



**A matematikai problémamegoldás
iskolai alkalmazásairól**

doktori (PhD) értekezés

Kovács András

Debreceni Egyetem
Debrecen, 2006.

A matematikai problémamegoldás iskolai alkalmazásairól

Doktori (PhD) értekezés

Kovács András

Debreceni Egyetem
Természettudományi Kar

Debrecen, 2006.

TARTALOM

Bevezetés	1. oldal
Fogalmi értelmezések	3. oldal
Történeti áttekintés	7. oldal
A gondolkodási folyamat szerkezete	19. oldal
A makrostruktúra	19. oldal
1. Ténymegállapítás	21. oldal
2. Megoldási javaslat	25. oldal
3. Kritika	29. oldal
A makrostruktúra vizsgálatának számszerű eredményei	32. oldal
A mikrostruktúra	36. oldal
a) Analízis	36. oldal
b) Szintézis	38. oldal
c) Összefüggések felfogása	39. oldal
d) Kiegészítés	42. oldal
e) Rendezés	47. oldal
f) Analógia	48. oldal
A mikrostruktúra vizsgálatának számszerű eredményei	50. oldal
A makro- és a mikrostruktúra közötti kapcsolat	54. oldal
További megállapítások	69. oldal
I. A módszer előnyeiről	69. oldal
II. A hibák időbeli változásairól	71. oldal
III. A hibafajták előfordulásáról	77. oldal
IV. A Pólya-féle kérdések módosításáról	82. oldal
További feladatok	93. oldal
Összefoglalás	94. oldal
Summary	98. oldal
Felhasznált irodalom	102. oldal
Mellékletek	106. oldal

BEVEZETÉS

Sokan és sokat vitatkoztak már a problémamegoldó gondolkodásnak az emberré válásban, majd a társadalmi fejlődésben játszott pontos szerepéről. Nincs szándékunkban ebben a kérdésben állást foglalni, így csupán azt jegyezzük meg, hogy a világról alkotott képünk árnyaltabbá válásában – vagy másképpen, az emberi civilizáció fejlődésében – a gondolkodás döntő tényezőt jelent. A **gondolkodás fejlesztése** mind az egyén, mind pedig a társadalom szintjén közös érdek. Az előzőek miatt ez természetes elvárásként fogalmazódik meg a ma, de főként a holnap iskolájával és a benne tanított tárgyakkal, valamint az oktatás módjával szemben. Különösen igaz ez az állítás a matematikára, amelynek a többi tantárgytól eltérő, bonyolult kölcsönhatások során szigorú rendben egymásra épülő, egymás eredményeit felhasználó struktúrája a többitől különböző, összetett gondolkodást igényel. Ennek ellenére a fogalmak, eszközök és jelölésrendszerek pontos leírása miatt itt a legkönnyebb az ilyen irányú vizsgálatokat elkezdeni, – ezt a tényt gyakran fel is használják a gondolkodás kutatásával foglalkozó pszichológiai elméletek – és ezen a területen lehet talán a leggyorsabban pontos, számszerűsíthető és ellenőrizhető eredményt elérni. Ehhez egyaránt segítséget nyújthat mind a hibátlan, mind pedig a valamilyen szempontból **helytelen gondolkodási folyamat** tanulmányozása. Ugyan ezeknél a végeredmények általában különbözőek, de a kettő nyilván azonos töről fakad; az egyikhez ugyanolyan lépések vezetnek, mint a másikhoz. Az egyik alaposabb megismerése közelebb visz a másik megértéséhez, és így az egyik leírásához felhasznált elmélet alkalmazható kell, hogy legyen a másikra is. (Feltételezésünk szerint hiba akkor keletkezik, amikor a helyes problémamegoldás folyamatának lépései közé egy vagy több helyen valamilyen vonatkozásban oda nem illő, azaz ebben az értelemben helytelen elem kerül.)

Ez alapján a hibás és a jó gondolkodási lépések egyaránt a gondolkodási lépések közé tartoznak, tehát vizsgálatuk és csoportosításuk alapja ugyanaz kell, hogy legyen. Mégis, a mai magyarországi viszonyok között hasznosíthatóságukból, a gyakorlatban való felhasználásukból, de legfőképpen fontosságukból adódó különbségeik miatt a hibás problémamegoldás tárgyalását a másikkal előbbre valóknak kell tekintenünk. Indokként a következő dolgokat kívánjuk megemlíteni.

- A 80-as évek közepétől különböző okok miatt megindult Magyarországon a matematikaoktatás színvonalának csökkenése. A matematikát tanító pedagógusok által a gyakorlatban közvetlenül tapasztalt jelenséget a hazai (MONITOR) és a nemzetközi (PISA) felmérések is alátámasztották.

Ráadásul az Országos Közoktatási Intézet által a 80-as évek közepétől szervezett **Monitor** felmérések kimutatták, hogy „a teljesítménycsökkenés jelentős”, sőt a tanulói „teljesítmények szóródása is növekedett”. A közoktatásban és felsőfokú oktatásban szerzett tapasztalataink, valamint egy helyi vizsgálat is alátámasztotta ezt a tényt. A 2000-ben és 2003-ban lebonyolított **PISA felmérés** megerősítette, hogy „az iskolák közötti évtizedek óta növekvő különbségek mérséklése a magyar tanulói teljesítmények javításának egyik legfontosabb tényezője”. (A magyar tanulók olvasási, szövegértési, matematikai teljesítményének szóródása 71 százalékban az egyes iskolák közötti különbségekkel magyarázható. Ugyanez az arány az OECD-országokban 36 százalék.)

- Ugyanekkor a tehetséges tanulók kiválasztásában, a velük való foglalkozásban és versenyztetésükben – főként a természettudományos tárgyak területén – jóval az átlag fölöttiek az eredményeink. Nálunk sokkal nagyobb, gazdagabb és szerencsésebb országok általában boldogan kiegyeznének azokkal a helyezésekkel, amelyeket legjobb tanulóink a nemzetközi versenyeken elérnek. (Így például a Nemzetközi Matematikai Diákolimpián 2004-ben a 7., 2005-ben a 9-10. helyezést értük el.) Gimnáziumi tanulóink nemzetközi felmérésekben elért eredményei a világ élvonalában vannak, az ő eredményeikkel tehát akár elégedettek is lehetnénk.
- Sajnos már nem ennyire kedvező a helyzet a valamilyen – például szociális vagy kognitív – szempontból hátrányos helyzetű diákok iskolai oktatásánál. Ha egy kívülálló valamelyik, magyarországi tanárok számára szervezett ankéton, szimpóziumon, vándorgyűlésen, vagy bármilyen szakmai továbbképzésen vesz részt, akkor az ott elhangzottak alapján azt hihetné, hogy hazánkban csak tehetséges, átlagon felüli tanulók töltik be az iskolákat, és képzésük minél magasabb szintre emelése jelenti az oktatásügy egyetlen megoldandó problémáját.

Mint ahogy azt a felmérések megmutatták, a helyzet teljesen más. A tapasztalatok szerint a tanulmányi szempontból átlagon aluli értékekkel rendelkező iskolák eredményessége az átlagot meghaladó mértékben válik egyre kisebbé. Egyre több helyen kell egyre gyengébb képzettségű, felkészültségű vagy tehetségű tanulókkal foglalkozni. Ez a tény indokolja a hátrányos helyzetű tanulókkal való foglalkozás tantárgyi módszertanai kidolgozásának fontosságát.

Amikor tehát azt a célt tűzzük ki magunk elé, hogy az oktatás hatékonyságát kívánjuk megnövelni, akkor elsősorban a nehezebben haladókra kell tekintettel lenni. Ez a tanulmány is egy olyan vizsgálatból nőtt ki, amelynek célja az volt, hogy az iskolai matematika egy témakörének – az algebrai átalakítások – oktatása és számonkérése során előfordult hibákat a gondolkodási folyamatban betöltött szerepük alapján csoportosítsa, majd e csoportosítás számszerű eredményeiből nyerhető következtetéseket – az alkalmazhatóság és a későbbi vizsgálatok érdekében – levonja. Ezen túlmenően a kapott eredmények megerősítik a **gondolkodási folyamat szerkezetének** az általunk felhasznált leírását.

Ennek az alkalmazásával például új területeken (függvény-transzformációk és pontthalmazok meghatározásával kapcsolatos feladatokon) és új körülmények között (számítógéppel támogatott oktatás) is fel tudjuk használni a problémamegoldásban a Magyarországon rendkívül népszerű Pólya-féle heurisztikus módszert.

Fogalmi értelmezések

Mint az eddigiekből kiderült, **gondolkodáson** mi a szűkebben vett produktív, problémamegoldó gondolkodást értjük, amely a rendelkezésre álló adatokból új összefüggéseket vezet le. Ennek a fogalomleszűkítésnek az oka, hogy az iskolai matematika oktatása során erre a tevékenységre, ennek a fejlesztésére helyezük a hangsúlyt. Így vizsgálatunk számára is ez a terület lesz az elsődleges fontosságú.

Másrészt meg kell említenünk, hogy a problémamegoldás és a **feladatmegoldás** fogalma a pszichológiában kettéválik. Az utóbbi általánosabb meghatározást takar. Mi viszont itt az iskola matematikai szóhasználatát követve a feladatot és a problémát azonosnak fogjuk tekinteni. (Ha mi a gyakorlati felhasználást tekintjük elsődlegesnek, akkor a definícióink megadásánál is ezt kell a legnagyobb hangsúllyal figyelembe venni. Egy matematika tanár sohasem mondja azt a diákjainak, hogy most feladatot, azt követően pedig problémát fognak megoldani.) Mindkettőjük közös jellemzője, hogy egy olyan cél, a megoldás érdekében kell a gondolkodási tevékenységet kifejteni, melynek elérési módja a feladat, illetve probléma felvetésekor nem ismert. (Példáinkban mindig matematikai problémákra vagy másképpen, feladatokra hivatkozunk. Szaktárgyra, tantárgyra vonatkozó megállapításaink azonban többnyire általánosabb körre, a matematikához hasonló gondolkodási szerkezetet mutató tárgyakra, így az iskolai természettudományos tantárgyakra is érvényesek lehetnek.)

Hibán itt a (matematikai) feladatok megoldásakor a helyes eredményre vezető (egyik) eljárás során elkövetett olyan tévedést értünk, amely valamilyen módon megakadályozza a várt eredmény levezetését. Tisztában vagyunk azzal, hogy a hibának ez a fogalma az általános pszichológiában használatos definíciónak jelentős leszűkítését jelenti, miután hiba a legkülönbözőbb területeken és a legkülönbözőbb okok miatt is felléphet. Azonban véleményünk szerint ez a megszorítás nem korlátozza a matematika tanításában történő felhasználást.

Hibára vonatkozó vizsgálatainkat lehetőségeink miatt az iskolai matematikának egyetlen területére korlátoztuk abban a reményben, hogy az általunk ezen a területen alkalmazott csoportosítás alkalmas lehet a többi, most nem tárgyalt területre is. (A dolgozat végén ellenőrzési céllal érintőlegesen bekerültek más anyagrészek is. Ezekkel a felvázolt elmélet matematikán belüli szélesebb körű alkalmazhatóságáról győződhetünk meg.) Az általános vagy több területet felölelő problémák helyetti egy adott matematikai témakörön belüli feladatmegoldás gondolatmenetének tanulmányozása ugyanis pedagógiai tapasztalataink szerint csak megkönnyíti az egyes gondolkodási lépések és az ezekhez kötődő hibák felismerését, de a jellegüket nem változtatja meg. Ezért olyan témakört érdemes választani, amelyek esetében a hibázások felismerése és csoportba sorolása a többinél egyszerűbb. Ezek a feladatok az általában jól leírható, a megoldáshoz szükséges pontosan ismert összefüggéseikkel, és egyértelműen követhető gondolatmeneteikkel a más típusú problémákkal szemben világosabban mutatják meg a diákok gondolkodásában megmutatkozó, és tanulmányunk szempontjából lényeges sajátosságokat, illetve hibázásokat.

Kutatási módszerünknek a pszichológiában általánosan szokásos-, a probléma megoldásban részt vevő személyek szóbeli megnyilvánulása alapján vezetett jegyzőkönyvek kiértékelésére épülő eljárás helyett az **írásbeli számonkérések** elemzését végeztük el, melyet az esetleges kérdéses esetekben egészítettünk ki szóbeli megkérdezésekkel. Ezzel ugyanis olyan tevékenységet akartunk mérni és olyanról akartunk a későbbiekben hasznosítható információkhoz jutni, amelyek ugyanebben a formában valósulnak meg az iskolában. (A jelenleg érvényes Nemzeti Alaptanterv szerint az általunk elsődlegesen tekintetbe vett, matematikai értelemben nem kifejezetten tehetségesnek vagy nem ilyen irányú érdeklődésűnek tekintett tanulók által várhatóan preferált középszintű matematika érettségi ugyanis írásbeli vizsga. Szóbeli vizsgát csak azok a tanulók tehetnek, akiknek az írásbeli vizsgájuk sikertelen.) Így az általunk kapott eredmények közvetlenül felhasználhatók a matematika órán előforduló, írásban tapasztalt hibázások számának csökkentésénél.

Az elméletet adó modellt megalapozó mérésekben hibák vizsgálatával foglalkozunk. **A hibák kategorizálásakor** néhány alapvető követelménynek eleget kell tennünk. A csoportokat úgy kell kialakítanunk, hogy valamennyi hibát egyértelműen be tudjuk sorolni a megfelelő osztályba (esetleg osztályokba, ha a helytelen műveletvégzés több oknak az egyidejű fellépésével magyarázható) és a kategorizálás a csoportok jól felismerhető jellegzetessége miatt viszonylag könnyen végrehajtható tevékenység kell, hogy legyen. Ezen kívül nem árt, ha az alkalmazott módszer rámutat az új csoportosítás bevezetésének szükségességére, a korábbi eljárásokkal szembeni előnyeire. (A módszerünk kiválasztásánál tisztában voltunk azzal, hogy részletes szóbeli vizsgálat nélkül nem tudunk egyértelműen meggyőződni arról, hogy a hibákat valóban minden esetben helyesen soroltuk be. Úgy gondoljuk azonban, hogy ennél a kísérletnél nem a nagy pontossággal megkapható számszerű eredmények a legfontosabbak, hanem az alapvető tapasztalatok megállapításához szükséges főbb tendenciák körülbelüli meghatározása. Valamint annak a megmutatása, hogy az ismertett modell az iskolai gyakorlatban a tanárok számára könnyen alkalmazható.)

Jelen esetben azért látjuk célszerűbbnek, hogy a hibák csoportosítását a formai megkülönböztetés helyett tartalmi szempontból, a hibás gondolkodás elemzésének vizsgálata alapján végezzük el, mivel ezzel lehet legjobban hozzájárulni a tanítandó anyagrészek tartalmi, valamint módszertani szempontból történő esetleges változtatásához. Ezzel a módszerrel megmutathatjuk, hogy az adott feladattípusoknál a gondolkodás mely – addig esetleg elhanyagolt – összetevőit kellene a továbbiakban még jobban fejleszteni; vagy ellenkezőleg, mely – a diákok gondolkodásmódjától túlságosan távol álló – anyagrészeket kellene a tananyagból eltávolítani. Ezek mellett természetesen a többi módszerhez hasonlóan hasznos útmutatásokat kaphatunk a leggyakrabban előforduló hibák megelőzéséhez és ezáltal az oktatásunk hatékonyabbá tételéhez. A gyakorlatból történő indíttatás miatt az elvégzett vizsgálatokból próbáltunk meg következtetéseket levonni. Eredményeinknek emiatt természetesen korlátai is vannak. Így például nem foglalhatunk állást a szóban forgó anyagrész deduktív vagy induktív módon történő tárgyalása mellett illetőleg ellen, vagy akár a gyakorlatorientáltabb megközelítés érdekében. Ennek a tanulmánynak nem is ez a célja. Néhány helyen azonban, ahol szükségesnek tartottuk, megjegyzést tettünk a tananyag egyoldalú megközelítéséből adódó képzésbeli hiányosságokra. Munkánkból egyértelműen kiderül, hogy nagyra értékeljük a magyar származású **Dienes Zoltán** (1973), **Pólya György** (1967, 1988) és **Lakatos Imre** (1981) kutatók munkáit, amelyek a matematikaoktatás heurisztikus jellegének megerősítése mellett törnek lándzsát. Az előzőek miatt azonban egyetlen oktatáspolitikai koncepció mellett sem kívánjuk magunkat elkötelezni.

Ennek a dolgozatnak az első részében – az előző megjegyzéseket is figyelembe véve – viszonylag könnyű felismerésük és azonosításuk miatt csupán az iskolai dolgozatokban előforduló **algebrai átalakítások** hibáit dolgoztuk fel. A dolgozatok egy részét a debreceni Bethlen Gábor (BG) és Irinyi János szakközépiskolákban tanító két matematika szakos kolléga tette 1995-ben hozzáférhetővé vizsgálatainkhoz, míg az anyag másik része saját korábbi, pedagógusi munkánkból származott. 1990-től gyűjtöttük és csoportosítottuk korábbi iskolánkból (BG), valamint a Tudományos Ismeretterjesztő Társulat (TIT) középiskolai levelezős versenyéből származó hibás megoldásokat a későbbi kolléga, dr. Sümegi László tanácsára. Ez az előkészítő munka 10 évig tartott. A gyűjtésből adódóan a feladatok különböző nehézségűek és színvonalúak valamint témájuk is voltak. Nem látjuk értelmét, hogy a feladatsorokat és a megoldásokban tapasztalható hibákat jegyzőkönyvszerűen tegyük közzé, mivel a hibák nem kötődtek szorosan az egyes feladattípusokhoz. Azonos feladatoknál többféle hiba is előfordult, és ugyanolyan jellegű hibát találtunk különböző anyagrészekhez tartozó feladatokban is. Így azt tartottuk tárgyalásunkban a jobb megoldásnak, hogy a feladatonként előforduló hibák felsorolása helyett a hibacsoportoknak az adott tananyagnál előforduló jellegzetes képviselőiből mutatunk be néhányat. Az általunk későbbiekben körvonalazott távlati célok eléréséhez viszont a továbbiakban szükség lesz a Nemzeti Alaptanterv által meghatározott összes témakör részletes feldolgozására. Ezek ismeretében lehet csak a hibák kezelésével és így a hatékonyabb, a korábbinál színvonalasabb és a gyakorlati élethez jobban kötődő oktatással kapcsolatban majd egy egységes koncepciót kidolgozni. Sőt, ezeket az általános összefüggéseket a jobb, illetve gyengébb osztályok színvonalához lehet majd igazítani, ha a hibáknak az ilyen tanulói csoportokban fellépő sajátosságait is külön elemezzük. De lehetőség nyílhat a hibacsoportok időbeni alakulását is figyelemmel kísérni, és ebbe a folyamatba az alkalmas pillanatokban beavatkozni, ha eredményeinket a fejlődéslélektan módszereivel egészítjük ki. A matematikai problémák megoldása során alkalmazott gondolkodási lépések ismeretében a hibák kezelésén kívül hasznos útmutatásokat adhatunk a diákoknak és a tanároknak az eredményes megoldási stratégiák kialakításához.

Az eddigieket összefoglalva megállapíthatjuk, hogy a tanulók elvárásaihoz és a változó világ által támasztott követelményekhez alkalmazkodni kívánó iskola jövőbeli, a hatékonyságot és az eredményességet figyelembe vevő megreformálásában a diákjaink által elkövetett gondolkodási hibák elemzésének, valamint a problémamegoldó gondolkodás pontos ismeretének nagy szerepe lehet. Ez a lehetőség indokolhatja ennek a munkának és teheti szükségessé az ehhez hasonló témájú dolgozatoknak a megszületését.

TÖRTÉNETI ÁTTEKINTÉS

Ez a rész azokról az elgondolásokról nyújt rövid áttekintést, amelyek a dolgozatban kifejtett elmélet kidolgozására valamilyen formában hatást gyakoroltak. Ebben a vonatkozásban leginkább a gondolkodási hibákra és a problémamegoldó gondolkodás szerkezetét leíró modellekre fordítottunk figyelmet. (Mivel ez a két terület az általunk választott felépítésben egymással elválaszthatatlanul összefügg, ezért ezeket a hagyományos felépítéstől eltérően együtt tárgyaljuk.)

Valószínűleg már az évszázadokkal ezelőtt élt tanároknak is megfogalmazódott az oktatással és a benne tapasztalt hibákkal kapcsolatban egy felismerés. Nevezetesen az, hogy a tanulási folyamat legvégén, a számonkéréskor jelentkező hiba általában nem véletlenszerűen, előre nem látható okok bekövetkezése miatt jelenik meg. Minden pedagógus szembekerült és jelenleg is szembekerül azzal a ténnyel, hogy különböző, de tantárgyanként egy adott témakörre jellemző hibák az egymástól eltérő jellegű osztályokban és az osztályokon belül az egyes tanulóknál évről-évre ismétlődnek. Ahogyan az évek során szaporodnak a tapasztalatok, úgy próbálja a tanár ezekre már előre számítva leküzdeni őket. És attól függően, hogy milyen sikeres a tevékenysége, válik egyre hatékonyabbá a munkája. Ez azt jelenti, hogy ha valaki már előre tudja, egy adott anyagrésznél milyen hibák merülnek fel a leggyakrabban, milyen anyagrészek oktatásánál kell ezekre nagyon vigyázni, akkor ezzel hosszú évek keserves tapasztalatait, kudarcait tudja sok esetben elkerülni.

Ez a fentebb említett felismerés írásos formában azonban csak a múlt század végén jelent meg. A német **Meringer** (1895) gyűjtötte össze és rendszerezte először tudományos alapossággal a fellépő hibákat. Nem sokkal később **Beke Manó** (1900) már hazánkban is egy hibakutatással kapcsolatos programmal tartotta meg székfoglaló beszédét a Magyar Paedagógiai Társaságban. A pszichológia első kísérleti vizsgálatait is ugyanerre az időszakra, a tizenkilencedik század utolsó évtizedeire esnek. Ekkor állapította meg **Binet** (1886) megfigyeléseire támaszkodva, hogy a gondolkodás képzetek kapcsolata.

Tulajdonképpen természetes is, hogy a pedagógia, a pszichológia és a módszertan együtt, egymással párhuzamosan fejlődnek. Vizsgálati eszközeik és módszereik az adott kor tudományos szemlélete és fejlettsége által meghatározottak, eredményeiket saját fejlődésükhöz a többiek is fel tudják használni. Így használta fel például Beke is a matematika fejlődéséből nyert tapasztalatait tanulmánya megírásához.

Beke a fent említett munkájában úgy látta, hogy valamennyi, az oktatásban előforduló tipikus, azaz nagy számban, és évről-évre ismétlődő hiba három okra vezethető vissza. A legfontosabb, a legtöbbször előforduló csoport hamis vagy elhamarkodott analógiából ered. (Sőt, túllépve az iskola kereteit Beke példák egész során keresztül illusztrálta azt az állítást, mely szerint a tudomány haladásának egyik útja is a **hamis analógiák** kiküszöbölését célozza.) A tévedések másik csoportja nála a következtetés hibája, amely túlnyomórészt a tételek kellően át nem gondolt megfordításából származik. A harmadik összetevőt a szemlélet hiányossága adja.

A hibák számának és leírásának kezdeti- formái után a didaktika természetes fejlődéséből adódóan megjelentek a **kvalitatív vizsgálatok** is. Az erre vonatkozó legelső kísérleteket **Hylla** (1916) német pedagógus végezte el. Hazánkban **Ranschburg Pál** (1917) foglalkozott először ilyen módon számolási hibákkal. Eredményei szerint „tisztán az emlékezetre alapított számolás nincsen, a legegyszerűbb számolási művelet megoldása is gondolkodás eredménye, amelyet a képzetek egész sora ellenőriz”. Véleményének kialakításában felfedezhetjük az **asszociációs pszichológia** akkor divatos elemeit is. Egyik jellegzetes képviselője, a **würzburgi iskola** elgondolása szerint ugyanis kivétel nélkül minden elmeműködés gondolkodásnak tekinthető. Egyébként **Ranschburg** (1901) fedezte fel korábban a **homogén gátlás** törvényét is, amely azután a pedagógiában széles körben elfogadott és alkalmazott elméletté vált. E szerint az egymáshoz hasonló úgynevezett homogén elemek a tudatban egymásra gátló hatást gyakorolnak. A jelenséget a hibák kijavításánál is figyelembe kell venni: ugyanarra a jelenségre vonatkozó két különböző magyarázat egymás hatását leronthatja.

Budapest után hamarosan Szeged vált a magyarországi hibakutatás központjává. **Szenes Adolf** (1934) itt elsősorban a négy alapművelet közben elkövetett hibákat vizsgálta. Ő a diákoknál tapasztalt tévesztéseket a csökkent, illetve a más irányban **elfoglalt figyelemmel** magyarázta. Mintegy ellenpontként **Szeliánszky Ferenc** (1938) már több tényezőt jelölt meg a felmerülő hibák okaiként. Ezek:

- a feladat meg nem értése,
- kellő tárgyi ismeret hiánya,
- tartalmi felismerés,
- csalás, puskázás,
- akarati tényezők,
- feledékenység,
- érzelmi tényezők,

- előzményekből következő hiba,
- folyamatra vonatkozó hiba,
- végrehajtási hiba,
- idegen hiba.

Jelentős változások zajlottak le ugyanebben az időben tőlünk keletre, az akkori Szovjetunióban. **Vigotszkij** (1934) és társai munkájának eredményeképpen a pszichológiai eredmények alkalmazása polgárjogot nyert a pedagógiában megszüntetve itt sok, korábbi helytelen gyakorlatot. Vigotszkij a **szavak jelentésének** vizsgálatából indult ki. Véleménye szerint a különböző mértékben általánosított fogalomjelentéseknek a tudatban való tükrözéséhez különböző minőségű gondolkodásműveletekre van szükség. „Az egyes tulajdonságok, vonások megragadásához elegendő az absztrakció gondolkodásművelete. Az elvontabb tudományos fogalmak jelentésének felfogásához már a gondolkodásműveletek egész sorára van szükség.” Kutatásai alapján arra a következtetésre jutott, hogy a gyerekek értelmi fejlődésének értékeléséhez kétszeri vizsgálatot kell végezni. Az önálló és a segítséggel történő feladatmegoldás közötti eltérésből lehet megkapni a „legközelebbi fejlődés zónájának” mutatóját. Néhány évvel később lépett fel **Rubinstein** (1940) egy olyan művel, amely materialista beállítottságával hosszú időre meghatározta országok egész sorában a pszichológia irányultságát. Szemlélete szerint a **cselekvés** a gondolkodás eredeti létezési formája. A gondolkodás igazi létét az a cselekvés adja meg, amelyben a gondolkodás megvalósul. Nálunk főként **Salamon Jenő** (1983) munkássága mutat ebbe a Rubinstein által meghatározott irányba.

A húszas- és a harmincas évek másutt is a pszichológia aranykorának tekinthetők. **Selz** (1920) **komplexumelmélete** szerint a feladatok keresést indítanak meg. Ez a keresési folyamat vezet el előbb vagy utóbb a célhoz. Az **alaklélektani** felfogás képviselőinek egyike, **Wertheimer** (1920) szerint „a probléma, a feladat adatainak a régitől, a megszokottól eltérő, tehát újabb szempontok alapján történő szemlélete a produktivitás lényege. Ennek a jelzésére az **átcsoportosítás** elnevezést használja”. **Duncker** (1935) a feladatmegoldásokban a helyes, de a helytelen lépéseket is figyelembe vette. Ugyanis véleménye szerint minden megoldási kísérlet meghatározott megoldási értékkel, azaz „**funkcióértékkel**” rendelkezik. Ezeknek a meghatározása és tudatosítása nélkül a gondolkodás nem érhet el eredményt.

A harmincas évek végétől a második világháború végéig a pszichológiában tudomásunk szerint nem születtek a problémamegoldó gondolkodásra, illetve a hibázások leírására vonatkozó újabb, nagy jelentőségű, átfogó elméletek.

A háború után meginduló hibakutatás is inkább egy-egy szűkebb területre koncentrálódott. A svájci **Johannot** (1947), valamint a francia **Monavon** (1953) és **Mialaret** (1954) munkáiban ismertetett kísérletek témái a törtszámok bevezetése és a velük végzett műveletek. **Szlavszkaja** (1957) Rubinstein munkatársaként geometriai ábrákkal kapcsolatban az átvitel kérdését vizsgálja. Az **átvitel** itt a feladatmegoldó által régebben megtalált megoldásoknak új körülmények között való alkalmazását jelenti. Ennek során megállapította, hogy egy külső személy segítő szándékú beavatkozása csak akkor lehet eredményes, ha „a megoldandó feladat analízise megteremtette ennek belső feltételeit”. A Szovjetunióbeli hibakutatások legnagyobb alakja azonban kétségtelenül **Mencsinszkaja** (1955), aki a harmincas évek közepétől kezdve foglalkozott a matematikai feladatok megoldásának pszichológiájával. Munkáinak középpontjában a **szöveges feladatok** értelmezésének, valamint a szöveg számadatai és kérdései közötti kapcsolatnak a kérdései álltak. Ugyanez a problematika jelenik meg a későbbiekben **Faragó Lászlónál** (1960) is. Egy másik tanulmányában **Faragó** (1958) leírja, hogy véleménye szerint a hibák oka az **oktatási alapelvek megsértése**, így osztályozásunk alapja is ez kell, hogy legyen. (Nézetének kialakításában minden bizonnyal szerepet játszottak az adott politikai éra elképzelései. Az 50-es években a legkülönbözőbb területeken felmerülő problémákat mindig sikerült a megfelelő személy valamilyen mulasztására visszavezetni. Az ő elképzelése szerint a hibákért mindig az adott tárgyat tanító pedagógus okolható.) Csoportosítása szerint a tanulók önálló logikus gondolkodásra való nevelésének terén elkövetett didaktikai hibák:

- az értelemszerűség,
- a fokozatosság,
- a tudományosság,
- a szilárdság,
- az aktivitás,
- az érthetőség,
- a rendszeresség,
- az érdeklődés elvének megsértése.

A későbbiekben már a vizsgálatoknak ez a komplex megközelítési módja megszűnik. **Surányi Gábor** (1959) az általános iskola alsó tagozatában, míg **Mosonyi Kálmán** (1972) a felső tagozatban végezte kísérleteit. A hazai szakirodalomban publikált, illetve az itt hozzáférhető felosztások közül szerkezeti felépítése, egyszerűsége és viszonylag könnyű alkalmazhatósága miatt nálunk általában a Mosonyi-féle felosztás terjedt el. (A **Czeplédy István** (1994) által a tanárképző főiskolák számára szerkesztett jegyzetben is ez az elgondolás található.)

Mosonyi csoportosítása szerint a gondolkodási hibák okai a következők:

- helytelenül feltételezett analógia,
- formalizmus,
- megszokás,
- fogalmak tisztázatlan volta,
- hiányos előismeretek,
- matematikai műszavak és szakkifejezések.

Mivel a hibákat egyszerre többféle ok is előidézheti, így Mosonyi az okokat két csoportba osztotta.

- A domináns okok előidézik az adott hibát.
- A kísérő okok zavaró momentumként erősítik a hibát.

A domináns és a kísérő okok fajtái határozzák meg szerinte, hogy a hibák kialakulását megelőzni vagy pedig a hibát utólag kijavítani a célszerűbb.

A szocialista országok kutatásaival szemben ebben az időben nyugaton a pszichológia más irányú kidolgozását helyezték előtérbe. Döntő szerepe volt ebben **Piagetnek** (1970), aki korábban a **megismerő tevékenység fejlődésének** vizsgálatával foglalkozott leírva azt az utat, amelyet a gyermek a konkrét gondolkodás szintjéről kiindulva tesz meg a formális gondolkodás kialakulásáig. Piaget elmélete nagy hatást gyakorolt többek között Bruner munkásságára is.

Bruner (1974) szerint „az ember az **információ feldolgozásának** és ábrázolásának három párhuzamos rendszerét alakította ki, az egyiket a manipulálás és a cselekvés, a másikat az észlelési tevékenység szerveződése és a képzetek, a harmadikat pedig a szimbolikus apparátus által”. Ez azt jelenti, hogy az ember kifejlett gondolkodásához ezen technikák rendszerének a kialakításán keresztül vezet az út. Tehát, ha például középiskolában a diákoknak valószínűség-számítást és matematikai statisztikát akarunk tanítani, akkor ennek az előkészítését már az általános iskola első osztályában el kell kezdeni olyan fogalmak és eljárások tanításával, amelyek majd a későbbi elsajátításhoz szükségesek lesznek. (Lényegében ezt az elvet veszi át felépítésében a Nemzeti Alaptantervünk is.) Bruner elmélete közel vitte a **nyelvnek** az ismeretátadás folyamatában betöltött szerepének vizsgálatához. Bruner nézete az, hogy „a tanulást nagymértékben megkönnyíti a nyelv mint közvetítő tényező, amely végül is nem csak a gondolatok kicserélését teszi lehetővé, hanem olyan eszköz, amelyet a tanuló majd maga is felhasznál arra, hogy az őt környező világba rendet vigyen ...

Ez a szempont indít arra, hogy az értelmi fejlődés lényegét kutatva, vizsgálódásaim középpontjába a nyelvet állítsam... A legfőbb hiányosságok, úgy látszik, nyelvi eredetűek, a szó legtágabb értelmében.”

Bruner egyik követőjeként **Majoros Mária** (1992) a diákjai által használt matematikai nyelvezetnek a **szimbólumok kezelésében** megmutatkozó szabályai alapján következtetett a megfigyelt gondolkodására. Véleménye szerint a tanulást zavaró gondolkodási problémák nehézségei fokuk alapján rendezve a következők:

- a matematikában megtanulandó és megértendő dolgok közötti különbségtétel megértése;
- a matematikai jelentés beszűkülése, amely azt jelenti, hogy a vizsgált személy nem tudja egyszerű lépésekből összetenni egy bonyolultabb feladat megoldását;
- a szubjektivizmus esetében a gyerekek a saját nézőpontjukból látják csak a matematikát;
- az analfabetizmus a matematika szóbeli alakjának az írásbeli megjelenéstől való teljes elszigetelődését jelenti;
- a bábeli zűrzavar esetén a gyerekek egyéni értelmezései már a valóságos matematikai rendszertől jól megkülönböztethető rendszert alkotnak.

Brunerhez hasonlóan **Skemp** (1975) is nagy hatást gyakoroltak Piaget kutatásai. Skemp a problémamegoldás sikerességét az egyén rendelkezésére álló **szkémák** (szellemi struktúrák) számával hozza kapcsolatba. A megértés pedig egy megfelelő szkémába történő asszimilációt jelent. Olyan nem szükségszerűen állandó szkémába, amelynek akkomodálására a tanulóknak – egy új helyzethez alkalmazkodva – mindig készen kell állniuk. (Az asszimiláció egyébként ugyanúgy, mint Piaget szóhasználatában itt is hasonulást, míg az akkomodáció idomulást jelent.)

A magyar származású **Dienes Zoltánt** (1973) sem hagyta érintetlenül Piaget elmélete. Dienes a matematikatanulás folyamatára dolgozott ki egy általános módszert. Ennek egyik alapelve a **gondolkodás dinamikájának** elve, mely szerint minden gondolkodási folyamatban három szakaszt lehet megkülönböztetni. Az elsőben a gondolkodást végző személy még csak tájékozódik a környezetében, ezért tevékenységének nincs határozott irányultsága. Ezt követően azonban már felfogja és megérti a probléma megoldásához szükséges összefüggéseket. Végül pedig képes lesz a szóban forgó probléma struktúrájának a felismerésére, és ezáltal az összefüggések segítségével történő megoldásra.

Mason (1961) a matematikai problémamegoldásban az alábbi fázisokat különböztette meg.

Folyamatok	Fázisok	Tevékenység	Utasítások
			– olvasd el a kérdést gondosan
		Tudom	– specializálj, hogy felfogd miről van szó
	Belépés		– milyen ismeretek, tények, készségek tűnnek relevánsnak
			– ismersz egy analóg, hasonló problémát
		Keresem	– osztályozd és rendszerezd az információkat
			– óvatos legyél a kétértelmű dolgokkal
Specializálás			– specializálj a valódi kérdés felfogása alatt
		Bevezetés	– ábrák, táblázatok, szimbolikus reprezentáció, jelölések
		↑	
	Támadás	AKADÁLY	AHA
			↓
		Ellenőrizd	– a számolásokat, indokold, hogy a számolások megfelelőek
			– a következtetéseket, következményeket
			– hogy a megoldás valóban kielégíti a kérdést
Általánosítás		Reflektálás	– a kulcsötletekre, momentumokra
	Reflexió		– a felfedezés és indoklás következményeire
			– a saját megoldásra
		Kiterjesztés	– egy, az eredetnél szélesebb kontextusba (általánosítás)
			– egy új megoldási minta keresésére
			– a feltételek megváltoztatására

A matematikadidaktika legnagyobb hatású szakértője, **Pólya György** (1957) a gondolkodási tevékenység iskolai keretek között történő fejlesztésével foglalkozott. Pólya a feladatok megoldására, s ezzel a feladatmegoldáshoz szükséges **gondolkodási műveletek** leírására négy lépést javasol. Ezek sorrendben a következők:

- A feladat megértése
- Tervkészítés
- A terv végrehajtása
- A megoldás vizsgálata.

A legnagyobb gond ezzel – és a többi ehhez hasonló – felosztással kapcsolatban az, hogy a gondolkodás egyes lépéseit nem bontja le kis, elemi szintekig, s így a gondolkodás menetét, vagy másképpen, a hibázás sajátosságait nem tanulmányozhatjuk ezen a módon a kellő részletességgel. (Csak mintegy olyan módon általánosítva, amely a jellegzetességeknek a kiemelése helyett azok egységesítését teszi inkább lehetővé. Így tehát annak ellenére, hogy Pólya megfigyelései nagyon sok hasznos tanácsot nyújthatnak a tanítás eredményesebbé tételéhez, maga a módszer egy igazán részletes vizsgálat alapjául nem szolgálhat. Jól látja **Lénárd Ferenc** (1978), hogy ennek oka és általában az ilyen elgondolások legnagyobb hibája az, „hogy nem az **egyéni, konkrét gondolkodási menetek** vizsgálata nyomán kerültek megfogalmazásra, hanem a mindennapi megfigyelések rendkívül nagy mértékben leegyszerűsített összegzését közlik, általánosítását szövegezték meg”. Mások is észrevették, hogy a Pólya által leírt rendszer túl általános, és nem ad elegendően konkrét útmutatásokat a tanulók számára. **Schoenfeld** (1985) kutatásai alapján kiegészítette Pólya javaslatait. Nála a gondolkodás fázisai a következők.

- A feladat elemzése és megértése
- Megoldási terv vázlata
- Megoldás keresése nehezebb feladatoknál
- A megoldás felülvizsgálata.

A matematikai elméletekre nagy hatással bíró Pólyával szemben Lénárd az általa kidolgozott felépítésben szereplő kategóriáit tapasztalati úton, rejtvényekre adott válaszok segítségével alkotta meg (, így kapott eredményein jól felismerhető Rubinstein (1960) munkáinak hatása). Szerinte a gondolkodás mindig két, különböző szinten lejátszódó folyamat eredménye. **A gondolkodási fázisok** nála a gondolkodási folyamat egészére vonatkozó lépéseket jelentenek. Az ezekből felépített **makrostruktúra** szerkezete a következő.

1. Ténymegállapítás
2. A probléma módosítása
3. Megoldási javaslat
4. Kritika
5. Mellékes mozzanatok említése
6. Csodálkozás, tetszés
7. Bosszankodás
8. Kétkedés
9. A munka feladása.

Másrésről viszont az a tapasztalat, hogy a gondolkodási **lépéseket** nem csak az egész gondolkodási folyamat, hanem az egyes lépések kis környezetei, az úgynevezett **mikrostruktúra** részei is befolyásolják. Ilyen módon az alábbi gondolkodási műveletekhez jutunk:

- a) Analízis
- b) Szintézis
- c) Elvonás (absztrahálás)
- d) Összehasonlítás
- e) Elvont adatok összehasonlítása
- f) Összefüggések felfogása
- g) Kiegészítés
- h) Általánosítás (generalizálás)
- i) Konkretizálás
- j) Rendezés
- k) Analógia

A gondolkodási folyamatnak ez a kettős szerkezete alkalmasnak tűnt a problémamegoldás során alkalmazott gondolkodási folyamat részeire bontására és az esetlegesen felmerülő hibáknak ebben a struktúrában való pontos elhelyezésére. Emiatt vizsgálati módszerünk alapját – kis módosításokkal együtt – erre építettük. Ha ilyen módon vizsgáljuk meg a különböző témakörök tanításánál felmerülő hibákat, akkor ezek receptszerű leírásán kívül rámutathatunk azokra a döntő lépésekre, amelyeknek a fejlesztésére az egyes tanítandó egységeknél a diákok gondolkodásában fokozottan kell figyelniük.

A problémamegoldásra vonatkozó elméletek áttekintése nem lenne teljes, ha nem vennénk figyelembe a jelenleg legdivatosabbnak tűnő irányzatot. A kognitív pszichológia szerint a tanulást végző személy – aki nem csak diák lehet – a meglévő, rendszerekbe rendezett ismeretei segítségével értelmezi a számára új információkat.

Az itt szóba jövő kognitív matematikai képességstruktúra elemei **Caroll** (1993) szerint a következő faktorokba rendeződnek:

- (1) fluid intelligencia
- (2) kikristályosodott intelligencia
- (3) általános memória és tanulás
- (4) átfogó vizuális érzékelés
- (5) átfogó auditív érzékelés
- (6) átfogó felidézési képesség
- (7) átfogó kognitív gyorsaság
- (8) feldolgozási (döntési) sebesség.

Az előzőeken kívül az elméletnek a felmerülő tapasztalatok magyarázata érdekében be kell vezetnie az általános intelligenciát jellemző g-faktort is. A legnagyobb probléma azonban ennek az elméletnek az alkalmazásával az, hogy még nem tisztázott kellően az előzőekben leírt képességeknek és a matematikai problémák megoldásban nyújtott teljesítménynek a kapcsolata.

A matematikai hibák egy jellegzetes csoportjának, a racionális vagy ésszerű hibáknak a csoportosítására **Ben-Zeev** (1998) adott taxonometrikus leírást. A REASON (Rational Errors a Sources of Novelty) szerint a hibák előállítási mechanizmusa a következő ábrával szemléltethető.

			Szokatlan problémahelyzet					
			↙		↘			
Bírálattal kapcsolatos hiányosságok					Induktív hiányosságok			
↙	↓	↘			↙		↘	
Hiányzó bírálat	Gyenge bírálat	Kényszer-kielégítés		Szintaktikai indukció			Szemantikai indukció	
			↙	↓	↘		↙	↘
			Részleges összeillesztés	Téves specifikáció	Hamis specifikáció	Analogia	Téves specifikáció	

Ezzel napjainkhoz érve rövid történeti áttekintésünk végéhez értünk. Tudatában vagyunk annak, hogy a felsorolásunk távolról sem nevezhető teljesnek; itt mindössze azokat a legszükségesebb elméleteket foglaltuk össze, amelyek elgondolásunkat valamilyen módon befolyásolták. Ismertetésünkben igyekeztünk nagy hangsúlyt adni a magyar vagy magyar származású kutatók legjelentősebb ilyen irányú eredményeinek. Már csak azért is kötelességünknek tekintettük ezt, mivel a (matematikai) gondolkodás folyamatának leírásával foglalkozó tudósok között jelentős számban voltak magyar születésűek. Ráadásul a hazai viszonyok között nagyon jól alkalmazható elgondolások közel állnak a tanáraink elképzeléseihez, akik szívesen alkalmazzák óráikon ezeket.

A problémamegoldó gondolkodással szemben a hibakutatásról reálisan meg kell állapítani, hogy ez a téma Beke 1900. évi tanulmánya óta (nálunk is) méltánytalanul háttérbe szorult. Jól lemérhető ez a hibák osztályozására vonatkozó vizsgálatokban, amelyek jórészt megrekedtek a leírás szintjén. Ezt csak részben menti, hogy a matematika tanításával és tanulásával foglalkozó tudomány nagy hátrányban van a többi, már kialakult fogalomrendszerrel és struktúrával rendelkező elmélet, így például a matematika és a pszichológia mögött. „A matematikadidaktika születőben lévő diszciplína” írja erről Krygowska (1989). Megállapítását a szóban forgó téma tanulmányozásában szerzett – később részletezendő – tapasztalataink is megerősítik.

Megfigyelhető például, hogy a gondolkodási hibákra vonatkozó előzőekben ismertetett felosztások a Majoros és a Ben-Zeev által alkalmazottak kivételével ugyan a gyakorlatból kiindulva, de anélkül akarnak a hibák okai felől közelíteni, hogy a hibáknak a gondolkodási folyamatba való beillesztését megkísérelnék. Így viszont – noha a feldolgozásokból a pedagógusok rendkívül sok segítséget kaphatnak – a felosztások nem igazán tűnnek felhasználhatónak számunkra. Mi ugyanis a hibákon keresztül egy olyan, az iskolai gyakorlatban könnyen alkalmazható problémamegoldási modellt szeretnénk leírni, amely a hibák csoportosításán kívül más célokra is alkalmas. A problémamegoldó gondolkodáshoz azért ragaszkodunk, mert véleményünk szerint ez természetes módon kapcsolódik a gondolkodási hibákhoz. A gondolkodás ugyanis egy bizonyos probléma megoldása során meghatározott lépcsőfokokon keresztül megy végbe. A gondolkodási hibáknak nyilvánvalóan ezekhez kell kapcsolódnium. Ha a gondolkodási folyamatot kis elemi lépésekre bontjuk, akkor ezzel a hibák keletkezése kibontakozásukban figyelhető meg. A hibák kijavításához vezető hatékony módszer megtalálásához ismerni kell a gondolkodásban a helyes és a hibákat okozó helytelen lépéseket.

A Majoros-féle csoportosítás a tanulók beszédében és írásában tapasztalt hibákon keresztül próbál meg következtetni a problémamegoldásban alkalmazott gondolkodási folyamat tévedéseire. Felosztása azonban annyira összetett, elemi lépések sorozatát tartalmazó tényezőkből áll, hogy alkalmazása nem visz bennünket közelebb a gondolkodás (és annak hibáinak) részletesebb megismeréséhez. A Ben-Zeev modell csupán egy speciális hibatípus leírására vállalkozik

Elmondható, hogy jóformán mindegyik elképzelés a gyakorlatból történő indíttatás miatt jelentős mértékben járult hozzá a tanítás eljárásainak tökéletesebbé tételéhez. Ez jelen vizsgálat tárgyának is olyan követelménye, amelyet a későbbiekben mindig figyelembe kell venni. Ennek a célnak kiválóan megfelel a Lénárd és a Pólya által a gondolkodási folyamat leírására kidolgozott elmélet olyan összekapcsolása, amelyik alkalmas a gyakorlatban történő széles körű felhasználásra. A továbbiakban ennek az ismertetésére térünk rá.

A GONDOLKODÁSI FOLYAMAT SZERKEZETE

Ebben a fejezetben a hibás és a vele megegyező szerkezetű helyes gondolkodási folyamat két fő összetevőjének és ezen összetevők részeinek a vizsgálatunk számára legfontosabb jellemzőit foglaljuk össze, majd néhány példán keresztül megmutatjuk ezeknek a sajátosságoknak az adott témakörben való alkalmazását.

A makrostruktúra

Az előzőekben már említettük, hogy Lénárd általunk is elfogadott elmélete szerint a gondolkodási fázisokat a gondolkodás egészében betöltött szerepük alapján különböztetjük meg. Ezeknek a fázisoknak az összessége adja meg magát a gondolkodási folyamatot, illetve ennek a makrostruktúráját. És megfordítva, a problémamegoldás minden lépése szükségszerűen valamelyik gondolkodási fázishoz tartozik.

Az általunk választott kísérleti anyag, a tanulói dolgozatok elemzése jellegéből adódóan nem teszi sem lehetővé, sem pedig szükségessé, hogy vizsgálataink közé a Lénárd-féle felosztásból **érzelmi kategóriák** (csodálkozás, tetszés, bosszankodás, kételkedés) is kerüljenek. Már **Szeliánszky is** megállapította, hogy az iskolai teljesítményekben csak nagyon nehezen és nagyon kis százalékban mutathatók ki az érzelmi hibák. Pedig ő is – Lénárdhoz hasonlóan – vizsgálati módszerül a **szóbeli kikérdezést** választotta. Az általunk átnézett írásbeli munkáknál a közvetlen kontaktus hiánya miatt az érzelmi tényezők hatása a hibák keletkezésére nem volt kimutatható. Ráadásul a tanulók utólagos megkérdezése is azt a véleményt erősítette meg bennünk, hogy a tévesztésekben a feladatokkal kapcsolatos érzelmek hatása nem volt számottevő, és az előforduló hibákra nézve sem volt egy-egy ilyen érzelmi kategória-jellemző.

Ez már csak azért is könnyen elhithető, mivel a feladatok számonkérés céljából történő kiválasztásánál nem a meglepő adatok, összefüggések és

eredmények szerepeltetése volt a fő szempont, hanem az adott témakör gyakoroltatás utáni elsajátításának az ellenőrzése. (**Mosonyinak** is ugyanez volt a szándéka, ezért vizsgálatai középpontjába ő is az írásbeli munkák elemzését állította. Az érzelmről, mint az eredményt befolyásoló tényezőről ő sem tett említést.) Emiatt úgy véljük, hogy a későbbi ilyen irányultságú, az iskolai oktatás igényeit előtérbe állító módszertani kutatásoknál is megengedhető a szóban forgó gondolkodási fázisok mellőzése. Egyébként ezzel kapcsolatban a pszichológusok álláspontja sem egyértelmű. **Horváth György** (1984) például szintén megkérdőjelezi, hogy „jogos-e elkülönült, önálló fázisként kiemelni a gondolkodás folyamatából annak érzelmi velejáróit”.

Eredményeink elemzésekor ezzel kapcsolatban olyan álláspont alakult ki bennünk, hogy az érzelmek a gondolkodási tevékenységben ugyan valóban vitathatatlanul megjelennek, de konkrét gondolkodási lépések nem kapcsolódnak hozzájuk, hanem inkább csak egyfajta pszichikai állapot létrejöttével elősegíthetik vagy gátolhatják ezeknek a lépéseknek a kialakulását. Elképzelhető, hogy Lénárd azért nem utalt a makro- és mikrostruktúra elemei között fennálló kapcsolatokra, mivel az érzelmi elemeknek nem lehet megfeleltetni a mikrostruktúra tényezőit. Így ellentmondásba került volna például azzal a megállapításával, mely szerint minden egyes gondolkodási lépésnek kettős funkciója van.

Az általunk javasolt csoportosítás egy lehetséges javaslatot mutat az elmélet ezen hiányosságának kiküszöbölésére, és megpróbálja ellentmondásmentesen bemutatni a gondolkodás folyamatának tényleges felépítését. (Amelyben az érzelmek mintegy a gondolkodási folyamatot a gondolkodó személyiségéből adódóan kísérő, de azt alapvetően nem gondolkodási jelleggel befolyásoló tényezők.) Nem lehet kijelenteni ugyanakkor, hogy az érzelmi tényezők egyáltalán nem lehetnek hibázások okai. Sok olyan esetet fel lehet sorolni, amikor egy érzelmi gátlás megakadályozta a várható teljesítmény elérését. A mi célunk a matematikai problémamegoldás folyamatának gyakorlati nézőpontú feltárása, amelyhez csak a kísérleti alapot – azaz az eszközt – szolgáltatta a feladatmegoldások elemzése. Ebből a szempontból számunkra az affektív tényezők nem bírnak fontossággal. Vizsgáljuk meg ezek után a fennmaradó gondolkodási fázisokat most részletesebben.

1. Ténymegállapítás

Minden feladat megoldása ténymegállapítással kezdődik. Ez a megoldásra váró probléma adatainak, összefüggéseinek olyan meghatározását jelenti, amely a megadott problémán semmiféle változtatást nem okoz. Ekkor veszi számba a felmerült problémával találkozó személy azokat a valamilyen formában megadott ismereteket, amelyek a feladatnak a megfogalmazásával és talán a megoldásával vannak kapcsolatban.

Nyilvánvalóan nincs értelme problémamegoldásról beszélni, ha meg sem értjük a feladatot, azaz ha a probléma egészét nem tudjuk hozzákapcsolni az adatokból és összefüggésekből rendelkezésünkre álló részekhez. Még a legegyszerűbb, legmechanikusabb vagy éppen próbálkozásokon alapuló gondolkodásnak is tekintetbe kell vennie a feladattal összefüggő és rá jellemző legalapvetőbb feltételeket.

Az előzőekben leírtak alapján megállapíthatjuk, hogy a ténymegállapítás az a lépés, amely meg kell, hogy előzzön minden más gondolkodási fázist, s amelynek a tapasztalataira támaszkodva indulhat el majd a feladatmegoldás tulajdonképpeni folyamata. Függetlenül attól, hogy van-e ennek a gondolkodási lépésnek látható nyoma a kísérletben részt vevő személy viselkedésében, cselekedeteiben avagy nincs.

Ezzel magyarázható, hogy a Lénárd által közölt jegyzőkönyvekben nem mindig a ténymegállapítás szerepel az első helyen. A kísérletben részt vevő személyek viselkedésének, beszédének vagy cselekedeteinek megfigyelése fontos eredményekkel szolgálhat a megoldás menetére vonatkozóan, de a módszer ugyanakkor el is fedheti a viselkedést nem befolyásoló, beszéddel vagy cselekedetekkel nem járó elemi gondolkodási lépéseket. Ezt a felismerést **Horváth** úgy fogalmazta meg, hogy „a hangos gondolkodás jegyzőkönyvei nem tükrözik a gondolkodási folyamat teljességét”.

Itt érdemes megjegyeznünk, hogy véleményünk szerint a Lénárd könyvében említettekkel ellentétben éppen azért célszerű a gondolkodás vizsgálatához „alkotó

jellegű feladatokat” választani a rejtvények helyett, mert ezek megoldásmenete nem takarja el a megfigyelés elől megbúvó, rejtett gondolkodási lépéseket. Azonban ezek közül a feladatok közül is elsősorban érdemes matematikai problémákat választani, mert ezek megoldása olyan kísérlettől független objektív és megbízható eredményeket szolgálhat, amelyeknél könnyű felismerni a gondolkodás folyamatának törvényszerűségeit. Ideális esetben ekkor tisztában lehetünk a kísérleti személyek rendelkezésére álló alapismeretekkel, az adatokkal és a közöttük fennálló összefüggésekkel, valamint a megoldáshoz vezető utak pontos ismeretével.

A **Lénárd** által vizsgált **fejtörő feladványok** megoldásához **Rubinstein** gondolatmenete szerint szükséges felfedni a szintézis által közvetített analízis révén a feladat szempontjából lényeges feltételeket, és el kell vonatkoztatni a mellékkörülményektől, amelyek a feltételeket elhomályosítva és álcázva a gondolkodást szándékosan helytelen irányba terelik.

A számonkérések során alkalmazott matematikafeladatokat nem elsősorban a lényeges feltételek beugrató jellegű álcázásával teszik a tanult fogalmak és összefüggések számonkérésére alkalmassá, hanem a megtanult ismeretek új körülmények közé helyezéseivel vizsgálják a gyakorlatban történő alkalmazás elsajátítását. Ez közelebb áll a mindennapok során felmerülő problémák megoldásához, mint a megtévesztések által kacskaringós utakra kényszerített gondolkodás.

Ha valaki elkezdi egy matematikai problémának a megoldását, akkor először is be kell illeszteni a megértett feladatot a matematika megfelelő tárgykörébe, majd meg kell vizsgálni az itt szereplő összefüggéseket. Kapcsolatot kell találni egyrészt közöttük, másrészt az összefüggések és a felmerülő probléma között, hogy a későbbiekben ezeket végrehajtva, megváltoztatva vagy esetleg újabbakat létrehozva meg tudjon majd indulni egy javaslattal a feladat tulajdonképpeni megoldása.

A **helytelen ténymegállapításra** példa, amikor az algebrai átalakításokon belül tényezőkre bontáskor egy diák az $x^2 - 1$ nevezetes azonosságot helytelenül a kiemelésekhez sorolja és $x(x - 1)$ módon alakítja szorzattá a fenti kifejezést. Ugyanígy az $x^2 + 1$ összegben az $(x + 1) \cdot (x - 1)$ nevezetes azonosságot felismerni

az előzőhöz hasonló hibát eredményez. Javításnál a fogalmak és összefüggések pontos tisztázása, azok átisméltélekor a konkrét feladatra való alkalmazás rávezetheti a tanulókat a hiba megállapítására, amelynek oka így könnyebben megvilágítható.

Ritkán előforduló hiba, ha valaki a függvénytáblázatban található értékekről azt hiszi, azok pontos értékek. Előfordult olyan eset, amikor a $\lg 2$ -t racionális számnak vélték a $0,301 = \frac{301}{1000}$ átalakítás alapján.

Mivel a négyzetgyöktáblázatban található számokkal kapcsolatban az átnézett dolgozatok egyikénél sem merült fel ugyanez a hiba, a magyarázat valószínűleg a tantervi követelményben keresendő. A $\sqrt{2}$ -ről, esetleg a $\sqrt{3}$ -ról bebizonyítjuk, hogy irracionálisak, de a logaritmus értékeire – és hasonlóan a szögfüggvényekére – gyakran még közvetett utalásokat sem teszünk. Pedig nagyon tanulságos lenne legalább a $\lg 2$ -ről is bebizonyítani ugyanezt a tulajdonságot.

A ténymegállapítás során a feladatban szereplő adatokkal kapcsolatban meg lehet, sőt gyakran meg is kell vizsgálni, hogy igazak-e egyáltalán a feladatban szereplő állítások, és vannak-e itt az érvényességet korlátozó feltételek.

Ezen a helyen a dolgozatok leggyakoribb hibája az algebrában a törtekkel és gyökökkel összefüggő feltételekkel van összefüggésben. Ha egy tört nevezőjében az $a - b$ kifejezés található, akkor az értelmezési tartományban nem helyes az $a \neq -b$ kikötés. Hasonlóan az $a^2 - b^2$ -nek sem az $a \neq b$ sem az $a \neq -b$ kikötések önmagukban, a másik nélkül nem felelnek meg.

Ugyanezt a típust képviseli az $x \neq \pm y$ -ből következő $x = |y|$ vagy $|x| = -y$ helytelen egyenlőtlenség az $|x| = |y|$ forma helyett. Az ilyen típusú hibázás után az abszolút érték definícióját alaposan át kell ismétetni a konkrét példa megbeszélése előtt.

Gyökvonás értelmezési tartományának a meghatározásánál gyakran elfelejtkeznek a tanulók arról, hogy a gyök alatti kifejezés értéke a gyökkitevőtől is függ. Ha ráadásul a gyökkitevő betűkifejezést is tartalmaz, ennek párosság

szempontjából történő vizsgálata a megoldás elemzésénél még az előző esetről is gyakrabban lemarad. (Persze nyilvánvaló, hogy aki ezt figyelembe veszi, az tud arról is, hogy a páros, illetve páratlan kitevőjű gyökvonás hogyan befolyásolja a gyök alatti kifejezés értelmezési tartományát.)

Ugyanebben a témakörben találkozhatunk például gyökös kifejezésekből történő ismételt gyökvonás esetén azzal a problémával, hogy a tanulók nem mindig veszik figyelembe az összes gyökjelet az értelmezési tartomány meghatározásánál. Ugyanez a hiba, ha nem hívjuk föl rá kellően a figyelmet, több helyen is előfordulhat.

A $\sqrt{10-x} = x-10$ egyenletnél a diákok sokszor csak a négyzetgyök alatti kifejezést vizsgálják; a négyzetgyök értékére, azaz a jobb oldalra nem tesznek megállapításokat. Több négyzetgyököt tartalmazó feladatnál az ilyen jellegű hibázás szerepe is megnő. Sőt, okozhat nehézségeket az itt tárgyalt probléma későbbi anyagrészeknél, például a logaritmusnál vagy a trigonometrikus kifejezéseknél. Ezért is lényeges, hogy már a hiba legelőször történő megjelenésekor felhívjuk rá a tanulóink figyelmét és a javítás előtt megbeszéljük a hibázás okát.

Az ebben a pontban leírtakat **összefoglalva** megállapíthatjuk, hogy a ténymegállapítás során elkövetett hibák a problémamegoldáshoz vezető út lépéseivel szoros összefüggésben vannak. Az egyik esetben a probléma helyzetében, körülményeibe való elhelyezésében; a másikban pedig a probléma adataira vonatkozó összefüggéseknek a meghatározásában találkozhatunk helytelen állításokkal, s így a gondolkodási folyamat eme részében elkövetett hibák – várakozásunknak megfelelően – pontosan követik magának a gondolkodási folyamatnak a lépéseit.

2. Megoldási javaslat

A megadott probléma körülményeinek és adataira vonatkozó összefüggéseinek megismerése után a feladathoz tervet, vagyis megoldási javaslatot kell készíteni. Amennyiben a végrehajtás során kiderül, hogy ezek nem bizonyulnak helyesnek, akkor korrekcióra, a megoldási javaslat felülvizsgálatára, azaz mintegy – valamilyen szempontból – új megoldási javaslatra van szükség. Az utolsó megoldási javaslat, amely már elvezet a feladat megoldásához, magának a kitűzött problémának a megoldása, vagy egyik megoldása. A Lénárd által feladott fejtörőknek csak egy „igazi megoldása” volt, ellentétben a matematikai tárgyköréből vett feladatokkal, amelyeknek általában több, egymástól lényegesen különböző elven alapuló megoldása is létezhet. Így a megoldási javaslatok éppúgy nem jellemezhetik mindig egyértelműen a megadott problémát, mint ahogyan az itt elkövetett hibák sem feltétlenül jellemzőek rá. Viszont általánosságban elmondható, hogy a megoldási javaslat hibái mindenképpen a megoldási folyamatban ezen a szinten meglévő valamilyen problémára hívják fel a figyelmet, amelynek többszöri ismétlődése maga után kell, hogy vonja a problémamegoldásra felkészítendő tanulók képzésének – az adott hibák kijavítására tekintettel levő – módosítását.

A megoldási javaslat készítése során bizonyos esetekben úgy is eljuthatunk a megoldáshoz, hogy a probléma megismert adatain és összefüggésein változtatunk – ahogyan azt Lénárd is említi –, vagy pedig egy olyan rokon (általánosabb/speciálisabb/analóg) feladatot keresünk a Pólya által leírtakkal összhangban, amelyek ötleteket adhatnak nekünk a továbbiakra nézve. Ezt a módszert viszont a megoldási javaslat részeként alkalmazzuk, ugyanis feltételezzük, hogy ezáltal előbb vagy utóbb ugyanígy eljuthatunk a megoldáshoz, mint ha egy másik megoldási javaslat útmutatásai szerint járnánk el.

Ugyanez a véleménye például Dunckernek (1989), aki szerint a problémamegoldás nem más, mint a megoldás – azaz a megoldási javaslatok – kifejlése, ami egyben a probléma – azaz a probléma átalakításának, módosításának – kifejlése is.

Az előzőekben leírtak alapján ezért úgy véljük, hogy Lénárd elgondolásával szemben a matematikai feladatok megoldásainak elemzéséből kapott tapasztalatok inkább Pólya elképzelését támasztják alá. Tehát a probléma módosítása mint gondolkodási fázis a megoldási javaslat – Pólyánál tervekészítés – egyfajta típusát jellemzi, nem pedig önálló részt alkot a gondolkodási fázisok között.

A megoldási javaslat készítését a legfontosabb gondolkodási lépésnek tartjuk, amely sikeres esetben elvezethet a megoldáshoz. A matematikai problémák megoldásának a lényege ebben a lépésben rejlik; ennek a helyes, az alkotó képzeletet is megmozgató gyakoroltatása juttathatja el a tanulót a gondolkodása fejlődéséhez, amely cél az iskolai oktatás egyik legfontosabb, ha nem a legfontosabb feladata. Természetes, hogy órákon a gyakoroltatásnál és a számonkérésnél is ez a gondolkodási lépés jut a legnagyobb szerephez, és így a hibázások száma is itt a legnagyobb.

Az algebrai átalakításoknál gyakori a nevezetes azonosságok pontatlan alkalmazása, mint azt a két tag különbségének négyzetére vonatkozó

$$(a - b)^2 = a^2 - b^2$$

$$(a - b)^2 = a^2 + b^2$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2 a (-b) + (-b)^2$$

átalakítások is bizonyítják.

Ugyanebben a témakörben fellépő, de más jellegű hiba például az $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{a+b}$ (vagy másképpen az $(a + b)^{-1} = a^{-1} + b^{-1}$), de akár az $(a^2)^3 = a^5$ egyenlőség alkalmazása is. Gyakori hibák vizsgálatok a műveletvégzéseknél nem kell elmennünk még az osztásig sem. Sok tanulót még a középiskolában is meglepetésként éri az a felfedezés, hogy egy szorzatnak nem kell minden tagját megszorozni az $(a b) c = ac \cdot bc$ képzelt asszociativitási szabálynak megfelelően.

Gyökös kifejezések sokszor előforduló átalakítása a $\sqrt{x^2 + y^2} = x + y$, amelynek a párja a logaritmusnál a $\lg(x + y) = \lg x + \lg y$ vagy éppen a trigonometriában a $\sin(x + y) = \sin x + \sin y$.

Nagyon sokáig lehetne még sorolni a különböző típusú megoldási javaslatok különböző helyeken fellépő különböző jellegű hibáit, azonban ez a leírás gyakorlatban felhasználható eredményt a nagyfokú különbözőség és a vizsgált terület nagysága miatt aligha hozna. Ugyanakkor ez a gondolkodási fázis a mikrostruktúrák szintjét tekintve egy másfajta csoportosítással részeire bontható, tehát az itt említett, de még inkább nem említett hibák elemzését a megfelelő gondolkodási műveletek leírásánál végezzük el.

A **munka feladása** Lénárd könyvében külön gondolkodási kategóriaként szerepel. Véleményünk szerint ez a tevékenység azt mutatja, hogy a kísérletben részt vevő személy vagy nem képes a problémára vonatkozó teljes megoldási javaslatot felépíteni, vagy pedig nem képes a saját ötletét valamilyen ok miatt egészen végigvinni. Ennek – ha az érzelmi tényezőket a már említett okok miatt figyelmen kívül hagyjuk – a matematikában az elgondolás hiányán kívül oka lehet a megfelelő matematikai eljárások és eszközök birtoklásának a hiánya is. (Amely akár egy, a feladat jellegét megváltoztató hibás algebrai átalakítás miatt is felléphet.) A munka feladása tehát a megoldási javaslat hibájára, hiányosságára vezethető vissza. Mint hiba, az ott előforduló hibák részének tekinthető, nem pedig önálló gondolkodási lépésnek.

Az említett okok miatt viszonylag gyakori az előfordulása a dolgozatokban.

Ilyen például az $\frac{(a-b)^2}{a^2-b^2}$ vagy akár az $1^{\frac{1}{2}}$ be nem fejezett, végig nem vitt eredmény.

Ezek a példák azt sugallják, hogy a munka feladása a matematikában nem csak a feladatmegoldás tudatos és szándékos leállítását jelenti, mint ami megfigyelhető például az $a^2 - b^2 + 2bc - c^2 = a^2 - (b-c)^2$ be nem fejezett szorzattá alakítási problémában. Ebben az esetben akár a tanuló azt is hiheti, hogy ez a végeredmény. Ezek ugyanis jellegükben nem feltétlenül mutatnak rá arra, hogy itt még van további tennivaló, tehát a munka feladása lehet akaratunktól, szándékunktól független cselekedet is.

Ha a feladatmegoldó személy gondolkodása zsákutcába jutott, akkor néha olyan megjegyzések is előfordulnak a papíron, amelyeknek az adott problémával nagyon kicsi vagy egyáltalán semmi kapcsolata nincs. (Ezt a jelenséget nevezi

Lénárd **mellékes mozzanatok említésének**.) Ilyenkor leggyakoribb az, hogy a tanuló az adott témakörből származó olyan képleteket ír le, amelyekről azt gondolja, hogy esetleg lehet köze az általa fel nem ismert megoldáshoz, és amelyek így mintegy megoldásvázlatokként értékelhetők. Ekkor természetesen még az egyébként helyes összefüggések is hibának minősülnek, mivel ezek itt a gondolkodás hiányosságaira mutatnak rá. Véleményünk szerint ez a lépés szintén a tervekészítés hibáját jelzi, annak keretein belül tárgyalandó. Mellékes mozzanatok említéséhez sorolhatók például a következőekben leírt hibázások.

Az $x^2 y^3 - x^2$ kifejezés szorzattá alakításakor nehezen indokolható a kiemelés elvégzése nélkül az $x^n - y^n = (x - y)(x^{n-1} + x^{n-2} y + \dots + x y^{n-2} + y^{n-1})$ azonosság szerepeltetése. A tanuló ugyan felismerte, hogy ennek az összefüggésnek szerepe lehet a megoldásban, de az ismeretlenek különböző hatványkitevői (és a kiemelés elmaradása) miatt az azonosság konkrét formáját nem tudta meghatározni. Súlyosabb probléma, amikor a mindenáron szorzattá alakítás érdekében az $x^2 + y^2$ kifejezés mellett a másodfokú egyenlet megoldóképletének általános formáját találjuk. Megszokván ugyanis másodfokú kifejezéseknél a gyöktényező alakhozát, egy számukra ismeretlen probléma kapcsán gyakran képesek a tanulók a más feladatoknál jól bevált módszerekhez folyamodni.

Ritkán előfordul olyan eset is, hogy a feladat környezetében, magához a feladathoz egyáltalán nem kötődő összefüggéseket találunk: nyilván a megoldó ezekre a részekre emlékezett, ezeket tanulta meg a legjobban. Nagyon komoly hiányosságok mutatkoznak annál a diáknál, aki az $a^2 + b^2 - c^2$ kifejezéssel kapcsolatban az $a^2 + b^2 = c^2$ összefüggést szerepeltette – nyilván a Pitagorasz-tételre emlékezve. Itt már a különböző anyagrészek formuláinak egymással összekeveredett halmazából pusztán a külső hasonlóság okán is kerülhetnek elő oda nem illő képletek.

A vizsgálódások tapasztalatait összegezve megállapítható, hogy ez a nem különállónak tekinthető gondolkodási fázis nem fordul elő túlságosan gyakran számonkéréskor; a tanulók a feladatmegoldásoknál általában megmaradnak azoknál a néha hibás eszközöknél, amelyekről úgy gondolják, a megoldáshoz vezeti őket.

Ebben a vonatkozásban komoly eltérések vannak az iskolai feladatok és a rejtvények között. Az előbbinél az oktatási rendszerünkben a tanulóba sulykolt megoldási menetek a kerülők nélküli közvetlen utakra fektetik a hangsúlyt, míg az utóbbinál a szándékos megtévesztések miatt minden mellékkörülmény vagy mellékes mozzanat – amely akár a leghalványabb kapcsolatba hozható a feladattal – lényeges lehet. Ezek a tények magyarázhatják az iskolai számonkérések területén a mellékes mozzanatoknak a szigorúan a felvetett problémához kötődő tényezőkkel szembeni előfordulásuk gyakoriságában mutatkozó nagyarányú lemaradást.

3. Kritika

A problémának az értelmezésünk szerinti megoldása nem jelenti a gondolkodási tevékenységnek az adott feladatra vonatkozó befejezését. Az eredményt ehhez ellenőrizni is kell valahogyan, azaz meg kell győződni a megoldásunk helyességéről. A matematika iskolai tanításában ennek bevált, még ha nem is mindig következetes szabályai vannak, de **Pólya** munkáiban ezektől eltérő módszereket is olvashatunk. Ilyenek például a feladatmegoldás más módon történő levezetése, az eredménynek vagy a megoldás módszerének alkalmazása egy másik feladat megoldására, stb. Az ilyen ellenőrzésnek nagy előnye, hogy ekkor a tanuló nem úgy győződik meg a megoldásának „jóságáról”, hogy ellenőrzéskor ugyanazt a hibát követi el mint korábban, a feladat megoldásakor.

Érdemes diákjainkat – mintegy az iskolai követelmények ellenében – ránevelni arra, hogy nem csak az egyenletek megoldásának helyességéről vagy helytelenségéről lehet ellenőrzéssel meggyőződni, hanem valamilyen módon minden felmerülő problémáról. Ezzel hozzászoktathatjuk őket ahhoz, hogy ne fogadjanak el mindent kritikátlanul és önállótlanul, hanem próbálják a dolgokat a saját eszközeikkel ellenőrizni.

Persze az ellenőrzés elvégzését is el lehet rontani. Amikor $\sqrt{2}$ és $\sqrt[3]{3}$ összehasonlítását adtuk fel otthoni munkaként, akkor a hibátlan levezetés, a $2^{\frac{1}{2}} < 3^{\frac{1}{3}}$

egyenlőtlenség meghatározása után indokként azt láttuk az egyik füzetben, hogy az eredményt már csak amiatt is el lehet fogadni, mivel 3 bármely hatványa nagyobb, mint 2 bármely hatványa. Itt a tanuló azért is nyugodt lehetett, mert az egyébként jó megoldását kapta így rossz logikai indoklásával vissza. Előfordulhat azonban ennek az esetnek a fordítottja is. Valaki azzal akarta az egyszerűsítés egyébként igen gyakran előforduló hibás formáját igazolni, hogy ehhez egy ismert és igaz nevezetes azonosságot használt fel.

Szerinte az $\frac{a^2 - b^2}{a + b} = a - b$ összefüggéshez úgy is el lehet jutni, hogy a -val

és b -vel egyszerűsítjük az a -t illetve b -t tartalmazó tagokat, majd az előjeles kifejezések osztására vonatkozó előjelszabály figyelembevételével határozzuk meg a hányadosban a és b betűk előjelét. A megoldás „helyes” voltát az $\frac{a^2 - b^2}{a + b} = \frac{(a + b)(a - b)}{a + b} = a - b$ ellenőrzés mutatja. Ilyen esetben a tanár ne csak ellenpéldával cáfolja az állítást, mert ekkor az maradhat meg a diákban, hogy ha az eredménye nem is mindig jó, de bizonyos esetekben a módszere alkalmazható. Másrészt ilyen módon nem jön rá tanítványunk a hiba okaira.

Általánosan is jól használható eljárás, hogy célszerű ekkor visszamenni a témakör elejéig, jelen esetben az oszthatóság fogalmáig, és innen lépésenként visszafelé haladva rámutatni a hibára illetve a kijavítása utáni helyes megoldásra.

Az eddigi példákban vagy a jó megoldási javaslatot zártuk le egy rossz kritikai résszel, vagy megfordítva: a rossz megoldási javaslatot indokoltuk egy önmagában helyes kritikai megállapítással. Azonban, mint már említettük, ellenőrzéskor előfordulhat ugyanolyan jellegű hiba, mint a megoldás keresésekor. Ez leggyakrabban az egyenletek témakörében fordul elő. Ott ugyanis lényegében ugyanazokat a lépéseket végezzük el ellenőrzéskor az eredményül megkapott érték(ek)kel, mint amilyeneket korábban a változóval csináltunk. Ha a hiba nem véletlen elszámolásból, hanem tudatosan, rosszul rögzült műveletvégzésből adódott, akkor nagyon valószínű, hogy a konkrét számértékeknél ez újra megismétlődik.

Ebbe a csoportba tartozik algebrai kifejezéseknél az $(a + b)^{-1} = a^{-1} + b^{-1}$

átalakítás is, ha ezt az $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{a+b}$ összeadás magyarázza.

Algebrai átalakításoknál előfordulhat az is, hogy a végeredményt tetszőlegesen kiválasztott számokat behelyettesítve tesztelik. Így az alábbi egyszerűsítés a tényleges eredménnyel szemben ebben az esetben helyesnek tűnik:

$$\frac{a^2 + 2ab + b^2}{a^2 + b^2} = \frac{1 + 2ab + 1}{1 + 1} = ab + 1, \text{ mivel } a = b = 1\text{-re a bal és a jobb oldal}$$

azonosságot ad.

Az ellenőrzés minden nehézségének ellenére azért elmondhatjuk, hogy a feladatmegoldás során az eredmény helyességének vizsgálatára nagy szükség van, és érdemes a diákokat saját munkájuk állandó ellenőrzésére nevelni. Természetesen ebben a tevékenységben fő célként (idő hiányában) a probléma megoldására kell helyezni a hangsúlyt, nem pedig arra, hogy mindig minden gondolkodási folyamatot – legyen az ténymegállapítás, megoldási javaslat vagy éppen a kritika – ellenőrizzünk. A megoldás és vele együtt az egész felvetett probléma lezárását a megoldás kritikája kell, hogy jelentse.

Az eddigiek összefoglalásaként megállapítható, hogy bár a pszichológia Lénárd-féle problémamegoldási folyamatának struktúrája a matematikáénál nyilvánvalóan gazdagabb szerkezetű, de az oktatásban szerepet játszó elemei – a ténymegállapítás, a megoldási javaslat és a kritika – lényegében megegyeznek a Pólya-féle csoportosításban szereplőkével. Nagyfokú hasonlóságuk miatt **ténymegállapítást és a feladat megértését, a megoldási javaslatot és a tervkészítést** valamint a **kritikát és a megoldás vizsgálatát** azonosnak tekinthetjük. Pólyánál a **terv végrehajtása** az egyetlen olyan művelet, amelyik nem jelenik meg Lénárd rendszerében. Ez azzal magyarázható, hogy a **terv végrehajtása** nem gondolkodási, hanem sokkal inkább manipulatív cselekedetnek minősíthető. (Schoenfeldnek Pólya elméletére vonatkozó módosításai is egybevágóak az észrevételünkkel: a **terv végrehajtása** az ő rendszerében sem szerepel.) Mivel a továbbiakban Lénárd elgondolásával foglalkozunk, így a fázisoknál Lénárd elnevezéseit használjuk.

A makrostruktúra vizsgálatának számszerű eredményei

Lénárd a könyvében leírt vizsgálatait 135 jegyzőkönyv 3426 gondolkodási fázisa alapján végezte el. Ha a korábban vázolt indokok alapján nála is eltekintünk a kísérletekben szereplő érzelmi kategóriáktól, valamint a probléma módosítása, mellékes mozzanatok említése és a munka feladása fázisait az összehasonlítás miatt szintén a megoldási javaslat részeként vesszük figyelembe, akkor elmondhatjuk, hogy a rejtvények megoldására szolgáló gondolkodási folyamatok során az általunk vizsgált gondolkodási lépések közül

- a ténymegállapítás átlagosan 25,
- a megoldási javaslat átlagosan 52,
- a kritika átlagosan 23 %-ban szerepelt. (Lénárd az eredményeket kerekítve, egész százalékokban adta meg.)

Mi 1274 olyan algebrai feladat megoldását vontuk be a vizsgálatokba, amelyekben valamilyen hibát találtunk. Természetesen nem mindegyik feladatban jutottak el a tanulók a végéig, így nem mondhatjuk, hogy a hibák számából és megoszlásából következtethetünk a megoldásokhoz szükséges gondolkodási lépések számára és megoszlására. De vizsgálatainkban nem is ez a cél vezetett bennünket. A gondolkodás hibáinak a gondolkodási folyamat makrostruktúrájába való beágyazódását kívántuk csupán megmutatni.

Az 1274 hibás feladatmegoldásban összesen 1509 helytelen dolgot találtunk. (Egy hibának tekintettük azt, ha valaki többször is ugyanazt a típusú hibát követte el, ugyanis ez a gondolkodásában nem több-, hanem csak egy helyen meglévő hiányosságot takar, amely a feladat jellegéből adódóan másutt is megismétlődött.)

Helytelen **ténymegállapítást** 136 esetben tapasztaltunk; ez az összes hibák 9,0 %-a. Ebből 117-ben, az összes hibák 7,8 %-ában a feladatra vonatkozó feltételek nem voltak tökéletesek, míg a maradék 19 eset, az összes hiba 1,2 %-a téves helyzetfelismerést, rosszul elgondolt típusú átalakítást tartalmazott. Az lehet a magyarázata ezeknek a viszonylag alacsony számadatoknak, hogy a ténymegállapításoknak csak kis hányadát szükséges leírni a megoldáshoz.

A többi olyan elemi szintű felismeréseket tartalmaz, amelyek a gyakorlások során már rutinná váltak, és amelyeknek a leírása emiatt fölösleges munkát jelentene. (Példa erre, ha egy tanulónak törtet kell egyszerűsíteni vagy egyszerűbb alakra hozni, akkor ő már tudja, hogy ehhez először a nevezőt és esetleg a számlálót szorzattá kell alakítani, amit először kiemeléssel próbál meg, majd ezután nézi meg a nevezetes azonosságok alkalmazását, stb.)

Nem mindegyik feladattípushoz tartozik hozzá a probléma érvényességi körét korlátozó feltétel rendszer vizsgálata sem, sőt az érettségi követelményt a felmérés elvégzésének időpontjában meghatározó feladatgyűjtemény ezeknek a nagy részét előre közölte is. Ezzel a könyv a megoldásokat jelentősen megkönnyíti, és a gondolkodási folyamat természetes arányait a képzési céloknak megfelelően megváltoztatja.

A központilag meghatározott követelmények ellenére mi nem tartjuk szerencsésnek, hogy a problémamegoldó gondolkodás egyes lépéseit különválasszuk, és ezek közül egyeseket számonkérendőnek, míg másokat amelyek ugyanolyan fontosak, elhanyagolandónak tekintsünk. Ráadásul, ha az elhagyandó anyagrészek összetétele feladattípusonként változik, akkor ezzel a diákokat rászoktatjuk arra, hogy a problémamegoldás átlagos szabályai helyett a témakörök által megszabott, betanult feladatmegoldási sémákat használják.

Mint az várható volt, a tanulók többsége feladatát az általa elképzelt **megoldási javaslat** leírása közben rontotta el. Az 1509-ből 1254 hiba, az összesnek 83,1 %-a esett erre a gondolkodási fázisra. Ezek az algebrai átalakításokon alapuló feladatok valószínűleg eléggé egyértelműen kijelölt megoldásmeneteket határozhattak meg, ugyanis a tanulók egyetlen esetben sem kísérelték meg a probléma módosítása felől megközelíteni az adott feladatot. Általában is megemlíthető, hogy nálunk még nem terjedt el az oktatásban a matematika különböző területeinek az analógiákon keresztül történő összekapcsolása. Tudjuk ugyan, hogy nagyon szép és szemléletes esetei vannak például az általunk vizsgált témakörben egyes nevezetes azonosságok és különböző azonos átalakítások, illetve bizonyítások geometriai szemléltetésének, de ez a fajta módszer még nem vert nálunk gyökeret. (A nem eléggé a szemléletre és a tanulói kreativitásra épített

geometriai képzés „eredménye” meg is látszik tanulóink gyenge térszemléletében és matematikai jellegű manipulatív tevékenységében.)

178 megoldási javaslatnál, az 1509 eset 11,8 %-ánál a feladatmegoldók nem tudták végigvinni a megkezdett gondolatot, ennyi esetben volt megfigyelhető a munka feladása. Megálltak, holott lett volna még rá lehetőségük, hogy folytassák az átalakításokat. Nem végezték el az általuk kijelölt műveleteket, mert nem bíztak a sikerben, illetve abban, hogy addig a lépésig jól oldották meg a feladatot. (Itt nem vettük figyelembe azt az esetet, amikor egy korábbi elrontott műveletvégzés miatt olyan eredmény jött ki, amelyről reálisan nem volt várható, hogy a tanuló a matematikai ismeretei alapján meg tudja oldani. Ugyanis itt a tanuló nem ebben a lépésben hibázott.)

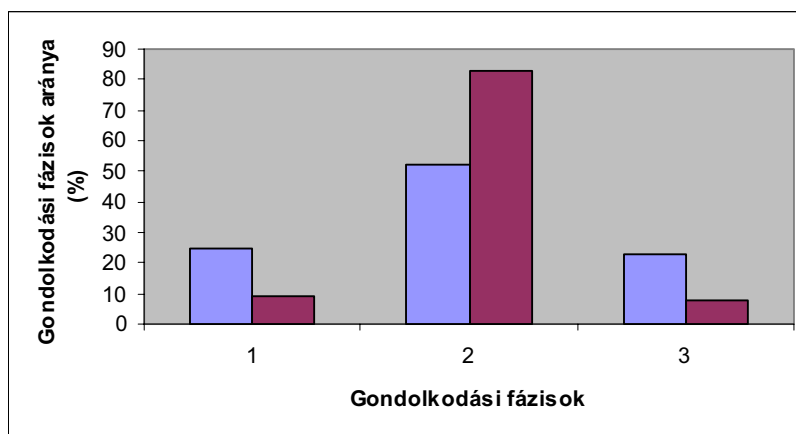
Mellékes mozzanatok említése 22 megoldásra (az összes 1,5 %-ára) volt jellemző. Mindegyikük a feladat által meghatározott témakörben előforduló, de valamelyik nem odaillő összefüggést szerepeltette a papíron. Látszólag ezek az esetek ugyanazt a szerepet töltik be, mint amit a munka feladásánál kaptunk. Mégpedig ezeknél is vagy véglegesen vagy ideiglenesen abbahagyták a tanulók a megoldási javaslat kidolgozását. Viszont itt a feladat témájával rokon összefüggések kerültek leírásra; ez a feladattal kapcsolatos, de eredménytelen továbbgondolkodást jelzi még akkor is, ha ez nem is feltétlenül a helyes irányba halad, hanem csak próba-szerencse alapon válogat a feladatmegoldás egy, ezen a helyen gyakran használatos módszerei között. Reményük az, hogy ezeknek a hasonló összefüggéseknek van valami köze a kitűzött problémához, – és így ezekért a javítási útmutató szerint nekik pluszpont jár – csak ez előttük rejtve maradt.

Az átvizsgált dolgozatokban a problémától teljesen eltérő témájú megjegyzés nem fordult elő. A tanulók az utólagos beszélgetések során elmondták, hogy általában nem tudnak a rendelkezésükre álló időben végig a megoldásra koncentrálni: figyelmük el-elkalandozik. Viszont tudják, hogy a nem odaillő, a témához nem köthető gondolatoknak a leírása előnyt számukra nem hozhat. Ez a feladatmegoldás szempontjából tulajdonképpen fölösleges lépés a ráfordított idő miatt csak a feladatmegoldástól venné el az időt. Ha az osztályzatok és a tanulók órabeosztása révén nem lett volna ilyen korlátozó tényező, valószínűleg mi is a

Lénárdéhoz jobban közelítő eredményt kaptunk volna a vizsgálatokban.

A kritika névvel jellemzett gondolkodási lépésekben 119 hiba, az összesnek 7,9 %-a lépett fel. Ez a kis szám mindenekelőtt azt jelzi, hogy a tanulók nagyon sok esetben nem jutottak el a helyes végeredményig. És arra is rámutat, hogy a tantervi követelmény nem mindig követeli meg a végzett munka ellenőrzését. (Abban az esetben közelebb volna ez az érték a korábban említett tanulmányéhoz, ha az ismétlődéseket, tehát az azonos jellegű hibákat előfordulási számuk alapján vesszük figyelembe. Azonban ez a módszer nem a gondolkodási folyamat hibáira, hanem inkább a konkrét feladat, illetve témakör típusára lenne inkább jellemző.)

Mindenesetre láttuk, hogy a gondolkodási fázisok rendszere – bizonyos módosításokkal – megfelel a hibás gondolkodási lépésekből álló rendszernek, amely így mintegy igazolja az előző modell felépítését is. És ezért annak ellenére, hogy a célkitűzésekből adódóan maguk a feladatok, de a kiértékelések módja és így maguk az eredmények is különbözőek, a kétféle, a Lénárd által és az itt közzétett szám adatok összehasonlítását érdemes grafikonon is ábrázolni. (A Lénárd által kapott értékeket mindig a baloldali oszlop jelöli.)



1. ábra

A gondolkodási fázisok százalékos megoszlása

A mikrostruktúra

Mint már említettük, a gondolkodási lépéseknek kettős funkciója van. A makrostruktúra fázisait a gondolkodás egésze határozza meg, ugyanakkor a gondolkodás egyes lépései a szomszédos lépésekkel való kölcsönhatásban a gondolkodási folyamat másfajta jellemzését adják meg. Ezeket a lépések közvetlen szomszédai, azaz a lépések kisebb környezete határozza meg.

Ezeket a lépéseket ebben a vonatkozásban – mintegy a gondolkodási fázisokkal szemben – gondolkodási műveleteknek, míg a gondolkodási műveletek összességét – a makrostruktúrával ellentétes felépítésük miatt – a gondolkodási folyamat mikrostruktúrájának nevezzük. (Ezek a Lénárd által bevezetett elnevezések szemléletesen írják le a problémamegoldó gondolkodás folyamatában meglévő kettős szerkezetet úgy, hogy a nevükben megnyilvánuló különbségek egyben a tartalmi különbségeikre is rávilágítanak.)

A mikrostruktúra szerkezetének vizsgálata során problémaként jelentkezik, hogy a tekintett felosztásban több olyan gondolkodási lépés is található, amely egy másik, ugyanebbe a felosztásba tartozó gondolkodási műveletnek a speciális eseteként tárgyalható. Mivel az egymás melletti, és az általunk a későbbiekben tárgyalt egymással azonos szerepet betöltő gondolkodási lépésekkel az egész gondolkodási folyamatot a mikrostruktúra szintjén le lehet fedni, így a fölöslegesnek bizonyuló, és az egyes gondolkodási lépéseket tovább strukturáló gondolkodási műveleteket a megfelelő indoklás mellett elhagytuk. Ilyen módon a Lénárd csoportosításában szereplő 11 összetevőt 6 lényeges, egymástól főbb vonásaiban különböző tényezőre bontottuk.

A mikrostruktúrát alkotó gondolkodási műveletek az előzőek alapján az alábbiak lehetnek.

a) Analízis

Az analízis olyan gondolkodási művelet, amely valamely egészet részreire, összetevő elemeire bont fel. Ekkor az egyes összetevők a részekre bontás után külön

egységeket alkotnak. Az analízis – a szintézissel együtt – az egyik legalapvetőbb gondolkodási művelet, amely az összes tőlük különböző bonyolultabb szerkezetű gondolkodási művelet felépítésében is részt vesz.

A feladatmegoldások során, a probléma jellegétől függően bukkanhatunk ritkán vagy gyakrabban hibás analízisre. Ha rosszul elemezzük, rosszul bontjuk részeire a problémában szereplő adatokat, akkor számunkra a $2x$ például nem $x + x$ -et jelent, hanem 2 -t és x -et, amelyből ha x -et elveszünk, akkor 2 -t kapunk. A $2\frac{2}{3}x$ és más hasonló kifejezések értelmezése diákoknál gyakori hibaforrásként jelentkezik. A szorzásjeleknek betűk, valamint számok és betűk közötti elhagyását viszik itt tovább át az egész- és a törtszámok közötti kapcsolatra. A hiba forrásának feltárása, azaz a szorzásra vonatkozó jelölésrendszer tisztázása elejét veheti a hasonló jellegű problémáknak.

Egyébként osztásnál is előfordulhat a helytelen analízissel magyarázható tévesztés. Tanúsítja ezt a $\frac{2x^2}{x^2} = x^2$ műveletvégzés, amely az osztásra vonatkozó ismeretek pontatlan és felületes elsajátítására vezethető vissza. Javítása az előző esetekkel mutatott hasonlósága miatt ugyanolyan módszerrel, a fogalmak, tételek és tulajdonságok visszamenőleges tisztázásával történik. Ennek során rá kell mutatni a hiba kijavításának módjára, azaz a helyes megoldásra is.

A fenti példák alapján látható, hogy az analízisnek az algebrai átalakítások jelölésrendszerének megértésénél nagy szerepe van. A hibás analízis a probléma jellegét teljesen megváltoztathatja. Viszont az analízis önmagában egyetlen feladat megoldásában sem jelentkezik önálló részként, hanem mindig valamilyen művelethez kapcsolódik. (Példa erre a $2x - x = 2$ művelet is, ahol az analízis hibájára a művelet eredménye világított rá.) Így az analízis hibájából eredő hibákat a konkrét, az analízisnél összetettebb műveletek elemzésénél fogjuk megvizsgálni.

Lénárd külön gondolkodási műveletként említi az **absztrahálást** (elvonást), mint amely valamely egész olyan tulajdonságát emeli ki, amely nem tekinthető az előbbi egész részének, vagyis önálló egységnek.

Mivel ez is az egésznek (meghatározott módon történő) részeire bontásakor jelentkezik, így az ennek a pontnak az elején leírtak szerint – és ebben a kérdésben Rubinsteinnel egyetértve – az absztrakciót az analízis specifikus formájának tekinthetjük. Olyannak, amely „kiemeli a lényegét, elvonatkoztatva azt a lényegtelenről”.

Nyilván ennek során is követhetünk el hibákat. Az $1^{\frac{1}{2}} + 1^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{1}{2}}$ helytelen átalakításnál a tanulók nem elemezték jól a problémát, és így a lényeges művelet, az $1^{\frac{1}{2}}$ kiszámítása helyett más módot kellett találniuk az összevonásra. Ez a példa is mutatja, hogy a helyes, a lényegest megfelelően kiválasztó elemzésnek mekkora szerepe van a probléma helyes megoldásában. Tehát ha a felosztásunk szempontjából nem is tekintjük külön gondolkodási műveletnek az absztrahálást, a főként nem elméleti jellegű szakdidaktikai munkák vizsgálataiban mindenképpen nagyrészt kell a tanulmányozásának szentelni.

b) Szintézis

A szintézis és az analízis ugyanannak a gondolkodási folyamatnak a két, egymást kiegészítő, egymással ellentétes oldala. A szintézis az analízis által felbontott részeket új módon, a probléma megoldásának érdekében egyesíti, miközben kimutatja a részek között fennálló összefüggéseket. Miután az analízis és a szintézis kölcsönösen összefüggnek egymással, így kölcsönösen feltételezik is egymást. De ez a vizsgálatunk szempontjából nem jelenti azt, hogy hibázni ne lehetne e két gondolkodási műveletnél külön-külön is. Ha az analízis által elvégzett felbontást hibás vagy a problémamegoldást nem előrevivő összerakás követ, akkor a hibát a szintézisnél követjük el.

Az előbbire, a hibás szintézisre példa az $(a - b)^2 = a^2 - 2 a (-b) + (-b)^2$ átalakítás, amikor is a két tag különbségének a négyzetére vonatkozó formailag helyes felismerést helytelen alkalmazás követ. Az utóbbi eset, a célszerűtlen alkalmazás megfigyelhető az $x^4 - y^4 = (x - y)(x^3 + x^2y + xy^2 + y^3)$ átalakításnál például akkor, ha itt az $(x^2)^2 - (y^2)^2$ azonosság szerint célszerűbb lenne eljárni, vagy az ugyancsak helyes analízis alapján felírt $4x^2 - 4y^2 = (2x + 2y)(2x - 2y)$ azonosságnál akkor, amikor itt a $4(x^2 - y^2) = 4(x + y)(x - y)$ átalakítás általában

többször segít a feladat megoldásához vezető úton. Egy ennél összetettebb problémánál, az $x^3(y - z) + y^3(z - x) + z^3(x - y)$ szorzattá alakításnál a helyes analízist, a szorzások elvégzését sokszor azért követi rosszul a másfajta szempontból történő csoportosítás, azaz szintézis, mivel a tanulók nem sajátították el megfelelően az itt alkalmazandó helyes módszert, és a csoportosításoknál emiatt kénytelenek találgatásokra hagyatkozni.

Törtek összeadásánál gyakran előfordul, hogy a helyes analízist, a közös nevezőre hozásra törekvő felismerést a legkisebb közös többszörös meghatározásának figyelmen kívül hagyása követi. Ilyenkor a tanulók automatikusan az egymástól különböző nevezők szorzatát tekintik a közös nevezőnek. Ha a törtek nevezője gyökös kifejezéseket is tartalmaz, akkor viszont általában leegyszerűsíti az összevonást a közös nevezők megállapítása előtti törtenkénti nevező gyöktelenítés. Az analízist követő szintézis ezekben az esetekben helyesen mutatja meg a feladatmegoldáshoz szükséges lépéseket anélkül azonban, hogy ezek legegyszerűbb elvégzésére iránymutatást adna. Másképpen fogalmazva: a távlati koncepció, a globális cél ismeretében ilyenkor nem kapjuk meg az ennek a legkönnyebb eléréséhez szükséges követendő stratégiát.

A felsorolt példákban látható, hogy a szintézis során elkövetett hibákat alapvetően két csoportba oszthatjuk. Az elsőnek leírt átalakítás olyan hamis eredményt ad, amely nem szolgálhat alapjául a később esetlegesen erre a részre épülő megoldásnak. Ez a típusú hiba tehát zsákutcába juttatja a probléma megoldására törekvő gondolkodást. A másik fajta hiba nem ad ugyan rossz eredményt, de a nem megfelelő vagy nem a legcélszerűbben elérhető irányba mutató megoldások olyan mértéken megnehezíthetik a bonyolultabb formákból történő összefüggések felismerését, hogy emiatt meghiúsulhat a végeredmény levezetése.

c) Összefüggések felfogása

Az összefüggések felfogása két tárgy vagy fogalom között fennálló relációnak a meghatározása. Az általunk vizsgált könyvben Lénárd felsorolt néhány, a gondolkodási tevékenységben gyakran előforduló relációt. Ilyen például a

- hasonló, ellentétes
- kisebb, nagyobb, egyenlő
- egész és rész
- tárgy és tulajdonság
- előbbi, utóbbi, egyidejű
- alárendelt, fölérendelt, mellérendelt
- ok és okozat
- cél és eszköz
- feltétel és követelmény
- értékes és értéktelen
- lényeges és nem lényeges.

Ezután a felsorolás után véleményünk szerint nehezen indokolható, hogy a továbbiakban Lénárd külön gondolkodási műveletként tárgyalja az **összehasonlítást** és az **elvont adatok összehasonlítását**, amelyek a tárgyak illetve fogalmak azonosságát vagy különbözőségét tárják fel. Pedig ezek is épp olyan relációkat fejeznek ki, mint amilyeneket az előbbieken felsoroltunk. Az azonosság felismerése jellegét tekintve nem igényel gyökeresen más gondolkodási formákat mint a hasonlóság felfedezése, és ugyanez elmondható a különböző illetve az ellentétes fogalmakkal kapcsolatban is. Sőt, ennél még többet is állíthatunk.

Az azonosság mind matematikai mind hétköznapi értelemben felfogható a hasonlóság speciális esetének is. Ekkor ugyanis a tárgyak illetve fogalmak hasonlóságának tulajdonságait adó jellemzők nemcsak formai, hanem szerkezeti és tartalmi egyezéseket is mutatnak. (Egy olyan tárgy vagy fogalom, amely azonos egy másik tárggyal vagy fogalommal, szükségképpen hasonlóságot is mutat vele.) A különböző és az ellentétes fogalmak esetében az utóbbi fogható fel az előbbi speciális esetének. Hogy a tartalmazási relációk az egyes pároknál egymáshoz képest ne forduljanak meg, az tűnik szerencsésebb megoldásnak, hogy a felsorolásban a hasonló mellett nem az ellentétes, hanem a különböző, és így az azonos mellett sem a különböző, hanem az ellentétes szerepel. Ezek a kapcsolatbeli keveredések is azt mutatják, hogy az összefüggések felfogása és az összehasonlítás, illetve az elvont adatok összehasonlítása közötti határ nem olyan éles és természetes

választóvonal, amely különböző dolgokat választ el egymástól, hanem olyan elmosódó és erőszakoltan létrehozott elkülönítés, amelynek a megszüntetése egy csapásra feloldja a létezéséből adódó ellentmondásokat.

Nyilvánvaló, hogy az analízissel és a szintézissel szemben az összefüggések felfogása, mint gondolkodási művelet meglehetősen összetett. **Rubinstein** szerint ez az analízis, a szintézis és az absztrahálás eredője, tehát belőlük lépésenként levezethető, de a feladatmegoldásokban előforduló gyakori jelentkezése miatt mégis célszerű ezt az előzőektől külön tárgyalni.

A hibák vonatkozásában feltétlenül ki kell emelni, hogy az általunk tanulmányozott anyag jellegéből adódóan nem fedi le maradéktalanul az összes elképzelhető összefüggésfajtát; ezek nem mindegyikét lehet fellelni az átvizsgált matematikadolgozatokban. Viszont már említett összetettsége miatt az itt fellépő hibák okai nagyon sokféle, egymással a legkülönbözőbb kölcsönhatásban levő problémákra vezethetők vissza.

Nézzünk meg néhány, a **Lénárd** felsorolásában is szereplő hibásan alkalmazott relációt. Egy kifejezés ellentettjét többféleképpen is meg szokták jeleníteni a tanulók például az abszolút érték felbontásban. $x^2 - y^2$ -szerese ezek szerint volt már $x^2 + y^2$, de $-x^2 - y^2$ is. A hibákért itt a többtag szorzására és a négyzetszámok előjelére vonatkozó szabályok, valamint az elmaradt zárójelezés tehető felelőssé.

Nevezetes azonosságoknál sokszor problémát okoz a hasonlóság felismerése. Így például az $x^4 - y^4$ különbségről nem mindig veszik észre, hogy ez lényegében két tag négyzetének különbsége vagy azt, hogy az $x - 2y$ különbség nem más, mint a $2y - x$ kifejezés -1 -szerese.

Az x és a $-x$ kifejezések közül a képzetlenebb diákok szerint az előbbi előjele miatt nagyobb a másiknál. (Magyarázatuk szerint egy pozitív szám mindig nagyobb egy negatívánál.) Ebben az esetben a számok helyett alkalmazott betűk fogalma vár további tisztázásra.

A nagyobb számnak (számológéppel vagy más módon elvégzett) kitalálása vagy korrekt meghatározása utáni magyarázatban fedezhetünk fel hibát a „ $2^{\frac{1}{2}} < 3^{\frac{1}{3}}$, mivel 3 bármely hatványa nagyobb, mint 2 bármely hatványa” leírásban.

A helyes végeredmény ismerete sokszor olyan indoklásokra ösztönzi a tanulót, amelyek a gyors válaszadás miatti pontatlanságok, kellően át nem gondolt állítások következtében helytelené válnak. Itt a bármely szó okozza a hibát, amelyet például az ugyanazon szó helyett használt a hibát elkövető személy. (Még ebben a speciális helyzetben is különbséget kell tenni azonban a kitevők nullához való viszonya alapján az egyes esetek között: az állítás csak nullánál nagyobb hatványkitevőkre teljesül.)

Egyenlőtlenség után egyenlőséget vizsgálva elmondhatjuk, hogy az $\frac{a^2}{a} = a$ egyenlőség elvonatkoztat a betűknek a számoktól való különbözőségétől azáltal, hogy az átalakításban szereplő kifejezések értelmezési tartományát nem vizsgálja. Közös nevezőre hozásnál sokszor nem ismerik fel a tanulók a rész és az egész viszonyát, így az x^2 és az x^3 nevezőjű törtek esetében az összevonásra kerülő nevezők x^5 alakúak lesznek.

A feltétel és követelmény nem kellően tisztázott viszonya okozhatja bizonyításoknál azt az esetet, amikor a bizonyítandó állítás kerül felhasználásra a levezetés során. Habár – mint már említettük – az iskolai algebra feladatainak megoldása nem igényli még a Lénárd által felsorolt összes összefüggés felhasználását sem, a fentebbi példák azért ugyanúgy rávilágítanak ennek a gondolkodási műveletnek az alkalmazására és a fontosságára a matematikai gondolkodásban, mint a hibázások lehetőségére az összefüggések felfogásában szereplő relációk megmutatásában és felhasználásában.

d) Kiegészítés

A kiegészítés egy reláció és az abban szereplő tárgy vagy fogalom ismeretében megnevezi az ezeknek – a reláció útján – megfeleltetett tárgyat illetve fogalmat.

Ez a matematikai feladatmegoldásra lefordítva azt jelenti, hogy az adatok és a rájuk vonatkozó műveletek ismeretében kell a végeredményt, vagy a végeredményre vonatkozó ismeretek és az ide vezető műveletek tudatában kell a kiindulási adatokat meghatározni. Lényegében ilyen célzattal adjuk fel az algebrában szereplő gyakorló feladatok nagy részét. Törvényszerű tehát, hogy az itt elkövetett tévedések az átvizsgált anyagban szereplő összes hibának elég jelentékeny hányadát alkotják.

Ebbe a csoportba tartoznak a Mosonyi-féle felosztás formalizmuson – vagy éppen megszokáson – alapuló hibái, illetőleg a fogalmak tisztázatlan voltából, a hiányos előismeretekből és a matematikai műszavakból, szakkifejezésekből eredő hibák. Célszerű ezeknek a szempontoknak a közös nézőpontból történő megközelítése, mivel közöttük sokszor csak árnyalatnyi vagy még annál is kisebb különbségek vannak, amelyek a hibák csoportosítását nagyon megnehezítik, és a határesetek besorolását illetően nem rendelkeznek kellően egyértelmű ismérvekkel.

Például a formalizmuson alapuló és a fogalmak tisztázatlan voltából eredő hibák között Mosonyi szerint az a különbség, hogy az előbbinél a forma és a mögötte álló tartalom közül a forma túlsúlya, – míg az utóbbinál a tartalom erőtlensége a meghatározó. Ha ezeket együtt tárgyaljuk, akkor nem kell állandóan méricskélünk – sokszor csak szubjektív megközelítés alapján –, hogy mennyire erős vagy éppen gyenge egymáshoz képest ez a két tényező. Az előbbihez hasonló indoklással elmondható, hogy nem könnyű és magából a hibából sokszor meg sem állapítható, hogy a helytelen lépés bekövetkezte a még nem kellően megvilágított és begyakorolt fogalomrendszerre vagy a szintén nem kellően megvilágított, de ennek ellenére már túlságosan is sokat gyakorolt tevékenységekre vezethető vissza. Tehát a megszokáson alapuló és a fogalmak tisztázatlan voltából eredő hibák megkülönböztetése véleményünk szerint a dolgozatokon alapuló számonkérési rendszerünkben indokolatlan és fölösleges.

Még az előzőeknél is nehezebb különbséget tenni a nem kellően megalapozott és megvilágított speciális matematikai műszavak, szakkifejezések és a tisztázatlan fogalmak, valamint a hiányos előismeretek között.

Más csoportosítását adja az itt fellépő hibáknak Krygowska, aki a formalizmus mellett másik jelentős tényezőként a verbalizmust, az értelem nélküli – de esetleg definíciókon és szabályokon alapuló – műveletvégzést nevezi meg. Ezt próbálja Mosonyi az előbb említett módon a közöttük levő kicsi és majdnem mérhetetlen különbségeik alapján részekre osztani.

S hogy tényleg elképzelhető ezeknek az utóbb leírt hibafajtáknak a közös tárgyalása az mutatja, hogy Krygowska szerint is „a kizárólag sematikus mintákra alapított formalizmus könnyen verbalizmussá alakul”, azaz mindkettő a gondolkodási műveletek ugyanazon fajtáját képviseli. (Hazánkban az ötvenes évek elején volt divatos téma a formalizmus, vagy ahogy **Cser Andor** (1952) írja, a „gondolattakarékossági elv” elleni küzdelem. Faragó szerint matematikatanításunk éppen a formalizmus elleni harc jegyében kapott ekkor új lendületre. Mosonyi is egyetértőleg nyilvánít véleményt arról, hogy a formalizmus elleni küzdelemről szóltak ebben az időben a továbbképzési előadások, és ezt tartották elsősorban szem előtt a tantervek szerzői és a tankönyvek írói. Szerinte ez a harc hasznos volt, mivel „a formalizmust, mint minden hibát, teljesen ki kell küszöbölni”. (Véleményünk szerint az utóbbi megállapítással egyet is lehet érteni.)

Az eddigiek összefoglalásaképpen megállapíthatjuk, hogy az ebben a részben tárgyalt hibák a nem kellően felépített és tisztázott matematikai fogalomrendszerre és/vagy az ezekre támaszkodó nem kellően, illetve rosszul begyakorolt lépésekre vezethetők vissza.

Lássunk néhányat ezek közül. Már **Beke** is megemlíti az alábbi helytelen átalakításokat, és mivel a századforduló óta eltelt időben nem fordítottunk a hibakutatásra elég figyelmet, ezek azóta is folyamatosan előfordulnak.

Az összeg négyzete és a négyzetek összege a nem kellően tisztázott fogalmak és az elégtelen gyakorlás miatt válhat egyenlővé az $(a + b)^2 = a^2 + b^2$ „azonosságban”. Hasonló ehhez az $(a - b)^2 = a^2 + b^2$ vagy az $(a - b)^2 = a^2 - b^2$ (nem egészen) „egyenlőség” is. Közöttük a különbség hajszálnyi: az előbbinél a negatív tag négyzetére vonatkozó előjelszabály figyelembe lett véve.

Az $(a + b) \cdot (c + d) = ac + bd$, illetve az $(ab) \cdot c = ac \cdot bc$ műveleti hibák közül az első az általunk vizsgált dolgozatokban nem fordult elő. Ennek a műveletnek a helyes elvégzésére és begyakorlására az általános iskola, majd a középiskola a jelek szerint elég súlyt fektet. Valószínűleg segít a szabály rögzülésében a többtagok szorzását leíró szöveges magyarázat is, amelynek a képleténél jobban megjegyezhető a formája. A másodiknak leírt képlettel azonos formájú tévesztés viszont meglehetősen gyakori. A tanulók számára logikusnak tűnik, hogy ha az összeg minden tagját meg kell szorozni a szorzótényezővel, akkor ez az eljárás igaz szorzat esetében is.

A hatványokkal és a hatványkitevőkkel végzett műveletek összecszerelése mind a hatványozás azonosságainál, mind a később erre épülő logaritmus azonosságoknál előfordul. Az $x^m \cdot x^n = x^{m+n}$ „klasszikus” formáján kívül előfordult az $(x^m)^n = x^{m+n}$, az $(xy)^n = x^n + y^n$ és az $(x^m)^n = x^{m^n}$ alak is.

Ugyanílyen típusú hibák a gyököknél is megtalálhatóak. Példa erre az $\sqrt[n]{x+y} = \sqrt[n]{x} + \sqrt[n]{y}$, $\sqrt[n]{x} \cdot \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{x}$ vagy éppen az $\sqrt[n]{\sqrt[n]{x}} = \sqrt[n+m]{x}$ átalakítás. Krygowska megemlíti még ezeken kívül az előzőekkel egy csoportba tartozó $\sqrt[n]{x^n + y^n} = x + y$ és a logaritmus műveleteinek témaköréből a $\lg x - \lg y = \frac{\lg x}{\lg y}$ hibákat is. A mindenáron eredményességre való törekvés vezetheti el a tanulókat a $\lg(x - y) = \lg x - \lg y$ formáig. Az előzőekhez hasonlóan a nem megfelelően felépített fogalmak és műveletvégzések eredményei az $ax^n = (ax)^n$, $\frac{1}{x^n} = x^n$ és $a^{-n} = \frac{a}{n}$ hibás alakok.

Mivel ez a gondolkodási művelet egy reláció és egy tárgy vagy fogalom ismeretében nevez meg egy, az előzőnek megfelelő tárgyat vagy fogalmat, így a gondolkodás eredménye ekkor azonnal megjelenik. Ezért állítják ezt a gondolkodási formát az iskolai számonkérésnél előtérbe, s ezért érthető, hogy az itt előforduló hibák aránya a többivel összehasonlítva miért a legnagyobb. És ezért is fordulhat az elő, hogy a pedagógusok és a matematikadidaktikával foglalkozó szakemberek egy része csak ennek vagy jórészt ennek a kérdéskörnek a problematikájával foglalkozik. Sőt a pszichológiában egy nagyon jelentős irányzat legfőbb képviselőjeként **Bartlett**

(1951) „az egész gondolkodási tevékenységet ezzel az egy gondolkodási művelettel magyarázza”.

Lénárd a kiegészítés alapeseteként tárgyalja az **általánosítást**, amely egy konkrét adathoz tartozó általánosabb, az eredeti fölé rendelt adat meghatározására szolgál; és ennek ellentétét, a **konkretizálást**. Annak ellenére, hogy ezek a gondolkodási műveletek nagy szerepet játszanak a modern matematikaoktatásban, a segítségükkel megoldott feladatok megoldásmenetében ilyen jellegű hibát alig találtunk. Ez – az előző megjegyzésünkre hivatkozva – egyáltalán nem véletlen, mert az iskolai oktatásunk által felvetett problémákban és az ezekre adott válaszokban szinte kizárólagosan az iskolai, a valóságtól többé-kevésbé elrugaszkodott hagyományos módszerek és nem pedig az iskolán kívüli és az iskola utáni gyakorlati életben, a mindennapokhoz való alkalmazkodásban segítő életszerű, a tanulók érdeklődéséhez igazodó feladatok dominálnak.

Nagyon jól világítanak rá erre a tanterv – és képzésbeli hiányosságunkra **Csapó Benő** (1994) tanulmányai, amelyekben egyébként a tanulók induktív gondolkodásának további iskolai fejlesztéséért is határozottan szót emelt.

A fentebb említettek miatt tanulóink tehát majdnem mindig a mindenkori feladatra koncentrálnak, nem foglalkozván azzal a tankönyveinkben egyáltalán nem szereplő lehetőséggel, hogy megoldásaikhoz segítséget a konkrét adatok általánosításában vagy éppen a konkretizálásban keressenek. Reméljük, hogy a későbbiekben a születendő alaptantervek az automatizmusokig terjedő begyakoroltatás helyett jobban figyelembe veszik a hétköznapi élet követelményeihez, igényeihez sokkal jobban alkalmazkodó oktatáspolitikai koncepciókat, és ekkor ezen részek szerepe is növekedni fog az iskolai feladatokban.

Az előzőekben leírtak miatt a konkretizálás hibás alkalmazása általában megmarad azon a szinten, hogy egy általános összefüggésnek konkrét adatokkal vett vizsgálatát tanulóink elégségesnek vélik a bizonyításhoz. És megfordítva konkrét tapasztalatok sorozatából bátran következtetnek az általánosított összefüggésre, amellyel pedig – ha az adott példák eredményeit bizonyításként kezelik – az induktív gondolkodás szabályai ellen vétnek. Azonban a tapasztalatok szerint pontosan ennek, az induktív gondolkodásnak az iskolai fejlesztése oldja meg azon

problémák többségét, amelyet ebben a pontban vázoltunk.

e) Rendezés

A rendezés olyan összetett gondolkodási művelet, amely az adatok, fogalmak, összefüggések csoportjából valamilyen szempont szerint kiválasztja a megfelelőket.

Így például a $2x^2 + 3x^3 + 4y = 5x^5 + 4y$ összevonás aszerint választotta ki az egymással összeadható „egynemű” tagokat, hogy melyikben vannak ugyanolyan betűvel jelölve az ismeretlenek. Ha a rendezés megtörtént, akkor olyan módon kellett ezt egy „alkalmas” művelettel lezárni, amely nem mond ellent a rendezés szabályainak. Ezért itt a hibát elkövető nem is veszi észre addig a tévedését, amíg neki az egytag fogalmát pontosan újra el nem magyarázzák, s így ezzel együtt rendezésének hibás voltára rá nem mutatnak. Ebben a példában a rendezés helytelenségére a műveletvégzés helytelensége irányította rá a figyelmet.

Nem mindegyik, rendezéssel kapcsolatban elkövetett hiba lép fel azonban valamilyen művelethez kötődve. Egy korábban elvégzett értelmezési tartományvizsgálatból levezetett $x > 0$, $x < 3$ egyenlőtlenségrendszer megoldásaként megkapott $x_1 = 1$ és $x_2 = 2$ értékek a rendezés alaphalmazának a helytelen felismeréséből (a valós megoldásoknak a természetes számokra történő korlátozásából) adódnak. De lehetséges hibát elkövetni a rendezési relációk közötti műveletek alkalmazásakor is. Talán a leggyakoribb tévedés itt abból származik, hogy rendezés után kapott halmazokat mikor melyik unió – vagy metszetképzéssel, esetleg valami mással – kell összekötni.

Az itt elkövetett hibák kijavításakor tehát figyelembe kell venni a rendezés műveleteit, a műveletek eredményeképpen kapott halmazokat, valamint az ezek között a halmazok között fennálló műveleteket is, ha vannak ilyenek. A javítás tehát a szóban forgó gondolkodási művelet összetettsége miatt szintén többirányú megközelítést igényel.

f) Analógia

Az analógia alkalmazásakor először összefüggést kell találnunk a megadott fogalmak, relációk, illetve adatok és egy általunk ehhez valamilyen szempontból hasonlóknak vélt probléma fogalmi, relációi, illetve adatai között, majd ennek a rokon esetnek a feladatmegoldását alkalmazzuk az általunk megoldandó problémára is. Így jutunk el az analógia felhasználásával a végeredményhez. Ez a gondolkodási művelet az előzőekben leírtak szerint olyan összetett szellemi tevékenységet kíván, amely sorrendben az összefüggések felfogásából és a kiegészítésből áll.

Mind a hagyományos, mind pedig a heurisztikus problémamegoldásban nagy szerepet kaphatnak az addig ismeretlen jellegű feladatok megoldása kapcsán a már korábban kidolgozott példák eredményei és az ezekhez vezető levezetések. Ezért háríthatja **Beke** a felmerülő hibákat a hamis analógiákra, de ugyanakkor ezért ajánlhatja **Pólya** a tervekészítés folyamatának mintegy vezérmotívumaként a rokon feladat, vagy másképpen analógia keresését.

Szerencsére azok a legegyszerűbb, az analógiának a számok körében végzendő műveleteihez kötődő hibái, amelyeket Mosonyi az általános iskolában előforduló hibákkal kapcsolatban felsorolt, a középiskolában jórészt ismeretlenek. A korábbi matematika tanulmányok számegyenessel és más módokon történő megfelelő szemléltetése gyakorlatilag számúzte a hibák sorából a $7 > 5$ egyenlőtlenségből következő $\frac{1}{7} > \frac{1}{5}$ vagy éppen $-7 > -5$ egyenlőtlenségeket. Ez azonban egyáltalán nem azt jelenti, hogy a tanulók az egyenlőtlenség jelét mindig helyesen alkalmazzák hanem csak azt, hogy a hibáknak a jellege megváltozott.

Például az $\frac{x}{2} > 3$ megoldásakor felhasznált szorzási lépést alkalmazzák diákjaink gyakran a $\frac{2}{x} > 3$ -hoz hasonló feladatoknál is anélkül, hogy bármiféle előjelvizsgálatot végeznének előtte. Vagy a $\sqrt{x+1} > -3$ egyenlőtlenség négyzetre emelésénél a „nagyobb szám négyzete nagyobb” szintén csak bizonyos feltételek teljesítése esetén fennálló következtetését alkalmazzák $x + 1 > 9$ esetre.

Az $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ vagy az $(a^3 - b^3) = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$ hatványozások a megfelelő szabályok mintájára adódhattak a negatív kitevők esetén.

Az $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$ közös nevezőre hozás a törtek összeadásából indult ki,

míg az $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{a+b}$ művelet a közös nevezőre hozás szabályára való tekintet nélkül

a számok összeadását tekintette „példának”. Az $\frac{1}{a^{-1} + b^{-1}} = a + b$ átalakítás ennél tovább ment, amikor „figyelembe vette” a negatív kitevőjű hatványozás definícióját.

Az analógia, mint az példáinkból látható akkor kerül elő a gondolkodásban, amikor a feladatmegoldó személy valamihez valamilyen szempontból hasonló, de jellegét tekintve mégis ismeretlen problémával kerül szembe. A hibás analógia esetében a tényleges hasonlóságot elfedi egy másik irányú látszólagos kapcsolat. (Jó példa erre a $\lg^2 5 - \lg^2 3$ átalakítás, amelyben a két tag négyzetének különbségének mintájára megfigyelhető átalakítás a próbálkozás alapja. A $\lg^2 5 - \lg^2 3$ értékének ilyenkor a $\lg^2 \frac{5}{3}$ értékével kellene az elgondolás szerint megegyeznie.)

Ha az oktatásunkban a problémamegoldás általános szabályait, nem pedig csak az egyes, tanrendbe illeszkedő feladatok megoldásához szükséges konkrét recepteket tanítjuk meg, akkor ezzel elkerülhetjük a hamis analógia gyakori felbukkanását. És ekkor már diákjaink nem a felszíni, hanem a lényegi hasonlóság felfedezésére fognak törekedni.

A mikrostruktúra vizsgálatának számszerű eredményei

Lénárd a könyvében szereplő rejtvények megoldásával párhuzamosan leírt jegyzőkönyvei alapján dolgozta ki a mikrostruktúrát alkotó gondolkodási műveletek csoportosítását. Eredményeit, elméletét főbb vonalaiban az általunk átvizsgált anyag is alátámasztotta. Ezek miatt meglepő, hogy nála a számszerű értékelés teljesen elmarad. Az viszont még ennél is különösebb, hogy vannak olyan gondolkodási műveletek, amelyekre a szerző egyáltalán nem mutat példát az ismertetéseik során.

Magyarázatul szolgálhat erre ugyan az a megjegyzése, hogy „a gondolkodási fázisok könnyebben felismerhetők szemben a gondolkodási műveletekkel, amelyek rétegzettség, egymásba fonódása a felismerhetőséget, a diagnosztizálást megnehezíti”. Legalábbis a rejtvényekben – tegyük hozzá a befejezést. Amelyekben ugyan mindazok a lépések megfigyelhetők, amelyek egy jól meghatározott ismeretanyagot igénylő, pontosan ismert megoldásmenetekkel rendelkező matematikai feladatban megvannak, csak éppen a felismerésük és a leírásuk nehezebb. Mindezek újra csak azt az állításunkat támasztják alá, hogy szerencsésebb lett volna, ha Lénárd vizsgálatait például a(z iskolai) matematika tárgyköréből merítette volna. Mindenesetre az általunk kapott eredményeket így nem áll módunkban egy másfajta gondolkodást igénylő probléma megfelelő számadataival összehasonlítani.

Az általunk talált 1509-ből mindössze 146, az összesnek 9,7 %-a – vezethető vissza helytelen analízisre. Ezek túlnyomó többségét, 131-et (az esetek 8,7 %-át) lehet a feladatokban szereplő adatok valamilyen szempontból helytelen elemzésével megmagyarázni, míg a fennmaradó 15 helyen (a maradék 1,0 %-on) az analízisnek az absztrahálás része, azaz a lényegesnek a lényegtelentől való megkülönböztetése okozott a megoldóknak problémát.

Ugyan az analízis mindig a szintézissel együtt fordul elő, de ennek a két, egymást kiegészítő folyamatnak a hibái nem feltétlenül kapcsolódnak szorosan egymáshoz. A szintézisnél történő hibázás miatti rontás 85 helyen mutatható ki, amely 5,6 %-nak felel meg.

Annak ellenére, hogy a szintézis az analízissel az összes többi gondolkodási művelet felépítésében részt vesz, együttesen a hibáknak csupán 15,3 %-áért okolhatók. Azokért, amelyekben nem fedti, nem nyomja el őket valamilyen más tényező, s ahol szerepük a feladatmegoldásban meghatározó. Ahol viszont funkciójuk csupán arra korlátozódik, hogy elemi, jórészt fel nem ismerhető építőkövekként járuljanak hozzá egy összetett, de bonyolultságában is jellegzetes gondolkodásforma kialakításához, ott a hiba ezen jellegzetességek hibájaként lesz felismerhető és megnevezhető. Tehát az analízis a szintézissel együtt a hibázások kevesebb mint hatodrészéért tehető csak közvetlenül felelőssé, azonban jelentőségüket mégis mutatja, hogy áttételesen, mintegy elrejtve az összes többiben is megtalálhatóak.

Az **összefüggések felfogása** mint már említettük, nálunk általánosabb megjelölést takar a Lénárd által használatos fogalomnál. A viszonylag nagyszámú meghatározandó reláció jellegétől függően is sok lehetőség kínálkozik a hibázásra. Ezek alapján azt várnánk, hogy az itt előforduló tévesztések az összesnek elég jelentékeny hányadát alkotják majd. A pontos számok viszont 60 esetet (4,4 %-ot) mutatnak. Ennek a látszólagos ellentmondásnak az lehet az oka, hogy az adott témakör feladatai nem a szóban forgó gondolkodási művelet mérésére vannak megalkotva. A relációk meghatározása helyett diákjainknak gyakrabban adjuk fel a(z ismert) relációk végrehajtását. Ezek után mondhatjuk azt, hogy olyan területet vontunk itt be vizsgálataink körébe, amelynél az összefüggések helyes felfogása nem tartozik a legfontosabb számon kérendő, sokszor alkalmazott gondolkodási műveletek közé; de azt is hogy érdemes a jövőben úgy megváltoztatni itt a feladatok szerkezetét, hogy a megoldások során erre a részre is kellő hangsúly essék.

Mint azt az előzőekben említettük, az algebrai átalakítások alkalmazását kívánó feladatok döntően a **kiegészítés** logikai műveletének alkalmazására épülnek. Ez a legtöbb esetben azt jelenti, hogy a feladatokban szereplő adatokon kell a korábban megtanult szabályok alapján egy ismert műveletet elvégezni. Ennek az eredménye szolgáltatja az adott probléma megoldását. Ebbe a megoldásba 984 különböző helyen (és 65,2 %-ban) a művelet elvégzése közben hiba csúszott.

Mivel itt ismert relációk számon kérése történt, amelyeket a témakör előző anyagrészeinek birtokában mintegy alkalmazás szintjén ellenőriztünk, így ez a viszonylagosan magas érték nem csak azt mutatja, hogy arányaiban mekkora ennek a gondolkodási műveletnek a súlya, hanem azt is, hogy diákjaink dolgozat írásakor sokszor mennyire kis fokú megértési szinttel és hiányos ismeretanyaggal próbálkoznak eredményt elérni.

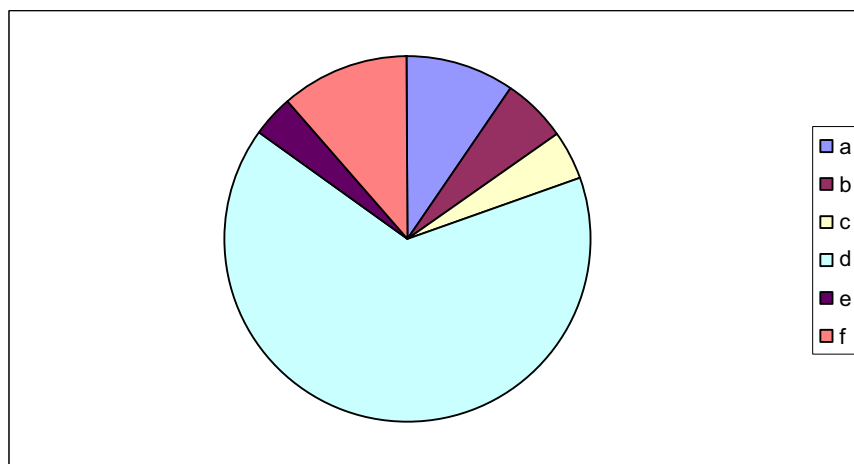
Ha elfogadjuk, hogy ezért az eredményért, illetve pontosabban eredménytelenségért nem mindig a hiányosan felkészült és rossz módszereket választó tanár és hasonlóan a gyenge szorgalmú és nem túl magas szintű matematikai ismeretanyaggal rendelkező tanuló a felelős, akkor kimondhatjuk, itt a diákoktól érzelmileg viszonylag távol álló problémarendszerrel és értelmileg valószínűleg – az adott életkor tekintetében – **túlságosan mély absztrakciós** szinttel állunk szemben. Azt, hogy a gyakorlati élethez, a tanulók érdeklődéséhez kötődően melyik témaköröket milyen mélységben kellene az iskolában tárgyalni, most tovább nem részletezzük. Ez meghaladná a dolgozatban vállalt célkitűzéseinket. Csak jelezzük, hogy az ilyen irányú további kutatások esetleg jobban szolgálnák diákjaink érdekét, mint ha a tantervi előírásokat az aktuális politika vagy a tudományágak művelőinek szakmai súlya döntené el. Így talán nagyobb befolyáshoz jutnának a most elhanyagolható szerepet játszó általánosításon és konkretizáláson alapuló megoldásmenetek is.

Rendezéskor általában olyan műveletet végzünk, amelyre közvetlenül csak kevés feladatban kérdezzük rá. Más esetekben viszont a végeredményből, a megoldás módjából lehet arra következtetni, hogy itt a rendezésre, azaz egy bizonyos szempont szerinti csoportosításra szükség volt. A két esetnek az összevont tárgyalása esetén is itt találkozunk a legkevesebb elkövetett hibával, 57-tel, amelyik még 4 %-nál is alacsonyabb értéket (3,8 %-ot) eredményez. Az összefüggések felfogásához szükséges gondolkodási művelethez hasonlóan tehát a rendezés sem jellemző az általunk kitűzött algebrai feladatok megoldásakor alkalmazott gondolkodási folyamatra, így az ott elmondottak itt is változatlanul érvényesek.

Mivel vizsgálatainkban számonkérés céljából íródott átlagos (néha annál egy kicsivel jobb, máskor viszont annál gyengébb) színvonalú osztályokból bekért

munkákból dolgoztunk, így ezekben a korábbiakban megoldottakhoz viszonyítva teljesen ismeretlen jellegű problémák nem szerepeltek. Ezeket a jól megértett és megtanult összefüggések után ha még nem is rutinszerűen, de többé-kevésbé biztosan, jól kellett volna megválaszolni. Az, hogy nem ilyen megfigyeléseket tettünk, az anyagrészt nem kellő mértékű elsajátítását mutatja. Ekkor a tanulóknál az ismertek is legfeljebb hasonlóak lesznek, amelyekhez a konkrét, dolgozatokban szereplő problémák **analógiák** útján kapcsolódnak. Tehát ha itt nagy számú (hibás) analógiát kapunk, az még nem feltétlenül annak a jele, hogy a gondolkodás ezen lépésének örvendetesen megnőtt a szerepe a matematika órákon. Sőt, ez most itt az oktatásunk eredményességének csekély hatásfokát jelzi. A megfelelő mutatók ezek után a következők: 171 darab, azaz 11,3 % valamilyen szempontból hibásan alkalmazott analógia fordult elő az átvizsgált megoldásokban: mindegyik az előzőekben vázolt alkalmazási feladatokban.

Az általunk megkapott eredményeket annak ellenére is célszerű ábrázolni, hogy ezeket most nem tudjuk összehasonlítani Lénárd megfelelő méréseivel. Ezért itt az adatokat elegendő olyan kördiagramon szemléltetni, amelynek összetevői a vizsgálat probléma típusát jellemezhetik.



2. ábra

A hibás gondolkodási műveletek százalékos megoszlása

A makro- és a mikrostruktúra közötti kapcsolat

Lénárd a makro- és a mikrostruktúra elemei közötti kapcsolatot a könyveiben szereplő példáiban egyáltalán nem vizsgálta meg, holott egy adott feladat – esetleg egy adott témakör – megoldásában egy adott, egy gondolkodási fázis és egy gondolkodási művelet által meghatározott helyen felmerülő hiba nem csak az egyes emberek, hanem a gondolkodásnak a szóban forgó helyen előforduló általános hibáira is jellemző lehet. Ezek elemzéséből következtetni lehet a problémamegoldó gondolkodás általános törvényszerűségeire ugyanúgy, mint az eközben fellépő jellegzetes hibákra is.

Ha a gondolkodási fázisok közül a korábban említettek miatt kihagyjuk az érzelmi kategóriákat, akkor a gondolkodási folyamat e két összetevője közötti kapcsolatok már egyértelműen szemléltethetők. Ezt végezzük el az általunk átvizsgált, rendelkezésünkre álló anyag alapján olyan módon, hogy egy gondolkodási fázist rögzítve végigmegyünk az összes általunk megvizsgált gondolkodási műveleten és megszámloljuk, hogy az egyes esetekben hány hiba fellépését tapasztaljuk. Ezt követően egy másik makrostruktúrabeli elemmel elvégezzük ugyanezt addig, amíg minden lehetséges párosítást figyelembe nem vettünk. Ha a besorolásokat egyértelműen el lehet végezni, akkor mind az 1509 különböző hibának meg kell találni a helyét.

1.a) Amennyiben az eljárás során módszeresen kívánunk eljárni, úgy célszerű vizsgálatainkat a ténymegállapítással és az analízissel kezdeni. Azokat a hibákat sorolhatjuk ebbe a kategóriába, amelyeknél az adatok illetve körülmények helytelen elemzése még a probléma jellemzőinek – a megoldási javaslat kivitelezéséhez szükséges – átalakítása előtt jelentkezik. A korábban említettek közül ilyen a $2x$ kifejezésnek $2 + x$ vagy a $2\frac{2}{3}x$ -nek $2 \cdot \frac{2}{3} \cdot x$ formában történő figyelembe vétele, amely a műveletekre vonatkozó megállapodások helytelen ismeretén alapul. Ide tartozik az is, ha egy együtthatóiban paraméteres másodfokú egyenletet a diszkusszió elvégzése nélkül automatikusan másodfokúnak minősítünk.

A tanulmányunk tárgyául szolgáló dolgozatokból 31 hibát lehetett ebbe a csoportba besorolni. Ezeknek a számát vizsgálatunk szerint úgy lehet legjobban csökkenteni, ha a matematikában használatos, de esetlegesen félreérthető megállapodásokra és terminológiákra előzetesen, még a hibák jelentkezése előtt felhívjuk a figyelmet.

1.b) Az előzőnél egy kicsivel kevesebb számban fordult elő az az eset, amikor még szintén a ténymegállapítások során a helyes analízist a probléma megoldásának szempontjából hibás vagy hiányos szintézis követi. Ide az értelmezési tartomány vizsgálatának felírása során fellépő hibák egy része tartozik. Például az, ha a tanulók a négyzetgyököt tartalmazó kifejezés gyök alatti részének lehetséges értékeit (a nulla kizárása mellett) a pozitív számok körében vélik felfedezni, vagy például az, ha a feladatban szereplő kifejezések feltételvizsgálatait nem vizsik végig, s az egymástól különböző feltételek hatásait nem összegzik.

Itt mindössze 27 hasonló jellegű hibával találkozhatunk jórészt annak köszönhetően, hogy a feladatgyűjtemények egy része előre megadja a megoldáshoz szükséges feltételeket. Így a hibák száma tulajdonképpen mesterségesen van alacsony szinten tartva abból kiindulva, hogy ezeknél a feladatoknál az algebrai kifejezések átalakítása és nem a diszkutálása a lényeg. Véleményünk szerint azonban sokkal jobb, ha a diákok megtanulják, hogy a problémamegoldás során minden körülményt meg kell vizsgálni és minden feltételt ki kell bontani, mint ha bizonyos utakat már előre lezárunk, míg másokat kijelölünk nekik.

1.c) Az előző ponthoz hasonlóan az értelmezési tartomány hibái az összefüggések felfogása során is jelentkezhetnek. Ennél a pontnál többször előforduló probléma, hogy az x -et nagyobbnek, míg a $-x$ -et kisebbnek véli a diákjaink egy része 0-nál. Ezen kívül algebrai törtek közös nevezőre hozása közben, de még a művelet elvégzése előtt a vizsgálatokba bevont tanulók az $x^2 - y^2$ -hez viszonyítva $x^2 + y^2$ vagy a $-(x^2 + y^2)$ kifejezést néhány esetben egymás ellentettjeinek hitték, és a későbbiekben ennek megfelelően jártak el.

Ebbe a csoportba 24 hiba volt besorolható. Döntő többségük valamilyen módon kapcsolatban állt a negatív előjellel, ezért a későbbiekben célszerű, ha jobban

tisztázzuk ennek a szerepét a matematikai jelölésekben és hatását az algebrai kifejezésekben.

1.d) A hibás kiegészítések közé a megelőzőnek pontosan a fele, mindössze 12 eset került. (Azok, amelyek a műveleti szabályok pontatlan ismeretével voltak kapcsolatosak.) Erre a pontra az 1.a)-val szemben nem az volt jellemző, hogy az egyik művelet helyébe egy másik lépett, hanem az, hogy ezeknek az egymás közti viszonyát zavarta meg valamiféle hamis értelmezés.

Jellegzetes példája ennek az $a x^n = (a x)^n$ egyenlőség, amikor a diákok a hatványozás és a szorzás sorrendjét – a műveleti rendek figyelmen kívül hagyásával – felcserélhetőnek hiszik.

Mivel a vizsgálatunkban szereplő négy évfolyamos középiskolákba kerülés előtt a hatványozással bezárólag a műveletek felépítése megtörténik, ezért célszerű a 9. osztályos tankönyv elején, mintegy ismétlésként az addigi szabályokat rendszerbe szedve összefoglalni. (Sajnálatos, hogy ezzel az egyébként nyilvánvaló felismeréssel csak a közreműködésünkkel készült Hajdu-féle tankönyvcsalád élt.)

1.e) Algebrai átalakításoknál a rendezés hibái leggyakrabban az egynemű tagok kiválasztása során figyelhetőek meg. Ez a legelső olyan eset, amikor a tanterv szerint diákjaink a több betűt különböző hatványokon tartalmazó kifejezésekkel találkoznak. És talán ez a legelső olyan témakör is, amelyet nem lehet közvetlenül a valósághoz, a mindennapi élet tapasztalataihoz hozzákötni. Így az itt fellépő hiányosságok a megfelelő absztrakciós szint felépítésében meglévő hiányosságokról, azaz a hétköznapiól eltérő matematikai gondolkodás hibáiról tanúskodnak.

Szám szerint 31 esetben fordult ez elő, ami azt mutatja, hogy az eddigieknél érdemes jobban odafigyelni, nagyobb hangsúlyt fektetni az adott fogalom kialakítására, azaz mintegy megelőzésére.

1.f) A hamis analógia nem elsősorban a ténymegállapításra jellemző problémát mutat, ugyanis csupán 11 helyen volt ez a típus felfedezhető.

A matematika érettségi vizsga feladatait tartalmazó összefoglaló feladatgyűjtemény egyik átalakításában például diákjaink gyakran eltévesztik a

$\lg^2 5 - \lg^2 3$ különbséget, melyet a megfelelő szabály hiánya miatt a logaritmusok különbségére vonatkozó azonossághoz éreznek legközelebb. Így a végeredmény a „felismert” analógia elvégzése után legtöbbször $\lg^2 \frac{5}{3}$ vagy ezzel egyenértékűen

$\left(\lg \frac{5}{3}\right)^2$, illetve néhány esetben $\lg \frac{5^2}{3^2}$, a helyes $\lg 15 \cdot \lg \frac{5}{3}$ helyett! Abban egyébként

igazuk is van a tanulóknak, hogy itt az átalakítás elvégzéséhez analógiára van szükség, csak ők a téma meghatározottsága miatt logaritmusokban, nem pedig nevezetes azonosságokban gondolkodtak.

A tanulóknak érdemes alaposan felhívni a figyelmét arra, hogy – az egyébként nagyon fontos és sokszor hatékony módszer, – az analógia keresése közben ne pusztán a formai, hanem sokkal inkább a tartalmi hasonlóságokat vegyék figyelembe.

A következőkben a megoldási javaslatokat vizsgáljuk meg az előzőekhez hasonló módon. (Mivel mint azt már említettük, a témánkban szereplő feladatmegoldásokban ez a gondolkodási fázis dominál, így törvényszerű, hogy a hibázások száma a többi esetnél általában magasabb.)

2.a) Az analízisnél a helytelen elemzés itt a korábbiakkal szemben a műveletvégzésekhez kapcsolódva kell, hogy jelentkezzen. Ilyenre mutattunk példát az $x^2 - 1 = x(x - 1)$ átalakítás leírásánál, amikor is a szorzattá alakításnál a kiemelés tévesen került a két tag négyzetének különbsége helyére. Nyilván itt a nevezetes azonosságok nem kielégítő ismerete okozza a problémát. Ide tartoznak még a fentiek mellett az olyan esetek is, amikor a helytelen analízis miatt a megoldások jellege teljesen (hibás irányba) megváltozik. Ez figyelhető meg akkor, amikor a tanuló az $\frac{a}{\sqrt{b}}$ tört nevezőjének gyöktelenítését négyzetre emeléssel akarja megoldani. A két típus együttvéve 92 feladat hibás megoldásában volt felfedezhető. Ezt kivédeni, illetve a hibák számát csökkenteni csak a fogalmak és az eljárások pontos megismertetésével lehet.

2.b) Megoldási javaslatok során elkövetett szintézisbeli hibát 32 ízben tapasztaltunk. Ezek a helyes műveletfelismerések hibás alkalmazásából származtak.

Kevésbé súlyos hibáról beszélhetünk akkor, amikor a levezetés alapján véve helyes, csak éppen a további átalakítások szempontjából célszerűtlen. Erről már tettünk említést a $4x^2 - 4y^2 = (2x + 2y)(2x - 2y)$ egyenlőség kapcsán. De ide sorolható az is, ha a közös nevezőre – vagy ami ezzel egyenértékű, közös hatvány – illetve gyökkitevőre-hozás a legkisebb közös többszörös meghatározása helyett automatikusan a tényezők szorzatával valósul meg. A másik esetben viszont egyértelműen hibás volt a végeredmény. Ezt az $(a - b)^2 = a^2 - 2 a (-b) + (-b)^2$ átalakítás mutatja a formálisan jó képletbe történő rossz helyettesítéssel.

Ezekben a példákban a problémát jól megértették a tanulók, és a megoldás módjáról is alapvetően jó elképzeléseik voltak. Az itt elkövetett kiemelésbeli vagy éppen az előjelek alkalmazása terén elkövetett hibák azonban megakadályozzák a helyes végeredményhez vezető út bejárását. Ráadásul ezek a pontatlanságok elég jellegzetes, és más helyeken is előforduló hiányosságokat takarnak, ezért indokolt a megfelelő anyagrészeknél már a bevezetéseket ezekre súlypontozva elvégezni. (Gyakran nyúltunk ahhoz a fogáshoz az általunk készített tankönyvekben, hogy egy-egy hangsúlyosabb rész ismételt előfordulásakor a fontosabb, felhasználni kívánt összefüggéseket újból, ismétlési céllal megemlítettük.)

2.c) Az összefüggések felfogása során a helytelen relációknak a megoldási javaslatban való előfordulása okozza a hibákat. Az $\frac{a^2}{a} = a$ átalakítás nem veszi figyelembe az egyszerűsítés értelmezési tartományt befolyásolható hatását, ezért a megállapított egyenlőség csak bizonyos feltételek teljesülése esetén áll fenn. Másik oldalról viszont az is előfordulhat, hogy a tanuló nem veszi észre a tényleges kapcsolatot, például egymás ellentett voltát az $x - 2y$ és a $2y - x$ kifejezéseknél. Ez főként algebrai törtek közös nevezőre hozásánál és kiemeléseinél fordulhat elő.

Annak ellenére, hogy az egyszerűsítés és az utólag említett műveletek a szóban forgó feladatokban viszonylag gyakran jutnak szerephez, hibákat itt mégis csak 20 esetben kaptunk.

Ennek az első típusnál az lehet a magyarázata, hogy a dolgozatok összeállításánál döntően figyelembe vett összefoglaló feladatgyűjtemény didaktikailag megkérdőjelezhető módon az algebrai törtekkel végzett műveletek során előre közli az átalakításokhoz szükséges feltételeket, másrészt a kiemelések és az összevonások a másodikként említett példában már a gyakorlások folyamán is sokszor a -1 kiemelésére lettek kihegyezve.

Az előzőeket összefoglalva megállapíthatjuk, hogy mindkét hibafajta tárgyalásánál a központi probléma az értelmezési tartomány vizsgálata, melynek remélhetően az új tantervek a mostaninál nagyobb szerepet juttatnak.

2.d) Mint azt már korábban megjegyeztük, a tanulói gondolkodást matematikaórákon nagyjából a kiegészítés műveletére építjük. Jól tükrözi ezt a megállapításunkat az a nagy számú (933) hiba, amely ebbe a kategóriába tartozik.

Helytelen kiegészítés a legkülönbözőbb típusú feladatoknál is előfordulhat. Példaként megemlíthetjük az $(a - b)^2 = a^2 - b^2$, az $(x^m)^n = x^{m+n}$, az $a^{-n} = \frac{a}{n}$ vagy éppen a $\lg x - \lg y = \frac{\lg x}{\lg y}$, esetleg még a $\lg(x - y) = \lg x - \lg y$ formulákat. Ide kerülnek a mások által formalizmusnak vagy verbalizmusnak nevezett hibák, mint ahogy ide sorolandók a fogalmak tisztázatlan voltából eredő tévedések is.

Ha a későbbiekben a feladatok szerkezetét témakörtől függetlenül a tanulók érdekében úgy sikerül átalakítani, hogy a gondolkodási műveletek mind a gyakorlásnál, mind pedig a számonkérésnél a jelenlegi követelmények által meghatározottnál egyenletesebb eloszlást mutassanak, akkor az itteni magas hibaszázalék természetes módon, magától is csökkenni fog. Azonban még ekkor is nagy hangsúlyt kell majd fektetni arra, hogy az egyes fogalmakat és eljárásokat pontosan megismertessük diákjainkkal, akik ezen eszközök birtokában remélhetőleg nem a rendelkezésre álló képletek véletlenszerű alakításában keresik majd a probléma megoldásának a lehetőségét, hanem az általuk is megértett és ezért pontosan ismert összefüggéseket szerepüknek megfelelően használják majd fel a levezetésekben.

2.e) Ez a pont a megoldások során fellépő rendezésbeli hiányosságokat, az ezzel összefüggő célszerűtlen próbálkozásokat foglalja magába. Egy polinom szorzattá alakításánál például általában nem aszerint választjuk ki az egymásnak megfelelő csoportok tagjait, hogy melyekből lehet ugyanazt a tényezőt a későbbiekben kiemelni. Vagy más helyeken gyakrabban fordul az elő, ami itt a feladatokból adódóan ritkább, hogy egy egyenlőség vagy egy egyenlőtlenség megoldáshalmazát a levezetés pontos ismertetése nélkül – néhány példából megsejtve a végeredményt – a tanulók egyszerű behelyettesítéssel számítják ki.

Ezekből a példákban is kitűnik, hogy itt a matematikai eljárások lényegének hiányos ismeretéből adódnak a problémák, tehát ezekre a későbbiekben nagyobb hangsúlyt kell helyezni. Szerencsére azonban ez az említett hiányosság előfordulásának számából ítélve nem tartozik a nagyon súlyos problémák közé, ugyanis az itt említett hibafajta csak 17 esetben fordult elő.

2. f) Az analógiát, mint gondolkodási műveletet a nem sablonos, hanem valamilyen szempontból ismeretlen típusú problémák megoldásakor alkalmazzuk. Ilyenkor előkeressük ismereteink közül azokat a megoldási módszereket, amelyek a megadotthoz hasonló feladatok megoldásakor már sikerrel beváltak, és a szóban forgó esetre ugyanezt igyekszünk alkalmazni. A hibás analógia nyilván abból adódik, hogy a hasonlónak kiválasztott példák mégsem hasonlóak abból a szempontból, amiből mi azt elképzeltük.

A mikrostruktúra részeiről írott rövid elemzések közül az analógiából megemlített példák majd mindegyikét itt lehetne felsorolni. Gyakori hiba a $\sqrt{x+1} > -3$ egyenlőtlenség négyzetre emeléséből származó $x + 1 > 9$ forma, illetve egyáltalán az ilyen típusú hiba. Úgyszintén többször előfordult az $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{a+b}$, illetve az $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ átalakítás is, nyilván az összeadás és a négyzetre emelés mintájára. Az előzőektől annyiban különbözik az $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} \cdot \frac{bc}{bd}$ műveletvégzés, hogy itt a közös nevezővel való elbonyolítás ellenére is helyes végeredmény kapható.

Összesen 160 hiba sorolható ebbe a kategóriába. Ez alapján ha nem is tudunk teljesen egyetérteni Beke véleményével, – ugyanis korántsem igaz, hogy a felmerülő hibák jelentősebb része az analógiából származik, – de azért nagy súlyt kell fektetni a későbbiekben arra, hogy diákjainknak olyan módszereket mutassunk meg, amelyekkel különválaszthatják az igazi analógiát a hamistól. Úgy, hogy eközben vagy ellenőrzéskor meg is győződjenek elképzelésük helyességéről.

A megoldási javaslatoknál mértékkel szemben a kritika gondolkodási fázisát jóval kevesebb hiba jellemzi. Ennek a jelenségnek többféle oka is lehet. Nem mindegyik esetben jut el a tanuló a megoldás végéig, vagy még korábban egy másik gondolkodási fázisnál – esetleg éppen a megoldási javaslatnál – is ugyanilyen hibát vétett (amit megállapodásunk szerint ott vettünk figyelembe). De ezeknél a vizsgálatunk tárgyát képező algebrai átalakításokon alapuló feladatoknál a jelenleg érvényes tantervekben nem is tartozik az általános elvárások közé az elvégzett munka ellenőrzése. Választott módszerünk miatt azonban nézzük végig itt is gondolkodási műveletenként a dolgozatok elemzéséből kapott mutatókat.

3.a) Ennél a pontnál olyan esetekben fordultak elő hibák, amikor a végeredményt még valamilyen szempontból elemezni kellett. Az átalakítások kiválasztásánál meghatározó szerepet játszó összefoglaló feladatgyűjtemény egyik feladatánál például tipikus hiba volt, hogy a helyesen megkapott $\log_a a = 1$ végeredményt többen is rosszul elemezték. A hibás analízist végző tanulók mindegyike a változó és a függvényérték helyzetét cserélte fel, amikor azt gondolták, hogy a megoldás értéke azért nem lehet 1, mivel a logaritmusra vonatkozó feltétel szerint az a nem lehet 1-gyel egyenlő. Hasonlóan analízisbeli hibával találkozhatunk például az algebrai törteknél vagy törtes egyenleteknél is, amikor a tört értéke megegyezik a nevezője miatt az értelmezési tartományból kizárt (egyik) értékkel. Összesen 23 esetben találtunk ezen a helyen hibát, melyeket a fogalmak pontosabb tisztázásával könnyedén el lehetett volna kerülni.

3.b) A hibás szintézisnél az előző pont jellemzőivel szemben a körülmények számbavétele helyes, azok felhasználása a kritikában viszont már nem. Például ha egy olyan kifejezés pontos értékét kell kiszámítani, melynek a végeredménye

mondjuk 1, akkor ebből még nem jogosult senki arra következtetni, hogy a megoldás jó, mert az eljárás pontos értéket adott. Persze a leggyakoribb hiba ebben a csoportban nyilvánvalóan abból adódik, hogy az értelmezési tartomány vizsgálata során kapott különféle feltételeket nem vetik egybe a megoldással. Egyenletek esetében ezt még korrigálni lehet a végeredmény behelyettesítésével, de azonosságok esetében ugyanazt már nem lehet megtenni. Ennek a hibafajtának a javítása csak az adott feladat teljes megoldási folyamatának a részletes elemzésével képzelhető el. Ez a dolgozatok alapján 26 tanulónál hiányosan valósult meg.

3.c) Az összefüggések felfogása terén több tanulónál, elég gyakran előforduló ellenőrzésszerű hiba az, hogy tanulóink a betű kifejezést is tartalmazó paraméteres végeredményt konkrét értékek behelyettesítésével ellenőrzik le. Az adott, speciális körülmények között megkapott egyenlőségből következtetnek azután az eredménynek az adott feltételek melletti általános helyességére. De a jó végeredmény hibás indoklására láthattunk példát ugyanennek a gondolkodási műveletnek az elemzésénél is, amikor a $2^{\frac{1}{2}} < 3^{\frac{1}{3}}$ egyenlőtlenség egyik tanuló által ismertetett indoklását írtuk le. Ez a korábbiakkal szemben elszigetelt, egyedi esetnek tekinthető. Itt a hiba okát az előzőekkel szemben elegendő a tévedést elkövető tanulóval tisztázni.

A behelyettesítve ellenőrző módszer hiányosságaira érdemes mindenki előtt kitérni tanmenettől függően például olyan egyenletek ismertetése során, melyeknél az igazsághalmazra (nullától különböző hosszúságú) intervallum adódik. Ennél a lépésnél a tanulók összesen 22-szer tévesztették el az ellenőrzést.

3.d) Az ellenőrzés konkrét kivitelezésénél nagyon sokszor a tanulók ugyanazokat a lépéseket végzik el újra, amelyeket a megoldási javaslatnál is alkalmaztak. Ha akkor hibáztak, és később újra ugyanott rontják el, akkor helytelenül arra következtetnek, hogy a megoldásuk jó. Ha viszont az ellenőrzést nem tévesztik el, akkor rájöhetnek, hogy a végeredményük (vagy az ellenőrzésük) nem jó. Tehát egy abszolút formalista ellenőrzés elvégzése után az a különös helyzet állhat elő, hogy sem a jó, sem pedig a rossz eredményből nem lehet következtetni a megoldás helyességére.

Az ellenőrzésnél ugyanígy megjelennek a hibák, mint a megoldási javaslat kivitelezésénél, csak itt jóval kisebb számban. Ez jórészt abból adódik, hogy itt nem mindegyik feladattípushoz követeli meg a tanterv az ellenőrzést. Erre gyakorta nincsenek is kiforrott szabályok. Van, hogy úgy vonják munkájukat kritika alá a diákok, hogy a műveleteket egy kis változtatással (esetleg más sorrendben) újra elvégzik. Ez nem is annyira az ő tevékenységük hibájából, mint inkább a mi oktatásunk egyoldalúságából származik. (Érdekes, hogy az ellenőrzés technikai megvalósításáról az egyes tankönyvszerzők teljesen másként gondolkodnak. Az egyik tankönyvcsalád általunk átnézett 11. osztályos matematika tankönyvében például több mint 100 kidolgozott egyenlet megoldása szerepel. Mindegyik után – egyébként korrekt módon – olyan mondat szerepel, amely szerint az alkalmazott ekvivalens átalakítások miatt a kapott értékek az egyenleteknek ténylegesen a gyökei lesznek. Mi nem tartottuk szerencsésnek ezt az eljárást, mert a felvételi vizsgákon szerzett tapasztalataink szerint az így felkészített diák formálisan akkor is képes leírni ezt a mondatot, amikor (1) az eredménye valamilyen elszámolás vagy más ok miatt nem jó; (2) az elvégzett átalakításai nem voltak ekvivalensek.)

Ebben a csoportban 39, valamilyen szempontból hibásan elvégzett ellenőrzést találtunk.

3.e) Ebből a pontból, azaz a rendezésből egyetlen példát emelünk ki a helytelen kiválasztásnak a kritikán belüli megvilágítására. A kitűzött probléma abból állt, hogy választ kellett adni arra, mely egész a értékekre lesz egy megadott kifejezés értéke szintén egész szám. A végeredmény $\frac{a-2}{3}$ volt.

Az egyik válasz szerint ez a kifejezés tört, tehát az értéke nem lehet egész. Egy másik vélemény szerint a kifejezés minden a -ra egész, mert két egész szám hányadosa is nyilvánvalóan egész. Egy harmadik szerint ha a $3k$ alakú, ahol k valamilyen egész, akkor a 3-mal való osztás egész számot eredményez. (Itt nem történik említés a 2-ről.) Egy másik dolgozatban pedig az volt olvasható, hogy az egyenletnek az egész számok halmazán a megoldása $\frac{a-2}{3}$.

Ezekben a fentebb felsorolt esetekben a tanulók nem gondolták át igazán a számfogalom felépítését, amelyet most egy konkrét esetben alkalmazniuk kellett volna. A paraméter nyilván a diákok számára bonyolultabbá teszi a problémát, de a kapott eredmény arra utal, hogy az órai munkánkban az egymondatos válasz megalkotásán kívül érdemes jobban is átgondolni a felelet helyességét. 9 tanulónál ez most nem sikerült.

3.f) A kritika nevű gondolkodási fázison belül alkalmazott analógia nem járult hozzá a gondolkodási hibák számának növekedéséhez. Ebből arra lehet következtetni, hogy a tanulók a végeredményt hasonló probléma megoldásával, illetve ellenőrzésével nem hozták kapcsolatba. A kritika mindig a konkrét problémára volt vonatkoztatva.

Ez ismételten a matematikai jellegű problémamegoldás folyamatának egyoldalúságára utal, amelyet úgy tűnik, hogy a bevezetésre került Nemzeti Alaptanterv sem fogja alapjaiban megváltoztatni.

Miután most már az összes gondolkodási fázishoz tartozó mindegyik gondolkodási művelet számadata rendelkezésünkre áll, érdemes a kapott eredményeket táblázatban is összefoglalni.

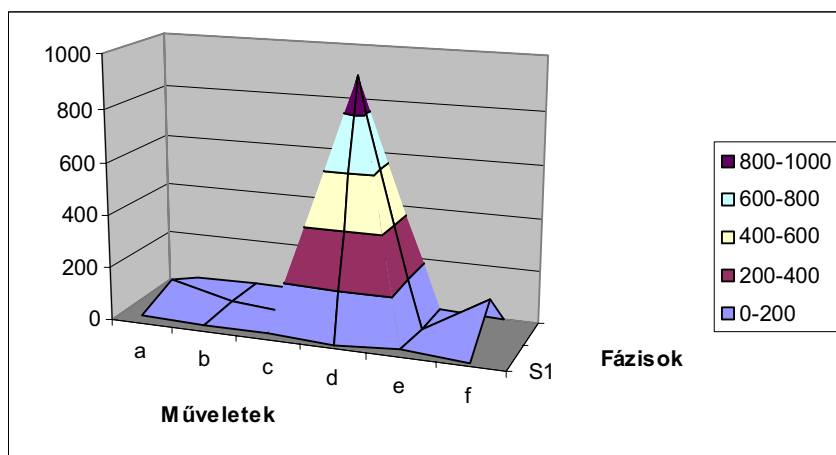
	a) analízis	b) szintézis	c) összefüggések felfogása	d) kiegészítés	e) rendezés	f) analógia
1. ténymegállapítás	31	27	24	12	31	11
2. megoldási javaslat	92	32	20	933	17	160
3. kritika	23	26	22	39	9	-

3. ábra

A makro- és a mikrostruktúra elemeinek kapcsolódása

Ezek után elmondhatjuk, hogy az általunk választott módszerrel sikerült a Lénárd által felépített elméletből kiküszöbölni az ellentmondásokat, és ezáltal elgondolásának a helyességéről, a gondolkodás folyamatának kétszintű felépítéséről meggyőződni.

Ha ezután például nem a pontos értékekre, hanem a folyamatok irányára, az egyes tendenciák szemléletes képére vagyunk inkább kíváncsiak, akkor célszerű, ha eredményeinket grafikonnal szemléltetjük. (Az itt látható paramétervonalakat az összetartozó gondolkodási fázisok, illetve gondolkodási műveletek által felvett értékek alkotják.)



4. ábra

A hibák számának ábrázolása grafikonon

Így egy olyan szemléletes információ birtokába kerülhetünk, melynek felhasználásával a hibázások számának csökkentésén keresztül elvileg módosítani lehet a szóban forgó témakörben szereplő matematikai feladatok összetételét, típusát, a feldolgozás módját, valamint a követelményeket. A módszer többszöri, tananyagonkénti alkalmazásával optimálissá lehet tenni például a Nemzeti Alaptanterv által kitűzött célok elsajátítását más anyagrészek, illetve más tárgyak esetében is.

Jelen esetben a függvény képe, illetve a táblázat értékei alapján megállapíthatók a következők.

- A **ténymegállapítás** a hibák között, így a valóságos gondolkodási folyamatban is kevés alkalommal szerepel. Ezt mutatja az alacsony előfordulási átlag, a gondolkodási műveletenkénti 22,7-es érték. A jövőben célszerű ezen a téren jelentőségét például az értelmezési tartomány önálló meghatározásával tovább erősíteni. A tapasztalati szórás kiszámításakor kapott 8,3 viszont annak a jele, hogy ez a fázis nagyobb különbségek nélkül, egyenletesen oszlik el a hasonló típusú gondolkodási lépések között. (Mind a két állítás természetesen a konkrét szám adatok nélkül az 1. fázis értékeit végigkövető paramétervonal képéről is leolvasható.)

- A **megoldási javaslat** túlzottan nagy súlya az átlag 209,0-es értékében is kifejezésre jut. A hibázások számának csökkentése, valamint az 1. és a 3. fázis helyzetének további erősítése a különbségek bizonyos kiegyenlítődéhez vezethet. Az eltérés talán még ennél is markánsabban nyilvánul meg magán a megoldási javaslaton belül. Tökéletesen kifejezi ezt a szórásra kapott nagyon magas érték (324,9). A 4. ábráról jól látszanak azok a nagymértékű váltakozások, amelyeknek a csökkentése kell, hogy legyen ennél a résznél az elkövetkező időben a feladatunk. Ez olyan feladatsorok összeállítását jelenti, melyekben az eddig keveset szereplő gondolkodási műveletek nagyobb befolyáshoz jutnak.

- A **kritika** a ténymegállapításhoz hasonlóan kis szerephez jut az algebrai átalakításos feladatokkal szemben támasztott iskolai követelményrendszerben. Holott a munka állandó ellenőrzése nem csak a matematikai gondolkodásmód, hanem a cselekedetekben megnyilvánuló tetszőleges tevékenység igényes elvégzése szempontjából is fontos lenne. Amely viszont már túlmutatva az adott szaktárgyon az iskolai oktatás feladatának az újrafogalmazását igényelné. A kritika átlaga még a ténymegállapításét sem éri el: 19,8, ami az előzőeken túlmenően a hiányos, be nem fejezett megoldásokkal is magyarázható. Noha a szórás 12,5-es értéke még éppen elfogadható, azonban – mint az ábrából leolvasható – az analógiára ebben a gondolkodási fázisban (is) bátrabban kell támaszkodnunk.

Ugyanezeket a számításokat, illetve elemzéseket a gondolkodási műveletek

esetében is elvégezhetjük. Az eredmények a következő dolgokat mutatják.

- Az **analízis** 36,5-es átlaga és 30,6-es szórása viszonylag magas, de jelentős eltéréseket mutató értékekre utal. Mivel ezekért a ténymegállapítás és a kritika korábban elemzett kicsi, és a megoldási javaslatok nagy számadatai tehetők felelőssé, a kapott eredmény elvárásainknak megfelel.

- A **szintézis** mint önálló gondolkodási művelet sajátosságát nem csak az mutatja, hogy az ennek során elkövetett hibázások száma, s így az átlag nagysága – amely itt 21,3 – az analízissel összehasonlítva csekélyebb jelentőségre utal, hanem az is, hogy a szórás 12,5-es értéke egyenletesebb teljesítményt rejt maga mögött. Ráadásul azt tapasztalhatjuk, hogy a három fázis értékei alig térnek el egymástól. Ha viszont a megoldási javaslatról eltekintünk, akkor megállapíthatjuk, hogy a szintézis az analízissel mutat igen nagy egyezést. Ez alapján kijelenthetjük, hogy a szintézisnek az analízissel szembeni különbözősége abból származik, hogy a megoldási javaslatok elemzése az általunk vizsgált témakörben a tanulók számára jóval nehezebb feladatot jelent, mint a már elemzett adatok csoportosítása.

- Az **összefüggések felfogása** átlag és szórás szempontjából az előzőeknél kisebb értékeket mutat. (Az átlag itt 16,5, a szórás pedig 9,6.) Ráadásul a fázisok itt is csak nagyon kis mértékben különböznek egymástól. Ezen kívül az, hogy a három adat közül a megoldási javaslaté a legkisebb szemléletesen mutatja azt, hogy ez a gondolkodási művelet nem jellemző az adott típusú feladatok megoldására.

- A **kiegészítés** 246,0-es átlaga viszont a gondolkodás fejlesztése szempontjából a megoldások egyoldalúságát, a szóban forgó gondolkodási művelet túlsúlyát jelzi. Amely abban is kifejezésre jut, hogy a ténymegállapítást kivéve az összes fázis ennek a gondolkodási műveletnek a során veszi fel a legmagasabb értékét. De hogy ennek ellenére mennyire megoldási javaslat-centrikus hibákról van itt szó, azt a szórás értékéből tudjuk meg igazán, amely az összes közül itt a legmagasabb: 391,6. Ennek a nagyon nagy számnak a csökkentését a mostaninál változatosabb gondolkodási lépésekre épülő feladatok alkalmazásával lehet és kell a jövőben megvalósítani.

- A **rendezés** az összefüggések felfogásához hasonlóan nagyon kis szerepet játszik az algebrai átalakításokon alapuló matematikai feladatok megoldásában. Itt a legkisebb az átlag, 14,3. A szórásról viszont ugyanez már nem mondható el. A 11,4-es érték kisebbé tételében a kritika súlyának növelése sokat segítené.

- Az **analógia** hibáinak átlagértéke, a 42,8 nem tükrözi megfelelően a hasonló típusú megoldást igénylő feladatok hiányát az oktatásunkban. A hibás analógiák fellépése nálunk az analógia alkalmazásának a visszaszorulását vonta maga után. Az átlag magas értéke itt csak a megoldási javaslatok téves analógiáinak köszönhető, amelyek csak korlátozott, mindenkor a témakörhöz szorosan kötődő rokonságok, azaz az analógia kezdetleges formájának felismerésére szorítkoztak. A többi fázis szerepe (remélhetőleg csak) egyelőre elhanyagolható. Ezt az aránytalanságot jól fejezi ki a 63,2-es, az itteni átlagot jóval meghaladó mértékű szórás.

Az előzőekben ismertetett statisztikai adatok – ugyan más nézőpontból vizsgálva és néhány részletében kiegészítve, de – alapjában megerősítették azokat a tapasztalatainkat, amelyeket a korábbi elemzéseinkben tettünk. Véleményünk szerint ez azt támasztja alá, hogy az ebben a dolgozatban leírt modell alkalmas lehet arra, hogy az iskolai munka során tapasztalható hibákat a gondolkodás folyamatába beillessze és ez alapján csoportosítsa. Az eredményes felismerés viszont lehetővé teszi a megelőzést, azaz a tanítási-tanulási folyamat hatékonyabbá válását.

A hátralévő részben módszerünket más vonatkozásokból, más körülmények között is megvizsgáljuk abban a reményben, hogy előnyeit és alkalmazhatóságát ezúton is igazolni tudjuk.

TOVÁBBI MEGÁLLAPÍTÁSOK

I. A módszer előnyeiről

Ebben a részben módszerünket a korábbiaktól eltérő módon is szeretnénk a nálunk jelenleg általánosan elfogadott Mosonyi-féle felosztással **összehasonlítani**, hogy előnyeire más vonatkozásban is rámutassunk mintegy remélve, hogy a gyakorlat igazolja majd eljárásunk használhatóságát.

Mosonyinak és a korábbi, e témával foglalkozó kutatóknak az volt a mi nézőpontunkból a hiányossága, hogy a helytelen gondolkodási lépéseket a gondolkodási folyamattól elszakítva, izoláltan vizsgálták. Ezáltal így csak a **megoldási javaslat hibáira** mutattak rá, míg a többi gondolkodási fázisról és a bennük elkövetett hibázásokról említést sem tettek. Mosonyi eljárásának mintegy a magyarázatául azért meg kell jegyeznünk, hogy általános iskolában a feltételvizsgálat és a végeredmény ellenőrzése nem tartozott és még ma sem tartozik mindig olyan szorosan hozzá a feladatokhoz, mint például a középiskolában. Tehát a tanulók itteni tévesztései korántsem voltak annyira jellemzőek, vagy Beke szóhasználatával tipikusak az általános iskolai feladatmegoldásokban. Az általunk vizsgált témakörökben viszont már megmutatkoznak a korábbi módszerek korlátai.

Vegyük például azt a feladatot, amikor az $a \cdot b = 1$ feltétel teljesülése esetén kell a tanulóknak egy átalakítást elvégezni, és az egyikük úgy kezdi a megoldást, hogy az egyenlőség alapján megállapítja, ekkor $a = 1$ és $b = 1$. Véleményünk szerint ez hibás ténymegállapítást jelent, melynek során az analízis műveleténél következett be a téves észrevétel. Tehát a hiba az 1.a) csoportba sorolandó.

Nézzük most ezután végig, hogy Mosonyi felosztásában hová lehetne ezt a tévedést elhelyezni!

(1) A hiba biztos, hogy nem analógiából származik. Nincs olyan ehhez hasonló feladatmegoldás, amelynek mintájára a tanuló ezt a megjegyzését megtehetette volna.

(2) A matematikai jelek formalista alkalmazása, azaz a formának a tartalomtól való elszakadása sem figyelhető meg a választott példánkban. A hibát elkövető helyesen ismeri fel a szóban forgó műveletet, melyet a konkrét esetre azután helyesen alkalmaz.

(3) Nem lehet megszokásról sem beszélni ennél a feladattípusnál; a feladat nem olyan jellegű, hogy az érettségire vagy felvételig felkészítés miatt érdemes lenne ilyeneket gyakoroltatni. (A diákokat tanító pedagógus sem tette ezt.)

(4) Megállapítható az is, hogy nincs olyan fogalom sem, melynek tisztázatlan volta okozta volna a tévedést.

(5) Ez a hiba akkor is felléphet, ha a tanulónak az előismeretei az adott témakörben nem hiányosak. Tehát ha tudja, hogy a betűk valós számokat jelentenek; és ha tudja, mi a valós szám, ráadásul a szorzás műveletét is ismeri.

(6) Semmiféle olyan speciális műszó, szakkifejezés nem fordul itt elő, amely esetlegesen félreértésekre adhatna okot.

Azt találtuk, hogy a hiba a hat közül egyik csoportba sem illik be igazán, tehát a szóban forgó osztályozás ezek szerint hiányos. Hasonló végeredményre jutunk, ha a ténymegállapítás helyett a kritika gondolkodási fázisából választunk hibát. Ilyen az a már korábban említett helytelen ellenőrzés, amikor egy kifejezés pontos értékének kiszámításakor a műveletvégzés helyességét úgy látta be a tanuló, hogy mivel számolása végén 1-et kapott, ami pontos érték, így a végeredmény jó. Az előzőhöz hasonló módon, pontonkénti ellenőrzéssel lehet kimutatni, hogy ezt a hibafajtát sem lehet Mosonyi felosztásába besorolni.

Ennek ellenére, ha a felvázolt kétszintű gondolkodási folyamat további részekre bontására a gyakorlatban felmerülő igények miatt a későbbiekben szükség lesz, ehhez nagyon jól fel lehet majd használni a korábbi megfigyelésekből, másoktól származó kategorizálásokat. Amelyek ha más módszert is választottak feldolgozásuk alapjául, hosszú évek lelkiismeretes tanári munkája és hatalmas tapasztalati anyagára támaszkodva készültek el.

Mosonyi **Weimer** (1929) megállapítását alátámasztva szintén azt tapasztalta, hogy a hibák a legtöbb esetben **több okra** vezethetők vissza. Ennek a felismerésnek a magyarázata az általa alkalmazott csoportosításban rejlik. Amely, – mint arról már említést tettünk – a sok esetben nehezen megkülönböztethető és egymást részben átfedő osztályozási módszerrel magyarázható. Az általunk javasolt felosztás viszont közös elemeket nem tartalmazó részekből áll, így minden hibát elvileg **egyértelműen** hozzá tudtuk rendelni ahhoz a gondolkodási fázishoz és ahhoz a gondolkodási művelethez, amelyeknél a hiba a problémamegoldás folyamatában fellépett. (A gyakorlatban természetesen itt is előfordultak olyan esetek, amelyeket két tanár nem biztos, hogy azonos módon kezelne. Ezek aránya viszont egy hosszú ideig tartó, nagy számú megfigyelést tartalmazó leírásban az általános érvényű megállapítások helyességét nem befolyásolják jelentősen.)

Mosonyi a hibák kijavításának módjáról aszerint dönt a megelőzés és az utólagos javítás között, hogy mely domináns okhoz milyen kísérő ok társul. A mi véleményünk már csak az általunk alkalmazott felosztás tapasztalatai alapján is egészen más.

Úgy gondoljuk, hogy célszerű lenne egy pedagóguscsoportnak témakörönként és osztálytípusonként – ez utóbbit a gyermekek ismeretanyaga és a tanítandó anyag minősége határozza meg – feltérképezni a leggyakrabban előforduló hibákat. Ha az így kapott anyagot a szaktanárok számára hozzáférhetővé tennénk, akkor ők az osztály és a leadni kívánt tananyag összetétele ismeretében előre fel tudnák hívni diákjaik figyelmét a legfontosabb buktatókra, akik ezáltal is közelebb kerülnének a tárgyalt fogalmak és összefüggések pontos megértéséhez és ezek alkalmazásához, azaz a hatékonyabb és eredményesebb tanuláshoz.

II. A hibák időbeli változásáról

Egy adott témakör hibái és ezeknek az eloszlása egy adott osztály esetén is függenek az adott anyagrész tárgyalása után eltelt időtől. Akkor is, ha a szóban forgó részt alkalmanként újra és újra gyakorolják, de akkor is – csak akkor más mértékben –, ha ez már nem kerül közvetlenül újból elő.

Az előbbire láthatunk példát **Mosonyinál** is. A hányados fogalmának többszöri, ismételt gyakorlása néhány hónap alatt 17 %-ról 59 %-ra emelte egy, az adott megnevezéssel összefüggő feladattípus megoldásának arányszámát. De ilyen növekedéshez máshogy is eljuthatunk. Szintén Mosonyi ír le olyan kísérleteket, amikor **számok** nagyság szerinti **sorrendjét** kellett egy osztály tanulóinak meghatározni. Ha az egyébként pozitív számok között törtek és egészek egyaránt szerepeltek, akkor a helyes sorrendet 58 % kapta meg. Negatív számok sorba állításánál ugyanez lett az eredmény.

Kilencedik osztályos középiskolás diákokkal tanév elején megismételve ezeket a kísérleteket várakozásunknak megfelelően majdnem tökéletes megoldásokat kaptunk. (A törtek esetében egyetlen tanulónál volt tévesztés $\frac{1}{3}$ és $\frac{1}{4}$ sorrendjében, míg a negatív egész számokra vonatkozó feladatot mindenki hibátlanul oldotta meg.) Ezért nehezítettünk a feladaton, hogy lássuk, valóban teljes mértékben birtokában vannak-e tanulóink az itt elvárható ismereteknek. Két csoportban végeztük el a mérést: az egyiknek növekvő, a másiknak viszont csökkenő sorozatba kellett rendezni az alábbi számokat:

$$|2,3|; \quad -2; \quad 2,5; \quad 2,\dot{3}; \quad \frac{7}{3}; \quad \left|-\frac{5}{2}\right|.$$

Tekintve, hogy – mint az a későbbiekben kiderült – teljesen átlagos osztályról volt szó, az eredmény elgondolkodtató volt. Mindössze 10 tanuló (26 %) tudta jól megoldani a feladatot. Egy tanuló (3 %), akinek a legnagyobb számtól kellett volna kezdeni a felírást, fordított sorrendet választott; igaz, a relációs jeleket mindvégig helyesen alkalmazta. A másik csoportnál nem volt ilyen probléma. Nyilván általános iskolában gyakoribb volt a növekvő sorrendben történő felírás. Szintén 10 tanuló (26 %) jó sorrendbe írta a számokat, csak a közöttük fennálló egyenlőségeket nem jelölték be. 14 tanulónál (37 %) olyan kisebb hibák jelentek meg, amelyek mindegyikében a végtelen tizedes tört szerepet játszott. (Volt, ahol mellékszámításként például a következőt írták le: $\frac{7}{3} = 2,3\dot{3} \approx 2,3$ másutt $2,\dot{3}$ értékét a pont figyelmen kívül hagyásával eleve 2,3-nek vették, stb.)

3 esetben viszont (8 %) nagyon komoly hiányosságokat mutattak a végeredmények. (A $\frac{7}{3} = \left| -\frac{5}{2} \right| < |2,3|$... és más ehhez hasonló részletek azt jelzik, hogy ezeknél a tanulóknál súlyos megértésbeli problémák vannak.)

Az eredményeket nem beszéltük meg, és a hivatalos tananyag szerkezetéhez igazodva ilyen jellegű példákat sem oldottunk meg az elkövetkező években. (A diákok általános iskolából hozott ismereteik felméréséhez használt dolgozatot nem osztályoztuk le, és nem osztottuk ki. Ezzel az anyaggal csak az általános tájékozódás, azaz szintfelmérés volt a célunk.) Érettségi előtt még egyszer visszatértünk ugyanerre a feladatra, de ekkor ez már semmilyen nehézséget sem okozott az osztálynak.

Hosszabb idő alatt ugyan, de itt is sikerült ugyanazt az eredményt elérni, mint amit közvetlen, a célra irányuló gyakorlással meg tudtunk volna valósítani. A kísérletünkből kapott következtetés tökéletesen egybevág **Piaget** észrevételével. Ő jegyezte le először azt, hogy „egy fogalom kialakulásának folyamata sokkal hosszabb időt vesz igénybe, mint ahogy gondolták és hogy sok, látszólag a fogalommal össze nem függő tevékenységre is szükség van, még mielőtt a gondolkodás valamilyen meghatározott irányba fordulna”.

A fenti állítást további példákkal is lehet szemléltetni. Általánosan is kijelenthetjük, hogy azok a komoly megértésbeli problémák, amelyekkel az általános iskolában tanító pedagógusok nap mint nap találkoznak, a középiskolában előbb vagy utóbb különösebb ismétlés nélkül maguktól is megoldódhatnak. Ez a két, egymásra épülő iskolatípus koncentrikus; egyre bővülő, de ugyanakkor részben ismétlődő tananyag szerkezetével magyarázható. Amikor a korábban megismert fogalmak és összefüggések később, egy bonyolultabb struktúrába ágyazva újra megjelennek, csak most már a leírás helyett a pontos értelmezés szintjén. (Nem teljesen ugyanez a helyzet a többi természettudományos tárgy esetén. A középiskolai fizikában nem tárgyalják Arkhimédész-törvényét, mivel ez a tanterv szerint általános iskolai anyag. Ilyen módon viszont a tanulók nem fognak látni nehezebb feladatokat, és ez meghatározza a problémamegoldásuk lehetséges szintjét ebben a témában.)

Hibakutatásra mindezek ellenére már csak azért is szükség van, mert az iskolából hozott hibák későbbi gyakorlás híján a megszűnés helyett inkább felerősödhetnek. Ezért célszerű számukat amennyire csak lehetséges, megszüntetni.

Ezt igazolja az a kísérlet, amelyet negyedéves matematika tanár szakos hallgatók és érettségi előtt álló diákok körében végeztünk. Ennek keretében kiválasztottunk egy olyan középiskolában tárgyalt anyagrészt, a függvénytranszformációkat, amelynek oktatása véleményünk szerint nincs kellően kidolgozva. (Bővebben erről a témáról Kovács (1994) cikkében lehet olvasni.) Ezek után ugyanazt a dolgozatot írtuk meg a diákokkal, mint az egyetemi hallgatókkal. Ebben a feladat az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto 1,5 \sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) - 1$ függvény ábrázolása volt.

A felmérésben nagyon sok ismétlődő, tipikusnak is nevezhető hibával találkoztunk már a ténymegállapítás során is. Mind a két csoportban volt olyan, aki a szinusz helyett a koszinusz függvényből indult ki, de a hallgatónál olyan is akadt, akinek az alapfüggvény ábrázolásához készített rajzán periódusként 4π szerepelt. Ezek a hibázók tévedésüket még a tulajdonképpeni megoldási folyamat elindulása előtt az elemzésük, azaz analízisük során (figyelmetlenségük, vagy hiányos ismereteik miatt) követték el.

Legtöbben mindkét részről természetesen a megoldási javaslatot rontották el. Ebben a helytelen analízis leggyakrabban a műveletek felcserélésében nyilvánul meg. Amikor nyújtás vagy zsugorítás helyett eltolást (vagy megfordítva) hajtunk végre.

Különös, hogy itt a legdurvább hibákat az egyetemi hallgatók vétették. Volt olyan dolgozat, amelyben első lépésként az $x \mapsto x - \frac{\pi}{8}$, $x \in \mathbb{R}$ majd az $x \mapsto 2\left(x - \frac{\pi}{8}\right)$, $x \in \mathbb{R}$ függvényeket ábrázolták (rosszul!). Ezután nem is tudott továbbmenni a feladatmegoldó, aki képzeletében vélhetőleg ezekre akarta a szinusz függvényt alkalmazni. De olyan pályamű is akadt, amelyben a $\sin(x - y)$ kifejezésre vonatkozó azonosság felhasználásával óhajtotta egyszerűbben ábrázolható alakra hozni a megadott függvényt leendő kollégánk. Sajnos nem jutott el az ábra megrajzolásáig.

Az analízis után következő szintézis hibái itt is-ott is egyenlő számban jobbra abból álltak, hogy az ábrázolás során a műveletek iránya felcserélődött. A nyújtás helyére zsugorítás került, vagy az eltolás a szükségessel ellentétes irányba történt. Ezekon kívül a legtanulságosabb, s egyben a legalattomosabb hibaként olyan eset is előfordult – a hallgatóknál nagyobb számban –, amikor a változó együtthatójának az argumentumból való kiemelésének elmaradása miatt az abszcissa tengely menti eltolás helytelen értékekkel történt meg. Itt az analízis helyesen mutatta az elvégzendő átalakításokat, melyeknek végrehajtásába azonban hiba csúszott.

De még ha a művelet fajtájának és irányának kijelölése megfelelő is volt, elvégzése során akkor is lehetett hibázni. Ilyen esetek tartoztak a hibás kiegészítések közé. A leggyakoribb tévesztés a nem megfelelő értékkel végrehajtott műveletvégzés (például egy egység helyett egy négyzetráccsal való eltolás) volt, de előfordult hibás átalakítás (például a kiemelésnél) is. Ez a hibafajta a középiskolás diákok „fölnyét” mutatta mintegy azt igazolva, hogy az elképzelésüket a nagyobb tudás és a matematikai apparátus birtokában lévők biztonságosabban tudják kivitelezni.

Nem mindig volt azonban az egyetemistáknak a feladat megoldására vonatkozóan ötletük. Volt olyan személy is, aki ennek híján a koordinátarendszeren lévő értékeknek a minél szélesebb körű megjelölésével töltötte el az időt. Ez a tevékenység a megoldási javaslaton belül a mellékes mozzanatok említésének kategóriájába tartozik. Ezen a gondolkodási fázison belül is az analízishez sorolható, mivel bizonyos alapvető felismerések (koordinátarendszerben való ábrázolás) körvonalazódtak a dolgozatban, csak ezek kellő ismeretek híján nem tudtak átstrukturálódni a szintézis folyamatában.

A végrehajtott transzformációt senki sem ellenőrizte. Ezt a jelenlegi tanterv nem is követeli meg, tehát ezt a hiányosságot most nem lehet hibának felfogni. (Pontosabban, ez nem a tanulók, illetve hallgatók, hanem a képzésünk hiányossága. Meg kell viszont említeni, hogy van már olyan hazai tankönyv – sajnos csak egy, – amely példát mutat a függvény-transzformációk végrehajtásának ellenőrzésére.

A kapott eredményeket táblázatos formában is ábrázoltuk (bal oldalon az érettségi előtt állókkal). Ennek során az értékeket most nem darabszám, hanem százalékos formában közöljük az összehasonlítás megkönnyítése érdekében. Ugyanis a csoportokban résztvevők száma olyan mértékben különbözött egymástól, amely ellenkező esetben jelentősen megnehezítette volna a következtetések levonását. Így viszont a gondolkodási fázisok és a gondolkodási műveletek egybevetését közvetlenül meg lehet tenni.

Érett.	a)	b)	c)	d)	e)	f)	Σ
1.	3,6	-	-	-	-	-	3,6
2.	28,6	21,4	-	46,4	-	-	96,4
3.	-	-	-	-	-	-	-
Σ	32,2	21,4	-	46,4	-	-	100

Hallg.	a)	b)	c)	d)	e)	f)	Σ
1.	10,5	-	-	-	-	-	10,5
2.	26,3	31,6	-	31,6	-	-	89,5
3.	-	-	-	-	-	-	-
Σ	36,8	31,6	-	31,6	-	-	100

5. ábra

A problémamegoldás lépéseinek relatív összehasonlítása különböző életkorú csoportokban

A táblázatból leolvasható arányszámok meglehetősen nagy egyezéseket mutatnak. Ezek azt jelzik, hogy a hibázások összetétele és gyakorisága egy adott probléma megoldásának kapcsán közel állandó még egy heterogén összetételű, különböző iskolákból származó csoport tagjainál is. Az eltelt időt viszont jól mutatja a problémamegoldás hatásfoka. Azonos pontozás esetén a 41 főből álló osztály 84,9 %-ra, míg a 30 fős egyetemi csoport 69,3 %-ra teljesített. Ha nem matematika szakos hallgatókról lett volna szó, akik érdeklődési körük miatt is közel állnak az anyaghoz, bizonyára még ennél is gyengébb eredményt kapunk. Ez viszont még inkább megerősíti bennünk azt a meggyőződést, hogy kötelességünk az iskolában a hibázások minimumra csökkentéséért olyan állandó harcot vívni, melyben az első lépés az ellenfél megnevezése, azaz a hiba felismerése és rendszerezése, míg a második a leküzdése kell, hogy legyen.

III. A hibafajták előfordulásáról

A hibafajták időbeli változásán kívül azt is érdemes megvizsgálni, hogy egy adott feladattípus megoldása esetén milyen arányban fordulnak elő a különböző hibák a tanulók gyengébb, illetve jobb matematikai eredményt felmutató csoportjaiban. Az itt bemutatandó konkrét feladatot úgy választottuk ki, hogy megoldási elve ne legyen a diákok számára teljesen ismeretlen, de azért teljesen nyilvánvaló sem. Ráadásul azért, hogy a tananyag biztos elsajátítását is le tudjuk mérni, hasonlítson a megadott kifejezés egy nevezetes azonosságra.

A szóban forgó feladat az $x^4 + 4$ polinom szorzattá alakítására vonatkozott, melynek egyik megoldásmódja a következő algebrai átalakításokon alapul:

$$x^4 + 4 = x^4 + 4x^2 + 4 - 4x^2 = (x^2 + 2)^2 - (2x)^2 = (x^2 + 2x + 2)(x^2 - 2x + 2)$$

A kitűzött problémát a kilencedikes év végi ismétlés keretében adtuk fel két, tanulmányi eredmény alapján kiválasztott osztályban. Mind a két osztály 36 főből állt. A félévi matematikai osztályzatok szerinti gyengébb csoportból senki sem tudta megoldani a feladatot. Tipikus kísérletnek az $x^4 + 4 = (x^2)^2 + 2^2$ átalakítás számított, melynél többen is megjegyezték, hogy „mivel $a^2 + b^2$ nem alakítható szorzattá, ezért a vele azonos típusú $x^4 + 4$ sem”. Ezzel az említett átalakítással idáig eljutva 11 tanuló próbálkozott. Közülük hárman az előzővel azonos formájú magyarázatot is fűztek eredményükhöz. 8 tanuló úgy értékelte, hogy nem tudta befejezni megoldását, azaz a hiba a megoldási javaslatban található. Mégpedig a szintézisnél, amely a felismert négyzetösszeget nem hozta kapcsolatba a két tag összegének a négyzetével.

3 diák megoldását végeredménynek fogva fel megpróbált ellenőrzést gyártani eljárása igazolására. Ők a kritikát rontották el egy hamis analógiával, amely a konkrét esetre nem igaz.

5 dolgozatban az $(x^2)^2 + 2^2$ összeget tovább alakították $(x^2 + 2)^2$ alakúra. Ez a kiegészítés (formalista típusú) hibáját jelenti a megoldási javaslatban. 1 tanuló próbálkozásában az $x^4 + 4 = (x + 1)^4$ egyenlőséget választotta a binom hatványaira vonatkozó elképzelése alapján, amely az szintén a 2.d) ponthoz tartozó hibát jelez.

A negyedik hatvánnyal próbálkozott az a megoldó is, aki a szorzattá alakítást az $x^4 + 4 = x^4 + (\sqrt{2})^4 = (x + \sqrt{2})^4$ alakban vélte elvégezni. Ezt a hibát is (véleményünk szerint) a 2.d) részbe lehet besorolni.

Ugyancsak egy tanuló az x -et kiemelve $x \cdot \left(x^3 + \frac{4}{x}\right)$ formában alakított szorzattá, mely a megoldási javaslat rossz analízisét jelenti. Ugyanebbe a csoportba tartozik az $x \cdot x \cdot x \cdot x + 2 \cdot 2$ fajtájú tényezőkre bontás is, amelyet szintén 1 esetben lehetett megfigyelni.

10 tanulónál szintén a megoldási javaslat keretében a mellékes mozzanatok említésére láthattunk a kiegészítés művelete kapcsán példát, amikor a feladott probléma mellett a nevezetes azonosságok vagy ezek egy része szerepelt a papíron.

6 dolgozatnál semmiféle megjegyzés nem volt a feladat szövege mellett. Ebben az esetben már a ténymegállapítás elején, az analízis elvégzésénél problémák mutatkozhattak; erre utal, hogy a diákok nem tudták elkezdni a megoldást.

A matematikai szempontból eredményesebb csoportban 8 tanuló eljutott a végeredményig. Közülük azonban csak kettő ellenőrizte a művelet helyességét visszaszorzással, így 6 esetben a gondolkodási folyamatból a kritika hiányzik. Azon belül is a kiegészítés, a kijelölt műveletek elvégzése.

A legtöbben itt is az $(x^2)^2 + 2^2$ formulánál álltak le, szám szerint tizenegyen. Viszont ebből a tizenegyből csupán ketten nem fűztek szöveges magyarázatot eredményükhöz. Ők az előzőekben leírtak alapján a 2.b) csoportba tartozó hibát követték el. A fennmaradó 9 diák többsége a másik osztályéhoz hasonló indoklást szerepeltetett eljárásában. De mivel ezeknél a tanulóknál a tananyag szerkezete más volt, így olyanokat is lehetett például olvasni tőlük, hogy

- a kifejezést nem lehet átalakítani szorzattá, mert csak azokat az azonos kitevőjű hatványok kéttagú összegét lehet, melyeknek kitevője $2k + 1$ alakú vagy

- $x^4 + 4$ -nek nincs olyan x valós értéke, amelyre $x^4 = -4$, vagyis $x^4 + 4$ -et nem lehet felbontani olyan valós együtthatós polinomokra, melyek közül egyik sem triviális osztója a polinomnak, így az irreducibilis.

Ez a tanuló, mint azt az előző osztálynál megállapítottuk, a 3.f) hibát követte el. Érdekes, hogy a másik társaságnál gyakoribbnak számító $(x^2)^2 + 2^2 = (x^2 + 2)^2$ leírást itt senki sem választotta. Ez alapján úgy tűnik, hogy matematikailag képzetesebbek körében nem pontosan ugyanolyan jellegű tévesztések fordulnak elő, mint az ilyen szempontból gyengébbek között.

8 tanuló a szorzattá alakítás vonatkozásában hibás, a nevezetes azonosságokon alapuló átalakítással próbálkozott a megoldási javaslatában: ők a 2.f) pontnál hibáztak. Ez a feladat őket egy másik, korábban megoldott problémára vagy pedig egy ismert összefüggésre emlékeztette. Néhány tanulságosabbat leírunk közülük:

$$x^4 + 4 = x^4 - (-(-2)^2) = (x^2 - (-(-2))) (x^2 + (-(-2)))$$

$$x^4 + 4 = x^4 + (\sqrt{2})^4 = (x + \sqrt{2}) (x^3 - \sqrt{2}x^2 + 2x - (\sqrt{2})^3)$$

$$x^4 + 4 = (\sqrt[3]{x^4})^3 + (\sqrt[3]{4})^3 = (\sqrt[3]{x^4} + \sqrt[3]{4}) \left((\sqrt[3]{x^4})^2 - \sqrt[3]{4}\sqrt[3]{x^4} + (\sqrt[3]{4})^2 \right)$$

5 diák más módon, $4x^2$ -től különböző tagok hozzáadásával próbálta meg a tényezőkre bontást – sikertelenül. Az erőfeszítésük ellenére keletkezett hiba a 2.d) pontba sorolható.

És végül 4 tanulónál fedezhető fel az ismert megoldás szempontjából mellékesnek tekinthető mozzanat említése, leggyakrabban az

$$a^n + b^n = (a + b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + \dots - ab^{n-2} + b^{n-1})$$
 képlet említésének formájában.

Mivel a feladat ilyen módon nem oldható meg, ezért ez a korábbiakkal megegyező indokok alapján a 2.d) csoportba sorolható. Olyan tanuló ebben az osztályban nem volt, aki ne kezdett volna neki a feladatmegoldásnak.

Ezek után érdemes a két csoportot összehasonlítani a hasznosítható tapasztalatok leszűrése érdekében.

Gyeng.	a)	b)	c)	d)	e)	f)	Σ
1.	6	-	-	-	-	-	6
2.	2	8	-	17	-	-	27
3.	-	-	-	-	-	3	3
Σ	8	8	-	17	-	3	

Jobb	a)	b)	c)	d)	e)	f)	Σ
1.	-	-	-	-	-	-	-
2.	-	2	-	9	-	8	19
3.	-	-	-	6	-	9	15
Σ	-	2	-	15	-	17	34

6. ábra

Matematikából gyengébb, illetve jobb teljesítményt nyújtó csoportok hibázásainak osztályozása

A gondolkodási fázisokat illetően jól látszik, hogy míg a jobbik csoportból mindenki el tudta kezdeni a feladatot, a másikban a ténymegállapítás hiányosságai miatt ez nem mindenkinek sikerült. A megoldási javaslatot illetően ugyan majdnem egyforma a hibázások száma, de mint tapasztaltuk, a minősége már nem. Természetesnek tűnik, hogy a rosszabb csoportban több a mellékes mozzanat. Ez is összefüggésben van azzal, hogy itt a tanulók kevésbé találtak rá a megoldásra. Egyébként ez a hibás kritikák számában is megnyilvánul. Ugyanis ahol kevesebben oldották meg a feladatot, nyilván kevesebben ellenőrizték is.

A gondolkodási műveletek ugyanezeket a különbségeket mutatják. A feladatot meghatározó adatok és a megoldás hibás elemzése a kevésbé felkészült tanulókra jellemző. Az analízis által szétbontott elemek összetételéről, a szintézisről ugyanez mondható el. A feladat sajátosságait mutatja, hogy az összefüggések felfogására és a rendezésre most nem volt különösebben szükség; ezzel magyarázható, hogy miért nem fordult itt elő hiba.

A kiegészítés is majdnem egyforma súllyal szerepelt mind a két esetben; ez képezte ebben a feladatban a megoldáshoz vezető út jó részét. A hibás analógiák viszont arra mutatnak rá, hogy a jobbik csoportban bátrabban nyúlnak ehhez az eszközhöz. Ebben a körben nagyobb a tanulók rálátása az anyagra, több mindent ismernek, s így nagyobb mértékben használják fel más példák eredményeit, de jóval nagyobb mértékű a hibázások száma is.

Ezek a tapasztalatok is megerősítenek bennünket abban, hogy érdemes a továbbiakban még többet foglalkozni a hibák okainak és jellemzéseinek a leírásával annak érdekében, hogy csökkentve a tévesztések számát eredményesebbé tessük tanulóinknak a jövőjüket megalapozó iskolai életet. Véleményünk szerint az általunk javasolt módszer alkalmas lehet arra, hogy ezeknek a célkitűzéseknek megfeleljen és egy gyakorlati indíttatásból adódó, az egész iskolai anyagot átfogó vizsgálat alapjául szolgáljon.

III. A Pólya-féle kérdések módosításáról

Az eddigiekben a Lénárd-féle elgondolást többek között Pólya elképzelésének megfelelően módosítottuk. A kapott eredmény azonban felhasználható Pólya problémamegoldásra vonatkozó kérdéseinek a kiegészítésére, illetve megadott szempont szerinti csoportosítására. Ezeket a kérdéseket vagy utasításokat érdemes az előzőekben ismertetett táblázat figyelembevételével megterveznünk. (Ahol lehetett, meghagytuk az eredeti Pólya-féle változatot, – ezeket vastaggal szedtük – és pontonként tájékoztató jelleggel a teljesség igénye nélkül Pólya szellemiségének megfelelően csak néhány kérdést, illetve utasítást írtunk le. Az alábbi jelölésekben szereplő kisbetűk a 2. ábra gondolkodási műveleteit mutatják.)

1. Ténymegállapítás

- a) Mi a feladat? **Mi van megadva?** Válaszd szét az adatokat és a megoldani kívánt problémát részekre.
- b) Elegendők-e az adatok a probléma megoldásához?
- c) Van-e az adatok között összefüggés? Van-e az adatok között ellentmondás?
- d) Milyen kapcsolat van az adatok között?
- e) Lehet-e az adatokat valamilyen szempont szerint csoportosítani?
- f) Hasonlítanak-e a problémában szereplő adatok valamely másik feladat adataihoz?

2. Megoldási javaslat

- a) Van-e kapcsolat az adatok és a megoldás egyes részei között?
- b) Nem lehet az adatokból vagy a megoldás szerkezetéből visszafelé okoskodással valami hasznosat levezetni?
- c) **Nem találoztál már a feladattal? Esetleg a mostanitól egy kissé eltérő formában?**
- d) Meg lehet-e határozni azokat az eszközöket, amelyekkel az adatokból a feladatot meg lehet oldani?

- e) Nem lehet a megoldáshoz szükséges lépéseket elvégzésük szerint sorba rendezni?
- f) **Ha nem boldogulsz a problémával, próbálkozz egy rokon feladattal.**

3. Kritika

- a) A feladat lényegéhez tartozó minden adatot felhasználtál?
- b) Megfelelő a megoldás szerkezete?
- c) Megfelel a kapott eredmény az előzetes elvárásoknak?
- d) **Nem tudnád másképp is levezetni az eredményt?**
- e) Ki tudnád-e választani a megoldás néhány lényeges részletét?
- f) A részletek kis megváltoztatásával kapott rokon (speciális, általános) problémák eredményei igazolják a megoldást?

A problémamegoldó gondolkodás szerkezetének ismeretében olyan körülmények között is lehet alkalmazni a tanulók kérdésekkel való közvetlen irányítását, amelyek Pólya idejében fel sem merülhettek. Ilyen lehet például egy számítógépet felhasználó matematika óra felépítésének módszertani szempontú megtervezése. Ugyan a számítógép oktatásba való bevonása a problémamegoldás folyamatának szerkezetét nyilvánvalóan nem változtatja meg, de a hozzá kapcsolódó kérdések, illetve utasítások számát tovább növelheti. Ezzel a módszerrel a tanulók lehetőségei kitágulnak, gondolkodásuk módja a jelenleginél divergensebb jellegű lehet. A számítógéppel elérhető világháló az érdeklődésre, motivációra is pozitív hatással lehet, a számolás nagyobb gyorsasága pedig a teljesítmény növekedését eredményezi. Egy interaktív (dinamikus) geometriai program pedig lehetővé teszi, hogy a diákok a legkülönbözőbb nézőpontból körbejárhassák a megoldott problémát. Ilyen módon, a megfelelő kérdések és utasítások pontos megfogalmazásával valóban elérhetőek az oktatás legfontosabb céljai.

Néhány olyan megoldást említünk meg a következőkben, amelyek számítógéppel támogatott órához csatlakozva jól kiegészíthetik a korábbiakban leírt elgondolásokat. (A számok a 3. ábra gondolkodási fázisait, a betűk a gondolkodási műveleteket jelzik.)

- 1.a) Fel lehet-e használni a megoldásban a számítógépet?
 - 1.b) Lehet-e a számítógép segítségével a feladat megoldásába új adatokat bevonni?
 - 1.c) Ismersz olyan eljárást (számítógépes programot), amellyel az adatok közötti összefüggés kideríthető?
 - 1.d) Lehet-e az adatok közötti összefüggést a számítógép segítségével igazolni?
 - 1.e) Próbáld az adatok csoportosítását számítógéppel elvégezni.
 - 1.f) Keresd meg a nyilvántartásodban, hogy milyen feladatokban fordultak elő hasonló jellegű adatok.
-
- 2.a) Próbáld a megadottakon kívül további felhasználható adatokhoz jutni. Kutatásaidhoz használj számítógépet.
 - 2.b) Készíts a számítógéppel táblázatot vagy ábrát. Próbáld meg feltüntetni bennük az adatok közötti kapcsolatot.
 - 2.c) Ismerj fel az adatok között olyan összefüggéseket, amelyek nincsenek közvetlenül megadva. Tüntesd fel ezeket is.
 - 2.d) Próbáld számítógép felhasználásával megoldani a feladatot.
 - 2.e) Készíts a feladatok tárolására adatbázist. Helyezd el benne a feladatot a rá jellemző összetevők rendezésével úgy, hogy ez bármikor visszakereshető legyen.
 - 2.f) Tudsz a saját nyilvántartásodban rokon feladatot találni?
-
- 3.a) Lehet számítógépet felhasználni az ellenőrzéshez?
 - 3.b) Tüntesd fel a megoldás egyes részei közötti kapcsolatot. Egyesítsd a ezt az ábrát (táblázatot) az adatokra vonatkozóval.
 - 3.c) Tudsz olyan anyagot találni (az internet vagy könyvtári munka segítségével), amelyet kapcsolatba lehet hozni a feladat eredményével?
 - 3.d) Találj új módszereket, végezz számítógépes ellenőrzést.
 - 3.e) Hozz létre a probléma megoldását bemutató web oldalt.
 - 3.f) Keresd a megoldásodhoz hasonló eredményt. Igazolja ez az eredményedet?

Az előzőekben felvázolt elmélet teszteléséhez olyan feladatsort állítottunk össze, amelyen több számítógéppel összefüggő tevékenységet ki lehetett próbálni: rajzolást, egyszerű számolást és formális műveletvégzést csak úgy, mint internetes kutatómunkát, hipotézisalkotást, ellenőrzést, általánosítást, stb.

A feladatokat 1999-től az egyetemen szervezett szakvizsgára előkészítő tanártovábbképzéseinken próbáltuk ki. A szakmódszertan 2. kurzusok során tartott számítógépes foglalkozásokon a matematika tanárokkal közösen oldottunk és beszélünk meg különböző, számítógép segítségével megoldott problémákat. A következőkben tárgyalt feladat is ilyen volt, a megoldásához szükséges gondolatmenethez együtt fogalmaztuk meg az előzőekben leírt kérdéseket. A probléma viszonylagos bonyolultsága miatt lépésenként közösen elemeztük a megoldás menetét az után, hogy a továbbképzésben részt vevő pedagógusok önállóan próbálták az ötletüket a számítógép segítségével kidolgozni. Mivel az itt tárgyalt példák köthetők voltak az iskolai matematika tananyaghoz, órai felhasználásuk emelt szintű matematikát tanuló osztályokban is elképzelhető.

A tárgyalt példák matematikai alapja Lavrentyev és Ljuszyernyik Variációszámítás című könyvének az Euler-egyenlet integrálásáról szóló fejezetében található. Itt olvashatunk a J -hiperbolákról, melyek bevezetéséhez meg kell adni a sík Γ_1 és Γ_2 görbéit. Húzzunk a sík P pontjaiból olyan Γ_1 és Γ_2 extrémális görbét, amelyek Γ_1 -et és Γ_2 -et merőlegesen metszik. Jelöljük ezek P és Γ_1 , illetve P és Γ_2 közötti hosszát $J(\Gamma_1)$ -gyel és $J(\Gamma_2)$ -vel. Ekkor a sík azon P pontjainak halmazát, amelyekre a $J(\Gamma_1)$ - $J(\Gamma_2)$ különbség állandó, J -hiperbolának nevezzük. Speciálisan, a fent említett fejezet 2. példájában az A ponton átmenő olyan síkgörbét kell meghatározni, amelynek P pontjaiból a Γ_1 és Γ_2 síkbeli egyenesekre bocsátott merőlegesek T'_P és T''_P talppontjaira (azaz a szóban forgó pontok és az egyenesek távolságaira) fennáll az

$$(1) \quad PT'_P - PT''_P = AT'_A - AT''_A = 2a$$

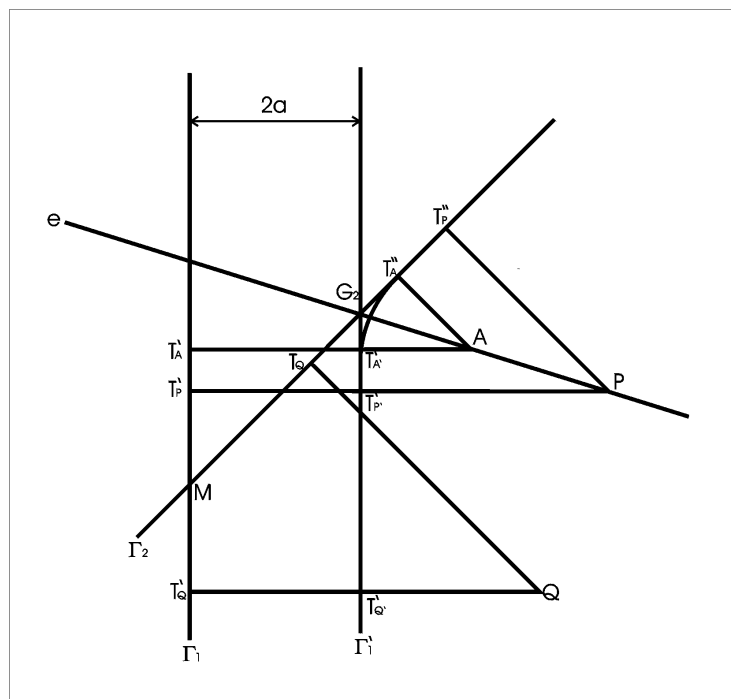
egyenlőség. (Az egyenlőség felírásához felhasználtuk, hogy $J(\Gamma_1) = PT'_P$ és $J(\Gamma_2) = PT''_P$.)

1. hipotézisként elfogadtuk a könyv által leírt megoldást, amely szerint a keresett görbe az ábrán e -vel jelölt egyenes. A továbbképzések tanáraival geometriai, iskolában is használható bizonyítással megpróbáltuk ellenőrizni a szerzők elgondolását. (Ugyan nem szokásos, hogy **ténymegállapításként** egy ismert megoldásból induljunk ki, de céljainknak ez a választás felelt meg legjobban.

Az iskolai munkában a felfedezettő utat szoktuk javasolni: ehhez nagyon jól használhatók a dinamikus geometriai elven (DGS) működő programok.) A bizonyítás kiindulásához most nem (1)-et használtuk fel. Figyelembe vettük ugyanis, hogy a hiperbola szokásos iskolai definíciójában abszolút érték szerepel. A tanárokkal ezért az általánosabb, a könyv által leírt megoldást tartalmazó

$$(2) \quad |PT'_P - PT''_P| = |AT'_A - AT''_A| = 2a$$

esetet vizsgáltuk meg közös munkával. Azt kaptuk, hogy (2) megoldása a 7. ábrának megfelelően az A ponton átmenő e egyenesnek a Γ_1 és $\Gamma'_1 - 2a$ szélességű – sáv határán levő pontjai és a szóban forgó tartományon kívül eső két félegyenes. Így az (1)-et kielégítő görbe sem lehet az egész e egyenes. Az 1. hipotézist tehát tovább kellett finomítani. A 2. hipotézis szerint a megoldás az e két félegyese.



7. ábra

J-hiperbola két egymást metsző egyenes esetén

A vizsgálathoz először felvettük a Γ_1 -gyel párhuzamos Γ'_1 egyenest. (Ez volt a **megoldási javaslat** első lépése.)

Γ_1 konstrukciója miatt a J -hiperbola pontjai egyenlő távolságra vannak Γ_1 -től és Γ_2 -től. A J -hiperbola pontjai tehát rajta vannak Γ_1 és Γ_2 szögfelezőjén. Részletesebben megvizsgálva a problémát megállapítható, hogy az ábra szerinti G_2 és A pontok által meghatározott félegyenes a $T_A A T''_A$ szög – így a $T'_P P T''_P$ szög – felezője (a $T'_A A G_2$ és a $T''_A A G_2$ egybevágó háromszögek), ezért a rajta levő P pontokra $PT'_P = PT''_P$ miatt

$$PT'_P - PT''_P = PT'_P - PT'_P = 2a$$

érvényes. Hasonlóan, az e egyenes másik félegyenesén található P pontok esetében a

$$PT''_P - PT'_P = 2a$$

összefüggés áll fenn. e -nek a két félegyenes közé eső P pontjai nem tartozhatnak a megoldáshoz, mivel rájuk – mint az könnyen belátható –

$$PT'_P + PT''_P = 2a$$

teljesül. (Ez az eredmény a későbbiekben egy újabb ponthalmaz bevezetésére ösztönzött bennünket.)

A sík egyetlen más Q pontja sem tartozhat a ponthalmazhoz, mivel

$$|QT'_Q - QT''_Q| = |QT'_Q + 2a - QT''_Q| = 2a$$

miatt ekkor $QT'_Q = QT''_Q$ teljesül. A Q pont tehát ekkor rajta van a $T''_Q T'_Q$ szakasz felezőmerőlegesén, ami (a $T''_Q T'_Q Q$ és a $T''_P T'_P P$ háromszögek egyállású szögei miatt) párhuzamos a $T''_P T'_P$ szakasz felezőmerőlegesével. Mivel ez utóbbin rajta van az A pont, amely eleme kell, hogy legyen a keresett ponthalmaznak és az A ponton át a $T''_P T'_P$ egyenessel párhuzamosan csak egy egyenes húzható, így Q valóban rajta kell, hogy legyen e -n. Tehát a keresett ponthalmaz ekkor valóban a két félegyenesből áll. Abban a speciális esetben, amikor Γ_1 párhuzamos Γ_2 -vel, az e egyenes velük az A pontban állított párhuzamos lesz.

Azt láttuk, hogy a **kritika** folyamata valamilyen hibát jelzett. Miután a geometriai megfontolásokkal kapott eredményeink ellentmondtak a könyv megoldásának, a kérdés végleges eldöntéséhez a számítógéphez folyamodtunk.

Mivel újabb módszert is szerettünk volna kipróbálni, ezért a tanfolyamon tárgyalt Maple komputer-algebrai rendszerű programhoz fordultunk.

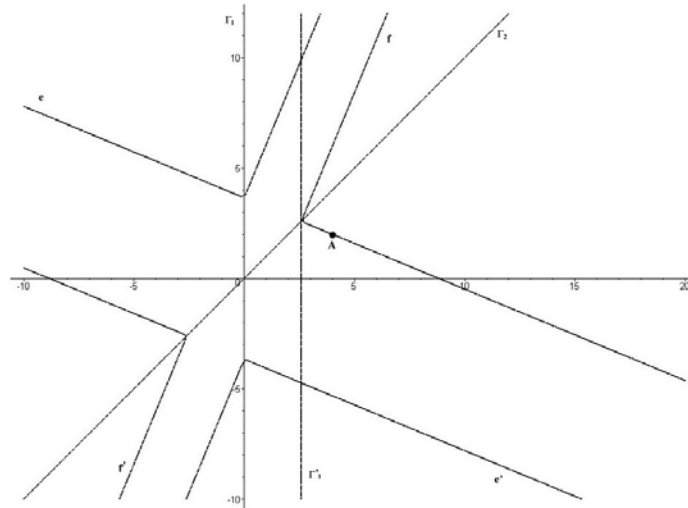
Egy egyszerű példát választottunk az ellenőrzéshez. A $\Gamma_1 : x = 0$, $\Gamma_2 : y = x$ és $A(4;2)$ egyszerűen számítható adatok félegyenések egyenleteit szolgáltatják. Ekkor a $P(x;y)$ pontra $J(\Gamma_1) = |x|$ és $J(\Gamma_2) = \left| \frac{x-y}{\sqrt{2}} \right|$. Mivel az A pontnak a Γ_1 -től való távolsága 4, Γ_2 -től való távolsága $\sqrt{2}$, ezek alapján felírható az

$$\left| \left| \frac{x-y}{\sqrt{2}} \right| - |x| \right| = 4 - \sqrt{2}$$

egyenlet. A kísérlet résztvevői először egyénileg végezték el az abszolút érték jelek felbontását, amit később a Maple segítségével ellenőriztek. Az abszolút érték jelek száma miatt már előre sejtettük, hogy 8 ponthalmazt kapunk. És valóban, az alábbi egyenleteket kaptuk.

- | | | | |
|-------|---------------------------------------|----|---|
| I. | $x = -\sqrt{2}y + 6 + 2\sqrt{2} - y,$ | ha | $y \leq \frac{2(3+\sqrt{2})}{\sqrt{2}+2},$ |
| II. | $x = -\sqrt{2}y - 6 - 2\sqrt{2} - y,$ | ha | $y \leq -\frac{2(3+\sqrt{2})}{\sqrt{2}+1},$ |
| III. | $x = \sqrt{2}y + 10 - 6\sqrt{2} - y,$ | ha | $\frac{2(3\sqrt{2}-5)}{-2+\sqrt{2}} < y,$ |
| IV. | $x = \sqrt{2}y - 10 + 6\sqrt{2} - y,$ | ha | $-\frac{2(3\sqrt{2}-5)}{\sqrt{2}-1} \leq y,$ |
| V. | $x = \sqrt{2}y + 10 - 6\sqrt{2} - y,$ | ha | $y < \frac{2(3\sqrt{2}-5)}{\sqrt{2}-1},$ |
| VI. | $x = -\sqrt{2}y + 6 + 2\sqrt{2} - y,$ | ha | $\frac{2(3+\sqrt{2})}{\sqrt{2}+1} < y,$ |
| VII. | $x = \sqrt{2}y - 10 + 6\sqrt{2} - y,$ | ha | $y \leq -\frac{2(3\sqrt{2}-5)}{-2+\sqrt{2}},$ |
| VIII. | $x = -\sqrt{2}y - 6 - 2\sqrt{2} - y,$ | ha | $-\frac{2(3+\sqrt{2})}{\sqrt{2}+2} < y.$ |

Így jutottunk el a 8 félegyenesest jelentő 3. hipotézishez. Ennek a nyolc félegyenesnek a grafikonja az alábbi ábrán látható, amely szintén a Maple felhasználásával készült.



8. ábra

A 7. ábra Maple-programmal megrajzolt képe

Az ábrán látható valamennyi félegyenes párhuzamos a Γ_1 és Γ_2 egyenesek szögfelezőivel, így rájuk (2) valóban teljesül. Közülük azonban csak az e egyenes megy át A -n. Az e -vel párhuzamos e' egyenes e -nek Γ_1 és Γ_2 metszéspontjára vonatkozó tükörképe, amelyre a távolságtartás miatt (2) szintén teljesül. Ez a két félegyenes viszont nem megy át A -n. A két félegyenesből álló f ponthalmaz Γ_1' és Γ_2' másik szögfelezőjére illeszkedik. Mivel a szögfelező a szögcsúcstól egyenlő távolságra van, f -re is teljesül (2). f' – hasonlóan e' -höz – az f tükörképe. Sem f , sem f' nem megy át az A ponton.

A 3. hipotézis részletes vizsgálata megmutatta, milyen szerepe is van a feladatban a szögfelezőknek. Ebben a vonatkozásban tehát ez nem tűvőnek minősíthető hanem olyan, amely ismereteinket tovább differenciálja. A megoldást tehát végül is a 2. hipotézis adja meg.

Az előzőekhez hasonló módon tárgyalható a

$$PT'_P + PT''_P = AT'_A + AT''_A = 2a$$

összefüggésnek eleget tevő ponthalmaz, az úgynevezett J-ellipszis is. A feladat részletes elemzése és kidolgozása a tanárok házi feladata volt. (A tanártovábbképzések végén ellenőriztük ennek a végrehajtását.) A fentiekén kívül a kísérletben részt vevő pedagógusokkal megvizsgáltattuk azt az esetet, amikor mindkét görbe kör, vagy az egyik görbe kör, a másik egyenes. Így eljutottunk a hiperbolához, az ellipszishez és a parabolához.

A fenti problémák olyan megoldásra váró feladatot jelentettek, amelyben a számítógép felhasználása kapcsán szerep jutott a problémamegoldási folyamat minden összetevőjének. A korábban megtárgyalt elmélet ismeretében tudatosan megpróbáltuk szétbontani a feladatokat összetevőire, és megvizsgáltuk, hogyan lehet ezek alkalmazásával tudatossá, tehát megtanulhatóvá tenni a tanulóknak a problémamegoldó gondolkodást. A kísérletben a problémamegoldó folyamathoz kapcsolódó kérdésekre válaszolva, tudatosan próbáltuk meg elemezni a tevékenységünket. Ahhoz hasonlóan jártunk el, ahogyan azt Pólya is tanácsolta. A kérdéseket azonban megpróbáltuk úgy formálni, hogy alkalmasak legyenek a számítógépes használatra.

A vizsgálatból arra következtettünk, nagyon fontos, hogy tudatosan tervezzük meg a feladatmegoldást. Ezt konkrét problémán keresztül kell, hogy elvégezzük úgy, hogy ne csak egyes példák megoldására alkalmas algoritmusokat mutassunk meg, hanem diákjainknak általános érvényű útmutatásokat adjunk.

A jelenlegi munkánk során azt tapasztaltuk, hogy nem lehet ugyan teljes mértékben megbízni a számítógépben, viszont egyes esetekben nagyon megkönnyítheti a munkánkat. Segítségével több oldalról is körbejárhatjuk, szemléletesebbé tehetjük az adott problémát.

A könnyű ábrázolás, a hosszadalmas munkát megspóroló egyenletmegoldás és az újszerű ellenőrzések sorozata izgalmassá, dinamikussá tette a kísérletet, megerősítette ezzel a motivációt.

A megjelölt célban szereplő divergens típusú problémamegoldás hasznos segédeszköze lehet például a CABRI geometriai program, amely sejtések kimondását, és ezek általánosítását is lehetővé teszi. A mi kísérletünkben ehhez a programhoz azért nem folyamodtunk, mert céljaink eléréséhez egy adott megoldásból akartunk kiindulni. A kísérlet résztvevői így alaposan megjegyezték, hogy

- még a szakkönyveknek sem érdemes feltétlenül hinni;
- még a számítógépi programokban sem érdemes maradéktalanul megbízni.

Az ellenőrzésre – ahogy azt Pólya tanítja – mindig szükség van. Ezt szem előtt kell tartanunk akkor, amikor az iskolában diákokat tanítunk. Úgy gondoljuk, hogy ez tekinthető a kísérlet legfontosabb pedagógiai céljának. Másrészt megállapítható volt, hogy a számítógép segítségével azok is hozzá tudtak kezdeni a matematikai problémához, akik önmaguktól képtelenek lettek volna elgondolásukat kivitelezni, vagy akik a célhoz vezető utat túlságosan fárasztónak ítélik. (A kísérletben számítógéppel percek alatt megkaptuk azt az eredményt, amihez otthon gép nélkül órák kellettek.)

A kísérlet során megbizonyosodtunk arról, hogy a problémamegoldó gondolkodás előzőekben felvázolt struktúrája alkalmas a számítógéppel támogatott matematikaoktatás megtervezésére. A szóban forgó probléma megoldásánál felhasználtuk a ténymegállapítás, a megoldási javaslat és a kritika fázisait. A gondolkodási műveletek mindegyikének szerepeltetését kérdéseken keresztül próbáltuk meg befolyásolni. (A tanárokkal közösen próbáltunk meg a problémamegoldási struktúra ismeretében kérdéseket feltenni, és ezekre válaszolni.) Tisztában vagyunk vele, hogy egy módszertani jellegű eljárást nem lehet úgy igazolni, mint egy matematikai tételt. A hibákkal történő ellenőrzés után azonban a problémamegoldó gondolkodás szerkezetére vonatkozó elgondolásunk itt, egy viszonylag bonyolultabb feladat számítógépes megoldása közben is megállta a helyét: a tanárok szívesen alkalmazták. Ezzel tevékenységüket bevallottan tudatosabbá tették.

Az utóbb leírt kísérlet tanulságainak összefoglalásaként megállapíthatjuk,

hogy a matematika tanításában lehet és kell is számítógépet használni. A jobb eredmény eléréséhez, azaz a tudatos problémamegoldáshoz viszont érdemes segítségül hívni a matematika-módszertani és pszichológiai eredményeket. Ezek és a számítógép összekapcsolásával korábban ismeretlen, új típusú problémák megoldására is alkalmas eszközhöz jutunk.

A magyarországi matematikaoktatás hagyományosan a Pólya-féle heurisztikus módszert követi. Tankönyvek (Hajdu, 2003) mutatják meg ennek az alkalmazását a diákoknak és egyetemi jegyzetek (Ambrus, 1995) elemzik ezt a tanár szakos hallgatóknak. Kézenfekvő tehát, hogy ehhez fordultunk akkor is, amikor a sikeres problémamegoldást akartuk továbbfejleszteni, de akkor is, ha ehelyett a problémamegoldási folyamat hibáit kívántuk megvizsgálni. A közölt eljárás olyan útmutatást adhat a magyar matematika tanároknak, amely elősegítheti a matematika hibás problémamegoldási folyamatának jobb megértését.

A matematikai oktatás eredményességének csökkenése megköveteli, hogy minden, az oktatással foglalkozó tanár és szakember saját területén az eddigieknél jobb, hatékonyabb módszereket keressen. Talán nem a hibáknak a tanulói gondolkodáson keresztül történő elemzése vagy Pólya elgondolásának a módosítása lesz az a jelentős lépés, amely megfordítja a két évtizede a magyarországi matematikaoktatásban elkezdődött kedvezőtlen folyamatokat. De talán ez a dolgozat is segít felhívni a figyelmet néhány olyan elhanyagolt területre, amelynek fejlesztése már hosszú idő óta súlyos adósságunk.

További feladatok

Az alábbiakban mindössze két olyan problémakört szeretnénk kiemelni, amelyek szervesen következnek a korábban leírtakból, és amelyek kidolgozása hasznos segítséget nyújthatna a matematika szakos tanároknak. Ezeknek a kimunkálása még a jövő feladata.

Úgy gondoljuk, hogy a későbbiekben célszerű lenne egy pedagóguscsoportnak témakörönként és osztálytípusonként – ez utóbbit a gyermekek ismeretanyaga és a tanítandó anyag minősége határozza meg – feltérképezni a leggyakrabban előforduló hibákat. Ha az így kapott anyagot a szaktanárok számára hozzáférhetővé tennénk, akkor ők az osztály és a leadni kívánt tananyag összetétele ismeretében előre fel tudnák hívni diákjaik figyelmét a legfontosabb buktatókra, akik ezáltal is közelebb kerülnének a tárgyalt fogalmak és összefüggések pontos megértéséhez, azaz a hatékonyabb és eredményesebb tanuláshoz. (Van erre példa más országok gyakorlatában: Ukrajnában a tanárok és a tanítás érdekében minden évben nyilvánosságra hozzák az érettségi leggyakoribb és legtanulságosabb hibáit.)

Láttuk, hogy a Pólya által kidolgozott 4 pontból álló rendszer az órai alkalmazás számára túlságosan általános. Az elmélet matematikában való felhasználását viszont nagyban megnövelik azok a segítő tanácsok, rávezető kérdések, amelyek a problémamegoldás szerkezeti részeire világítanak rá. Ez a felépítés azonban nem tekinthető véglegesnek és lezártnak. A számítógép tanításba való bevonása például olyan pedagógiai tevékenységeket vet fel, amelyekre Pólya annak idejében nem is gondolhatott. A problémamegoldó gondolkodás szerkezetének részletes leírása lehetővé teszi, hogy a tananyaghoz igazodva minden gondolkodási lépéshez konstruáljunk kérdéseket. Ezek még tovább növelhetik Pólya elméletének iskolai alkalmazhatóságát. Az is érdekes feladat lenne, hogy az egyes anyagrészekhez megpróbáljunk olyan kérdéssorozatokat összeállítani, amelyek az önálló problémamegoldást, és nem a receptszerű magoltatást helyeznék előtérbe.

ÖSSZEFOGLALÁS

A problémamegoldás folyamata hosszú ideje foglalkoztatja a pszichológusokat: elméletek sora tárgyalja még a matematikai tárgyú problémák megoldását is. Azonban legalább ilyen fontos kérdés a matematikai hibák vizsgálata, amellyel ez a tanulmány foglalkozik. Benne a hibák csoportosításának alapjait a gondolkodás folyamatának szerkezete adja. Ugyanis a helyes és a hibás lépések ugyanannak a gondolkodási folyamatnak a végeredményeit alkotják; osztályozásuk alapja is ugyanaz kell, hogy legyen.

Pólya György a feladatok megoldására, s ezzel a feladatmegoldáshoz szükséges *problémamegoldási műveletek* leírására négy lépést javasol. Ezek sorrendben a következők:

- P1.** a feladat megértése;
- P2.** tervekészítés;
- P3.** a terv végrehajtása;
- P4.** a megoldás vizsgálata.

Évtizedeken keresztül foglalkozott ugyanezzel a témával Lénárd Ferenc. Elgondolása – bizonyos módosításokkal – itt is alkalmazható. E szerint a gondolkodás mindig két, különböző szinten lejátszódó folyamat eredménye.

A *gondolkodási fázisok* a gondolkodási folyamat egészére vonatkozó lépéseket jelentenek. Az ezekből felépített makrostruktúra szerkezete véleményünk szerint a következő:

- L1.** Ténymegállapítás
- L2.** Megoldási javaslat
- L3.** Kritika

A kapott eredményhez úgy jutottunk, hogy a Lénárd elgondolásában szereplő, dőlt betűvel jelölt következő fázisokat elhagytuk.

(F1) A *probléma módosítása* mint gondolkodási fázis a megoldási javaslat – Pólyánál tervekészítés – egyfajta típusát jellemzi, ezért úgy tekintettük, hogy ez nem alkot önálló részt a gondolkodási fázisok között.

(F2) A *mellékes mozzanatok említése* is a tervekészítés hibáját jelzi. Ez a lépés az általunk vizsgált iskolai környezetben nem volt kimutatható.

(F3-F5) Az *érzelmi kategóriákat* (csodálkozás, tetszés; bosszankodás; kételkedés) nem vizsgáljuk, mivel ezt a dolgozatokból nem tudtuk meghatározni.

(F6) A *munka feladása* a megoldási javaslat hibájára, hiányosságára vezethető vissza. Mint hiba, az ott előforduló hibák következményének tekinthető, nem pedig önálló gondolkodási lépésnek.

Megállapítható, hogy bár a pszichológia problémamegoldási folyamatának struktúrája a matematikáénál nyilvánvalóan gazdagabb szerkezetű, de az oktatásban szerepet játszó elemei lényegében megegyeznek a Pólya-féle csoportosításban szereplőkével. (Nagyfokú hasonlóságuk miatt **L1.**-et és **P1.**-et, **L3.**-at és **P2.**-t valamint **L4.**-et és **P4.**-et azonosnak tekinthetjük. **P3.** az egyetlen olyan művelet, amelyik nem jelenik meg Lénárd rendszerében. Ez azzal magyarázható, hogy a terv végrehajtása nem gondolkodási, hanem sokkal inkább manipulatív cselekedetnek minősíthető.) Mivel a továbbiakban Lénárd elgondolásával foglalkozunk, így a fázisoknál Lénárd elnevezéseit használjuk. Ezeket a továbbiakban az 1., 2. és 3. számokkal jelöljük.

A gondolkodási lépéseket nem csak az egész gondolkodási folyamat, hanem az egyes lépések kis környezetei, az úgynevezett mikrostruktúra részei is befolyásolják. Úgy gondoljuk, hogy ilyen módon az alábbi *gondolkodási műveletekhez* jutunk.

- a) Analízis
- b) Szintézis
- c) Összefüggések felfogása
- d) Kiegészítés
- e) Rendezés
- f) Analógia.

Ezzel a felépítéssel úgy is sikerült a céljainkat megvalósítani, hogy Lénárd öt gondolkodási műveletét nem használtuk fel.

(M1) Az *elvonás* (absztrahálás) valamely egész egy tulajdonságát emeli ki. Mivel ez is az egésznek részeire bontásakor jelentkezik, így az elvonást az analízis specifikus formájának tekintjük.

(M2-M3) Az *összehasonlítás* és az *elvont adatok összehasonlítása* tárgyak, illetve fogalmak azonosságát vagy különbözőségét tárja fel. Ez a két utóbbi lépés az összefüggések felfogása speciális esetének tekinthető.

(M4-M5) Miután Lénárd a kiegészítés alapeseteként tárgyalja az *általánosítást* (generalizálást) és a *konkretizálást*, így felépítésünkben az kell, hogy következzen, ezeket mi sem vesszük a gondolkodási műveleteknél figyelembe.

Ebbe a felépítésbe sikerült valamennyi, általunk vizsgált, az iskolai matematika témájából választott hibázást besorolni. Ez azt jelenti, hogy minden hibának pontosan egy makro- és egy mikrostruktúrabeli elemet lehetett megfeleltetni. Az így kapott értékek szemléletesen mutatják meg azokat a helyeket, amelyeknél a tananyag szerkezetébe és feldolgozásuk módjába a tanulók érdekében be kell avatkozni. Az eredmények:

	a) analízis	b) szintézis	c) összefüggések felfogása	d) kiegészítés	e) rendezés	f) analógia
1. ténymegállapítás	31	27	24	12	31	11
2. megoldási javaslat	92	32	20	933	17	160
3. kritika	23	26	22	39	9	–

Pólya György elgondolása a problémamegoldó folyamathoz csatlakozó gondolkodás lépéseit nem bontja le kis, elemi szintekig. A rendszernek a matematikában való felhasználását viszont nagyban megnövelik azok a segítő tanácsok, rávezető kérdések, amelyek a problémamegoldás szerkezeti részeire világítanak rá. Ez a felépítés azonban nem tekinthető véglegesnek és lezártnak. Ha munkánkat Pólya György szellemiségének megfelelően kívánjuk folytatni, akkor a problémamegoldó gondolkodásra vonatkozó kérdéseinket érdemes az előzőekben

ismertetett táblázat figyelembevételével megterveznünk. (Vastag betűvel a Pólya-féle változatot jelöltük.)

- (1/a) Mi a feladat? **Mi van megadva?** Válaszd szét az adatokat és a megoldani kívánt problémát részekre.
- (1/b) Elegendők-e az adatok a probléma megoldásához?
⋮
- (2/c) **Nem talákoztál már a feladattal? Esetleg a mostanitól egy kissé eltérő formában?**
⋮
- (3/d) **Nem tudnád másképp is levezetni az eredményt?**
⋮
- (3/f) A részletek kis megváltoztatásával kapott rokon (speciális, általános) problémák eredményei igazolják a megoldást?

A pszichológia felhasználásával így egy olyan módszerhez juthatunk, amely a hibák elemzésén és csoportosításán túlmenően azok kijavítására is alkalmas. Egyben megbizonyosodtunk arról, hogy a problémamegoldó gondolkodás általunk felvázolt struktúrája ma is alkalmas a heurisztikus matematikaoktatás megtervezésére.

SUMMARY

The process of problem-solving has been long dealt with by psychologists: even the solving of mathematical problems is discussed in a long series of different theories. However, the examination of mistakes in mathematics is a question of the same importance, which is dealt with in his thesis. The basis of the classification of mistakes is given by the structure of the process of thinking. That is, the right and the wrong thinking steps give the conclusions of the same thinking process, so the basis of their classification must be the same.

According to Pólya, the *process of problem-solving in mathematics* consists of four steps. These are the following:

- P1.** understanding the problem;
- P2.** devising a plan;
- P3.** carrying out the plan;
- P4.** looking back.

Lénárd Ferenc was absorbed in the same topic for decades. His ideas, considering a few changes, can also be applied here. According to this theory, thinking is always the result of two processes taking place on a different level.

The *phases of thinking* mean steps relating to the whole of the thinking process. We think that the construction of the macro-structure including these steps is as follows:

- L1.** Fact-finding
- L2.** Suggestion for problem-solving
- L3.** Criticism

We have got our above mentioned results in such a way that we have lost the following phases of Lénárd which is printed in italics.

(P1) According to Polya, one of the most important ways of the devising a plan is looking for a related, a more general, a more special or an analogous problem, i. e. the *modification of the problem*. In this way we consider this Lénárd's phase a part of devising a plan or in another way a part of suggestion for problem-

solving.

(P2) *Mentioning accessory elements* shows mistakes of the suggestion for problem-solving. But this step was not typical in the examined school-environment.

(P3-P5) We can not measure *the affective categories* (wonder, delight; annoyance; scepticism), so these are uninteresting things for us.

(P6) If somebody do not finish his or her idea then we can observe *giving up the activity*. So it could trace back to a mistake of the problem-solving, that is in our opinion we can not consider this step separate thinking steps.

Because the similarities we can consider the same **L1.** as **P1.**, **L3.** as **P2.** and **L4.** as **P4.** **P3.** is the only operation which does not appear in the system of Lénárd. We can explain this thing that it could be qualified doing not thinking. Since Lénárd's system has got a richer structure, so we will use Lénárd's names. We denote these ones with the 1., 2. and 3. numbers further on.

The steps of thinking are influenced not only by the whole thinking process, but by the small surroundings of the individual steps, the parts of the so-called micro-structure as well.

We think that in this way we can get to the following *operations in thinking*:

- a) Analysis
- b) Synthesis
- c) Comprehension of relations
- d) Addition
- e) Putting things and relations in order
- f) Analogy

We were succeed in building our system though we did not use Lénárd's five thinking operations. Namely

(O1) *Abstracting* emphasizes a property of a whole thing, which is not considerable as an independent unit. We consider *abstracting* a special part of the *analysis*.

(O2-O3) *Comparing* and *comparing of abstract data* could be consider a kind of comprehension of relations. So we can leave these operations.

(O4-O5) Lénárd considered *generalizing* and *putting things and relations concretely* as cases of addition, so it is natural that we leave the last two operations out of consideration.

We've managed to place into this structure all the mistakes chosen from the topic of "school maths". This means that each mistake could be corresponded to one macro- and one microstructural element. The data created in this way clearly shows the points where the structure of the curriculum and its processing methods should be interfered with for the students' own good. The results:

	a) analysis	b) synthesis	c) comprehension of relations	d) addition	e) putting things and relations in order	f) analogy
1. fact-finding	31	27	24	12	31	11
2. suggestion for problem-solving	92	32	20	933	17	160
3. criticism	23	26	22	39	9	–

Because this system consists of only a few steps, Pólya divided on the process of problem-solving with a lot of questions and instructions. So this structure became very useful for every student and mathematics teacher. As he built his system not with scientific method, it may be further completed, if new mathematical problems should arise. If we want to continue our work in accordance with Pólya's idea, we have to plan our questions and instructions concerning problem-solving thinking with the help of our table. Let's give a few questions and instructions for example. (We denoted the Pólya's instructions with bold-face letters.)

- (1/a) What is the problem? **What are the data?** Divide the data and the problem into parts.
- (1/b) Are the data sufficient for problem-solving?

⋮

(2/c) **Could you solve a part of the problem?**

⋮

(3/d) **Can you derive the solution differently?**

⋮

(3/f) Do the related (special, general) results of problems verify your solution?

Using psychology in this research we can create a method which is suitable not only for the analysis and classification of mistakes but for their correction, too. And we are convinced of the fact that our structure of problem-solving should be suitable for planning of the heuristic mathematics teaching nowadays, too.

FELHASZNÁLT IRODALOM

- Ambrus András (2005). Bevezetés a matematikadidaktikába. ELTE Eötvös Kiadó, Budapest.
- Bartlett, F.C. (1951). The mind at work and play. Allen, London.
- Beke Manó (1900). Tipikus hibák a matematikai tanításban. Magyar Paedagógia, 520-530.
- Ben-Zeev, T. (1998). Amikor a hibás matematikai gondolkodás majdnem olyan, mint a helyes: a racionális hibák In: Stenberg R. J. – Ben-Zeev T. A matematikai gondolkodás természete. Vince Kiadó, Budapest.
- Binet, A. (1886). La psychologie du raisonnement. Paris.
- Bruner J. S. (1974). Új utak az oktatás elméletéhez. Gondolat, Budapest.
- Caroll, J. B. (1993). Human Cognitive Abilities: A survey of Factor-analytic Studies. Cambridge University Press, New York.
- Csapó Benő (1944,a). Az induktív gondolkodás fejlesztése és a vizsgák. Új Pedagógiai Szemle, 6, 36-47.
- Csapó Benő (1994,b). Az induktív gondolkodás fejlődése. Magyar Pedagógia, 1-2,53-80.
- Cser Andor (1952). Formalizmus a matematikatanításban. Köznevelés, 751-753.
- Czeglédy I.-Kovács A. (2004). Writing a Textbook – As we do it In Teaching mathematics and Computer Science 2004(1), 185-203. o., Debrecen.
- Czeglédy-Oroszné-Szalontai-Szilák (1994). Matematikai tantárgypedagógia. Calibra Kiadó, Budapest.
- Dienes Zoltán (1973). Építsük fel a matematikát. Gondolat, Budapest.
- Duncker, K. (1935). Zur psychologie des produktiven Denkens. Springer, Berlin.
- Duncker, K. (1945). A problémamegoldásról: gyakorlati problémák megoldása. In: Pléh Csaba (1989). Gondolkodáslélektan. Tankönyvkiadó, Budapest.
- Faragó László (1958). A logikus gondolkodásra való nevelés terén elkövetett didaktikai hibák a középiskolai matematikatanításban. In: Tanulmányok a neveléstudomány köréből. Budapest.
- Faragó László (1960). Szöveges feladatok megoldása egyenlettel. Tankönyvkiadó, Budapest.

- Gimes Györgyné (1994). Összefoglaló feladatgyűjtemény matematikából. Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest.
- Hajdu Sándor (2001-2005). Matematika 9-12. Műszaki Könyvkiadó, Budapest.
- Horváth György (1984). A tartalmas gondolkodás. Tankönyvkiadó, Budapest.
- Hudson, L. (1966). A kreativitás kérdése. In: Pléh Csaba (1989). Gondolkodáslélektan. Tankönyvkiadó, Budapest.
- Hylla, E. (1916). Analyse der Rechenfehler. Zeitschrift für pädagogische Psychologie.
- Johannot, L. (1947). Recherches sur mathématique de l'adolescent. Neuchâtel. Ierraisonnement
- Kovács András (1994). A függvénytranszformációk tanításáról. A matematika tanítása, 5,12-14.
- Kovács András (2003). Problem-solving in mathematics with the help of computers. In Teaching Mathematics and Computer Science 2003(2), 405-422. o., Debrecen.
- Kovács András (2006). Problems in mathematical problem-solving. In Rechlich H.-Zimmermann B. Problem Solving in Mathematics Education. Debrecen. (megjelenés alatt)
- Krygowska, A. Z. (1982). A matematikadidaktika jelenkori kutatásainak főbb irányzatai és problémái. In: Ambrus András (1989). Matematikadidaktikai tanulmányok. Tankönyvkiadó, Budapest.
- Krygowska, A. Z. A formalizmus és a verbalizmus veszélyéről az algebra tanításánál.
- Lakatos Imre (1981). Bizonyítások és cáfolatok. Gondolat, Budapest
- Lavrentyev-Ljusztjanyik (1953). Variációszámítás. Akadémiai Kiadó, Budapest.
- Lénárd Ferenc (1978). A problémamegoldó gondolkodás. Akadémiai Kiadó, Budapest.
- Majoros Mária (1992). Oktassunk vagy buktassunk? Calibra, Budapest.
- Mason, J. (1961). Thinking mathematically. Addison Wesley, Amsterdam.
- Mencsinszkaja, N.A. (1955). Psichologija obuchenija aritmetika. Moszkva.
- Meringer, R.-Mayer C. (1895). Versprechen und Verlesen: Eine Psychologisch-Linguistische Studie. John Benjamins Publishing Company, Amsterdam.
- Mialaret, G. (1954). Nouvelle pédagogie scientifique.

- Monavon, S. (1953). La psychopédagogie des mathématiques dans l'enseignement du second degré. Paris.
- Mosonyi Kálmán (1972). Gondolkodási hibák az általános iskolai matematikaórákon. Tankönyvkiadó, Budapest.
- Nahalka István (1994). Farkas Gyula és Varga Tibor: A természettudományos kutatás menete, módszerei és technikája c. könyv bírálata. Magyar Pedagógia, 357-362.
- Piaget, J. (1970). Válogatott tanulmányok. Gondolat, Budapest.
- Pólya György (1957). A gondolkodás iskolája. Gondolat, Budapest.
- Pólya György (1967). A problémamegoldás iskolája. Tankönyvkiadó, Budapest.
- Pólya György (1988). Indukció és analógia. A plauzibilis következtetés. Gondolat, Budapest.
- Ranschburg Pál (1917). Die Leseschwache und Rechenschwache der Schulkinder im Lichte des Experiments. Budapest.
- Rubinstein, Sz. L. (1940). Osnovi obszej psikhologii. Moszkva.
- Rubinstein, Sz.L (1960). Gondolkodáslélektani vizsgálatok. Gondolat, Budapest.
- Schoenfeld, A. (1985). Mathematical Problem Solving. Academic Press, New York.
- Selz, O. (1920). Komplextheorie und Konstellationstheorie. Zeitschrift für Psychologie, 83, 211-234.
- Skemp, R.R. (1975). A matematikatanulás pszichológiája. Gondolat, Budapest.
- Sternberg, R. J.-Ben-Zeev, T. (1998). A matematikai gondolkodás természete. Vince Kiadó, Budapest.
- Surányi Gábor (1959). Tipikus számtanhibák az általános iskola I-IV. osztályában. In: Tanulmányok a megértés lélektanából. Budapest.
- Szeliánszky Ferenc (1938). A hibakutatás neveléslélektani problémái. Közlemények a Szegedi Ferenc József Tudományegyetem Pedagógiai-Lélektani Intézetből, 26, Szeged.
- Szenes Adolf (1934). A tanulók tipikus számolási hibái és az elhárítás módja. Szeged.
- Szlavszkaja, K.A. (1957). K probleme «perenosa». Dokladi APN RSFSR, 2, 67-69.
- Vári Péter: Monitor '95 (Országos Közoktatási Intézet, Budapest, 1997.
- Vári Péter: PISA-vizsgálat 2000 (Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 2003.)

Vári-Bánfi-Felvégi-Krolopp-Rózsa-Szalay: A tanulók tudásának változása I. (Új Pedagógiai Szemle, 2000. június)

Vigotszkij, LSz. (1934). Mishlenije i rech. In: Vigotszkij, LSz. (1956). Izbrannije psikhologheskije issledovanija. Moszkva.

Weimer, H. (1929). Psychologie der Fehler. Klinkhardt, Leipzig.

Wertheimer, M. (1920). Über Schlussprozesse im produktiven Denken. Vereinig. Wiss. Verlag, Berlin.

MELLÉKLETEK

Az alábbiakban az elméleti munka mintegy más irányú gyakorlati megvalósulásaként az 5 éves munkával létrehozott középiskolai tankönyvsorozatunk azon elemeiből kívánunk ezen a helyen ízelítőt nyújtani, amelyek közvetlenül vagy áttételesen kapcsolhatók a disszertáció témájához.

A tanulói gondolkodás leírására az előzőekben alkalmazott modellünk nagyban támaszkodik a Pólya György által kidolgozott, és a gyakorlatban nagyon jól alkalmazható problémamegoldás rendszerére. Fontosnak tartjuk azonban, hogy az elméleti matematikuson és módszertani szakértőkön kívül az iskolai tanulók is tudatosan, ismert gondolkodási módszerek birtokában lássanak a matematikai feladatok megoldásához. Ezért – a magyarországi tankönyvek közül egyedülálló módon – Pólya módszerét többször is, de mindig konkrét megoldásokhoz kötődve ismertetjük a könyveink kidolgozott példáiban. (Véleményünk szerint ugyanis nem az egyes feladatokhoz tartozó konkrét megoldási receptek, hanem a gondolkodási folyamat egyes lépéseinek ismertetése, illetve begyakoroltatása szolgálhatja csak a tanulók, és velük együtt az oktatás érdekét.) Az alábbi részlet a 10. osztályos tankönyvből származik.

Feladatok a középpontos hasonlóságra

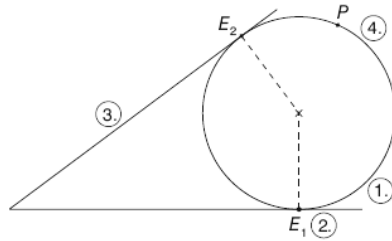
- 1.** Adott egy szög és a szögtartományban egy pont. Szerkesszünk a szög szárait érintő és az adott ponton átmenő kört.

1. lépés: A feladat megértése, értelmezése

Szerkesztéses jellegű feladatoknál a kitűzött probléma megértését a *helyes vázlat* mutatja. A jól elkészített vázlaton minden lényeges elemnek, így a megszerkesztendő alakzatnak is rajta kell lennie. Mivel ennek a szerkesztését ilyenkor még nem ismerjük, ezért a rajzolást sokszor a keresett síkidom felvételével kezdjük.

Most is célszerű először a kört felvenni ①, majd kiválasztani rajta két pontot, E_1 -et és E_2 -t

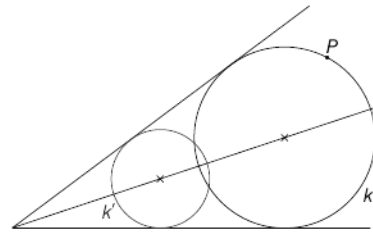
②, amelyeken keresztül érintőket húzunk ③. Ezek az érintők adják a szög szárait. Hátra van még a szögtartományban adott tetszőleges helyzetű P pontnak a körön való felvétele ④.



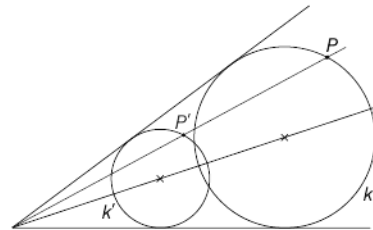
2. lépés: Összefüggések keresése, majd ezek ismeretében megoldási terv készítése

A megoldás során nem szabad megfélekednünk arról, hogy nekünk végül is nem a vázlatot kell megszerkeszteni, hanem az adott *problémát kell megoldani*. Tehát a szög ismeretében kell a kört megszerkeszteni, nem pedig fordítva.

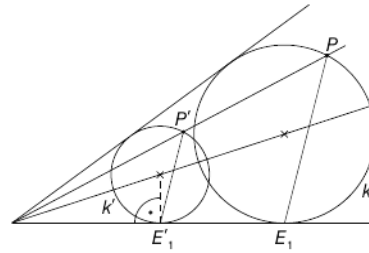
A szög szárait érintő körök középpontjai a szögfelezőn helyezkednek el. Ez a felismerés lesz majd a megoldás egyik kulcsa. Ugyan nem tudjuk, hogy a szögfelező melyik pontjában lesz a keresett kör középpontja, de egy tetszőleges, a szögszárakat érintő kört fel tudunk venni. Ez a k' segédkör és a megszerkesztendő k kör középpontosan hasonlók. (A hasonlóság középpontja a szög csúcsa.)



A középpontos hasonlóság felismerése után már nem nehéz rájönni, hogy P képét, a k' körön lévő P' pontot k' ismeretében meg tudjuk szerkeszteni. Össze kell kötni P -t a szög csúcsával, és ahol ez a félegyenes elmetszi k' kört, ott lesz a P' pont.



A középpontos hasonlóság tulajdonságai alapján már meg tudjuk határozni a megfelelő szög-száron az E_1 érintési pontnak megfelelő E'_1 pontot. (Az E'_1P' szakasz párhuzamos az E_1P szakasszal.)

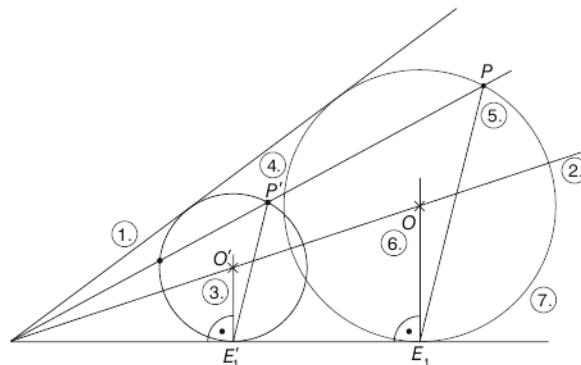


Most már eljutottunk odáig, hogy le tudjuk írni a szerkesztés menetét.

1. Az adatok (szögtartomány, benne a pont) felvétele.
2. A szögfelező meghúzása, és rajta egy O' pont kijelölése.
3. Az O' pontból a kör szarait érintő k' kör megrajzolása.
4. A szög csúcsából kiinduló, a P -n átmenő félegyenes megszerkesztése, és ennek a k' -vel alkotott P' metszéspontjának meghatározása.
5. Az E'_1P' szakasz kijelölése, majd az ennek megfelelő és a P -n átmenő középpontos kép megszerkesztése (E'_1 képe az E_1 pont lesz).
6. Az E_1 pontbeli merőleges és a szögfelező metszéspontjának, azaz az O pontnak a meghatározása.
7. Az O középpontú, OP sugarú kör megadása.

3. lépés: A terv végrehajtása

Ez jelen esetben a szerkesztés elvégzését jelenti.



4. lépés: A megoldás vizsgálata

Szerkesztéses feladatoknál a megoldás vizsgálatán általában a *diskussziót* értjük.

Észrevehetjük, hogy a szög csúcsából induló, a P -n áthaladó félegyenes a k' kört két pontban, a P' -n kívül a P'' pontban is metszi.

A tanulók a számukra ismeretlen feladat megoldásakor általában nem a hivatalosan kidolgozott útmutatók egyenesen a célhoz vezető eljárásai szerint tevékenykednek. Gondolkodásuk gyakran tévútra vezeti őket, ahonnan vissza kell fordulniuk. Máskor megfelelő megfontolások alapján több lehetőség közül kell kiválasztani a megfelelőnek látszót. Mi lehetőség szerint törekedtünk arra, hogy a tanulóknak szóló tankönyveket

maguknak a tanulóknak és ne a tanároknak a módszereivel fogalmazzuk meg. Ez a szándék figyelhető meg a 11. osztályos tankönyv alábbi kidolgozott példáin is.

12. Oldjuk meg a következő egyenletet. Alaphalmaz: \mathbb{R}

$$8 \cos x = \frac{\sqrt{3}}{\sin x} + \frac{1}{\cos x}$$

Az értelmezési tartomány $\sin x \neq 0$ és $\cos x \neq 0$ miatt $x \neq k \cdot \frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$.

Szorozzuk meg az egyenlet mindkét oldalát $\frac{\sin x \cos x}{2}$ -vel.

$$4 \sin x \cos x \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2} \cos x + \frac{1}{2} \sin x$$

$$2 \sin x \cos x \cdot 2 \cos x = \sin \frac{\pi}{3} \cos x + \cos \frac{\pi}{3} \sin x$$

$$\sin 2x \cdot 2 \cos x = \sin \left(\frac{\pi}{3} + x \right)$$

A bal oldalon a $2 \sin 2x \cos x$ kifejezés az addíciós összefüggések segítségével átalakítható.

$$\sin 3x + \sin x = \sin \left(\frac{\pi}{3} + x \right)$$

Most láthatóan zsákutcába kerültünk, nem tudunk továbbmenni. Észrevehetjük viszont, hogy ha a jobb oldalon nem végeztük volna el a műveleteket, akkor itt tovább tudnánk lépni. Ilyenkor vissza kell térnünk arra a helyre, ahonnan a megoldás rossz irányba fordult.

$$\sin 3x + \sin x = \frac{\sqrt{3}}{2} \cos x + \frac{1}{2} \sin x \quad | - \sin x$$

$$\sin 3x = \frac{\sqrt{3}}{2} \cos x - \frac{1}{2} \sin x$$

$$\sin 3x = \sin \frac{\pi}{3} \cos x - \cos \frac{\pi}{3} \sin x$$

$$\sin 3x = \sin \left(\frac{\pi}{3} - x \right)$$

Ez alapján

$$3x = \frac{\pi}{3} - x + l \cdot 2\pi, \text{ amiből } x = \frac{\pi}{12} + l \cdot \frac{\pi}{2}, \quad l \in \mathbb{Z} \text{ vagy}$$

$$3x = \pi - \left(\frac{\pi}{3} - x \right) + m \cdot 2\pi, \text{ amiből } x = \frac{\pi}{3} + m \cdot \pi, \quad m \in \mathbb{Z}$$

Behelyettesítéssel ellenőrizhető, hogy a – feltételnek eleget tevő – kapott gyökök kielégítik az egyenletet.

13. Oldjuk meg a következő egyenletet. Alaphalmaz: \mathbb{R}

$$\cos^2 x + \cos^2 2x + \cos^2 3x = 1$$

Mivel az egyenletben szereplő négyzetes tagokat nem tudjuk közvetlenül összevonni, ezért elsőként át kell őket alakítani. Ehhez a félszögekre vonatkozó $\cos^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \cos \alpha}{2}$ összefüggést fogjuk felhasználni. Az $\frac{\alpha}{2} = x$, illetve az $\frac{\alpha}{2} = 2x$ helyettesítés alkalmazásával:

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2} \quad \text{és} \quad \cos^2 2x = \frac{1 + \cos 4x}{2}.$$

$\cos^2 3x$ -et nem írjuk át, mivel $\cos 4x$ és $\cos 2x$ összege $\cos 3x$ -et fog eredményezni. Ezt a feladatot leginkább a sakkhoz lehetne hasonlítani, ahol az boldogul jobban, aki több lépést is képes előre látni.

Az átalakítások után alkalmazhatjuk a két szögfüggvény összegére fennálló összefüggést:

$$\begin{aligned} 1 + \frac{1}{2}(\cos 4x + \cos 2x) + \cos^2 3x &= 1 \\ \frac{1}{2} \cdot 2 \cos \frac{4x+2x}{2} \cos \frac{4x-2x}{2} + \cos^2 3x &= 0 \\ \cos 3x \cos x + \cos^2 3x &= 0 \\ \cos 3x(\cos 3x + \cos x) &= 0 \\ \cos 3x \cdot 2 \cos 2x \cos x &= 0 \end{aligned}$$

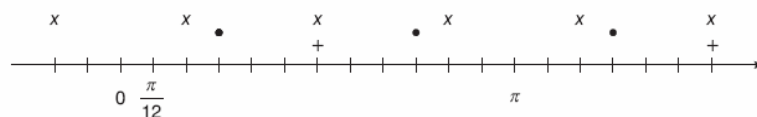
Ebből

$$\cos 3x = 0, \quad \text{amiből } 3x = \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi, \quad \text{azaz } x_1 = \frac{\pi}{6} + k \cdot \frac{\pi}{3}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\cos 2x = 0, \quad \text{amiből } 2x = \frac{\pi}{2} + l \cdot \pi, \quad \text{azaz } x_2 = \frac{\pi}{4} + l \cdot \frac{\pi}{2}, \quad l \in \mathbb{Z}$$

$$\cos x = 0, \quad \text{amiből } x_3 = \frac{\pi}{2} + m \cdot \pi, \quad m \in \mathbb{Z}.$$

A gyökök számegyenesen való ábrázolásából látható, hogy a megoldást az x_1 és x_2 alakú gyökök adják.



A hibák felmérésére vonatkozó, több éven keresztül tartó felmérés megmutatta, mennyire oda kell a hibázásokra figyelni az oktatásban. Ezért nem csak a tökéletes megoldásmeneteket mutatjuk be, hanem ezekkel együtt több helyen is felhívjuk a diákok figyelmét a jellegzetes, többször előforduló tévesztési lehetőségekre. (Úgy gondoljuk

ugyanis, hogy a gyerekek jelentős részében később is megmarad az, ha a megfelelő magyarázó szöveggel már előzetesen kitérünk a lehetséges hibákra.)

Ügyeljünk a műveletek sorrendjére.

Például: a és b összegének c -szerese nem azonos a -nak és b c -szeresének összegével. $(a + b) \cdot c \neq a + b \cdot c$

Vagy

$$a : b \cdot c \neq a : (b \cdot c); \quad a : b \cdot c = \frac{a}{b} \cdot c = \frac{a \cdot c}{b}; \quad a : (b \cdot c) = \frac{a}{b \cdot c}.$$

Gyakran előfordul a következő hiba:

Könnyen mondjuk, hogy $\frac{x+3}{x+3} = 1$, pedig ez nem igaz.

Ez is egy algebrai törtekfejezés, amelyben $x+3 \neq 0$, azaz $x \neq -3$.

A helyes válasz $\frac{x+3}{x+3} = 1$, ha $x \neq -3$.

Ha $x = -3$, akkor a kifejezést nem értelmezzük.

Hibázni természetesen nem csak feladatmegoldásnál lehet. Nem jó, ha diákjaink értelem nélkül tanulják meg például a definíciókat. Ezért itt két ízben is rámutatunk a tipikus rontási területekre. (Elsőként a középiskola elején, a tudatos definiálási igény felmerülésekor, végül egészen más cézzal a középiskolát lezáró ismétlés elején járunk el így. Az előbbire adunk példát a következőkben.)

A definiálás egy új fogalomnak ismert fogalmakkal való meghatározását (körülírását) jelenti. Maga a definíció szó latin eredetű, és *olyan pontos meghatározást jelent, amely valamely fogalom vagy tárgy lényeges jegyeit tárja fel.* A Halmazok, logika című fejezetben, a 11. oldalon foglalkoztunk azzal, hogy formailag mikor helyes egy definíció. Most tartalmi szempontból vizsgáljuk meg ezt a kérdést.

Különítsük el a trapéz általános fogalmától az ábrán látható speciális, egyelőre névtelen négyszög, a ??? fogalmát úgy, hogy a következő tulajdonságokkal rendelkeznek:

tengelyesen szimmetrikus,
a két szára egyenlő hosszú,
körbe írható,

ugyanazon az alapon fekvő két-két szögének nagysága megegyezik,

ugyanazon a száron fekvő két-két szöge 180° -ra egészíti ki egymást,

van csúcson át nem menő szimmetriatengelye.

Általában arra törekszünk, hogy a definíció ne tartalmazzon felesleges információkat, azaz ne soroljunk fel olyan tulajdonságokat, amelyek egymásból levezethetők.

Nem jó az a definíció sem, amely nem írja megfelelően körül a meghatározni kívánt fogalmat. Elemezzünk néhány definiálási kísérletet (rámutatva néhány tipikus hibára is).

① ???-nak nevezzük a trapézt, ha szarai egyenlő hosszúak.

② ???-nak nevezzük a trapézt, ha tengelyesen szimmetrikus.

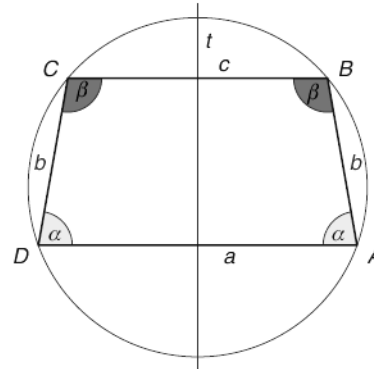
A fenti „definíciók”, még ha formailag jók is, kevesebb jegyet tartalmaznak a kelleténél, ezért túl tágak. Nem vezethető le belőlük minden lényeges tulajdonság, amellyel a definiálni kívánt fogalom rendelkezik. Az ① „definícióval” olyan bővebb halmazt értelmezzünk, amelybe a paralelogrammák is, a ②-vel olyat, amelybe a rombuszok is beletartoznak.

③ ???-nak nevezzük a trapézt, ha szarainak hossza egyenlő, alapjainak hossza különböző.

Az sem jó, ha több jegyet veszünk bele a meghatározásba, mint ami a meghatározni kívánt fogalmat megilleti. Az így kapott „definíció” túl szűk. Bár levezethető belőle minden lényeges tulajdonság, amellyel a definiálni kívánt fogalom rendelkezik, olyan szűkebb halmazt értelmez, amelybe nem tartoznak bele a téglalapok.

④ ???-nak nevezzük a trapézt, ha körbe írható.

A definíció pontosan a vizsgált trapéz fogalmát határolja el az általánosabb, illetve a speciálisabb fogalmaktól. Levezethető belőle minden lényeges tulajdonság, amellyel a definiálni kívánt fogalom rendelkezik, és nem tartalmaz olyan jegyet, amely a definiálni kívánt fogalmat leszűkítené. A definíció alapján a „húrtrapéz” elnevezést írhatjuk a ??? helyére.



A munka folyamatos ellenőrzésének a magyarországi oktatásban csak kevés jelentőséget tulajdonítanak. Csupán a legkézenfekvőbb helyeken és ritkán használjuk ezt az eszközt az iskolában. Mi megpróbáljuk rászoktatni a tanulókat arra, hogy ne higgyenek el semmit ellenőrzés nélkül. Erre a folyamatos ellenőrzésre láthatunk példát a 10. osztályos tankönyv függvényekkel foglalkozó fejezetében. (Itt egyébként az ellenőrzés mellett az önálló megoldáskeresésre és a lehetséges általánosításra is kitérünk. A tankönyvi terjedelmi korlátok mellett ugyanis azt tartottuk jó megoldásnak, ha egy probléma bemutatásával többféle oktatási cél elérését is lehetővé tesszük.)

1. Ábrázoljuk függvénytranszformációk segítségével az

$$f: (-\infty; 1] \rightarrow \mathbb{R}; \quad x \mapsto -2\sqrt{2-2x} - 2$$

függvényt.

Változótranszformációk alkalmazásával a négyzetgyök függvényt $\sqrt{2-2x}$ alakra hozhatjuk. Két lehetőségünk van ennek az eredménynek az elérésére. Az egyiket a

$$\sqrt{x} \longrightarrow \sqrt{2x} \longrightarrow \sqrt{-2x} \longrightarrow \sqrt{-2x+2},$$

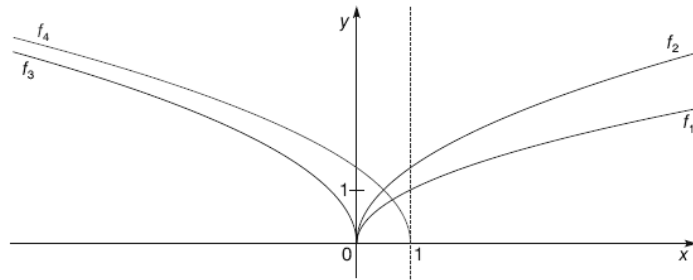
míg a másikat a

$$\sqrt{x} \longrightarrow \sqrt{2x} \longrightarrow \sqrt{-2x} \longrightarrow \sqrt{-2(x-1)}$$

átalakítások szolgáltatják. (Az első megoldás azt sejteti, hogy az utolsó lépésben az x tengely mentén -2 -vel, míg a másik szerint $+1$ -gyel kell az eltolást elvégezni.) Vizsgáljuk meg ezeket a lehetőségeket.

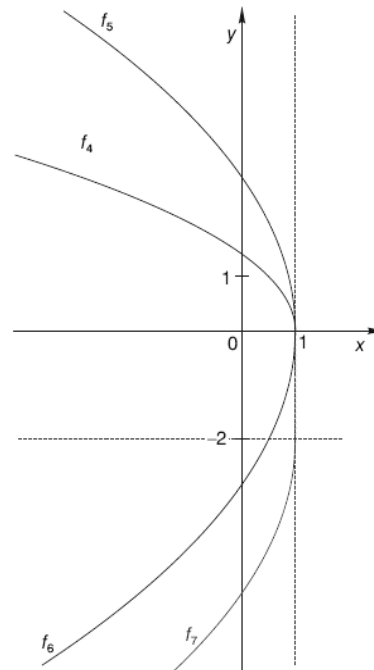
1. Induljunk ki az $f_1: \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \rightarrow \mathbb{R}; \quad x \mapsto \sqrt{x}$ alapfüggvényből.
2. Az $f_2: \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \rightarrow \mathbb{R}; \quad x \mapsto \sqrt{2x}$ függvényt az alapfüggvény x tengely mentén történő 2-szeres összenyomásával (azaz y tengelyre vett merőleges affinitással) kapjuk. Tehát ha f_1 az 1 értéket az 1 helyen vette föl, akkor f_2 ugyanezt az értéket az $\frac{1}{2}$ helyen, feleakkora abszcisszánál éri el.

3. Az $f_3: \mathbb{R} \setminus \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto \sqrt{-2x}$ függvény értelmezési tartománya a nempozitív számok halmaza. Az 1 értéket a függvény az $1 = \sqrt{-2x}$ egyenlet megoldásából látható módon $x = -\frac{1}{2}$ -nél veszi föl. Így az előjel miatti tükrözést itt az y tengelyre kell elvégezni.
4. Az $f_4: (-\infty; 1] \rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto \sqrt{-2x+2}$ függvénynek a zérushelye $2 - 2x = 0$ -ból adódóan $x = 1$. Az f_3 függvény x tengely menti -2 -vel való eltolása tehát nem szolgáltat jó eredményt. A $-2x + 2 = -2(x - 1)$ kiemelésből látható, hogy f_3 -at az x tengely mentén $+1$ -gyel kell eltolni. A helyes módszert tehát az x változó együtt-hatójának a kiemelése szolgáltatja.



Az **értéktranszformációk** elvégzésének sorrendje a következő:

5. $f_5: (-\infty; 1] \rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto 2\sqrt{-2x+2}$
(Ezt az x tengelyre alkalmazott olyan merőleges affinitás valósítja meg, amelynek során az alapul vett függvény (f_4) értékei az értelmezési tartomány mindegyik helyén a kétszeresére nőnek.)
6. $f_6: (-\infty; 1] \rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto -2\sqrt{-2x+2}$
(Ez az x tengelyre való tükrözést jelent.)
7. $f_7: (-\infty; 1] \rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto -2\sqrt{-2x+2} - 2$
(A transzformáció az y tengely mentén -2 -vel történő eltolás.)



A műveletvégzések helyessége egyszerű behelyettesítésekkel belátható. Így például látjuk, hogy az f_4 függvény szélsőértéke, a 0, az $x = 1$ helyen van. Ezt az utolsó lépés az $(1; -2)$ koordinátájú pontba tolja.

Nézzük meg, hogy a végeredményül kapott függvény az 1 helyen valóban a -2 értéket veszi-e fel. A $-2\sqrt{2-2\cdot 1-2} = -2\sqrt{0-2} = -2$ átalakítás az eljárásunk egyfajta ellenőrzését adja. Általában, ha egy $f: I(\subseteq \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto f(x)$ függvényből kiindulva akarunk eljutni a $g: I'(\subseteq \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto -a \cdot f[-b \cdot (x+c)] + d$ ($a, b \in \mathbb{R}^+; c, d \in \mathbb{R}$) függvényhez, akkor az alábbi sorrendben elvégzett átalakításokkal mindig jó eredményt kapunk.

1. $f: I(\subseteq \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto f(x)$
2. $f_1: I_1(\subseteq \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto f(b \cdot x)$
3. $f_2: I_2(\subseteq \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto f(-b \cdot x)$
4. $f_3: I'(\subseteq \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto f[-b \cdot (x+c)]$
5. $f_4: I'(\subseteq \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto a \cdot f[-b \cdot (x+c)]$
6. $f_5: I'(\subseteq \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto -a \cdot f[-b \cdot (x+c)]$
7. $f_7: I'(\subseteq \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto -a \cdot f[-b \cdot (x+c)] + d$

A változótranszformációk elvégzésekor megváltozhat az értelmezési tartomány. Ezért I , I_1 , I_2 és I' eltérhetnek egymástól. (Az értékkészletek halmazai is különbözhetnek egymástól, mivel azonban jelöléseinkben nem ezt, hanem a képhalmazt tüntetjük fel, itt nem szükséges változtatnunk.)

A hibázások megelőzésének fontos módja a tanulói megértés lehető legalaposabb biztosítása. A könyvek kidolgozása során gyakran támaszkodtunk a dolgozat elméleti részében említett Bruner reprezentációs rendszerére is. A tanulás egyes – materiális, ikonikus, szimbolikus – síkjainak egymás utáni szerepeltetése, az alapfeladat többszöri transzformálása figyelhető meg az x^2 függvény fogalmának bevezetésénél. (Általánosságban is elmondható, hogy a tankönyvek és a gyerekek érdekeit egyaránt szolgálja, ha az igazolt és bevált didaktikai elvek legalább az alkalmazás szintjén beépülnek a feldolgozás folyamatába.)

Az x^2 függvény és a négyzetgyökfüggvény

1. Határozzuk meg az $1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1)$ összeget.

1. megoldás (a kis Gauss módszere)

Az első n db páratlan szám összegét kell meghatároznunk.

Vegyük észre, hogy a sorozat tagjainak eredeti és fordított sorrendben történő leírásánál az egymásnak megfelelő (egymás alatti) tagok összege mindig ugyanannyi.

$$\begin{array}{cccccccc} 1 & + & 3 & + & 5 & + & \dots & + & (2n - 1) \\ (2n - 1) & + & (2n - 3) & + & (2n - 5) & + & \dots & + & 1 \\ \hline 2n & + & 2n & + & 2n & + & \dots & + & 2n \end{array}$$

A tagok száma n , tehát az összeg: $(2n) \cdot n = 2n^2$

Mivel az összeg tagjait kétszer vettük figyelembe, így

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2.$$

Próbáljuk ki az eredményt néhány n -re.

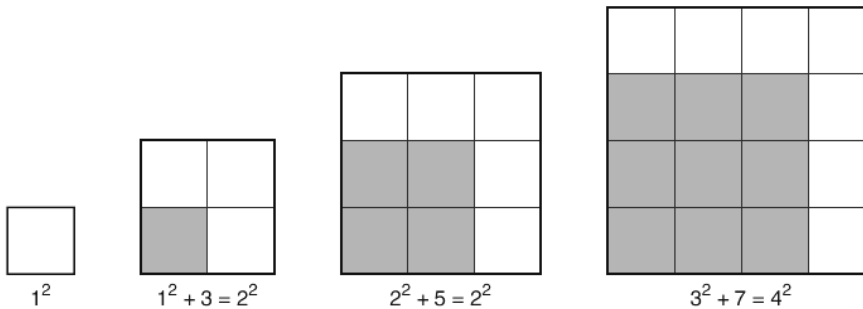
$$1 = 1^2 \qquad 1 + 3 = 1^2 + 3 = 4 = 2^2 \qquad 1 + 3 + 5 = 2^2 + 5 = 9 = 3^2$$

$$1 + 3 + 5 + 7 = 3^2 + 7 = 16 = 4^2$$

Ez a próba egy újabb ötletet adhat a megoldáshoz.

2. megoldás (geometriai módszerrel)

A következő ábrák szemléletesen mutatják az előző próbák geometriai megfelelőit. A számok itt területeket jelentenek.



Észrevehetjük, hogy a képzési szabály szerint mindig egy négyzetszámhoz (a négyzet területéhez) adjuk hozzá a megfelelő páratlan számot (területet), és így egy újabb négyzet területéhez jutunk.

Részletezve:

$n = 1$ -re az 1 oldalú négyzethez jutottunk, amelynek a területe $1^2 = 1$.

$n = 2$ -re, az első 2 páratlan szám összegére az előzőnél $2 \cdot 2 - 1 = 3$ -mal többet, a 2 oldalú négyzet területét kapjuk.

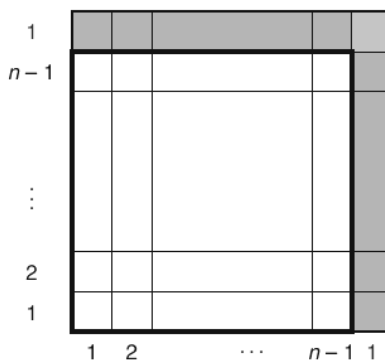
$n = 3$ -ra, az első 3 páratlan szám összegére az előzőnél $2 \cdot 3 - 1 = 5$ -tel többet, a 3 oldalú négyzet területét kapjuk.

Végül az első n páratlan szám összegére az előzőnél $2 \cdot n - 1$ -gyel többet, az n oldalú négyzet területét kapjuk.

Beláttuk a következőt:

$$\begin{aligned} 1 + 3 + 5 + \dots + 2n - 1 &= \\ &= (1^2 + 3) + 5 + \dots + 2n - 1 = \\ &= (2^2 + 5) + \dots + 2n - 1 = \dots = \\ &= (n - 1)^2 + 2n - 1 = n^2 \end{aligned}$$

Ez az átalakítás egy újabb megoldási mód ötletét juttathatja az eszünkbe.



3. megoldás (függvényvizsgálattal)

Négyzetszámok nem csak négyzetek területeinél fordulhatnak elő. Tekintsük például az

$$f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto x^2$$

függvényt, amely a természetes számokhoz a négyzeteket rendeli. Úgy tűnik, hogy a szomszédos függvényértékek különbsége valóban az az egymás utáni páratlan számokat tartalmazó sorozat, amely a példa szövegében is előfordul. Ez nem csupán az ábrázolt néhány számra igaz véletlen összefüggés, hanem általánosan is igazolható tény. Ugyanis

$$n^2 - (n - 1)^2 = n^2 - (n^2 - 2n + 1) = 2n - 1.$$

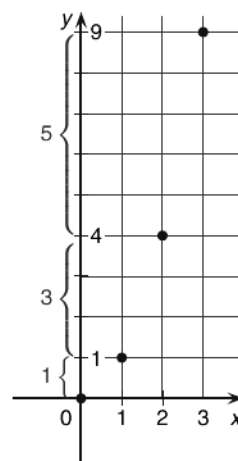
Ez alapján:

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = 1^2 - 0^2 + 2^2 - 1^2 + 3^2 - 2^2 + \dots + n^2 - (n - 1)^2.$$

Vegyük észre, hogy a jobb oldal majdnem minden tagja egyszer pozitív, majd később negatív előjellel szerepel: összegük 0. Van azonban egy tag, amelynek nincs pozitív és egy, amelynek nincs negatív megfelelője. Ezek maradnak csak meg a sorozatból. Így

$$1 + 3 + 5 + \dots + 2n - 1 = n^2 - 0^2 = n^2.$$

Látható, hogy az utolsó előtti egyenlőség több tagja – akár csak egy teleszkóp – két tagra húzódott össze. (Ezért az ilyen típusú összegeket teleszkópos összegeknek is nevezzük.)



Modern iskolai oktatás manapság nem képzelhető el a számítógép órai használata nélkül. Érdekes, hogy ezt a tényt a tankönyvírók túlnyomó többsége nem ismeri fel annak ellenére, hogy manapság minden magára valamit is adó iskola rendelkezik megfelelő

számítógépparkkal. Az itt szereplő példa megmutatja, hogyan kezdjenek számítógépes támogatással a nyelvi előkészítő osztályokba járó tanulók azokhoz a problémákhoz, amelyek matematikai ismereteik alapján csak nagyon nehezen vagy csak a legjobbaknak lehetnének megoldhatók. (A megfelelő motiváció elérését a könyvekben több helyen is gyakorlati problémák megfogalmazása biztosítja. Ezek megoldásához többször is felhasználtuk a természetszerűleg adódó koncentrációs lehetőségeket.)

9. Jóska a kútba eső kavics alulról visszaverődő hangját az ejtéstől számítva 2 s múlva hallja meg. Milyen mély a kút?

A 2 s időtartam két részből tevődik össze.

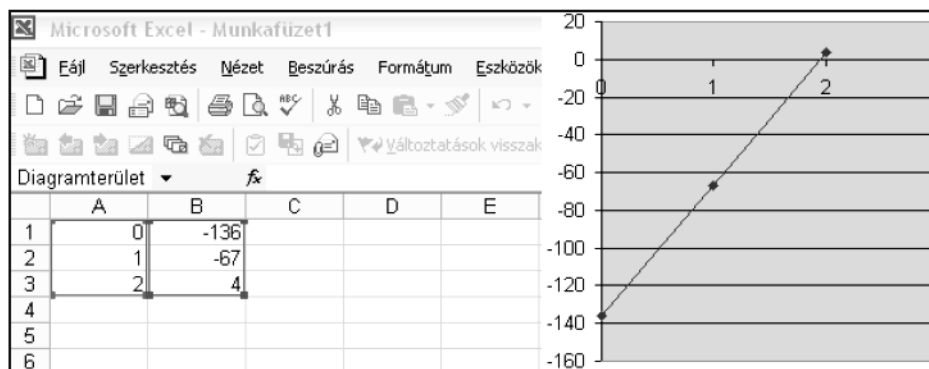
- ① A kútba ejtett kavics a kút aljára ér. Ez a mozgás az $s = \frac{g}{2} t^2$ képlettel írható le.
- ② A hang a kút aljáról feljut a felszínre. A hang hozzávetőleg (a kísérlet körülményei között) $v = 340 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ sebességgel egyenletesen mozog, így ugyanarra az s útra a példa szövege szerint $s = v \cdot (2 - t)$ összefüggés írható fel.

Tegyük az egymással megegyező útértékeket egyenlővé:

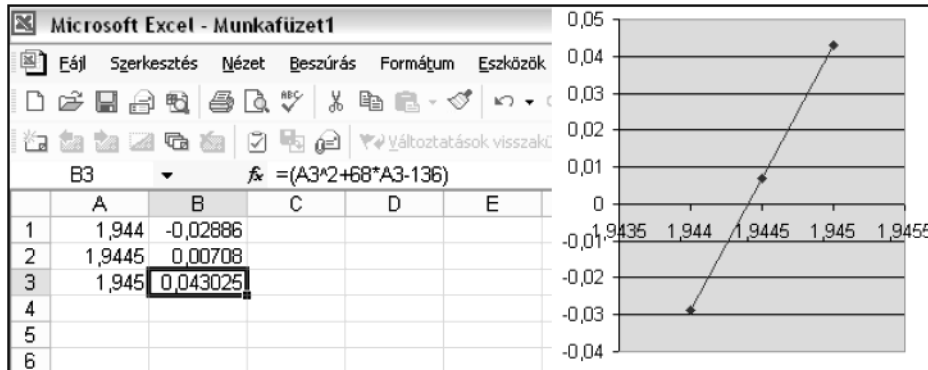
$$5t^2 = 340(2 - t) \quad / : 5$$

$$t^2 + 68t - 136 = 0$$

Ábrázoljuk az előző példában leírt módszerrel a szóbjövő $[0; 2]$ intervallumon a függvény grafikonját.



Látható, hogy a zérushely 1,9 környékére esik. Ha az A1–A3 cellákba 1,9-hez közeli értékeket írunk, akkor a számítógép mellette már az új függvényértékeket tünteti fel, és a grafikont is ezekhez változtatja.



A számítógép segítségével gyorsan megkapjuk, hogy $t \approx 1,944$ s és ezzel $s \approx 18,9$ m.