Convergence in norm on the complete product of finite groups

Normakonvergencia véges csoportok teljes direkt szorzatán

Doktori (PhD) értekezés tézisei

Dr. Toledo Rodolfo

Debreceni Egyetem
Természettudományi Kar
Debrecen, 2003

II

Preface

The theory of abstract harmonic analysis has been a relevant progress in the last decades. An increasing number of mathematicians have adopted the point of view that the most appropriate setting for the development of the theory of Fourier analysis is furnished by the class of all locally compact groups. Starting of the classical theory of Fourier series and integrals the relative ease with which the basic concepts and theorems can be transferred to this general context in the abelian case is not valid for the non-commutative case. For instance, it is well known that the Riemann-Lebesgue lemma is not valid for non-commutative cases.

The structure of topological groups was extensively studied in the years 1925-1940, and the subject is far from dead even today. The study of the direct products of topological groups have been started since the beginning of the theory of topological groups. Pontryagin [16] examined very extensively the structure of countable direct products treated special cases of finite direct products. Vilenkin [1] obtained several results for the commutative cases.

The dyadic group is the simplest but nontrivial model of the complete product of finite groups. Representing the characters of the dyadic group ordered in the Paley's sense, we obtain the Walsh system. This system is applied in the processing of data but has an interesting theoretical point of view.

A natural generalization on the Walsh-Paley system is the Vilenkin system introduced by Vilenkin [28] in 1947. He used the set of all characters of the complete product of arbitrary cyclic groups to obtain the commutative case. In Hungary a dyadic analysis team works leaded by Schipp having several results in this theory. For instance, they proved that the Paley theorem is true for an arbitrary Vilenkin group, i.e. the partial sums of the Vilenkin-Fourier series of a function in $L^p(G)$ $(1 < p < \infty)$ converge in the appropriate norm to the function (Young [31], Schipp [17], Simon [19]).

The example above is not true for all cases if we take the complete product of arbitrary finite group (not necessarily commutative). The study of this groups is the aim of this work. These studies were appeared in [9] by Gát and Toledo first and they obtained not only negative results for this groups, because they also proved the convergence in L^p-norm of the Fejér means of Fourier series when $p \geq 1$ in the bounded case.

This work is organized as follows. The first chapter is introductory, introducing the topology, the measure and the system with which we work. This kind of system is called (by the author) a representative product system because we use representation theory to collect the functions appeared in it. The Weyl-Peter's theorem ensure the orthonormality and completeness in L^2 of this system. Representing this system on the interval $[0,1]$ we plot and show relevant examples. In this chapter we use the notation appeared in [12] and [13].

Chapter 2 summarizes the results of [9]. We introduce the basic concepts of Fourier analysis and give the properties of the Dirichlet kernels to study the convergence in norm of Fourier series and Fejér means. We also introduce the concept of modulus of continuity to give class of functions for which the partial sums of it's Fourier series converge to the function in L^1 or in the uniform norm. Finally, we obtain an important positive result, i.e. if G is a bounded group, the Fejér means of a function $f \in L^p(G)$, $1 \leq p \leq \infty$ converge to the function in L^p-norm.

In Chapter 3 we estimate the Fourier coefficients which not necessarily tend to zero, using the modulus of continuity of the function and the uniform norm of the system. We specially study the functions with bounded fluctuation. On the other hand we consider an interesting class of functions, namely the ones that are constant on every conjugacy classes. The system of characters of the representations is complete in this class of functions, so we use characters to study the absolute convergence of series constructed in this way.

Chapter 4 treats the general case of product system adapting the results of Schipp [17] for the convergence in Hardy and BMO norms. We use the convergence of operators with property Δ to study the conjugate martingale transforms defined on not necessarily bounded Vilenkin group. In this chapter the notation of the different Hardy and BMO spaces is the same to the notation appeared in [30].

Finally, the author would like to thank Professor Dr. F. Schipp for his valuable ideas and Professor Dr. G. Gát for carefully reading this work and for his several advices and remarks to improve this work.

Chapter 1

The structure of the complete product of finite groups

Let $m := (m_k,\ k \in \mathbf{N})$ be a sequence of positive integers such that $m_k \geq 2$ and G_k a finite group with order m_k, $(k \in \mathbf{N})$. Suppose that each group has discrete topology and normalized Haar measure μ_k. Let G be the compact group formed by the complete direct product of G_k with the product of the topologies, operations and measures (μ). The compact totally disconnected group G is called a *bounded group* if the sequence m is bounded.

Define G^0 as the set of sequences of G terminating in e's (i.e. the set of "finite" sequences), $I_0(x) := G$,

$$I_n(x) := \{y \in G : y_k = x_k, \text{ for } 0 \leq k < n\} \quad (x \in G, n \in \mathbf{N})$$

$I_n := I_n(e)$. We say that every set $I_n(x)$ is an *interval.* The intervals I_n are a countable neighborhood base at the identity of the product topology on G.

If $M_0 := 1$ and $M_{k+1} := m_k M_k$, $k \in \mathbf{N}$, then every $n \in \mathbf{N}$ can be uniquely expressed as $n = \sum_{k=0}^{\infty} n_k M_k$, $0 \leq n_k < m_k$, $n_k \in \mathbf{N}$. This allows us to say that the sequence $(n_0, n_1, \dots)$ is the expansion of n with respect to m. In this case let $n^* = (n_0, n_1, \dots) \in G$. We often use the following notations: let $|n| := \max\{k \in \mathbf{N} : n_k \neq 0\}$ and $n_{(k)} := \sum_{j=0}^{k-1} n_k M_k$, $n^{(k)} = \sum_{j=k}^{\infty} n_k M_k$.

Now we denote by Σ_k the dual object of G_k. Let $\{\varphi_k^s : 0 \leq s < m_k\}$ be the set of all *normalized coordinate functions* of the group G_k and suppose that $\varphi_k^0 \equiv 1$. In addition, let ψ be the product system of φ_k^s, namely

$$\psi_n(x) := \prod_{k=0}^{\infty} \varphi_k^{n_k}(x_k) \qquad (x \in G),$$

where n is of the form $n = \sum_{k=0}^{\infty} n_k M_k$ and $x = (x_0, x_1, \dots)$. Thus we say that ψ is the *representative product system* of φ. The Weyl-Peter's Theorem secure that the system ψ is orthonormal and complete in $L^2(G_m)$.

The functions ψ_n ($n \in \mathbf{N}$) are not necessary uniformly bounded, so define

$$\Psi_k := \max_{n<M_k} \|\psi_n\|_1 \|\psi_n\|_\infty \qquad (k \in \mathbf{N}).$$

It seems that the boundedness of the sequence Ψ plays an important role in the norm convergence of Fourier series.

The simplest but nontrivial example of representative product system is the Walsh-Paley system. In this case we take $m_k = 2$ for all $k \in \mathbf{N}$, and let $G_k := \mathcal{Z}_2$ be the cyclic group of order 2. The characters of G_k are the *Rademacher functions*:

$$\varphi_k^s(x) = (-1)^{sx} \qquad (s \in \{0,1\},\ x \in \mathcal{Z}_2).$$

It is easy to see that in this case $\Psi_k \equiv 1$.

The Vilenkin group is the complete product of arbitrary cyclic groups. The characters of $\mathcal{Z}_{m_k}$ ($k \in \mathbf{N}$) are the *generalized Rademacher functions*:

$$\varphi_k^s(x) = \exp(2\pi \imath sx/m_k) \qquad (s \in \{0, \dots m_k - 1\},\ x \in \mathcal{Z}_{m_k},\ \imath^2 = -1).$$

The product system of φ is called a *Vilenkin system.* We also obtain that $\Psi_k \equiv 1$.

The smallest noncommutative group is $\mathcal{S}_3$, i.e. the symmetric group on 3 elements. Let $G_k = \mathcal{S}_3$ for all $k \in \mathbf{N}$. We can order the normalized coordinate functions of $\mathcal{S}_3$ as follows:

	e	(12)	(13)	(23)	(123)	(132)	$\|\varphi^s\|_1$	$\|\varphi^s\|_\infty$
φ^0	1	1	1	1	1	1	1	1
φ^1	1	-1	-1	-1	1	1	1	1
φ^2	$\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{2\sqrt{2}}{3}$	$\sqrt{2}$
φ^3	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{2\sqrt{2}}{3}$	$\sqrt{2}$
φ^4	0	0	$-\frac{\sqrt{6}}{2}$	$\frac{\sqrt{6}}{2}$	$\frac{\sqrt{6}}{2}$	$-\frac{\sqrt{6}}{2}$	$\frac{\sqrt{6}}{3}$	$\frac{\sqrt{6}}{2}$
φ^5	0	0	$-\frac{\sqrt{6}}{2}$	$\frac{\sqrt{6}}{2}$	$-\frac{\sqrt{6}}{2}$	$\frac{\sqrt{6}}{2}$	$\frac{\sqrt{6}}{3}$	$\frac{\sqrt{6}}{2}$

Notice that the functions φ_k^s can take the value 0, the product system of φ is not uniformly bounded, and $\Psi_k = \left(\frac{4}{3}\right)^k \to \infty$ if $k \to \infty$.

Another relevant example is $\mathcal{Q}_2$, i.e. the quaternion group of order 8. Let $G_k = \mathcal{Q}_2$ for all $k \in \mathbf{N}$. We can order the normalized coordinate functions of $\mathcal{Q}_2$ as follows:

	e	a	a^2	a^3	b	ab	a^2b	a^3b	$\|\varphi^s\|_1$	$\|\varphi^s\|_\infty$
φ^0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
φ^1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1
φ^2	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	1
φ^3	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1	1	1
φ^4	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}\imath$	$-\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}\imath$	0	0	0	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\sqrt{2}$
φ^5	$\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}\imath$	$-\sqrt{2}$	$\sqrt{2}\imath$	0	0	0	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\sqrt{2}$
φ^6	0	0	0	0	$\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}\imath$	$-\sqrt{2}$	$\sqrt{2}\imath$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\sqrt{2}$
φ^7	0	0	0	0	$-\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}\imath$	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}\imath$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\sqrt{2}$

Notice that values of $|\varphi^s|$ are 0 or the square of the corresponding dimension only. Hence, the absolute value of the coordinate functions are 0 or 1 respectively. A representation of this form is called a monomial representation. If all of the representations are monomial, then $\Psi_k = 1$ for $k \in \mathbf{N}$, but the group G is not necessarily abelian.

The topology of G is metrizable. Moreover, the metric we concerned is induced by a norm as follows. Order the elements of all groups G_k, $(k \in \mathbf{N})$ in some way such that the first is always their identity. In fact, the ordering is a bijection between G_k and $\{0, 1, \ldots, m_k - 1\}$ which gives to every $x \in G_k$ the integer $0 \leq \overline{x} < m_k$ $(\overline{e} = 0)$. Define

$$|x| := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\overline{x_k}}{M_{k+1}} \qquad (x \in G).$$

It is easy to see that $|.|$ is a norm and the proceeded metric $d(x, y) := |xy^{-1}|$ induces the topology of G. In addition, $0 \leq |x| \leq 1$ for all $x \in G$. Using this fact we represent the group G in the interval $[0, 1]$.

Any $x \in [0, 1]$ can be written

$$x := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\overline{x_k}}{M_{k+1}} \qquad (0 \leq \overline{x_k} \leq m_k - 1),$$

but there are numbers with two expressions of this form. They are all numbers in the set

$$\mathbf{Q} := \left\{ \frac{p}{M_n} : 0 \leq p < M_n,\ n, p \in \mathbf{N} \right\}$$

called *m-adic rational numbers*. The other numbers have only one expression. The m-adic rational numbers have an expression terminates in 0's and other terminates in $m_k - 1$'s. We choose the first one to make an unique relation for all numbers in the interval $[0, 1]$ with their expression, named the *m-adic expansion* of the number. In this manner we assign to a number in the interval $[0, 1]$ having an m-adic expansion $(\overline{x_0}, \overline{x_1}, \ldots)$ an element of G with expansion $(x_0, x_1, \ldots)$. We denote this relation by ρ. ρ is called *Fine's map*.

Using Fine's map we introduce a new operation in the interval $[0,1[$:

$$x \odot y := |\rho(x)\rho(y)| \qquad (x, y \in [0,1[).$$

The following theorem show the relation between the Haar integration on G and the Lebesgue integration on the interval $[0,1]$.

Theorem 1.5.1. *Let ρ denote the Fine's map.*

(a) If $f \in L^0(G)$ then $f \circ \rho \in L^0$. Conversely, if $g \in L^0$ and

$$f(x) := g(|x|) \qquad (x \in G) \tag{1.1}$$

then $f \in L^0(G)$.

(b) If f is integrable on G then $f \circ \rho$ is Lebesgue integrable and

$$\int_G f\, d\mu = \int_0^1 (f \circ \rho)(x)\, dx.$$

Conversely, if g is Lebesgue integrable and f is defined by (1.1) then f is integrable on G and

$$\int_0^1 g(x)\, dx = \int_G f\, d\mu.$$

The Lebesgue measure (λ) is also translation invariant under the new operation. Let f be a complex function defined in the interval $[0,1[$ and denote by $(\tau_y f)(x) := f(y \odot x)$ $(x, y \in [0,1[)$, the *left translation operator* under the new operation, and denote the *left translation of the set E* by $\tau_y(E) := \{y \odot x : x \in E\}$ $(E \subseteq [0,1[,\ y \in [0,1[)$.

Theorem 1.5.2. *Let f be a complex function defined on the interval* $[0,1[$, *then*

(a) If the function f is Lebesgue integrable then $\tau_y f$ is also Lebesgue integrable and

$$\int_0^1 (\tau_y f)(x)\, dx = \int_0^1 f(x)\, dx \qquad (y \in [0,1[).$$

(b) In particular for all $E \subseteq [0,1[$ Lebesgue measurable set

$$\lambda(\tau_y(E)) = \lambda(E) \qquad (y \in [0,1[).$$

Finally, we can represent the system ψ on the interval $[0,1]$ substituting it by the

$$\upsilon_n := \psi_n \circ \rho \qquad (n \in \mathbf{N})$$

system, according to Theorem 1.5.1.

Chapter 2

L^p-norm convergence of Fourier series and Fejér means

In this chapter we introduce essential concepts in the study of Fourier analysis as the concept of Fourier coefficients, Fourier series and Dirichlet kernels.

For $f \in L^1(G)$ we define the *Fourier coefficients* by

$$\widehat{f}_k := \int_G f\overline{\psi}_k d\mu \qquad (k \in \mathbf{N}),$$

and *the n-th partial sums of Fourier series* by

$$S_n f := \sum_{k=0}^{n-1} \widehat{f}_k \psi_k \qquad (n \in \mathbf{P}).$$

The *Dirichlet kernels* are defined as follows:

$$D_n(x,y) := \sum_{k=0}^{n-1} \psi_k(x)\overline{\psi}_k(y) \qquad (n \in \mathbf{P}).$$

It is easy to see that

$$S_n f(x) = \int_G f(y) D_n(x,y) d\mu(y).$$

The Dirichlet kernels play a prominent role in the convergence of Fourier series. The lemmas proved in this section will be used in this regard and they appeared first in [9] (see also [26]).

Lemma 2.1.1. *If $n \in \mathbf{N}$ and $x, y \in G$, then*

$$D_n(x,y) = \sum_{k=0}^{\infty} D_{M_k}(x,y) \left(\sum_{s=0}^{n_k - 1} \varphi_k^s(x_k) \overline{\varphi}_k^s(y_k) \right) \psi_{n^{(k+1)}}(x) \overline{\psi}_{n^{(k+1)}}(y),$$

where $(n_0, n_1, ...)$ is the expansion of n and $x = (x_0, x_1, ...)$, $y = (y_0, y_1, ...)$.

Lemma 2.1.2. *(Paley lemma) If $n \in \mathbf{N}$ and $x, y \in G$, then*

$$D_{M_n}(x,y) = \begin{cases} M_n & \text{for } x \in I_n(y), \\ 0 & \text{for } x \notin I_n(y) \end{cases}$$

Paley lemma is used to prove that the partial sum of Fourier series of every integrable function f defined on G have a subsequence converging to f in L^p-norm ($p \geq 1$) and a.e. This statement show us a notable difference with respect to the classic Fourier analysis.

Corollary 2.1.3. *For each $f \in L^p(G)$, $p \geq 1$, $S_{M_n}f$ converges to f in L^p-norm, and a.e.*

From the Paley lemma we have the characteristics function of an interval and the finite complex linear combinations of them all are representative functions. Since the set of all finite linear combinations of characteristics functions of intervals is dense in $L^1(G)$, we can state:

Corollary 2.1.4. *The system ψ is orthonormal, and complete in $L^1(G)$.*

For Vilenkin systems the operator S_n is of type (p,p) $(1 < p < \infty)$. This statement was shown independently for arbitrary Vilenkin systems by Young [31], Schipp [17] and Simon [19]. We cannot generalize this statement for every non-abelian group. In the following theorem we suppose, if a finite group appear in the product of G it has the same system φ in the all of it's occurrences.

Theorem 2.2.1. *If G is a bounded group with unbounded sequence Ψ, then there is a $1 < p < 2$ for which the operator S_n is not of type (p,p).*

We restrict our attention to the case $p = 1$.

Theorem 2.2.2. *For an arbitrary group G there exists a function $f \in L^1(G)$ such that the sequence of partial sums S_nf of the Fourier series of f does not converge to the function f in L^1-norm.*

Let $f \in L^p(G)$, $1 \leq p \leq \infty$ and I an interval. Then $I = I_n(x)$ for some $x \in G, n \in \mathbf{N}$. Denote by

$$(2.1) \quad \omega^{(p)}(f,I) := \sup_{h \in I_n} \left(\frac{1}{\mu(I)} \int_I |\tau_h f - f|^p \, d\mu \right)^{\frac{1}{p}}, \qquad \omega(f,I) := \omega^{(1)}(f,I)$$

the *local modulus of continuity of f* on I and

$$(2.2) \qquad \omega_n^{(p)}(f) := \sup_{h \in I_n} \|\tau_h f - f\|_p, \quad (n \in \mathbf{N}), \qquad \omega_n(f) := \omega_n^{(1)}(f)$$

the *n-th modulus of continuity of f* on L^p, where $\tau_h f(x) := f(xh)$ is the right translation operator. We show that certain assumption for the modulus of continuity implies the L^1-norm convergence of Fourier series. This results appeared in [27] are the generalization of Simon's results in [20] for not necessarily commutative groups.

Theorem 2.2.4. *Let f be a function in $L^1(G)$ for which the following condition holds:*

$$\omega_k(f) = o(\Psi_k \sum_{j=0}^{k} m_j)^{-1}. \tag{2.3}$$

Then the sequence of partial sums $S_n f$ of Fourier series of f converges in L^1-norm to f.

In the case when the sequence m is bounded it is easy to see that there exists a $c > 0$ such that $m_k \le c \log m_k$ for all $k \in \mathbf{N}$. Then we obtain from Theorem 2.2.4:

Corollary 2.2.5. *Let f be a function in $L^1(G)$ for which the following condition holds:*

$$\omega_k(f) = o(\Psi_k \log M_k)^{-1}. \tag{2.4}$$

If the group G is a bounded group then the sequence of partial sums $S_n f$ of Fourier series of f converges in L^1-norm to f.

The above corollary is similar to the known Dini-Lipschitz test for uniform convergence of Vilenkin series [15]. In a similar manner to the proof of the Theorem 2.2.4 we have carried out similar calculations and got the following result:

Theorem 2.2.6. *Let f be a continuous function on G for which the following condition holds:*

$$\omega_k^{\infty}(f) = o(\Psi_k \sum_{j=0}^{k} m_k)^{-1}. \tag{2.5}$$

Then the sequence of partial sums $S_n f$ of Fourier series of f converges in uniform norm to f.

The above results are simpler if the sequence Ψ is bounded. In this case Ψ_k vanishes in (2.3), (2.4) and (2.5). Moreover, we have

Theorem 2.2.7. *Let f be a continuous function on G for which the following condition holds:*

$$\sum_{k=0}^{\infty} m_k \omega_k^{\infty}(f) < \infty, \tag{2.6}$$

and suppose the sequence Ψ is bounded. Then the sequence of partial sums $S_n f$ of Fourier series of f converges in uniform norm to f.

Denote *the Fejér means of Fourier series* by

$$\sigma_n f = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} S_k f \qquad (n \in \mathbf{P}),$$

and the *Fejér kernels* by

$$K_n := \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} D_k \qquad (n \in \mathbf{P}).$$

Then we have

$$\sigma_n f(x) = \int_G f(y) K_n(x,y) d\mu(y) \qquad (x \in G, n \in \mathbf{P}).$$

Lemma 2.3.1. *If G is a bounded group, then there is a $C > 0$ such that*

$$\sup_{x \in G} \int_G |K_n(x,y)| \, d\mu(y) \leq C.$$

From above lemma we can get

Theorem 2.3.2. *If G is a bounded group and $f \in L^p(G)$, $1 \leq p \leq \infty$, then $\sigma_n f \to f$ in L^p-norm.*

Finally, we remark that Gát in [8] proved the pointwise convergence $\sigma_n f \to f$ a.e. ($f \in L^1(G)$). For the the Walsh case this proved by Fine [3], and for bounded (Abelian) Vilenkin groups proved by Simon and Pál [21].

Chapter 3

Fourier coefficients and absolute convergence

All of the results in this chapter appeared in [10].

If the group G is not Abelian then there is a $f \in L^1(G)$ such that $\widehat{f}(n) \nrightarrow 0$, so the well known Riemann-Lebesgue lemma is not valid for non-commutative cases. We estimates of the Fourier coefficients of a function in $L^1(G)$ using it's modulus of continuity (see (2.1) and (2.2)). We should not be surprised that $\|\psi_n\|_\infty$ appears in the estimation.

In (2.2) we can observe that $\omega_n(f, I)$ is a measure of the oscillation of f on I. Thus we say that a f function is of *p-bounded fluctuation* for some $1 \leq p < \infty$ if

$$\sup_{n\in\mathbf{N}} \left(\sum_{k=0}^{M_n-1} |\omega(f, I_n(k^*))|^p \right)^{\frac{1}{p}} < \infty,$$

where $k^* = (k_0, k_1, \dots) \in G$. A function is said to be of *bounded fluctuation* if it is of 1-bounded fluctuation. In this case define the *total fluctuation* by

$$\mathfrak{F}\ell(f) := \sup_{n\in\mathbf{N}} \left(\sum_{k=0}^{M_n-1} |\omega(f, I_n(k^*))| \right).$$

In order to prove the theorems of this section we first prove the following lemma. τ_h represent the left translation operator.

Lemma 3.1.1. *Let $f \in L^1(G)$, $n,\ k \in \mathbf{N}$. If $n > M_k$ then there is a $h \in I_k$ such that*

$$|\widehat{\tau_h f}(n) - \widehat{f}(n)| \geq |\widehat{f}(n)|.$$

Thus we obtain

Theorem 3.1.2. *Let $f \in L^1(G)$, $n,\ k \in \mathbf{N}$. If $n > M_k$ then*

$$|\widehat{f}(n)| < \omega_k(f)\|\psi_n\|_\infty.$$

Theorem 3.1.3. *Denote by $n \in \mathbf{N}$ and $s = \max\{j \in \mathbf{N} : n_j \neq 0\}$. If f is of bounded fluctuation, then*

$$|\widehat{f}(n)| \leq \frac{\mathcal{F}\ell(f)}{M_s}\|\psi_n\|_\infty.$$

On the other hand, we study the absolute convergence of Fourier series based on the system of characters of G for functions which are constant on the conjugacy classes of G.

Denote by p_k the number of conjugacy classes of the finite groups G_k ($k \in \mathbf{N}$). With them we construct the sequence $P_{k+1} := p_k P_k$ $k \in \mathbf{N}$ ($P_0 := 1$). Then every $n \in \mathbf{N}$ can be uniquely expressed as $n = \sum_{k=0}^{\infty} n_k P_k$, $0 \leq n_k < p_k$, $n_k \in \mathbf{N}$. This allows one to say that the $(n_0, n_1, \dots)$ sequence is the expansion of n with respect to the sequence $(p_0, p_1, \dots)$.

In addition, denote by $\chi_k^0 = 1$, $\chi_k^1, \dots, \chi_k^{p_k-1}$ the characters of the representations of the group G_k and let d_k^j be the dimension of the representation corresponding to the character χ_k^j. Then we obtain the characters of G in the form

$$\chi_n = \prod_{k=0}^{\infty} \chi_k^{n_k} \qquad (n = \sum_{k=0}^{\infty} n_k P_k;\ k \in \mathbf{N}).$$

We restrict the space $L^p(G)$ for the functions that are constant on every conjugacy classes of G. We denote this new space by $\mathcal{L}^p(G)$. The system of characters $\chi = (\chi_n, n \in \mathbf{N})$ of a non-abelian group is not complete in $L^1(G)$, but it is orthonormal and complete in $\mathcal{L}^1(G)$.

We denote by $\mathcal{A}$ the set of functions which have absolutely convergent Fourier series based in the system of characters of G. The Lipschitz class of order α will be denoted by $\mathrm{Lip}(\alpha)$. It is a closed subspace of the continuous functions endowed with the norm

$$\|f\|_{\mathrm{Lip}(\alpha)} := \sup_k \left[\sup_{x \in I_k} \|f(x\cdot) - f(\cdot)\|_\infty M_k^\alpha\right] + \|f\|_\infty.$$

The following two lemmas are used in the proof of the theorems bellow.

Lemma 3.2.1. *Let $f : G_i \to \mathbf{C}$, $j \in \{0, 1, \dots, p_i - 1\}$, $i \in \mathbf{N}$. Thus there is a $h \in G_i$ such that (if $\chi_i^j \not\equiv 1$)*

$$\left|\sum_{x \in G_i} f(xh)\overline{\chi_i^j}(x) - \sum_{x \in G_i} f(x)\overline{\chi_i^j}(x)\right| \geq \left|\sum_{x \in G_i} f(x)\overline{\chi_i^j}(x)\right|.$$

Lemma 3.2.2. *Let $f \in \mathcal{L}^1(G)$, $P_n \leq k < P_{n+1}$ $(k, n \in \mathbf{N})$. Then there is a $h_n \in G_n$ and $h := h_n e_n = (e, e, \dots, e, h_n, e, \dots)$ such that*

$$|\widehat{\tau_h f}(k) - \widehat{f}(k)| \geq |\widehat{f}(k)|.$$

Theorem 3.2.3. *Let* $\sup m < \infty$, *$f \in \mathcal{L}^2(G)$. If*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{M_n - 1} |\omega^{(2)}(f, I_n(k^*))|^2 \right)^{\frac{1}{2}} < \infty, \qquad \textit{then} \qquad f \in \mathcal{A}.$$

From the proof of the theorem we obtain that if $f \in \mathcal{L}^2(G)$ and

$$\sum_{n=0}^{\infty} m_n \left(\sum_{k=0}^{M_n - 1} |\omega^{(2)}(f, I_n(k^*))|^2 \right)^{\frac{1}{2}} < \infty, \qquad \text{then} \qquad f \in \mathcal{A}$$

independently of the fact that m is bounded or not.

Theorem 3.2.4. *Let $f : G \to \mathbf{C}$ a continuous function that is constant in the conjugacy classes of G and suppose that exists a $1 \leq p \leq 2$ such that*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{\substack{t_i \in G_i \\ i < n}} |\omega(f, I_n(t))|^p \right)^{\frac{1}{p}} < \infty. \qquad \textit{Then} \qquad f \in \mathcal{A}.$$

Corollary 3.2.5. *Let $f : G \to \mathbf{C}$ a continuous function that is constant in the conjugacy classes of G and suppose that*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{M_n} \omega_n(f) < \infty \qquad (\sup m < \infty).$$

Then $f \in \mathcal{A}$.

Corollary 3.2.6. *Let $f \in Lip(\alpha)$ for some $\alpha > \frac{1}{2}$* $(\sup m < \infty)$. *Then $f \in \mathcal{A}$.*

Chapter 4

On Hardy-norm of operators with property $\varDelta$

The property $\varDelta$ of operators was introduced by Schipp in [17] and he proved that some boundedness property with respect to L^p-norms of this operators are inherited by the sum of them. In Theorem 4.1.1 we resume these results. Several operators occurring in the theory of martingales can be given in this form. Renowned examples are the martingale-transforms that obviously are of this form, but more complicated sums of operators having the property $\varDelta$ will be also considered in this chapter, i.e., the conjugate martingale transforms. This chapter shows the results appeared in [25].

Let $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ be a probability measure space and $(\mathcal{A}_n, n \in \mathbf{N})$ be a sequence of σ-algebras for which

$$\{\emptyset, \Omega\} = \mathcal{A}_0 \subset \mathcal{A}_1 \subset \cdots \subset \mathcal{A}_n \subset \cdots \subset \mathcal{A}$$

and $\mathcal{A} = \sigma(\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{A}_n)$. Let $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ be a σ-algebra. Denote by $L^p(\mathcal{B})$ the complex Lebesgue space $L^p(\Omega, \mathcal{B}, \mu)$ for $1 \leq p \leq \infty$, $L^p := L^p(\mathcal{A})$, L^0 the set of $\mathcal{A}$ measurable step functions and $L_0^p := \{f \in L^p : Ef = 0\}$, where Ef is the mean value of the complex function f.

The set $L \subseteq L^1$ is say to be a $\mathcal{B}$-*linear subspace*, if for every function $f, g \in L$ and $\lambda_1, \lambda_2 \in L^\infty(\mathcal{B})$, we have $\lambda_1 f + \lambda_2 g \in L$. A mapping $T : L \to L^1$ defined on the $\mathcal{B}$-linear subspace $L \subseteq L^1$ will be called $\mathcal{B}$-*linear*, if for any $f, g \in L$ and $\lambda_1, \lambda_2 \in L^\infty(\mathcal{B})$ we have $T(\lambda_1 f + \lambda_2 g) = \lambda_1 Tf + \lambda_2 Tg$.

The conditional expectation operator of the function $f \in L^1$ relative to the σ-algebra $\mathcal{B}$ will be denoted by $E(f|\mathcal{B})$, furthermore $E_n f := E(f|\mathcal{A}_n)$ and $Ef = E_0 f$. We say that the mapping $T : L^p \to L^q$, $1 \leq p, q < \infty$ *has* *type* $(\mathcal{A}_n, p, q)$ if there exists a $C > 0$ such that for all $f \in L^p$

$$(E_n|Tf|^q)^{\frac{1}{q}} \le C\,(E_n|f|^p)^{\frac{1}{p}}\,. \tag{4.1}$$

In the same way let X, Y be two normed spaces with $\|.\|_X$ and $\|.\|_Y$ norms, respectively. The operator $T : X \to Y$ is *of type* (X, Y) if there is a $C > 0$ such that

$$\|Tf\|_Y \le C\|f\|_X \qquad (f \in X).$$

If $X = Y$ we only say that T is *bounded on* X. In case $X = L^p$ and $Y = L^q$ we will say that T is of type (p, q).

The operator $T : L^1 \to L^1$ is $\mathcal{B}$-*selfadjoint* if for every $f, g \in L^1$

$$E((Tf)\overline{g}|\mathcal{B}) = E(f\overline{Tg}|\mathcal{B}). \tag{4.2}$$

Further, we introduce the following notations relative to the martingale $(E_nf,\, n \in \mathbf{N},\, f \in L_0^1)$.

$$\begin{aligned}
\Delta_n f &:= E_n f - E_{n-1} f \qquad (\Delta_0 := 0),\\
f^* &:= \sup_{n\in\mathbf{N}} |E_n f|,\\
S(f) &:= \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\Delta_n f|^2\right)^{\frac{1}{2}},\\
s(f) &:= \left(\sum_{n=1}^{\infty} E_{n-1}|\Delta_n f|^2\right)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

It is clear that

$$E_n \circ E_m = E_{\min(n,m)}, \quad \Delta_n \circ \Delta_m = \delta_{mn}\Delta_n \quad (n, m \in \mathbf{N}), \tag{4.3}$$

where δ_{mn} is the Kronecker symbol.

We say that the sequence of operators $(T_n, n \in \mathbf{P})$ satisfy the *condition* Δ if

$$T_n \circ \Delta_n = \Delta_n \circ T_n = T_n. \tag{Δ}$$

F. Schipp [17] discovered that some boundedness properties of operators T_n are inherited by the operator

$$Tf := \sum_{n=1}^{\infty} T_n f.$$

Theorem 4.1.1 (F. Schipp [17]).

(i) *Let $1 < p < \infty$, and let T_n be a $\mathcal{A}_{n-1}$-selfadjoint linear operators with property Δ $(n \in \mathbf{P})$. If the operator T is of type (p,p), then it is also of type (q,q), where $1/p + 1/q = 1$.*

(ii) *Let $(T_n, n \in \mathbf{P})$ be a sequence of linear operators with property Δ and let $p \geq 2$. If the operators T_n are uniformly of type $(\mathcal{A}_{n-1}, 2, 2)$ and $(\mathcal{A}_{n-1}, p, p)$ then the operator T is of type (p,p).*

(iii) *Let $(T_n, n \in \mathbf{P})$ be a sequence of $\mathcal{A}_{n-1}$-linear operators having property Δ. If T_n is uniformly of type $(\mathcal{A}_{n-1}, 2, 2)$ and $(\mathcal{A}_{n-1}, 1, 1)$ at the same time, then T is of type $(2,2)$ and of weak type $(1,1)$, i.e., there is a positive constant c such that for every number $y > 0$ and every function $f \in L^1$*

$$\mu\{|Tf| > y\} \leq c\|f\|_1/y.$$

Throughout this chapter we use the notations employed by F. Weisz in [30], and $C > 0$ will denote an absolute constant which will not necessarily be the same at different occurrences. For $1 \leq p < \infty$ we shall consider the following martingale Hardy spaces:

$$\begin{aligned} H_p^s &:= \{f \in L_0^1 : \|f\|_{H_p^s} := \|s(f)\|_p < \infty\}, \\ H_p^S &:= \{f \in L_0^1 : \|f\|_{H_p^S} := \|S(f)\|_p < \infty\}, \\ H_p^* &:= \{f \in L_0^1 : \|f\|_{H_p^*} := \|f^*\|_p < \infty\}, \end{aligned}$$

and BMO spaces

$$\begin{aligned} BMO_p^- &:= \{\varphi \in L_0^p : \|\varphi\|_{BMO_p^-} := \sup_{k\geq 1} \left\|(E_k|\varphi - E_{k-1}\varphi|^p)^{\frac{1}{p}}\right\|_\infty < \infty\}, \\ BMO_p &:= \{\varphi \in L_0^p : \|\varphi\|_{BMO_p} := \sup_{k\geq 1} \left\|(E_k|\varphi - E_k\varphi|^p)^{\frac{1}{p}}\right\|_\infty < \infty\}. \end{aligned}$$

If every σ-algebra $\mathcal{A}_n$ are generated by finitely many (set) atoms (e.g m is bounded) then we define the VMO *spaces* by

$$\begin{aligned} VMO_p^- &:= \{\varphi \in BMO_p^- : \lim_{k\to\infty} \left\|(E_k|\varphi - E_{k-1}\varphi|^p)^{\frac{1}{p}}\right\|_\infty = 0\}, \\ VMO_p &:= \{\varphi \in BMO_p : \lim_{k\to\infty} \left\|(E_k|\varphi - E_k\varphi|^p)^{\frac{1}{p}}\right\|_\infty = 0\}. \end{aligned}$$

First we extend Theorem 4.1.1 to the spaces H_p^s and BMO_p.

Theorem 4.2.1. *Let T_n $(n \in \mathbf{P})$ be operators with property Δ and uniformly of type $(\mathcal{A}_{n-1}, 2, 2)$. Then the operator T is bounded on H_p^s $(p \geq 1)$.*

Theorem 4.2.2. *Let T_n $(n \in \mathbf{P})$ be operators with property Δ and uniformly of type $(\mathcal{A}_{n-1}, 2, 2)$ and $(\mathcal{A}_{n-1}, p, p)$ at the same time for some $p \geq 2$. Then it is valid that*

(i) The operator T is bounded on BMO_p.

(ii) If the operators T_n are linear and $\mathcal{A}_{n-1}$-selfadjoint then T is also bounded on BMO_q, where $1/p + 1/q = 1$.

Using the interpolation argument for $BMO_p \subset L_0^p \subset H_p^s$ $(p \geq 2)$ we have

Corollary 4.2.3. *Let $(T_n, n \in \mathbf{P})$ be a sequence of linear operators with property Δ. If for any $p \geq 2$ the operators T_n are uniformly of type $(\mathcal{A}_{n-1}, 2, 2)$ and uniformly bounded on BMO_p, then the operator T is bounded on BMO_p, L_0^p, BMO_q and L_0^q where $1/p + 1/q = 1$.*

Similar statement is valid for BMO_p^- and H_p^S. In this regard we use the equivalence of the BMO_p^- spaces $(1 \leq p < \infty)$, hence denote everyone by BMO_2^-. Furthermore, we also used (see Garsia [4] and Weisz [30]) that the spaces H_p^S and L_0^p are equivalent for $p > 1$. For this reason we restrict our attention to H_1^S.

Theorem 4.2.4. *Let $(T_n, n \in \mathbf{P})$ be a sequence of operators with property Δ. If the operators T_n are uniformly of type $(\mathcal{A}_{n-1}, 2, 2)$ and uniformly bounded on BMO_2^- then the operator T is also bounded on BMO_2^-. In addition if the operators T_n are linear, $\mathcal{A}_{n-1}$-selfadjoint and the σ-algebras $\mathcal{A}_n$ are generated by finitely many atoms, then T is also bounded on H_1^S.*

Finally we prove a similar statement to the point (iii) of Theorem 4.1.1 using the Davis decomposition of martingale of H_1^S.

Theorem 4.2.5. *Let $(T_n, n \in \mathbf{P})$ be a sequence of linear operators with property Δ. If the operators T_n are uniformly of type $(\mathcal{A}_{n-1}, 2, 2)$ and $(\mathcal{A}_{n-1}, 1, 1)$ at the same time, then T is bounded on H_1^S.*

We use the convergence of operators with property Δ to study the conjugate martingale transforms defined on not necessarily bounded Vilenkin group. The transform which first were introduced by Gundy [11] is given at follows. Let $A := (A_n, n \in \mathbf{P})$ be a sequence of complex matrices with $m_n - 1$ rows and columns, respectively. We assume that the Euclidean norms of A_n $(n \in \mathbf{P})$ are uniformly bounded, i.e. A_n are uniformly bounded on ℓ^2. Define the operator T_n by

$$T_n f := \sum_{k=1}^{m_n - 1} (A_n v_n)^{(k)} r_n^k,$$

where $v_n := (E_{n-1}(f\overline{r_n^k}))_{k=1}^{m_n-1}$. Then we say that the operator $T := \sum_{n=1}^{\infty} T_n$ is a conjugate martingale transform. Weisz [29] studied these transforms for bounded Vilenkin groups. For this transforms we can state

Theorem 4.3.1. *Let $p \geq 2$ and 1/p+1q=1. If the matrices A_n $(n \in \mathbf{P})$ are uniformly of type (ℓ^q, ℓ^p) and uniformly bounded on ℓ^2 then T is a bounded operator on L^r, H_r^s, BMO_r and H_1^s for r=p,q.*

Előszó

Az absztrakt harmonikus analízis elmélete nagyon sokat fejlődött az utóbbi évtizedekben. Egyre több matematikus azt a szemléletet támogatja, hogy a megfelelő környezet a Fourier-analízis fejlődéséhez a lokálisan kompakt csoportok osztályán keresendő. A Fourier-sorok és -integrálok klasszikus elméletétől kiindulva, az a relatív könnyedség, ahogyan az alapfogalmak és tételek átvihetők az általános elmélet környezetébe, már nem működik nem kommutatív esetben. Például, jól ismert tény, hogy a Riemann-Lebesgue lemma nem igaz nem kommutatív esetben.

A topológikus csoportok struktúráját nagyon széles körben tanulmányozták az 1925-1940 években, és manapság a téma kimerítettsége nagyon messze van még. A topológikus csoportok direkt szorzatának vizsgálata már a topológikus csoportok elmélete születésének kezdetén elindult. Pontryagin [16] nagyon alaposan vizsgálta a megszámlálható direkt szorzatot, speciálisan véges csoportok esetén. Vilenkin [1] számos eredményt kapott kommutatív esetben.

A diadikus csoport a legegyszerűbb, de nem triviális modell véges csoportok teljes direkt szorzatára. Ha a diadikus csoportok karaktereit Paley elrendezés szerint ábrázoljuk, a Walsh-rendszert kapjuk. Ezt a rendszert adatfeldolgozásnál használják, bár elméleti szempontból szintén érdekes .

A Walsh-Paley és Vilenkin rendszer természetes általánosítását Vilenkin [28] vezette be 1947-ben. Ő a teljes karakterrendszert használta ciklikus csoportok teljes direkt szorzata esetén, ily módon a kommutatív esetet kapta meg. Magyarországon egy diadikus analízis csoport működik Dr Schipp Ferenc vezetésével és számos eredményt kaptak ebben az elméletben. Például, bebizonyították a Paley tételt, vagyis azt, hogy egy $L^p(G)$-függvény Vilenkin-Fourier-sora konvergál $L^p(G)$-normában a függvényhez, ha $1 < p < \infty$. (Young [31], Schipp [17], Simon [19]).

A fenti példa nem érvényes tetszőleges, nem feltétlenül kommutatív véges csoportok teljes direkt szorzata esetén. Ezen csoportok vizsgálata munkánk célkitűzése. Ezeket a vizsgálatokat először Gát és Toledo [9]-ben jelentették meg és nem csak negatív eredményeket kaptak ezekre a csoportokra, hiszen bebizonyították a Fejér-közepek L^p-normában való konvergenciáját korlátos esetben , ha $p \geq 1$.

Munkánk szerkezete a következő. Az első fejezet bevezető jellegű, ahol megadjuk a topológiát, mértéket és rendszereket, amikkel dolgozni fogunk. Ezeket a rendszereket a szerző reprezentatív szorzatrendszereknek nevezte, mert reprezentáció elméletet használunk ezen rendszerek definiálásakor. A Weyl-Peter tétel biztosítja nekünk azt, hogy ezek a rendszerek teljes ortonormált rendszerek L^2-ben. Néhány nevezetes példát adunk meg ezekre a rendszerekre és ábrázoljuk őket a $[0, 1]$ intervallumon. Ebben a fejezetben a [12] és [13] jelöléseit használjuk.

A 2. fejezet összegzi a [9]-es publikáció eredményeit. Bevezetjük a Fourier-analízis alapfogalmait és megmutatjuk a Dirichlet-magok tulajdonságait, amelyekkel bizonyítjuk a Fourier-sorok és Fejér-közepek normakonvergenciával kapcsolatos állításokat. Bevezetjük a folytonossági modulus fogalmát, aminek segítségével olyan függvényosztályokat adhatunk meg, hogy a Fourier-sorai konvergáljanak a függvényhez L^1-normában. Végül egy fontos pozitív eredményhez jutunk, nevezetesen ha a G csoport korlátos, akkor egy $L^p(G)$-beli függvény ($1 \leq p \leq \infty$) Fejér-közepei konvergálnak a függvényhez L^p-normában.

A 3. fejezetben Fourier-együtthatók becslésével foglalkozunk, amelyek ezekben a rendszerekben nem feltétlenül tartanak nullához. Ehhez a függvény folytonossági modulusát használjuk és a rendszer uniform normáját. Speciálisan a korlátos fluktuációjú függvényekkel foglalkozunk. Másrészről egy érdekes függvényosztályt is tanulmányozunk, nevezetesen azokat a függvényeket, amelyek állandók minden konjugált osztályon. A reprezentációk karakterrendszere teljes ezen a függvény osztályon, ezért karaktereket használunk a sorok felépítéséhez és ezen sorok abszolút konvergenciáját vizsgáljuk.

A 4. fejezet a szorzatrendszer általános esetével foglalkozik és ráilleszti Schipp [17] eredményeit a Hardy- és a BMO-normakonvergenciára. A Δ tulajdonságú operátorok alkalmazhatók a konjugált martingál transzformációk vizsgálatánál, amelyek egy nem feltétlenül korlátos Vilenkin csoporton értelmezhetők. Ebben a fejezetben a különböző Hardy és BMO terek jelölésekor a [30] könyv jelöléseit használjuk.

Végül, a szerző szeretne köszönetet mondani Dr. Schipp Ferencnek értékes ötletéért és Dr. Gát Györgynek számos észrevételeéért, megjegyzéséért, melyekkel gazdagította jelen értekezést és a dolgozat kéziratának gondos elolvasásáért.

1. fejezet

Véges csoportok teljes direkt szorzata struktúrája

Legyen $m := (m_k,\ k \in \mathbf{N})$ pozitív egész számok sorozata, ahol $m_k \geq 2$ és legyen G_k egy m_k rendű csoport ($k \in \mathbf{N}$). Tegyük fel, hogy minden véges csoport diszkrét topológiával és egyre normált μ_k Haar mértékkel rendelkezik. Jelölje G azt a kompakt csoportot, amely előáll G_k véges csoportok teljes direkt szorzataként és rendelkezik a véges csoportok szorzat-topológiáival, -műveleteivel és -mértékeivel (μ). A kompakt teljesen széteső G csoportot korlátosnak nevezzük, ha az m sorozat korlátos.

Jelölje G^0 azon sorozatok halmazát, amely e-ben végződnek (illetve a „véges" sorozatok halmazát), $I_0(x) := G$,

$$I_n(x) := \{y \in G : y_k = x_k, \text{ for } 0 \leq k < n\} \quad (x \in G, n \in \mathbf{N})$$

$I_n := I_n(e)$. Azt mondjuk, hogy $I_n(x)$ egy intervallum. A szorzattopológiában az I_n intervallumok az egységelemnek egy lokális környezetbázisát alkotják.

Ha $M_0 := 1$ és $M_{k+1} := m_k M_k$, $k \in \mathbf{N}$, ekkor minden $n \in \mathbf{N}$ esetén egyértelműen felírható $n = \sum_{k=0}^{\infty} n_k M_k$, $0 \leq n_k < m_k$, $n_k \in \mathbf{N}$ módon. Ekkor azt mondjuk, hogy az $(n_0, n_1, \dots)$ sorozat az n felbontása m szerint. Legyen $n^* = (n_0, n_1, \dots) \in G$. Gyakran használjuk a következő jelölést: legyen $|n| := \max\{k \in \mathbf{N} : n_k \neq 0\}$ és $n_{(k)} := \sum_{j=0}^{k-1} n_k M_k$, $n^{(k)} = \sum_{j=k}^{\infty} n_k M_k$.

Jelölje Σ_k a G_k csoport duál csoportját. Legyen $\{\varphi_k^s : 0 \leq s < |G_k|\}$ a G_k csoport normalizált koordináta-függvényei és tegyük fel, hogy $\varphi_k^0 \equiv 1$. Továbbá, legyen ψ, φ_k^s szorzatrendszere, vagyis

$$\psi_n(x) := \prod_{k=0}^{\infty} \varphi_k^{n_k}(x_k) \qquad (x \in G),$$

ahol $n = \sum_{k=0}^{\infty} n_k M_k$ és $x = (x_0, x_1, \dots)$. A ψ rendszert egy reprezentatív szorzatrendszereknek nevezzük. A Weyl-Peter tétel biztosítja nekünk azt, hogy ezek a rendszerek teljes ortonormált rendszerek L^2-ben.

A ψ_n $(n \in \mathbf{N})$ nem feltétlenül egyenletesen korlátosak, ezért definiáljuk:

$$\Psi_k := \max_{n<M_k} \|\psi_n\|_1 \|\psi_n\|_\infty \qquad (k \in \mathbf{N}).$$

A Ψ sorozat fontos szerepet játszik a Fourier-sorok normakonvergenciájában.

A Walsh-Paley rendszer a legegyszerűbb de nem triviális példa reprezentatív szorzatrendszereknek. Ebben az esetben legyen $m_k = 2$ minden $k \in \mathbf{N}$ esetén és $G_k := \mathcal{Z}_2$ a másodrendű ciklikus csoport. G_k karakterei a *Rademacher függvények*:

$$\varphi_k^s(x) = (-1)^{sx} \qquad (s \in \{0,1\},\ x \in \mathcal{Z}_2).$$

Könnyű belátni, hogy ebben az esetben $\Psi_k \equiv 1$.

A Vilenkin csoport ciklikus csoportok teljes direkt szorzata. A $\mathcal{Z}_{m_k}$ $(k \in \mathbf{N})$ karakterei az általánosított Rademacher függvények:

$$\varphi_k^s(x) = \exp(2\pi\imath sx/m_k) \qquad (s \in \{0, \dots m_k - 1\},\ x \in \mathcal{Z}_{m_k},\ \imath^2 = -1).$$

φ szorzatrendszerét Vilenkin rendszernek nevezzük. Ebben az esetben is igaz, hogy $\Psi_k \equiv 1$.

A legkisebb rendű nem kommutatív csoport $\mathcal{S}_3$, vagyis 3 elem permutációcsoportja. Legyen $G_k = \mathcal{S}_3$ minden $k \in \mathbf{N}$ esetén. $\mathcal{S}_3$-ban a következő módon rendezzük a normalizált koordinátafüggvényeket:

	e	(12)	(13)	(23)	(123)	(132)	$\|\varphi^s\|_1$	$\|\varphi^s\|_\infty$
φ^0	1	1	1	1	1	1	1	1
φ^1	1	-1	-1	-1	1	1	1	1
φ^2	$\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{2\sqrt{2}}{3}$	$\sqrt{2}$
φ^3	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{2\sqrt{2}}{3}$	$\sqrt{2}$
φ^4	0	0	$-\frac{\sqrt{6}}{2}$	$\frac{\sqrt{6}}{2}$	$\frac{\sqrt{6}}{2}$	$-\frac{\sqrt{6}}{2}$	$\frac{\sqrt{6}}{3}$	$\frac{\sqrt{6}}{2}$
φ^5	0	0	$-\frac{\sqrt{6}}{2}$	$\frac{\sqrt{6}}{2}$	$-\frac{\sqrt{6}}{2}$	$\frac{\sqrt{6}}{2}$	$\frac{\sqrt{6}}{3}$	$\frac{\sqrt{6}}{2}$

Vegyük észre, hogy φ_k^s felveheti a 0 értéket, a φ szorzatrendszere nem egyenletesen korlátos és $\Psi_k = \left(\frac{4}{3}\right)^k \to \infty$, ha $k \to \infty$.

Egy másik érdekes példa a $\mathcal{Q}_2$ esete, vagyis a 8-ad rendű kvaternió csoport. Legyen $G_k = \mathcal{Q}_2$ minden $k \in \mathbf{N}$ esetén. $\mathcal{Q}_2$-ben a következő módon rendezzük a normalizált koordinátafüggvényeket:

	e	a	a^2	a^3	b	ab	a^2b	a^3b	$\|\varphi^s\|_1$	$\|\varphi^s\|_\infty$
φ^0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
φ^1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1
φ^2	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	1
φ^3	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1	1	1
φ^4	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}\imath$	$-\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}\imath$	0	0	0	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\sqrt{2}$
φ^5	$\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}\imath$	$-\sqrt{2}$	$\sqrt{2}\imath$	0	0	0	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\sqrt{2}$
φ^6	0	0	0	0	$\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}\imath$	$-\sqrt{2}$	$\sqrt{2}\imath$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\sqrt{2}$
φ^7	0	0	0	0	$-\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}\imath$	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}\imath$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\sqrt{2}$

Vegyük észre, hogy $|\varphi^s|$ csak a 0-t és a dimenziója gyökét veheti fel értékeként. Ezért a koordinátafüggvények abszolút értéke csak 0 vagy 1 lehet. Az ilyen reprezentációkat monomiálisnak nevezzük. Ha minden reprezentáció monomiális, akkor $\Psi_k = 1$ minden $k \in \mathbf{N}$ esetén, de a G csoportnak nem feltétlenül kommutatívnak kell lennie.

A G topológiája metrizálható. Sőt, egy ide vonatkozó metrikát a következő módon hozhatunk létre. Rendezzük a G_k, $(k \in \mathbf{N})$ csoport elemeit valamilyen módon úgy, hogy az első az egységelem legyen. Valóban, egy rendezés nem más mint egy bijekció G_k és $\{0, 1, \dots, m_k - 1\}$ elemei között, amely minden $x \in G_k$ elemhez rendel egy $0 \le \overline{x} < m_k$ egészet ($\overline{e} = 0$). Legyen

$$|x| := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\overline{x_k}}{M_{k+1}} \qquad (x \in G).$$

Könnyű belátni, hogy $|.|$ egy norma és a belőle származó $d(x, y) := |xy^{-1}|$ metrika a G topológiáját indukálja. Továbbá, $0 \le |x| \le 1$ minden $x \in G$ esetén. Ennek segítségével reprezentáljuk a G csoportot a $[0, 1]$ intervallumon.

Minden $x \in [0, 1]$ felírható

$$x := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\overline{x_k}}{M_{k+1}} \qquad (0 \le \overline{x_k} \le m_k - 1),$$

módon, de vannak olyan számok, amelyeknek van két ilyen felírása. Ezek a számok a

$$\mathbf{Q} := \left\{ \frac{p}{M_n} : 0 \le p < M_n, \ n, p \in \mathbf{N} \right\}$$

halmazon találhatók és m-adikus számoknak hívjuk őket. A többi számoknak csak egy ilyen felírása van. Az m-adikus számoknak van olyan felbontása, amely 0-val végződik és egy másik, amely $m_k - 1$-gyel. Ilyenkor válaszzuk az elsőt és ilyen módon egy egyértelmű leképezést kapunk minden $[0, 1]$ intervallumbeli szám és a felírása között, amely ezentúl a szám m-adikus felbontásának hívunk. Ily módon minden $(\overline{x_0}, \overline{x_1}, \dots)$ m-adikus felbontású $[0, 1]$

intervallumbeli számhoz hozzárendelünk egy G-beli elemet, amelynek felbontása $(x_0, x_1, \dots)$. Jelölje ρ ezt a hozzárendelést, amelyet Fine-leképezésnek nevezzük.

A Fine-leképezés segítségével bevezetünk egy új műveletet a $[0, 1]$ intervallumon: $x \odot y := |\rho(x)\rho(y)| \quad (x, y \in [0, 1[)$.

A következő tétel adja meg a kapcsolatot a G-n értelmezett Haar-integrál és a $[0, 1[$ intervallumon értelmezett Lebesgue-integrál között.

Tétel 1.6.1. *Legyen ρ a Fine-leképezés.*

(a) Ha $f \in L^0(G)$, akkor $f \circ \rho \in L^0$. Fordítva, ha $g \in L^0$ és

$$f(x) := g(|x|) \qquad (x \in G), \tag{1.1}$$

akkor $f \in L^0(G)$.

(b) Ha f egy integrálható függvény G-n, akkor $f \circ \rho$ szintén Lebesgue- integrálható és

$$\int_G f \, d\mu = \int_0^1 (f \circ \rho)(x) \, dx.$$

Fordítva, ha g is Lebesgue- integrálható és f-t a (1.1) módon értelmezzük, akkor f egy integrálható függvény G-n és

$$\int_0^1 g(x) \, dx = \int_G f \, d\mu.$$

A Lebesgue-mérték (λ) szintén transzláció invariáns az új művelet alatt. Legyen f egy a $[0, 1[$ intervallumon értelmezett komplex értékű függvény és jelölje $(\tau_y f)(x) := f(y \odot x)$ $(x, y \in [0, 1[)$, a baloldali eltolás operátort az új művelet alatt. Jelölje még $\tau_y(E) := \{y \odot x : x \in E\}$ $(E \subseteq [0, 1[,\ y \in [0, 1[)$ az E halmaz baloldali eltoltját.

Tétel 1.6.2. *Legyen f egy komplex értékű függvény a $[0, 1[$ intervallumon. Ekkor*

(a) ha az f függvény Lebesgue-integrálható, akkor $\tau_y f$ is Lebesgue-integrálható és

$$\int_0^1 (\tau_y f)(x) \, dx = \int_0^1 f(x) \, dx \qquad (y \in [0, 1[).$$

(b) Különösen minden $E \subseteq [0, 1[$ Lebesgue-mérhető halmaz esetén

$$\lambda(\tau_y(E)) = \lambda(E) \qquad (y \in [0, 1[).$$

Végül, a ψ rendszer ábrázolható a $[0, 1[$ intervallumon ha helyette a következő

$$\upsilon_n := \psi_n \circ \rho \qquad (n \in \mathbf{N})$$

rendszert ábrázoljuk a 1.5.1. tétel szerint.

2. fejezet

Fourier-sorok és Fejér közepek L^p-normakonvergenciája

Ebben a fejezetben bevezetjük a Fourier-analízis alapfogalmait, úgymint a Fourier-együtthatók, Fourier-sorok és Dirichlet-magok.

Minden $f \in L^1(G)$ függvény esetén a Fourier-együtthatóit a

$$\widehat{f}_k := \int_G f\overline{\psi}_k d\mu \qquad (k \in \mathbf{N}),$$

és a Fourier-sora n-dik részlet összegét a

$$S_n f := \sum_{k=0}^{n-1} \widehat{f}_k \psi_k \qquad (n \in \mathbf{P}).$$

módon értelmezünk.

A Dirichlet-magok definíciója a következő.

$$D_n(x,y) := \sum_{k=0}^{n-1} \psi_k(x)\overline{\psi}_k(y) \qquad (n \in \mathbf{P}).$$

Könnyen belátható, hogy

$$S_n f(x) = \int_G f(y) D_n(x,y) d\mu(y).$$

A Dirichlet-magok fontos szerepet játszanak a Fourier-sorok konvergenciájában. A következő lemmákat ilyen célra használjuk és először [9]-ben jelentek meg. (lásd még [26].)

Lemma 2.1.1. *Ha $n \in \mathbf{N}$ és $x, y \in G$, akkor*

$$D_n(x,y) = \sum_{k=0}^{\infty} D_{M_k}(x,y) \left(\sum_{s=0}^{n_k-1} \varphi_k^s(x_k)\overline{\varphi}_k^s(y_k) \right) \psi_{n^{(k+1)}}(x)\overline{\psi}_{n^{(k+1)}}(y),$$

ahol $(n_0, n_1, ...)$ az n szám felbontása és $x = (x_0, x_1, ...)$, $y = (y_0, y_1, ...)$.

Lemma 2.1.2. *(Paley lemma) Ha $n \in \mathbf{N}$ és $x, y \in G$, akkor*

$$D_{M_n}(x,y) = \begin{cases} M_n & ha\ x \in I_n(y) \\ 0 & ha\ x \notin I_n(y) \end{cases},$$

ahol $I_n(y)$ a következő intervallum:

$$I_n(y) := \{x \in G : x_k = y_k,\ for\ 0 \leq k < n\} \quad (y \in G, n \in \mathbf{N}).$$

A Paley lemmából következik, hogy egy a G csoporton értelmezett és integrálható f függvény Fourier-sora n-dik részlet összegének van olyan részsorozata, amely L^p-normában ($p \geq 1$) és majdnem mindenütt konvergál a függvényhez. Ez az állítás nagy eltérést mutat a klasszikus Fourier-analízistől.

Következmény 2.1.3. *Minden $f \in L^p(G)$, $p \geq 1$ esetén, $S_{M_n} f$ L^p-normában ($p \geq 1$) és majdnem mindenütt konvergál az f függvényhez.*

A Paley-lemmából következik, hogy egy intervallum karakterisztikus függvénye és ezek véges lineáris kombinációja is reprezentatív függvények. Mivel így az intervallumok karakterisztikus függvényeinek lineáris kombinációja sűrű $L^1(G)$-ben, azt kapjuk, hogy

Következmény 2.1.4. *A ψ rendszer ortonormált, és teljes $L^1(G)$-ben.*

A Vilenkin rendszer esetén az S_n operátorok egyenletesen (p, p) típusúak $(1 < p < \infty)$. Ezt az állítást Young [31], Schipp [17] és Simon [19] bizonyították be egymástól függetlenül. Az állítás nem általánosítható tetszőleges nem kommutatív csoport esetére. A következő tételben azt tesszük fel, hogy ugyanazok a csoportok, amely a G csoport szorzatán szerepelnek, ugyanazzal a φ rendszerrel rendelkeznek.

Tétel 2.2.1. *Ha a G csoport korlátos de a Ψ sorozat nem korlátos, akkor van olyan $p > 1$ és olyan $f \in L^p(G)$ függvény, amelynek Fourier-sora nem konvergál a függvényhez L^p-normában.*

Ezek után a $p = 1$ esettel foglalkozunk.

Tétel 2.2.2. *Tetszőleges G csoport esetére van olyan $f \in L^1(G)$ függvény, amelynek Fourier-sora nem konvergál a függvényhez L^1-normában.*

Legyen $f \in L^p(G)$, $1 \le p \le \infty$ és I egy intervallum. Továbbá, $I = I_n(x)$ valamely $x \in G, n \in \mathbf{N}$ esetén. Jelölje

$$(2.1)\quad \omega^{(p)}(f,I) := \sup_{h \in I_n} \left(\frac{1}{\mu(I)} \int_I |\tau_h f - f|^p \, d\mu \right)^{\frac{1}{p}}, \qquad \omega(f,I) := \omega^{(1)}(f,I)$$

az f lokális folytonossági modulusát I-n, és jelölje még

$$(2.2)\qquad \omega_n^{(p)}(f) := \sup_{h \in I_n} \|\tau_h f - f\|_p, \quad (n \in \mathbf{N}), \qquad \omega_n(f) := \omega_n^{(1)}(f)$$

az f n-dik folytonossági modulusát L^p-n, ahol $\tau_h f(x) := f(xh)$ a jobboldali eltolás operátor. Bebizonyítjuk, hogy a folytonossági modulus bizonyos feltételei esetén a függvény Fourier-sora konvergál a függvényhez L^1-normában. A következő eredmények, amelyek a [27]-ben jelentek meg, Simon [20]-beli eredményeinek általánosítása nem feltétlenül kommutatív csoportok esetére.

Tétel 2.2.4. *Legyen f egy $L^1(G)$-beli függvény, amire teljesül a következő feltétel:*

$$\omega_k(f) = o(\Psi_k \sum_{j=0}^{k} m_j)^{-1}.$$

Ekkor az $S_n f$ Fourier-sora konvergál az f függvényhez L^1-normában.

Ha az m sorozat korlátos, akkor egyszerű belátni, hogy van olyan $c > 0$ úgy, hogy $m_k \le c \log m_k$ minden $k \in \mathbf{N}$ esetén. Ekkor a 2.2.4. tételből kapjuk:

Következmény 2.2.5. *Legyenf egy $L^1(G)$-beli függvény, amelyre a következő feltétel teljesül:*

$$(2.3)\qquad \omega_k(f) = o(\Psi_k \log M_k)^{-1}.$$

Ha a G csoport korlátos, akkor az $S_n f$ Fourier-sora konvergál az f függvényhez L^1-normában.

A fenti következmény a jól ismert Dini-Lipschitz teszthez hasonlít a Vilenkin-sorok uniform konvergenciája esetén (lásd [15]). A 2.2.4. tétel bizonyításához hasonlóan, olyan számításokat végezhetünk, amiből a következő tételt kapjuk.

Tétel 2.2.6. *Legyen f egy folytonos függvény G-n, amire teljesül a következő feltétel:*

$$\omega_k^\infty(f) = o(\Psi_k \sum_{j=0}^{k} m_k)^{-1}.$$

Ekkor az $S_n f$ Fourier-sora konvergál az f függvényhez uniform normában.

Az előző eredmények egyszerűbbek, ha a Ψ sorozat korlátos. Ebben az esetben eltűnik az (2.3), (2.4) és (2.5) összefüggésekből. Így azt kapjuk, hogy

Tétel 2.2.7. *Legyen f egy folytonos függvény G-n, amire teljesül a következő feltétel:*

$$\sum_{k=0}^{\infty} m_k \omega_k^\infty(f) < \infty$$

és tegyük fel hogy a Ψ sorozat korlátos. Ekkor az $S_n f$ Fourier-sora konvergál az f függvényhez uniform normában.

Jelölje az f függvény Fejér-közepeit:

$$\sigma_n f = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} S_k f \qquad (n \in \mathbf{P}),$$

és a Fejér-magokat:

$$K_n := \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} D_k \qquad (n \in \mathbf{P}).$$

Ekkor

$$\sigma_n f(x) = \int_G f(y) K_n(x,y) d\mu(y) \qquad (x \in G, n \in \mathbf{P}).$$

Lemma 2.3.1. *Ha a G csoport korlátos, akkor van olyan $C > 0$, amire teljesül:*

$$\sup_{x \in G} \int_G |K_n(x,y)|\, d\mu(y) \leq C.$$

Az előző lemmából következik:

Tétel 2.3.2. *Ha a G csoport korlátos, akkor egy $L^p(G)$-beli függvény ($1 \leq p \leq \infty$) Fejér-közepei konvergálnak a függvényhez L^p-normában.*

Végül szeretnénk megjegyezni, hogy Gát [8]-ben bebizonyította a majdnem mindenütti konvergenciáját ($\sigma_n f \to f$ m.m., ha $f \in L^1(G)$). Walsh-rendszer esetén Fine [3], korlátos Vilenkin esetén Simon és Pál [21] bizonyította be.

Chapter 3

Fourier-együtthatók és abszolút konvergencia

E fejezet eredményei [10]-ben találhatók.

Ha G csoport nem kommutatív, akkor van olyan $f \in L^1(G)$ úgy, hogy $\widehat{f}(n) \nrightarrow 0$, vagyis a jól ismert Riemann-Lebesgue lemma nem érvényes nem kommutatív esetre. Az $L^1(G)$-beli függvények Fourier-együtthatója becslésével foglalkozunk. Ehhez a függvény folytonossági modulusát (lásd (2.1) és (2.2)) használjuk és a rendszer uniform normáját.

(2.2)-ben láthatjuk, hogy $\omega_n(f, I)$, f oszcilláció mértéke I-n. Ekkor azt mondjuk, hogy az f függvény p-korlátos fluktuációjú ha

$$\sup_{n\in\mathbf{N}} \left(\sum_{k=0}^{M_n-1} |\omega(f, I_n(k^*))|^p \right)^{\frac{1}{p}} < \infty,$$

ahol $k^* = (k_0, k_1, \dots) \in G$. Továbbá, azt mondjuk, hogy egy függvény korlátos fluktuációjú ha 1-korlátos fluktuációjú. Ekkor a totális fluktuáció:

$$\mathcal{F}\ell(f) := \sup_{n\in\mathbf{N}} \left(\sum_{k=0}^{M_n-1} |\omega(f, I_n(k^*))| \right).$$

A tételek bizonyításához szükségünk van a következő lemmára. τ_h a baloldali eltolási operátor jelent.

Lemma 3.1.1. *Legyen $f \in L^1(G)$, $n,\ k \in \mathbf{N}$. Ha $n > M_k$, akkor van olyan $h \in I_k$, amire teljesül*

$$|\widehat{\tau_h f}(n) - \widehat{f}(n)| \geq |\widehat{f}(n)|.$$

A lemmából kapjuk:

Tétel 3.1.2. *Legyen $f \in L^1(G)$, $n,\ k \in \mathbf{N}$. Ha $n > M_k$ akkor*

$$|\widehat{f}(n)| < \omega_k(f)\|\psi_n\|_\infty.$$

Tétel 3.1.3. *Legyen $n \in \mathbf{N}$ és $s = \max\{j \in \mathbf{N} : n_j \neq 0\}$. Ha f egy korlátos fluktuációjú függvény, akkor*

$$|\widehat{f}(n)| \leq \frac{\mathcal{F}\ell(f)}{M_s}\|\psi_n\|_\infty.$$

Másrészről egy érdekes függvényosztályt is tanulmányozunk, nevezetesen azokat a függvényeket, amelyek állandók minden konjugált osztályon.

Jelölje p_k a G_k véges csoport konjugált osztályainak számát. Vele a $P_{k+1} := p_k P_k$ $k \in \mathbf{N}$ ($P_0 := 1$) sorozatot alkotjuk. Ekkor minden $n \in \mathbf{N}$ esetén egyértelműen felírható $n = \sum_{k=0}^{\infty} n_k P_k$, $0 \leq n_k < p_k$, $n_k \in \mathbf{N}$ módon. Ennek segítségével azt mondjuk, hogy a $(n_0, n_1, \dots)$ sorozat az n felbontása a $(p_0, p_1, \dots)$ sorozat szerint.

Továbbá, jelölje $\chi_k^0 = 1$, $\chi_k^1, \dots, \chi_k^{p_k - 1}$ a G_k csoport reprezentációnak karaktereit és d_k^j a χ_k^j karakterhez tartozó reprezentációnak dimenzióját. Ekkor G karakterei:

$$\chi_n = \prod_{k=0}^{\infty} \chi_k^{n_k} \qquad \left(n = \sum_{k=0}^{\infty} n_k P_k;\ k \in \mathbf{N}\right).$$

Szűkítsük az $L^p(G)$ teret azokra a függvényekre, amelyek állandók G minden konjugált osztályán. Jelölje $\mathcal{L}^p(G)$ az ilyen módon kapott függvényteret. A $\chi = (\chi_n, n \in \mathbf{N})$ karakterrendszer nem teljes $L^1(G)$-ben, de már teljes ortonormált rendszer $\mathcal{L}^1(G)$-ben.

$\mathcal{A}$-val jelöljük azon függvények halmazát, amelyeknek van abszolút konvergens Fourier-sora, melyek a karakterrendszeren alapszanak. Az α rendű Lipschitz osztályt $\mathrm{Lip}(\alpha)$-val jelöljük. Ez a folytonos függvények zárt osztálya, amely a következő normával ellátott:

$$\|f\|_{\mathrm{Lip}(\alpha)} := \sup_k \left[\sup_{x \in I_k} \|f(x\cdot) - f(\cdot)\|_\infty M_k^\alpha\right] + \|f\|_\infty.$$

A következő két lemmát a tételek bizonyításakor használjuk.

Lemma 3.2.1. *Legyen $f : G_i \to \mathbf{C}$, $j \in \{0, 1, \dots, p_i - 1\}$, $i \in \mathbf{N}$. Ekkor van olyan $h \in G_i$ (ha $\chi_i^j \not\equiv 1$) úgy, hogy*

$$\left|\sum_{x \in G_i} f(xh)\overline{\chi_i^j}(x) - \sum_{x \in G_i} f(x)\overline{\chi_i^j}(x)\right| \geq \left|\sum_{x \in G_i} f(x)\overline{\chi_i^j}(x)\right|.$$

Lemma 3.2.2. *Legyen* $f \in \mathcal{L}^1(G)$, $P_n \leq k < P_{n+1}$ $(k, n \in \mathbf{N})$. *Ekkor van olyan* $h_n \in G_n$ *és* $h := h_n e_n = (e, e, \dots, e, h_n, e, \dots)$ *úgy, hogy*

$$|\widehat{\tau_h f}(k) - \widehat{f}(k)| \geq |\widehat{f}(k)|.$$

Tétel 3.2.3. *Legyen* $\sup m < \infty$, $f \in \mathcal{L}^2(G)$. *Ha*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{M_n - 1} |\omega^{(2)}(f, I_n(k^*))|^2 \right)^{\frac{1}{2}} < \infty, \qquad \textit{akkor} \qquad f \in \mathcal{A}.$$

A tétel bizonyításából azt kapjuk, hogy ha $f \in \mathcal{L}^2(G)$ és

$$\sum_{n=0}^{\infty} m_n \left(\sum_{k=0}^{M_n - 1} |\omega^{(2)}(f, I_n(k^*))|^2 \right)^{\frac{1}{2}} < \infty, \qquad \text{akkor} \qquad f \in \mathcal{A}$$

független az m sorozat korlátosságától.

Tétel 3.2.4. *Legyen* $f : G \to \mathbf{C}$ *egy olyan folytonos függvény, amely állandó* G *minden konjugált osztályán és tegyük fel, hogy van olyan* $1 \leq p \leq 2$ *úgy, hogy*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{\substack{t_i \in G_i \\ i < n}} |\omega(f, I_n(t))|^p \right)^{\frac{1}{p}} < \infty, \qquad \textit{akkor} \qquad f \in \mathcal{A}.$$

Következmény 3.2.5. *Legyen* $f : G \to \mathbf{C}$ *egy olyan folytonos függvény, amely állandó* G *minden konjugált osztályán és tegyük fel, hogy*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{M_n}\, \omega_n(f) < \infty \qquad (\sup m < \infty).$$

Ekkor $f \in \mathcal{A}$.

Következmény 3.2.6. *Legyen* $f \in Lip(\alpha)$ *valamely* $\alpha > \frac{1}{2}$ $(\sup m < \infty)$. *Ekkor* $f \in \mathcal{A}$.

Chapter 4

A Δ tulajdonságú operátorok Hardy-normájáról

Schipp [17] vezette be az operátorok Δ tulajdonságát és bebizonyította, hogy ezeknek az operátoroknak néhány L^p normatulajdonságát az összegük szintén örökli. A 4.1.1. tétel összegzi ezeket az eredményeket. Számos olyan operátor, amellyel a martingál-elméletben találkozunk, szintén felírható ilyen módon. Nevezetes esetek a martingál-transzformációk, amelyek nyilvánvalóan ilyen módon írhatók fel, de bonyolultabb Δ tulajdonságú operátorok összegével is foglalkozunk ebben a fejezetben, a konjugált martingál-transzformációval. Ebben a fejezetben a [25] dolgozat eredményeit foglaljuk össze.

Legyen $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ egy valószínűségi és $(\mathcal{A}_n, n \in \mathbf{N})$, σ-algebrák sorozata, amelyekre

$$\{\emptyset, \Omega\} = \mathcal{A}_0 \subset \mathcal{A}_1 \subset \cdots \subset \mathcal{A}_n \subset \cdots \subset \mathcal{A}$$

teljesül és $\mathcal{A} = \sigma(\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{A}_n)$. Legyen még $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ egy σ-algebra. Jelölje $L^p(\mathcal{B})$ a komplex Lebesgue-teret $L^p(\Omega, \mathcal{B}, \mu)$ minden $1 \le p \le \infty$ esetén és $L^p := L^p(\mathcal{A})$, L^0 az $\mathcal{A}$-mérhető lépcsős függvények halmazát. Továbbá, legyen $L_0^p := \{f \in L^p : Ef = 0\}$, ahol Ef az f komplex függvény várható értéke.

Azt mondjuk, hogy $L \subseteq L^1$ egy $\mathcal{B}$-lineáris altér, ha minden $f, g \in L$ függvény és $\lambda_1, \lambda_2 \in L^\infty(\mathcal{B})$ esetén igaz, hogy $\lambda_1 f + \lambda_2 g \in L$. Az $L \subseteq L^1$ $\mathcal{B}$-lineáris altéren értelmezett $T : L \to L^1$ leképezést $\mathcal{B}$-lineárisnak nevezzük, ha minden $f, g \in L$ és $\lambda_1, \lambda_2 \in L^\infty(\mathcal{B})$ esetén igaz, hogy $T(\lambda_1 f + \lambda_2 g) = \lambda_1 Tf + \lambda_2 Tg$.

Egy $f \in L^1$ függvény feltételes varható érték operátorát a $\mathcal{B}$ σ-algebrára nézve $E(f|\mathcal{B})$-vel jelöljük, továbbá, $E_n f := E(f|\mathcal{A}_n)$ és $Ef = E_0 f$. Azt mondjuk, hogy a $T : L^p \to L^q$, $1 \le p, q < \infty$ leképezés $(\mathcal{A}_n, p, q)$ típusú ha van olyan $C > 0$ úgy, hogy minden $f \in L^p$ esetén

$$(E_n|Tf|^q)^{\frac{1}{q}} \leq C\,(E_n|f|^p)^{\frac{1}{p}}\,. \tag{4.1}$$

Hasonlóan legyen X és Y két normál tér, amely a $\|.\|_X$ és $\|.\|_Y$ normával rendelkeznek. A $T : X \to Y$ operátor (X, Y) típusú ha van olyan $C > 0$ úgy, hogy

$$\|Tf\|_Y \leq C\|f\|_X \qquad (f \in X).$$

Ha $X = Y$ csak annyit mondunk, hogy T korlátos X-n. Abban az esetben, ha $X = L^p$ és $Y = L^q$ azt mondjuk, hogy T (p, q) típusú.

A $T : L^1 \to L^1$ operátor $\mathcal{B}$-önadjungált, ha minden $f, g \in L^1$ esetén

$$E((Tf)\overline{g}|\mathcal{B}) = E(f\overline{Tg}|\mathcal{B}). \tag{4.2}$$

Azonkívül, bevezetjük a következő jelöléseket, amelyek a $(E_nf,\ n \in \mathbf{N}$, $f \in L^1_0)$ matingállal kapcsolatosak.

$$\begin{aligned}
\Delta_n f &:= E_nf - E_{n-1}f \qquad (\Delta_0 := 0),\\
f^* &:= \sup_{n\in\mathbf{N}} |E_nf|,\\
S(f) &:= \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\Delta_n f|^2\right)^{\frac{1}{2}},\\
s(f) &:= \left(\sum_{n=1}^{\infty} E_{n-1}|\Delta_n f|^2\right)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

Világos, hogy

$$E_n \circ E_m = E_{\min(n,m)}, \quad \Delta_n \circ \Delta_m = \delta_{mn}\Delta_n \quad (n, m \in \mathbf{N}), \tag{4.3}$$

ahol δ_{mn} a Kronecker szimbólum

Azt mondjuk, hogy a $(T_n, n \in \mathbf{P})$ operátorok Δ tulajdonságúak ha

$$T_n \circ \Delta_n = \Delta_n \circ T_n = T_n. \tag{Δ}$$

Schipp [17] bebizonyította, hogy ezeknek a T_n operátoroknak néhány korlátossági tulajdonságot a T összegük szintén örökli.

$$Tf := \sum_{n=1}^{\infty} T_nf$$

Tétel 4.1.1 (F. Schipp [17]).

(i) *Legyen* $1 < p < \infty$ *és* T_n $(n \in \mathbf{P})$ Δ *tulajdonságú* $\mathcal{A}_{n-1}$*-önadjungált lineáris operátorok. Ha a* T *operátor* (p,p) *típusú, akkor szintén* (q,q) *típusú, ahol* $1/p + 1/q = 1$.

(ii) *Legyen* T_n $(n \in \mathbf{P})$ Δ *tulajdonságú operátorok és* $p \geq 2$. *Ha a* T_n *operátorok egyenletesen* $(\mathcal{A}_{n-1}, 2, 2)$ *és* $(\mathcal{A}_{n-1}, p, p)$ *típusúak, akkor a* T *operátor is* (p,p) *típusú.*

(iii) *Legyen* T_n $(n \in \mathbf{P})$ Δ *tulajdonságú* $\mathcal{A}_{n-1}$*-lineáris operátorok sorozata. Ha a* T_n *operátorok egyenletesen* $(\mathcal{A}_{n-1}, 2, 2)$ *és* $(\mathcal{A}_{n-1}, 1, 1)$ *típusúak, akkor a* T *operátor is* $(2,2)$ *típusú és gyengén* $(1,1)$ *típusú, vagyis van olyan* $c > 0$ *úgy, hogy minden* $y > 0$ *szám és* $f \in L^1$ *függvény esetén*

$$\mu\{|Tf| > y\} \leq c\|f\|_1/y.$$

Ebben a fejezetben Weisz [30]-ban található jelöléseit használjuk, és jelölje $C > 0$ egy olyan abszolút állandó, amely nem mindig ugyanazt az értéket veszi fel, ahol szerepel. Minden $1 \leq p < \infty$ esetén a következő martingál Hardy-tereket

$$H_p^s := \{f \in L_0^1 : \|f\|_{H_p^s} := \|s(f)\|_p < \infty\},$$
$$H_p^S := \{f \in L_0^1 : \|f\|_{H_p^S} := \|S(f)\|_p < \infty\},$$
$$H_p^* := \{f \in L_0^1 : \|f\|_{H_p^*} := \|f^*\|_p < \infty\},$$

és BMO-tereket

$$BMO_p^- := \{\varphi \in L_0^p : \|\varphi\|_{BMO_p^-} := \sup_{k\geq 1} \left\|(E_k|\varphi - E_{k-1}\varphi|^p)^{\frac{1}{p}}\right\|_\infty < \infty\},$$
$$BMO_p := \{\varphi \in L_0^p : \|\varphi\|_{BMO_p} := \sup_{k\geq 1} \left\|(E_k|\varphi - E_k\varphi|^p)^{\frac{1}{p}}\right\|_\infty < \infty\}.$$

értelmezzük.

Ha minden $\mathcal{A}_n$ σ-algebra véges sok atommal generálható (például, ha m korlátos), akkor értelmezzük a VMO tereket:

$$VMO_p^- := \{\varphi \in BMO_p^- : \lim_{k\to\infty} \left\|(E_k|\varphi - E_{k-1}\varphi|^p)^{\frac{1}{p}}\right\|_\infty = 0\},$$
$$VMO_p := \{\varphi \in BMO_p : \lim_{k\to\infty} \left\|(E_k|\varphi - E_k\varphi|^p)^{\frac{1}{p}}\right\|_\infty = 0\}.$$

Először a 4.1.1. tételt kiterjesztjük a H_p^s és BMO_p terekre.

Tétel 4.2.1. *Legyen T_n $(n \in \mathbf{P})$ Δ tulajdonságú és egyenletesen $(\mathcal{A}_{n-1}, 2, 2)$ típusú operátorok. Ekkor a T operátor H_p^s $(p \geq 1)$ korlátos.*

Tétel 4.2.2. *Legyen T_n $(n \in \mathbf{P})$ Δ tulajdonságú és egyenletesen $(\mathcal{A}_{n-1}, 2, 2)$ és $(\mathcal{A}_{n-1}, p, p)$ típusú operátorok, valamely $p \geq 2$. Ekkor igaz, hogy*

(i) a T operátor BMO_p korlátos.

(ii) ha még a T_n operátorok lineárisak és $\mathcal{A}_{n-1}$ önadjungált, akkor a T operátor is BMO_q korlátos, ahol $1/p + 1/q = 1$.

$BMO_p \subset L_0^p \subset H_p^s$ $(p \geq 2)$, ezért interpoláció segítségével kapjuk:

Következmény 4.2.3. *Legyen T_n $(n \in \mathbf{P})$ Δ tulajdonságú operátorok sorozata, amelyek egyenletesen $(\mathcal{A}_{n-1}, 2, 2)$ és BMO_p típusúak, valamely $p \geq 2$ esetén. Ekkor a T operátor BMO_p, L_0^p, BMO_q és L_0^q korlátos, ahol $1/p + 1/q = 1$.*

Hasonló állítás érvényes BMO_p^- és H_p^S esetén. Erre alkalmazzuk a BMO_p^- $(1 \leq p < \infty)$ terek ekvivalenciáját, így mindegyiket BMO_2^--vel jelölhetjük. Továbbá a H_p^S és L_0^p terek ekvivalensek, ha $p > 1$ (lásd Garsia [4] és Weisz [30]). Ezért ebben az esetben elég a H_1^S térrel foglalkozni.

Tétel 4.2.4. *Legyen T_n $(n \in \mathbf{P})$ Δ tulajdonságú és egyenletesen $(\mathcal{A}_{n-1}, 2, 2)$ és BMO_2^- korlátos operátorok. Ekkor a T operátor BMO_2^- korlátos. Ha még a T_n operátorok lineárisak, $\mathcal{A}_{n-1}$ önadjungált és minden $\mathcal{A}_n$ σ-algebra véges sok atommal generálható, akkor a T operátor is H_1^S korlátos.*

Végül, a 4.1.1. tétel (iii) pontjához hasonlóan, a H_1^S tér Davis-féle martingál-felbontása segítségével a következő tételt bizonyítjuk.

Tétel 4.2.5. *Legyen T_n $(n \in \mathbf{P})$ Δ tulajdonságú és egyenletesen $(\mathcal{A}_{n-1}, 2, 2)$ és $(\mathcal{A}_{n-1}, 1, 1)$ típusú operátorok. Ekkor a T operátor H_1^S korlátos.*

A Δ tulajdonságú operátorok alkalmazhatók a konjugált martingál-transzformációk vizsgálatánál, amelyek egy nem feltétlenül korlátos Vilenkin csoporton értelmezhetők. A transzformáció, amelyet Gundy [11] vezetett be, a következő módon adható meg. Legyen $A := (A_n, n \in \mathbf{P})$ komplex $m_n - 1 \times m_n - 1$ típusú mátrixok egy sorozata. Tegyük fel, hogy a A_n $(n \in \mathbf{P})$ mátrixok egyenletesen korlátosak az euklideszi norma alatt, vagyis egyenletesen korlátosak ℓ^2 normában. A T_n operátorokat a következő módon értelmezzük:

$$T_n f := \sum_{k=1}^{m_n - 1} (A_n v_n)^{(k)} r_n^k,$$

ahol $v_n := (E_{n-1}(f\overline{r_n^k}))_{k=1}^{m_n-1}$. Ekkor azt mondjuk, hogy a $T := \sum_{n=1}^{\infty} T_n$ operátor egy konjugált martingál transzformáció. Weisz [29] vizsgálta ezeket a transzformációkat korlátos Vilenkin csoportokon. Ezekre a transzformációkra a következő állítás érvényes:

Tétel 4.3.1. *Legyen $p \geq 2$ és $1/p+1q=1$. Ha az A_n $(n \in \mathbf{P})$ mátrixok egyenletesen (ℓ^q, ℓ^p) típusúak és egyenletesen ℓ^2 korlátosak, ekkor a T operátor L^r, H_r^s, BMO_r és H_1^s korlátos, $r=p$ és $r=q$ esetén.*

Irodalomjegyzék

[1] G. H. Agaev, N. Ja. Vilenkin, G. M. Dzsafarli, and A. I. Rubins tein, *Multiplicative systems of functions and harmonic analysis on 0-dimensional groups*, Izd.(„ELM"), Baku, 1981 (in russian).

[2] G. Benke, *Trigonometric approximation theory in compact totally disconnected groups*, Pacific Jour. of Math. **77(1)** (1978), 23–32.

[3] N.J. Fine, *Cesàro summability of Walsh-Fourier series*, Proc. Nat. Acad. Sci. USA **41** (1955), 558–591.

[4] A. M. Garsia, *Martingale inequalities*, Seminar Notes on Recent Pogress. Math. Lecture notes series, New York: Benjamin Inc, 1973.

[5] G. Gát, *Vilenkin-Fourier series and limit periodic arithmetical functions*, Colloq Soc. J. Bolyai 58 Approx. Theory, Kecskemét, (Hungary). (1990), 315–332.

[6] ———, *On almost even arithmetical functions via orthonormal systems on Vilenkin groups*, Acta Arith. **LX(2)** (1991), 105–123.

[7] ———, *Orthonormal systems on Vilenkin groups*, Acta Math. Hung. **58(1-2)** (1991), 93–198.

[8] ———, *Pointwise convergence of the Cesàro means of double Walsh series*, Annales Univ. Sci. Budap. Sect. Comp. **16** (1996), 173–184.

[9] G. Gát and R. Toledo, *L^p-norm convergence of series in compact totally disconnected groups*, Anal. Math. **22** (1996), 13–24.

[10] ———, *Fourier coefficients and absolute convergence on compact totally disconnected groups*, Math. Pannonica **10/2** (1999), 223–233.

[11] R. F. Gundy, *Inégalités pour martingales à un et deux indices: L'espace H_p, in: Ecole d'eté de probabilités de saint-flour viii-1978*, Lecture Notes in Math. 774, Springer, Berlin (1980), 251–331.

[12] E. Hewitt and K. Ross, *Abstract harmonic analysis I*, Springer-Verlag, Heidelberg, 1963.

[13] ______, *Abstract harmonic analysis II*, Springer-Verlag, Heidelberg, 1970.

[14] F. Móricz, F. Schipp, and W.R. Wade, *Cesàro summability of double Walsh-Fourier series*, Trans Amer. Math. Soc. **329 1** (1992), 131–140.

[15] C.W. Onneweer and D. Waterman, *Fourier series of functions of harmonic bounded fluctuation*, J. d'Anal. Math. **27** (1974), 79–93.

[16] L. S. Pontryagin, *Topological groups*, Gordon and Breach, Science Publishers, Inc., New York, 1966.

[17] F. Schipp, *On L^p -norm convergence of series with respect to product systems*, Analysis Math. **2** (1976), 49–63.

[18] F. Schipp, W.R. Wade, P. Simon, and J. Pál, *Walsh series,"an introduction to dyadic harmonic analysis"*, Adam Hilger, Bristol and New York, 1990.

[19] P. Simon, *Verallgemeinerte Walsh-Fourierreihen ii.*, Acta. Math. Acad. Sci. Hungar. **27** (1976), 329–341.

[20] ______, *On the convergence of Vilenkin-Fourier series*, Acta. Math. Acad. Sci. Hungar. **33** (1979), 189–196.

[21] P. Simon and J. P., Pál, *On a generalization of the concept of derivative*, Acta. Math. Acad. Sci. Hungar. **29** (1977), 155–164.

[22] R. Toledo, *Átlagos értékben vett konvergencia az uniform majdnem páros számelméleti függvények terében*, Acta Acad. Paed. Nyíregyháza **12** (1990), 47–56.

[23] ______, *Estimates of the Fourier coefficient with respect to $\psi\alpha$ systems on Vilenkin groups*, Bulletins for Applied Math. **57** (1991).

[24] ______, *On the convergence of the Fourier series in the spaces of limit periodic arithmetic functions*, Bulletins for Applied Math. **57** (1991).

[25] ______, *On Hardy-norm of operators with property Δ*, Acta Math. Hungar. **80(3)** (1998), 157–168.

[26] ———, *Recent developments on approximation theory on CTD groups*, Topics in algebra, analysis and geometry. Proceedings of the Gyula Strommer national memorial conference, Balatonfüred, Hungary, May 1-5, 1999 (G. Karáné et al., ed.), Budapest: BPR Kiadó, 2000, pp. 177–184.

[27] ———, *On the convergence of Fourier series in CTD groups*, Functions, Series, Operators, Proceedings of the Alexits Memorial Conference, Budapest, August 9-14, 1999 (L. Leindler, F. Schipp, and J. Szabados, eds.), Coll. Soc. J. Bólyai, 2002, pp. 403–415.

[28] N. Ya. Vilenkin, *A class of complete orthonormal series*, Izv. Akad. Nauk SSSR, Ser. Mat. **11** (1947), 363–400.

[29] F. Weisz, *Conjugate martingale transforms*, Studia Math. **103** (1992), 207–220.

[30] ———, *Martingale Hardy spaces and their applications in Fourier analysis*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1994.

[31] W.S. Young, *Mean convergence of generalized Walsh-Fourier series*, Trans. Amer. Math. Soc. **218** (1976), 311–320.

The author's publications

1. R., Toledo, Átlagos értékben vett konvergencia az uniform majdnem páros számelméleti függvények terében, Acta Acad. Paed. Nyíregyháza, **12**(1990), 47-56.

2. R., Toledo, Estimates of the Fourier coefficient with respect to $\psi\alpha$ systems on Vilenkin groups, Bulletins for Applied Math., **57**(1991).

3. R., Toledo, On the convergence of the Fourier series in the spaces of limit periodic arithmetic functions, Bulletins for Applied Math., **57**(1991).

4. R., Toledo, Local characters on Vilenkin groups, Acta Acad. Paed. Nyíregyháza, **13/D**(1992), 25-34.

5. G. Gát and R., Toledo, On Hardy-norm of operators with property Δ, Anal. Math., **22**(1996), 13-24.

6. R., Toledo, On Hardy-norm of operators with property Δ, Acta Math. Hungar., **80(3)**(1998), 157-168.

7. G. Gát and R., Toledo, Fourier coefficients and absolute convergence on compact totally disconnected groups, Math. Pannonica, **10/2**(1999), 223-233.

8. R., Toledo, Recent developments on approximation theory on CTD groups, Topics in algebra, analysis and geometry. Proceedings of the Gyula Strommer national memorial conference, Balatonfüred, Hungary, May 1-5, 1999, (G. Karáné et al., ed.), Budapest: BPR Kiadó, 2000, pp. 177-184.

9. R., Toledo, On the convergence of Fourier series in CTD groups, Functions, Series, Operators, Proceedings of the Alexits Memorial Conference, Budapest, August 9-14, 1999 (L. Leindler, F. Schipp and J. Szabados, eds.), Coll. Soc. J. Bólyai, 2002, pp. 403-415.

10. R., Toledo, Representation of product systems on the interval $[0,1]$, Acta Math. Acad. Paed. Nyíregyháziensis, **19/1**(2003), pp. 43-50.