Investigations into non-classical logic
(Axiomatizability of spatio-temporal theories and complexity of interval-valued computations)

Nem-klasszikus logikai vizsgálódások
(Spatio-temporális elméletek axiomatizálhatósága és általánosított intervallum-számítások bonyolultsága)

Ph. D. thesis
Doktori (Ph. D.) értekezés tézisei

Vályi Sándor

Debreceni Egyetem
Természettudományi Doktori Tanács
Matematikai és Számítástudományok Doktori Iskola
Tudáskezelés elmélete és alkalmazásai program
Témavezető: dr. Mihálydeák Tamás
Debrecen, 2008

Ezeken az oldalakon összefoglalom a kutatásaimat a következő két, egyaránt élénken kutatott nem-klasszikus logikai területen: spatio-temporális és általánosított intervallum-értékű logika. Mindkét esetben a munkám hajtóereje az volt, hogy a nem-digitális, ún. analóg számítások tudományához járuljak hozzá.

1. Temporális és spatio-temporális logikai eredményeim és irodalmi hátterük

1.1. Temporális logika

A temporális logikát széleskörben használják a számítási eszközök specifikálásának és verifikálásának elméletében, ez a logika eszközöket ad a kezünkbe számítási eszközök dinamikus tulajdonságainak megfogalmazásához és bizonyításához, mind hardver, mind szoftver szinten. A temporális logika nyelve arra is alkalmas, hogy benne közvetlen specifikációkat írjunk le és egy automatikus eljárás segítségével konstruáljunk egy megfelelő számítási eszközt. Az elsőrendű temporális logika jelentősen nagyobb kifejező erővel bír, mint a propozicionális logikára épülő. Ennek az ára azonban gyakran a nem-axiomatizálhatóság. (Most és később, egy elméletet *axiomatizálhatónak* mondunk, ha rekurzívan felsorolható.)

Az olyan klasszikus időfolyamok feletti elsőrendű temporális elméletek, mint $(\mathbb{N},<)$, $(\mathbb{Z},<)$, $(\mathbb{R},<)$, általában nem axiomatizálhatók. Ez közismert tény, amelyet elsőként D. Scott figyelt meg. M. Reynolds [R96] a $(\mathbb{Q},<)$ időfolyam feletti elsőrendű temporális logikára adott axiomatizációt, az $\{Until, Since\}$ temporális operátorkészlettel. A bizonyítás eléggé terjedelmes és összetett. A 11. tételben egy egyszerű érvelést mutatunk be, amely ugyanezen időfolyam felett tetszőleges operátorkészlettel axiomatizálhatóságot biztosít. Az $Until$ és a $Since$ operátorok nem adnak funkcionálisan teljes operátorkészletet, így az eredményünk Reynolds eredményének kis erősítése, bár azon az áron, hogy explicit axiómarendszert nem ad, amiben szokásos axiómák és levezetési szabályok szerepelnének. Az axiomatizálhatóság egyszerű oka esetünkben az időfolyam elsőrendű elméletének rekurzív felsorolhatósága és ω-kategoricitása. Ez a megállapítás a dolgozatunk első – szerény – hozzájárulása a lineáris idejű temporális logika fejlődéséhez. Ez a rész a [V07b] papír részét képezi és a [V00] konferencián mutattam be.

Ami ennél talán jelentősebb, az az, hogy a nemlineáris, spatio-temporális elméletek nemaxiomatizálhatósági eredményeinek bizonyítási módszerét alkalmazva, ki tudjuk mutatni (13. tétel), hogy a valós időfolyam feletti elsőrendű temporális logika már egy nagyon kicsi szignatúrával sem axiomatizálható, nevezetesen, egy olyannal, amely csak egyetlen monadikus predikátumjelet tartalmaz, de egyenlőségjelet nem. Az irodalomban nem ismert ennek az eredménynek a bizonyítása. Az ismert nem-axiomatizálhatósági eredmények 3-argumenttumú szignatúrát alkalmaznak vagy módszerük nem alkalmazható az $(\mathbb{R}, <)$ időfolyam esetében. ([GHR94], [HWZ00], [Me92]).

1.2. Spatio-temporális logika

Mit kínál a temporális logika a mobil elosztott rendszerek tervezőinek? Az időbeli dinamikán kívül, ezek térbeli dinamikát is mutatnak. Hogy ezzel meg lehessen birkózni, a temporális logika egy variánsát fejlesztették ki, amelyet szokás spatio-temporális logikának nevezni. Az utolsó tíz évben a megfelelő ismeretreprezentációs rendszerek iránti igény az ezirányú kutatások nagy fejlődését generálta. Az egyik irányzat a spaciális nyelvet kombinálja a temporális nyelvvel olyan módon, hogy külön tér- és külön idői modalitásokat vezet be. Ez az ötlet a többdimenziós modális logika elméletében gyökerezik. Előzetesen megjegyezzük, hogy a disszertációban elnyert nem-axiomatizálhatósági eredmények $(\mathbb{Q}^n, \blacktriangleleft)$ $(n > 2)$ és $(\mathbb{R}^n, \blacktriangleleft)$ $(n \geqslant 2)$ felett nem következményei a többdimenziós modális logikák tulajdonságainak $(\mathbb{R}, <)$ vagy $(\mathbb{Q}, <)$ felett.

Úgyszintén régi hagyomány a térrel és idővel együtt foglalkozni, nevezetesen, a téridőt véve, annak téridő-geometriai relációit használni téridőbeli folyamatok dinamikájának kifejezésére. Azt eltételezve, hogy a folyamatok nem rendelkeznek szinkronizált idővel, oda jutunk, hogy a Minkowski téridő hiperbolikus geometriáját vesszük vizsgálatunk eszközéül, mint F. Mattern munkáiban. ([Ma92], [CM96]). Ő kezdeményezte a téridő okokozat szerinti összeköthetőségi reláció bevonását az elosztott számítások specifikációjának és verifikációjának vizsgálatába. A disszertációban öt ilyen típusú relációt fogunk megemlíteni. $(x \blacktriangleleft y)$ jelöli a tiszta anyagi ok-okozati összeköthetőséget (anyagi=fénysebesség alatti), $(x \lhd y)$ jelöli az optikai összeköthetőséget, $(x \ll y)$ jelöli az előző kettő diszjunkcióját, az ok-okozati összeköthetőséget. $(x =\!\ll y)$ jelöli $(x \ll y \vee x = y)$-t és végül $(x =\!\blacktriangleleft y)$ $x \blacktriangleleft y \vee x = y$-t. A $\blacktriangleleft$ pontos definíciója a disszertációban megtalálható.

Az $\ll$ reláció elsőrendű elméletét már 1914-ben, röviddel Einstein úttörő munkáinak megjelenése után axiomatizálta A. Robb [R14] és később hasonló eredményeket közölt többek között B. Mundy és James P. Ax

([M86a], [M86b], [A78]). R. Goldblatt az $\ll$ reláció elsőrendű elméletét fejtette ki [G87] könyvében és [G89] cikkében.

Andréka Hajnal, Németi István és szerzőtársainak hatalmas jelentőségű és terjedelmű munkája a relativitáselmélet elsőrendű logikájáról ezen munka megkezdésének elsődleges motivációját jelenti. [AMN04]

Mivel a valós időfolyam feletti elsőrendű temporális logikai elméletek jellemzően nem axiomatizálhatók, nem látszik sokkal nehezebbnek azt sem cáfolni, hogy a $(\mathbb{R}^n, \blacktriangleleft)$ feletti elsőrendű temporális logikai elméletek axiomatizálhatók. Azonban még ez sem triviális következménye az elsőnek, különösen nem arra a monadikus elsőrendű szignatúrára, amelyre mi bizonyítottuk a 9. tételben.

Levonhatjuk a tanulságot, hogy a valós téridő felett nemigen van remény axiomatizálható spatio-temporális logikát találni. Csak az elsőrendű temporális logika egy szintaktikai megszorítása, az ún. monodikus fragmentum eldönthető a valósak felett ([HWZ00]). J. van Benthem hívta fel a figyelmet a [B83] monográfiában a $(\mathbb{Q}^n, \blacktriangleleft)$ $(n > 1)$ időfolyamra. Legalábbis $n = 2$-re bebizonyította, hogy ennek elsőrendű elmélete ω-kategorikus, végesen axiomatizálható és így teljes és eldönthető. Továbbá, hogy elemi része a $(\mathbb{R}^2, \blacktriangleleft)$ struktúrának. Ha $n > 2$, akkor a $(\mathbb{R}^n, \blacktriangleleft)$ struktúra elsőrendű elmélete eldönthető, egy, a $(\mathbb{R}, +, *, <)$ struktúrában való szemantikus interpretáció által, amelynek elmélete eldönthető (A. Tarski közismert eredménye). $n > 2$ esetén a $(\mathbb{Q}^n, \blacktriangleleft)$ struktúra elsőrendű elméletének eldönthetősége ma még nyitott kérdés. Az előző módszer nem működik, mert $n > 2$-re $(\mathbb{Q}^n, \blacktriangleleft)$ nem elemi része $(\mathbb{R}^n, \blacktriangleleft)$-nak.

Bármely ok-okozati összeköthetőségi reláció szerepelhet temporális logika időfolyamaként, amikor is alternativitási relációként szerepel a propozicionális modális logika Kripke-féle modelljében. Ez a felfogás V. Shehtman és R. Goldblatt cikkeiben szerepel elsőként. A [S83] and [G80] cikkekben, a $(\mathbb{R}^n, =\ll)$ feletti propozicionális modális elmélet eldönthetőnek bizonyíttatik. A $(\mathbb{R}^n, \blacktriangleleft)$ feletti propozicionális elmélet eldönthetőségének több mint 20 évig nyitott problémáját Shapirovsky and Shehtman oldotta meg ([SS03]).

Hogyha a $(\mathbb{Q}^n, \blacktriangleleft)$ $(n > 2)$ folyam propozicionális logikája iránt érdeklődünk, néhány nehézséggel szembesülünk. Például $(\mathbb{Q}^n, \blacktriangleleft)$ nem izomorf $(\mathbb{Q}^n, L_n)$-lel, ahol $(x_1, \ldots, x_n) L_n (y_1, \ldots, y_n) :\Leftrightarrow (x_1 < y_1 \wedge \ldots \wedge x_n < y_n)$. Ezért is állítottuk fentebb, hogy a $(\mathbb{Q}^n, \blacktriangleleft)$ feletti temporális logika nem modellezhető a $(\mathbb{Q}, <)$ feletti modális logikák szorzatával.

A propozicionális elméletek eldönthetőségének bizonyítása legkönnyebben azon az úton haladhat, hogy bebizonyítjuk, hogy az illető időfolyam, mint struktúra monadikus másodrendű elmélete, vagy legalább annak $\forall$-fragmentuma eldönthető. Balszerencsére, a 2. tételünk azt mutatja, hogy a $(\mathbb{Q}^n, \blacktriangleleft)$ struktúra monadikus másodrendű elméletének még a $\forall\exists$-fragmentuma sem eldönthető (ill. rekurzívan nem felsorolható), bármely $n > 1$-re, sőt, ha $n > 2$, akkor még a $\forall$-fragmentum sem axiomatizálható, csak $n = 2$ esetben. Ezt a 6. és 7. tételben bizonyítottuk. Ezeket az eredményeket a [V07a] cikkemben publikáltam. Ezek következményül adják, hogy $(\mathbb{Q}^2, \blacktriangleleft)$ feletti propozicionális temporális elméletek eldönthetők, de $(\mathbb{Q}^n, \blacktriangleleft)$ felett nem adható olyan funkcionálisan teljes temporális operátorkészlet, amely elmélete eldönthető. De ez nem zárja ki, hogy egyes operátorkészletek elmélete eldönthető legyen. Ez további kutatások tárgya lehet.

Így $(\mathbb{Q}^2, \blacktriangleleft)$ egy olyan példát szolgáltat, amikor egy struktúra monadikus másodrendű elméletének $\forall\exists$-fragmentuma nem rekurzívan felsorolható, holott a struktúra elsőrendű elmélete ω-kategorikus és végesen axiomatizálható.

A 7. tétel a $(\mathbb{R}^n, \blacktriangleleft)$ $(n > 1)$ időfolyamra is bizonyítható, olyan egyszerűsítéssel a bizonyításában, amivel az működik az $n = 2$ esetben is, azaz valósak esetén már a $(\mathbb{R}^2, \blacktriangleleft)$ monadikus másodrendű elméletének $\forall$-fragmentuma sem aximatizálható. Ezt állítja a 3. tétel. Hasonló, bár kevésbé erős eredményt lehet levonni S. Shelah [S75] cikkéből, miszerint $(\mathbb{R}, <)$ (teljes) monadikus másodrendű elmélete rekurzívan nem felsorolható. Ezt a következtetést a [GHR94] monográfia 15.5.3 tételével lehet levonni.

A 2. tétel bizonyítása hasonlóan konstruálható a (nem feltételenül monadikus) másodrendű logikai nem-axiomatizálhatósági bizonyításokhoz, kivéve a bináris relációk használatát. Ezt pótlandó, néhány téridő-geometriai objektumot és relációt definiálunk a másodrendű elméletünkben, ami párosítást és más objektumokat enged szimulálni, amik a bináris relációk reprezentálását segítik elő. A 7. tétel bizonyítása bonyolultabb. Új definíciókat fejlesztettem ki a $(\mathbb{Q}^n, \blacktriangleleft)$ struktúra elsőrendű elméletében – a leginkább figyelemreméltót a térszerű lineáris közrefogás (spacelike betweenness) relációja számára –, és egy olyan elsőrendű formulát, amelyik pótolja a 2. tétel másodrendű feltételét.

Megjegyezzük, hogy a 1. és 2. számú tételek nem felelegesek, bár, ha $n > 2$, részesetei a 7. tételnek. Az előbbiek érvényesek $(\mathbb{Q}^2, \blacktriangleleft)$-re is. Ha ez a szituáció, akkor értelmesnek láttam a 7. tétel bizonyítását mint az előző kettő bizonyításának finomítását megépíteni.

A másodrendű logikáról szóló eredményeim a [V07a] közleményben találhatók meg, amelyet a Journal of Philosophical Logic c. folyóiratban közlésre elfogadtak.

A monadikus másodrendű logikáról szóló áttekintés után figyelmünket az elsőrendű spatio-temporális elméletek irányába fordítjuk. A [V07c] és [V07b] írásokban (8–11. tételek) $(\mathbb{Q}^n, \blacktriangleleft)$ és $(\mathbb{R}^n, \blacktriangleleft)$ struktúrák, mint időfolyamok feletti elsőrendű temporális elméletekre vonatkozó axiomatizálhatósági kérdéseket válaszoltunk meg. Megállapítjuk, hogy $(\mathbb{Q}^2, \blacktriangleleft)$ felett minden elsőrendű temporális elmélet axiomatizálható, de $(\mathbb{F}^n, \blacktriangleleft)$ felett nem, ha $\mathbb{F} = \mathbb{Q}$ és $n > 2$ vagy $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ és $n \geqslant 2$. Exra technikai hozzájárulásként, egy szélsőségesen egyszerű elsőrendű szignatúra felett bizonyítunk, amely csak egyetlen egyváltozós predikátumjelet tartalmaz, még egyenlőségjelet sem.

A fenti eredmények azt imlikálják, hogy $(\mathbb{Q}^n, \blacktriangleleft)$ elsőrendű elmélete nem rekurzívan felsorolható vagy nem ω-kategorikus. Kevéssé plauzibilis, hogy bár ω-kategorikus de nem rekurzívan felsorolható, mindenesetre bizonyítás nélkül nem tudhatjuk. A 12. tételben bebizonyítjuk, hogy tényleg nem ω-kategorikus. A disszertáció spatio-temporális részét az axiomatizálható spatio-temporális elmélet (10. tétel) egy gyakorlati felhasználásának demonstrálásával fejezzük be.

1.3. Tételek monadikus másodrendű elméletekről

Legyen $x = (x_1, \ldots, x_n), y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$. Ekkor $(x \blacktriangleleft y)$-t úgy definiáljuk, mint $\mu(x, y) > 0 \wedge x_1 < y_1$ fennállását, ahol μ jelöli a Minkowski-féle távolságot. Amint már jeleztük, ez a reláció az irányított anyagi ok-okozati összeköthetőséget fejezi ki, más szóval azt, hogy y az x felső fénykúpjában helyezkedik el, azaz, lehetséges az, hogy x a fénynél lassabb jelet küldjön y-nak.

A formális definíciókat hely híján nem idézem a disszertációból. Csak azt ismétlem meg, hogy egy $\mathcal{T}$ struktúra monadikus másodrendű elméletét $MSOTH(\mathcal{T})$-val jelöljük és akkor hívjuk axiomatizálhatónak, ha rekurzívan felsorolható.

Az első eredményünk:

TÉTEL 1. [V00], [V07a] Egyetlen $n > 1$-re sem axiomatizálható $MSOTH(\mathbb{Q}^n, \blacktriangleleft)$.†

A bizonyítás alaposabb elemzésével megmutatjuk, hogy

TÉTEL 2. [V00], [V07a] Egyetlen $n > 1$-ra sem axiomatizálható az $MSOTH(\mathbb{Q}^n, \blacktriangleleft)$ elméletnek már a $\forall\exists$-fragmentuma sem.†

A bizonyítás $\mathbb{R}^n$-re való egyszerűsítésével kapható:

TÉTEL 3. [V07a] Egyetlen $n > 1$-re sem axiomatizálható már a $\forall$-fragmentuma sem az $MSOTH(\mathbb{R}^n, \blacktriangleleft)$ elméletnek.†

J. van Benthem bizonyította:

TÉTEL 4. [B83] $(\mathbb{Q}^2, \blacktriangleleft)$ elsőrendű elmélete ω-kategorikus és rekurzívan felsorolható.†

[V07a]-ben tettünk egy hasznos megfigyelést:

TÉTEL 5. Ha egy megszámlálható $(T, \prec)$ időfolyam elsőrendű elmélete ω-kategorikus és rekurzívan megszámlálható, akkor másodrendű monadikus elméletének $\forall$-fragmentuma axiomatizálható.†

Az előző kettőből jön:

TÉTEL 6. [V07a] $MSOTH(\mathbb{Q}^2, \blacktriangleleft)$ $\forall$-fragmentuma axiomatizálható.†

Egy bonyolultabb konstrukcióval bizonyítható, hogy

TÉTEL 7. [V07a] Ha $n > 2$, akkor a $MSOTH(\mathbb{Q}^n, \blacktriangleleft)$ elmélet $\forall$-fragmentuma sem axiomatizálható.†

1.4. Tételek elsőrendű temporális és spatio-temporális elméletekről

$\mathtt{Th}_L^{Op}(\mathcal{T})$ jelölje a $\mathcal{T}$ időfolyam elsőrendű temporális elméletét az L szignatúrával és az Op temporális operátorkészlettel. Az ezt megelőző definíciók a disszertációban találhatók. Axiomatizálhatóság alatt ismételten rekurzív felsorolhatóságot értünk.

GA fogja jelölni a jövőre vonatkozó univerzális modalitást, ami azt fejezi ki, hogy *A a jövőben végig igaz*, míg NA intuitív jelentése az, hogy *A minden téridőpontban teljesül, kivéve esetleg a mostanit.*

A tételeinkben az az L szignatúra szerepel, amiben egyetlen 1-argumentumú predikátumjel van és még egyenlőségjel sincs. Ennél kisebb kifejező erejű elsőrendű szignatúra nincs.

TÉTEL 8. [V01], [V07c] Legyen $n > 2$. Ekkor $\mathtt{Th}_L^{GN}(\mathbb{Q}^n, \blacktriangleleft)$ nem axiomatizálható.†

Ez érdekes lehet a következő tételekkel kontrasztban.

TÉTEL 9. [V07c] Legyen $n \geqslant 2$. Ekkor $\mathtt{Th}_L^{GN}(\mathbb{R}^n, \blacktriangleleft)$ nem axiomatizálható.†

TÉTEL 10. [V00], [V07b] $\mathtt{Th}_S^{Op}(\mathbb{Q}^2, \blacktriangleleft)$ axiomatizálható, tetszőleges Op operátorkészlettel és tetszőleges S szignatúrával.†

Ennek a tételnek a bizonyítása J. van Benthem tételén (4) és a következő megfigyelésen alapszik. Emlékeztetünk, hogy egy struktúrát akkor hívunk ω-kategorikusnak, ha izomorfizmus erejéig csupán egyetlen megszámlálható modellje van.

TÉTEL 11. [V07b] Ha egy megszámlálható $(T, \prec)$ időfolyam elsőrendű elmélete ω-kategorikus és rekurzívan megszámlálható, akkor bármely Op temporális operátorkészlet és bármely S szignatúra esetén $\mathtt{Th}_L^{Op}(T, \prec)$ axiomatizálható.†

Az előző tételből az következik, hogy ha $n > 2$, akkor $(\mathbb{Q}^n, \blacktriangleleft)$ elsőrendű elmélete vagy nem rekurzívan felsorolható, vagy nem ω-kategorikus, vagy egyik sem.

TÉTEL 12. $(\mathbb{Q}^n, \blacktriangleleft)$ elsőrendű elmélete nem ω-kategorikus, ha $n > 2$.†

Nem ismeretes számunkra olyan nem-axiomatizálhatósági bizonyítás a valósak feletti elsőrendű temporális logika esetén, amelyik monadikus szignatúrát használ, egyenlőségjel nélkül. Ebből az okból kifolyólag bebizonyítjuk még a következőt:

TÉTEL 13. $\mathtt{Th}_L^{G}(\mathbb{R}, <)$ nem axiomatizálható.†

2. Tételek az általánosított intervallum-értékű számításokról

A disszertáció második részében két érdekes eredményünket ismertetjük egy újonnan keletkező nem-klasszikus számítási elméletetről. Az [N05b] konferenciaközleményben Nagy Benedek egy új, diszkrét idejű/folytonos tárú számítási modellt javasolt, az ún. általánosított intervallum-értékű számítást. Ez a hagyományos Neumann-Turing-féle modellhez képest másféle idealizációt vezetett be: nem az a helyzet ez esetben, hogy a memóriacellák mindegyikének mérete univerzálisan korlátozott mértékű információt hordozhat, hanem, a memóriacellák információtartalma emelhető bármely határ fölé. A cellák tartalma 1-dimenziós folytonos adat, konkrétan, a [0,1) intervallum bizonyos részhalmazai a lehetséges értékek, még közelebbről, [)-típusú intervallumok véges uniói. Ez a rendszer rokon a [WN05] cikkben bevezetett optikai kiszámítási modellel.

Dióhéjban, az általánosított intervallum-értékű számítások a $\left[0, \frac{1}{2}\right)$ intervallumértékből kiindulva kezdenek el dolgozni és munkájuk bizonyos operátorok véges számú alkalmazásából áll. Ezen operátorok alkalmazása szekvenciális és determinisztikus. Az operátorok a szokásos számítógépek véges bitsorozatain elvégzett szokásos műveletek általánosításai az intervallum-értékekre, a Boole-műveletek mellett a balra és jobbra eltolás műveletei jelennek meg. Egyetlen extra operátor ehhez képest az ún. fraktálszorzat, amelynek szerepe, hogy különböző rezolúciós szinten lévő intervallum-értékeket kössön össze. Alapvetően, rokon az optikai számítások ([WN05]) zoom műveletével, kicsinyíti az intervallum-értékeket, bár a definíció ennél kissé összetettebb.

Ebben a számítási rendszerben a Turing-paradigma egy lényeges megszorítását elengedtük: nincs limit az adott számításban megjelenő cellák információtartalmának méretére. Mivel intervallumok véges uniójáról van szó, ezért az ábrázolt információ mindig véges. Természetesen, egy adott számításban mindig létezik egy felső korlát (a számítási sorozat bitsúlya) Így a modellünk a Church-Turing tézis kereteit nem feszíti szét, de más limitációk hatálya alá esik, mint a klasszikus Turing-modell. Bár a számítási folyamat szekvenciális, a belső párhuzamosság szélesebb.

Egy nyelvet akkor mondunk *általánosított intervallum-számítással eldönthetőnek*, ha van olyan (klasszikus) algoritmus, amely minden bemenő szóhoz produkál egy olyan általánosított intervallum-értékű számítási sorozatot, amely akkor és csakis akkor eredményezi az üres intervallumértéket, ha a szó benne van a vizsgált nyelvben. Ez a definíció triviálisan a rekurzív nyelveket írja le. Az viszont érdekes, ha polinomiális/lineáris megszorítást teszünk a produkált intervallum számítási sorozatra, valamint az azt kiszámító algoritmus tárigényére logaritmikus megszorítást teszünk. Az ilyen nyelveket *polinomiális/lineáris általánosított intervallum-számítással eldönthetőnek* nevezzük.

Amint az eredményeink mutatni fogják, az intervallum-értékű számítások a polinomiális tárral megoldható problémák megoldására hivatottak. A dolgozatban először az általánosított intervallum-értékeket és a számításokat magyarázzuk meg. Ezen fogalmak a [N05b] cikk fogalmainak formalizálásával és elemzésével alakultak ki. Abban a SAT probléma került megoldásra egy lineáris intervallum-értékű számítással, és az a kérdés került nyilvánosságra, hogy van-e olyan $PSPACE$-teljes probléma, ami szintén megoldható lineáris intervallum-értékű számítással. Nagy Benedekkel közös konferenciacikkünkben [NV06] ezt a kérdést jóváhagyólag válaszoltuk meg: a kvantifikált propozicionális formulák igazságának problémáját sikerült ilyen számítással megoldani, amely probléma $PSPACE$-teljes.

TÉTEL 14. [NV06] Van olyan $PSPACE$-teljes nyelv, amelyik eldönthető lineáris általánosított intervallum-értékű számítással.†

Megfigyelve a fenti számítások szintaktikus tulajdonságait, a Theoretical Computer Science folyóiratban megjelent cikkünkben [NV07] intervallum-értékű számítások olyan szintaktikus osztályát határoztuk meg, amely által polinomiális intervallum-értékű számításokkal eldönthető nyelvek osztálya egybeesik $PSPACE$-szel. Ezen megszorítás a következő: a fraktálszorzat egyik oldalán mindig a [0,1/2) kezdő intervallum-értéknek kell állnia. Ezen állítás céljából egy konkrét polinomiális tárú rekurzív algoritmust adtunk arra, hogy eldöntse, adott intervallum-értékű számítási sorozat elfogadó-e.

TÉTEL 15. [NV07] A megszorított értelemben vett polinomiális intervallum-számítások éppen a $PSPACE$-beli nyelveket képesek eldönteni. †

Az utolsó tartalmi fejezetben egy lehetséges kapcsolatot építünk ki az intervallum-értékű számítások és az intervallum temporális logika között. Közelebbről, az imént említett konkrét algoritmust úgy értelmezzük, mint eldöntő algoritmust az intervallum temporális logika formuláinak bizonyos szintaktikus részosztálya számára.

On these pages I give a summary on my investigations into two recently flourishing areas of non-classical logic, namely, spatio-temporal logic and interval-valued logic. In both cases, my aim is to explore areas that are interesting for formalization of analog (in the sense of non-digital) computation processes.

3. Background and new developments in temporal and spatio-temporal theories

3.1. Temporal logic

Temporal logics nowadays are widely used in the theory of specification and verification of computational systems, they provide tools for formulating and proving dynamic properties of computational devices, either software or hardware. It is also possible to write specifications in a temporal logic language directly and to allow an automated process to plan and construct an appropriate computing device. Temporal logics built on a first-order signature have significantly greater expressive power than logics based on a propositional one. However, the price of this power is non-axiomatizability, at least in the case of most of these theories. Here and in what follows we understand *axiomatizability* of a theory as its recursively enumerability.

The first-order temporal logics over classical structures as time flow (like $(\mathbb{N}, <)$, $(\mathbb{Z}, <)$, $(\mathbb{R}, <)$) are usually not axiomatizable. This is a well-known fact, which was observed first by D. Scott. M. Reynolds [R96] axiomatized first-order temporal theory over $(\mathbb{Q}, <)$ with the temporal operators $Until$ and $Since$ and proved its completeness in quite a novel way. In Theorem 11 we present a short argument for the axiomatizability of first-order temporal theories with arbitrary temporal connectives over $(\mathbb{Q}, <)$. $Until$ and $Since$ cannot express arbitrary temporal connectives over this time flow ([**?**]), hence this result strengthens the result of [R96]. A general and simple reason of axiomatizability of a first-order temporal theory is the recursive axiomatizability and ω-categoricity of the first-order theory of the underlying time flow structure. However, due to its generality, this method does not provide an explicit axiom system in terms of axioms and deduction rules. This method is our first – quite modest – contribution to the development of *linear time* first-order temporal logic. It constitutes a part of [V07b] and was presented in [V00].

What can be more relevant is that our proof method for non-axiomatizability of some first-order spatio-temporal theories over $(\mathbb{Q}^n, \blacktriangleleft)$ $(n > 2)$

can be modificated to prove that a first-order temporal theory with a very basic first-order signature (only one monadic predicate without equality) over $(\mathbb{R}, <)$ is not axiomatizable (Theorem 13). We do not know any proofs for this in the literature. The presented non-axiomatizability proofs utilize a three-argument signature or are not valid for $(\mathbb{R}, <)$ ([GHR94], [HWZ00], [Me92]).

3.2. Spatio-temporal logic

What can temporal logic offer to designers of mobile distributed computing systems? Apart from having dynamics in time, these systems have dynamics in space, too. To cover this area, an analogue of temporal logic has been developed, which is usually called spatio-temporal logic. The need for appropriate knowledge representation systems has generated a big boom of investigations into this direction in the past ten years. One way to follow this is to combine a spatial language with a temporal language in such a way that in the hybrid language there are separate modalities for time and space. This idea originated from research on multi-dimensional modal logics. In this formalization there are separate modalities for space and time. In advance, we assert that our non-axiomatizability results on $(\mathbb{Q}^n, \blacktriangleleft)$ and $(\mathbb{R}^n, \blacktriangleleft)$ $(n > 2)$ are not consequences of non-axiomatizability results on multi-modal logics over $(\mathbb{R}, <)$ or on products of modal logics over that time flow.

There is another long-standing tradition to deal with time and space, namely to speak jointly about spacetime and use its geometrical relations and objects to express various properties of the dynamics of processes in spacetime. Assuming that these processes have no synchronized time one come to consider hyperbolic geometry of Minkowski spacetime, as in the works of F. Mattern ([Ma92], [CM96]). He proposed investigating so-called causal accessability relations of spacetime from the viewpoint of specification and verification of distributed computing. In the present introduction we will distinguish five relations related to causality: $(x \blacktriangleleft y)$ for pure material causal connectability usually called chronological accessability, while $(x \triangleleft y)$ for optical accessability, $(x \ll y)$ for the disjunction of the previous two, $(x =\!\ll y)$ for $(x \ll y \vee x = y)$ and finally $(x =\!\blacktriangleleft y)$ stands for $x \blacktriangleleft y \vee x = y$. Exact definitions will be given when our theorems are developed.

A theory of the causal relation $\ll$ of spacetime was axiomatized as early as in 1914 by A. Robb [R14] and later on similar results were obtained among others by B. Mundy and J. P. Ax ([M86a], [M86b], [A78]). R.

Goldblatt elaborated the first-order theory of some spacetime relations – including causal relations – in [G87] and [G89].

The monumental work of Hajnal Andréka and I. Németi on first-order logic of relativity was a primary motivation to start with investigation of first-order spatio-temporal theories. [AMN04]

As one can prove non-axiomatizability of a temporal logic over time flow $(\mathbb{R}, <)$ it does not seem much harder to refute axiomatizability over $(\mathbb{R}^n, \blacktriangleleft)$. Nevertheless it is not a trivial consequence of non-axiomatizability results on first-order temporal theories over $(\mathbb{R}, <)$, especially for our monadic base first-order signature, as in our Theorem 9.

We can draw the lesson from this, that we cannot hope to find any axiomatizable first-order temporal logic over the real spacetime. Only a restricted fragment of first-order temporal logic, the so-called monodic fragment is decidable. ([HWZ00]). J. van Benthem drew attention to the spacetime flow $(\mathbb{Q}^n, \blacktriangleleft)$ $(n > 1)$ in [B83]. At least for $n = 2$, he proved that its first-order theory is ω-categorical (countably categorical), finitely axiomatizable and consequently, complete and decidable. Further, that $(\mathbb{Q}^2, \blacktriangleleft)$ is an elementary substructure of $(\mathbb{R}^2, \blacktriangleleft)$ so their first-order theories coincide. Anyway, the first-order theory of $(\mathbb{R}^n, \blacktriangleleft)$ $(n > 1)$ is decidable through semantic interpretation into the first-order theory of $(\mathbb{R}, +, *, <)$, which is known to be decidable by a well-known result of A. Tarski. To the best of our knowledge, for $n > 2$, the decidability of the first-order theory of $(\mathbb{Q}^n, \blacktriangleleft)$ has neither been proved nor disproved. The previous method does not work, since for $n > 2$, $(\mathbb{Q}^n, \blacktriangleleft)$ is not an elementary substructure of $(\mathbb{R}^n, \blacktriangleleft)$.

Any causal accessability relation of spacetime can be considered to be a generalization of time flows in temporal logic, when it serves as an alternativity relation of a Kripke frame for propositional modal logic as it was done first by V. Shehtman and R. Goldblatt, independently. In [S83] and [G80], modal logic of $(\mathbb{R}^n, =\!\ll)$ was proved to be decidable. The more than 20-year-long open problems of decidability and axiomatization of modal logic of the frame $(\mathbb{R}^n, \blacktriangleleft)$ were solved by Shapirovsky and Shehtman ([SS03].

Now, if we are interested in the propositional modal logic of the frame $(\mathbb{Q}^n, \blacktriangleleft)$ $(n > 2)$ then we face difficulties at this point. $(\mathbb{Q}^n, \blacktriangleleft)$ is no more isomorphic to $(\mathbb{Q}^n, L_n)$ where $(x_1, \ldots, x_n) L_n (y_1, \ldots, y_n) :\Leftrightarrow (x_1 < y_1 \wedge \ldots \wedge x_n < y_n)$. So this modal logic cannot be regarded as a product of modal logics of the frame $(\mathbb{Q}, <)$.

We have some methods of proving the decidability of modal and temporal logics. The most popular one is to prove that the monadic second-order theory of the time flow structure is decidable. Unfortunately, in Theorem 2 is shown that even the $\forall\exists$-fragment of monadic second-order theory of $(\mathbb{Q}^n, \blacktriangleleft)$ is not recursively enumerable (therefore not decidable), for all $n > 1$. We measure here the quantifier complexity of subset quantifications only. What is more, in Theorem 6 and 7 we prove that the $\forall$-fragment of this theory is recursively enumerable if and only if $n = 2$. It implies that propositional temporal theories over $(\mathbb{Q}^2, \blacktriangleleft)$ are decidable but one cannot give a complete axiomatization of a propositional temporal logic over $(\mathbb{Q}^n, \blacktriangleleft)$ (($n > 2$) with an expressively complete temporal operator set. However it does not exclude axiomatizations with some specific temporal operator set. It remains the subject of further investigations.

Thus, $(\mathbb{Q}^2, \blacktriangleleft)$ shows an interesting example when the ($\forall\exists$-fragment of) the monadic second-order theory of a structure with ω-categorical and finitely axiomatizable first-order theory is not recursively enumerable.

Theorem 7 is valid, with a little simplification in the proof, for the monadic second-order theory of $(\mathbb{R}^n, \blacktriangleleft)$ $(n > 1)$, too. This is stated in Theorem 3. One can conclude a similar but weaker result also from S. Shelah's paper [S75] that states the (full) monadic second-order theory of $(\mathbb{R}, <)$ to be not recursively enumerable. This conclusion can be drawn by Lemma 15.5.3 (p. 567) of [GHR94]. However, our theorem strengthens this result by establishing non-axiomatizability even for the $\forall$-fragment of the monadic second-order theory of $(\mathbb{R}^n, \blacktriangleleft)$ $(n > 1)$.

Theorem 2 can be proven according to the non-axiomatizability proofs in second-order logics (not restricted to be monadic), except for the absence of binary relations. To cope with this, we introduce some spacetime geometric objects to make possible pairing and other constructions assisting the representation of binary relations on nonnegative integers. The proof of Theorem 7 is more difficult. We have developed new definitions for some spacetime geometrical relations in the first-order theory of $(\mathbb{Q}^n, \blacktriangleleft)$ – the most remarkable being for spacelike betweenness – and made a first-order formula which substitutes the second-order condition of the proof of Theorem 2.

We note that Theorem 1 and 2 are not superfluous, although, if $n > 2$, they are partial cases of Theorem 7. Nevertheless, they were separately stated and proved, because they are valid also for the case $(\mathbb{Q}^2, \blacktriangleleft)$. If such a situation occurs, then it seems reasonable to construct the proof of Theorem 7 as a modification of the proof for the mentioned two theorems.

The results on monadic second-order theories appear in my paper [V07a] which is accepted for publication in Journal of Philosophical Logic.

After surveying the new results on monadic second-order theories, we turn to first-order spatio-temporal theories. In [V07c] and [V07b] (Theorem 8–11) we obtain axiomatizability results on first-order spatio-temporal theories of $(\mathbb{Q}^n, \blacktriangleleft)$ and $(\mathbb{R}^n, \blacktriangleleft)$. Based on similar spacetime geometric considerations, we establish that all first-order spatio-temporal theories are axiomatizable over $(\mathbb{Q}^2, \blacktriangleleft)$ but not over $(\mathbb{F}^n, \blacktriangleleft)$ if $\mathbb{F} = \mathbb{Q}$ and $n > 2$ or $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ and $n \geqslant 2$. As an extra technical contribution, we develop our non-axiomatizability results for a very simple first-order signature, namely, we allow only one unary predicate symbol, without the equality.

The above results implies that the first-order theory of $(\mathbb{Q}^n, \blacktriangleleft)$ is either not recursively enumerable or not ω-categorical. It is hardly plausible that the latter holds but it has to be proved. We do this after the non-axiomatizability proofs (Theorem 12).

We close the spatio-temporal part of the theses with demonstrating the usefulness of our axiomatizable spatio-temporal logic (provided by Theorem 10) by showing the expressive power of this logic. We formalize a relevant property of distributed computing systems of mobile agents in it. This is a part of the paper [V07b].

3.3. Theorems on monadic second-order theories

For $x = (x_1, \ldots, x_n), y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, we write $(x \blacktriangleleft y)$ for $\mu(x, y) > 0 \wedge x_1 < y_1$ where μ denotes the Minkowskian distance.

In this summary, we have no space to give the formal definitions concerning monadic second-order formulae and interpetations. For the details the reader has to consult the dissertation itself. We just remind the reader that the monadic second-order theory of a structure $\mathcal{T}$ is denoted by $MSOTH(\mathcal{T})$ which consists of monadic second-order formulae satisfied in every monadic second-order interpretation over $\mathcal{T}$. We repeat that we call a theory *axiomatizable* if and only if it is recursively enumerable.

Our first result can be formulated as

Theorem 1. [V00], [V07a]
For any $n > 1$, $MSOTH(\mathbb{Q}^n, \blacktriangleleft)$ is not axiomatizable. †

By a deeper complexity analysis of the previous proof we can also show

Theorem 2. [V00], [V07a]
For any $n > 1$, not even the $\forall\exists$-fragment of $MSOTH(\mathbb{Q}^n, \blacktriangleleft)$ is axiomatizable. †

By adopting our proof to $\mathbb{R}^n$ and carrying out the needed simplification, we get

Theorem 3. [V07a]
For any $n > 1$, not even the $\forall$-fragment of $MSOTH(\mathbb{R}^n, \blacktriangleleft)$ is axiomatizable. †

J. van Benthem established the following theorem.

Theorem 4. [B83]
The first-order theory of $(\mathbb{Q}^2, \blacktriangleleft)$ is both ω-categorical and recursively enumerable. †

We made a useful note with the aim to utilize the previous theorem in [V07a].

Theorem 5. *For any countable time flow $(T, \prec)$, if its first-order theory is ω-categorical and recursively enumerable then the $\forall$-fragment of $MSOTH(T, \prec)$ is also axiomatizable.* †

From the two previous items we conclude

Theorem 6. [V07a]
The $\forall$-fragment of $MSOTH(\mathbb{Q}^2, \blacktriangleleft)$ is axiomatizable. †

By a more sophisticated argument than the provided one for the $\forall\exists$-fragment, we can also prove

Theorem 7. [V07a]
For $n > 2$, not even the $\forall$-fragment of $MSOTH(\mathbb{Q}^n, \blacktriangleleft)$ is axiomatizable. †

3.4. Theorems on first-order spatio-temporal theories

Let $\mathtt{Th}_L^{Op}(\mathcal{T})$ denote the first-order spatio-temporal theory of time flow $\mathcal{T}$ based on a signature L and a temporal operator set Op. The underlying notions can be found in the dissertation in detail. To be concise, we say a set S of temporal formulæ *axiomatizable* iff it is recursively enumerable.

Let G denote the universal modality concerning future – in an intuitive reading, it expresses that *... will hold permanently after now* and let N

denote an operator whose intuitive reading is *(... holds in every spacetime point maybe except for now).*

Signature L includes no equality symbol just one unary predicate symbol, namely, r. There is no weaker first-order signature. If we have non-axiomatizability for this signature then there is not much hope for the axiomatizability of the time flow in question.

Theorem 8. [V01], [V07c]
Let $n > 2$. $\mathtt{Th}_L^{GN}(\mathbb{Q}^n, \blacktriangleleft)$ is not axiomatizable. †

This result may be interesting in contrast with the following theorems.

Theorem 9. [V07c]
Let $n \geqslant 2$. $\mathtt{Th}_L^{GN}(\mathbb{R}^n, \blacktriangleleft)$ is not axiomatizable. †

Theorem 10. [V07b]
For any first-order signature L and arbitrary finite set of temporal operators Op, $\mathtt{Th}_L^{Op}(\mathbb{Q}^2, \blacktriangleleft)$ is axiomatizable. †

The proof of the last theorem is based on the following theorem and J. van Benthem's Theorem 4. We recall that ω-categoricity of a structure means that, up to isomorphism, its first-order theory has only one model.

Theorem 11. [V07b]
If the first-order theory of a countable time flow $(T, \prec)$ is ω-categorical and recursively enumerable, then for any first-order signature L and arbitrary finite set of temporal operators Op, $\mathtt{Th}_L^{Op}(T, \prec)$ is axiomatizable. †

From the previous theorem, the first-order theories of $(\mathbb{Q}^n, \blacktriangleleft)$ $(n > 2)$ are either not ω-categorical or not recursively enumerable. It is hard to imagine it to be ω-categorical without being recursively enumerable. But it has to be proved.

Theorem 12. The first-order theory of $(\mathbb{Q}^n, \blacktriangleleft)$ is not ω-categorical if $n > 2$.

We do not know any proofs of non-axiomatizability of a first-order temporal logic over the reals with a monadic signature. For this reason we give

Theorem 13. $\mathtt{Th}_L^G(\mathbb{R}, <)$ is not axiomatizable.

4. Interval-valued computations

In the second half of the dissertation we give two interesting results on a newly arisen non-classical computational theory. In the conference paper [N05b], Benedek Nagy proposed a simple discrete time / continuous space computational model, the so-called interval-valued computing. It involves another type of idealization – the density of the memory can be raised unlimitedly instead of its length. This new paradigm keeps some of the features of the traditional Neumann-Turing type computations. It works on 1-dimensional continuous data, namely, on specific subsets of the interval $[0,1)$, more specifically, on finite unions of [)-type subintervals. This system is similar to the optical computing in [WN05] in some features.

In a nutshell, interval-valued computations start with $\left[0,\frac{1}{2}\right)$ and continue with a finite sequence of operator applications. They work sequentially in a deterministic manner. The allowed operations are motivated by the classical operations on finite bit sequences in traditional computers: Boolean operations and shift operations. There is only an extra operator, the product. The role of the introduced product is to connect interval-values on different 'resolution levels'. Essentially, it shrinks interval-values. So, in interval-valued computing systems, an important restriction is eliminated, i.e. there is no limit on the number of bits of a cell in the system; we have to suppose only that we always have a finite number of bits. Of course, in the case of a given computation an upper bound (the bit height of the computation sequence) always exists, and it gives the maximum number of bits the system needs for that computation process. Hence our model still fits into the framework of the Church-Turing paradigm, but it faces different limitations than the classical Turing model. Although the computation in this model is sequential, the inner parallelism is extended. One can consider the system without restriction on the size of the information coded in an information unit (interval-value). It allows to increase the size of the alphabet unlimitedly in a computation.

A language is said to *decidable by interval-valued computations* iff there exists an algorithm that for every word produces an interval-valued computation sequence such that this sequence ends with the empty interval-value if and only if the word is in the language. Polynomial/linear decidability constrains the length of the produced computation and the memory size of the algorithm producing it, too.

As our results will show, interval-valued computations are suitable for dealing with polynomial space problems. First, interval-values and interval-valued computations are explained based on conference paper [N05b].

In that paper, the problem SAT was solved by a linear interval-valued computation and the question was posed, whether there are $PSPACE$-complete problems decidable by linear interval-valued computations. In conference paper [NV06] we answer this question in the affirmative, namely, we prove it for $QSAT$, the problem whether a quantified propositional formula is true or false.

Theorem 14 ([NV06]). There is a $PSPACE$-complete language which can be decided by a linear inter-valued computation.

By observing the needed syntactical power in the above mentioned computations, in our paper [NV07] we also have determined a natural syntactic class of interval-valued computations that the resulting class of decided problems coincides with $PSPACE$. We have given a concrete algorithm for this purpose.

Theorem 15 ([NV07]). The class of languages decidable by a restricted polynomial interval-valued computation coincides with $PSPACE$.

Finally, in the last section we construct a connection of interval-valued computations to interval temporal logic. More specifically, we interpret the developed interval-valued computation as a deciding algorithm for a specific class of interval temporal formulae.

References (cited in this summary)

Hivatkozások

[AMN04] H. Andréka, J.X. Madarász, I. Németi: *Logical analysis of relativity theories.* in: First-order logic revisited, Hendricks et all. eds, Logos Verlag, Berlin, 2004, http://www.math-inst.hu/pub/algebraic-logic/foundrel03nov.html.

[A78] James P. Ax: *The elementary foundations of spacetime.* Found. Phys. 8/7-8(1978):507–546.

[B83] J. van Benthem: *The logic of time.*, Reidel, Synthese Library 156, 1983.

[CM96] B. Charron-Bost, F. Mattern, Tel: *Synchronous, asynchronous and causally ordered communication.* Distributed Computing 9(1996):173–191.

[GHR94] D. Gabbay, I. Hodkinson, M. Reynolds: *Temporal logic.* Clarendon Press, 1994.

[GG01] D. M. Gabbay, F. Guenthner (szerk.) *Handbook of Philosophical Logic, Volume 3*, 2nd ed., 2001, Springer, ISBN: 0-7923-7160-7.

[G80] R. Goldblatt: *Diodorean modality in Minkowski space.* Studia Logica 39(1980):219–236.

[G87] R. Goldblatt: *Orthogonality and spacetime geometry.* Springer, 1987.

[G89] R. Goldblatt: *First-order spacetime geometry.* in: Logic, methodology and philosophy of science, VIII (Moscow, 1987) pp.303–316, Stud. Logic Found. Math. 126, North-Holland, 1989.

[HWZ00] I. Hodkinson, F. Wolter, M. Zakaryashev: *On decidable fragments of first-order temporal logics.* Annals of Pure and Applied Logic 106(2000):85-134.

[Ma92] F. Mattern: *On the relativistic structure of logical time in distributed systems.* in: Informatik pp. 309–331, Teubner Texte zur Informatik, Stuttgart, 1992.

[Me92] S. Merz: *Decidability and incompleteness results for first-order temporal logics of linear time*, Journal of Applied Non-classical Logic 2(1992):1–15.

[M86a] B. Mundy: *The physical content of Minkowski geometry.* British J. of Philos. Sci. 37/1(1986):25–54.

[M86b] B. Mundy: *Optical axiomatization of Minkowski space-time geometry.* Philos. Sci. 53/1(1986):1–30.

[N05b] Nagy, B. *An Interval-valued Computing Device*, in: "Computability in Europe 2005: New Computational Paradigms, (eds. S. B. Cooper, B. Löwe, L. Torenvliet), ILLC Publications X-2005-01, Amsterdam, pp. 166–177.

[NV06] Nagy, B., Vályi S. *Solving a PSPACE-complete problem by a linear interval-valued computation*, in: Proc. of Conf. "Computability in Europe 2006: logical approaches to computational barriers" CiE2006, Swansea.

[NV07] Nagy, B., Vályi S. *Interval-valued computations and their connection with PSPACE*, Theoretical Computer Science 394(2008):208-222.

[NASA] *Formal methods specification and analysis guidebook for the verification of software and computer systems.* http://eisl.jpl.nasa.gov/quality/Formal_Methods.

[P98] J. Phillips: *A note on the modal and temporal logics of n-dimensional spacetime.* Notre Dame J of Formal Logic 39/4(1998):545–553.

[R96] M. Reynolds: *Axiomatization of first-order predicate logics: Until and Since over linear time* Studia Logica 57, 1996.

[R14] A.A. Robb: *A theory of time and space.* Cambridge Uni. Press, 1914.

[SS03] I. Shapirovsky and V. Shehtman: *Chronological future modality in Minkowski spacetime.* Advances in modal logic 4(2002):437–459.

[S83] V. Shehtman: *Modal logics of domains on the real plane.* Studia Logica 42/1(1983):63–80.

[S75] S. Shelah: *The monadic theory of order.* Annals of Mathematics, 102(1975):379-419.

[V00] S. Vályi: *Axiomatization of first-order spatio-temporal logics*, Abstracts of CSCS'2000, 2nd Conf. Of PhD Students of Computer Science, Szeged

[V01] S. Vályi: *First-Order Spatio-Temporal Logic over ther Rationals is Non-Axiomatizable*, Abstracts of the Logic Colloquium of Association of Symbolic Logic, 2001, Wien

[V07a] S. Vályi: *On fragments of monadic second-order theories of the causal connectability relation*, accepted for publication in Journal of Philosophical Logic, 2007.

[V07b] S. Vályi, T. Mihálydeák: *A note on the axiomatizability of some first-order spatio-temporal logics*, submitted

[V07c] S. Vályi, T. Mihálydeák: *On the axiomatizability of some first-order spatio-temporal theories*, submitted

[WN05] Woods, D. and Naughton, T. "An optical model of computation", Theoretical Computer Science 334 (2005) 227-258.

PUBLICATIONS / PUBLIKÁCIÓK

(A MÁSODIK JEL AZOKAT A CIKKEKET ÉS ELŐADÁSOKAT JELZI, AMELYEK ANYAGA SZEREPEL A DISSZERTÁCIÓBAN, A HIVATKOZÁSI LISTÁBAN SZEREPLŐ BETŰJELÜKKEL FELTÜNTETVE)

[1] Vályi, S.: *Formal truth definition in axiomatic theories.* **Bulletins for Applied Mathematics(BAM)** 862/93(LXV), ISSN 0133-3526, pp. 319-328.

[2] Vályi, S.: *Deductio. A logical software for teaching.* **Bulletins for Applied Mathematics(BAM)** 927/93(LXIX), ISSN 0133-3526, pp. 67-76.

[3] Aszalós, L., Dragalin, A., Vályi, S.: *Logikai oktatóprogramok az automatikus tételbizonyításban (a mesterséges intelligencia kurzus számára)*, **KLTE egyetemi jegyzet**, 1995, hozzéférhető: Matematikai Intézet és IK könyvtára 21144-21154.

[4] Vályi, S., Mecsei, Z.: *A Gentzen-style extension of natural deduction - adjusted for undergraduate informatics studies*, **Informatika a felsőoktatásban 2005**, Magyar nyelvű nemzetközi konferencia kiadványa - angol nyelvű teljes cikk CD-n, 5 oldal, szerkesztette: Pethő Attila, Herdon Miklós, ISBN 963 472 909 6.

[5][NV06] Nagy, B., Vályi, S.: *Solving a PSPACE-complete problem by a linear interval-valued computation*, Proceedings of Conference **"Computability in Europe 2006: Logical Approaches to Computational Barriers"**, CiE2006, Swansea, Wales (GB), Report no. CSR-7-2006, (eds. A.Beckmann, U. Berger, B. Löwe and J.F. Tucker), pp. 216-225.

[6][NV07]TCS Nagy, B., Vályi S. *Interval-valued computations and their connection with PSPACE*, **Theoretical Computer Science** 394(2008):208-222.

[7] Nagy, B., Vályi, S.: *Interval-valued computations without the product operator*, **Proceedings of 7th International Conference on Applied Informatics**, referált konferenciakiadvány, közlésre elfogadva, 2007: 83–90.

[8][V07a] Vályi, S.: *On monadic second-order theories of the causal connectability relation*, közlésre elfogadva a **Journal of Philosophical Logic** c. nemzetközi referált folyóiratba, 12 oldal.

[9] Nagy, B., Vályi, S.: *Interval-valued computing as a visual reasoning system*, **Proceedings of 13th Int. Conf. On Distributed Multimedia Systems**, International workshop on Visual Languages and Computing 2007 (VLC2007), pp. 247-250.

[10] Nagy, B., Vályi, S.: *Visual reasoning by generalized interval-values and interval temporal logic*, **CEUR Workshop Proceedings** vol. 274- (2007), ISSN 1613-0073, pp. 13-26.

SUBMITTED / BENYÚJTVA

[V07b] Vályi, S., Mihálydeák T.: *On the axiomatizability of some first-order spatio-temporal theories*, 23 oldal.

[V07c] Vályi, S., Mihálydeák T.: *A note on first-order spatio-temporal theories*, 12 oldal.

Vályi, S., Takács, P.: *An extension of protocol verification modal logic to multi-channel protocols*, 15 oldal.

Nagy, B., Vályi, S.: *Visual reasoning and temporal logic with interval-values.*

CONFERENCE TALKS AND ABSTRACTS
KONFERENCIA-ELŐADÁSOK ÉS KIVONATOK

[1] Andréka, H., Németi, I., Madarász, X. J., Vályi, S.:
Logic, algebraic logic and relativity
Logic Extravaganza'98 Colloquium at ILLC/UvA, Amszterdam, 1998.

[2][V00] Vályi, S.:
Axiomatization of first-order spatio-temporal logics CSCS'2000, 2nd Conf. Of PhD Students of Computer Science, Szeged, 2000.

[3][V01] Vályi, S.:
First-Order Spatio-Temporal Logic over ther Rationals is Non-Axiomatizable
Abstracts of the Logic Colloquium of Association of Symbolic Logic. Bécs, 2001.

[4] Vályi, S.:
Decidability and undecidability issues in special relativity theory
János Bolyai Conf. on Hyperbolic Geometry, Budapest, 2002.

[5] Vályi, S.:
Direct refutation for the omega-categoricity of the first-order theory of a spacetime-geometrical structure
ICAI2004, 6th International Conference on Applied Informatics, Eger, 2004.

[6] Vályi, S.:
Axiomatizability questions of predicate spatio-temporal theories
Logic in Hungary'05, Budapest, 2005.

[7] Nagy, B., Vályi, S.:
Solving a PSPACE-complete problem by a linear interval-valued computation
Computability in Europe 2006: Logical Approaches to Computational Barriers - Swansea, Wales (GB), 2006.

[8] Vályi, S., Takács, P., Ködmön, J., :
Algorithmic aspects of some protocol verification logics
TatraCrypt'07, Szomolány (Smolenice, Szlovákia) 2007.

[9] Takács, P., Vályi, S.:
On Verification of the MANA Protocol Family
TatraCrypt'07, Szomolány (Smolenice, Szlovákia), 2007.

[10] Nagy, B., Vályi, S.:
Interval-valued computing as a visual reasoning system
13th Int. Conf. On Distributed Multimedia Systems - International workshop on Visual Languages and Computing 2007 (VLC2007), San Francisco Bay (CA, USA), 2007.

[11] Nagy, B., Vályi, S.:
Visual reasoning by generalized interval-values and interval temporal logic
IEEE Symposium on Visual Languages and Human Centric Computing VL/HCC-07, Workshop on Visual Languages and Logic VLL2007, Coeur d'Aléne (Idaho, USA), 2007.