and

$$S_m(x) = 1^m + 2^m + \cdots + x^m.$$

In 1956, Schäffer [57] established an ineffective finiteness theorem for the number of solutions of (6.7) in the special case when $g(y) = y^n$. An effective version of this result was proved by Győry, Tijdeman and Voorhoeve [28] who investigated Schäffer's equation in the more general case when the exponent n is also unknown. Later, several generalizations, extensions and related results have been obtained, see e.g. [13],[15], [17], [21], [31], [42], [70]-[73] and the references given there. Recently, Jacobson, Pintér and Walsh [30] and Bennett, Győry and Pintér [4] resolved Schäffer's equation for $n = 2$, m even with $m \leq 58$, and for arbitrary n and $m \leq 11$, respectively. For a survey of these results we refer to [27].

A related result concerning equation (6.7) was obtained in 2000 by Bilu, Brindza, Kirschenhoffer, Pintér and Tichy [7] who proved that if $g(y) = y(y-1)\cdots(y-(n-1))$ then (6.7) has only finitely many integer solutions x, y, provided that $m \geq 1$, $n \geq 2$ and $(m, n) \neq (1, 2)$.

In our Theorem 3.1 we characterize those integers m and polynomials $g(y) \in \mathbb{Q}[y]$ for which (6.7) may have infinitely many integer solutions x, y. Further, we give for each type of these pairs $(m, g(y))$ an equation of the form (6.7) which has infinitely many solutions. We remark that Theorem 3.1 is in fact a common generalization of the above-mentioned results of Schäffer [57] and Bilu, Brindza, Kirschenhoffer, Pintér and Tichy [7].

In our Theorem 3.2 we give an application of Theorem 3.1, characterizing those positive integers m and polynomials $F(x)$ with integer coefficients and with degree one or odd prime for which equation

$$S_m(x) = F\left(\binom{y}{n}\right) \qquad \text{in integers } x \geq 1, y \geq n,$$

has only finitely many integer solutions.

Our Theorems 3.1 and 3.2 are ineffective because their proofs depend ultimately on the ineffective finiteness criterion of Bilu and Tichy [9] on diophantine equations of the form $f(x) = g(y)$.

IV

In Chapter 4 we study the equation

$$a\binom{x}{m} + f(x) + g(x) = b\binom{y}{n}, \tag{6.8}$$

where a, b are non-zero integers, m, n are given positive integers, $f(x) \in \mathbb{Q}[x]$ is an integer-valued polynomial with $\deg f(x) \leq m-1$, and $g(x) \in \mathbb{Z}[x]$. Our

Theorem 4.1 is an effective finiteness result concerning equation (6.8) in the case when $n \in \{2,4\}$ and there exists a prime number p satisfying

$$m \geq p \geq \frac{m+3}{2} \qquad \text{and} \qquad (a,p)=1. \tag{6.9}$$

We note that if m is sufficiently large compared with $|a|$ then the condition (6.9) is always satisfied. The proof of this theorem is based upon some technical lemmas and the Baker's method.

As an application we prove (cf. Corollary 4.1) that if $n \in \{2,4\}$ and (6.9) hold then, for given integer k, the equation (6.4) has only finitely many solutions, and all these can be effectively determined. In the special situation under consideration, this makes effective on Theorem 2.1. Further, our result includes as special cases the effective results of Kiss [32] and Brindza [14] mentioned above.

As another application of our Theorem 4.1, we give (cf. Corollary 4.2) an effective upper bound for those integers $x \geq m$, $y \geq n$ for which the numbers

$$f(x)+g(x), \binom{x}{m}, \binom{y}{n}, \quad n \in \{2,4\},$$

form in some order an arithmetic progression.

There are several numerical results concerning the equation (6.4) when $a = b = 1$ and $k = 0$. For $(m,n) = (3,2)$ Avanesov [1], for $(m,n) = (2,4)$ de Weger [75] and independently Pintér [41], for $(m,n) = (3,4)$ de Weger [76], for $(m,n) = (6,2)$ and $(m,n) = (6,4)$ Stroeker and de Weger [66] and independently Hajdu and Pintér [29], for $(m,n) = (3,6), (m,n) = (2,8)$ and $(m,n) = (4,8)$ Stroeker and de Weger [66] determined all the integer solutions of the equation (6.4) under the above conditions. In our last Theorem 4.2 we give all integer solutions x, y of equation (6.4) in those special cases when $a = 2$, $b = 1$, $-10 \leq k \leq 0$ and

$$(m,n) \in \{(2,3),(3,2),(3,4),(4,3),(2,6),(6,2),(4,6),(6,4)\}.$$

For each pair (m,n) in question we transform the corresponding equation to an elliptic equation of the form

$$u^2 = v^3 + rv + s \;\text{ in integers } u, v, \tag{6.10}$$

where r, s are given integers depending on n, m and k. In 1994 Gebel, Pethő and Zimmer [25], and independently Stroeker and Tzanakis [65] worked out an efficient algorithm for finding all solutions of elliptic equations. This algorithm was implemented in the program package SIMATH [63]. We used this program package to solve our transformed elliptic equations (6.10), and hence our equations of the form (6.4), too.

Irodalomjegyzék

[1] E. T. Avanesov, *Solution of a problem on figurate numbers (in Russian)*, Acta Arith. **12** (1966/1967), 409-420.

[2] R. M. Avanzi, U. M. Zannier, *Genus one curves defined by separated variable polynomials and a polynomial Pell equation*, Acta Arith. **99** (2001), 227-256.

[3] A. Baker, *Bounds for the solutions of the hyperelliptic equation*, Proc. Camb. Phil. Soc. **65** (1969), 439-444.

[4] M. A. Bennett, K. Győry and Á. Pintér, *On the diophantine equation* $1^k + 2^k + \ldots + x^k = y^n$, Compositio Math. **140** (2004), 1417-1431.

[5] F. Beukers, T. N. Shorey, R. Tijdeman, *Irreducibility of polynomials and arithmetic progressions with equal products of terms*, in : 'Number Theory in Progress' (K. Győry, H. Iwaniec and J. Urbanowicz, eds.), Walter de Gruyter, Berlin-New York, 1999, 11-26.

[6] Y. F. Bilu, *Quadratic factors of* $f(x) = g(y)$, Acta Arith. **90** (1999), 341-355.

[7] Y. F. Bilu, B. Brindza, P. Kirschenhofer, Á. Pintér and R. F. Tichy (with an appendix by A. Schinzel), *Diophantine equations and Bernoulli polynomials*, Compositio Math. **131** (2002), 173-188.

[8] Y. F. Bilu, T. Stoll, R. F. Tichy, *Octahedrons with equally many lattice points*, Period. Math. Hungar. **40** (2000), 229-238.

[9] Y. F. Bilu, R. F. Tichy, *The diophantine equation* $f(x) = g(y)$, Acta Arith. **95** (2000), 261-288.

[10] D. W. Boyd, H. H. Kisilevsky, *The Diophantine equation* $u(u+1)(u+2)(u+3) = v(v+1)(v+2)$, Pacific J. Math. **40** (1972), 23-32.

[11] J. Brillhart, *On the Euler and Bernoulli polynomials*, J. Reine Angew. Math. **234** (1969), 45-64.

[12] B. Brindza, *On S-integral solutions of the equation* $y^m = f(x)$, Acta. Math. Hung. **44** (1984), 133-139.

[13] B. Brindza, *On some generalizations of the diophantine equation* $1^k + 2^k + \ldots + x^k = y^z$, Acta Arith. **44** (1984), 99-107.

[14] B. Brindza, *On a Special Superelliptic Equation*, Publ. Math. Debrecen **39** (1991), 159-162.

[15] B. Brindza, Á. Pintér, *On equal values of power sums*, Acta Arith. **77** (1996), 97-101.

[16] B. Brindza, Á. Pintér, *On the irreducibility of some polynomials in two variables*, Acta Arith. **82** (1997), 303-307.

[17] B. Brindza, Á. Pintér, *On the number of solutions of the equation* $1^k + 2^k + \ldots + (x-1)^k = y^z$, Publ. Math. Debrecen **56** (2000), 271-277.

[18] Y. Bugeaud, *Bounds for the solutions of superelliptic equations*, Compositio Math. **107** (1997), 187-219.

[19] J. H. E. Cohn, *The diophantine equation* $y\,(y+1)\,(y+2)\,(y+3) = 2x\,(x+1)\,(x+2)\,(x+3)$, Pacific J. Math. **37** (1971) 331-335.

[20] H. Davenport, D. J. Lewis, A. Schinzel, *Equations of the form* $f(x) = g(y)$, Quart. J. Math. Oxford **12** (1961), 304-312.

[21] K. Dilcher, *On a diophantine equation involving quadratic characters*, Compositio Math. **57** (1986), 383-403.

[22] G. Faltings, *Endlichkeitssätze für abelsche Varietäten über Zahlkörpern*, Invent. Math. **73** (1983), 349-366.

[23] M. Fried, *On a theorem of Ritt and related Diophantine problems*, J. Reine Angew. Math. **264** (1973), 40-55.

[24] M. Fried, *Variables separated polynomials, the genus 0 problem and moduli spaces*, in : 'Number Theory in Progress' (K. Győry, H. Iwaniec and J. Urbanowicz, eds.), Walter de Gruyter, Berlin-New York, 1999, 169-228.

[25] J. Gebel, A. Pethő and H. G. Zimmer, *Computing integral points on elliptic curves*, Acta Arith. **68** (1994), 171–192.

[26] K. Győry, *On the diophantine equation* $\binom{n}{k} = x^l$, Acta Arith. **80** (1997), 289–295.

[27] K. Győry, Á. Pintér, *On the equation* $1^k + 2^k + \ldots + x^k = y^n$, Publ. Math. Debrecen **62** (2003), 403-414.

[28] K. Győry, R. Tijdeman and M. Voorhoeve, *On the equation* $1^k + 2^k + \ldots + x^k = y^z$, Acta Arith. **37** (1980), 233-240.

[29] L. Hajdu, Á. Pintér, *Combinatorial Diophantine equations*, Publ. Math. Debrecen **56** (2000), 391-403.

[30] M. Jacobson, Á. Pintér and P. G. Walsh, *A computational approach for solving* $1^k + 2^k + \ldots + x^k = y^2$, Math. Comp. **72** (2003), 2099-2110.

[31] H. Kano, *On the equation* $s\left(1^k + 2^k + \ldots + x^k\right) + r = by^z$, Tokyo J. Math. **13** (1990), 441-448.

[32] P. Kiss, *On the number of solutions of the diophantine equation* $\binom{x}{p} = \binom{y}{2}$, Fibonacci Quart. **26** (1988), 127-130.

[33] M. Kulkarni, B. Sury, *On the diophantine equation* $x\,(x+1)\cdots(x+(m-1)) = g(y)$, Indag. Math. (N. S.) **14** (2003), 35-44.

[34] W. J. LeVeque, *On the equation* $y^m = f(x)$, Acta Arith. **9** (1964), 209-219.

[35] R. A. MacLeod, I. Barrodale, *On equal products of consecutive integers*, Canad. Math. Bull. **13** (1970), 255-259.

[36] L. J. Mordell, *On the integer solutions of* $y(y+1) = x(x+1)(x+2)$, Pacific J. Math. **13** (1963), 1347-1351.

[37] L. J. Mordell, *Diophantine equations*, Academic Press, 1969.

[38] A. Pethő, H. G. Zimmer, J. Gebel and E. Herrmann, *Computing all S-integral points on elliptic curves*, Math. Proc. Cambr. Phil. Soc. **127** (1999), 383-402.

[39] Yuan Ping-Zhi, *On a special diophantine equation* $a\binom{x}{n} = by^r + c$, Publ. Math. Debrecen **44** (1994), 137-143.

[40] Á. Pintér, *On the number of simple zeros of certain polynomials*, Publ. Math. Debrecen **42** (1993), 329-332.

[41] Á. Pintér, *A note on the Diophantine equation* $\binom{x}{4} = \binom{y}{2}$, Publ. Math. Debrecen **47** (1995), 411-415.

[42] Á. Pintér, *A note on the equation* $1^k + 2^k + \ldots + (x-1)^k = y^m$, Indag. Math. (N. S.) **8** (1997), 119-123.

[43] G. Pólya, *Über ganzwertige ganze Funktionen*, Rendiconti Circ. Math. Palermo **40** (1915), 1-16.

[44] Cs. Rakaczki *Binomial coefficients in arithmetic progressions*, Publ. Math. **57** / 3-4, (2000), 547-558.

[45] Cs. Rakaczki, *On the diophantine equation* $x(x-1)\cdots(x-(m-1)) = \lambda y(y-1)\cdots y-(m-1)) + l$, Acta Arith. **110.4** (2003), 339-360.

[46] Cs. Rakaczki, *On the diophantine equation* $F\left(\binom{x}{n}\right) = b\binom{y}{m}$, Periodica Math. Hung. **49(2)**, (2004), 119-132.

[47] Cs. Rakaczki, *On the Diophantine equation* $S_m(x) = g(y)$, Publ. Math. **65**, (2004), 439-460.

[48] R. J. Rosser and L. Schoenfeld, *Approximate formulas for some functions of prime numbers*, Illinois J. Math. **6** (1962), 64-94.

[49] C. Runge, *Über ganzzahlige Lösungen von Gleichungen zwischen zwei Veränderlichen*, J. Reine Angew. Math., **100** (1887), 425-435.

[50] N. Saradha, T. N. Shorey, *On the ratio of two blocks of consecutive integers*, Proc. Indian Acad. Sci. Math. Sci. **100** (1990), 107-132.

[51] N. Saradha, T. N. Shorey, *The equations* $(x+1)\cdots(x+k) = (y+1)\cdots(y+mk)$ *with* $m = 3, 4$, Indag. Math. (N.S.) **2** (1991), 489-510.

[52] N. Saradha, T. N. Shorey, *On the equation* $x\,(x+d_1)\cdots(x+(k-1)\,d_1) = y\,(y+d_2)\cdots(y+(mk-1)\,d_2)$, Proc. Indian Acad. Sci. Math. Sci. **104** (1994), 1-12.

[53] N. Saradha, T. N. Shorey, R. Tijdeman, *On arithmetic progressions with equal products*, Acta Arith. **68** (1994), 89-100.

[54] N. Saradha, T. N. Shorey, R. Tijdeman, *On values of a polynomial at arithmetic progressions with equal products*, Acta Arith. **72** (1995), 67-76.

[55] N. Saradha, T. N. Shorey, R. Tijdeman, *On the equation* $x\,(x+1)\cdots(x+(k-1)) = y\,(y+d)\cdots(y+(mk-1)\,d)\,, m = 1, 2,$ Acta Arith. **71** (1995), 181-196.

[56] N. Saradha, T. N. Shorey, R. Tijdeman, *On arithmetic progressions of equal lengths with equal products*, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. **117** (1995), 193-201.

[57] J. J. Schäffer, *The equation* $1^p + 2^p + \ldots + n^p = m^q$, Acta Math. **95** (1956), 155-189.

[58] A. Schinzel, *Selected Topics on Polynomials*, University of Michigan Press, Ann Arbor, 1982.

[59] T. N. Shorey, *Exponential Diophantine equations involving products of consecutive integers and related equations*, Number Theory, 463-495, Trends Math. Birkhäuser, Basel, 2000.

[60] T. N. Shorey, R. Tijdeman, *Exponential diophantine equations*, Cambridge University Press, 1986.

[61] C. L. Siegel, *Über einige Anwendungen diophantischer Approximation*, Abh. Preuss. Akad. Wiss. Phys.-Math. Kl. 1929, Nr. 1, 70 pp. Gesammelte Abhandlungen, vol. I, 209-266. Springer, Berlin 1966.

[62] J. H. Silverman, J. Tate, *Rational points on elliptic curves*, Springer-Verlag, New York, 1992.

[63] SIMATH, *Manual*, Saarbrücken 1993.

[64] Th. Stoll, R. F. Tichy, *The Diophantine equation* $\alpha\binom{x}{m} + \beta\binom{y}{n} = \gamma$, Publ. Math. Debrecen **64** (2004), 155-165.

[65] R. J. Stroeker, N. Tzanakis, *Solving elliptic diophantine equations by estimating linear forms in elliptic logarithms*, Acta Arith. **67** (1994), 177-196.

[66] R. J. Stroeker, B. M. M. de Weger, *Elliptic binomial Diophantine equations*, Math. Comp. **68** (1999), 1257-1281.

[67] Sz. Tengely, *On the diophantine equation F(x)=G(y)*, Acta. Arith. **110** (2003), 185-200.

[68] Sz. Tengely, *Effective Method for Diophantine Equation*, Ph.D dissertation (2004).

[69] R. Tijdeman, *Exponential Diophantine equations 1986-1996*, in 'Number Theory' (K. Győry, A. Pethő, V. T. Sós, eds.), de Gruyter, Berlin 1998, 523-539.

[70] J. Urbanowicz, *On the equation* $f(1)1^k + f(2)2^k + \ldots + f(x)x^k + R(x) = by^z$, Acta Arith. **51** (1988), 349-368.

[71] J. Urbanowicz, *On diophantine equations involving sums of powers with quadratic characters as coefficients I.*, Compositio Math. **92** (1994), 249-271.

[72] J. Urbanowicz, *On diophantine equations involving sums of powers with quadratic characters as coefficients II.*, Compositio Math. **102** (1996), 125-140.

[73] M. Voorhoeve, K. Győry and R. Tijdeman, *On the diophantine equation* $1^k + 2^k + \ldots + x^k + R(x) = y^z$, Acta Math. **143** (1979), 1-8; Corr. **159** (1987), 151-152.

[74] B. M. M. de Weger, *Algorithms for diophantine equations*, CWI Tract 65, Stichting Mathematisch Centrum, Amsterdam, 1989.

[75] B. M. M. de Weger, *A binomial diophantine equation*, Quart. J. Math. Oxford II. Ser. **47** (1996), 221-231.

[76] B. M. M. de Weger, *Equal binomial coefficients: Some elementary considerations*, J. Number Theory **63** (1997), 373-386.

A Függelék - A szerző publikációs listája

1. Cs. Rakaczki, *Binomial coefficients in arithmetic progressions*, Publ. Math. Debrecen **57** / 3-4, (2000), 547-558.

2. Cs. Rakaczki, *On the diophantine equation* $x(x-1)\cdots(x-(m-1)) = \lambda y(y-1)\cdots(y-(m-1))+k$, Acta Arith. **110.4** (2003), 339-360.

3. Cs. Rakaczki and Á.Száz, *Semicontinuity and closedness properties of relations in relator spaces*, Mathematica (Cluj)-Tome, **45(68)**, (2003), 73-92.

4. Cs. Rakaczki, *On the diophantine equation* $F\left(\binom{x}{n}\right) = b\binom{y}{m}$, Periodica Math. Hung. **49(2)**, (2004), 119-132.

5. Cs. Rakaczki, *On the Diophantine equation* $S_m(x) = g(y)$, Publ. Math. Debrecen **65** / 3-4, (2004), 439-460.

6. Cs. Rakaczki and Sz. Tengely, *Binomial coefficients in linear recurrence sequences*, (előkészületben).

7. E. Herrmann, Á. Pintér and Cs. Rakaczki, *On Mordell's equation*, (előkészületben).

B Függelék - A szerző tudományos előadásainak listája

1. On some combinatorial diophantine equations, 14th Czech and Slovak International Conference on Number Theory, Liptovský Ján, September 6-10, 1999.

2. On some diophantine equations connected with binomial coefficients, Colloquium on Number Theory in honor of the 60th birthday of Professors Kálmán Győry and András Sárközy, Debrecen, July 2-7, 2000.

3. Some diophantine equations related to binomial coefficients, 15th Czech and Slovak International Conference on Number Theory, Ostravice, September 3-8, 2001.

4. On the diophantine equation $x(x-1)\cdots(x-(m-1)) = \lambda y(y-1)\cdots(y-(n-1)) + k$, Explicit Algebraic Number Theory: NWO-OTKA workshop, Leiden, September 27-October 2, 2002.

5. Kombinatorikus diofantikus egyenletekről, Kiss Péter, az egri és debreceni számelmélész. Számelméleti tudományos emlékülés, Eger 2002. november 22-23.

6. On the diophantine equation $F\left(\binom{x}{n}\right) = b\binom{y}{m}$, 16th Czech and Slovak Number Theory Conference, Bratislava, June 30-July 4, 2003.

7. On the diophantine equation $F\left(\binom{x}{n}\right) = b\binom{y}{m}$, Diophantine Approximation: NWO-OTKA workshop, Leiden, July 28- August 2, 2003.

8. Binomiális együtthatókkal és hatványösszegekkel kapcsolatos diofantikus eredmények. Soproni Diofantikus Nap, Sopron 2004. október 9.

Binomiális együtthatókkal és hatványösszegekkel kapcsolatos diofantikus eredmények

Értekezés a doktori (PhD) fokozat megszerzése érdekében
a matematika tudományágban.

Írta: Rakaczki Csaba okleveles matematikus.

Készült a Debreceni Egyetem Matematika- és Számítástudományok Doktori Iskola
Diofantikus és konstruktív számelmélet programja keretében.

Témavezető: Dr. Győry Kálmán

A doktori szigorlati bizottság:

elnök:	Dr.	....
tagok:	Dr.	....
	Dr.	....

A doktori szigorlat időpontja: 200... ....

Az értekezés bírálói:

Dr. ....

Dr. ....

Dr. ....

A bírálóbizottság:

elnök:	Dr.	....
tagok:	Dr.	....
	Dr.	....
	Dr.	....
	Dr.	....

Az értekezés védésének időpontja: 200... ....